

UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

Repositorio Digital USM

<https://repositorio.usm.cl>

Departamento de Arquitectura

Arq_paso

2019

COSMOLOGÍA EN GRAVEDAD AFÍN POLIMONIA

PERDIGUERO GÁRATE, JOSÉ IGNACIO

<https://hdl.handle.net/11673/48007>

Repositorio Digital USM, UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA



Universidad Técnica Federico Santa María.
Departamento de Física.

Cosmología en gravedad afín polinomial

José Perdiguero

Advisor: Oscar Castillo-Felisola

Trabajo de tesis presentado en cumplimiento parcial de los
requisitos para el grado de Magister en Ciencias, mención física,
de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Julio, 2019

TÍTULO DE LA TESIS:

COSMOLOGÍA EN GRAVEDAD AFÍN POLINOMIAL

AUTOR:

JOSÉ PERDIGUERO

Trabajo de tesis presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de Magister en Ciencias, mención física, de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN EXAMINADORA:

Oscar Castillo-Felisola (USM)

Alfonso R. Zerwekh (USM)

Iván Schmidt (USM)

Dumitru Astefanesei (PUCV)

.

10 de septiembre de 2019

Está tesis esta dedicada a mi familia, gracias por su apoyo
incondicional

Agradecimientos

Quiero agradecer al profesor Dr. Oscar Castillo-Felisola por la guía, la ayuda, la enseñanza y el conocimiento compartido conmigo durante mi estadía en el programa de magister. Gracias a su ayuda y perseverancia he podido mejorar y crecer, tanto en el ámbito académico como en el científico y personal.

También quiero agradecer al profesor Dr. Alfonso Zerwekh por tener siempre una muy buena voluntad para ayudarme con temas que no podía entender, y por sobre todo, confiar en mí. Gracias a usted estoy acá.

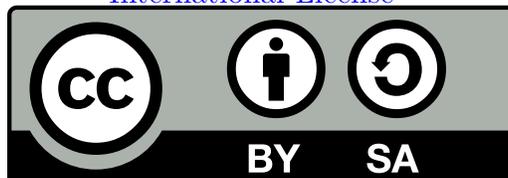
Quiero agradecer a mi familia por su apoyo incondicional, por estar ahí siempre que los necesité. También quiero agradecer a mis amigos que siempre me apoyaron he hicieron de mi estadía un lugar mejor. Finalmente quiero agradecer a Margarita, quien estuvo ahí durante todo el proceso, siempre pude contar contigo y siempre creíste en mí, aún cuando yo dudaba, gracias por todo.

Todo esto fue posible, gracias al apoyo otorgado por la Universidad Técnica Federico Santa María. Agradezco a las becas de arancel y manutención para alumnos de postgrado UTFSM que me fueron otorgadas, el proyecto PIIC 059/20128.

Resumen

La gravedad afín polinomial, es un modelo alternativo a la relatividad general de Einstein, en el cual la variedad está dotada de la conexión afín como campo fundamental y no está necesariamente definido el tensor métrico. Como consecuencia inmediata de esto, no es posible en una primera instancia definir la noción de distancia, transformar vectores en sus representaciones duales covectores y vice versa, y no es posible clasificar vectores como tipo tiempo, espacio y nulo. La acción de la gravedad afín se construye con elementos que preserven la invariancia bajo transformación de coordenadas, para esto se utiliza una técnica tipo *análisis dimensional*. Se obtienen las ecuaciones de campo para cada elemento fundamental. Estudiamos el sector del espaciotiempo sin torsión, esto conduce a una ecuación de campo, conocida como *curvatura armónica*. Para resolver la ecuación de campo construimos ansatzes compatibles con las simetrías del principio cosmológico: isotropía y homogeneidad, para esto utilizamos la derivada de Lie, y como campo vectorial usaremos los vectores de Killing asociados a los grupos de rotaciones y traslaciones espaciales. Con el fin de ejemplificar el procedimiento, encontraremos un ansatz métrico que nos conduce a la métrica de Friedmann–Robertson–Walker y después encontramos el ansatz para la conexión afín. Una vez construido los ansatz se resuelven las ecuaciones de campo para la gravedad afín, esto conduce a varios tipos de soluciones, soluciones conocidas y no conocidas en relatividad general. Para terminar se estudian las curvas auto paralelas de nuestro modelo y la factibilidad de poder utilizar el tensor de Ricci como una métrica emergente.

This work is licensed under a [Creative Commons Attribution-ShareAlike 4.0 International License](https://creativecommons.org/licenses/by-sa/4.0/)



Índice general

1. Introducción	1
2. Elementos de geometría diferencial	5
2.1. Variedades y nociones básicas	5
2.2. Objetos en las variedades	6
2.2.1. Vectores	6
2.2.2. 1-Formas	6
2.2.3. Tensores y densidades tensoriales	7
2.3. Derivada de Lie y simetrías	9
2.4. La conexión afín y la derivada de covariante	15
2.5. Curvatura	20
3. Relatividad General	23
3.1. Principio de equivalencia	23
3.2. Ecuaciones de campo de Einstein	25
3.3. La acción de Hilbert y la constante cosmológica	27
3.4. Tensor de energía-momento	29
4. Gravedad Afín Polinomial	31
4.1. La acción afín	31
4.2. Ecuaciones de campos	33
4.3. El sector libre de torsión	34
5. Los ansatz	37
5.1. Ansatz métrico	37
5.1.1. Ansatz métrico isotrópico	37
5.1.2. Ansatz métrico isotrópico y homogéneo	40
5.2. Ansatz afín	41
5.2.1. Ansatz afín isotrópica	41
5.2.2. Ansatz afín isotrópica y homogénea	46
6. Soluciones Cosmológicas	49
6.1. Soluciones métricas	49
6.1.1. Ricci plano	49
6.1.2. Ricci paralelo	50

6.1.3. Curvatura armónica	51
6.2. Soluciones afines	53
6.2.1. Ricci plano	53
6.2.2. Parametrización del Ricci: emular materia	54
6.2.3. Ricci paralelo	55
6.2.4. Curvatura armónica	57
7. Cosmología en gravedad afín	61
7.1. Curvas auto paralelas	61
7.2. Ricci como una métrica emergente	63
8. Conclusión	67
A. Análisis Dimensional	71
B. Ecuaciones de campos	73
Bibliografía	82

Introducción

En la naturaleza existen cuatro fuerzas fundamentales, la fuerza electromagnética la cual estudia las interacciones eléctricas y magnéticas, la fuerza nuclear fuerte, responsable de mantener unidos a los nucleones (protones y neutrones) que coexisten en el núcleo atómico, la fuerza nuclear débil, responsable de los fenómenos como el decaimiento radiactivo, y finalmente la fuerza gravitatoria, siendo esta última la encargada de modelar la geometría del espaciotiempo.

La ley de gravitación universal propuesta por Sir Isaac Newton [1], fue la primera teoría de la gravedad utilizada para describir los efectos del campo gravitatorio como una fuerza. La validez de esta teoría pudo ser demostrada debido a las exitosas predicciones de esta: fue posible demostrar la existencia de Neptuno a partir de las variaciones de la órbita de Urano; la descripción de la órbita de la tierra entorno al Sol. A pesar de los éxitos de la teoría newtoniana, esta presenta dos problemas fundamentales: no es una teoría invariante de Lorentz y la ecuación de Poisson no contiene derivadas temporales, esta describe un efecto gravitatorio que se propaga de forma instantánea.

La relatividad general propuesta por Einstein [2–6], es una teoría de gravitación que aborda los problemas de la teoría newtoniana utilizando elementos de geometría diferencial como lenguaje natural. Este modelo es una generalización de la relatividad especial y la ley de gravitación universal, dando una descripción geométrica de la estructura del espaciotiempo. El fundamento de esta teoría es el principio de equivalencia, este principio afirma que un sistema inmerso en un campo gravitatorio es puntualmente indistinguible de un sistema de referencia no inercial acelerado. Las ecuaciones de campo de Einstein describen la interacción gravitatoria como resultado de la curvatura en el espaciotiempo debido a la presencia de masa y energía. Las interacciones gravitacionales son mediadas por el tensor de Einstein, construido usando como campo fundamental la métrica, mientras que la materia entra en las ecuaciones de campo por medio del tensor de energía momento. El tensor métrico, es el objeto matemático que permite definir la noción de distancia y calcular la distancia entre dos puntos, este también nos permite transformar vectores en sus representaciones duales, los co-vectores y viceversa, a su vez nos otorga una manera de clasificar los vectores como tipo tiempo, nulo o espacio. Las ecuaciones de campo de Einstein, pueden ser obtenidas de distintas formas, siendo una de estas, variar la acción de Einstein-Hilbert, con respecto a la métrica. Einstein propone tres experimentos para validar su teoría [7], estos se conocen como los experimentos clásicos de la relatividad general: *(i)* la precesión de la órbita de Mercurio [6]; *(ii)* la deflexión de la luz causada por el sol [8–11], *(iii)* el corrimiento al rojo, en inglés conocido como *redshift* [12, 13]. Un trabajo muy completo que compara las predicciones teóricas de la relatividad general con los resultados experimentales se encuentra en [14].

Una de las predicciones más importantes de la relatividad general, es la existencia de las ondas gravitacionales [15]. En el año 1993 se descubrió un pulsar en un sistema estelar binario,

esto entrego la primera evidencia indirecta de la existencia de las ondas gravitacionales [16]. Finalmente, LIGO-Virgo pudieron detectar la existencia de estas ondas [17], debido a la fusión de dos agujeros negros.

La relatividad general de Einstein, es la teoría más exitosa para predecir las interacciones gravitacionales. Sin embargo este modelo no es compatible con la teoría cuántica de campos, a la fecha no es posible establecer una versión cuantica de la gravedad que sea consistente y renormalizable [18–27]. Además, de acuerdo con el modelo estándar en cosmología, la materia observada por nosotros de forma directa en el universo corresponde a aproximadamente un 4% del total de materia y/o energía que contiene el universo. Cerca de un 27% debería ser *materia oscura*, esta se comporta como materia ordinaria pero solo interactúa de forma débil con el modelo estándar. El 69% restante del universo, debería estar compuesto por la energía de vacío, llamada *energía oscura*. Esta materia y energía *oscura* no puede ser explicada de forma apropiada con el modelo estándar de cosmología.

Para poder resolver los problemas presentados por el modelo uno debe agregar *nueva física*, esto es introduciendo nuevas partículas o cambiando la teoría de la gravitación. Esta última sugiere que la teoría de la relatividad general es una teoría efectiva de la gravedad y, por lo tanto, uno debe considerar modelos alternativos o generalizaciones de esta. Un modelo alternativo es la teoría *escalar-tensor* de Brans-Dicke [28], en donde las interacciones gravitacionales son mediadas por un campo escalar junto con el tensor de Einstein, la constante de gravitación universal es reemplazada por un campo escalar. Algunas de las posibles generalizaciones son: la teoría Einstein-Cartan, esta se considera una extensión de la relatividad general que supone conexiones no simétricas, pero utilizando la misma acción [29–32]; T. Kaluza and O. Klein [33–35] fueron los primeros en proponer modelos con dimensiones extras; los modelos de Lovelock que consideran generalizaciones del tensor de Einstein [36]; los modelos de métricas-afines, en estas teorías las condiciones de metricidad y un espaciotiempo sin torsión no son consideradas [37]; el modelo de Lovelock-Cartan, este es una extensión de los modelos de Lovelock con una conexión no simétrica [38]; y muchos otros más. Es importante recalcar que en todos los modelos mencionados, la métrica juega un papel fundamental en las teorías.

Es posible construir modelos afines de gravitación pura, en estos modelos las interacciones son gobernadas por la conexión afín como campo fundamental. El primer intento de un modelo afín fue propuesto Sir A. Eddington, quien considero una acción definida por la raíz cuadrada del tensor de Ricci [39]; E. Schrödinger utilizó la conexión afín como base fundamental para definir el espaciotiempo [40]. En la actualidad existe una gran cantidad de modelos afines, donde la conexión afín se considera como el campo fundamental y es independiente de la métrica [41–45].

Nuestro modelo afín de la gravedad, utiliza como único fundamental la conexión afín, es por esta razón que el tensor métrico no está definido. La conexión afín puede ser decompuesta en sus partes irreducibles, utilizando las partes tanto simétricas como antisimétricas, ver [46–48], estos elementos son usados para construir la acción más genérica posible y que al mismo tiempo sea invariante bajo difeomorfismo. La acción de la gravedad afín polinomial presenta varias características interesantes: (i) no es posible agregar más términos a la acción, esto debido al *análisis dimensional* que se utilizó para su construcción; (ii) todos los términos y sus respectivas constantes de acoplamiento son adimensionales, esto sugiere que el modelo es conformal; (iii) en el espaciotiempo sin torsión, es posible obtener una acción efectiva compatible con los resultados clásicos de relatividad general; (iv) es una serie de potencia renormalizable, es una

condición necesaria pero no suficiente para garantizar que el modelo sea renormalizable.

Las ecuaciones de campo para la acción afín se pueden obtener utilizando el formalismo de Kijowski [49]. Estas en el espaciotiempo sin torsión, corresponden a una generalización de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío. Para encontrar las posibles soluciones, utilizamos un *ansatz* cosmológico [48], compatible con las simetrías del principio cosmológico: isotropía y homogeneidad. Estas simetrías se ven reflejadas en los vectores de Killing, sirviendo como campo de entrada para el flujo de la derivada de Lie. Existen tres familias de soluciones para las ecuaciones de movimiento: soluciones tipo: *Ricci-plano*, *Ricci-paralelo* y *curvatura armónica*.

Con el *ansatz*, se estudiarán las curvas auto-paralelas, estas corresponden a las geodésicas de relatividad general, definidas en un espacio sin métrica. Será importante ver si las geodésicas clásicas de los espacios de Friedmann–Robertson–Walker están contenidas en la gravedad afín y si es posible encontrar nuevas curvas. Cabe mencionar, que al no contar con una métrica, no nos será posible hacer la distinción entre vectores tipo tiempo, nulo o espacio. Sin embargo, si el tensor de Ricci obtenido a partir de la conexión afín es no degenerado, es posible usar este tensor como una métrica emergente y, en ese caso particular, podríamos transformar los vectores en sus representaciones duales y viceversa, y lo más importante nos permitiría clasificar vectores como tipo tiempo, espacio o nulo.

La tesis se estructura de la siguiente manera: en el capítulo 2 se desarrollan las nociones básicas de la geometría diferencial, este será el lenguaje utilizado a lo largo de esta tesis. En el capítulo 3 mostramos los principios y fundamentos de la Relatividad General, junto con la ecuación que gobierna las interacciones gravitacionales y como elaborar la teoría a nivel de acción. En el capítulo 4 mostramos como trabajar y construir la acción de la gravedad afín polinomial, utilizando una técnica tipo *análisis dimensional*. Obtenemos las respectivas ecuaciones de movimiento para el espaciotiempo sin torsión, utilizando el formalismo de Kijowski. En el capítulo 5, encontramos los dos *ansatz*: métrico y afín, compatibles con las simetrías del principio cosmológico, se presenta en detalle el procedimiento. En el capítulo 6 se buscan y estudian algunas soluciones analíticas a las ecuaciones de campo. En el capítulo 7 estudiamos las implicancias de la gravedad afín en la cosmología, por medio de las curvas auto-paralelas. Además estudiamos la posibilidad de utilizar el tensor de Ricci como una métrica emergente. Las conclusiones se encuentran en el capítulo 8. Por completitud se incluyen dos apéndices: A se muestra en detalle como generar la acción de la gravedad afín utilizando un método tipo *análisis dimensional* y en B se muestran todas las ecuaciones de movimiento para cada campo, sin la restricción del espaciotiempo libre de torsión.

Elementos de geometría diferencial

La geometría diferencial es la rama de las matemáticas encargada de generalizar las nociones y objetos definidos en un espacio plano Euclideo a un espacio curvo, es por este motivo que resulta ser el lenguaje natural de la teoría de la Relatividad General de Einstein. Este capítulo explica las ideas y principios básicos de geometría diferencial. El capítulo está basado en las referencias [40, 50–56].

2.1. Variedades y nociones básicas

Una variedad es un espacio topológico que es homeomorfo localmente a \mathbb{R}^m , sin embargo este puede ser globalmente distinto a \mathbb{R}^m . El homeomorfismo local nos permite asignar a cada punto de la variedad un set de coordenadas locales (x^1, x^2, \dots, x^m) , cuando la variedad no es homeomorfo globalmente a \mathbb{R}^m , debemos introducir varios set de coordenadas locales. Luego, es posible asignar a un punto más de dos sistemas locales de coordenadas, además requerimos que la transición de una coordenada a otra sea *suave*.

De manera formal, \mathcal{M} es una variedad diferenciable si

1. \mathcal{M} es un espacio topológico.
2. \mathcal{M} está dotado con una familia de pares (U_i, φ_i) , donde U_i es una familia de conjuntos abiertos que cubren \mathcal{M} , esto es $\cup_i U_i = \mathcal{M}$. φ_i es un mapa homeomorfo desde U_i a un subconjunto abierto U'_i de \mathbb{R}^m .
3. Dado U_i y U_j tal que $U_i \cap U_j \neq \emptyset$, el mapa $\psi_{ij} = \varphi_i \circ \varphi_j^{-1}$ desde $\varphi_j(U_i \cap U_j)$ a $\varphi_i(U_i \cap U_j)$ es infinitamente diferenciable.

El par (U_i, φ_i) se conoce como *carta* mientras que la familia completa $\{(U_i, \varphi_i)\}$ se llama *atlas*. El subset de U_i se llama *vecindad coordenada* mientras que φ_i son las coordenadas. A partir de 2, \mathcal{M} es localmente Euclideo. En cada *vecindad coordenada* U_i , \mathcal{M} es parecido a un subset abierto de \mathbb{R}^m , cuyos elementos son $\{x^1, x^2, \dots, x^m\}$. El axioma 3, nos asegura que si la intersección de U_i con U_j tiene dos o más sistemas de coordenadas asignados a un punto, entonces la transición entre un sistema de coordenadas a otro será *suave*. El mapa φ_i asigna m coordenadas x^μ ($1 \leq \mu \leq m$) al punto $p \in U_i \cap U_j$, mientras que φ_j asigna y^ν ($1 \leq \nu \leq m$) al mismo punto y la transición desde y a x viene dada por m funciones de m variables $x^\mu = x^\mu(y)$. La transformación de coordenadas es diferenciable si a cada punto $x^\mu(y)$ es diferenciable con respecto a cada y^ν .

2.2. Objetos en las variedades

Usando la definición de variedad presentada en la sección anterior, podemos definir objetos geométricos en esta, para hacer esto generalizaremos el concepto de objetos definidos en \mathbb{R}^n a una variedad.

2.2.1. Vectores

En una variedad \mathcal{M} , un vector es definido como el vector tangente a la curva γ en \mathcal{M} . Para definir un vector tangente necesitamos una curva $\gamma : (a, b) \rightarrow \mathcal{M}$ y la función $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ donde (a, b) es un intervalo abierto que contiene el punto $\lambda = p$, donde $p \in \mathcal{M}$. Definimos el vector tangente en $\gamma(p)$ como la derivada direccional de la función $f(\gamma(\lambda))$ a lo largo de la curva $\gamma(\lambda)$ en $\lambda = p$. La razón de cambio de $f(\gamma(\lambda))$ en $\lambda = p$ a lo largo de la curva es

$$\left. \frac{df(\gamma(\lambda))}{d\lambda} \right|_{\lambda=p} = \left. \frac{\partial x^\mu(\gamma(\lambda))}{\partial \lambda} \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \right|_{\lambda=p} = X^\mu \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} \right) f \Big|_{\lambda=p}, \quad (2.1)$$

donde x^μ representa las coordenadas del punto. Definimos $X^\mu = \left. \frac{\partial x^\mu(\gamma(\lambda))}{\partial \lambda} \right|_{\lambda=p}$ como los componentes del vector X y $\partial_\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ corresponde a la base. Esta definición fue construida de manera independiente de la elección de f , luego para encontrar el vector tangente a una curva cualquiera en el punto p usamos el operador X

$$X = X^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}. \quad (2.2)$$

El conjunto de curvas que pasan por el punto $p \in \mathcal{M}$ forman una clase de equivalencia, luego el conjunto de todas las clases de equivalencias de curvas para el punto p definen un espacio vectorial llamada *espacio tangente* de \mathcal{M} en p , se denota por $T_p\mathcal{M}$. Finalmente la colección de espacios tangentes asociados a cada punto perteneciente a la variedad \mathcal{M} , esto es

$$T\mathcal{M} = \coprod_{p \in \mathcal{M}} T_p\mathcal{M}, \quad (2.3)$$

se conoce como *fibrado tangente*. Para terminar, si existe una segunda carta U_j tal que $p \in U_i \cap U_j$ y p tiene coordenadas $x^{\mu'}$ en esa carta, entonces las componentes del vector $X' = X^{\mu'} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}}$ se relacionan con las primeras por medio de

$$X^{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} X^\nu. \quad (2.4)$$

Las componentes del vector son invariantes bajo transformaciones de coordenadas.

2.2.2. 1-Formas

Dado que $T_p\mathcal{M}$ es el espacio vectorial, también existe el espacio vectorial dual a $T_p\mathcal{M}$ denotado por $T_p^*\mathcal{M}$ llamado *espacio cotangente* al punto p . Un elemento $\omega \in T_p^*\mathcal{M}$ es un mapa

$\omega : T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ se conoce como vector dual, vector cotangente o, en el contexto de formas diferenciales, 1-forma. El ejemplo más simple de 1-forma es el diferencial df donde f es una función escalar. La acción de un vector V sobre f viene dado por $V[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R}$. Luego la acción de $df \in T_p^* M$ sobre $V \in T_p M$ está definido por

$$\langle df, V \rangle \equiv V[f] = V^\mu \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \in \mathbb{R}. \quad (2.5)$$

Usando coordenadas podemos escribir $df = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} dx^\mu$, de esta expresión es natural identificar a los diferenciales dx^μ como la base $T_p^* M$. La base dual satisface

$$\left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\rangle = \frac{\partial x^\nu}{\partial x^\mu} = \delta_\mu^\nu. \quad (2.6)$$

Podemos definir una 1-forma arbitraria como

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu, \quad (2.7)$$

donde ω_μ son los componentes de ω . Dado el vector $V = V^\mu \frac{\partial}{\partial x^\mu}$ y la 1-forma $\omega = \omega_\mu dx^\mu$, el producto escalar $\langle \cdot, \cdot \rangle : T_p^* M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ está definido por

$$\langle \omega, V \rangle = \omega_\mu V^\nu \left\langle dx^\mu, \frac{\partial}{\partial x^\nu} \right\rangle = \omega_\mu V^\nu \delta_\nu^\mu = \omega_\mu V^\mu, \quad (2.8)$$

es importante notar, que el producto escalar esta definido entre un vector y un vector dual, no entre dos vectores o dos vectores duales.

Al igual que los vectores, las 1-formas tienen se definen de manera independiente al sistema de referencia, para un punto $p \in U_i \cap U_j$ tenemos

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu = \tilde{\omega}_\nu dy^\nu \quad (2.9)$$

donde $x = \varphi_i(p)$ y $y = \varphi_j(p)$. A partir de $dy^\nu = \left(\frac{\partial y^\nu}{\partial x^\mu} \right) dx^\mu$, podemos encontrar la regla de transformación para las componentes de ω

$$\tilde{\omega}_\nu = \omega_\mu \frac{\partial x^\mu}{\partial y^\nu}. \quad (2.10)$$

2.2.3. Tensores y densidades tensoriales

Un tensor tipo (p, q) es un objeto multilineal construido usando el producto tensorial \otimes de p espacios tangentes q espacios cotangentes. Es un mapa de p elementos pertenecientes a $T_p^* M$ y q elementos de $T_p M$ a números reales y puede ser escrito como

$$T = T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q} \partial_{\mu_1} \otimes \partial_{\mu_2} \otimes \dots \otimes \partial_{\mu_p} \otimes dx^{\nu_1} \otimes dx^{\nu_2} \otimes \dots \otimes dx^{\nu_q}. \quad (2.11)$$

Siguiendo las reglas de transformación para vectores y 1-formas, podemos escribir la regla de transformación para tensores bajo una transformación de coordenadas

$$T^{\mu'_1 \mu'_2 \dots \mu'_p}_{\nu'_1 \nu'_2 \dots \nu'_q} = \frac{\partial x^{\mu'_1}}{\partial x^{\mu_1}} \frac{\partial x^{\mu'_2}}{\partial x^{\mu_2}} \dots \frac{\partial x^{\mu'_p}}{\partial x^{\mu_p}} \frac{\partial x^{\nu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \frac{\partial x^{\nu_2}}{\partial x^{\nu'_2}} \dots \frac{\partial x^{\nu_q}}{\partial x^{\nu'_q}} T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_q}. \quad (2.12)$$

Un tensor importante a definir, es el tensor métrico, este objeto se denota como $g_{\mu\nu}$, es simétrico y su determinante es distinto de cero, esto nos dice que es no degenerado. De esta forma podemos definir la métrica inversa $g^{\mu\nu}$ que satisface

$$g^{\mu\nu}g_{\nu\sigma} = \delta_{\sigma}^{\mu}. \quad (2.13)$$

La simetría de $g_{\mu\nu}$ implica que $g^{\mu\nu}$ también lo es. Alguna de las propiedades más interesantes de la métrica son: permite subir y bajar índices, la métrica permite definir la distancia entre dos puntos, generaliza el producto punto definido en la geometría Euclideana a un espacio curvo y permite clasificar los vectores como tipo tiempo, espacio y nulo. El elemento de línea se escribe como

$$ds^2 = g_{\mu\nu}dx^{\mu}dx^{\nu}. \quad (2.14)$$

La métrica en su forma canónica se define como

$$g_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, -1, -1, -1, \dots, +1, +1, +1, \dots, +1). \quad (2.15)$$

En n dimensiones en la variedad, s corresponde al número de $+1$ en su forma canónica y t al número de -1 , luego $s-t$ es la signatura de la métrica, $s+t$ es el rango de la métrica.¹ Si todos los componentes de la métrica son positivos ($t=0$) entonces se llama métrica *Euclideana* o *Riemanniana*, mientras que si existe un -1 ($t=1$) entonces se conoce como métrica *Lorentziana* o *pseudo Riemanniana*, para cualquier otro caso es *indefinida*.

Finalmente definimos el tensor de Levi-Civita $\epsilon_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$. En el espacio plano el tensor Levi-Civita se define como

$$\tilde{\epsilon}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} = \begin{cases} +1 & \text{if } \mu_1\mu_2\dots\mu_n \text{ permutación par de } 01\dots(n-1), \\ -1 & \text{if } \mu_1\mu_2\dots\mu_n \text{ permutación impar } 01\dots(n-1), \\ 0 & \text{otro caso,} \end{cases} \quad (2.16)$$

El *símbolo de Levi-Civita* se define como $\tilde{\epsilon}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n}$ cuyos componentes están definidos para cualquier sistema de coordenadas. Este objeto no transforma como tensor, está definido para que no cambie bajo transformación de coordenadas, para ver como transforma este objeto consideremos una matriz M de $n \times n$, luego el determinante de esta matriz puede ser escrito como

$$\tilde{\epsilon}_{\mu'_1\mu'_2\dots\mu'_n} |M| = \tilde{\epsilon}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} M^{\mu_1}_{\mu'_1} M^{\mu_2}_{\mu'_2} \dots M^{\mu_n}_{\mu'_n}. \quad (2.17)$$

La matriz $M^{\mu}_{\mu'}$ viene dada por $M^{\mu}_{\mu'} = \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\mu'}}$, reemplazando obtenemos

$$\tilde{\epsilon}_{\mu'_1\mu'_2\dots\mu'_n} = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right| \tilde{\epsilon}_{\mu_1\mu_2\dots\mu_n} \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\mu'_1}} \frac{\partial x^{\mu_2}}{\partial x^{\mu'_2}} \dots \frac{\partial x^{\mu_n}}{\partial x^{\mu'_n}}. \quad (2.18)$$

Este último resultado es parecido a la regla de transformación de tensores, salvo por el determinante de $\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}}$. Los objetos que transforman de esta forma se conocen como *densidades tensoriales*. De manera formal, se define la cantidad $T^{\mu_1\dots\mu_k}_{\nu_1\dots\nu_l}$ como una densidad tensorial de peso p y tipo (k, l) en un punto P , si bajo una transformación de coordenadas dichas componentes transforman según la ley:

$$T^{\mu_1\dots\mu_k}_{\nu_1\dots\nu_l} = \left| \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\nu'}} \right|^p \frac{\partial x^{\mu_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{\mu_k}}{\partial x^{\nu'_k}} \frac{\partial x^{m_1}}{\partial x^{\nu'_1}} \dots \frac{\partial x^{m_l}}{\partial x^{\nu'_l}} T^{q_1\dots q_k}_{m_1\dots m_l}. \quad (2.19)$$

¹El número de valores propios no nulos.

Un ejemplo esta dado por el determinante de la métrica $g = |g_{\mu\nu}|$, bajo una transformación de coordenadas

$$g' = \left| \frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^{\mu}} \right|^{-2} g, \quad (2.20)$$

de esta forma, la métrica transforma también como densidad tensorial de peso -2 . Es posible convertir las densidades tensoriales en tensores si son multiplicadas por $|g^{w/2}|$, donde w es el peso de la densidad tensorial. Como ejemplo, podemos definir el tensor Levi-Civita

$$\epsilon_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \sqrt{|g|} \tilde{\epsilon}_{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}, \quad (2.21)$$

y con los índices arriba, la expresión es

$$\epsilon^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n} = \text{sgn}(g) \frac{1}{\sqrt{|g|}} \tilde{\epsilon}^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_n}, \quad (2.22)$$

donde $\text{sgn}(g)$ es el signo de la métrica.

2.3. Derivada de Lie y simetrías

Antes de empezar a calcular la derivada de Lie para un campo vectorial o una conexión, es importante saber a que nos referimos con simetrías, por ejemplo en el espaciotiempo de Minkowski la métrica, tiene el grupo de simetrías de Poincaré, esto corresponde a las transformaciones que dejan la métrica invariante. La derivada de Lie nos permite generalizar esta idea de simetría a espacios curvos, donde generalmente trabajamos con campos vectoriales, tensoriales. En esta sección explicaremos solo las nociones básicas.

Sea X un campo vectorial de la variedad M . Una curva integral $x(t)$ de M es una curva en M , cuyo vector tangente en $x(t)$ es $X|_x$. Consideremos la curva integral definida por $x^\mu(\lambda)$ y el vector tangente a esta curva definido por $u^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}$. En esta curva definimos el campo vectorial $v^\mu(x)$. La derivada de Lie, nos permite comparar como cambia el campo vectorial v^μ a lo largo de la curva x^μ . Para comparar, tomamos dos puntos de referencia $P(x)$ y $Q(x + dx)$. El campo vectorial v^μ evaluado en el punto Q , puede ser escrito en términos del mismo campo vectorial evaluado en el punto P , para esto usamos series de Taylor

$$\begin{aligned} v^\mu(x + dx) &\simeq v^\mu(x) + dx^\nu \partial_\nu v^\mu(x), \\ &\simeq v^\mu(x) + u^\nu \partial_\nu v^\mu(x) d\lambda, \\ &\simeq v^\mu(P) + u^\nu \partial_\nu v^\mu(P) d\lambda. \end{aligned} \quad (2.23)$$

En los puntos P y Q , el campo vectorial vive en espacios tangentes diferentes, es por este motivo que debemos transformar el campo $v^\mu \rightarrow v'^\mu$. Esta transformación nos permite arrastrar el vector evaluado en P al punto Q . La transformación de coordenadas viene dada por

$$\begin{aligned} x'^\mu &= x^\mu + dx^\mu, \\ &= x^\mu + u^\mu d\lambda. \end{aligned} \quad (2.24)$$

Usamos ec. (2.4) para definir la transformación de coordenadas para un vector

$$\begin{aligned}
 v'^{\mu}(x') &= \frac{\partial}{\partial x^{\nu}}(x^{\mu} + u^{\mu}d\lambda)v^{\nu}(x), \\
 &= (\delta_{\nu}^{\mu} + \partial_{\nu}u^{\mu}d\lambda)v^{\nu}(x), \\
 &= v^{\mu}(x) + v^{\nu}(x)\partial_{\nu}u^{\mu}d\lambda, \\
 &= v^{\mu}(P) + v^{\nu}(P)\partial_{\nu}u^{\mu}d\lambda.
 \end{aligned} \tag{2.25}$$

De esta forma ecs. (2.23) y (2.25) definen dos campos vectoriales evaluados en los puntos P y Q , pero el punto P es arrastrado al punto Q y ambos viven en el mismo espacio tangente. Definimos la derivada de Lie como

$$\mathcal{L}_u v^{\mu} = \lim_{d\lambda \rightarrow 0} \frac{v^{\mu}(x + dx) - v^{\mu}(x')}{d\lambda}. \tag{2.26}$$

Reemplazamos ecs. (2.23) y (2.25)

$$\mathcal{L}_u v^{\mu} = u^{\nu}\partial_{\nu}v^{\mu} - v^{\nu}\partial_{\nu}u^{\mu}. \tag{2.27}$$

Es importante mencionar algunos detalles: *i*) vemos que a partir de ec. (2.27) los índices ν están contraídos y solo existe un índice libre μ , *ii*) no es necesario que la variedad este dotada de un tensor métrico y/o conexión afín para que la derivada de Lie este bien definida.

Dos propiedades de la derivada de Lie son

$$\mathcal{L}_u(T \otimes S) = (\mathcal{L}_u T) \otimes S + T \otimes (\mathcal{L}_u S), \tag{2.28}$$

$$\mathcal{L}_u(\varphi) = u^{\beta}\partial_{\beta}(\varphi), \tag{2.29}$$

donde S y T son tensores, a y b son constantes y u es un campo vectorial.

Utilizando las propiedades escritas en ecs. (2.29) y (2.28), junto con ec. (2.27) es posible encontrar la derivada de Lie de cualquier objeto tensorial, veamos como obtener $\mathcal{L}_u w_{\alpha}$. Para esto consideremos la derivada de Lie del siguiente escalar $\mathcal{L}_u(v^{\alpha}w_{\alpha})$, y haremos uso de las propiedades escritas: a partir de ec. (2.28) obtenemos que

$$\mathcal{L}_u(v^{\alpha}w_{\alpha}) = (\mathcal{L}_u v^{\alpha})w_{\alpha} + (\mathcal{L}_u w_{\alpha})v^{\alpha}, \tag{2.30}$$

usando ec. (2.29) encontramos la derivada de Lie de la función escalar

$$\mathcal{L}_u(v^{\alpha}w_{\alpha}) = u^{\mu}\partial_{\mu}(v^{\alpha}w_{\alpha}). \tag{2.31}$$

Igualando las definiciones obtenemos

$$u^{\mu}\partial_{\mu}(v^{\alpha}w_{\alpha}) = (\mathcal{L}_u v^{\alpha})w_{\alpha} + (\mathcal{L}_u w_{\alpha})v^{\alpha}.$$

Reemplazamos ec. (2.27) para encontrar $(\mathcal{L}_u v^{\alpha})w_{\alpha}$ y desarrollamos la derivada del lado izquierdo

$$u^{\mu}(\partial_{\mu}v^{\alpha})w_{\alpha} + u^{\mu}(\partial_{\mu}w_{\alpha})v^{\alpha} = (u^{\beta}\partial_{\beta}v^{\alpha} - v^{\beta}\partial_{\beta}u^{\alpha})w_{\alpha} + v^{\alpha}\mathcal{L}_u w_{\alpha},$$

de esta última ecuación, simplificando y reagrupando los términos podemos encontrar la derivada de Lie que estamos buscando

$$\mathcal{L}_u w_{\alpha} = w_{\beta}\partial_{\alpha}u^{\beta} + u^{\mu}\partial_{\mu}w_{\alpha}. \tag{2.32}$$

En el capítulo 5 construiremos los anstaz cosmológicos tanto métrico como de la conexión afín, es por esta razón que presentaremos como obtener las derivadas de Lie para cada ansatz. El ansatz métrico es un tensor tipo $(0, 2)$, para calcular su derivada de Lie consideremos el tensor $g_{\mu\nu}V^\nu$, luego usando ec. (2.32) obtenemos

$$\mathcal{L}_u(g_{\mu\nu}V^\nu) = g_{\beta\nu}V^\nu\partial_\mu u^\beta + u^\beta\partial_\beta(g_{\mu\nu}V^\nu). \quad (2.33)$$

El término del lado izquierdo obede la regla de Leibniz, de esta forma podemos expandir el paréntesis

$$(\mathcal{L}_u g_{\mu\nu}) \otimes V^\nu + g_{\mu\nu} \otimes (\mathcal{L}_u V^\nu) = g_{\beta\nu}V^\nu\partial_\mu u^\beta + u^\beta\partial_\beta(g_{\mu\nu}V^\nu). \quad (2.34)$$

Usando ec. (2.27) podemos encontrar una expresión para el segundo término del lado izquierdo, reemplazando obtenemos

$$(\mathcal{L}_u g_{\mu\nu}) \otimes V^\nu + g_{\mu\nu} \otimes (u^\beta\partial_\beta V^\nu - V^\beta\partial_\beta u^\nu) = g_{\beta\nu}V^\nu\partial_\mu u^\beta + u^\beta\partial_\beta(g_{\mu\nu}V^\nu). \quad (2.35)$$

Despejando la cantidad de interés y renombrando los índices mudos obtenemos la derivada de Lie que estamos buscando

$$\mathcal{L}_u g_{\mu\nu} = u^\beta\partial_\beta g_{\mu\nu} + g_{\beta\nu}\partial_\mu u^\beta + g_{\mu\beta}\partial_\nu u^\beta. \quad (2.36)$$

La conexión afín será introducida en la siguiente sección, es por este motivo que la demostración de como obtener su derivada de Lie se presentara más adelante. Sin embargo por completitud presentaremos como resultado su derivada de Lie

$$\mathcal{L}_u \Gamma_\mu^\eta{}_\nu = u^\delta\partial_\delta \Gamma_\mu^\eta{}_\nu - \partial_\epsilon u^\eta \Gamma_\mu^\epsilon{}_\nu + \partial_\nu u^\rho \Gamma_\mu^\eta{}_\rho + \partial_\mu u^\sigma \Gamma_\sigma^\eta{}_\nu + \frac{\partial^2 u^\eta}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (2.37)$$

Como resultado general, la derivada de Lie actuando en un tensor T tipo (k, l) a lo largo del campo V corresponde a la suma de tres términos: la derivada parcial de T a lo largo del campo V ; k términos de signo menos que involucran la multiplicación de $T\partial V$, donde la derivada parcial esta contraída con T ; l términos de signo positivo que involucran la multiplicación de $T\partial V$, donde V esta contraído con un índice inferior de T

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_V T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} &= V^\sigma\partial_\sigma T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} \\ &- (\partial_\lambda V^{\mu_1}) T^{\lambda\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} - (\partial_\lambda V^{\mu_2}) T^{\mu_1\lambda\cdots\mu_k}_{\nu_1\nu_2\cdots\nu_l} - \cdots \\ &+ (\partial_{\nu_1} V^\lambda) T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\lambda\nu_2\cdots\nu_l} + (\partial_{\nu_2} V^\lambda) T^{\mu_1\mu_2\cdots\mu_k}_{\nu_1\lambda\cdots\nu_l} + \cdots \end{aligned} \quad (2.38)$$

Cuando la derivada de Lie de un objeto es cero, se dice que el objeto es simétrico en esa dirección, para el caso particular de la métrica, dicha ecuación se conoce como *ecuación de Killing*. Los vectores u^β que resuelven esta ecuación se conocen como *vectores de Killing*, estos vectores contienen la simetría de la métrica. El procedimiento estándar es considerar una métrica y a partir de esta, encontrar las simetrías que tiene. Sin embargo nuestro interés es obtener campos vectoriales que generen simetrías y a partir de esto deducir los anstaz métrico y no métrico, no al revez, es por esta razón que no resolveremos la ecuación de Killing y buscaremos maneras alternativas de generar estos vectores.

Para obtener estos vectores primero nos preguntamos que simetrías estamos buscando, estamos buscando dos simetrías: *isotropía* y *homogéneidad*. La isotropía es la propiedad que nos

dice que en un punto de la variedad, todas las direcciones lucen de la misma forma, esto significa que no existe dirección privilegiada. Por esta razón, la isotropía está directamente relacionada con las rotaciones generadas por el grupo de simetría $SO(3)$, en particular trabajaremos con 4 dimensiones.

Para esto, consideremos que una rotación en un ángulo 30° es equivalente a realizar 30 rotaciones a un ángulo de 1° o 3000 rotaciones a un ángulo de $0,01^\circ$. Rotar un objeto o un sistema de coordenadas en un ángulo θ equivale a hacer muchas rotaciones de un ángulo pequeño, de esta forma definimos el operador de rotación como

$$R(\theta) = \left(R\left(\frac{\theta}{N}\right) \right)^N. \quad (2.39)$$

Una rotación finita se puede escribir se puede escribir como tomar el objeto inicial (sin rotar) y agregar una pequeña rotación

$$R(\theta) = (\mathbb{I} + A)^N, \quad (2.40)$$

donde \mathbb{I} es la matriz identidad y A es una matriz de rotación. Sabemos que las matrices de rotación deben ser ortogonales, de forma explícita tenemos

$$R^T R = \mathbb{I} \rightarrow (\mathbb{I} + A)^T (\mathbb{I} + A) = I. \quad (2.41)$$

Trabajando a primer orden obtenemos

$$A^T = -A. \quad (2.42)$$

Usando ec. (2.42) podemos escribir la matriz de la siguiente forma

$$A = \begin{pmatrix} 0 & \epsilon \\ -\epsilon & 0 \end{pmatrix} = \epsilon \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = \epsilon B, \quad (2.43)$$

donde ϵ es muy pequeño. Reemplazamos ec. (2.43) en ec. (2.40)

$$R(\theta) = (\mathbb{I} + \epsilon B)^N. \quad (2.44)$$

Esta rotación se hace N veces, entonces podemos pensar en ϵ como un número pequeño que viene dado por $\epsilon = \theta/N$, reemplazando obtenemos

$$R(\theta) = \left(\mathbb{I} + \frac{\theta}{N} B \right)^N. \quad (2.45)$$

Cuando $N \rightarrow \infty$, ec. (2.45) define el operador de rotaciones como

$$R(\theta) = e^{\theta B}, \quad (2.46)$$

donde B es la matriz definida en ec. (2.43) y es el generador del grupo de rotaciones.

Para entender como una función exponencial elevada a una matriz genera las rotaciones, haremos una expansión en series de Taylor, luego ec. (2.46) se puede escribir como

$$\begin{aligned} R(\theta) &= R(0) + \theta R'(0) + \frac{1}{2!} \theta^2 R''(0) + \frac{1}{3!} \theta^3 R'''(0) + \dots, \\ &= \mathbb{I} + \theta B + \frac{1}{2!} \theta^2 B^2 + \frac{1}{3!} \theta^3 B^3 + \dots. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Utilizando ec. (2.43) es sencillo determinar los valores de B^n , luego reemplazando en la ecuación de arriba obtenemos

$$R(\theta) = \mathbb{I} + \theta B - \frac{1}{2!}\theta^2\mathbb{I} - \frac{1}{3!}\theta^3 B + \frac{1}{4!}\theta^4\mathbb{I} + \frac{1}{5!}\theta^5 B + \dots, \quad (2.48)$$

en esta última ecuación se agregaron mas términos a la serie, esto para que el resultado final sea mas evidente. Separamos los terminos asociados a \mathbb{I} de los que estan acoplados con B

$$R(\theta) = \left(1 - \frac{\theta^2}{2!}\theta^2 + \frac{1}{4!}\theta^4 + \dots\right)\mathbb{I} + \left(\theta - \frac{1}{3!}\theta^3 + \frac{1}{5!}\theta^5 + \dots\right)B, \quad (2.49)$$

$$= \cos \theta \mathbb{I} + \sin \theta B. \quad (2.50)$$

Esta última ecuación corresponde a la matriz de rotación que se puede obtener de forma clásica por métodos geométricos

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix}. \quad (2.51)$$

Consideremos una función rotada $f(x', y')$, esta puede ser escrita como

$$f(x', y') = f\left(R(\theta) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(e^{\theta B} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right), \quad (2.52)$$

expandiendo en series de Taylor a primer orden

$$f(x', y') = f\left((\mathbb{I} - \theta B) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} - \theta \begin{pmatrix} -y \\ x \end{pmatrix}\right), \quad (2.53)$$

esta última ecuación puede ser escrita como

$$f(x', y') = f(x + \theta y, y - \theta x), \quad (2.54)$$

realizando otra expansión de Taylor a primer orden y factorizando obtenemos

$$f(x', y') \simeq (1 + \theta y \partial_x - \theta x \partial_y) f(x, y). \quad (2.55)$$

En este punto recordemos que una rotación se había definido como un conjunto de pequeñas rotaciones repetidas una cantidad muy grande de veces, luego podemos reescribir esta última ecuación como

$$f(x', y') \simeq \left(1 - \frac{\theta}{N} (x \partial_y - y \partial_x)\right)^N f(x, y), \quad (2.56)$$

en el límite cuando $N \rightarrow \infty$ obtenemos

$$f(x', y') = e^{-\theta(x \partial_y - y \partial_x)} f(x, y). \quad (2.57)$$

De esta forma el operador de rotaciones es un operador que rota un objeto entorno al eje z y queda definido por

$$J_3 = x \partial_y - y \partial_x. \quad (2.58)$$

De manera similiar, es posible encontrar los otros operadores para las rotaciones entorno a los ejes x e y . Los operadores de rotaciones son:

$$J_1 = y\partial_z - z\partial_y, \quad (2.59)$$

$$J_2 = z\partial_x - x\partial_z, \quad (2.60)$$

$$J_3 = x\partial_y - y\partial_x. \quad (2.61)$$

Es conveniente trabajar estas relaciones en coordenadas esféricas, para esto transformamos la base $e_{j'} = \frac{\partial x^j}{\partial x^{j'}} e_j$, luego podemos relacionar la base cartesiana con la esférica de la siguiente forma

$$\partial_x = \sin\theta \cos\phi \partial_r + \frac{1}{r} \cos\phi \cos\theta \partial_\theta - \frac{1}{r} \frac{\sin\phi}{\sin\theta} \partial_\phi, \quad (2.62)$$

$$\partial_y = \sin\theta \sin\phi \partial_r + \frac{1}{r} \sin\phi \cos\theta \partial_\theta + \frac{1}{r} \frac{\cos\phi}{\sin\theta} \partial_\phi, \quad (2.63)$$

$$\partial_z = \cos\theta \partial_r - \frac{1}{r} \sin\theta \partial_\theta, \quad (2.64)$$

reemplazamos estas transformaciones en ecs. (2.59), (2.60) y (2.61), finalmente obtenemos

$$J_1 = -\cos\phi \partial_\theta + \sin\phi \cot\theta \partial_\phi, \quad (2.65)$$

$$J_2 = \sin\phi \partial_\theta + \cos\phi \cot\theta \partial_\phi, \quad (2.66)$$

$$J_3 = \partial_\phi. \quad (2.67)$$

La siguiente simetría buscada es la homogeneidad, un espacio es homogéneo si para el espacio de n dimensiones admite n vectores de Killing que generan las simetrías de traslación, dicho de otra manera que el espacio sea homogéneo nos dice que si un observador se encuentra en un punto y es trasladado a otro punto por lo menos a una distancia de 10 Mpc (transformación de traslación) entonces este observador debería encontrar que su entorno se ve de la misma forma, la misma distribución de galaxias a su alrededor, el mismo tipo de estrellas.

Buscamos los generadores y operadores que generan las simetrías de traslación, definimos el operador de traslación T_a como el operador que traslada una función una cantidad a , luego

$$(T_a f) f(x) = f(x + a), \quad (2.68)$$

expandiendo en series de Taylor obtenemos

$$f(x + a) = \left(1 + a\partial_x + \frac{a^2}{2!} \partial_x^2 + \dots + \frac{a^n}{n!} \partial_x^n \right) f(x), \quad (2.69)$$

$$= e^{a\partial_x} f(x). \quad (2.70)$$

Luego podemos definir el operador de traslaciones como

$$T_a = e^{a\partial_x}, \quad (2.71)$$

de igual forma para las otras dos direcciones

$$T_a = e^{a\partial_j}, \quad (2.72)$$

Es conveniente escribir ec. (2.72) en coordenadas esféricas

$$J_{1'} = \sqrt{1 - kr^2} \left(\cos \varphi \sin \theta \partial_r + \frac{\cos \varphi \cos \theta}{r} \partial_\theta - \frac{\sin \varphi}{r \sin \theta} \partial_\phi \right), \quad (2.73)$$

$$J_{2'} = \sqrt{1 - kr^2} \left(\sin \varphi \sin \theta \partial_r + \frac{\sin \varphi \cos \theta}{r} \partial_\theta + \frac{\cos \varphi}{r \sin \theta} \partial_\phi \right), \quad (2.74)$$

$$J_{3'} = \sqrt{1 - kr^2} \left(\cos \theta \partial_r - \frac{\sin \theta}{r} \partial_\theta \right), \quad (2.75)$$

donde $\kappa = -1, 0, 1$ define el tipo de curvatura: negativa, plana, positiva.

2.4. La conexión afín y la derivada de covariante

La derivada parcial transforma como tensor, sin embargo, la derivada parcial de un tensor no transforma como tensor. Consideremos el siguiente ejemplo

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} A^{\nu'} &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} A^\nu \right), \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \left(\frac{\partial}{\partial x^\mu} A^\nu \right) + A^\nu \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \end{aligned} \quad (2.76)$$

Debido al término no homogéneo de la ecuación anterior, es que debemos generalizar el concepto de derivada parcial a derivada covariante. Nos gustaría que la derivada covariante ∇ se defina como un mapa de un campo tensorial (k, l) a $(k, l + 1)$, que actúe de manera lineal en sus argumentos, obedezca la regla de Leibniz, esto se conoce como conexión afín.

De manera formal, una conexión afín ∇ es un mapa $\nabla : \chi(M) \times \chi(M) \rightarrow \chi(M)$, esto es $(X, Y) \rightarrow \nabla_X Y$, la cual satisface las siguientes condiciones

$$\nabla_X(Y + Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z \quad (2.77)$$

$$\nabla_{(X+Y)}(Z) = \nabla_X Z + \nabla_Y Z \quad (2.78)$$

$$\nabla_{(fX)} Y = f \nabla_X Y \quad (2.79)$$

$$\nabla_X(fY) = X[f]Y + f \nabla_X Y \quad (2.80)$$

Consideremos que significa la derivada covariante para el vector V^ν , esta derivada nos dice que para cada dirección μ la derivada covariante ∇_μ vendrá definida por la derivada parcial ∂_μ más un término de corrección dado por la matriz $(\Gamma_\mu)^\rho_\sigma$, el conjunto de términos asociado a esa matriz se conocen como *coeficientes de la conexión*, de esta forma definimos la derivada covariante como

$$\nabla_\mu V^\nu = \partial_\mu V^\nu + \Gamma_\mu{}^\nu{}_\lambda V^\lambda. \quad (2.81)$$

Para demostrar que ec.(2.81) es la expresión correcta, debemos ser capaces de determinar como transforma $\Gamma_\mu{}^\nu{}_\lambda$ exigiendo que el lado izquierdo transforme como tensor. Si el lado izquierdo transforma como tensor entonces, este puede ser escrito como

$$\nabla_{\mu'} V^{\nu'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^\nu} \nabla_\mu V^\nu, \quad (2.82)$$

El lado izquierdo de ec.(2.82) puede ser escrito como

$$\begin{aligned}\nabla_{\mu'} V^{\nu'} &= \partial_{\mu'} V^{\nu'} + \Gamma_{\mu' \nu' \lambda'} V^{\lambda'}, \\ &= \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu'}} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\nu \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu'}} + \Gamma_{\mu' \nu' \lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda.\end{aligned}\quad (2.83)$$

Escribiendo explícitamente el lado derecho de ec. (2.82) obtenemos

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu'}} \nabla_\mu V^\nu = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu'}} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu'}} \Gamma_{\mu' \nu' \lambda} V^\lambda.\quad (2.84)$$

Igualando ecs. (2.83) con (2.84)

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu'}} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\nu \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu'}} + \Gamma_{\mu' \nu' \lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu'}} \partial_\mu V^\nu + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu'}} \Gamma_{\mu' \nu' \lambda} V^\lambda.\quad (2.85)$$

Simplificando la expresión y cambiando el índice $\nu \rightarrow \lambda$

$$\Gamma_{\mu' \nu' \lambda'} \frac{\partial x^{\lambda'}}{\partial x^\lambda} V^\lambda + \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} V^\lambda \frac{\partial}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu'}} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu'}} \Gamma_{\mu' \nu' \lambda} V^\lambda,\quad (2.86)$$

despejamos Γ

$$\Gamma_{\mu' \nu' \lambda'} = \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial x^{\nu'}}{\partial x^{\nu'}} \Gamma_{\mu' \nu' \lambda} - \frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\lambda}{\partial x^{\lambda'}} \frac{\partial^2 x^{\nu'}}{\partial x^\mu \partial x^\lambda},\quad (2.87)$$

nos damos cuenta que Γ no transforma como tensor, pero esto está construido de esta forma, para que ec. (2.81) transforme como tensor, el término extra de esta última ecuación cancela el término no homogéneo de la derivada parcial.

Ahora que sabemos como transforma la conexión afín podemos demostrar como obtener su derivada de Lie. El procedimiento será similar al utilizado al comienzo de la sección anterior. Guiandonos por ec.(2.26), la derivada de Lie de la conexión afín viene dada por

$$\mathcal{L}_u v^\mu = \lim_{d\lambda \rightarrow 0} \frac{\Gamma_{\mu' \nu'}^\eta(x + dx) - \Gamma_{\mu' \nu'}^{\eta'}(x)}{d\lambda}.\quad (2.88)$$

El primer término del lado derecho se escribe como

$$\Gamma_{\mu' \nu'}^\eta(x + dx) = \Gamma_{\mu' \nu'}^\eta(x) + u^\delta \partial_\delta (\Gamma_{\mu' \nu'}^\eta(x)).\quad (2.89)$$

Mientras que el segundo término se escribe usando ec. (2.87)

$$\Gamma_{\mu' \nu'}^{\eta'} = \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^{\epsilon'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\nu'}} \Gamma_{\sigma \rho}^\epsilon - \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial^2 x^{\eta'}}{\partial x^\sigma \partial x^\rho}.\quad (2.90)$$

Las reglas de transformación vienen dadas por

$$\frac{\partial x^{\mu'}}{\partial x^\nu} = \delta_\nu^\mu + \partial_\nu u^\mu d\lambda,\quad (2.91)$$

$$\frac{\partial x^\mu}{\partial x^{\nu'}} = \delta_\nu^\mu - \partial_\nu u^\mu d\lambda + O(d\lambda^2).\quad (2.92)$$

Reemplazando ecs.(2.91) y (2.92) en ec. (2.90) y trabajando a primer orden obtenemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^{\eta'}}{\partial x^\epsilon} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\nu'}} \Gamma_{\sigma^\epsilon \rho} &= (\delta_\mu^\sigma - \partial_\mu u^\sigma d\lambda) (\delta_\epsilon^\eta + \partial_\epsilon u^\eta d\lambda) (\delta_\nu^\rho - \partial_\nu u^\rho d\lambda) \Gamma_{\sigma^\epsilon \rho}, \\ &\simeq \Gamma_{\mu^\eta \nu} + (\partial_\epsilon u^\eta \Gamma_{\mu^\epsilon \nu} - \partial_\nu u^\rho \Gamma_{\mu^\eta \rho} - \partial_\mu u^\sigma \Gamma_{\sigma^\eta \nu}) d\lambda. \end{aligned} \quad (2.93)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial x^\sigma}{\partial x^{\mu'}} \frac{\partial x^\rho}{\partial x^{\nu'}} \frac{\partial^2 x^{\eta'}}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} &= (\delta_\mu^\sigma - \partial_\mu u^\sigma d\lambda) (\delta_\nu^\rho - \partial_\nu u^\rho d\lambda) \frac{\partial}{\partial x^\sigma} (\delta_\rho^\eta + \partial_\rho u^\eta d\lambda). \\ &\simeq (\delta_\mu^\sigma \delta_\nu^\rho - \delta_\mu^\sigma \partial_\nu u^\rho d\lambda - \delta_\nu^\rho \partial_\mu u^\sigma d\lambda) \frac{\partial^2 u^\eta}{\partial x^\sigma \partial x^\rho} d\lambda, \\ &\simeq \frac{\partial^2 u^\eta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} d\lambda. \end{aligned} \quad (2.94)$$

Luego ec. (2.90) puede ser escrita como

$$\Gamma_{\mu'^{\eta'} \nu'} = \Gamma_{\mu^\eta \nu} + (\partial_\epsilon u^\eta \Gamma_{\mu^\epsilon \nu} - \partial_\nu u^\rho \Gamma_{\mu^\eta \rho} - \partial_\mu u^\sigma \Gamma_{\sigma^\eta \nu}) d\lambda - \frac{\partial^2 u^\eta}{\partial x^\mu \partial x^\nu} d\lambda \quad (2.95)$$

Reemplazando ecs. (2.95) y (2.89) en ec. (2.88) obtenemos la derivada de Lie para la conexión afín

$$\mathcal{L}_u \Gamma_{\mu^\eta \nu} = u^\delta \partial_\delta \Gamma_{\mu^\eta \nu} - \partial_\epsilon u^\eta \Gamma_{\mu^\epsilon \nu} + \partial_\nu u^\rho \Gamma_{\mu^\eta \rho} + \partial_\mu u^\sigma \Gamma_{\sigma^\eta \nu} + \frac{\partial^2 u^\eta}{\partial x^\mu \partial x^\nu}. \quad (2.96)$$

Aún cuando la conexión no transforma como tensor, a partir de ec. (2.87) podemos definir el tensor de torsión como

$$T_{\lambda^\rho \mu} = 2\Gamma_{[\lambda^\rho \mu]} = \Gamma_{\lambda^\rho \mu} - \Gamma_{\mu^\rho \lambda}. \quad (2.97)$$

Comentarios sobre la derivada covariante:

1. Cuando la derivada covariante de un objeto es cero, se dice que este se transporta de forma paralela, esto significa que el transportar un vector a lo largo de una dirección, se preservará su ángulo y magnitud. Esto será de gran ayuda para encontrar el tensor de curvatura de Riemann en la siguiente sección.
2. Una propiedad de la derivada covariante es que aplicada a un campo escalar esta se reduce a la derivada parcial

$$\nabla_\mu \phi = \partial_\mu \phi. \quad (2.98)$$

A partir de los resultados obtenidos en ecs. (2.81) y (2.98) podemos calcular la derivada covariante de ω_λ , consideremos

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\omega_\lambda V^\lambda) &= (\nabla_\mu \omega_\lambda) V^\lambda + \omega_\lambda (\nabla_\mu V^\lambda) \\ &= (\partial_\mu \omega_\lambda) V^\lambda + \tilde{\Gamma}_{\mu^\sigma \lambda} \omega_\sigma V^\lambda + \omega_\lambda (\partial_\mu V^\lambda) + \omega_\lambda \Gamma_{\mu^\lambda \rho} V^\rho. \end{aligned} \quad (2.99)$$

La cantidad $\omega_\lambda V^\lambda$ es un escalar por lo tanto, esto es equivalente a la derivada parcial

$$\begin{aligned} \nabla_\mu (\omega_\lambda V^\lambda) &= \partial_\mu (\omega_\lambda V^\lambda) \\ &= (\partial_\mu \omega_\lambda) V^\lambda + \omega_\lambda (\partial_\mu V^\lambda). \end{aligned} \quad (2.100)$$

Igualando ecs. (2.99) con (2.100)

$$0 = \tilde{\Gamma}_\mu^\sigma \omega_\sigma V^\lambda + \Gamma_\mu^\sigma \omega_\sigma V^\lambda, \quad (2.101)$$

pero ω_σ y V^λ son arbitrarios, luego

$$\tilde{\Gamma}_\mu^\sigma \omega_\sigma = -\Gamma_\mu^\sigma \omega_\sigma. \quad (2.102)$$

De esta forma podemos definir la derivada covariante para la 1-forma como

$$\nabla_\mu \omega_\nu = \partial_\mu \omega_\nu - \Gamma_\mu^\lambda \omega_\lambda. \quad (2.103)$$

Una de las familias de soluciones de la gravedad afín polinomial corresponde a $\nabla_\mu R_{\nu\lambda}$, es por este motivo que obtendremos la derivada covariante de un tensor tipo $(0, 2)$. Consideremos el tensor $g_{\mu\nu} V^\nu$, este es un tensor tipo $(0, 1)$, usando ec.(2.103) obtenemos

$$\nabla_\sigma (g_{\mu\nu} V^\nu) = \partial_\sigma (g_{\mu\nu} V^\nu) - \Gamma_\sigma^\lambda g_{\mu\nu} V^\nu. \quad (2.104)$$

El lado izquierdo obedece la regla de Leibniz

$$\nabla_\sigma (g_{\mu\nu}) V^\nu + g_{\mu\nu} (\nabla_\sigma V^\nu) = \partial_\sigma (g_{\mu\nu} V^\nu) - \Gamma_\sigma^\lambda g_{\mu\nu} V^\nu. \quad (2.105)$$

El segundo término del lado izquierdo puede ser escrito usando ec. (2.81). Luego despejando el primer término del lado izquierdo y simplificando la expresión obtenemos la derivada covariante que estamos buscando

$$\nabla_\sigma g_{\mu\nu} = \partial_\sigma g_{\mu\nu} - \Gamma_\sigma^\lambda g_{\lambda\nu} - \Gamma_\sigma^\lambda g_{\mu\lambda}. \quad (2.106)$$

Siguiente un procedimiento similar, podemos obtener la derivada covariante de cualquier tensor. Los coeficientes de la conexión contienen la información necesaria para generalizar la derivada covariante a un tensor de rango arbitrario. Para un tensor tipo (k, l) , la derivada covariante sigue una regla sencilla, por cada índice superior se introduce $+\Gamma$ y por cada índice inferior se agregan $-\Gamma$, de esta forma

$$\begin{aligned} \nabla_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} &= \partial_\sigma T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} \\ &+ \Gamma_\sigma^{\mu_1 \lambda} T^{\lambda \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \Gamma_\sigma^{\mu_2 \lambda} T^{\mu_1 \lambda \dots \mu_k}_{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_l} + \dots \\ &- \Gamma_\sigma^\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\lambda \nu_2 \dots \nu_l} - \Gamma_\sigma^\lambda T^{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_k}_{\nu_1 \lambda \dots \nu_l} - \dots \end{aligned} \quad (2.107)$$

Existe una única conexión afín que satisface las siguientes propiedades

- i) La métrica es covariantemente constante $\nabla_\rho g_{\mu\nu} = 0$.
- ii) Trabajamos en un espacio libre de torsión, esto nos dice que la conexión es simétrica en sus índices inferiores.

Esta conexión se llama conexión Levi-Civita

Es posible calcular los coeficientes de la conexión Levi-Civita partir de la métrica y sus primeras derivadas, para esto consideramos el lagrangeano de la partícula libre

$$L = g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\tau} \frac{dx^\nu}{d\tau}. \quad (2.108)$$

Buscamos sus respectivas ecuaciones de movimiento para el campo métrico

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^\lambda} \right) = 2g_{\lambda\nu,\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + 2g_{\lambda\nu} \ddot{x}^\nu, \quad \frac{\partial L}{\partial x^\lambda} = g_{\mu\nu,\lambda} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu,$$

luego, la ecuación de movimiento es

$$\begin{aligned} 2g_{\lambda\nu} \ddot{x}^\nu + 2g_{\lambda\nu,\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu - g_{\mu\nu,\lambda} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0, \\ 2g_{\lambda\nu} \ddot{x}^\nu + (g_{\lambda\nu,\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu + g_{\lambda\nu,\mu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu) - g_{\mu\nu,\lambda} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0, \\ g^{\lambda\xi} g_{\lambda\nu} \ddot{x}^\nu + \frac{1}{2} g^{\lambda\xi} (g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0, \\ \ddot{x}^\xi + \frac{1}{2} g^{\lambda\xi} (g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}) \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0, \\ \ddot{x}^\xi + \Gamma_{\mu\nu}^{\xi} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu &= 0. \end{aligned}$$

Los coeficientes de la conexión Levi-Civita en términos de la métrica, su primera derivada e inversa se calculan como:

$$\Gamma_{\mu\nu}^{\xi} = \frac{1}{2} g^{\lambda\xi} (g_{\lambda\mu,\nu} + g_{\lambda\nu,\mu} - g_{\mu\nu,\lambda}). \quad (2.109)$$

Para terminar esta sección podemos relacionar la derivada de Lie con la derivada covariante usando la conexión, en particular usaremos la conexión Levi-Civita. Consideremos las derivadas covariantes de los vectores B^α y A^α

$$\begin{aligned} \nabla_\beta B^\alpha &= \partial_\beta B^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} B^\gamma, \\ \nabla_\beta A^\alpha &= \partial_\beta A^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} A^\gamma. \end{aligned}$$

Multiplicamos por la izquierda: A^β y B^β , de la siguiente forma

$$\begin{aligned} A^\beta \nabla_\beta B^\alpha &= A^\beta \partial_\beta B^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} A^\beta B^\gamma, \\ B^\beta \nabla_\beta A^\alpha &= B^\beta \partial_\beta A^\alpha + \Gamma_{\beta\gamma}^{\alpha} B^\beta A^\gamma. \end{aligned}$$

Restando ambas expresiones obtenemos

$$A^\beta \nabla_\beta B^\alpha - B^\beta \nabla_\beta A^\alpha = A^\beta \partial_\beta B^\alpha - B^\beta \partial_\beta A^\alpha.$$

La expresión del lado derecho corresponde a la derivada de Lie, luego podemos definir la derivada de Lie en términos de la derivada covariante siempre y cuando trabajemos en un espaciotiempo libre de torsión, de la siguiente forma

$$\mathcal{L}_A B^\alpha = A^\beta \nabla_\beta B^\alpha - B^\beta \nabla_\beta A^\alpha. \quad (2.110)$$

2.5. Curvatura

Con la derivada covariante y la idea de paralelismo ya establecida, estamos listos para definir el tensor de curvatura. Este juega un rol fundamental en las ecuaciones de campo de Einstein. En la geometría plana al transportar un vector de forma paralela el resultado no dependerá del camino, no así en un espacio curvo. Se define el tensor de curvatura como la diferencia entre transportar un vector de forma paralela a lo largo de dos caminos que forman un loop, esto es equivalente a calcular el conmutador de derivadas covariantes sobre un vector

$$\begin{aligned}
 [\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho &= \nabla_\mu \nabla_\nu V^\rho - \nabla_\nu \nabla_\mu V^\rho \\
 &= \partial_\mu (\nabla_\nu V^\rho) - \Gamma_\mu^\lambda \nabla_\lambda V^\rho + \Gamma_\mu^\rho \nabla_\nu V^\sigma - (\mu \leftrightarrow \nu), \\
 &= \partial_\mu \partial_\nu V^\rho + (\partial_\mu \Gamma_\nu^\rho \sigma) V^\sigma + \Gamma_\nu^\rho \sigma \partial_\mu V^\sigma - \Gamma_\mu^\lambda \partial_\lambda V^\rho - \Gamma_\mu^\lambda \Gamma_\lambda^\rho \sigma V^\sigma \\
 &\quad + \Gamma_\mu^\rho \sigma \partial_\nu V^\sigma + \Gamma_\mu^\rho \sigma \Gamma_\nu^\sigma \lambda V^\lambda - (\mu \leftrightarrow \nu), \\
 &= \left(\partial_\mu \Gamma_\nu^\rho \sigma - \partial_\nu \Gamma_\mu^\rho \sigma + \Gamma_\mu^\rho \lambda \Gamma_\nu^\lambda \sigma - \Gamma_\nu^\rho \lambda \Gamma_\mu^\lambda \sigma \right) V^\sigma - 2\Gamma_{[\mu}^\lambda \nu] \nabla_\lambda V^\rho,
 \end{aligned} \tag{2.111}$$

donde el último término es el tensor de torsión. Luego

$$[\nabla_\mu, \nabla_\nu] V^\rho = R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\sigma V^\sigma - T_{\mu\nu}{}^\lambda \nabla_\lambda V^\rho \tag{2.112}$$

donde definimos el tensor de Riemann como

$$R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\sigma = \partial_\mu \Gamma_\nu^\rho \sigma - \partial_\nu \Gamma_\mu^\rho \sigma + \Gamma_\mu^\rho \lambda \Gamma_\nu^\lambda \sigma - \Gamma_\nu^\rho \lambda \Gamma_\mu^\lambda \sigma. \tag{2.113}$$

Algunas cosas importantes por mencionar acerca de esta derivación: el tensor de curvatura fue construido a partir de la conexión, no requiere una métrica para estar bien definido, esta compuesto por elementos no tensoriales: derivadas parciales y conexiones. Es anti-simétrico en los dos primeros índices, esto es directo a partir de ec. (2.112). Cuando la torsión es cero, entonces satisface la siguiente identidad

$$R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\sigma + R_{\nu\sigma}{}^\rho{}_\mu + R_{\sigma\mu}{}^\rho{}_\nu = 0. \tag{2.114}$$

Consideremos $\nabla_\lambda R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\sigma$, realizando una permutación cíclica en los tres primeros índices obtenemos

$$\nabla_\lambda R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\sigma + \nabla_\mu R_{\nu\lambda}{}^\rho{}_\sigma + \nabla_\nu R_{\lambda\mu}{}^\rho{}_\sigma = 0. \tag{2.115}$$

Esta se conoce como la identidad de Bianchi. Si la variedad esta dotada de una métrica entonces podemos definir $R_{\mu\nu\rho\sigma} = g_{\lambda\rho} R_{\mu\nu}{}^\lambda{}_\sigma$, luego es posible demostrar que este tensor es anti-simétrico en los dos últimos índices $R_{\mu\nu\rho\sigma} = -R_{\mu\nu\sigma\rho}$ y además, es invariante al intercambio del primer par de índices con el segundo par $R_{\mu\nu\rho\sigma} = R_{\sigma\rho\mu\nu}$.

El tensor de Ricci, se obtiene de la contracción del tensor de curvatura

$$R_{\mu\nu} = R_{\lambda\nu}{}^\lambda{}_\mu. \tag{2.116}$$

Notemos que para encontrar el tensor de Ricci no es necesario tener una métrica. Cuando la conexión afín esta libre de torsión y además admite un elemento de volumen g en la variedad

M , entonces la conexión afín es localmente *equi-afín* y como consecuencia de esto, el tensor de Ricci es simétrico

$$R_{\mu\nu} = R_{\nu\mu}. \quad (2.117)$$

Podemos usar la métrica para contraer el tensor de Ricci y formar el escalar de curvatura R

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.118)$$

Un objeto de gran interés en Relatividad General viene dado por una doble contracción aplicada a la identidad de Bianchi

$$g^{\nu\sigma} g^{\mu\lambda} (\nabla_\lambda R_{\mu\nu\rho\sigma} + \nabla_\rho R_{\mu\nu\sigma\lambda} + \nabla_\sigma R_{\mu\nu\lambda\rho}) = 0. \quad (2.119)$$

Trabajando con la conexión Levi-Civita, obtenemos

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} - \nabla_\rho R + \nabla^\nu R_{\rho\nu} = 0, \quad (2.120)$$

cambiando $\nu \rightarrow \mu$ en el último término obtenemos

$$\nabla^\mu R_{\rho\mu} = \frac{1}{2} \nabla_\rho R. \quad (2.121)$$

De esta última expresión podemos definir un tensor conservado

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (2.122)$$

El tensor definido en ec. (2.122) se conoce como el tensor de Einstein, donde se cumple que

$$\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0. \quad (2.123)$$

Relatividad General

3.1. Principio de equivalencia

Para explicar en que consiste el principio de equivalencia, vale la pena introducir el ejemplo clásico del elevador

1. Consideremos a una persona dentro de un elevador sellado en el espacio: al no existir fuerzas externas, el elevador puede estar en reposo o en movimiento con velocidad constante, en cualquiera de estos dos casos, la persona dentro del elevador estará flotando, tal como lo harían dos piedras que el soltase a la altura de su cabeza.
2. ¿Qué ocurriría con la persona en el interior del elevador, si alguien aplicase una fuerza al elevador por fuera, de forma tal que generara en este una aceleración constante? Al existir una fuerza externa, esta induce una aceleración constante en el elevador, lo que provocaría que la persona caiga al suelo, junto con sus rocas.
3. Ahora consideremos, el mismo elevador junto con la persona y las piedras, pero inmerso en un campo gravitacional constante. La persona nuevamente, se vera atraída al piso del ascensor debido a la fuerza constante que este experimenta al igual que sus piedras.
4. Consideremos ahora que el mismo ascensor, se encuentra en caída libre en un campo gravitacional, la persona que se encuentra dentro de el junto con sus piedras, permanecerá flotando en el aire debido a la aceleración que este experimenta.

A partir de 2 y 3 nos damos cuenta que no existe ningun experimento que pueda realizar la persona dentro del elevador para saber si se encuentra atraída al piso de este, debido a los efectos de un campo gravitacional constante o una aceleración constante, de esta forma tenemos una primera conclusión y es la siguiente: *localmente los efectos de la gravedad y aceleración son indistinguibles.*

A partir de 1 y 4 podemos observar que en ambos escenarios la persona permanecerá flotando en el aire, junto con las piedras, luego no existe experimento alguno que la persona pueda realizar, para saber si esta flotando debido a que se encuentra en caída libre o debido a algún campo de gravedad, de esta forma tenemos una segunda conclusión y es: *localmente los efectos de la gravedad pueden ser eliminados si cambiamos nuestro sistema de referencia al sistema en caída libre.* Esto se puede ver a nivel de ecuaciones de movimiento, en caída libre tenemos

$$\ddot{x} = g. \tag{3.1}$$

En el sistema acelerado, las coordenadas vienen dadas por

$$\xi(x, t) = x - gt^2/2. \quad (3.2)$$

La ecuación de movimiento es

$$\ddot{\xi} = 0. \quad (3.3)$$

Las ecs. (3.1) y (3.3) describen la misma física.

5. Consideremos el mismo elevador pero en el campo gravitacional de la tierra. Este campo de gravedad presenta simetría esférica, donde el campo apunta al centro de la tierra. De esta forma, la persona dentro del ascensor, vería que al soltar las piedras, estas no solo se moverían hacia abajo, si no que también estas se acercarían a el.
6. Si el ascensor se encuentra en caída libre en el campo gravitacional de la tierra, la persona junto con las dos piedras quedarán suspendidas en el aire, pero debido a la simetría esférica de este, la persona dentro del ascensor vería que las piedras se acercan a el moviendose horizontalmente, concluyendo que debe existir alguna fuerza responsable de esto.

A partir de estos dos experimentos mentales, podemos concluir que *en un campo gravitacional no uniforme, los efectos de la gravedad no se pueden eliminar cuando uno se cambia al sistema de referencia en caída libre*. Solo es posible eliminar los efectos de la gravedad localmente.

De manera formal, el principio de equivalencia nos dice

1. En cada punto del espaciotiempo dentro de un campo de gravedad es posible elegir un *sistema localmente inercial* tal que en una región lo suficientemente pequeña, las leyes de la naturaleza toman la misma forma a las de un sistema de coordenadas cartesiano no acelerado en la ausencia de gravedad.
2. Los experimentos realizados en el sistema en caída libre, durante un período corto de tiempo, son indistinguibles de los experimentos realizados en un sistema inercial en el vacío.

Las consecuencias inmediatas de este principio son: *la deflexión de la luz debido al campo gravitacional y los relojes van más lentos en un campo de gravedad*. Para entender la primera afirmación, imaginemos un haz de luz que entra en un elevador horizontalmente a través de la ventana por el lado izquierdo y sale por el lado derecho a la misma altura. Ahora consideremos el mismo escenario, pero el ascensor esta acelerado hacia arriba, el haz de luz entrará por la izquierda y saldrá a una altura menor por la derecha, debido a la aceleración del elevador, por el principio de equivalencia, uno debería observar el mismo fenómeno en un campo de gravedad constante, luego en un campo de gravedad el haz de luz es curvado. Para la segunda afirmación, consideremos dos observadores uno arriba y otro abajo en el ascensor, ambos tienen relojes idénticos y se envían señales luminosas a intervalos regulares. Una vez que el elevador acelera hacia arriba, el observador que se encuentra abajo recibirá las señales de luz a una frecuencia más alta a las que el las emite y el interpretará esto como si su reloj esta funcionando de forma más lenta. Por el principio de equivalencia, la misma conclusión ahora aplica a dos observadores a diferentes alturas en un campo de gravedad.

3.2. Ecuaciones de campo de Einstein

La ecuación de Poisson para el potencial Newtoniano viene dado por

$$\nabla^2\Phi = 4\pi G\rho, \quad (3.4)$$

donde $\nabla^2 = \delta^{ij}\partial_i\partial_j$ es el Laplaciano en el espacio y ρ es la densidad. La ec. (3.4) no sirve como teoría de gravedad por varias razones, no es invariante de Lorentz, además al no contar con derivadas temporales nos dice que el campo de gravedad interactúa a distancia de manera instantánea. De la teoría de la relatividad especial, sabemos que la masa es una forma de energía, luego la gravedad se acopla con la materia, en una teoría relativista invariante de Lorentz, la gravedad se deberá acoplar con la energía.

Buscamos una ecuación que sea invariante bajo transformaciones de Lorentz, por esta razón es que postulamos una ecuación tensorial que reemplace ec. (3.4). Una generalización relativista de la densidad ρ está dado por el tensor de energía momento $T_{\mu\nu}$, el potencial debería ser reemplazado por el tensor métrico pero la compatibilidad métrica hace que este postulado sea cero. Un objeto construido usando segundas derivadas de la métrica es el tensor de curvatura de Riemann $R^\rho{}_{\mu\nu\lambda}$, pero este término no tiene la cantidad de índices adecuados, por esta razón contraemos este tensor para formar el tensor de Ricci $R_{\mu\nu}$. Considerando todos estos postulados, un ansatz adecuado para describir las interacciones gravitacionales es

$$R_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.5)$$

donde κ es una constante. El problema con ec. (3.5) reside en que el lado derecho de la ecuación corresponde al tensor de energía momento, de acuerdo al principio de equivalencia, el tensor de energía momento debe ser conservado, luego

$$\nabla^\mu T_{\mu\nu} = 0, \quad (3.6)$$

esto implica que

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.7)$$

Este último resultado no es cierto para una geometría arbitraria, de manera general se demostró en la sección anterior que

$$\nabla^\mu R_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\nabla_\nu R, \quad (3.8)$$

esta ecuación nos dice que

$$\nabla_\mu T = 0. \quad (3.9)$$

La derivada covariante de un escalar, es la derivada parcial, esto nos dice que T es constante a lo largo del espaciotiempo. Esto es poco probable, dado que en el vacío $T = 0$ mientras que con materia $T > 0$, por lo tanto ec. (3.5) tiene serios problemas, tantos físicos como matemáticos.

En la sección anterior encontramos un tensor simétrico $(0, 2)$ construido a partir del tensor de Ricci que es conservado, este es el tensor de Einstein, luego las ecuaciones de campo de Einstein acopladas con materia son

$$G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (3.10)$$

Podemos ver que ec. (3.10) satisface todas las condiciones, el lado derecho es una expresión tensorial (0, 2), simétrico y conservado, mientras que el lado izquierdo es un tensor (0, 2) conservado y construido a partir de las primeras y segundas derivadas de la métrica.

Veamos si ec. (3.10) contiene ec. (3.4), para esto hacemos una contracción a ec. (3.10), esto nos entrega

$$R = -\kappa T, \quad (3.11)$$

luego reemplazando en ec. (3.10) obtenemos

$$R_{\mu\nu} = \kappa \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2} T g_{\mu\nu} \right). \quad (3.12)$$

Definimos el límite Newtoniano con tres condiciones: las partículas se mueven despacio esto nos dice que $\frac{dx^i}{d\tau} \ll \frac{dt}{d\tau}$; el campo gravitacional es debil, esto nos dice que el campo se puede considerar como una perturbación del espacio plano, en términos matemáticos tenemos

$$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}, \quad g^{\mu\nu} = \eta^{\mu\nu} - h^{\mu\nu}, \quad (3.13)$$

y finalmente el campo es estático, esto nos dice que no varía respecto del tiempo. En este límite la componente $T_{00} = \rho$ es más grande que todos los otros componentes del tensor de energía momento, por esta razón solo estudiaremos la componente $\mu = 0$ y $\nu = 0$ de ec. (3.12). La traza del tensor energía

$$T = g^{00} T_{00} = -T_{00}, \quad (3.14)$$

reemplazamos este resultado en ec.(3.12), obtenemos

$$R_{00} = \frac{1}{2} \kappa T_{00}. \quad (3.15)$$

Calculamos R_{00} a partir de $R_{0i}{}^i{}_0$

$$R_{0i}{}^i{}_0 = \partial_j \Gamma_0{}^i{}_0 - \partial_0 \Gamma_j{}^i{}_0 + \Gamma_j{}^i{}_\lambda \Gamma_0{}^\lambda{}_0 - \Gamma_0{}^i{}_\lambda \Gamma_j{}^\lambda{}_0. \quad (3.16)$$

De el lado derecho, el segundo término es cero debido a que trabajamos con un campo estático, el tercer y cuarto término son de la forma Γ^2 , las contribuciones provenientes de este tipo de término se pueden despreciar. Luego

$$\begin{aligned} R_{00} &= R_{0;0}^i, \\ &= \partial_i \left(\frac{1}{2} g^{i\lambda} (\partial_0 g_{\lambda 0} + \partial_0 g_{0\lambda} - \partial_\lambda g_{00}) \right), \\ &= -\frac{1}{2} \eta^{ij} \partial_i \partial_j h_{00}, \\ &= -\frac{1}{2} \nabla^2 h_{00}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

reemplazamos este resultado en ec.(3.15)

$$\nabla^2 h_{00} = -\kappa T_{00}, \quad (3.18)$$

de esta forma, para recuperar el límite Newtoniano

$$\kappa = 8\pi G, \quad (3.19)$$

luego las ecuaciones de campo de Einstein acopladas con materia contienen la teoría de Newton.

3.3. La acción de Hilbert y la constante cosmológica

Las ecuaciones de Einstein pueden ser derivadas a partir de la acción de Hilbert, esta acción es la integral sobre todo el espaciotiempo de la densidad Lagrangeana

$$S = \int d^n x L_H, \quad (3.20)$$

la densidad lagrangeana es una densidad tensorial escrita como el producto de $\sqrt{-g}\phi$ donde ϕ es un escalar. La pregunta es ¿Qué cantidades escalares podemos obtener a partir de la métrica? Sabemos que la métrica puede ser escrita en su forma canónica y su primera derivada igualada a cero en cualquier punto, por lo tanto cualquier escalar debe involucrar como mínimo las segundas derivadas de la métrica. El tensor de curvatura esta hecho a partir de segundas derivadas de la métrica y solo existe un escalar que podemos obtener de él, el escalar de curvatura R . Es posible demostrar que cualquier tensor no trivial construido a partir de la métrica (incluyendo su primera y segunda derivada) puede ser escrito en términos de la métrica y el tensor de Riemann. Por lo tanto el único escalar independiente que se puede extraer a partir de la métrica con derivadas no superiores a segundo orden es el escalar de curvatura R , luego la acción se define como

$$S_H = \int d^n x \sqrt{-g} R, \quad (3.21)$$

las ecuaciones de movimiento vienen de la variación con respecto a la métrica, para simplificar los cálculos haremos la variación respecto de la métrica inversa

$$\begin{aligned} 0 &= \delta S_H, \\ &= \int d^4 x \delta (\sqrt{-g} R), \\ &= \int d^4 x (\sqrt{-g} g^{\sigma\nu} (\delta R_{\sigma\nu}) + \sqrt{-g} (\delta g^{\sigma\nu}) R_{\mu\nu} + (\delta \sqrt{-g}) g^{\sigma\nu} R_{\sigma\nu}), \\ &= \int d^4 x (\delta S_1 + \delta S_2 + \delta S_3), \end{aligned} \quad (3.22)$$

a continuación calculamos cada término: para calcular δS_1 usamos la definición del tensor de Riemann

$$R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda, \quad (3.23)$$

como el tensor de Riemann solo depende de la conexión, una variación de este se puede expresar como

$$\delta R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho - \partial_\nu \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho + \delta \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \delta \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\nu\rho}^\lambda \delta \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda. \quad (3.24)$$

Ahora, como $\delta \Gamma_{\mu\rho}^\nu$ es la diferencia entre dos conexiones, esto es un tensor y por lo tanto podemos calcular su derivada covariante

$$\nabla_\mu (\delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho) = \partial_\mu (\delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho) + \Gamma_{\mu\rho}^\lambda \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\lambda}^\rho \delta \Gamma_{\nu\sigma}^\lambda - \Gamma_{\mu\sigma}^\lambda \delta \Gamma_{\nu\rho}^\lambda, \quad (3.25)$$

es fácil ver que ec. (3.24) puede ser escrita en términos de la derivada covariante de $\delta \Gamma$

$$\delta R^\rho{}_{\sigma\mu\nu} = \nabla_\mu (\delta \Gamma_{\nu\sigma}^\rho) - \nabla_\nu (\delta \Gamma_{\mu\sigma}^\rho), \quad (3.26)$$

a partir de esta última ecuación podemos encontrar la variación del tensor de Ricci, realizando la contracción de índices

$$\delta R_{\sigma\nu} \equiv \delta R^{\rho}_{\sigma\rho\nu} = \nabla_{\rho}(\delta\Gamma_{\nu}^{\rho\sigma}) - \nabla_{\nu}(\delta\Gamma_{\rho}^{\rho\sigma}), \quad (3.27)$$

luego, podemos escribir la integral de δS_1 de la siguiente forma

$$\int d^4x \sqrt{-g} \nabla_{\rho} (g^{\sigma\nu} \delta\Gamma_{\nu}^{\rho\sigma} - g^{\sigma\rho} \delta\Gamma_{\mu}^{\mu\sigma}), \quad (3.28)$$

en ese punto usamos la compatibilidad de la métrica y cambiamos los índices mudos. Esta última integral corresponde a la divergencia de un vector, por el teorema de Stokes, esto es equivalente a la contribución de los términos en la frontera cuya contribución es nula. Para δS_2 la expresión ya está de la forma que buscamos: algo multiplicado por $\delta g^{\mu\nu}$, y para calcular δS_3 usamos

$$\begin{aligned} \delta S_3 &= \delta \left[(-g^{-1})^{-1/2} \right], \\ &= -\frac{1}{2} (-g^{-1})^{-3/2} \delta (-g^{-1}), \\ &= -\frac{1}{2} \sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} \end{aligned} \quad (3.29)$$

donde se hizo uso de la siguiente propiedad

$$\delta (g^{-1}) = \frac{1}{g} g_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu}. \quad (3.30)$$

Reemplazamos ecs. (3.29) en ec. (3.22)

$$\delta S = \int d^n x \sqrt{-g} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu} = 0, \quad (3.31)$$

luego la variación respecto de la métrica inversa, nos entregamos ecuaciones de campo de Einstein en el vacío

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.32)$$

La constante cosmológica Λ propuesta por Einstein, corresponde a una modificación de la ecuación original de campo gravitacional y corresponde a la energía de vacío. Esta se agrega para conseguir una solución que describa un universo estático. Se introduce a nivel de acción

$$S = \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (3.33)$$

las ecuaciones de movimiento son

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} R + \Lambda g_{\mu\nu} = 0. \quad (3.34)$$

El valor experimental de la constante cosmológica $\Lambda \sim 10^{-52} m^{-2}$ [57], no concuerda con el valor predicho por la teoría cuántica de campos. Esta última predice un valor que es 120 órdenes de magnitud más grande que el valor medido. Esta discrepancia ha sido calificada como *la peor predicción en la historia de la física*.

3.4. Tensor de energía-momento

En este punto nos gustaría obtener las ecuaciones de campo de Einstein acopladas con materia, para esto, agregamos a la acción un nuevo término de materia

$$S = \frac{1}{8\pi G} S_H + S_M, \quad (3.35)$$

donde S_M es la acción de la materia, y la acción esta normalizada. Siguiendo el mismo procedimiento de la sección anterior, variamos la acción respecto de la métrica inversa, esto nos lleva a

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{8\pi G} \left(R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}} = 0, \quad (3.36)$$

de esta forma, definimos el tensor de energía momento como

$$T_{\mu\nu} = -\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_M}{\delta g^{\mu\nu}}. \quad (3.37)$$

Gravedad Afín Polinomial

4.1. La acción afín

La gravedad afín polinomial es una teoría alternativa a la Relatividad General de Einstein, que busca describir las interacciones gravitacionales utilizando como campo fundamental, la conexión afín, esto excluye el concepto de tensor métrico en nuestro modelo. La conexión afín puede ser decompuesta, en sus partes simétrica y antisimétrica respectivamente:

$$\hat{\Gamma}_{\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma} = \hat{\Gamma}_{(\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma)} + \hat{\Gamma}_{[\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma]}, \quad (4.1)$$

$$= \hat{\Gamma}_{(\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma)} + \epsilon_{\rho\sigma\lambda\kappa} \Gamma^{\mu,\lambda\kappa} + A_{[\rho} \delta_{\nu]}^{\mu}. \quad (4.2)$$

Donde la parte simétrica corresponde a $\hat{\Gamma}_{(\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma)} = \Gamma_{(\rho}{}^{\mu}{}_{\sigma)}$, mientras que la parte antisimétrica se compone por el campo A_{μ} , este corresponde a la traza del tensor de torsión, y $\Gamma^{\mu,\lambda\kappa}$ es el campo Curtright [58], este campo satisface las propiedades $\Gamma^{\kappa,\mu\nu} = -\Gamma^{\kappa,\nu\mu}$ y $\epsilon_{\lambda\kappa\mu\nu} \Gamma^{\kappa,\mu\nu} = 0$. La relación entre los epsilons con índices superiores e inferiores, esta dada por $\epsilon^{\delta\eta\lambda\kappa} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} = 4! \delta^{\delta}_{[\mu} \delta^{\eta}_{\nu} \delta^{\lambda}_{\rho} \delta^{\kappa}_{\sigma]}$.

Los elementos que componen la conexión afín son tres: $\Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}$, $T^{\mu,\lambda\kappa}$ y A_{μ} . Sin embargo, la conexión $\Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}$, es un elemento que bajo transformaciones de coordenadas, introduce un término no homogéneo, esto debido a que no es un tensor. A la hora de construir la acción de la gravedad afín, buscamos que esta sea invariante bajo difeomorfismo, es por esta razón que este elemento simétrico no puede entrar de forma directa en esta acción. Utilizaremos la derivada covariante ∇_{μ} para introducir la conexión de forma indirecta. El tensor de curvatura de Riemann $R_{\nu\lambda}{}^{\mu}{}_{\rho}$, no entra como uno de los ingredientes para construir la acción, debido a que es el producto del conmutador de derivadas covariantes, por lo tanto no es un campo fundamental. Luego los tres elementos para construir la acción son: ∇_{μ} , $T^{\mu,\lambda\kappa}$ y A_{μ} .

Es importante recalcar, que estamos trabajando en un espaciotiempo, donde no existe el tensor métrico, por lo tanto la noción de distancia o longitud de arco, no esta definida. Las consecuencias de esto: no es posible transformar vectores en sus representaciones duales, los covectores y viceversa, como resultado, no es posible clasificar los vectores como tipo tiempo, espacio o nulo. Sin embargo, la contracción, es una operación bien definida, y no necesita de un campo métrico como mediador.

La acción de la gravedad afín polinomial fue postulada por primera vez en [46], esta es construida utilizando un tipo de *análisis dimensional*. Acá presentamos la acción más genérica,

invariante bajo difeomorfismo es

$$\begin{aligned}
 S[\Gamma, T, A] = \int d^4x \left[& B_1 R_{\mu\nu}{}^\mu{}_\rho T^{\nu,\alpha\beta} T^{\rho,\gamma\delta} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} + B_2 R_{\mu\nu}{}^\sigma{}_\rho T^{\beta,\mu\nu} T^{\rho,\gamma\delta} \epsilon_{\sigma\beta\gamma\delta} + B_3 R_{\mu\nu}{}^\mu{}_\rho T^{\nu,\rho\sigma} A_\sigma \right. \\
 & + B_4 R_{\mu\nu}{}^\sigma{}_\rho T^{\rho,\mu\nu} A_\sigma + B_5 R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\rho T^{\sigma,\mu\nu} A_\sigma + C_1 R_{\mu\rho}{}^\mu{}_\nu \nabla_\sigma T^{\nu,\rho\sigma} + C_2 R_{\mu\nu}{}^\rho{}_\rho \nabla_\sigma T^{\sigma,\mu\nu} \\
 & + D_1 T^{\alpha,\mu\nu} T^{\beta,\rho\sigma} \nabla_\gamma T^{(\lambda,\kappa)\gamma} \epsilon_{\beta\mu\nu\lambda} \epsilon_{\alpha\rho\sigma\kappa} + D_2 T^{\alpha,\mu\nu} T^{\lambda,\beta\gamma} \nabla_\lambda T^{\delta,\rho\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \\
 & + D_3 T^{\mu,\alpha\beta} T^{\lambda,\nu\gamma} \nabla_\lambda T^{\delta,\rho\sigma} \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} + D_4 T^{\lambda,\mu\nu} T^{\kappa,\rho\sigma} \nabla_{(\lambda} A_{\kappa)} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} \\
 & + D_5 T^{\lambda,\mu\nu} \nabla_{[\lambda} T^{\kappa,\rho\sigma} A_{\kappa]} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} + D_6 T^{\lambda,\mu\nu} A_\nu \nabla_{(\lambda} A_{\mu)} + D_7 T^{\lambda,\mu\nu} A_\lambda \nabla_{[\mu} A_{\nu]} \\
 & + E_1 \nabla_{(\rho} T^{\rho,\mu\nu} \nabla_{\sigma)} T^{\sigma,\lambda\kappa} \epsilon_{\mu\nu\lambda\kappa} + E_2 \nabla_{(\lambda} T^{\lambda,\mu\nu} \nabla_{\mu)} A_\nu \\
 & + T^{\alpha,\beta\gamma} T^{\delta,\eta\kappa} T^{\lambda,\mu\nu} T^{\rho,\sigma\tau} \left(F_1 \epsilon_{\beta\gamma\eta\kappa} \epsilon_{\alpha\rho\mu\nu} \epsilon_{\delta\lambda\sigma\tau} + F_2 \epsilon_{\beta\lambda\eta\kappa} \epsilon_{\gamma\rho\mu\nu} \epsilon_{\alpha\delta\sigma\tau} \right) \\
 & \left. + F_3 T^{\rho,\alpha\beta} T^{\gamma,\mu\nu} T^{\lambda,\sigma\tau} A_\tau \epsilon_{\alpha\beta\gamma\lambda} \epsilon_{\mu\nu\rho\sigma} + F_4 T^{\eta,\alpha\beta} T^{\kappa,\gamma\delta} A_\eta A_\kappa \epsilon_{\alpha\beta\gamma\delta} \right].
 \end{aligned} \tag{4.3}$$

Donde los términos relacionados por medio de integración parcial, y los invariantes topológicos son dejados afuera, un ejemplo de este último, es la densidad de Euler cuatro dimensional. Es posible demostrar, por medio de *análisis dimensional* que, no es factible agregar más términos a la acción.

La acción escrita en ec. (4.3) presenta un serie de características interesantes: (i) todas las constantes de acoplamiento son adimensionales, esto sugiere la invariancia conformal del modelo; (ii) las ecuaciones de movimiento, en el espaciotiempo libre de torsión, corresponden a una generalización de las ecuaciones de campo de Einstein [47]; (iii) la versión no relativista de la ecuación de la desviación geodésica concuerda con la producida por el potencial Kepleriano [46]; (iv) es una serie de potencia renormalizable, esta es una condición necesaria pero no suficiente para garantizar que el modelo sea renormalizable.

La acción presentada en ec. (4.3), puede ser escrita de una forma más económica, utilizando una parametrización de la densidad tensorial $B_\mu{}^\lambda{}_\nu = \epsilon_{\mu\nu\rho\kappa} \Gamma^{\lambda,\rho\kappa}$, donde $B_\mu{}^\lambda{}_\nu$ se relaciona con el tensor de torsión sin traza. Luego la conexión afín puede ser escrita de la siguiente forma:

$$\widehat{\Gamma}_\mu{}^\lambda{}_\nu = \Gamma_\mu{}^\lambda{}_\rho + B_\mu{}^\lambda{}_\nu + A_{[\mu} \delta_{\nu]}^\lambda. \tag{4.4}$$

La acción, se construye ahora utilizando los elementos de la ec. (4.4), es importante recordar que, la parte simétrica de la conexión afín, no entra de forma directa, debido a que no es un tensor. Utilizando *análisis dimensional*, presentamos la nueva acción:

$$\begin{aligned}
 S = \int \left[& B_1 R_{\mu\nu}{}^\mu{}_\rho B_\alpha{}^\nu{}_\beta B_\gamma{}^\rho{}_\delta + B_2 R_{\alpha\beta}{}^\mu{}_\rho B_\gamma{}^\nu{}_\delta B_\mu{}^\rho{}_\nu + B_3 R_{\mu\nu}{}^\mu{}_\alpha B_\beta{}^\nu{}_\gamma A_\delta + B_4 R_{\alpha\beta}{}^\sigma{}_\rho B_\gamma{}^\rho{}_\delta A_\sigma + \right. \\
 & B_5 R_{\alpha\beta}{}^\rho{}_\rho B_\gamma{}^\sigma{}_\delta A_\sigma + C_1 R_{\mu\alpha}{}^\mu{}_\nu \nabla_\beta B_\gamma{}^\nu{}_\delta + C_2 R_{\alpha\beta}{}^\rho{}_\rho \nabla_\sigma B_\gamma{}^\sigma{}_\delta + D_1 B_\nu{}^\mu{}_\lambda B_\mu{}^\nu{}_\alpha \nabla_\beta B_\gamma{}^\lambda{}_\delta + \\
 & D_2 B_\alpha{}^\mu{}_\beta B_\mu{}^\lambda{}_\nu \nabla_\lambda B_\gamma{}^\nu{}_\delta + D_3 B_\alpha{}^\mu{}_\nu B_\beta{}^\lambda{}_\gamma \nabla_\lambda B_\mu{}^\nu{}_\delta + D_4 B_\alpha{}^\lambda{}_\beta B_\gamma{}^\sigma{}_\delta \nabla_\lambda A_\sigma + D_5 B_\alpha{}^\lambda{}_\beta A_\sigma \nabla_\lambda B_\gamma{}^\sigma{}_\delta + \\
 & D_6 B_\alpha{}^\lambda{}_\beta A_\gamma \nabla_\lambda A_\delta + D_7 B_\alpha{}^\lambda{}_\beta A_\lambda \nabla_\gamma A_\delta + E_1 \nabla_\rho B_\alpha{}^\rho{}_\beta \nabla_\sigma B_\gamma{}^\sigma{}_\delta + E_2 \nabla_\rho B_\alpha{}^\rho{}_\beta \nabla_\gamma A_\delta + \\
 & F_1 B_\alpha{}^\mu{}_\beta B_\gamma{}^\sigma{}_\delta B_\mu{}^\lambda{}_\rho B_\sigma{}^\rho{}_\lambda + F_2 B_\alpha{}^\mu{}_\beta B_\gamma{}^\nu{}_\lambda B_\delta{}^\lambda{}_\rho B_\mu{}^\rho{}_\nu + F_3 B_\nu{}^\mu{}_\lambda B_\mu{}^\nu{}_\alpha B_\beta{}^\lambda{}_\gamma A_\delta + \\
 & \left. F_4 B_\alpha{}^\mu{}_\beta B_\gamma{}^\nu{}_\delta A_\mu A_\nu \right] dV^{\alpha\beta\gamma\delta}.
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

La ventaja de esta nueva formulación del model, radica en la descomposición usada en ec. (4.4), los campos utilizados tienen una interpretación geométrica más sencilla. En ec. (4.5), introducimos la forma de volumen $dV^{\alpha\beta\gamma\delta} = f(x)dx^\alpha \wedge dx^\beta \wedge dx^\gamma \wedge dx^\delta$ para una función no nula arbitraria $f(x)$, y al igual que antes, no se incluyen los terminos que se pueden relacionar por medio de integración parcial, y aquellos que son invariantes topológicos. El *análisis dimensional*, muestra la imposibilidad de incluir nuevos términos, para más información sobre este procedimiento y detalles, ver apéndice A.

4.2. Ecuaciones de campos

Las ecuaciones de campos, para la ec.(4.5) se obtienen, utilizando el formalismo de Euler-Lagrange para el campo Φ

$$\partial_\mu \left(\frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \Phi)} \right) = \frac{\partial L}{\partial \Phi}.$$

A continuación presentaremos una forma alternativa de escribir las ecuaciones de campos de Euler-Lagrange, esto permite que los cálculos sean más sencillos Ref. [49].¹

Para trabajar con las ecuaciones de campo de la parte simétrica de la conexión, introducimos la notación del momento

$$\Pi_{\Gamma^{\mu\nu}}{}_{\lambda\rho} = \frac{\partial L}{\partial \Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda\rho}} = \frac{\partial L}{\partial (\partial_\mu \Gamma_\nu{}^{\lambda\rho})}. \quad (4.6)$$

Como las derivadas de la conexión entra solo a través de la curvatura, uno puede usar la regla de la cadena para calcular sus contribuciones

$$\begin{aligned} \Pi_{\Gamma^{\mu\nu}}{}_{\lambda\rho} &= \frac{\partial L}{\partial R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}} \frac{\partial R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}}{\partial \Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda\rho}}, \\ &= z^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta} \frac{\partial R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}}{\partial \Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda\rho}}, \end{aligned} \quad (4.7)$$

donde introducimos la variable auxiliar $z^{\alpha\beta}{}_{\gamma\delta}$, y el último término puede ser calculado utilizando la definición del tensor de curvatura

$$\frac{\partial R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}}{\partial \Gamma_{\mu\nu}{}^{\lambda\rho}} = 4\delta_\lambda^\gamma \delta_{[\alpha}^\mu \delta_{\beta]}^{\nu] \delta}. \quad (4.8)$$

Sustituyendo esta identidad en ec.(4.7) obtenemos

$$\Pi_{\Gamma^{\mu\nu}}{}_{\lambda\rho} = 2z^{[\mu\nu]}{}_{\lambda\rho} + 2z^{[\mu\rho]}{}_{\lambda\nu}. \quad (4.9)$$

Por otro lado, la derivada del Lagrangeano con respecto de la conexión, puede ser escrita en términos de sus dos contribuciones, esto depende si viene o no del tensor de curvatura

$$\frac{\partial L}{\partial \Gamma_\mu{}^{\lambda\nu}} = \frac{\partial L}{\partial R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}} \frac{\partial R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}}{\partial \Gamma_\mu{}^{\lambda\nu}} + \frac{\partial^* L}{\partial \Gamma_\mu{}^{\lambda\nu}}, \quad (4.10)$$

¹Nuestra notación, difiere de la usada en el trabajo citado.

donde el último término hace referencia a las derivadas con respecto a las conexiones que no están contenidas en el tensor de curvatura. De la definición del tensor de curvatura tenemos

$$\frac{\partial R_{\alpha\beta}{}^{\gamma\delta}}{\partial \Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}} = 4 \left(\delta_{\lambda}^{\gamma} \delta_{[\alpha}^{(\nu} \Gamma_{\beta]}^{\rho)}_{\delta} + \delta_{\delta}^{\rho} \delta_{[\beta}^{(\nu} \Gamma_{\alpha]}^{\gamma)}_{\lambda} \right). \quad (4.11)$$

Reemplazando esta identidad en ec. (4.10) obtenemos

$$\frac{\partial L}{\partial \Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}} = -\Pi_{\Gamma}{}^{\mu\nu}{}_{\lambda}{}^{\delta} \Gamma_{\mu}{}^{\rho}{}_{\delta} - \Pi_{\Gamma}{}^{\mu\rho}{}_{\lambda}{}^{\delta} \Gamma_{\mu}{}^{\nu}{}_{\delta} + \Pi_{\Gamma}{}^{\mu\nu}{}_{\gamma}{}^{\rho} \Gamma_{\mu}{}^{\gamma}{}_{\lambda} + \frac{\partial^* L}{\partial \Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}}. \quad (4.12)$$

Sustituyendo ecs. (4.9) y (4.12) en ec. (4.6), tenemos:

$$\nabla_{\mu} \Pi_{\Gamma}{}^{\mu\nu}{}_{\lambda}{}^{\rho} = \frac{\partial^* L}{\partial \Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}}, \quad (4.13)$$

donde la derivada covariante de la densidad tensorial viene dada por

$$\nabla_{\sigma} \Pi_{\Gamma}{}^{\mu\nu}{}_{\lambda}{}^{\rho} = \partial_{\sigma} \Pi_{\Gamma}{}^{\mu\nu}{}_{\lambda}{}^{\rho} + \Gamma_{\sigma}{}^{\mu}{}_{\tau} \Pi_{\Gamma}{}^{\tau\nu}{}_{\lambda}{}^{\rho} + \Gamma_{\sigma}{}^{\nu}{}_{\tau} \Pi_{\Gamma}{}^{\mu\tau}{}_{\lambda}{}^{\rho} - \Gamma_{\sigma}{}^{\tau}{}_{\lambda} \Pi_{\Gamma}{}^{\mu\nu}{}_{\tau}{}^{\rho} + \Gamma_{\sigma}{}^{\rho}{}_{\tau} \Pi_{\Gamma}{}^{\mu\nu}{}_{\lambda}{}^{\tau} - \Gamma_{\sigma}{}^{\tau}{}_{\tau} \Pi_{\Gamma}{}^{\mu\nu}{}_{\lambda}{}^{\rho}. \quad (4.14)$$

Las ecuaciones de campo para $B_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}$ y A_{μ} siguen el mismo procedimiento, salvo que estos campos no presentan contribuciones que vienen del tensor de curvatura. De esta forma, las ecuaciones de campo para los tres campos son:

$$\nabla_{\mu} \Pi_{\Gamma}{}^{\mu\nu}{}_{\lambda}{}^{\rho} = \frac{\partial^* L}{\partial \Gamma_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}}, \quad \nabla_{\mu} \Pi_B{}^{\mu\nu}{}_{\lambda}{}^{\rho} = \frac{\partial L}{\partial B_{\mu}{}^{\lambda}{}_{\nu}}, \quad \nabla_{\mu} \Pi_A{}^{\mu\nu} = \frac{\partial L}{\partial A_{\nu}}. \quad (4.15)$$

4.3. El sector libre de torsión

Con el fin de simplificar los cálculos, centramos nuestro estudio en el espacio libre de torsión, esto implica hacer nula las contribuciones asociadas a los campos $B, A \rightarrow 0$, esto se debe hacer a nivel de ecuaciones de campos. Sin embargo, notamos que las únicas contribuciones no nulas vendrán de los términos que son lineales en dichos campos, estos son los términos que acompañan las constantes C_1 y C_2 . De esta forma podemos obtener una acción efectiva

$$S_{ef} = \int \left[C_1 R_{\mu\alpha}{}^{\mu}{}_{\nu} \nabla_{\beta} + C_2 R_{\alpha\beta}{}^{\rho}{}_{\rho} \nabla_{\nu} \right] B_{\gamma}{}^{\nu}{}_{\delta} dV^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (4.16)$$

El momento del campo B para la acción efectiva es:

$$\Pi_B{}^{\mu\nu}{}_{\lambda}{}^{\rho} = -2R_{\sigma\alpha}{}^{\sigma}{}_{\lambda} dV^{\mu\nu\rho\alpha} + 2R_{\alpha\beta}{}^{\sigma}{}_{\sigma} dV^{\nu\rho\alpha\beta}. \quad (4.17)$$

Las ecuaciones de campo son:

$$\nabla_{\mu} \left(-2C_1 R_{\sigma\alpha}{}^{\sigma}{}_{\lambda} dV^{\mu\nu\rho\alpha} + 2C_2 R_{\alpha\beta}{}^{\sigma}{}_{\sigma} dV^{\nu\rho\alpha\beta} \right) = 0. \quad (4.18)$$

En la formulación Riemanniana de la geometría diferencial, el tensor de curvatura es antisimétrico en los dos últimos índices, esto nos indica que el segundo término en la ec. (4.18) es

cero. Para conexiones no-Riemannianas el segundo término sigue siendo cero, siempre y cuando la conexión sea compatible con una forma de volumen, estas conexiones se conocen como conexiones equi-afín Ref. [59]. Luego las ecuaciones de movimiento se reducen a la siguiente expresión

$$\nabla_{[\mu} R_{\nu]\lambda} = 0. \quad (4.19)$$

Usando la segunda identidad de Bianchi

$$\nabla_{\lambda} R_{\mu\nu}{}^{\delta}{}_{\gamma} + \nabla_{\mu} R_{\nu\lambda}{}^{\delta}{}_{\gamma} + \nabla_{\nu} R_{\lambda\mu}{}^{\delta}{}_{\gamma} = 0, \quad (4.20)$$

podemos escribir ec. (4.19) como:

$$\nabla_{\rho} R_{\mu\nu}{}^{\rho}{}_{\lambda} = 0, \quad (4.21)$$

esta última ecuación se conoce como curvatura armónica. Estas ecuaciones son generalizaciones conocidas de las ecuaciones de campo de Einstein en el vacío [60].

Por completitud, en el apéndice B se presentan las ecuaciones de campo para ec. (4.5), y uno puede demostrar que el límite mencionado está bien definido.

La ec. (4.21) también se puede obtener por medio de la formulación Yang-Mills de la gravedad, usando el enfoque de palatini, la acción propuesta se conoce como la acción de Stephenson-Kilmister-Yang (SKY) [61–63]. Viene dada por

$$S_{SKY} = \int d^4x \sqrt{g} g^{\mu\nu} g^{\sigma\tau} R_{\mu\sigma}{}^{\lambda}{}_{\rho} R_{\nu\tau}{}^{\rho}{}_{\lambda}. \quad (4.22)$$

Los ansatz

La ecuación de la gravedad afín polinomial corresponde a la *curvatura armónica*. Para resolver esta ecuación postulamos un ansatz para la conexión afín que sea compatible con las simetrías del principio cosmológico: isotropía y homogeneidad. Nos restringiremos a trabajar en el espaciotiempo libre de torsión.

Con el fin de ilustrar el procedimiento para construir el ansatz de la conexión afín, empezaremos con un caso más sencillo, el ansatz métrico. Se estudia el caso métrico debido a la gran importancia que presenta en Relatividad General. La conexión afín ∇ se conoce como conexión Levi-Civita si satisface las condiciones de

- Metricidad $\nabla g = 0$.
- Trabajamos en un espaciotiempo sin torsión.

Si la métrica es compatible con las simetrías del principio cosmológico entonces la métrica es la de Friedmann–Robertson–Walker.

Para construir el ansatz (métrico y afín) asumiremos la dependencia de las coordenadas de la forma más general y aplicaremos la derivada de Lie a este tensor. Empezaremos usando los tres vectores de Killing asociados a la simetría de isotropía, esto nos permite generar un tensor que no contega direcciones privilegiadas. Luego bastará con utilizar un vector de Killing de homogeneidad.¹²

Utilizamos el paquete SageManifolds del software SageMath [64–66].

5.1. Ansatz métrico

Nuestro ansatz métrico asume la dependencia de las coordenadas de la forma más general, luego definimos el ansatz como

$$T_{\mu\nu} = T_{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi). \quad (5.1)$$

5.1.1. Ansatz métrico isotrópico

Aplicamos la derivada de Lie (2.36) al tensor métrico presentado en (5.1), utilizando como campo vectorial J_3 (2.67)

$$\mathcal{L}_{J_3} T_{\mu\nu} = \frac{\partial T_{\mu\nu}(t, r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi}, \quad (5.2)$$

¹Notación $s(\varphi) = \sin(\varphi)$ y $c(\varphi) = \cos(\varphi)$.

²Cuando no se incluye la dependencia de la componente en la ecuación, esta estará dada en las soluciones.

solo será cero si, el tensor $T_{\mu\nu}$ no es función del parámetro φ . De esta forma eliminamos la dependencia de la variable angular φ de nuestro tensor $T_{\mu\nu}$, y ahora este solo dependerá de tres variables $T_{\mu\nu}(t, r, \theta)$.

Ahora usamos el vector J_1 (ec. (2.65)) para la derivada de Lie, y obtenemos un set de 16 ecuaciones diferenciales, de las cuales solo cuatro presentan una solución directa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{J_1}T_{tt} &= -\cos(\varphi)\frac{\partial T_{00}(t, r, \theta)}{\partial\theta}, & \mathcal{L}_{J_1}T_{tr} &= -\cos(\varphi)\frac{\partial T_{01}(t, r, \theta)}{\partial\theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1}T_{rt} &= -\cos(\varphi)\frac{\partial T_{10}(t, r, \theta)}{\partial\theta}, & \mathcal{L}_{J_1}T_{rr} &= -\cos(\varphi)\frac{\partial T_{11}(t, r, \theta)}{\partial\theta}.\end{aligned}$$

La solución a este set de cuatro ecuaciones, es que las componentes T_{00}, T_{01}, T_{10} y T_{11} , no pueden tener una dependencia de la coordenada θ , deben depender de las coordenadas r y t .

En ese punto, si utilizamos el vector J_2 (ec. (2.66)), obtendremos un resultado similar al obtenido usando el vector J_1 , esto no nos entrega nuevas restricciones. Por esta razón, utilizaremos combinaciones lineales de la derivada de Lie, usando los campos vectoriales J_1 y J_2 , en particular usaremos primero la suma y luego la resta. La suma queda definida por la siguiente ecuación

$$\mathcal{L}_{J_1}T_{\nu\lambda}\sin(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}T_{\nu\lambda}\cos(\varphi) = 0. \quad (5.3)$$

A continuación mostramos el set de ecuaciones no nulas para la suma

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{J_1}T_{02}s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}T_{02}c(\varphi) &= -\frac{T_{03}}{\sin^2(\theta)}, & \mathcal{L}_{J_1}T_{03}s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}T_{03}c(\varphi) &= T_{02}, \\ \mathcal{L}_{J_1}T_{12}s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}T_{12}c(\varphi) &= -\frac{T_{13}}{\sin^2(\theta)}, & \mathcal{L}_{J_1}T_{13}s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}T_{13}c(\varphi) &= T_{12}, \\ \mathcal{L}_{J_1}T_{20}s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}T_{20}c(\varphi) &= -\frac{T_{30}}{\sin^2(\theta)}, & \mathcal{L}_{J_1}T_{21}s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}T_{21}c(\varphi) &= -\frac{T_{31}}{\sin^2(\theta)}, \\ \mathcal{L}_{J_1}T_{22}s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}T_{22}c(\varphi) &= -\frac{T_{23} + T_{32}}{\sin^2(\theta)}, & \mathcal{L}_{J_1}T_{30}s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}T_{30}c(\varphi) &= T_{20}, \\ \mathcal{L}_{J_1}T_{23}s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}T_{23}c(\varphi) &= \frac{T_{22}\sin^2(\theta) - T_{33}}{\sin^2(\theta)}, & \mathcal{L}_{J_1}T_{31}s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}T_{31}c(\varphi) &= T_{21}.\end{aligned}$$

Las soluciones son directas, las componentes $T_{03}, T_{02}, T_{13}, T_{12}, T_{30}, T_{31}, T_{20}, T_{21}$ deben ser cero, mientras que las otras componentes satisfacen las siguientes relaciones

$$T_{32}(t, r, \theta) = -T_{23}(t, r, \theta), \quad T_{33}(t, r, \theta) = T_{22}(t, r, \theta)\sin^2(\theta).$$

Repetimos el mismo procedimiento para la resta

$$\mathcal{L}_{J_1}T_{\nu\lambda}\sin(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}T_{\nu\lambda}\cos(\varphi) = 0. \quad (5.4)$$

A continuación mostramos el set de ecuaciones no nulas para la resta

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{J_1}T_{22}\sin(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}T_{22}\cos(\varphi) &= -2\cos(\varphi)\sin(\varphi)\frac{\partial T_{22}(t, r, \theta)}{\partial\theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1}T_{23}\sin(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}T_{23}\cos(\varphi) &\sim T_{23}(t, r, \theta)\cos(\theta) - \sin(\theta)\frac{\partial T_{23}(t, r, \theta)}{\partial\theta}.\end{aligned}$$

La primera ecuación será cero, siempre y cuando la componente T_{22} , no dependa de la variable θ . La segunda ecuación es una ecuación diferencial que nos entrega la dependencia angular de la componente T_{33}

$$T_{22}(t, r, \theta) = T_{22}(t, r), \quad T_{23}(t, r, \theta) = T_{23}(t, r) \sin \theta.$$

Finalmente el tensor $T_{\mu\nu}$ mas genérico bajo condiciones de isotropía es

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} T_{00}(t, r) & T_{01}(t, r) & 0 & 0 \\ T_{10}(t, r) & T_{11}(t, r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{22}(t, r) & T_{23}(t, r) \sin(\theta) \\ 0 & 0 & -T_{23}(t, r) \sin(\theta) & T_{22}(t, r) \sin^2(\theta) \end{bmatrix}. \quad (5.5)$$

El ansatz métrico, presentado en ec. (5.5), tiene una estructura que es de gran interés, esto se debe a que es posible eliminar los términos asociados a la componente T_{23} , siempre y cuando estemos trabajando en un espaciotiempo libre de torsión

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} T_{00}(t, r) & T_{10}(t, r) & 0 & 0 \\ T_{10}(t, r) & T_{11}(t, r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{22}(t, r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{22}(t, r) \sin^2(\theta) \end{bmatrix}.$$

El elemento de línea es

$$ds^2 = T_{00}(t, r)d\Gamma^2 + 2T_{10}(t, r)dt dr + T_{11}dr^2 + T_{22}d\theta^2 + T_{22} \sin^2 \theta d\varphi^2.$$

Podemos hacer una redefinición de la coordenada temporal, para eliminar los términos fuera de la diagonal

$$\begin{aligned} T(t, r) &= t + \psi(r), \\ dT(t, r) &= dt + \psi'(r)dr, \\ dT^2(t, r) &= dt^2 + \psi'^2(r)dr^2 + \psi'(r)dr dt. \end{aligned} \quad (5.6)$$

De esta última ecuación podemos encontrar una expresión para dT^2 , y reemplazamos en el elemento de línea

$$ds^2 = T_{00}dt^2 + (T_{00}\psi'^2(r) + T_{11})dr^2 + (2T_{00}\psi'(r)dr dt + 2T_{10}(t, r)dt dr) + T_{22}d\Omega^2,$$

para poder eliminar los términos fuera de la diagonal, debemos resolver la ecuación

$$\frac{d\psi(r)}{dr} = -\frac{T_{10}(t, r)}{T_{00}(t, r)}.$$

Por razones históricas, se elige $T_{10}(t, r) = 0$ de esta forma $\psi(r) = cte$, y reemplazamos este resultado en el nuevo elemento de línea

$$ds^2 = T_{00}(t, r)dt^2 + T_{11}(t, r)dr^2 + T_{22}(t, r)d\Omega^2,$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2$.

Finalmente encontramos el tensor mas genérico, el cual toma la forma standar

$$g_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} T_{00}(t, r) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & T_{11}(t, r) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & T_{22}(t, r) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & T_{22}(t, r) \sin^2(\theta) \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

5.1.2. Ansatz métrico isotrópico y homogéneo

Con el fin de simplificar los cálculos, se utilizará el vector $J_{3'}$ (ec. (2.75)), como campo vectorial para la derivada de Lie. Esto entrega un set de 10 ecuaciones independientes

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{J_{3'}} T_{tt} &= \sqrt{1 - \kappa r^2} \cos(\theta) \frac{\partial T_{00}}{\partial r}, & \mathcal{L}_{J_{3'}} T_{tr} &\sim \left(\kappa r T_{01} + (\kappa r^2 - 1) \frac{\partial T_{01}}{\partial r} \right), \\
\mathcal{L}_{J_{3'}} T_{t\theta} &= -\sqrt{1 - \kappa r^2} T_{01}(t, r) \sin(\theta), & \mathcal{L}_{J_{3'}} T_{rt} &\sim \left(\kappa r T_{10} + (\kappa r^2 - 1) \frac{\partial T_{10}}{\partial r} \right), \\
\mathcal{L}_{J_{3'}} T_{rr} &\sim \left(2\kappa r T_{11} + (\kappa r^2 - 1) \frac{\partial T_{11}}{\partial r} \right), & \mathcal{L}_{J_{3'}} T_{r\theta} &\sim \left((\kappa r^4 - r^2) T_{11}(t, r) + T_{22}(t, r) \right), \\
\mathcal{L}_{J_{3'}} T_{\theta\varphi} &\sim \sqrt{1 - \kappa r^2} \left(r \frac{\partial T_{23}}{\partial r} - 2T_{23}(t, r) \right), & \mathcal{L}_{J_{3'}} T_{\theta t} &= -\sqrt{1 - \kappa r^2} T_{10}, \\
\mathcal{L}_{J_{3'}} T_{\theta\theta} &\sim \sqrt{1 - \kappa r^2} \left(r \frac{\partial T_{22}}{\partial r} - 2T_{22}(t, r) \right), & \mathcal{L}_{J_{3'}} T_{r\varphi} &= \frac{T_{23}(t, r) \sin^2(\theta)}{\sqrt{1 - \kappa r^2} r^2}.
\end{aligned}$$

Este es un sistema de ecuaciones que puede ser reducido, considerando las siguientes restricciones entregadas por el mismo. Las componentes $T_{00}, T_{01}, T_{10}, T_{23}, T_{32}$ deben ser cero. Como consecuencia de esto, el sistema se reduce a solo 3 ecuaciones

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{J_{3'}} T_{rr} &\sim 2\kappa r T_{11} + (\kappa r^2 - 1) \frac{\partial T_{11}}{\partial r}, & \mathcal{L}_{J_{3'}} T_{r\theta} &\sim (\kappa r^4 - r^2) T_{11}(t, r) + T_{22}(t, r), \\
\mathcal{L}_{J_{3'}} T_{\theta\theta} &\sim r \frac{\partial T_{22}}{\partial r} - 2T_{22}(t, r)
\end{aligned}$$

Las soluciones a este sistema de ecuaciones nos entrega la dependencia radial de las componentes T_{11} y T_{22} , y como se relacionan ambas

$$T_{11}(t, r) = \frac{T_{11}(t)}{\kappa r^2 - 1}, \quad T_{22}(t, r) = T_{11}(t, r) r^2 (1 - \kappa r^2).$$

Finalmente el ansatz métrico es

$$T_{\mu\nu} = \begin{bmatrix} T_{00}(t) & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{T_{11}(t)}{1 - \kappa r^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & r^2 T_{11}(t) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & r^2 T_{11}(t) \sin^2(\theta) \end{bmatrix}. \quad (5.8)$$

En relatividad general, se estudian las ecuaciones de campo de Einstein asociadas a una métrica con signatura Lorentziana $(-, +, +, +)$, esto es porque presentan un significado físico. Para obtener una métrica Lorentziana $T_{00} \rightarrow -T_{00}$, luego podemos reescalar la coordenada temporal de ec. (5.8) y parametrizando la función dependiente del tiempo, obtenemos

$$T = -dt \otimes dt + \frac{a^2(t)}{1 - \kappa r^2} dr \otimes dr + r^2 a^2(t) d\theta \otimes d\theta + r^2 a^2(t) \sin^2(\theta) d\varphi \otimes d\varphi.$$

Esta métrica corresponde a la métrica de Friedmann–Robertson–Walker.

5.2. Ansatz afín

Al igual que en la sección anterior, consideramos una conexión afín genérica en la dependencia de sus coordenadas, y a cada coeficiente de la conexión se le asigna una función F , de esta forma el ansatz es de la siguiente forma

$$\Gamma_{\mu}^{\lambda}{}_{\nu} = F_{\mu\lambda\nu}(t, r, \theta, \varphi). \quad (5.9)$$

5.2.1. Ansatz afín isotrópica

Utilizamos la derivada de Lie presentada en ec. (2.37), para construir el ansatz cosmológico a partir de ec. (5.9). Empezamos por el vector de Killing J_3 (ec. (2.67))

$$\mathcal{L}_{J_3}\Gamma_{\mu}^{\lambda}{}_{\nu} = \frac{\partial F_{\mu\lambda\nu}(t, r, \theta, \varphi)}{\partial \varphi}. \quad (5.10)$$

La ecuación anterior solo sera cero, si no existe dependencia de la variable φ en la conexión afín, de esta forma, podemos eliminar dicha dependencia angular, y la conexión se reduce a $\Gamma^{\lambda}{}_{\mu\nu}(t, r, \theta)$.

Continuamos con el vector de Killing J_1 (ec. (2.65)), como campo vectorial para la derivada de Lie, obtenemos un set de 64 ecuaciones diferenciales de las cuales solo 8 presentan una ecuación, cuya solución es posible conocer

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_t^t{}_t &= -\cos\varphi \frac{\partial F_{000}}{\partial \theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_t^t{}_r &= -\cos\varphi \frac{\partial F_{001}}{\partial \theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_r^t{}_t &= -\cos\varphi \frac{\partial F_{100}}{\partial \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_r^t{}_r &= -\cos\varphi \frac{\partial F_{101}}{\partial \theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_t^r{}_t &= -\cos\varphi \frac{\partial F_{010}}{\partial \theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_t^r{}_r &= -\cos\varphi \frac{\partial F_{011}}{\partial \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_r^r{}_t &= -\cos\varphi \frac{\partial F_{110}}{\partial \theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_r^r{}_r &= -\cos\varphi \frac{\partial F_{111}}{\partial \theta}. \end{aligned}$$

La solución, consiste en eliminar las respectivas dependencias angulares asociadas a la coordenada θ para cada coeficiente. Luego las funciones $F_{000}, F_{001}, F_{100}, F_{101}, F_{010}, F_{011}, F_{110}, F_{111}$ solo dependen de las coordenadas r y t .

Tal como se hizo en la sección anterior para obtener más información, utilizaremos combinaciones lineales de la suma y resta de la derivada de Lie

$$\mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\nu}^{\mu}{}_{\lambda} \sin(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\nu}^{\mu}{}_{\lambda} \cos(\varphi) = 0, \quad (5.11)$$

$$\mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\nu}^{\mu}{}_{\lambda} \sin(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\nu}^{\mu}{}_{\lambda} \cos(\varphi) = 0. \quad (5.12)$$

Dada la gran cantidad de ecuaciones que se deberá resolver, trabajaremos por coeficientes

$$\text{Coeficientes } t \rightarrow \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\nu}^{\mu}{}_{\lambda} \sin(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\nu}^{\mu}{}_{\lambda} \cos(\varphi) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_t^t{}_{\theta} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_t^t{}_{t\theta} c(\varphi) &= \frac{-F_{003}}{\sin^2\theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_t^t{}_{\varphi} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_t^t{}_{\varphi} c(\varphi) &= F_{002}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_r^t{}_{\theta} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_r^t{}_{t\theta} c(\varphi) &= \frac{-F_{103}}{\sin^2\theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_r^t{}_{\varphi} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_r^t{}_{\varphi} c(\varphi) &= F_{102}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\theta}^t{}_t s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\theta}^t{}_t c(\varphi) &= \frac{-F_{300}}{\sin^2\theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\theta}^t{}_r s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\theta}^t{}_r c(\varphi) &= \frac{-F_{301}}{\sin^2\theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\theta^t} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\theta^t} c(\varphi) &= -\frac{F_{203} + F_{302}}{\sin^2 \theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\varphi^t} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\varphi^t} c(\varphi) &= F_{201}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\theta^t} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\theta^t} c(\varphi) &= \frac{F_{202} \sin^2 \theta - F_{303}}{\sin^2 \theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\varphi^t} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\varphi^t} c(\varphi) &= F_{200}.\end{aligned}$$

Las soluciones a este set de ecuaciones son directas, las funciones $F_{002}, F_{003}, F_{103}, F_{102}, F_{300}, F_{301}, F_{201}, F_{200}$ deben ser cero, mientras que

$$F_{302}(t, r, \theta) = -F_{203}(t, r, \theta), \quad F_{303}(t, r, \theta) = F_{202}(t, r, \theta) \sin^2 \theta.$$

$$\text{Coeficientes } t \rightarrow \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\nu^\mu} \lambda \sin(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\nu^\mu} \lambda \cos(\varphi) = 0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\theta^t} \sin(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\theta^t} \cos(\varphi) &= -2 \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial F_{202}(t, r, \theta)}{\partial \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\theta^t} \sin(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\theta^t} \cos(\varphi) &\sim 2F_{203}(t, r, \theta) \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial F_{203}(t, r, \theta)}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

La primera ecuación elimina la dependencia angular de la función en análisis, y la segunda es una ecuación diferencial ordinaria, nos dice como se comporta la variable θ para dicho coeficiente

$$F_{202}(t, r, \theta) = F_{202}(t, r), \quad F_{203}(t, r, \theta) = F_{203}(t, r) \sin \theta.$$

$$\text{Coeficientes } r \rightarrow \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\nu^r} \lambda \sin(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\nu^r} \lambda \cos(\varphi) = 0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\theta^r} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\theta^r} c(\varphi) &= \frac{F_{311}}{\sin^2 \theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\varphi^r} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\varphi^r} c(\varphi) &= F_{012}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\theta^r} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\theta^r} c(\varphi) &= \frac{F_{113}}{\sin^2 \theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\varphi^r} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\varphi^r} c(\varphi) &= F_{112}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\theta^r} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\theta^r} c(\varphi) &= \frac{F_{310}}{\sin^2 \theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\varphi^r} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\varphi^r} c(\varphi) &= \frac{F_{013}}{\sin^2 \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\theta^r} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\theta^r} c(\varphi) &= \frac{F_{213} + F_{312}}{\sin^2 \theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\varphi^r} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\varphi^r} c(\varphi) &= F_{210}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\theta^r} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\theta^r} c(\varphi) &= \frac{F_{212} \sin^2 \theta - F_{313}}{\sin^2 \theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\varphi^r} s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\varphi^r} c(\varphi) &= F_{211}.\end{aligned}$$

Todas las ecuaciones presentan una solución directa, las funciones $F_{013}, F_{012}, F_{113}, F_{112}, F_{310}, F_{311}, F_{210}, F_{211}$ deben ser cero, mientras que

$$F_{312}(t, r, \theta) = -F_{213}(t, r, \theta), \quad F_{313}(t, r, \theta) = F_{212}(t, r, \theta) \sin^2 \theta.$$

$$\text{Coeficientes } r \rightarrow \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\nu^r} \lambda \sin(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\nu^r} \lambda \cos(\varphi) = 0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\theta^r} \sin(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\theta^r} \cos(\varphi) &= -2 \cos \varphi \sin \varphi \frac{\partial F_{212}(t, r, \theta)}{\partial \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_{\theta^r} \sin(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_{\theta^r} \cos(\varphi) &\sim 2F_{213}(t, r, \theta) \cos \theta - \sin \theta \frac{\partial F_{213}(t, r, \theta)}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

La primera ecuación elimina la dependencia angular de la función, mientras que la segunda ecuación, es una ecuación diferencial ordinaria cuya solución entrega como se comporta la variable θ para esa función

$$F_{212}(t, r, \theta) = F_{212}(t, r), \quad F_{213}(t, r, \theta) = F_{213}(t, r) \sin \theta.$$

$$\text{Coeficientes } \theta \rightarrow \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_\nu^\theta \lambda \sin(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_\nu^\theta \lambda \cos(\varphi) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_t^\theta \varphi s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_t^\theta \varphi c(\varphi) &= F_{022} - F_{033}, & \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_t^\theta r s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_t^\theta r c(\varphi) &= F_{031}, \\ \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_t^\theta \theta s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_t^\theta \theta c(\varphi) &= \frac{F_{032} \sin^2 \theta + F_{023}}{\sin^2 \theta}, & \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_t^\theta t s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_t^\theta t c(\varphi) &= F_{030}, \\ \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_r^\theta \varphi s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_r^\theta \varphi c(\varphi) &= F_{122} - F_{133}, & \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_r^\theta r s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_r^\theta r c(\varphi) &= F_{131}, \\ \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_r^\theta \theta s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_r^\theta \theta c(\varphi) &= \frac{F_{132} \sin^2 \theta + F_{123}}{\sin^2 \theta}, & \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_r^\theta t s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_r^\theta t c(\varphi) &= F_{130}, \\ \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_\theta^\theta t s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_\theta^\theta t c(\varphi) &= \frac{F_{230} \sin^2 \theta + F_{320}}{\sin^2 \theta}, & \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_\varphi^\theta t s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_\varphi^\theta t c(\varphi) &= F_{220} - F_{330}, \\ \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_\theta^\theta r s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_\theta^\theta r c(\varphi) &= -\frac{F_{231} \sin^2 \theta + F_{321}}{\sin^2 \theta}, & \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_\varphi^\theta r s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_\varphi^\theta r c(\varphi) &= F_{221} - F_{331}. \end{aligned}$$

Las soluciones son directas, las funciones $F_{031}, F_{131}, F_{030}, F_{130}$ deben ser cero, mientras que las restantes satisfacen las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} F_{023}(t, r, \theta) &= -F_{032}(t, r, \theta) \sin^2 \theta, & F_{220}(t, r, \theta) &= F_{330}(t, r, \theta), \\ F_{320}(t, r, \theta) &= -F_{230}(t, r, \theta) \sin^2 \theta, & F_{221}(t, r, \theta) &= F_{331}(t, r, \theta), \\ F_{123}(t, r, \theta) &= -F_{132}(t, r, \theta) \sin^2 \theta, & F_{122}(t, r, \theta) &= F_{133}(t, r, \theta), \\ F_{321}(t, r, \theta) &= -F_{231}(t, r, \theta) \sin^2 \theta, & F_{220}(t, r, \theta) &= F_{330}(t, r, \theta), \\ F_{333}(t, r, \theta) &= -F_{232}(t, r, \theta) \sin^2 \theta, & F_{233}(t, r, \theta) &= F_{332}(t, r, \theta). \end{aligned}$$

Sin embargo, este no es el set completo de ecuaciones, a continuación se muestran las ecuaciones faltantes

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_\theta^\theta \theta \sin(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_\theta^\theta \theta \cos(\varphi) &= -\frac{F_{232}(t, r, \theta) \sin^2 \theta + F_{223}(t, r, \theta) + F_{322}(t, r, \theta)}{\sin^2 \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_\theta^\theta \varphi \sin(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_\theta^\theta \varphi \cos(\varphi) &= -\frac{(F_{222}(t, r, \theta) - F_{233}(t, r, \theta)) \sin^2 \theta + F_{323}(t, r, \theta)}{\sin^2 \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_\varphi^\theta \theta \sin(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_\varphi^\theta \theta \cos(\varphi) &= -\frac{(F_{222}(t, r, \theta) - F_{233}(t, r, \theta)) \sin^2 \theta + F_{323}(t, r, \theta)}{\sin^2 \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_\varphi^\theta \varphi \sin(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_\varphi^\theta \varphi \cos(\varphi) &= F_{223}(t, r, \theta) + F_{322}(t, r, \theta) - F_{333}(t, r, \theta), \end{aligned} \quad (5.13)$$

más adelante, se explicará el porque se hace esta separación.

$$\text{Coeficientes } \theta \rightarrow \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_\nu^\theta \lambda \sin(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_\nu^\theta \lambda \cos(\varphi) = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_t^\theta t s(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_t^\theta t c(\varphi) &= A \frac{\partial F_{020}(t, r, \theta)}{\partial \theta}, & \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_t^\theta r s(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_t^\theta r c(\varphi) &= A \frac{\partial F_{021}(t, r, \theta)}{\partial \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_t^\theta \theta s(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_t^\theta \theta c(\varphi) &= A \frac{\partial F_{333}(t, r, \theta)}{\partial \theta}, & \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_r^\theta t s(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_r^\theta t c(\varphi) &= A \frac{\partial F_{120}(t, r, \theta)}{\partial \theta}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{J_1}\Gamma_r^\theta s(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_r^\theta c(\varphi) &= A \frac{\partial F_{121}(t, r, \theta)}{\partial \theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_r^\theta s(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_r^\theta c(\varphi) &= A \frac{\partial F_{133}(t, r, \theta)}{\partial \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_\theta^\theta t s(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_\theta^\theta t c(\varphi) &= A \frac{\partial F_{330}(t, r, \theta)}{\partial \theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_\theta^\theta r s(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_\theta^\theta r c(\varphi) &= A \frac{\partial F_{331}(t, r, \theta)}{\partial \theta},\end{aligned}$$

donde $A = -2 \cos \varphi \sin \varphi$. La solución a este set de ecuaciones es directa, las funciones $F_{020}, F_{021}, F_{033}, F_{120}, F_{121}, F_{133}, F_{330}, F_{331}$ solo deben depender de las coordenadas r y t .

El siguiente set de ecuaciones son

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{J_1}\Gamma_t^\theta \sin(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_t^\theta \cos(\varphi) &= F_{032}(t, r, \theta) \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial F_{032}}{\partial \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_r^\theta \sin(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_r^\theta \cos(\varphi) &= F_{132}(t, r, \theta) \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial F_{132}}{\partial \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_\varphi^\theta t \sin(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_\varphi^\theta t \cos(\varphi) &= F_{230}(t, r, \theta) \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial F_{230}}{\partial \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_\varphi^\theta r \sin(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_\varphi^\theta r \cos(\varphi) &= F_{321}(t, r, \theta) \cos \theta + \sin \theta \frac{\partial F_{321}}{\partial \theta}.\end{aligned}$$

La solución de la ecuación diferencial, entrega como se modela la variable θ para cada función

$$\begin{aligned}F_{032}(t, r, \theta) &= \frac{F_{032}(t, r)}{\sin \theta}, & F_{132}(t, r, \theta) &= \frac{F_{132}(t, r)}{\sin \theta}, \\ F_{230}(t, r, \theta) &= \frac{F_{230}(t, r)}{\sin \theta}, & F_{231}(t, r, \theta) &= \frac{F_{231}(t, r)}{\sin \theta}.\end{aligned}$$

Existen otras 4 ecuaciones que no se presentaron, esto debido a que no sera necesario resolverlas.

$$\text{Coeficientes } \varphi \rightarrow \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_\nu^\varphi \lambda \sin(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_\nu^\varphi \lambda \cos(\varphi) = 0$$

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{J_1}\Gamma_t^\varphi t s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_t^\varphi t c(\varphi) &= \frac{F_{020}(t, r)}{\sin^2 \theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_t^\varphi r s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_t^\varphi r c(\varphi) &= \frac{F_{021}(t, r)}{\sin^2 \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_r^\varphi t s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_r^\varphi t c(\varphi) &= \frac{F_{120}(t, r)}{\sin^2 \theta}, & \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_r^\varphi r s(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_r^\varphi r c(\varphi) &= \frac{F_{121}(t, r)}{\sin^2 \theta}.\end{aligned}$$

Las soluciones son directa, las funciones $F_{020}, F_{021}, F_{120}, F_{121}$ deben ser cero.

El resto de ecuaciones no nulas, son

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{J_1}\Gamma_\theta^\varphi \sin(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_\theta^\varphi \cos(\varphi) &= \frac{(F_{222}(t, r, \theta) - 2F_{332}(t, r, \theta)) \sin \theta + 2 \cos \theta}{\sin^3 \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_\theta^\varphi \sin(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_\theta^\varphi \cos(\varphi) &= \frac{2F_{232}(t, r, \theta) \sin^2 \theta + F_{223}(t, r, \theta)}{\sin^2 \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_\varphi^\varphi \sin(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_\varphi^\varphi \cos(\varphi) &= \frac{2F_{232}(t, r, \theta) \sin^2 \theta + F_{322}(t, r, \theta)}{\sin^2 \theta}, \\ \mathcal{L}_{J_1}\Gamma_\varphi^\varphi \sin(\varphi) + \mathcal{L}_{J_2}\Gamma_\varphi^\varphi \cos(\varphi) &= \frac{2F_{332}(t, r, \theta) \sin^2 \theta - \cos \theta \sin \theta + F_{323}(t, r, \theta)}{\sin^2 \theta}.\end{aligned}\tag{5.14}$$

Es posible extraer información de la segunda y tercera ecuación

$$F_{223}(t, r, \theta) = F_{322}(t, r, \theta).$$

Coeficientes $\varphi \rightarrow \mathcal{L}_{J_1} \Gamma_\nu^\varphi{}_\lambda \sin(\varphi) - \mathcal{L}_{J_2} \Gamma_\nu^\varphi{}_\lambda \cos(\varphi) = 0$, no será necesaria de calcular, bastará con resolver los sistemas de ecuaciones presentados en (5.13) y (5.14) para encontrar las restricciones faltantes a imponer.

Los dos conjuntos de ecuaciones presentados en ecs. (5.13) y (5.14) presentan las condiciones finales a imponer a las funciones. Resolviendo el sistema se encuentra que las funciones $F_{232}, F_{333}, F_{322}, F_{223}, F_{222}$ deben ser cero, mientras que las restantes deben satisfacer las siguientes relaciones

$$F_{332}(t, r, \theta) = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}, \quad F_{233}(t, r, \theta) = F_{332}(t, r, \theta), \quad F_{323}(t, r, \theta) = -\cos \theta \sin \theta.$$

Los coeficientes del ansatz cosmológico isotropico se encuentran en tabla 5.1, al final de la sección.

Es posible reducir aún más, la cantidad de coeficientes de la conexión afín, si consideramos las restricciones que impone el hecho de trabajar en un espaciotiempo libre de torsión. Las funciones $F_{203}, F_{213}, F_{302}, F_{312}$ deben ser cero, mientras que el resto satisface las siguientes relaciones

$$\begin{aligned} F_{100} &= F_{001}, & F_{110} &= F_{011}, & F_{220} &= F_{022}, & F_{221} &= F_{021}, \\ F_{320} &= F_{023}, & F_{321} &= F_{123}, & F_{230} &= F_{032}, & F_{231} &= F_{132}, \\ F_{330} &= F_{033}, & F_{331} &= F_{133}, & F_{332} &= F_{233}. \end{aligned}$$

Los coeficientes de la conexión afín sin torsión se pueden encontrar en la tabla 5.2, al final de la sección.

Coeficientes t	Coeficientes r	Coeficientes θ	Coeficientes φ
$\Gamma_t^t{}_t = F_{000}(t, r)$	$\Gamma_t^r{}_t = F_{010}(t, r)$	$\Gamma_t^\theta{}_\theta = F_{033}(t, r)$	$\Gamma_t^\varphi{}_\theta = \frac{F_{032}(t, r)}{\sin \theta}$
$\Gamma_t^t{}_r = F_{001}(t, r)$	$\Gamma_t^r{}_r = F_{011}(t, r)$	$\Gamma_t^\theta{}_\varphi = -F_{032}(t, r) \sin \theta$	$\Gamma_t^\varphi{}_\varphi = F_{033}(t, r)$
$\Gamma_r^t{}_t = F_{001}(t, r)$	$\Gamma_r^r{}_t = F_{011}(t, r)$	$\Gamma_r^\theta{}_\theta = F_{133}(t, r)$	$\Gamma_r^\varphi{}_\theta = \frac{F_{132}(t, r)}{\sin \theta}$
$\Gamma_r^t{}_r = F_{101}(t, r)$	$\Gamma_r^r{}_r = F_{111}(t, r)$	$\Gamma_r^\theta{}_\varphi = -F_{132}(t, r) \sin \theta$	$\Gamma_r^\varphi{}_\varphi = F_{133}(t, r)$
$\Gamma_\theta^t{}_\theta = F_{202}(t, r)$	$\Gamma_\theta^r{}_\theta = F_{212}(t, r)$	$\Gamma_\theta^\theta{}_t = F_{330}(t, r)$	$\Gamma_\theta^\varphi{}_t = \frac{F_{230}(t, r)}{\sin \theta}$
$\Gamma_\theta^t{}_\varphi = F_{203}(t, r) \sin \theta$	$\Gamma_\theta^r{}_\varphi = F_{213}(t, r) \sin \theta$	$\Gamma_\theta^\theta{}_r = F_{331}(t, r)$	$\Gamma_\theta^\varphi{}_r = \frac{F_{231}(t, r)}{\sin \theta}$
$\Gamma_\varphi^t{}_\theta = -F_{203}(t, r) \sin \theta$	$\Gamma_\varphi^r{}_\theta = -F_{213}(t, r) \sin \theta$	$\Gamma_\varphi^\theta{}_t = -F_{230}(t, r) \sin \theta$	$\Gamma_\varphi^\varphi{}_\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$
$\Gamma_\varphi^t{}_\varphi = F_{202}(t, r) \sin^2 \theta$	$\Gamma_\varphi^r{}_\varphi = F_{212}(t, r) \sin^2 \theta$	$\Gamma_\varphi^\theta{}_r = -F_{231}(t, r) \sin \theta$	$\Gamma_\varphi^\varphi{}_t = F_{330}(t, r)$
-----	-----	$\Gamma_\varphi^\theta{}_\varphi = -\cos \theta \sin \theta$	$\Gamma_\varphi^\varphi{}_r = F_{331}(t, r)$
-----	-----	-----	$\Gamma_\varphi^\varphi{}_\theta = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

CUADRO 5.1: Coeficientes de la conexión isotrópica con torsión

Coeficientes t	Coeficientes r	Coeficientes θ	Coeficientes φ
$\Gamma_{t t}^t = F_{000}(t, r)$	$\Gamma_{t t}^r = F_{010}(t, r)$	$\Gamma_{t \theta}^\theta = F_{033}(t, r)$	$\Gamma_{t \varphi}^\varphi = \frac{F_{032}(t, r)}{\sin \theta}$
$\Gamma_{t r}^t = F_{001}(t, r)$	$\Gamma_{t r}^r = F_{011}(t, r)$	$\Gamma_{t \varphi}^\theta = -F_{032}(t, r) \sin \theta$	$\Gamma_{t \varphi}^\varphi = F_{033}(t, r)$
$\Gamma_r^t = F_{001}(t, r)$	$\Gamma_r^r = F_{011}(t, r)$	$\Gamma_r^\theta = F_{133}(t, r)$	$\Gamma_r^\varphi = \frac{F_{132}(t, r)}{\sin \theta}$
$\Gamma_r^t = F_{101}(t, r)$	$\Gamma_r^r = F_{111}(t, r)$	$\Gamma_r^\varphi = -F_{132}(t, r) \sin \theta$	$\Gamma_r^\varphi = F_{133}(t, r)$
$\Gamma_\theta^t = F_{202}(t, r)$	$\Gamma_\theta^r = F_{212}(t, r)$	$\Gamma_\theta^\theta = F_{033}(t, r)$	$\Gamma_\theta^\varphi = \frac{F_{032}(t, r)}{\sin \theta}$
$\Gamma_\varphi^t = F_{202}(t, r) \sin^2 \theta$	$\Gamma_\varphi^r = F_{212}(t, r) \sin^2 \theta$	$\Gamma_\theta^r = F_{133}(t, r)$	$\Gamma_\theta^\varphi = \frac{F_{132}(t, r)}{\sin \theta}$
-----	-----	$\Gamma_\varphi^\theta = -F_{032}(t, r) \sin \theta$	$\Gamma_\varphi^\varphi = F_{033}(t, r)$
-----	-----	$\Gamma_\varphi^r = -F_{132}(t, r) \sin \theta$	$\Gamma_\varphi^\varphi = F_{133}(t, r)$
-----	-----	$\Gamma_\varphi^\varphi = -\cos \theta \sin \theta$	$\Gamma_\varphi^\varphi = \frac{\cos \theta}{\sin \theta}$

CUADRO 5.2: Coeficientes de la conexión isotrópica sin torsión

5.2.2. Ansatz afín isotrópica y homogénea

Con el fin de simplificar los cálculos, usamos J'_3 como campo vectorial para la derivada de Lie

$$\text{Coeficientes } t \rightarrow \mathcal{L}_{J'_3} \Gamma_\nu^t{}_\lambda = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{J_3} \Gamma_{t t}^t &\sim \frac{\partial F_{000}(t, r)}{\partial r}, & \mathcal{L}_{J_3} \Gamma_{t r}^t &\sim \kappa r F_{001}(t, r) + (\kappa r^2 - 1) \frac{\partial F_{001}(t, r)}{\partial r}, \\ \mathcal{L}_{J_3} \Gamma_{t \theta}^t &\sim -\sqrt{1 - \kappa r^2} F_{001}(t, r) \sin \theta, & \mathcal{L}_{J_3} \Gamma_{r t}^t &\sim \kappa r F_{100}(t, r) + (\kappa r^2 - 1) \frac{\partial F_{100}(t, r)}{\partial r}, \\ \mathcal{L}_{J_3} \Gamma_r^t &\sim 2\kappa r F_{101}(t, r) + (\kappa r^2 - 1) \frac{\partial F_{101}(t, r)}{\partial r}, & \mathcal{L}_{J_3} \Gamma_r^\theta &\sim (\kappa r^4 - r^2) F_{101}(t, r) + F_{303}(t, r), \\ \mathcal{L}_{J_3} \Gamma_r^\varphi &\sim F_{203}(t, r) \sin^2 \theta, & \mathcal{L}_{J_3} \Gamma_\theta^t &\sim -\sqrt{1 - \kappa r^2} F_{001}(t, r) \sin \theta, \\ \mathcal{L}_{J_3} \Gamma_\theta^r &\sim (\kappa r^4 - r^2) F_{101}(t, r) + F_{303}(t, r), & \mathcal{L}_{J_3} \Gamma_\theta^\varphi &\sim r \frac{\partial F_{303}}{\partial r} - 2F_{303}(t, r), \\ \mathcal{L}_{J_3} \Gamma_\theta^\varphi &\sim r \frac{\partial F_{203}}{\partial r} - 2F_{203}(t, r). \end{aligned}$$

Las soluciones directas, imponen que las funciones F_{001} , F_{100} , F_{203} deben ser cero, mientras que

$$F_{000}(t, r) = F_{000}(t), \quad F_{303}(t, r) = F_{101}(t) r^2 (1 - \kappa r^2).$$

Las ecuaciones diferenciales establecen la dependencia de la variable r del coeficiente F_{101} , y como se relaciona este con F_{303}

$$F_{101}(t, r) = \frac{1}{1 - \kappa r^2} \quad F_{303}(t, r) = F_{101}(t) r^2 (1 - \kappa r^2).$$

$$\text{Coeficientes } \varphi \rightarrow \mathcal{L}_{J'_3} \Gamma_\nu^\varphi{}_\lambda = 0$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_{J_3} \Gamma_{t r}^\varphi &\sim F_{032}(t, r), & \mathcal{L}_{J_3} \Gamma_{t \varphi}^\varphi &\sim \sqrt{1 - \kappa r^2} \cos(\theta) \frac{\partial F_{032}}{\partial r}, \\ \mathcal{L}_{J_3} \Gamma_{t \varphi}^\varphi &\sim \sqrt{1 - \kappa r^2} \cos \theta \frac{\partial F_{033}}{\partial r}, & \mathcal{L}_{J_3} \Gamma_r^\varphi &\sim F_{032}(t, r), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{J_3}\Gamma_r^\varphi_r &\sim F_{132}(t, r) + F_{231}(t, r), & \mathcal{L}_{J_3}\Gamma_r^\varphi_\theta &\sim \kappa r F_{132}(t, r) + (\kappa r^2 - 1) \frac{\partial F_{132}}{\partial r}, \\
\mathcal{L}_{J_3}\Gamma_r^\varphi_\varphi &\sim \kappa r^3 F_{133}(t, r) + (\kappa r^4 - r^2) \frac{\partial F_{133}}{\partial r} - 1, & \mathcal{L}_{J_3}\Gamma_\theta^\varphi_t &\sim \sqrt{1 - \kappa r^2} \cos \theta \frac{\partial F_{230}}{\partial r}, \\
\mathcal{L}_{J_3}\Gamma_\theta^\varphi_r &\sim \kappa r F_{231}(t, r) + (k r^2 - 1) \frac{\partial F_{231}}{\partial r}, & \mathcal{L}_{J_3}\Gamma_\theta^\varphi_\theta &\sim F_{132}(t, r) + F_{231}(t, r), \\
\mathcal{L}_{J_3}\Gamma_\theta^\varphi_\varphi &\sim r F_{133}(t, r) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 1, & \mathcal{L}_{J_3}\Gamma_\varphi^\varphi_t &\sim \sqrt{1 - \kappa r^2} \cos \theta \frac{\partial F_{330}}{\partial r}, \\
\mathcal{L}_{J_3}\Gamma_\varphi^\varphi_r &\sim \kappa r^3 F_{331}(t, r) + (\kappa r^4 - r^2) \frac{\partial F_{331}}{\partial r} - 1, & \mathcal{L}_{J_3}\Gamma_\varphi^\varphi_\theta &\sim r F_{331}(t, r) \sin^2 \theta + \cos^2 \theta - 1.
\end{aligned}$$

Las soluciones son directas, las funciones F_{032} , F_{230} deben ser cero, mientras que el resto satisface las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
F_{033}(t, r) &= F_{033}(t), & F_{231}(t, r) &= -F_{132}(t, r), & F_{133}(t, r) &= 1/r, \\
F_{331}(t, r) &= 1/r, & F_{330}(t, r) &= F_{330}(t).
\end{aligned}$$

La ecuación diferencial para el coeficiente $F_{132}(t, r)$, entrega la dependencia radial

$$F_{132}(t, r) = F_{132}(t) / \sqrt{1 - \kappa r^2}.$$

Coefficientes $\theta \rightarrow \mathcal{L}_{J_3}\Gamma_\nu^\theta_\lambda = 0$

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_{J_3}\Gamma_t^\theta_t &\sim F_{010}(t, r) \sin \theta, & \mathcal{L}_{J_3}\Gamma_t^\theta_r &\sim F_{011}(t, r) - F_{033}, \\
\mathcal{L}_{J_3}\Gamma_r^\theta_t &\sim F_{110}(t, r) - F_{330}, & \mathcal{L}_{J_3}\Gamma_r^\theta_r &\sim \kappa r + (\kappa r^2 - 1) F_{111}(t, r), \\
\mathcal{L}_{J_3}\Gamma_\theta^\theta_\theta &\sim \kappa r^3 - r - F_{313}(t, r), & \mathcal{L}_{J_3}\Gamma_\theta^\theta_\varphi &\sim \sqrt{1 - \kappa r^2} r^2 F_{132}(t) \sin^2 \theta - F_{213}(t, r), \\
\mathcal{L}_{J_3}\Gamma_\varphi^\theta_\varphi &\sim \kappa r^3 - r - F_{313}(t, r), & \mathcal{L}_{J_3}\Gamma_\varphi^\theta_\theta &\sim \sqrt{1 - \kappa r^2} r^2 F_{132}(t) \sin^2 \theta - F_{213}(t, r),
\end{aligned}$$

Las soluciones son directas, la función F_{010} debe ser cero, mientras que el resto satisface las siguientes relaciones

$$\begin{aligned}
F_{011}(t, r) &= F_{033}(t), & F_{110}(t, r) &= F_{330}(t), & F_{111}(t, r) &= \kappa r / (1 - \kappa r^2), \\
F_{313}(t, r) &= \kappa r^3 - r, & F_{213}(t, r) &= F_{132}(t) r^2 \sqrt{1 - \kappa r^2}.
\end{aligned}$$

No es necesario calcular $\mathcal{L}_{J_3}\Gamma_\nu^r_\lambda$, porque las restricciones encontradas anteriormente resuelven de forma completa la derivada de Lie para todas las coordenadas.

Los coeficientes de la conexión afín compatible con las simetrías del principio cosmológico con torsión se encuentran en la tabla 5.3, al final de la sección.

Es posible reducir aún más, la cantidad de coeficientes, si consideramos el espaciotiempo libre de torsión. Las funciones F_{213} , F_{312} , F_{321} , F_{123} , F_{132} , F_{231} deben ser cero y el resto satisface las siguientes relaciones

$$F_{110} = F_{011}, \quad F_{221} = -F_{122}, \quad F_{220} = F_{011}, \quad F_{330} = F_{033}.$$

Los coeficientes de la conexión en un espaciotiempo libre de torsión compatible con las simetrías del principio cosmológico se encuentran en la tabla 5.4, al final de la sección.

Coeficientes t	Coeficientes r	Coeficientes θ	Coeficientes φ
$\Gamma_{t t}^t = F_{000}(t)$	$\Gamma_{t r}^r = F_{033}(t)$	$\Gamma_{t \theta}^\theta = F_{033}(t)$	$\Gamma_{t \varphi}^\varphi = F_{033}(t)$
$\Gamma_{r r}^t = \frac{F_{101}(t)}{1-\kappa r^2}$	$\Gamma_{r t}^r = F_{033}(t, r)$	$\Gamma_{r \theta}^\theta = 1/r$	$\Gamma_{r \varphi}^\varphi = \frac{F_{132}(t)}{\sqrt{1-\kappa r^2} \sin \theta}$
$\Gamma_{\theta \theta}^t = r^2 F_{101}(t)$	$\Gamma_{r r}^r = \frac{\kappa r}{1-\kappa r^2}$	$\Gamma_{r \varphi}^\theta = -\frac{F_{132}(t) \sin \theta}{\sqrt{1-\kappa r^2}}$	$\Gamma_{r \varphi}^\varphi = 1/r$
$\Gamma_{\varphi \varphi}^t = r^2 F_{101}(t) \sin^2 \theta$	$\Gamma_{\theta \theta}^r = \kappa r^3 - r$	$\Gamma_{\theta t}^\theta = F_{033}(t)$	$\Gamma_{\theta \varphi}^\varphi = -\frac{F_{132}(t)}{\sqrt{1-\kappa r^2} \sin \theta}$
-----	$\Gamma_{\theta \varphi}^r = \sqrt{1-\kappa r^2} r^2 F_{132}(t) \sin \theta$	$\Gamma_{\theta r}^\theta = 1/r$	$\Gamma_{\theta \varphi}^\varphi = \cos \theta / \sin \theta$
-----	$\Gamma_{\varphi \theta}^r = -\sqrt{1-\kappa r^2} r^2 F_{132}(t) \sin \theta$	$\Gamma_{\varphi r}^\theta = -\frac{F_{132}(t) \sin \theta}{\sqrt{1-\kappa r^2}}$	$\Gamma_{\varphi t}^\varphi = F_{033}(t)$
-----	$\Gamma_{\varphi \varphi}^r = (\kappa r^3 - r) \sin^2 \theta$	$\Gamma_{\varphi \varphi}^\theta = -\cos \theta \sin \theta$	$\Gamma_{\varphi \varphi}^\varphi = 1/r$
-----	-----	-----	$\Gamma_{\varphi \varphi}^\varphi = \cos \theta / \sin \theta$

CUADRO 5.3: Coeficientes de la conexión isotrópica y homogénea con torsión

Coeficientes t	Coeficientes r	Coeficientes θ	Coeficientes φ
$\Gamma_{t t}^t = F_{000}(t)$	$\Gamma_{t r}^r = F_{033}(t)$	$\Gamma_{t \theta}^\theta = F_{033}(t, r)$	$\Gamma_{t \varphi}^\varphi = F_{033}(t)$
$\Gamma_{r r}^t = \frac{F_{101}(t)}{1-\kappa r^2}$	$\Gamma_{r r}^r = \frac{\kappa r}{1-\kappa r^2}$	$\Gamma_{r \theta}^\theta = 1/r$	$\Gamma_{r \varphi}^\varphi = 1/r$
$\Gamma_{\theta \theta}^t = r^2 F_{101}(t)$	$\Gamma_{\theta \theta}^r = \kappa r^3 - r$	$\Gamma_{\varphi \varphi}^\theta = -\cos \theta \sin \theta$	$\Gamma_{\theta \varphi}^\varphi = \cos \theta / \sin \theta$
$\Gamma_{\varphi \varphi}^t = r^2 F_{101}(t) \sin^2 \theta$	$\Gamma_{\varphi \varphi}^r = (\kappa r^3 - r) \sin^2 \theta$	-----	$\Gamma_{\varphi \varphi}^\varphi = \cos \theta / \sin \theta$

CUADRO 5.4: Coeficientes de la conexión isotrópica y homogénea sin torsión

Soluciones Cosmológicas

Una vez construidos los ansatz cosmológicos para el tensor métrico y la conexión afín, buscamos el tensor de Ricci para cada uno de estos. El tensor de Ricci es un tensor simétrico obtenido a partir de la contracción del tensor de curvatura de Riemann, esta contracción esta bien definida para cualquier variedad dotada de una conexión.

Existen tres familia de soluciones para la ecuación de movimiento de la gravedad afín

1. El tensor de Ricci nulo $R_{\mu\nu} = 0$.
2. El tensor de Ricci es covariantemente constante $\nabla_\rho R_{\mu\nu} = 0$.
3. La curvatura armónica $\nabla_\lambda R_{\mu\nu}{}^\lambda{}_\rho = 0$.

Estudiaremos las tres familias de soluciones para cada ansatz.

6.1. Soluciones métricas

A partir del ansatz métrico presentado en ec. 5.8, presentamos el tensor de Ricci

$$R_{tt} = -\frac{3}{a}\ddot{a}, \quad (6.1)$$

$$R_{rr} = \frac{1}{1 - kr^2} (\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2k), \quad (6.2)$$

las componentes $R_{\theta\theta}$ y $R_{\varphi\varphi}$, pueden ser escritas en términos de R_{rr}

$$R_{\theta\theta} = R_{rr}r^2(1 - kr^2), \quad R_{\varphi\varphi} = R_{rr}r^2(1 - kr^2)\sin^2\theta.$$

6.1.1. Ricci plano

Las ecuaciones a resolver son ecs. (6.1) y (6.2) igualadas a cero. La primera de estas, presenta una solución del tipo lineal

$$a(t) = At + B. \quad (6.3)$$

Usando ec. (6.2) se encuentran las restricciones a las constantes A y B .

$$A^2 + 2k = 0, \quad (6.4)$$

de esta última ecuación, podemos encontrar tres distintos casos:

- $k = 1$ No existe solución real.
- $k = 0$ entonces $A = 0 \rightarrow a(t) = B$.
- $k = -1$ se encuentra el valor numérico de una constante $A = \sqrt{2} \rightarrow a(t) = \sqrt{2}t + B$.

6.1.2. Ricci paralelo

Calculamos la derivada covariante del tensor de Ricci, esta entrega un set de 10 ecuaciones de las cuales solo 3 son independientes, a continuación mostramos dichas ecuaciones

$$\nabla_t R_{tt} \simeq \frac{3}{a^2} (\dot{a}\ddot{a} - a\ddot{\ddot{a}}), \quad (6.5)$$

$$\nabla_i R_{ti} \simeq \dot{a}^3 - a\dot{a}\ddot{a} + \kappa\dot{a}, \quad (6.6)$$

$$\nabla_t R_{ij} \simeq 4\dot{a}^3 - 3a\dot{a}\ddot{a} - a^2\ddot{\ddot{a}} + 4\kappa\dot{a}. \quad (6.7)$$

La ec. (6.5) puede ser escrita como una derivada total

$$\ddot{a} + a\omega^2 = 0,$$

donde $\omega^2 = C_1$ y C_1 es la constante de integración. Esta última ecuación tiene distintas soluciones dependiendo del valor de la constante ω :

1. Si $\omega^2 > 0$, las soluciones son funciones trigonométricas

$$a(t) = A \cos \omega t + B \sin \omega t. \quad (6.8)$$

Usando ec. (6.6) encontramos restricciones para las constantes A y B

$$\omega^2 (A^2 + B^2) = -k,$$

tenemos tres posibles casos:

- a) Si $k = 1$, no existe solución real.
- b) Si $k = 0$, no existe solución real.
- c) Si $k = -1$, podemos dejar una constante en función de la otra

$$B^2 = \frac{1}{\omega^2} - A^2 \rightarrow a(t) = A \cos \omega t + \left(\frac{1}{\omega^2} - A^2\right)^{1/2} \sin \omega t. \quad (6.9)$$

2. Si $\omega^2 = 0$, la solución es una función lineal

$$a(t) = At + B. \quad (6.10)$$

Usando ec. (6.6) encontramos restricciones para las constantes A y B

$$A(A^2 + \kappa) = 0,$$

tenemos tres posibles casos

- a) Si $\kappa = 1$, no existe solución real.
 b) Si $\kappa = 0$, entonces $A = 0$ y $a(t) = B$.
 c) Si $\kappa = -1$, entonces $A = \pm 1$ y $a(t) = \pm 1 + B$.
3. Si $\omega^2 < 0$, las soluciones son funciones hiperbólicas

$$a(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}. \quad (6.11)$$

Usando ec. (6.6) encontramos restricciones para las constantes A y B

$$(\kappa - 4AB\omega^2)(Ae^{2\omega t} + B) = 0,$$

estudiamos el primer paréntesis

- a) $k = 1$, podemos despejar una constante en función de otra constante

$$B = \frac{\kappa}{4A\omega^2} \rightarrow a(t) = Ae^{\omega t} + \frac{\kappa}{4A\omega^2}e^{-\omega t}. \quad (6.12)$$

- b) $k = 0$, una de las constante debe ser cero y se presentan dos soluciones posibles:

$$A = 0 \rightarrow a(t) = Be^{-\omega t}, \quad B = 0 \rightarrow a(t) = Ae^{\omega t}. \quad (6.13)$$

- c) $k = -1$, despejamos una constante en función de otra

$$B = -\frac{k}{4A\omega^2} \rightarrow a(t) = Ae^{\omega t} - \frac{k}{4A\omega^2}e^{-\omega t}. \quad (6.14)$$

No es posible extraer información del segundo paréntesis, debido a que al despejar una constante en función de otra, se agrega un factor temporal, esto induce una dependencia de la coordenada t , generando una contradicción.

Es importante mencionar que en todo este desarrollo no se hizo uso de la ec. (6.7), esto debido a que todas las soluciones encontradas, ya la satisfacen.

6.1.3. Curvatura armónica

Obtenemos solo una ecuación para la curvatura armónica

$$\nabla_{[t}R_{i]j} \simeq \frac{2\dot{a}^3 - a\dot{a}\ddot{a} - a^2\ddot{a} + 2\kappa\dot{a}}{a} = 0.$$

Esta ecuación puede ser escrita como una derivada total

$$\frac{\ddot{a}}{a} + \left(\frac{\dot{a}}{a}\right)^2 + \frac{\kappa}{a^2} = -C. \quad (6.15)$$

Definimos el siguiente cambio de variable

$$f = a^2 + \frac{\kappa}{C},$$

reemplazando en ec. (6.15) obtenemos

$$\ddot{f} + \omega^2 f = 0$$

donde $\omega^2 = 2C$. La solución depende del signo de ω^2

1. Si $\omega^2 > 0$, las soluciones son funciones trigonométricas

$$f(t) = F_1 \sin \omega t + F_2 \cos \omega t. \quad (6.16)$$

La función a viene dada por

$$a(t) = \sqrt{F_1 \sin \omega t + F_2 \cos \omega t - \frac{k}{C}}. \quad (6.17)$$

Para cada valor de κ

$$a(t) = \begin{cases} \sqrt{F_1 \sin \omega t + F_2 \cos \omega t - \frac{1}{C}} & \text{si } k = 1 \\ \sqrt{F_1 \sin \omega t + F_2 \cos \omega t} & \text{si } k = 0 \\ \sqrt{F_1 \sin \omega t + F_2 \cos \omega t + \frac{1}{C}} & \text{si } k = -1 \end{cases}.$$

2. Si $\omega^2 = 0$, la solución es un polinomio de orden dos

$$f(t) = F_1 t + F_2 \quad (6.18)$$

La función a viene dada por

$$a(t) = \sqrt{F_1 t + F_2 - \frac{\kappa}{C}}. \quad (6.19)$$

Para cada valor κ

$$a(t) = \begin{cases} \sqrt{F_1 t + F_2 - \frac{1}{C}} & \text{si } k = 1 \\ \sqrt{F_1 t + F_2} & \text{si } k = 0 \\ \sqrt{F_1 t + F_2 + \frac{1}{C}} & \text{si } k = -1 \end{cases}.$$

3. Si $\omega^2 < 0$, las soluciones son funciones hiperbólicas

$$f(t) = F_1 e^{\omega t} + F_2 e^{-\omega t}. \quad (6.20)$$

La función a viene dada por

$$a(t) = \sqrt{F_1 e^{\omega t} + F_2 e^{-\omega t} + \frac{\kappa}{C}}. \quad (6.21)$$

Para cada valor de κ

$$a(t) = \begin{cases} \sqrt{F_1 e^{\omega t} + F_2 e^{-\omega t} + \frac{1}{C}} & \text{si } k = 1 \\ \sqrt{F_1 e^{\omega t} + F_2 e^{-\omega t}} & \text{si } k = 0 \\ \sqrt{F_1 e^{\omega t} + F_2 e^{-\omega t} - \frac{1}{C}} & \text{si } k = -1 \end{cases}.$$

6.2. Soluciones afines

A partir de la conexión afín presentada en la tabla 5.4 e introduciendo la notación

$$F_{000} = f, \quad F_{101} = g, \quad F_{011} = h, \quad (6.22)$$

calculamos el tensor de Ricci

$$R_{tt} = 3(fh - h^2 - \dot{h}), \quad (6.23)$$

$$R_{rr} = \frac{1}{1 - \kappa r^2}(\dot{g} + g(f + h) + 2\kappa). \quad (6.24)$$

Las componentes $R_{\theta\theta}$ y $R_{\varphi\varphi}$ son proporcionales a R_{rr}

$$R_{\theta\theta} = R_{rr}r^2(1 - \kappa r^2) \quad R_{\varphi\varphi} = R_{rr}r^2(1 - \kappa r^2)\sin^2\theta.$$

6.2.1. Ricci plano

Contamos con dos ecuaciones y tres incógnitas f , g y h . Dado que no existe derivadas temporales de la función f , podemos encontrar soluciones para las funciones g y h en términos de esta. La solución para ec. (6.23), se obtiene con el cambio de variable

$$h = \frac{1}{H} \rightarrow \dot{h} = -\frac{\dot{H}}{H^2},$$

reemplazamos este cambio en ec. (6.23)

$$\dot{H} + fH = 1.$$

La solución para esta ecuación viene dada por la suma de la solución homogénea y particular

$$H(t) = e^{-F} \left(C_h + \int e^F dt \right),$$

donde C_h es una constante y $F = \int f dt$. A partir de esta solución podemos determinar la función h

$$h(t) = \frac{e^F}{C_h + \int e^F dt}. \quad (6.25)$$

La ec. (6.24) presenta una estructura similar, la solución es la suma de la solución homogénea y particular

$$g(t) = e^{-G} \left(C_g - 2\kappa \int e^G dt \right), \quad (6.26)$$

donde C_g es una constante y $G = \int (f + h) dt$.

Existe un conjunto de soluciones que no se pueden obtener a partir de (6.25) y (6.26), dado que pertenecen al espacio de moduli:

Caso $f = h$: ec. (6.23) queda de forma lineal, las nuevas soluciones son

$$f(t) = C_h, \quad h(t) = C_h, \quad g(t) = C_g e^{-2Ct} - \frac{\kappa}{C_h}. \quad (6.27)$$

Caso $h = -f$: las ecs. (6.23) y (6.24) se desacoplan, las soluciones vienen dada por

$$f(t) = -\frac{1}{2t + C_h}, \quad h(t) = -\frac{1}{2t + C_h}, \quad g(t) = C_g - 2\kappa t. \quad (6.28)$$

Caso $h = 0$: ec. (6.23) es una identidad y g puede ser encontrada como función de f

$$g(t) = e^{-F} \left(C_g - 2\kappa \left(\int e^F \right) \right). \quad (6.29)$$

6.2.2. Parametrización del Ricci: emular materia

En Relatividad General, los efectos de materia entran mediados por el tensor de energía momento, en particular se estudia un fluido perfecto. Este tensor es un tensor simétrico diagonal que trabaja con las variables de estado presión p y densidad ρ

$$T_{\mu\nu} = 8\pi G \begin{pmatrix} \rho & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{pa^2}{1-kr^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & pa^2r^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & pa^2r^2 \sin^2 \theta \end{pmatrix}.$$

Las variables p y ρ se relacionan por medio de la ecuación de estado

$$p = \omega\rho.$$

A partir del tensor energía-momento podemos encontrar las ecuaciones de Einstein para un fluido perfecto

$$R_{\mu\nu}^{GR} - \frac{1}{2}Rg_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi GT_{\mu\nu}, \quad (6.30)$$

donde $R_{\mu\nu}^{GR}$ hace referencia al tensor de Ricci definido en Relatividad General usando la conexión Levi-Civita. La ec. (6.30) puede ser escrita usando la traza de cada tensor

$$R_{\mu\nu}^{GR} - \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right). \quad (6.31)$$

Usando ec. (6.31) podemos definir el tensor $M_{\mu\nu}$ como

$$M_{\mu\nu}^{GR} = R_{\mu\nu}^{GR} - \Lambda g_{\mu\nu} - 8\pi G \left(T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}Tg_{\mu\nu} \right). \quad (6.32)$$

Estas ecuaciones de forma explícita son

$$M_{tt} = -\frac{12\pi Gap + 4\pi Ga\rho - \Lambda a + 3\ddot{a}}{a}, \quad (6.33)$$

$$M_{rr} = \frac{4\pi Ga^2p - 4\pi Ga^2\rho - \Lambda a^2 + 2\dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2\kappa}{1 - kr^2}, \quad (6.34)$$

Buscamos emular estas ecuaciones a partir de las ecs. (6.23) y (6.24), para esto consideramos la siguiente parametrización

$$h = \dot{a} + x, \quad f = x, \quad g = a\dot{a} + y, \quad (6.35)$$

donde x e y son funciones desconocidas. Para saber cuales deben ser estas funciones, reemplazamos estas parametrizaciones en ec. (6.23)

$$\ddot{a} + \dot{x} + \dot{a}^2 + \dot{a}x = 0. \quad (6.36)$$

Escribimos ecs. (6.36) y (6.33) juntas, para facilitar la comparación

$$\ddot{a} + \dot{x} + \dot{a}^2 + \dot{a}x = 0, \quad (6.37)$$

$$\ddot{a} + \frac{a}{3}(4\pi G(3p + \rho) - \Lambda) = 0. \quad (6.38)$$

Para que ambas ecuaciones sean compatibles, la variable x debe satisfacer la siguiente ecuación

$$\dot{x} + \dot{a}x = F_1(t), \quad (6.39)$$

donde $F_1(t) = \frac{a}{3}(4\pi G(3p + \rho) - \Lambda) - \dot{a}^2$. De esta forma resolviendo esta última ecuación, encontramos su dependencia respecto de variables conocidas

$$x(t) = e^{-a} \left(C_x + \int F_1 e^a dt \right). \quad (6.40)$$

Una vez encontrada la función x , reemplazamos la parametrización en (6.24), esto conduce a

$$2ax\dot{a} + a\dot{a}^2 + 2yx + y\dot{a} + \dot{a}^2 + a\ddot{a} + 2\kappa + \dot{y} = 0. \quad (6.41)$$

Al igual que antes comparamos ec. (6.41) con ec. (6.34), de forma explícita tenemos

$$\begin{aligned} a\ddot{a} + 2\kappa + 2ax\dot{a} + a\dot{a}^2 + 2yx + y\dot{a} + \dot{a}^2 + \dot{y} &= 0, \\ a\ddot{a} + 2\kappa + 4\pi G a^2 p - 4\pi G a^2 \rho - \Lambda a^2 + 2\dot{a}^2 &= 0. \end{aligned}$$

Para que ambas ecuaciones sean compatibles, la variable y debe satisfacer la siguiente ecuación

$$\dot{y} + yF_2(t) = F_3(t), \quad (6.42)$$

donde $F_2 = \dot{a} + 2x$ y $F_3 = a^2(4\pi G(p - \rho) - \Lambda) - 2ax\dot{a} - a\dot{a}^2 + \dot{a}^2$, resolviendo esta última ecuación se puede conocer la función $y(t)$

$$y(t) = e^{-\int F_2 dt} \left(C_y + \int F_3 e^{\int F_2 dt} dt \right). \quad (6.43)$$

De esta forma, utilizando las soluciones encontradas para las funciones x e y es posible emular todos los resultados de Relatividad General que incluyen los efectos de materia, específicamente los efectos de un fluido perfecto.

6.2.3. Ricci paralelo

Calculamos la derivada covariante del tensor de Ricci, presentamos las ecuaciones que son independientes

$$\nabla_t R_{tt} = 6f^2 h - 6fh^2 - 3hf\dot{h} - 3(3f - 2h)\dot{h} + 3\ddot{h}, \quad (6.44)$$

$$\nabla_i R_{ij} \simeq 2gh^2 - 2(2fg + \kappa)h - h\dot{g} + 3g\dot{h}, \quad (6.45)$$

$$\nabla_t R_{ij} \simeq 2gh^2 + 2(fg + 2\kappa)h - g\dot{f} - (f - h)\dot{g} - g\dot{h} - \ddot{g}. \quad (6.46)$$

El resto de ecuaciones son proporcionales a estas tres. La estrategia para abordar este sistema de ecuaciones es proponer ansatz para el tensor de Ricci, resolver para las funciones f , g y h e imponer condiciones de autoconsistencia:

i) La parametrización $f = 0$, $g = a\dot{a}$ y $h = \frac{\dot{a}}{a}$ permite encontrar las variedades de Einstein, estos son los espacios ya conocidos en relatividad general, donde a es el factor de escala.

ii) Tensor de Ricci independiente del tiempo es de la forma

$$R_{tt} = R_1, \quad R_{rr} = \frac{R_2}{1 - \kappa r^2}, \quad (6.47)$$

el resto de las componentes del tensor de Ricci son proporcionales a R_{rr} . Para este ansatz las ecs. (6.44), (6.45) y (6.46) nos entregan las siguientes restricciones

$$\nabla_t R_{tt} = 0 \rightarrow f = 0 \vee R_1 = 0, \quad (6.48)$$

$$\nabla_t R_{ij} = 0 \rightarrow h = 0 \vee R_2 = 0, \quad (6.49)$$

$$\nabla_i R_{tj} = 0 \rightarrow h = 0 \vee (g = 0 \vee \kappa = 0). \quad (6.50)$$

Notemos que si $h = 0$ entonces $R_1 = 0$, y $g = 0 \vee \kappa = 0$ implica que $R_2 = 0$. Por lo tanto no existen soluciones no degeneradas para el tensor de Ricci independiente del tiempo.

Dada las restricciones de las ecuaciones existen solo dos soluciones degeneradas con el tensor de Ricci no nulo. La primera, se encuentra para $h = 0$, la función f queda sin determinar, mientras que la función g viene dada por

$$g(t) = e^{-F} \left(C_g + (R_2 - 2\kappa) \int e^F dt \right),$$

donde $F = \int f dt$. La segunda solución, se encuentra usando $g = 0 \vee \kappa = 0 \vee f = 0$, la función h viene dada por

$$h(t) = \sqrt{\frac{R_1}{3}} \tanh \left(\sqrt{\frac{R_1}{3}} (t - t_0) \right). \quad (6.51)$$

iii) Tensor de Ricci con factor de escala es de la forma

$$R_{tt} = -R_1, \quad R_{rr} = \frac{A(t)}{1 - \kappa r^2}, \quad (6.52)$$

el resto de las componentes son proporcionales a R_{rr} . Las ecuaciones asociadas al tensor de Ricci paralelo son

$$\nabla_t R_{tt} = 2fR_1 \rightarrow f = 0 \vee R_1 = 0, \quad (6.53)$$

$$\nabla_t R_{rr} = \frac{\dot{A} - 2hA}{1 - \kappa r^2} \rightarrow A = C_A e^{2H}, \quad (6.54)$$

$$\nabla_r R_{tr} = -\frac{hA - R_1 g}{1 - \kappa r^2} \rightarrow g = \frac{hA}{R_1}; (R_1 \neq 0). \quad (6.55)$$

A diferencia del caso anterior, el tensor de Ricci con factor de escala acepta una solución no degenerada con $f = 0$

$$h = \sqrt{\frac{R_1}{3}} \tanh\left(\sqrt{\frac{R_1}{3}}(t - t_*)\right), \quad g = \frac{1}{\sqrt{12R_1}} \sinh\left(\sqrt{\frac{R_1}{3}}(t - t_*)\right),$$

$$A = C_A \cosh^2\left(\sqrt{\frac{R_1}{3}}(t - t_*)\right).$$

Las soluciones degeneradas con $R_1 = 0$, requieren que la constante $C_A = 0$ o, $A = C_A$ cuando $h = 0$.

6.2.4. Curvatura armónica

La ecuación de curvatura armónica es solo una para tres incógnitas

$$\nabla_{[t} R_{i]j} \simeq \ddot{g} + g\dot{f} + f\dot{g} - 2g\dot{h} + 2gh(f - 2h) - 2\kappa h, \quad (6.56)$$

el resto de las ecuaciones son proporcionales a esta. Dada la estructura de esta ecuación, no es posible encontrar una solución analítica, sin embargo podemos postular dos ansatz asociados al tensor de Ricci para resolver ec. (6.56): el primero será el tensor de Ricci independiente del tiempo y el segundo el tensor de Ricci acoplado con el factor de escala $a(t)$.

Tensor de Ricci independiente del tiempo

El ansatz para este tensor es

$$-R_1 dt \otimes dt + \left(\frac{R_2}{1 - \kappa r^2}\right) dr \otimes dr + R_2 r^2 d\theta \otimes d\theta + R_2 r^2 \sin^2(\theta) d\phi \otimes d\phi, \quad (6.57)$$

donde R_1 y R_2 son constantes. Por completitud incluiremos las ecuaciones asociadas al Ricci paralelo

$$\nabla_t R_{tt} = 2R_1 f, \quad (6.58)$$

$$\nabla_i R_{tj} \simeq R_1 g - R_2 h, \quad (6.59)$$

$$\nabla_t R_{ij} \simeq R_2 h, \quad (6.60)$$

el resto de las ecuaciones son proporcionales a estas. La ecuación asociada a la curvatura armónica es

$$\nabla_{[t} R_{i]j} \simeq R_1 g + R_2 h. \quad (6.61)$$

La solución nos permite encontrar una expresión algebraica para g

$$g(t) = -\frac{R_2}{R_1} h. \quad (6.62)$$

Reemplazando la función g en ecs. (6.23) y (6.24) obtenemos

$$R_{tt} = 3(fh - h^2 - \dot{h}), \quad (6.63)$$

$$R_{rr} = (R_2fh + R_2h^2 - 2R_1\kappa + R_2\dot{h}) (R_1(\kappa r^2 - 1))^{-1}. \quad (6.64)$$

El sistema de ecuaciones a resolver es:

$$-R_1 = 3(fh - h^2 - \dot{h}) \quad (6.65)$$

$$-\frac{R_2}{\kappa r^2 - 1} = \frac{R_2fh + R_2h^2 - 2R_1\kappa + R_2\dot{h}}{R_1(\kappa r^2 - 1)}, \quad (6.66)$$

este se puede reducir a

$$\dot{h} + h^2 - fh = \frac{R_1}{3}, \quad (6.67)$$

$$\dot{h} + h^2 + fh = \frac{2R_1\kappa}{R_2} - R_1. \quad (6.68)$$

Sumando las dos ecuaciones obtenemos una sola ecuación para la función h

$$\dot{h} + h^2 = \beta_1, \quad (6.69)$$

donde

$$\beta_1 = \frac{R_1}{3R_2} (3\kappa - R_2).$$

La solución de ec. (6.69) depende del signo de β_1

$$h(t) = \begin{cases} \sqrt{\beta_1} \tanh(\sqrt{\beta_1}(t - \alpha_1)) & \text{si } \beta_1 > 0, \\ -\sqrt{\beta_1} \tan(\sqrt{\beta_1}(t - \alpha_1)) & \text{si } \beta_1 < 0, \\ \frac{1}{t - \alpha_1} & \text{si } \beta_1 = 0, \end{cases} \quad (6.70)$$

donde α_1 es la constante de integración que viene de resolver la ecuación diferencial. Una vez encontrado la función h podemos encontrar la función f , para esto restamos ec. (6.67) y obtenemos una expresión para f

$$f(t) = \frac{\beta_2}{h(t)},$$

donde

$$\beta_2 = \frac{R_1}{3R_2} (3\kappa - 2R_2).$$

Luego la función f se define como

$$f(t) = \begin{cases} \frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1} \tanh(\sqrt{\beta_1}(t - \alpha_1))} & \text{si } \beta_1 > 0, \\ -\frac{\beta_2}{\sqrt{\beta_1} \tan(\sqrt{\beta_1}(t - \alpha_1))} & \text{si } \beta_1 < 0 \\ \beta_2(t - \alpha_1) & \text{si } \beta_1 = 0. \end{cases} \quad (6.71)$$

A partir de ec. (6.62) podemos encontrar una expresión para la función g

$$g(t) = \begin{cases} -\frac{R_2}{R_1} \sqrt{\beta_1} \tanh(\sqrt{\beta_1}(t - \alpha_1)) & \text{si } \beta_1 > 0, \\ \frac{R_2}{3R_1} \sqrt{\beta_1} \tan(\sqrt{\beta_1}(t - \alpha_1)) & \text{si } \beta_1 < 0 \\ -\frac{R_2}{3R_1} \frac{1}{t - \alpha_1} & \text{si } \beta_1 = 0. \end{cases} \quad (6.72)$$

Tensor de Ricci con *factor de escala*

El ansatz para este tensor es

$$-R_1 dt \otimes dt + \left(\frac{A(t)}{1 - \kappa r^2} \right) dr \otimes dr + r^2 A(t) d\theta \otimes d\theta + r^2 A(t) \sin^2(\theta) d\phi \otimes d\phi, \quad (6.73)$$

donde R_1 es una constante y $A(t)$ es el *factor de escala* dependiente del tiempo. La derivada covariante es

$$\nabla_t R_{tt} \simeq 2R_1 f, \quad (6.74)$$

$$\nabla_i R_{tj} \simeq R_1 g - Ah, \quad (6.75)$$

$$\nabla_t R_{ij} \simeq -2ah + \dot{A}. \quad (6.76)$$

La ecuación de la curvatura armónica es

$$\nabla_{[t} R_{i]j} \simeq R_1 g + Ah - \dot{A}. \quad (6.77)$$

Al igual que antes encontramos una expresión para g

$$g = \frac{\dot{A} - Ah}{R_1}. \quad (6.78)$$

Reemplazando la función g en ecs. (6.23) y (6.24) obtenemos

$$\begin{aligned} R_{tt} &= 3(fh - h^2 - \dot{h}) \\ R_{tr} &= -(Afh + Ah^2 - 2R_1\kappa - f\dot{A} + A\dot{h} - \ddot{A})(R_1(1 - \kappa r^2))^{-1}. \end{aligned} \quad (6.79)$$

El sistema de ecuaciones a resolver es

$$-R_1 = 3(fh - h^2 - \dot{h}), \quad (6.80)$$

$$-aR_1 = afh + ah^2 - 2R_1\kappa - f\dot{a} + a\dot{h} - \ddot{a}. \quad (6.81)$$

Cuando $R_1 = 0$ entonces podemos determinar la función h en términos de f , esta corresponde a una solución degenerada. La ec. (6.80) presenta una solución exacta cuando $f = C_f$, por este motivo abordaremos solo este caso

Restricción $f = C_f$, el sistema de ecuaciones se reduce a

$$-R_1 = 3(C_f h - h^2 - \dot{h}), \quad (6.82)$$

$$-aR_1 = aC_f h + ah^2 - 2R_1\kappa - C_f \dot{a} + a\dot{h} - \ddot{a}. \quad (6.83)$$

Notamos que ec. (6.82) puede ser escrita como

$$\dot{h} + \left(h - \frac{C_f}{2} \right)^2 = \beta_3, \quad \beta_3 = \frac{1}{12} (3C_f^2 + 4R_1). \quad (6.84)$$

La solución dependerá del signo de β_3

$$h(t) = \begin{cases} \omega \tanh(\omega(t - t_*)) & \text{si } \omega^2 = \beta_3 > 0, \\ -\omega \tanh(\omega(t - t_*)) & \text{si } -\omega^2 = \beta_3 < 0, \\ \frac{1}{t-t_*} + \frac{C_f}{2} & \text{si } \beta_3 = 0, \\ \pm\omega + \frac{C_f}{2} & \text{si } \beta_3 > 0 \end{cases} \quad (6.85)$$

La última solución escrita supone que la función h es constante.

A partir de ec. (6.83), podemos obtener una ecuación para la función a

$$\ddot{a} + \dot{a}C_f - aC_\alpha = -2R_1\kappa, \quad (6.86)$$

donde $C_\alpha = \frac{4}{3}R_1 + 2C_fC_h$. Es posible encontrar una solución solo si los términos acoplados con la función a son constante, es por esta razón que asumiremos que la función h esta dada por: $h = C_h = \pm\omega + C_f/2$ es la constante que viene de ec. (6.85). Luego, la solución exacta para el *factor de escala* es

$$a = a_1 e^{(2C_h - C_f)t} + a_2 e^{-2C_h t} + \frac{2\kappa R_1}{C_\alpha}. \quad (6.87)$$

Adicionalmente, otra solución para ec. (6.86) se obtiene cuando $\beta_3 = 0$, en cuyo caso R_1 es una constante determinada por el valor de C_f , y la función $h = 1/t + C_f/2$. La solución para a es

$$a = t(C_f + 2)[a_1 + a_2 C_f \Gamma(0, C_f t)] - a_2 e^{-C_f t} (C_f t + 1) + \frac{3}{4}\kappa C_f^2 t^2, \quad (6.88)$$

donde $\Gamma(0, C_f t)$ es la función gamma incompleta definida por

$$\Gamma(0, C_f t) = \int_1^\infty dx \frac{e^{-x C_f t}}{x}. \quad (6.89)$$

El *factor de escala* puede ser obtenido para otras elecciones de h , cuando se fija $C_f = 0$, en cuyo caso las soluciones a ec. (6.86) viene dada por

$$a = a_1 e^{\sqrt{\frac{4R_1}{r}}t} + a_2 e^{-\sqrt{\frac{4R_1}{r}}t} + \frac{3\kappa}{2}, \quad (6.90)$$

donde el signo de las funciones exponenciales viene dado por el signo de la constante R_1 .

Cosmología en gravedad afín

7.1. Curvas auto paralelas

En la gravedad afín uno se encuentra con tensores y campos tensoriales definidos en todo el espaciotiempo, sin embargo uno frecuentemente se encuentra con tensores definidos a lo largo de una curva, como por ejemplo el momentum de una partícula definido a lo largo de su *línea de mundo*. Consideremos la curva $x^\mu(\tau)$ donde τ es un parámetro afín y el campo vectorial tangente $X^\mu(x(\tau)) = \dot{x}^\mu(\tau)$, definimos la derivada covariante D_τ a lo largo de la curva

$$\frac{d}{d\tau} = \dot{x}^\mu \partial_\mu \rightarrow D_\tau = X^\mu \nabla_\mu = \dot{x}^\mu \nabla_\mu, \quad (7.1)$$

luego, aplicamos esta definición a un vector V^μ

$$\begin{aligned} D_\tau V^\mu &= \dot{x}^\nu \partial_\nu V^\mu + \dot{x}^\nu \Gamma_{\nu\lambda}^\mu V^\lambda, \\ &= \frac{d}{d\tau} V^\mu(x(\tau)) + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \dot{x}^\nu(\tau) V^\lambda(x(\tau)). \end{aligned}$$

Es importante recordar que el vector V^μ necesita solo estar definido a lo largo de la curva y no necesariamente en todo el espaciotiempo.

La derivada covariante a lo largo de una curva nos permite, en particular, definir la aceleración a^μ a lo largo de la curva $x^\mu(\tau)$, como la derivada covariante del vector velocidad $u^\mu = \dot{x}^\mu$

$$a^\mu = D_\tau \dot{x}^\mu = \ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = u^\nu \nabla_\nu u^\mu, \quad (7.2)$$

de esta forma podemos caracterizar las curvas auto paralelas, como las curvas con aceleración cero o nula

$$\ddot{x}^\mu + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = 0, \quad (7.3)$$

donde $\Gamma_{\nu\lambda}^\mu$ son los componentes de la conexión afín, las derivadas son con respecto a un parámetro afín τ . Para más información revisar [40, 51, 52, 67].

La ec. (7.3) no es invariante bajo parametrizaciones, consideremos la siguiente parametrización $\tau \rightarrow \sigma(\tau) = f(\tau)$, entonces

$$\frac{dx^\mu}{d\tau} = \frac{df}{d\tau} \frac{dx^\mu}{d\sigma},$$

luego ec. (7.3), puede ser escrita en términos de la variable sigma

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\sigma^2} + \Gamma_{\nu\lambda}^\mu \frac{dx^\nu}{d\sigma} \frac{dx^\lambda}{d\sigma} = - \frac{\ddot{f}}{\dot{f}^2} \frac{dx^\mu}{d\sigma}. \quad (7.4)$$

Las curvas auto paralelas mantienen su estructura solo si, la transformación es del tipo lineal

$$\sigma = f(\tau) \qquad f(\tau) = a\tau + b,$$

estas transformaciones se conocen como transformaciones afines [68], en este trabajo nos limitaremos al estudio de las auto paralelas que tienen una parametrización afín.

Las curvas auto paralelas, para las componentes presentadas en la tabla 5.4 son:

$$\begin{aligned} \ddot{t} + ft^2 + \frac{g}{1 - \kappa r^2} \dot{r}^2 + gr^2 \dot{\theta}^2 + gr^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2 &= 0, \\ \ddot{r} + 2ht\dot{r} + \frac{kr}{1 - \kappa r^2} \dot{r}^2 + (\kappa r^3 - r) \dot{\theta}^2 + (\kappa r^3 - r) \dot{\phi}^2 &= 0, \\ \ddot{\theta} + 2ht\dot{\theta} + 2\frac{1}{r} \dot{r}\dot{\theta} - 2 \cos \theta \sin \theta \dot{\phi}^2 &= 0, \\ \ddot{\phi} + 2ht\dot{\phi} + 2\frac{\dot{r}\dot{\phi}}{r} + 2\frac{\cos \theta}{\sin \theta} \dot{\theta}\dot{\phi} &= 0. \end{aligned}$$

Como el momento angular es una cantidad conservada, fijamos $\theta = \pi/2$, luego las ecuaciones se reducen a:

$$\ddot{t} + ft^2 + \frac{g}{1 - \kappa r^2} \dot{r}^2 + gr^2 \dot{\phi}^2 = 0, \quad (7.5)$$

$$\ddot{r} + 2ht\dot{r} + \frac{kr}{1 - \kappa r^2} \dot{r}^2 + (\kappa r^3 - r) \dot{\phi}^2 = 0, \quad (7.6)$$

$$\ddot{\phi} + 2ht\dot{\phi} + 2\frac{\dot{r}\dot{\phi}}{r} = 0. \quad (7.7)$$

Recordemos, la gravedad afín es un modelo alternativo a la relatividad general donde el campo fundamental es la conexión afín y no esta definido el tensor métrico, dicho esto, para que nuestro modelo tenga sentido, debe contener las curvas geodésicas de Friedmann–Robertson–Walker [69–71].

Centrando nuestro estudio en la forma de la orbita en el plano (r, ϕ) y no en su evolución temporal e inspirados en el trabajo [69], nos gustaría encontrar una transformación para el parámetro afín, que nos permita eliminar los terminos tipo $2ht\dot{r}$ y $2ht\dot{\phi}$ de sus respectivas ecs. (7.6) y (7.7). Elegimos una función arbitraria $A(t)$ para la transformación:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} &= \frac{1}{A} \frac{d}{dl}, \\ \frac{d^2}{d\lambda^2} &= -\frac{1}{A^3} \frac{dA}{dt} \frac{dt}{dl} \frac{d}{dl} + \frac{1}{A^2} \frac{d^2}{dl^2}. \end{aligned} \quad (7.8)$$

Reemplazamos en ec. (7.6), esto nos lleva a

$$-\frac{1}{A^3} \frac{dA}{dt} \frac{dt}{dl} \frac{dr}{dl} + \frac{1}{A^2} \frac{d^2 r}{dl^2} + \frac{2h}{A^2} \left(\frac{dt}{dl} \frac{dr}{dl} \right) + \frac{kr}{1 - \kappa r^2} \left(\frac{1}{A} \frac{dr}{dl} \right)^2 + (\kappa r^3 - r) \left(\frac{1}{A} \frac{d\phi}{dl} \right)^2 = 0.$$

Como buscamos eliminar la dependencia del parámetro t , la función A debe resolver la siguiente ecuación

$$-\frac{1}{A^3} \frac{dA}{dt} \frac{dt}{dl} \frac{dr}{dl} + \frac{2h}{A} \frac{dt}{dl} \frac{dr}{dl} = 0.$$

La solución, nos permite relacionar la función h con A

$$A(t) = C_A e^{2H}, \quad (7.9)$$

donde $H = \int h dt$. Reemplazando la expresión de A en ecs. (7.6) y (7.7), podemos encontrar las nuevas expresiones para las componentes r y ϕ

$$\frac{d^2 r}{dl^2} + \frac{\kappa r}{1 - \kappa r^2} \left(\frac{dr}{dl} \right)^2 + (\kappa r^3 - r) \left(\frac{d\phi}{dl} \right)^2 = 0, \quad (7.10)$$

$$\frac{d^2 \phi}{dl^2} + \frac{2}{r} \frac{dr}{dl} \frac{d\phi}{dl} = 0. \quad (7.11)$$

Este resultado corresponde a las expresiones clásicas de las curvas geodésicas en Relatividad General en el universo Friedmann-Robertson-Walker, por lo tanto las geodésicas están contenidas en las auto paralelas de la gravedad afín. Las soluciones de las ec. (7.10) y (7.11) se pueden obtener de diversas formas: de forma analítica [69, 70], por métodos computacionales [72], o en los libros estándar de relatividad general [53, 73–77]. Acá no mostraremos en detalle sobre como obtener las soluciones, solo mencionaremos los dos tipos de soluciones: el primer tipo se puede obtener igualando ϕ a una constante, estas curvas son radiales y son de especial interés en el efecto Sunyaev-Zeldovich [78], o en el estudio de la ecuación cosmológica de Boltzmann [79, 80]. Las orbitas radiales son:

$$r(l)_{(\kappa=1)} = \sin l, \quad r(l)_{(\kappa=0)} = l, \quad r(l)_{(\kappa=-1)} = \sinh l. \quad (7.12)$$

El segundo tipo de solución, se encuentra resolviendo las ecuaciones sin ninguna restricción para las variables r y ϕ

$$r(\phi) = \frac{1}{\sqrt{\kappa + 2B^2 \cos^2(\phi + \beta)}}, \quad (7.13)$$

para $\kappa = 1$ el resultado geométrico es la orbita de una elipse en coordenadas polares, mientras $\kappa = 0$ es el espacio plano y la curva es una línea recta en coordenadas polares.

Esta parametrización, no entrega una expresión analítica para B , pero si nos dice la relación entre las funciones A y h , y al mismo tiempo nos permite eliminar los términos tipo $2h\dot{r}$ y $2h\dot{\phi}$ de las ecs. (7.6) y (7.7), dejando como nuevo parámetro l . Esto nos permite generar las ecuaciones de las geodésicas contenidas en el espacio de Friedmann–Robertson–Walker. Además la parametrización nos permite asegurar que no existen nuevas curvas en el plano (r, ϕ) en la gravedad afín polinomial, esto se debe a que nos permite reducir el sistema de ecuaciones a las ya conocidas en el espaciotiempo de Friedmann–Robertson–Walker, es por esta razón que en nuestro modelo no pueden existir nuevas formas de orbitas en el plano (r, ϕ) .

7.2. Ricci como una métrica emergente

Una variedad pseudo Riemanniana, es una variedad diferenciable M equipada con un tensor métrico $g_{\mu\nu}$ diferenciable, simétrico, no degenerado en cada punto de la variedad. En este tipo de variedad, la estructura fundamental es el tensor métrico, cuando este está definido

de forma positiva entonces es una variedad Riemanniana. Un caso especial es la variedad de Lorentz, donde el tensor métrico, tiene una signatura $(1, n - 1)$ para n dimensiones, esta es una variedad pseudo-Riemanniana. En Relatividad General, el espaciotiempo es una variedad diferenciable, de dimensión cuatro, dotada de un tensor métrico de signatura $(1, 3)$, que resuelve las ecuaciones de campo de Einstein. Siempre es posible definir la conexión Levi-Civita, pero si esta satisface las condiciones de metricidad y además estamos trabajando en un espaciotiempo sin torsión, este esta conexión viene dada por las derivadas parciales del tensor métrico. Con la conexión, podemos encontrar el tensor de curvatura de Riemann, y su respectiva contracción el tensor de Ricci. Existe una variedad especial, en las que el tensor de Ricci, es proporcional a la métrica, estas se conocen como variedades de Einstein [81], esto permite que las cantidades derivadas a partir del tensor métrico formen una cadena cerrada, tal como se muestra en fig. 7.1. Es posible contraer el tensor de Ricci, usando la métrica, para encontrar el escalar de curvatura.

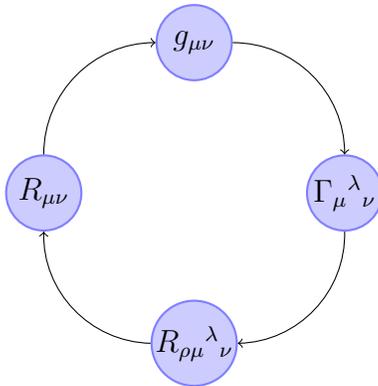


FIGURA 7.1: Cadena cerrada para cantidades, usando el tensor métrico.

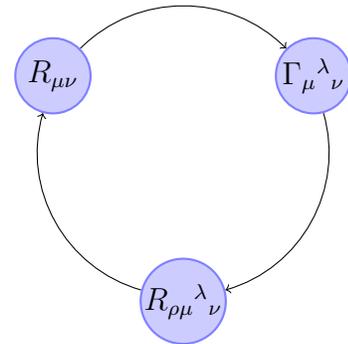


FIGURA 7.2: Cadena cerrada para cantidades, usando la conexión afín.

En nuestro modelo, la variedad esta dotada de una conexión afín y no necesariamente cuenta con un tensor métrico (M, Γ) . A partir de la conexión afín podemos encontrar el tensor de curvatura de Riemann, y su respectiva contracción, el tensor de Ricci. Esta última operación, esta bien definida en nuestro espacio, debido a que el tensor de curvatura, tiene un índice superior de forma natural, y por lo tanto es posible contraerlo con algún índice inferior. Si el tensor de Ricci actúa como una métrica emergente entonces podemos cerrar la cadena de cantidades definidas en la gravedad afín polinomial, ver fig. 7.2.

Definición Sea M una variedad diferenciable de dimensión m . Una métrica pseudo-Riemanniana en M es un campo tensorial $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} g$ en M , que satisface

1. g es un tensor simétrico.
2. g es no degenerado, esta condición nos asegura que es invertible.

Consideremos $\tilde{R}_{\mu\nu}$ como el tensor Ricci-métrico obtenido a partir de la conexión afín (no necesariamente la conexión de nuestro modelo) y exigimos que este tensor sea covariantemente.

Escribiendo explícitamente la derivada covariante y permutando los índices obtenemos

$$\begin{aligned}\nabla_{\sigma}\tilde{R}_{\mu\nu} &= \partial_{\sigma}\tilde{R}_{\mu\nu} - \tilde{\Gamma}_{\sigma}^{\rho}{}_{\mu}\tilde{R}_{\rho\nu} - \tilde{\Gamma}_{\sigma}^{\rho}{}_{\nu}\tilde{R}_{\rho\mu} = 0, \\ \nabla_{\mu}\tilde{R}_{\sigma\nu} &= \partial_{\mu}\tilde{R}_{\sigma\nu} - \tilde{\Gamma}_{\mu}^{\rho}{}_{\sigma}\tilde{R}_{\rho\nu} - \tilde{\Gamma}_{\nu}^{\rho}{}_{\mu}\tilde{R}_{\rho\sigma} = 0, \\ \nabla_{\nu}\tilde{R}_{\sigma\mu} &= \partial_{\nu}\tilde{R}_{\sigma\mu} - \tilde{\Gamma}_{\nu}^{\rho}{}_{\sigma}\tilde{R}_{\rho\mu} - \tilde{\Gamma}_{\mu}^{\rho}{}_{\nu}\tilde{R}_{\rho\sigma} = 0,\end{aligned}$$

donde $\tilde{\Gamma}_{\nu}^{\rho}{}_{\sigma}$ es la conexión obtenida a partir de $\tilde{R}_{\mu\nu}$. Sumando las dos primeras expresiones y restando la última obtenemos

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma}{}^{\nu}{}_{\mu} = \frac{1}{2}\tilde{R}^{\rho\nu} \left(\partial_{\sigma}\tilde{R}_{\mu\nu} + \partial_{\mu}\tilde{R}_{\sigma\nu} - \partial_{\nu}\tilde{R}_{\sigma\mu} \right). \quad (7.14)$$

Queremos demostrar la siguiente identidad

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma}{}^{\nu}{}_{\mu}(\tilde{R}) = \Gamma_{\sigma}{}^{\nu}{}_{\mu}(R),$$

sujeto a la siguiente restricción

$$\tilde{R}_{\mu\nu} = R_{\mu\nu}, \quad (7.15)$$

$$\nabla_{\sigma}R_{\mu\nu} = 0, \quad (7.16)$$

donde $R_{\mu\nu}$ es el tensor de Ricci obtenido a partir de los coeficientes de la conexión afín. Escribiendo de forma explícita ec. (7.16) y permutando los índices obtenemos

$$\nabla_{\sigma}R_{\mu\nu} = \partial_{\sigma}R_{\mu\nu} - \Gamma_{\sigma}^{\rho}{}_{\mu}R_{\rho\nu} - \Gamma_{\sigma}^{\rho}{}_{\nu}R_{\rho\mu} = 0, \quad (7.17)$$

$$\nabla_{\mu}R_{\sigma\nu} = \partial_{\mu}R_{\sigma\nu} - \Gamma_{\mu}^{\rho}{}_{\sigma}R_{\rho\nu} - \Gamma_{\nu}^{\rho}{}_{\mu}R_{\rho\sigma} = 0, \quad (7.18)$$

$$\nabla_{\nu}R_{\sigma\mu} = \partial_{\nu}R_{\sigma\mu} - \Gamma_{\nu}^{\rho}{}_{\sigma}R_{\rho\mu} - \Gamma_{\mu}^{\rho}{}_{\nu}R_{\rho\sigma} = 0. \quad (7.19)$$

Despejando las derivadas parciales y usando (7.15), reemplazamos en ec. (7.14)

$$\tilde{\Gamma}_{\sigma}{}^{\nu}{}_{\mu} = \frac{1}{2}\tilde{R}^{\rho\nu} \left(\Gamma_{\sigma}^{\rho}{}_{\mu}R_{\rho\nu} + \Gamma_{\sigma}^{\rho}{}_{\nu}R_{\rho\mu} + \Gamma_{\mu}^{\rho}{}_{\sigma}R_{\rho\nu} + \Gamma_{\nu}^{\rho}{}_{\mu}R_{\rho\sigma} - \Gamma_{\nu}^{\rho}{}_{\sigma}R_{\rho\mu} - \Gamma_{\mu}^{\rho}{}_{\nu}R_{\rho\sigma} \right), \quad (7.20)$$

$$= \frac{1}{2}\tilde{R}^{\rho\nu} \left(\Gamma_{\sigma}^{\rho}{}_{\mu}R_{\rho\nu} + \Gamma_{\mu}^{\rho}{}_{\sigma}R_{\rho\nu} \right), \quad (7.21)$$

$$= \Gamma_{\sigma}{}^{\nu}{}_{\mu}. \quad (7.22)$$

Este es el resultado que estamos buscando, con la conexión afín encontramos el tensor de curvatura y su contracción el tensor de Ricci. Si el tensor de Ricci, actúa como una métrica emergente, entonces genera una conexión afín equivalente a la original, siempre y cuando el tensor de Ricci sea covariantemente constante. Estos espacios se conocen como los espacios o variedades de Einstein.

Como consecuencia directa, con el tensor de Ricci actuando como una métrica emergente, podemos distinguir los distintos tipos de curvas auto-paralelas tipo: tiempo, espacio o nulo. Podemos definir las curvas auto-paralelas nulas, por el siguiente conjunto de ecuaciones

$$\ddot{x}^{\mu} + \Gamma_{\lambda}^{\mu}{}_{\rho}\dot{x}^{\lambda}\dot{x}^{\rho} = 0, \quad (7.23)$$

$$\tilde{R}_{\mu\nu}\dot{x}^{\mu}\dot{x}^{\nu} = 0. \quad (7.24)$$

Analizando la dirección radial para el haz de luz

$$dt = \pm \sqrt{\frac{\tilde{R}_{rr}}{\tilde{R}_{tt}}} \frac{dr}{\sqrt{1 - \kappa r^2}}, \quad (7.25)$$

renombrando las variables temporales como

$$a(t) = \sqrt{\frac{\tilde{R}_{rr}}{\tilde{R}_{tt}}}, \quad (7.26)$$

podemos recuperar el efecto *redshift* definido en cosmología.

De esta forma la gravedad afín polinomial, aún cuando se define utilizando la conexión afín como campo fundamental, contiene un tensor métrico que emerge de forma natural a partir del tensor de Ricci, en ese sentido, podemos obtener cantidades cosmológicas en nuestro modelo.

Conclusión

En esta tesis se ha presentado y estudiado el modelo de la gravedad afín polinomial, este es un modelo alternativo a la Relatividad General, construido para describir las interacciones gravitacionales, utilizando la conexión como campo único y fundamental, la métrica no entra como mediador de las interacciones. La acción afín polinomial se construye utilizando términos que sean invariante bajo transformación de coordenadas por lo tanto es invariante bajo difeomorfismo. La acción cuenta con una gran cantidad términos, estos se configuran de acuerdo a las restricciones que impone el *análisis dimensional* a la hora de construir densidades escalares. Las ecuaciones de campo obtenidas son complicadas de resolver, por esta razón nos enfocaremos en el sector del espaciotiempo libre de torsión, esta simplificación debe ser hecha a nivel de ecuación de movimiento, sin embargo es posible construir una acción efectiva notando que las únicas contribuciones no nulas, vendrán de los términos que son lineales en los campos A_μ , B_μ^λ para ec. (4.5), que representan la torsión. Finalmente la ecuación de campo en el espaciotiempo sin torsión corresponde a una generalización de las ecuaciones de campo de la relatividad general en el vacío.

Nuestro ansatz cosmológico es construido utilizando los vectores de Killing como generadores de las simetrías impuestas por el principio cosmológico: isotropía y homogeneidad. Estos vectores entran como campo vectorial a la derivada de Lie, y nos permite encontrar las restricciones geométricas a nuestros ansatz tanto métrico como afín. Para el ansatz métrico, la dependencia final de las componentes del tensor quedan en función de las coordenadas (t, r, θ) , esta métrica corresponde a la métrica de Friedmann–Robertson–Walker. Para el ansatz afín, los coeficientes finales dependerán de las coordenadas (t, r, θ) , sin embargo quedan tres coeficientes definidos por distintas funciones dependientes del tiempo, a estos coeficientes los llamamos f , g y h .

Cuando la conexión es la conexión Levi-Civita para el ansatz métrico, es posible demostrar que las soluciones encontradas para *Ricci plano* son las mismas que se encuentran descritas por la conexión en el espaciotiempo de Minkowski. Para el caso *Ricci paralelo*, como era de esperarse, uno puede recuperar las soluciones cosmológicas de vacío que se encuentran en Relatividad General, donde la constante cosmológica entra como una constante de integración. La tercera familia de soluciones vienen dadas por la ecuación *curvatura armónica*, al realizar el cambio de variable a^2 a f esta permite reproducir soluciones de vacío ya existentes en Relatividad General pero estas no presentan ninguna restricción geométrica, dado que el parámetro κ se encuentra libre, sin embargo, al volver al espaciotiempo dado por el factor de escala a , el factor κ está presente dentro de una raíz lo que supondrá cierta restricción sobre su valor y el valor de las constantes asociadas a cada tipo de solución.

Cuando la conexión utilizada es la conexión afín, las ecuaciones asociadas a *Ricci plano* son dos ecuaciones independientes, esto nos dice de forma inmediata que no es posible encontrar de

forma analítica cada una de las funciones definidas en la conexión afín, sin embargo la variable f no es una variable dinámica dado que no presenta ninguna derivada temporal, por lo tanto sirve para parametrizar las funciones g y h , de esta forma es posible encontrar expresiones para dichas funciones en términos de f . Estas soluciones no presentan restricciones geométricas, en este sentido el parámetro κ puede tomar cualquiera de los tres valores. Como contamos con más incógnitas que ecuaciones podemos suponer la estructura de alguna función, esto conduce a varios casos interesantes, en particular tenemos: *i*) podemos elegir las funciones f , g y h de forma tal que podemos obtener el tensor de Ricci de la métrica de Friedmann–Robertson–Walker, *ii*) es posible elegir una parametrización de las funciones f , g y h de forma tal que podemos emular los resultados de Relatividad General acoplado con materia, en particular un fluido perfecto, en este sentido la gravedad afín polinomial presenta resultados que se pueden interpretar como efectos de materia en Relatividad General. Este último punto, resulta de gran interés porque el modelo afín hace una descripción geométrica del espacio-tiempo y no hace referencia al tensor de energía-momento.

Las ecuaciones afines para el caso *Ricci paralelo* son tres y contamos con tres incógnitas, pero dada la estructura de las ecuaciones es imposible encontrar una solución analítica para cada función. Sin embargo podemos considerar un ansatz para el tensor de Ricci que sea no nulo y resolver las ecuaciones para el *Ricci paralelo*: *i*) para el ansatz independiente del tiempo, no existen soluciones no degeneradas, sin embargo se encontraron dos soluciones degeneradas: la primera solución degenerada, considera la componente temporal del tensor de Ricci como nulo, esto permite encontrar una expresión para la función g en términos de f ; la segunda solución degenerada, considera la parte espacial del tensor de Ricci como cero, esto permite encontrar de forma analítica la función h .

El último caso, corresponde a *curvatura armónica* nos entrega solo una ecuación para las tres variables, por lo tanto no es posible resolver el sistema. Postulamos dos tipos de ansatz para el tensor de Ricci que sean no nulos y no degenerados: *i*) Cuando el ansatz es independiente del tiempo, en la ecuación de la *curvatura armónica* la función f no está presente, esto permite encontrar una relación entre las funciones g y h que resuelvan dicha ecuación. Luego volvemos al tensor de Ricci igualado al ansatz, esto genera dos ecuaciones, una para la función h y otra para la función f . Las soluciones dependerán de los signos de las constantes. *ii*) Cuando el ansatz es el factor de escala, la ecuación de la *curvatura armónica* queda en términos de las funciones g , h , a y \dot{a} . Es posible dejar la función g en término de las otras funciones y resolver dicha ecuación. Luego volvemos al tensor de Ricci igualado al ansatz, esto genera un sistema de dos ecuaciones. Este solo será posible de resolver cuando la función f sea una constante C_f , luego es posible encontrar la función h de forma analítica y además encontrar una ecuación para el factor de escala. Esta ecuación puede ser resuelta siempre y cuando h sea una constante. Es interesante que la conexión asociada a la curvatura armónica puede entregar una métrica emergente (el tensor de Ricci) correspondiente a la métrica del espaciotiempo de Minkowski, aún cuando la curvatura no es cero.

Con la conexión afín estudiamos las curvas auto-paralelas en cosmología, esto conduce a cuatro ecuaciones (una para cada coordenada). Centramos nuestro interés en la forma de las órbitas en el plano $r - \phi$ para $\theta = \pi/2$. Las ecuaciones para las componentes r y ϕ , dependen de las coordenadas r, ϕ, t y sus primeras, segundas derivadas. Dado que estamos interesados solo en la forma de la órbita y no en como evoluciona temporalmente, buscamos eliminar la dependencia de la coordenada t . Para esto consideramos una transformación o parametrización

de las coordenadas. Esto permite eliminar la dependencia de la coordenada t y reducir el sistema de ecuaciones al ya conocido en Friedmann–Robertson–Walker, es por este motivo que estas geodésicas están contenidas en las curvas auto paralelas de la gravedad afín polinomial. Cabe mencionar que solo la función h esta acoplada con el término \dot{t} en ambas ecuaciones, por este motivo cuando eliminamos la dependencia de la coordenada t , estamos eliminando la función afín. Luego no es posible tener nuevas curvas en el plano $r - \phi$ en la gravedad afín polinomial.

El tensor de Ricci, bajo las condiciones de paralelismo y no degenerancia actúa como una métrica emergente y en este caso particular, podemos utilizar este tensor para: definir la longitud de arco, transformar vectores en sus representaciones duales los covectores y viceversa, subir/bajar índices, esto último nos permite generar contracciones en tensores y obtener cantidades que solo estan definidas en una variedad dotada de un tensor métrico. Como ya vimos antes, no es posible resolver las ecuaciones para el *Ricci paralelo*, pero cuando utilizamos un ansatz para el tensor de Ricci, podemos encontrar parametrizaciones que resuelven las ecuaciones de *Ricci paralelo*, estas soluciones generan los espacios de Einstein ya conocidos. De esta forma, el tensor de Ricci actúa como una métrica emergente, sin embargo este nuevo tensor adopta la forma de métricas ya conocidas en Relatividad General. Si uno estudia las curvas geodésicas, es posible demostrar que no existen nuevas curvas, esto se debe a que aún conocida las parametrizaciones de las funciones f , g y h que componen este nuevo tensor de Ricci, al estudiar la forma de las curvas solo entra en juego la función h acoplada con los términos $\dot{t}\dot{r}$ y $\dot{t}\dot{\phi}$, al igual que antes debemos eliminar la dependencia temporal de las curvas, lo que lleva a eliminar los términos que contienen la función h , reduciendo el sistema de ecuaciones a las ya conocidas en los espacios de Friedmann–Robertson–Walker. Esto nos dice que a un nivel más fundamental, en un espaciotiempo que presenta las simetrías de isotropía y homogeneidad, las curvas son las ya conocidas y no pueden existir nuevas curvas en el plano $r - \phi$.

El segundo resultado, cuando el tensor de Ricci actua como una métrica emergente, podemos clasificar vectores y trayectorias como tipo: tiempo, espacio o nulo. En este contexto, podemos distinguir la trayectoria de objetos con masas (tal como planetas) de los sin masa (fotones). En este último caso, surge de manera natural el efecto *redshift* en nuestro modelo de gravedad afín polinomial.

Análisis Dimensional

El procedimiento para construir la acción de la gravedad afín polinomial, utiliza un tipo de *análisis dimensional*, tal como se muestra en Ref. [47]. Construimos el modelo utilizando los elementos que componen la conexión afín presentados en ec. (4.4), donde los campos independientes son: A_μ es proporcional a la traza de la torsión, $B_\mu^\lambda{}_\nu$ el tensor de torsión sin traza, y $\Gamma_\rho^\mu{}_\sigma$ como la parte simétrica, sin embargo este campo no transforma como tensor, por este motivo introducimos la derivada covariante ∇_μ .

Nuestro interés, es construir densidades escalares, para esto debemos contar el número de índices *libres*. Se define el operador $N(\Phi)$ para contar el número y la posición de los índices del campo Φ , siendo positivo(negativa) para índices que se encuentran arriba(abajo). De esta forma tenemos

$$N(A_\mu) = -1, \quad N(B_\mu^\lambda{}_\nu) = -1, \quad N(\nabla_\mu) = -1, \quad N(dV^{\alpha\beta\gamma\delta}) = 4.$$

De la misma forma y usando el mismo convenio, definimos el operador $W(\Phi)$, para contar el peso

$$W(A_\mu) = 0, \quad W(B_\mu^\lambda{}_\nu) = 0, \quad W(\nabla_\mu) = 0, \quad W(dV^{\alpha\beta\gamma\delta}) = 1.$$

La expresión genérica (G) que podemos construir usando los elementos A_μ , $B_\mu^\lambda{}_\nu$, ∇_μ , $dV^{\alpha\beta\gamma\delta}$ es

$$G = A^a B^b \nabla^c dV^d, \tag{A.01}$$

donde la potencia representa el número de veces que aparece el campo. Aplicando los operadores $N(\Phi)$ y $W(\Phi)$ a G obtenemos

$$N(G) = 4d - a - b - c = n, \tag{A.02}$$

$$W(G) = d = w. \tag{A.03}$$

Para construir densidades escalares, debemos fijar las restricciones adecuadas, esto es restringir $n = 0$ y $w = 1$. Esta última condición, fija de forma inmediata el valor de $d = 1$, de esta forma tenemos solo una ecuación por resolver:

$$a + b + c = 4. \tag{A.04}$$

A continuación, presentamos una tabla resumen, con todas las configuraciones posibles, que resuelven esta última ecuación.

CUADRO A.1: Posibles términos contribuyentes a la densidad lagrangeana.

a	b	c	Terms
4	0	0	AAAA
3	1	0	AAAB
3	0	1	AAA∇
2	2	0	AABB
2	0	2	AA∇∇
2	1	1	AAB∇
1	2	1	ABB∇
1	1	2	AB∇∇
1	3	0	ABBB
1	0	3	A∇∇∇
0	4	0	BBBB
0	3	1	BBB∇
0	2	2	BB∇∇
0	1	3	B∇∇∇
0	0	4	∇∇∇∇

Estudiemos como construir algunos términos de la acción, en particular trabajaremos con $B∇∇∇$. La expresión asociada a esta configuración corresponde a

$$\nabla_{\square}\nabla_{\square}\nabla_{\square}B_{\square\square\square\square}dV^{\square\square\square\square}, \quad (\text{A.05})$$

donde cada cuadrado será completado con un índice griego. El diferencial de volumen debe estar contraído, por lo tanto tenemos solo dos opciones

$$\nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\nabla_{\mu}B_{\gamma}{}^{\mu}{}_{\delta}dV^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad \nabla_{\alpha}\nabla_{\beta}\nabla_{\gamma}B_{\delta}{}^{\mu}{}_{\mu}dV^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (\text{A.06})$$

El primer término presenta la estructura que se debe satisfacer mientras que el segundo término es cero, esto debido a que la expresión $B_{\delta}{}^{\mu}{}_{\mu}$ es cero, porque este término no tiene traza. A partir del conmutador de las derivadas covariantes podemos obtener el tensor de curvatura, de esta forma podemos reescribir el primer término como

$$R_{\alpha\beta}{}^{\sigma}{}_{\rho}\nabla_{\mu}B_{\gamma}{}^{\mu}{}_{\delta}dV^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (\text{A.07})$$

En esta última expresión tenemos dos nuevos índices que deben ser contraídos

$$R_{\alpha\beta}{}^{\rho}{}_{\rho}\nabla_{\mu}B_{\gamma}{}^{\mu}{}_{\delta}dV^{\alpha\beta\gamma\delta}, \quad R_{\sigma\alpha}{}^{\sigma}{}_{\beta}\nabla_{\mu}B_{\gamma}{}^{\mu}{}_{\delta}dV^{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (\text{A.08})$$

Estas dos expresiones corresponden a los términos C_1 y C_2 . Un procedimiento similar entrega todos los términos de la acción (4.5).

De la tabla A.1, las configuraciones no nulas son

$$\begin{array}{lll} AABB \rightarrow F_4 & AB\nabla\nabla \rightarrow B_3, B_4, B_5, E_2 & BBB\nabla \rightarrow D_1, D_2, D_3 \\ AAB\nabla \rightarrow D_6, D_7 & AB\text{BB} \rightarrow F_3 & BB\nabla\nabla \rightarrow B_1, B_2, E_1 \\ ABB\nabla \rightarrow D_4, D_5 & B\text{BBB} \rightarrow F_1, F_2 & B\nabla\nabla\nabla \rightarrow C_1, C_2 \end{array}$$

Ecuaciones de campos

En este apéndice, se muestran las contribuciones de cada término presente en la acción ec. (4.5) para las ecuaciones de campos. Esta separación nos facilita ver la dependencia de los campos y comprobar de forma directa, la acción efectiva del modelo.

Ecuaciones de campos para $\Gamma_{\mu}^{\lambda \nu}$

$$B_1 : \nabla_{\mu} \left(\left[2\delta_{\lambda}^{[\mu} B_{\alpha}^{\nu]} B_{\gamma}^{\rho} B_{\delta} + 2\delta_{\lambda}^{[\mu} B_{\alpha}^{\rho]} B_{\gamma}^{\nu} B_{\delta} \right] dV^{\alpha\beta\gamma\delta} \right) = 0 \quad (\text{B.01})$$

$$B_2 : \nabla_{\mu} \left(2B_{\gamma}^{\sigma} B_{\sigma}^{(\rho} B_{\lambda}^{\nu)} dV^{\mu\gamma\delta} \right) = 0 \quad (\text{B.02})$$

$$B_3 : \nabla_{\mu} \left(2\delta_{\lambda}^{[\mu} B_{\beta}^{\nu]} A_{\delta} dV^{\rho\beta\gamma\delta} + 2\delta_{\lambda}^{[\mu} B_{\beta}^{\rho]} A_{\delta} dV^{\nu\beta\gamma\delta} \right) = 0 \quad (\text{B.03})$$

$$B_4 : \nabla_{\mu} \left(-2B_{\gamma}^{(\rho} A_{\lambda} dV^{\nu)\mu\gamma\delta} \right) = 0 \quad (\text{B.04})$$

$$B_5 : \nabla_{\mu} \left(-2B_{\gamma}^{\sigma} A_{\sigma} \delta_{\lambda}^{(\rho} dV^{\nu)\mu\gamma\delta} \right) = 0 \quad (\text{B.05})$$

$$C_1 : \nabla_{\mu} \left(2\nabla_{\beta} B_{\gamma}^{\rho} \delta_{\lambda}^{[\mu} dV^{\nu]\beta\gamma\delta} + 2\nabla_{\beta} B_{\gamma}^{\nu} \delta_{\lambda}^{[\mu} dV^{\rho]\beta\gamma\delta} \right) = 2R_{\mu\lambda}^{\mu} B_{\gamma}^{(\rho} dV^{\nu)\alpha\gamma\delta} \quad (\text{B.06})$$

$$C_2 : \nabla_{\mu} \left(-2\nabla_{\sigma} B_{\gamma}^{\sigma} \delta_{\lambda}^{(\rho} dV^{\nu)\mu\gamma\delta} \right) = 2R_{\alpha\beta}^{\sigma} \left[2B_{\lambda}^{(\nu} dV^{\rho)\alpha\beta\delta} - \delta_{\lambda}^{(\nu} B_{\gamma}^{\rho)} dV^{\alpha\beta\gamma\delta} \right] \quad (\text{B.07})$$

$$D_1 : 2B_{\tau}^{\sigma} B_{\sigma}^{\tau} B_{\gamma}^{(\rho} dV^{\nu)\alpha\gamma\delta} = 0 \quad (\text{B.08})$$

$$D_2 : 2B_{\alpha}^{\sigma} B_{\sigma}^{(\nu} \left[2B_{\lambda}^{\tau} dV^{|\rho)\alpha\beta\delta} - \delta_{\lambda}^{\tau} B_{\gamma}^{\rho)} dV^{\alpha\beta\gamma\delta} \right] = 0 \quad (\text{B.09})$$

$$D_3 : 2B_{\alpha}^{\sigma} B_{\beta}^{(\nu} \left[\delta_{\sigma}^{\rho)} B_{\lambda}^{\tau} dV^{\alpha\beta\gamma\delta} + \delta_{\delta}^{\rho)} B_{\sigma}^{\tau} B_{\lambda} - \delta_{\lambda}^{\tau} B_{\sigma}^{|\rho)} dV^{\alpha\beta\gamma\delta} \right] = 0 \quad (\text{B.010})$$

$$D_4 : -2B_{\alpha}^{\nu} B_{\beta}^{\rho} B_{\gamma}^{\sigma} A_{\lambda} dV^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{B.011})$$

$$D_5 : 2B_{\alpha}^{(\nu} B_{\beta}^{\sigma} \left[2B_{\lambda}^{\rho} dV^{\alpha\beta\delta} - \delta_{\lambda}^{\rho} B_{\gamma}^{\sigma)} dV^{\alpha\beta\gamma\delta} \right] = 0 \quad (\text{B.012})$$

$$D_6 : 2B_{\alpha}^{(\nu} B_{\beta}^{\sigma} A_{\gamma} A_{\lambda} dV^{\rho)\alpha\beta\gamma} = 0 \quad (\text{B.013})$$

$$E_1 : 4\nabla_{\sigma} B_{\alpha}^{\sigma} \left[2B_{\lambda}^{(\rho} dV^{\nu)\alpha\beta\delta} - \delta_{\lambda}^{(\nu} B_{\gamma}^{\rho)} dV^{\alpha\beta\gamma\delta} \right] = 0 \quad (\text{B.014})$$

$$E_2 : 2F_{\alpha\beta} \left[2B_{\lambda}^{(\rho} dV^{\nu)\alpha\beta\delta} - \delta_{\lambda}^{(\nu} B_{\gamma}^{\rho)} dV^{\alpha\beta\gamma\delta} \right] = 0 \quad (\text{B.015})$$

Ecuaciones de campos para $B_\mu^\lambda{}_\nu$

$$B_1 : 4R_{\mu(\sigma}{}^\mu{}_\lambda)B_\gamma{}^\sigma{}_\delta dV^{\nu\rho\gamma\delta} = 0 \quad (\text{B.016})$$

$$B_2 : 2R_{\alpha\beta}{}^\mu{}_\sigma B_\mu{}^\sigma{}_\lambda dV^{\nu\rho\alpha\beta} + 2R_{\alpha\beta}{}^{[\nu}{}_\lambda B_\gamma{}^{\rho]}{}_\delta dV^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{B.017})$$

$$B_3 : 2R_{\mu\lambda}{}^\mu{}_\alpha A_\beta dV^{\nu\rho\alpha\beta} = 0 \quad (\text{B.018})$$

$$B_4 : 2R_{\alpha\beta}{}^\sigma{}_\lambda A_\sigma dV^{\nu\rho\alpha\beta} = 0 \quad (\text{B.019})$$

$$B_5 : 2R_{\alpha\beta}{}^\tau{}_\tau A_\lambda dV^{\nu\rho\alpha\beta} = 0 \quad (\text{B.020})$$

$$C_1 : \nabla_\mu (-2R_{\sigma\alpha}{}^\sigma{}_\lambda dV^{\mu\nu\rho\alpha}) = 0 \quad (\text{B.021})$$

$$C_2 : \nabla_\mu (2R_{\alpha\beta}{}^\sigma{}_\sigma \delta_\lambda^\mu dV^{\nu\rho\alpha\beta}) = 0 \quad (\text{B.022})$$

$$D_1 : \nabla_\mu (-2B_{\sigma}{}^\theta{}_\lambda B_\theta{}^\sigma{}_\alpha dV^{\mu\nu\rho\alpha}) = 0 \quad (\text{B.023})$$

$$D_2 : \nabla_\mu (2B_\alpha{}^\sigma{}_\beta B_\sigma{}^\mu{}_\lambda dV^{\nu\rho\alpha\beta}) = 2B_\lambda{}^\mu{}_\sigma \nabla_\mu B_\alpha{}^\sigma{}_\beta dV^{\nu\rho\alpha\beta} + 2B_\alpha{}^{[\nu}{}_\beta \nabla_\lambda B_\gamma{}^{\rho]}{}_\delta dV^{\alpha\beta\gamma\delta} \quad (\text{B.024})$$

$$D_3 : \nabla_\mu (-2B_\alpha{}^\nu{}_\lambda B_\beta{}^\mu{}_\gamma dV^{\rho\alpha\beta\gamma}) = 2B_\beta{}^\mu{}_\gamma \nabla_\mu B_\lambda{}^{[\rho}{}_\delta dV^{\nu]\beta\gamma\delta} + 2B_\gamma{}^\mu{}_\sigma \nabla_\lambda B_\mu{}^\sigma{}_\delta dV^{\nu\rho\gamma\delta} \quad (\text{B.025})$$

$$D_4 : 4B_\alpha{}^\sigma{}_\beta \nabla_{(\lambda} A_{\sigma)} dV^{\nu\rho\alpha\beta} = 0 \quad (\text{B.026})$$

$$D_5 : \nabla_\mu (2B_\alpha{}^\mu{}_\beta A_\lambda dV^{\nu\rho\alpha\beta}) = 2\nabla_\lambda B_\alpha{}^\sigma{}_\beta A_\sigma dV^{\nu\rho\alpha\beta} \quad (\text{B.027})$$

$$D_6 : 2A_\gamma \nabla_\lambda A_\delta dV^{\nu\rho\gamma\delta} = 0 \quad (\text{B.028})$$

$$D_7 : 2A_\lambda F_{\gamma\delta} dV^{\nu\rho\gamma\delta} = 0 \quad (\text{B.029})$$

$$E_1 : \nabla_\mu (4\delta_\lambda^\mu \nabla_\sigma B_\alpha{}^\sigma{}_\beta dV^{\nu\rho\alpha\beta}) = 0 \quad (\text{B.030})$$

$$E_2 : \nabla_\mu (2\delta_\lambda^\mu F_{\alpha\beta} dV^{\nu\rho\alpha\beta}) = 0 \quad (\text{B.031})$$

$$F_1 : 4B_\alpha{}^\mu{}_\beta B_\mu{}^\sigma{}_\tau B_\lambda{}^\tau{}_\sigma dV^{\nu\rho\alpha\beta} + 4B_\alpha{}^\mu{}_\beta B_\gamma{}^{[\nu}{}_\delta B_\mu{}^{\rho]}{}_\lambda dV^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{B.032})$$

$$F_2 : 2B_\alpha{}^\mu{}_\sigma B_\beta{}^\sigma{}_\tau B_\lambda{}^\tau{}_\mu dV^{\nu\rho\alpha\beta} + 2B_\alpha{}^\mu{}_\beta B_\mu{}^\sigma{}_\lambda B_\gamma{}^{[\rho}{}_\sigma dV^{\nu]\alpha\beta\gamma} - 2B_\alpha{}^\mu{}_\beta B_\gamma{}^\sigma{}_\lambda B_\mu{}^{[\rho}{}_\sigma dV^{\nu]\alpha\beta\gamma} + 2B_\alpha{}^{[\nu}{}_\beta B_\gamma{}^{\rho]}{}_\sigma B_\delta{}^\sigma{}_\lambda dV^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{B.033})$$

$$F_3 : 2B_\lambda{}^{[\nu}{}_\alpha B_\beta{}^{\rho]}{}_\gamma A_\delta dV^{\alpha\beta\gamma\delta} + 2B_\alpha{}^\sigma{}_\beta A_\gamma B_\lambda{}^{[\nu}{}_\sigma dV^{\rho]\alpha\beta\gamma} + 2B_\sigma{}^\mu{}_\lambda B_\mu{}^\sigma{}_\alpha A_\beta dV^{\nu\rho\alpha\beta} = 0 \quad (\text{B.034})$$

$$F_4 : 4B_\alpha{}^\mu{}_\beta A_\mu A_\lambda dV^{\nu\rho\alpha\beta} = 0 \quad (\text{B.035})$$

Ecuaciones de campos para A_μ

$$B_3 : R_{\sigma\tau}{}^\sigma{}_\alpha B_\beta{}^\tau{}_\gamma dV^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{B.036})$$

$$B_4 : R_{\alpha\beta}{}^\nu{}_\sigma B_\gamma{}^\sigma{}_\delta dV^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{B.037})$$

$$B_5 : R_{\alpha\beta}{}^\sigma{}_\sigma B_\gamma{}^\nu{}_\delta dV^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{B.038})$$

$$D_4 : \nabla_\mu [B_\alpha{}^\mu{}_\beta B_\gamma{}^\nu{}_\delta dV^{\alpha\beta\gamma\delta}] = 0 \quad (\text{B.039})$$

$$D_6 : \nabla_\mu [B_\alpha{}^\mu{}_\beta A_\gamma dV^{\alpha\beta\gamma\nu}] + B_\alpha{}^\mu{}_\beta \nabla_\mu A_\gamma dV^{\alpha\beta\gamma\nu} = 0 \quad (\text{B.040})$$

$$D_5 : B_\alpha^\sigma \nabla_\sigma B_\gamma^\nu \delta^\nu \delta^\delta dV^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{B.041})$$

$$D_7 : \nabla_\mu \left[B_\alpha^\sigma B_\beta A_\sigma dV^{\alpha\beta\mu\nu} \right] + B_\alpha^\nu F_{\gamma\delta} dV^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{B.042})$$

$$E_2 : \nabla_\mu \left[\nabla_\sigma B_\alpha^\sigma B_\beta dV^{\alpha\beta\mu\nu} \right] = 0 \quad (\text{B.043})$$

$$F_3 : B_\sigma^\tau B_\tau^\sigma B_\beta^\lambda B_\gamma^\nu dV^{\alpha\beta\gamma\nu} = 0 \quad (\text{B.044})$$

$$F_4 : 2B_\alpha^\sigma B_\beta^\nu B_\gamma^\delta A_\sigma dV^{\alpha\beta\gamma\delta} = 0 \quad (\text{B.045})$$

Bibliografía

- [1] I. Newton, *Philosophiae naturalis principia mathematica*, vol. 1. G. Brookman, 1833.
- [2] A. Einstein, “Grundgedanken der allgemeinen Relativitätstheorie und Anwendung dieser Theorie in Astronomie. (German) [Basic idea of the General Theory of Relativity and application of this theory in astronomy],” (1915) 315–315.
- [3] A. Einstein, “Zur allgemeinen Relativitätstheorie,” *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 778-786. (1915) .
- [4] A. Einstein, “Erklärung der Perihelbewegung des Merkur aus der allgemeinen Relativitätstheorie,” *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 831-839. (1915) .
- [5] A. Einstein, “Die feldgleichungen der gravitation,” *Sitzung der physikalische-mathematischen Klasse* **25** (1915) 844–847.
- [6] A. Einstein, “Die grundlage der allgemeinen relativitätstheorie,” *Annalen der Physik* **354** no.~7, (1916) 769–822.
- [7] A. Einstein, “The foundation of the general theory of relativity,” *Annalen Phys.* **14** (1916) 769–822.
- [8] F. W. Dyson, A. S. Eddington, and C. Davidson, “A Determination of the Deflection of Light by the Sun’s Gravitational Field, from Observations Made at the Total Eclipse of May 29, 1919,” *Philosophical Transactions of the Royal Society of London Series A* **220** (1920) 291–333.
- [9] D. Kennefick, “Testing relativity from the 1919 eclipse a question of bias,” *Physics Today* **62** no.~3, (2009) 37–42.
- [10] G. Van Biesbroeck, “The relativity shift at the 1952 february 25 eclipse of the sun.,” *The Astronomical Journal* **58** (1953) 87–88.
- [11] R. A. Brune Jr, C. Cobb, B. DeWitt, C. DeWitt-Morette, D. Evans, J. Floyd, B. Jones, R. V. Lazenby, M. Marin, R. Matzner, *et al.*, “Gravitational deflection of light: solar eclipse of 30 june 1973 i. description of procedures and final result.,” *The Astronomical Journal* **81** (1976) 452–454.
- [12] N. S. Hetherington, “Sirius b and the gravitational redshift-an historical review,” *Quarterly Journal of the Royal Astronomical Society* **21** (1980) 246–252.

- [13] J. Holberg, “Sirius b and the measurement of the gravitational redshift,” *Journal for the History of Astronomy* **41** no. 1, (2010) 41–64.
- [14] C. M. Will, “The Confrontation between General Relativity and Experiment,” *Living Rev. Rel.* **17** (2014) 4, [arXiv:1403.7377 \[gr-qc\]](#).
- [15] A. Einstein, “Naherungsweise Integration der Feldgleichungen der Gravitation,” *Sitzungsberichte der Koniglich Preuiischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite 688-696. (1916) .
- [16] R. A. Hulse and J. H. Taylor, “Discovery of a pulsar in a binary system,” *Astrophysical Journal* **195** (1975) L51–L53.
- [17] **Virgo, LIGO Scientific** Collaboration, B. P. Abbott *et al.*, “GW151226: Observation of Gravitational Waves from a 22-Solar-Mass Binary Black Hole Coalescence,” *Phys. Rev. Lett.* **116** no. 24, (2016) 241103, [arXiv:1606.04855 \[gr-qc\]](#).
- [18] R. L. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, “Dynamical Structure and Definition of Energy in General Relativity,” *Phys. Rev.* **116** (1959) 1322.
- [19] R. L. Arnowitt, S. Deser, and C. W. Misner, “Canonical variables for general relativity,” *Phys. Rev.* **117** (1960) 1595.
- [20] J. A. Wheeler, *Relativity, groups and topology*, ch. Geometrodynamics and the issue of the final state, p. 317. Gordon and Breach, 1964.
- [21] B. S. DeWitt, “Quantum Theory of Gravity. 1. The Canonical Theory,” *Phys. Rev.* **160** (1967) 1113.
- [22] B. S. DeWitt, “Quantum Theory of Gravity. 2. The Manifestly Covariant Theory,” *Phys. Rev.* **162** (1967) 1195.
- [23] B. S. DeWitt, “Quantum Theory of Gravity. 3. Applications of the Covariant Theory,” *Phys. Rev.* **162** (1967) 1239.
- [24] G. ’t Hooft, “An algorithm for the poles at dimension four in the dimensional regularization procedure,” *Nucl. Phys. B* **62** (1973) 444.
- [25] G. ’t Hooft and M. J. G. Veltman, “One loop divergencies in the theory of gravitation,” *Annales Poincare Phys. Theor. A* **20** (1974) 69.
- [26] S. Deser and P. van Nieuwenhuizen, “One Loop Divergences of Quantized Einstein-Maxwell Fields,” *Phys. Rev. D* **10** (1974) 401.
- [27] S. Deser and P. van Nieuwenhuizen, “Nonrenormalizability of the Quantized Dirac-Einstein System,” *Phys. Rev. D* **10** (1974) 411.
- [28] C. Brans and R. H. Dicke, “Mach’s principle and a relativistic theory of gravitation,” *Phys. Rev.* **124** (Nov, 1961) 925–935.
<https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRev.124.925>.

-
- [29] É. Cartan, “Sur une généralisation de la notion de courbure de riemann et les espaces à torsion,” *Comptes Rendus, Ac. Sc. Paris* **174** (1922) 593–595.
- [30] E. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée (première partie),” *Ann. Ec. Norm. Super.* **40** (1923) 325.
http://archive.numdam.org/article/ASENS_1923_3_40__325_0.pdf.
- [31] E. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine, et la théorie de la relativité généralisée (première partie) (suite),” *Ann. Ec. Norm. Super.* **41** (1924) 1.
http://www.numdam.org/numdam-bin/item?id=ASENS_1924_3_41__1_0.
- [32] E. Cartan, “Sur les variétés à connexion affine et la théorie de la relativité généralisée, (deuxième partie),” *Ann. Ec. Norm. Super.* **42** (1925) 17.
http://www.numdam.org/numdam-bin/item?id=ASENS_1925_3_42__17_0.
- [33] T. Kaluza, “Zum Unitätsproblem der Physik,” *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften (Berlin)*, Seite p. 966-972 (1921) 966–972.
- [34] O. Klein, “Quantum Theory and Five-Dimensional Theory of Relativity. (In German and English),” *Z. Phys.* **37** (1926) 895–906. [,76(1926)].
- [35] O. Klein, “The Atomicity of Electricity as a Quantum Theory Law,” *Nature* **118** (1926) 516.
- [36] D. Lovelock, “The Einstein Tensor and Its generalizations,” *J. Math. Phys.* **12** (1971) 498–501.
- [37] F. W. Hehl, J. D. McCrea, E. W. Mielke, and Y. Ne’eman, “Metric affine gauge theory of gravity: Field equations, Noether identities, world spinors, and breaking of dilation invariance,” *Phys. Rept.* **258** (1995) 1–171, [arXiv:gr-qc/9402012](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9402012) [gr-qc].
- [38] A. Mardones and J. Zanelli, “Lovelock-cartan theory of gravity,” *Class. Quantum Grav.* **8** no. ~8, (Aug, 1991) 1545–1558.
- [39] A. S. Eddington, *The mathematical theory of relativity*. 1923.
- [40] E. Schrodinger, *Space-time structure*. Cambridge University Press, 1985.
- [41] M. S. Fox, “Palatini $f(\mathcal{R}, \mathcal{L}_m, \mathcal{R}_{\mu\nu}T^{\mu\nu})$ gravity and its Born-Infeld semblance,” [arXiv:1810.11595](https://arxiv.org/abs/1810.11595) [gr-qc].
- [42] K. Shimada, K. Aoki, and K.-i. Maeda, “Metric-affine Gravity and Inflation,” [arXiv:1812.03420](https://arxiv.org/abs/1812.03420) [gr-qc].
- [43] J. Wu, G. Li, T. Harko, and S.-D. Liang, “Palatini formulation of $f(R, T)$ gravity theory, and its cosmological implications,” *Eur. Phys. J.* **C78** no. ~5, (2018) 430,
[arXiv:1805.07419](https://arxiv.org/abs/1805.07419) [gr-qc].
- [44] A. V. Minkevich and A. S. Garkun, “Isotropic cosmology in metric - affine gauge theory of gravity,” [arXiv:gr-qc/9805007](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9805007) [gr-qc].
-

- [45] R. Mignani and R. Scipioni, “On the solutions of the Cartan equation in metric affine gravity,” *Gen. Rel. Grav.* **33** (2001) 683–711, [arXiv:gr-qc/0009096 \[gr-qc\]](#).
- [46] A. Skirzewski and O. Castillo-Felisola, “A polynomial model of purely affine gravity,” *Rev. Mex. Fis.* **61** (2015) 6, [arXiv:1410.6183 \[gr-qc\]](#).
- [47] O. Castillo-Felisola and A. Skirzewski, “Einstein’s gravity from a polynomial affine model,” *Class. Quant. Grav.* **35** no.~5, (2018) 055012, [arXiv:1505.04634 \[gr-qc\]](#).
- [48] O. Castillo-Felisola, J. Perdiguero, and O. Orellana, “Cosmological solutions to polynomial affine gravity in the torsion-free sector,” [arXiv:1808.05970 \[gr-qc\]](#).
- [49] J. Kijowski, “On a new variational principle in general relativity and the energy of the gravitational field,” **9** no.~10, (1978) 857.
- [50] M. Nakahara, *Geometry, topology and physics*. CRC Press, 2003.
- [51] S. M. Carroll, “Lecture notes on general relativity,” [arXiv:gr-qc/9712019 \[gr-qc\]](#).
- [52] M. Blau, *Lecture Notes on General Relativity*. 10/10/2018.
- [53] S. Weinberg, *Gravitation and Cosmology*. John Wiley and Sons, New York, 1972. <http://www-spires.fnal.gov/spires/find/books/www?cl=QC6.W431>.
- [54] C. Misner, K. Thorne, and J. Wheeler, *Gravitation*. No. parte 3 in Gravitation. W. H. Freeman, 1973. <https://books.google.cl/books?id=w4Gigq3tY1kC>.
- [55] G. Øyvind and S. Hervik, *Einstein’s General Theory of Relativity*. 2004.
- [56] K. Nomizu and T. Sasaki, *Affine Differential Geometry*. Cambridge University Press, 2008.
- [57] **Planck** Collaboration, P. A. R. Ade *et al.*, “Planck 2015 results. XIII. Cosmological parameters,” *Astron. Astrophys.* **594** (2016) A13, [arXiv:1502.01589 \[astro-ph.CO\]](#).
- [58] T. Curtright, “Generalized gauge fields,” *Physics Letters B*.
- [59] R. B. (<https://mathoverflow.net/users/13972/robert-bryant>), “Symmetries of non-riemannian curvature tensor.” Mathoverflow. <https://mathoverflow.net/q/212794>. URL:<https://mathoverflow.net/q/212794> (version: 2015-08-01).
- [60] A. L. Besse, *Einstein manifolds*. Springer, 2007.
- [61] P. W. Higgs, “Quadratic lagrangians and general relativity,” *Il Nuovo Cimento (1955-1965)* **11** no.~6, (Mar, 1959) 816–820. <https://doi.org/10.1007/BF02732547>.
- [62] C. W. Kilmister and D. J. Newman, “The use of algebraic structures in physics,” *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society* **57** no.~4, (1961) 851–864.

-
- [63] C. N. Yang, “Integral formalism for gauge fields,” *Phys. Rev. Lett.* **33** (Aug, 1974) 445–447. <https://link.aps.org/doi/10.1103/PhysRevLett.33.445>.
- [64] The Sage Developers, *SageMath, the Sage Mathematics Software System (Version 8.4)*, 2018. <https://www.sagemath.org>.
- [65] E. Gourgoulhon and M. Mancini, “Symbolic tensor calculus on manifolds: a SageMath implementation,” 2018. [arXiv:1804.07346](https://arxiv.org/abs/1804.07346) [gr-qc].
- [66] E. Gourgoulhon, M. Bejger, and M. Mancini, “Tensor calculus with open-source software: the SageManifolds project,” *J. Phys. Conf. Ser.* **600** no. 1, (2015) 012002, [arXiv:1412.4765](https://arxiv.org/abs/1412.4765) [gr-qc].
- [67] J. Plebanski and A. Krasinski, *An Introduction to General Relativity and Cosmology*. Cambridge University Press, March 2010.
- [68] W. Segura, *La Conexi3n Af3n. Aplicaci3n a la Teor3a Cl3sica de Campo*. 04, 2015.
- [69] D. Garfinkle, L. R. Mead, and H. I. Ringermacher, “The shape of the orbit in FLRW spacetimes,” [arXiv:1808.06683](https://arxiv.org/abs/1808.06683) [gr-qc].
- [70] W. Cunningham, D. Rideout, J. Halverson, and D. Krioukov, “Exact Geodesic Distances in FLRW Spacetimes,” *Phys. Rev.* **D96** no. 10, (2017) 103538, [arXiv:1705.00730](https://arxiv.org/abs/1705.00730) [gr-qc].
- [71] O. Bikwa, F. Melia, and A. Shevchuk, “Photon Geodesics in FRW Cosmologies,” *Mon. Not. Roy. Astron. Soc.* **421** (2012) 3356–3361, [arXiv:1112.4774](https://arxiv.org/abs/1112.4774) [astro-ph.CO].
- [72] T. Birkandan, C. Guzelgun, E. Sirin, and M. C. Uslu, “Symbolic and numerical analysis in general relativity with open source computer algebra systems,” *Gen. Rel. Grav.* **51** no. 1, (2019) 4, [arXiv:1703.09738](https://arxiv.org/abs/1703.09738) [gr-qc].
- [73] Misner, Charles W and Thorne, Kip S and Wheeler, John Archibald and Kaiser, David I, *Gravitation*. Princeton University Press, 2017.
- [74] B. Schutz, *A first course in general relativity*. Cambridge university press, 2009.
- [75] R. M. Wald, *General relativity*. Chicago Univ. Press, Chicago, IL, 1984. <https://cds.cern.ch/record/106274>.
- [76] B. Ryden, *Introduction to cosmology*. Cambridge University Press, 2016.
- [77] S. M. Carroll, *Spacetime and geometry: An introduction to general relativity*. 2004. <http://www.slac.stanford.edu/spires/find/books/www?cl=QC6:C37:2004>.
- [78] R. Sunyaev and Y. B. Zeldovich, “Ra sunyaev and ya. b. zel3dovich, mon. not. r. astron. soc. 190, 413 (1980).,” *Mon. Not. R. Astron. Soc.* **190** (1980) 413.
- [79] S. Dodelson, *Modern cosmology*. 2003.

- [80] O. F. Piattella, *Lecture Notes in Cosmology*. UNITEXT for Physics. Springer, Cham, 2018. [arXiv:1803.00070 \[astro-ph.CO\]](#).
- [81] A. L. Besse, *Einstein manifolds*. Springer Science & Business Media, 2007.