

2021-08

IMPLEMENTACIÓN Y ESTUDIO DE FACTIBILIDAD TÉCNICA DE UN DETECTOR KRAMERS-KRONIG PARA SENSORES DISTRIBUIDOS RAYLEIGH EN FIBRA ÓPTICA

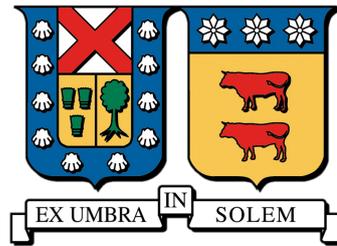
BAHAMONDES PASTÉN, LUIS IGNACIO

<https://hdl.handle.net/11673/52739>

Repositorio Digital USM, UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

VALPARAÍSO - CHILE



“IMPLEMENTACIÓN Y ESTUDIO DE
FACTIBILIDAD TÉCNICA DE UN DETECTOR
KRAMERS-KRONIG PARA SENSORES
DISTRIBUIDOS RAYLEIGH EN FIBRA ÓPTICA”

LUIS IGNACIO BAHAMONDES PASTÉN

MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL
ELECTRÓNICO MENCIÓN COMPUTADORES

PROFESOR GUÍA: Prof. Dr. MARCELO SOTO

PROFESOR CORREFERENTE: Prof. Dr. RICARDO OLIVARES

Agosto - 2021



Agradecimientos

Primeramente, quisiera agradecer a mi madre Luz María, pilar fundamental en mis momentos de duda e incertidumbre, a mi padre Luis, quien siempre me ha impulsado a buscar más allá de mis horizontes y a mi hermano Sebastián por sus consejos, carisma y apoyo.

Agradecer a mi compañera, Alicia, quien con su cariño me ha apoyado en los momentos difíciles y siempre me ha motivado a dar lo mejor de mí.

También quisiera agradecer a mi profesor guía Dr. Marcelo Soto, por la oportunidad que me ha brindado para desarrollar este trabajo, agradecer su paciencia y dedicación, fundamental durante todo este proceso.

Asimismo, quisiera agradecer a mis grandes amigos, Damián, Matías, Francisco, Mery, Nicolás, Emilio, Pablo, Sofía, Ailine, María Jesús, por cada momento que me han tendido una mano, por cada alegría que me han brindado y por todo el apoyo incondicional.

Finalmente, agradecer a proyectos fundamentales que han permitido la realización de este trabajo:

- Centro Avanzado en Ingeniería Eléctrica y Electrónica, AC3E, Proyecto Basal FB0008, ANID
- Proyecto FONDEQUIP EQM180226, CONICYT
- Proyecto FONDECYT Regular 1200299, ANID

A todos ustedes, les estoy agradecido eternamente,

Luis I. Bahamondes Pastén



IMPLEMENTACIÓN Y ESTUDIO DE FACTIBILIDAD TÉCNICA DE UN DETECTOR KRAMERS-KRONIG PARA SENSORES DISTRIBUIDOS RAYLEIGH EN FIBRA ÓPTICA

Luis Ignacio Bahamondes Pastén

Memoria para Optar al Título de Ingeniero Civil Electrónico, Mención Computadores

Universidad Técnica Federico Santa María

Profesor Guía: Prof. Dr. Marcelo Soto

Agosto 2021

Resumen

En los últimos años, el uso de fibra óptica como un medio de comunicación ha tomado gran relevancia al permitir conexiones de alta velocidad a lo largo del mundo. Sin embargo, el desarrollo de técnicas que se benefician de las características intrínsecas de la fibra óptica, han facilitado el desarrollo de tecnologías enfocadas en el uso de ella como sensor distribuido.

En el presente trabajo se busca validar la aplicación de un detector Kramers-Kronig explorando nuevas condiciones de funcionamiento, esto se realiza a través de datos obtenidos a partir de un sensor distribuido Rayleigh simulado. Cada simulación es realizada a lo largo de una fibra óptica estándar de 1000 m, utilizando demodulación I/Q en el proceso de detección, prescindiendo de atenuaciones y ruido.

Los resultados de estas simulaciones dan cuenta de lo importante y relevante que es la frecuencia de muestreo de las señales recibidas y su relación con la frecuencia intermedia. La amplitud del oscilador local también influye en la calidad de recuperación de las señales. Además permite discernir entre los dos métodos de aplicación del detector Kramers-Kronig, un esquema Real-Imaginario o un esquema Intensidad-Fase.

Finalmente, el uso de datos no simulados o reales, permiten evidenciar la capacidad del detector Kramers-Kronig en la recuperación de una perturbación a partir de la componente In-Phase detectada desde la fibra óptica.

Palabras Claves: Kramers-Kronig, Fibra Óptica.



IMPLEMENTATION AND TECHNICAL FEASIBILITY STUDY OF A KRAMERS-KRONIG DETECTOR FOR DISTRIBUTED RAYLEIGH SENSORS IN FIBER OPTICS

Luis Ignacio Bahamondes Pastén

Final Project Report towards the fulfillment of the Civil Electronic Engineer,
Minor in Computers degree

Universidad Técnica Federico Santa María

Advisor: PhD. Marcelo Soto

August 2021

Abstract

In recent years, the use of optical fiber as a means of communication has taken on great relevance by enabling high-speed connections across the world. However, the development of techniques that take advantage of the intrinsic characteristics of optical fiber has facilitated the development of technologies focused on its use as a distributed sensor.

In the present project we seek to validate the application of a Kramers-Kronig detector by exploring new working conditions, this is done through data obtained from a simulated Rayleigh distributed sensor. Each simulation is carried out along a standard 1000 m optical fiber, using I/Q demodulation in the detection process, neglecting attenuations and noise.

The results of these simulations show how important and relevant is the sampling frequency of the received signals and its relation with the intermediate frequency. The amplitude of the local oscillator also influences the recovery quality of the signals. It also allows to discern between the two methods of application of the Kramers-Kronig detector, a Real-Imaginary scheme or an Intensity-Phase scheme.

Finally, the use of non-simulated or real data allows to demonstrate the capability of the Kramers-Kronig detector in the retrieval of a disturbance from the In-Phase component detected from the optical fiber.

Keywords: Kramers-Kronig, Fiber Optics.



Glosario

- Φ -OTDR** Phase-sensitive OTDR. 6
- ADC** Analog to Digital Converter. 4
- AOM)** Acoustioptic Modulator. 14
- AWG** Arbitrary Waveform Generator. 15
- BOTDA** Brillouin Optical Time Domain Analysis. 11
- CSPR** Carrier-to-Signal Power Ratio. 30
- DAS** Distributed Acoustic Sensing. 13
- DFB** DistributedFeedBack Laser. 68
- DVS** Distributed Vibration Sensing. 13
- EDFA** Erbium-Doped Fiber Amplifier. 15, 68
- FFT** Fast Fourier Transform. 13
- FUT** Fiber Under Test. 15
- IF** Intermediate Frequency. 46
- KK** Kramers-Kronig. 5
- MI** Michelson Interferometer. 17



- MP** Minimum Phase. 27
- MZI** Mach–Zehnder Interferometer. 17
- NLL** Narrow Linewidth Laser. 14
- OFDR** Optical Frequency Domain Reflectometry. 12
- OLO** Optical Local Oscillator. 17
- OPLL** Optical Phase Lock Loop. 18
- OTDR** Optical Time Domain Reflectometry. 6
- p.v.** Cauchy’s principal value. 29
- PC** Personal Computer. 68
- QAM** Quadrature Amplitude Modulation. 5
- RBS** Rayleigh Backscattering. 15
- RMS** Root Mean Square. 34
- RMSE** Root Mean Square Error. 33
- SOA** Semiconductor Optical Amplifier. 68
- SSB** Single Side Band. 29
- TBPF** Tunable Bandpass Filter. 68
- VAO** Variable Optical Attenuator. 68



Índice general

1. Introducción y Objetivos	1
1.1. Introducción	1
1.2. Objetivo General	2
1.3. Objetivos Específicos	2
1.4. Estructura	3
2. Estado del arte de los sensores distribuidos en fibra óptica	4
2.1. Reflectometría Óptica en el Dominio del Tiempo	6
2.1.1. OTDR sensible a la fase óptica	6
2.2. Sensores distribuidos de fibra óptica	8
2.2.1. Sensores distribuidos de vibración	13
2.2.2. Sensores acústicos distribuidos	13
2.3. Esquemas de Detección	16
2.3.1. Detector Homodino	17
2.3.2. Detector Heterodino	19
2.3.3. Demodulación I/Q	20
2.3.4. Detector Kramers-Kronig	27
3. Implementación, Análisis y Resultados	32
3.1. Metodología	32
3.1.1. Error de estimación	33
3.2. Implementación de un detector Kramers-Kronig	41
3.2.1. Corrección de ecuaciones utilizadas en referencia	43



3.2.2.	Kramers Kronig Real-Imaginario	44
3.2.3.	Kramers Kronig Intensidad-Fase	54
3.2.4.	Comparación Final	64
4.	Aplicación de un detector Kramers- Kronig a datos reales	67
4.1.	Esquema	68
4.2.	Recuperación de Fase	69
4.3.	Upsampling	72
5.	Conclusiones	76
A.	Señales Demodulador I/Q	82
A.1.	Componente I_2	82
A.2.	Componente Q_1	83
A.3.	Componente Q_2	85



Índice de figuras

2.1. Sensor de fibra óptica	5
2.2. Esquema de un sistema OTDR y un cable de fibra óptica bajo prueba	7
2.3. Principio general de un sensor distribuido de fibra óptica	8
2.4. Diagrama de Brillouin, Raman y Rayleigh Scattering	10
2.5. Esquema de sensado Raman OTDR	11
2.6. Esquema de sensado Raman OTDR	12
2.7. Esquema de sensado Rayleigh OFDR	13
2.8. Esquema de sensado para técnica Φ -OTDR	14
2.9. Teoría Φ -OTDR	16
2.10. Comportamiento del ancho de banda para detección homodina y heterodina	18
2.11. Detector Homodino	19
2.12. Detector Heterodino	19
2.13. Detección Directa	20
2.14. Detección Directa con oscilador local	21
2.15. Combinador óptico 2x2	21
2.16. Detector Balanceado	23
2.17. Detector I/Q	24
2.18. Ejemplo de curva que no cumple condición de mínima fase	28
2.19. Ejemplo de curva que si cumple condición de mínima fase	28
3.1. Metodología de Implementación del Detector Kramers-Kronig	32
3.2. Fase obtenida a través del demodulador I/Q no desenrollada $f_s = 20 \text{ GSps}$, $f_{IF} = 5 \text{ GHz}$	35



3.3.	Fases desenrolladas obtenidas a través del demodulador I/Q (curva azul) y de las relaciones KK (curva naranja) $f_s = 20 \text{ GSps}$, $f_{IF} = 5 \text{ GHz}$	36
3.4.	Diferencia entre fases las desenrolladas obtenidas a través del demodulador I/Q y de las relaciones KK $f_s = 20 \text{ GSps}$, $f_{IF} = 5 \text{ GHz}$	37
3.5.	Acercamiento a diferencia entre las fases desenrolladas obtenidas a través del demodulador I/Q y de las relaciones KK $f_s = 20 \text{ GSps}$, $f_{IF} = 5 \text{ GHz}$	37
3.6.	Fases diferenciales obtenidas a través del demodulador I/Q (curva azul) y de las relaciones KK (curva naranja) $f_s = 20 \text{ GSps}$, $f_{IF} = 5 \text{ GHz}$	38
3.7.	Acercamiento a fases diferenciales obtenidas a través del demodulador I/Q (curva azul) y de las relaciones KK (curva naranja) $f_s = 20 \text{ GSps}$, $f_{IF} = 5 \text{ GHz}$	39
3.8.	Diferencia Fases Diferenciales entre las fases obtenidas a través del demodulador I/Q y de las relaciones KK $f_s = 20 \text{ GSps}$, $f_{IF} = 5 \text{ GHz}$	40
3.9.	Diferencia de Fases Diferenciales al eliminar saltos de 2π . Fases obtenidas a través del demodulador I/Q y de las relaciones KK $f_s = 20 \text{ GSps}$, $f_{IF} = 5 \text{ GHz}$	40
3.10.	Componentes en cuadratura (Q) obtenidas a 5 GSps, usando una frecuencia intermedia igual a (a) 50 MHz y (b) 1,25 GHz	47
3.11.	Componentes en cuadratura (Q) obtenidas a 10 GSps, usando una frecuencia intermedia igual a (a) 100 MHz y (b) 2,5 GHz	48
3.12.	Componentes en cuadratura (Q) obtenidas a 20 GSps, usando una frecuencia intermedia igual a (a) 200 MHz y (b) 5 GHz	48
3.13.	$RMSE_{rel_Q}$ v/s Frecuencia Intermedia para método RI-KK	50
3.14.	$RMSE_{rel_\Phi}$ v/s Frecuencia Intermedia para método RI-KK	50
3.15.	$RMSE_{rel_Q}$ v/s Frecuencia de Muestreo para método RI-KK	52
3.16.	$RMSE_{rel_\Phi}$ v/s Frecuencia de Muestreo para método RI-KK	53
3.17.	$RMSE_{rel_\Phi}$ v/s Amplitud del Oscilador local normalizada para método RI-KK	54
3.18.	Curvas $RMSE_{rel_\Phi}$ v/s Frecuencia de Intermedia para método IΦ-KK	61
3.19.	Curvas $RMSE_{rel_\Phi}$ v/s Frecuencia de Muestreo para método IΦ-KK	62
3.20.	Curvas $RMSE_{rel_\Phi}$ v/s amplitud normalizada del oscilador local para método IΦ-KK.	63



3.21. Curvas de error RMS relativo de fase como función de la frecuencia intermedia. Métodos RI-KK y $I\Phi$ -KK	64
3.22. Curvas de error RMS relativo de fase como función de la frecuencia de muestreo. Métodos RI-KK y $I\Phi$ -KK	65
3.23. Curvas de error RMS relativo de fase como función de la amplitud normalizada del oscilador local. Métodos RI-KK y $I\Phi$ -KK	66
4.1. Configuración experimental para un sistema Φ -OTDR basado en detección cohe- rente	68
4.2. Fase enrollada de la primera traza resultante del detector KK a partir de datos experimentales	69
4.3. Fase desenvuelta de la primera traza	70
4.4. Fase diferencial de la primera traza	71
4.5. Vista Superior 3D de fase perturbada a partir de datos experimentales	71
4.6. Curva de perturbación en la posición 958 m	72
4.7. Curva de ejemplo a interpolar	73
4.8. Curva de ejemplo interpolada	73
4.9. Vista lateral 3D de la sección perturbada con datos interpolados	74
4.10. Curva sobremuestreada de perturbación en la posición 958 m	75
4.11. Curva sobremuestreada de perturbación en la posición 958 m	75



Capítulo 1

Introducción y Objetivos

1.1. Introducción

El uso de rayos de luz para transmitir información posee siglos de antigüedad, desde la época griega con el uso de espejos que reflejaban la luz solar, hasta la actualidad, mediante el uso de núcleos de cristal que permiten direccionar los rayos de luz a través de miles de kilómetros conectando continentes y personas. En la actualidad, el medio de transmisión donde los rayos de luz se propagan en un espacio confinado se conoce como *fibra óptica*.

En el área de las comunicaciones, para el año de 1965, el desarrollo de fibra óptica no permitía realizar comunicaciones a través de ella, ya que las mejores fibras ópticas poseían una atenuación de 1000 decibeles por kilómetro (dB/km). Es en éste año cuando los investigadores Charles K. Kao y George Hockham de los laboratorios *Standard Telecommunications* promovieron la idea de que la atenuación de las fibras ópticas podía ser reducida a 20 dB/km lo que permite a las fibras ser un medio práctico de comunicación. [1].

Así, en la década de 1970, el perfeccionamiento en la producción de fibras ópticas logró reducir los coeficientes de atenuación hasta un valor de 4 dB/km, abriendo paso al uso de ella como medio de comunicación y su posterior masificación.

Por otro lado, el uso de la fibra óptica no ha quedado relegado únicamente a la transmisión de información. En 1982, la fibra óptica fue utilizada por primera vez como sensor distribuido de temperatura. La posibilidad de utilizar las imperfecciones del núcleo permitió detectar cambios de temperatura externos que afectaran distintos puntos a lo largo de la fibra óptica [2–4].

Desde aquel momento, el concepto de fibra óptica como sensor distribuido ha demostrado ser relevante en distintas aplicaciones con el interés de detectar y medir cambios externos que



inciden sobre la fibra. De este modo es posible obtener un perfil distribuido de una variable de interés, como es la elongación (*strain*), temperatura y vibración a través de decenas de kilómetros de fibra óptica con una resolución espacial de pocos metros. El uso de estos sensores distribuidos van desde el monitoreo de salud de infraestructuras [5], detección de fallas en polines de correas transportadoras [6], hasta la medición de temperatura para la industria del acero [7], entre algunas de las muchas aplicaciones.

La creciente diversidad de aplicaciones ha originado un área de investigación enfocada en presentar nuevas propuestas que permitan mejorar la calidad de estos sensores, reduciendo costos de implementación, mejorando la fidelidad de la mediciones, ampliando el rango de medición y mejorando su resolución.

Una de las propuestas existentes es mejorar el proceso de detección de las señales provenientes de un sensor distribuido, así, diversas investigaciones han buscado implementar y evaluar distintos esquemas de detección [8–10] y, junto con ello, la posibilidad de usar técnicas de post-procesamiento que reduzcan los costos de implementación. En los trabajos propuestos por Mecozzi *et al.* [11] y Jian *et. al.* [12] se desarrollan esquemas de detección que implementan post-procesamiento a través de las relaciones Kramers-Kronig. Es entonces que en este trabajo se busca profundizar en las posibles restricciones de funcionamiento de este tipo de detectores, conocido como detector Kramers-Kronig (KK). Por lo tanto se desea perseguir el siguiente objetivo general.

1.2. Objetivo General

Evaluar, reconocer y profundizar en las condiciones de factibilidad para el correcto funcionamiento de un detector Kramers-Kronig en un sensor distribuido Rayleigh en fibra óptica.

1.3. Objetivos Específicos

Este trabajo tiene los siguientes objetivos específicos:

- Simular un detector Kramers-Kronig, junto con el proceso de retrodispersión Rayleigh en una fibra óptica.



- Evaluar las condiciones de funcionamiento de un detector Kramers-Kronig.
- Definir condiciones de factibilidad observadas en el análisis de un detector Kramers-Kronig.

1.4. Estructura

Este documento se estructura de la siguiente forma: En el Capítulo 2 se hace una investigación del estado actual de sensores ópticos distribuidos, los tipos de sensores que existen, el comportamiento físico que permite tales sensores, los esquemas que permiten obtener las señales que provienen desde la fibra óptica y las condiciones conocidas de un detector Kramers-Kronig para los métodos Real-Imaginario e Intensidad-Fase.

Luego, en el Capítulo 3, se presenta la metodología utilizada para realizar simulaciones y considerar una medida de estimación de error. Junto con esto se desarrollan las ecuaciones que permiten implementar los métodos antes nombrados. Posteriormente se entregan y analizan los resultados obtenidos en el proceso de simulación de un sensor óptico distribuido.

A continuación, en el Capítulo 4 se analiza e implementa un detector Kramers-Kronig utilizando datos reales de un sensor distribuido Rayleigh basado en Φ -OTDR y demodulación I/Q, además, se realiza un proceso de sobre muestreo de los datos originales, con la intención de analizar el impacto sobre el detector.

Finalmente en el Capítulo 5, se entregan las conclusiones del trabajo desarrollado y las futuras mejoras que se pueden llegar a implementar en la investigación presentada.



Capítulo 2

Estado del arte de los sensores distribuidos en fibra óptica

Un sensor es un aparato que permite captar y traducir magnitudes físicas del entorno, tales como, temperatura, deformaciones o *strain*, vibraciones y flujo, a señales que se pueden leer de manera electrónica.

Por otro lado, un sensor de fibra óptica es un dispositivo que utiliza luz proveniente (ya sea en forma pulsada o continua) de una fuente óptica (láser, LED, etc), la cual es transportada a través de una fibra óptica y modulada por alguna variable ambiental externa. La señal modulada luego viaja a través de la fibra hacia un receptor óptico donde es demodulada y convertida en una señal eléctrica.

La figura 2.1 muestra un caso particular en donde el punto de medición se encuentra remotamente ubicado al final de una fibra, y la señal modulada se propaga en sentido inverso a través de la misma fibra. El conjunto de componentes que se requieren para enviar luz a través de la fibra, recibir la señal retornada desde el sensor, convertir la señal eléctrica a digital¹ y procesar los datos de la señal digital, se conoce como interrogador.

Los sensores distribuidos son una familia particular de sensores de fibra óptica, que no están limitados a un único punto de medición, es decir, permiten la medición de variables externas a lo largo de kilómetros de fibra óptica. En las secciones a continuación se presentan más detalles sobre estos sensores y sus características.

¹ Conversor Análogo Digital o *Analog to Digital Converter (ADC)*

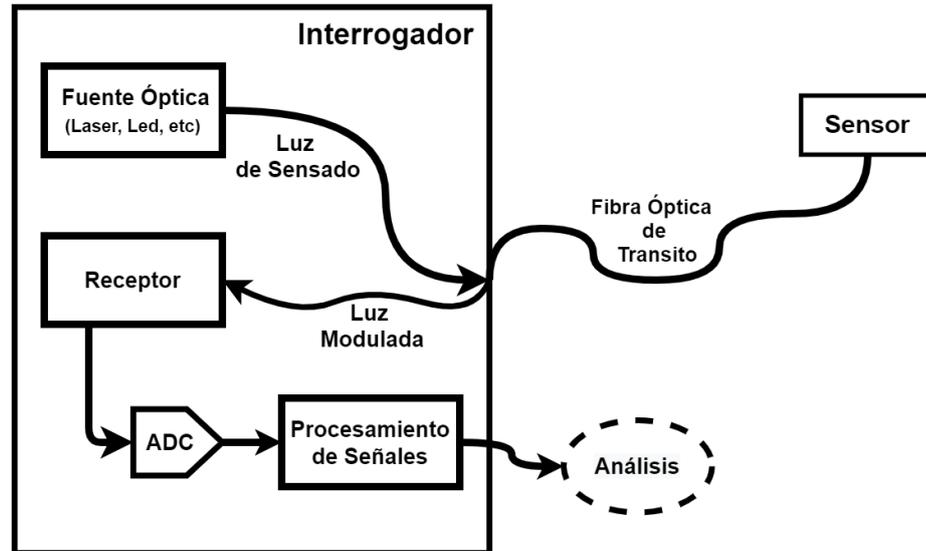


Figura 2.1: Sensor de fibra óptica

Por otro lado, la elección de un receptor para la luz que retorna desde la fibra óptica, depende de las necesidades y limitaciones presentes. Pueden considerarse criterios tales como, simplicidad, costo, fiabilidad y precisión. La existencia de una diversidad de receptores ópticos nace de la búsqueda de alternativas y nuevas implementaciones que ayudan a mejorar los resultados y/o disminuir los costos existentes.

En la sección 2.3 se describen en profundidad los esquemas de detección y sus características en conjunto con el uso del post-procesamiento de señales a través de las relaciones Kramers-Kronig (KK).

Actualmente las referencias principales de la teoría detrás de las relaciones KK en la detección de señales son las investigaciones presentadas por A. Mecozzi *et. al.* en [11, 13]. Estos trabajos están enfocados en la implementación de un detector Kramers-Kronig para el área de comunicación por fibra óptica. En este contexto la información que se desea enviar es transportada a través de señales que están bajo técnicas de modulación, como es la modulación de amplitud en cuadratura o *Quadrature Amplitude Modulation (QAM)*.

En las investigaciones [11, 13] se plantean ciertas condiciones que se deben considerar para la implementación del detector KK, éstas condiciones son explicadas en profundidad en la sección 2.3.4 de esta Memoria de Titulación y forman parte del eje principal de este trabajo.



2.1. Reflectometría Óptica en el Dominio del Tiempo

El origen de los sensores ópticos distribuidos proviene de lo que se conoce como reflectometría en el dominio del tiempo o *Optical Time Domain Reflectometry (OTDR)*, desarrollo tecnológico que nace del interés de detectar atenuaciones, variaciones en el índice de refracción e imperfecciones existentes en la fibra óptica.

El funcionamiento de este dispositivo consiste en enviar una serie de pulsos de sondeo a través del cable de fibra óptica, detectando al inicio de la fibra la señal óptica retornada en la fibra por algún proceso de retrodispersión como es Rayleigh *scattering*. Esta señal óptica es recibida por un foto-detector y traducida a una señal eléctrica.

La figura 2.2 presenta un esquema OTDR junto a un cable de fibra óptica bajo testeo, en ella se aprecia la fuente de pulsos, el fotodetector y el equipo ADC. El eje horizontal de la figura tiene dos interpretaciones distintas: el tiempo desde que se lanza la serie de pulsos hasta el momento que la señal Rayleigh llega al detector (t) o la distancia relativa respecto del inicio de la fibra (z). Estas magnitudes son intercambiables entre sí, a través de su relación con la velocidad de grupo (v_g) de la luz en la fibra, la ecuación 2.1 muestra esta relación:

$$z = \frac{v_g}{2} t = \frac{c}{2n_g} t \quad (2.1)$$

Donde c es la velocidad de la luz y n_g es el índice de refracción grupal.

Los *peaks* que se aprecian en la figura 2.2 provienen de reflexiones originadas por empalmes, conectores, el fin de la línea o por puntos de alta reflexión (*e.g.* fracturas en la fibra). También se aprecian puntos de pérdida/atenuación que se representan como un escalón de bajada. Las flechas curvas que apuntan al inicio de la fibra representan, en su forma tenue, todo el proceso de retrodispersión continua de la luz que retorna, mientras que las flechas más gruesas representan reflexiones puntuales.

2.1.1. OTDR sensible a la fase óptica

OTDR sensible a la fase, o en inglés *Phase-sensitive OTDR (Φ -OTDR)* es una técnica que fue inicialmente propuesta en 1993 por Taylor *et. al.* para monitorizar eventos de intrusión mediante

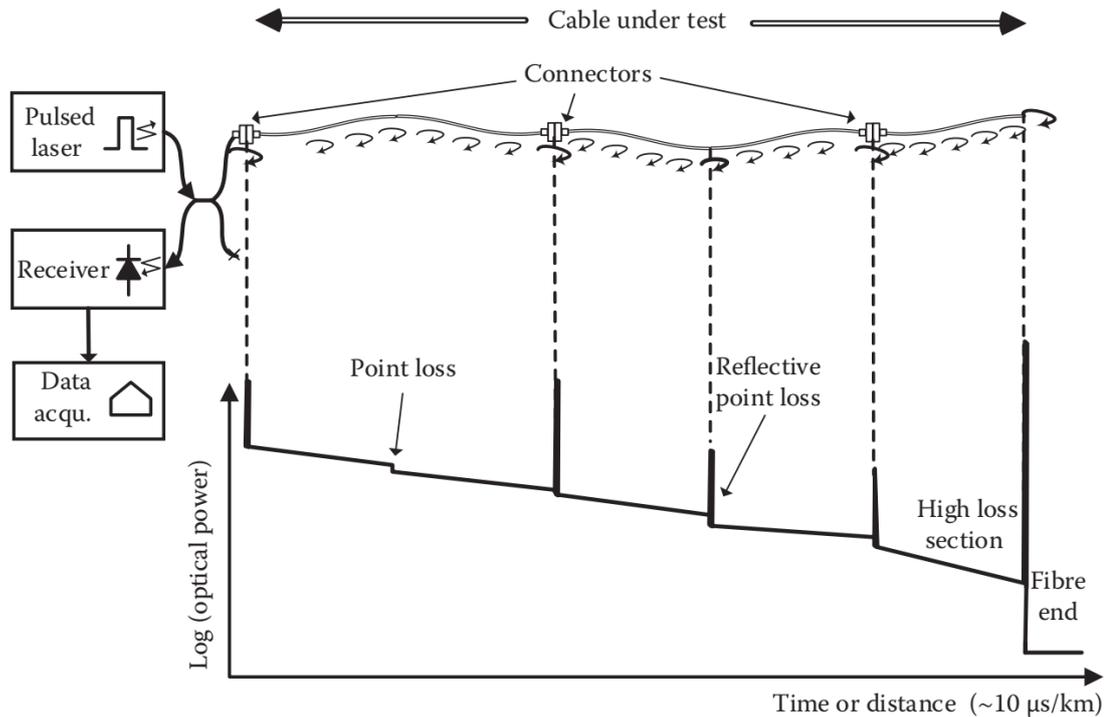


Figura 2.2: Esquema de un sistema OTDR y un cable de fibra óptica bajo prueba [14]

la detección de cambios de intensidad en la luz interferométrica [15].

Φ -OTDR utiliza la misma configuración que OTDR convencional con la excepción que la fuente de luz es un láser altamente coherente con un ancho espectral estrecho. Un OTDR convencional utiliza una fuente de luz de banda ancha lo que implica restringir la medición únicamente a variaciones de intensidad a lo largo de la fibra. Por el contrario, Φ -OTDR utiliza un láser altamente coherente, por lo que la modulación es compleja (magnitud y fase) debido a la interacción coherente de numerosos puntos de dispersión dentro de la duración del pulso.

Cuando se aplica una vibración externa, como una señal de intrusión, en una parte determinada de la fibra de detección, el índice de refracción cambiará en esa posición, lo que dará lugar a un cambio de fase localizado en la onda de luz. Por lo tanto, la intensidad de la luz se modificará en el momento equivalente a la posición afectada en la fibra. Así, la vibración puede detectarse restando las trazas coherentes antes y después del evento de vibración [16]. Desafortunadamente este esquema de medición no es completamente fiable ya que la intensidad óptica tiene una respuesta altamente no-lineal con la perturbación (cambio de índice de refracción), y por lo tanto se prefiere realizar una medición de la fase óptica, la cual cambia linealmente con la perturbación.

2.2. Sensores distribuidos de fibra óptica

El concepto de sensor distribuido en fibra óptica funciona bajo el principio de *backscattering* que se define como la luz que retorna a partir de luz dispersada o *scattered*. Los puntos de *scattering* son provocados por las irregularidades naturales en el índice de refracción de la fibra, esto implica que el medio por donde viaja la luz no es perfectamente homogéneo.

En la figura 2.3 se observa un sistema de sensado distribuido, donde se utiliza un equipo interrogador, el que envía pulsos de sensado a través de la fibra óptica generando dispersiones de luz. Parte de la luz dispersada retorna (lo que se conoce como retrodispersión) y es recibida por un detector óptico que traduce la luz en señal eléctrica, para luego ser procesada y analizada.

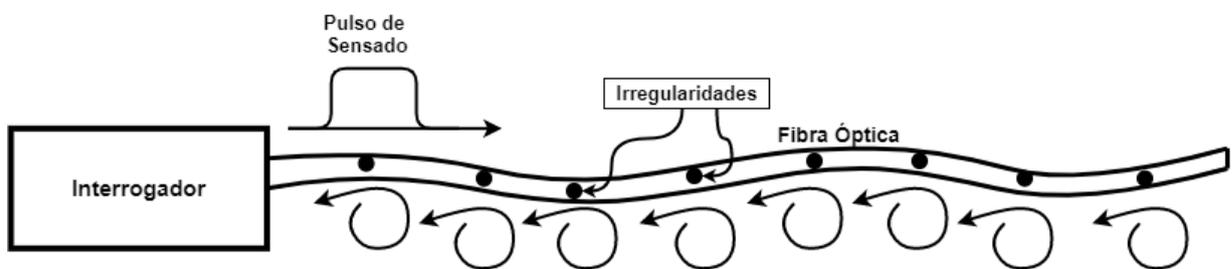


Figura 2.3: Principio general de un sensor distribuido de fibra óptica

El concepto de *scattering* depende del concepto de elasticidad. Se define como un proceso elástico de dispersión de luz, cuando la energía de los fotones² (E_{ph}) incidentes en un medio (como por ejemplo la fibra óptica) se conserva [14]. De no conservarse la energía E_{ph} , al proceso se le conoce como dispersión inelástica.

Para los tipos de *scattering*, las variaciones en el índice de refracción o heterogeneidades existen en una escala mucho más pequeña que la longitud de onda de la luz incidente. [14].

Los tres tipos de *scattering* que ocurren en una fibra óptica son [14]:

- Rayleigh Scattering: Es la dispersión causada por pequeñas variaciones longitudinales en el índice de refracción. Estas variaciones se originan en el proceso de fabricación, donde no existe homogeneidad en la composición molecular del núcleo de la fibra. La luz al viajar a través del núcleo, interactúa con las moléculas de sílice y dióxido de germanio, lo que produce impactos elásticos entre fotones y partículas. La frecuencia de radiación $\nu =$

²Un fotón es la partícula elemental portadora de todas las formas de radiación electromagnética



E_{ph}/h (donde h es la constante de Planck [$\sim 6.626 \cdot 10^{-34} J \cdot s$]) se mantiene constante para los fotones dispersados al igual que su energía, esto debido a que es un proceso elástico.

- Raman Scattering: Es un tipo de dispersión inelástica causada por las vibraciones moleculares del material de la fibra. La dispersión de Raman se origina por la interacción de un fotón con una partícula del medio, esto puede generar un fonón óptico³ o remover uno preexistente. Junto con lo anterior se dispersa un fotón a una frecuencia y energía distintas a la del fotón incidente.
- Brillouin Scattering: Dispersión originada por la interacción entre un fotón y onda de presión mecánica producida dentro de la fibra. Ésta interacción dispersa un fotón y puede generar un fonón acústico⁴ o remover un fonón preexistente. Al igual que la dispersión de Raman, el fotón dispersado posee una frecuencia y energía distintas a la del fotón incidente.

Cuando un fotón interacciona con una molécula del núcleo de la fibra entregando energía al medio, la energía transmitida se traduce en forma de un fonón adicional y el fotón dispersado poseerá menor energía que el fotón incidente. Esto provoca la aparición de líneas espectrales llamadas bandas de Stokes. En el caso opuesto, cuando un fonón es removido, es decir, cuando el medio entrega energía al fotón dispersado, aparecen las bandas espectrales anti-Stokes. Para la banda de Stokes la frecuencia de la luz dispersada es menor a la onda incidente, lo contrario en la banda anti-Stokes.

En la figura 2.4 se aprecian las bandas de Stokes y anti-Stokes para los respectivos *scatterings*. Se observa que el cambio de temperatura (T), en la banda de anti-Stokes afecta a la componente de Raman en su amplitud y a la componente de Brillouin como un desplazamiento en frecuencia. Para la banda de Stokes, el cambio de temperatura afecta principalmente a la dispersión de Brillouin, no así a la componente de Raman.

Por otro lado, el *strain* (ϵ) influye como un cambio de frecuencia en la componente de Brillouin para ambas bandas (Stokes y anti-Stokes).

³Un fonón óptico es una excitación colectiva asociada con la vibración de los átomos en una estructura cristalina rígida en el rango óptico de frecuencias entre 10-12 THz

⁴Un fonón acústico es una excitación colectiva asociada con la vibración de los átomos en una estructura cristalina rígida en el rango de frecuencias entre 10-30 GHz

A su vez, el desplazamiento de la longitud de onda del patrón de dispersión de Rayleigh es linealmente proporcional a la temperatura y la *strain* [17].

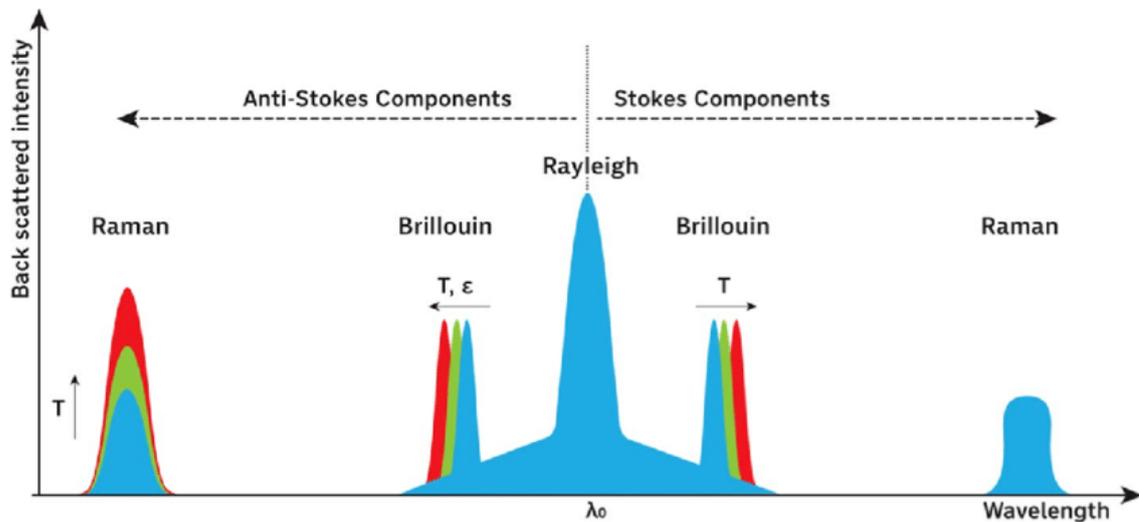


Figura 2.4: Diagrama de Brillouin, Raman y Rayleigh Scattering [18]

Sensor distribuido Raman

En la figura 2.5 se muestra una configuración típica de un sensor Raman, en ella se utiliza una fuente de luz pulsada que proporciona pulsos de sondeo. Éstos pulsos de luz se lanzan a la fibra a través de un acoplador direccional, el cual se encarga de separar la retrodispersión que retorna al inicio de la fibra de los pulsos de luz que se desplazan hacia el fin de la misma.

En el ejemplo de la figura 2.5, el acoplador direccional está diseñado para transmitir la potencia del láser de forma eficiente hacia la fibra y en la dirección de retorno permite desviar cada una de las bandas (Stokes y anti-Stokes) de la señal Raman hacia detectores separados. [14]

El ratio entre las potencias dispersadas por las bandas de Stokes y anti-Stokes de la retrodispersión de Raman permiten cuantificar la temperatura del medio.

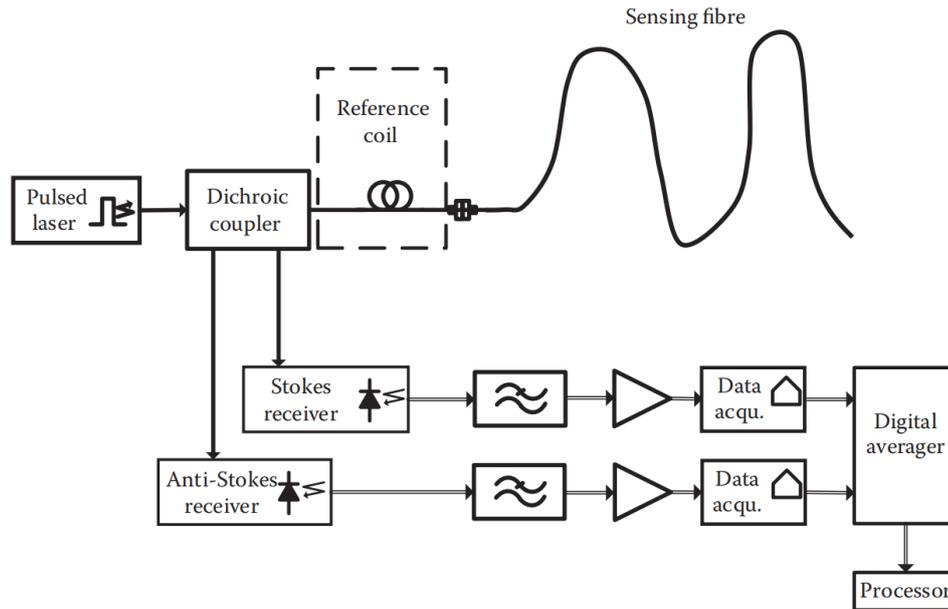


Figura 2.5: Esquema de sensado Raman OTDR [14]

Sensor distribuido Brillouin

Los sensores basados en el *scattering* de Brillouin utilizan el cambio de frecuencia de las bandas Stokes y anti-Stokes para medir *strain* y cambios de temperatura en el medio. Las variaciones de frecuencia para cambios por *strain* son de $C_{vB\epsilon} \approx 50 \text{ MHz}/\mu\epsilon$ y para cambios de temperatura son de $C_{vB\epsilon} \approx 0.95 \text{ MHz}/K$ valores utilizando un láser con una longitud de onda de 1550 nm en una fibra típica monomodo [19]. Tradicionalmente se ocupa un esquema de análisis de Brillouin óptico en el dominio del tiempo o *Brillouin Optical Time Domain Analysis (BOTDA)*, este esquema de detección se puede observar en la figura 2.6. Inicialmente se inyecta un pulso de luz “de bombeo” (1) en un extremo de la fibra, lo que crea un sensor virtual itinerante (pulso) que se mueve a lo largo de la fibra, mientras que en el extremo opuesto de la fibra (2) se inyecta continuamente la luz “de sondeo” que tiene una longitud de onda específica. Cuando el sensor “viajero” (3) atraviesa una región del sensor que posee las características de temperatura (o tensión) examinadas gracias a la longitud de onda específica de la “sonda” en uso, la luz de sondeo resulta perturbada por la amplificación de Brillouin estimulada. La luz perturbada (4) se analiza entonces en el dominio del tiempo para localizar la posición y la longitud de la región perturbada a lo largo del sensor.

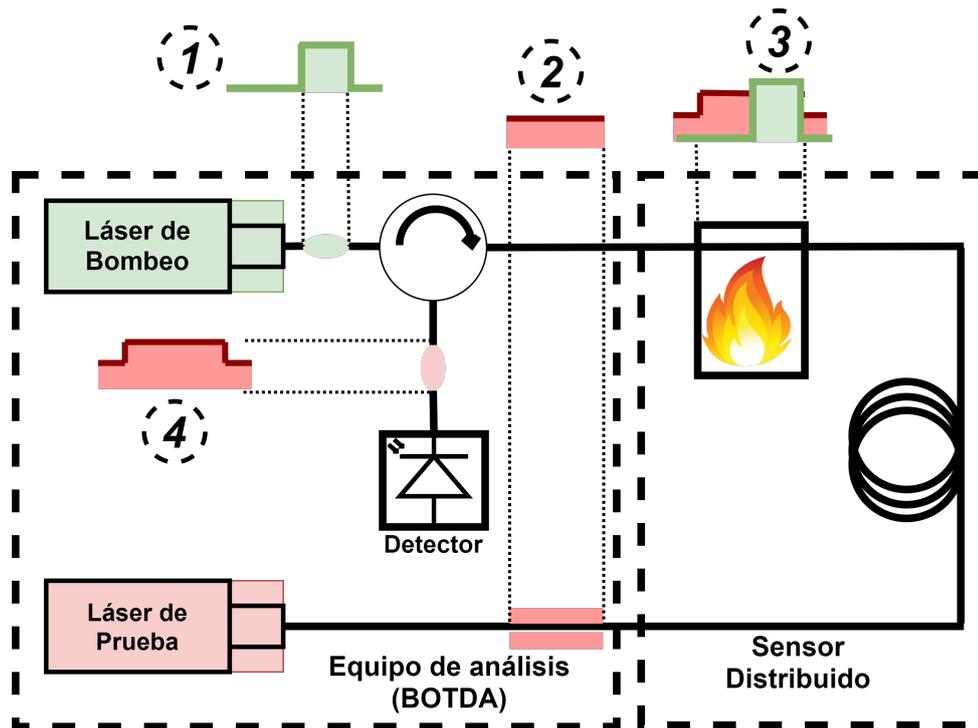


Figura 2.6: Esquema de sensado Raman OTDR [14]

Sensor distribuido Rayleigh

El sensado de *strain*/temperatura basado en el *scattering* de Rayleigh puede ser obtenido en el dominio de la frecuencia a través de la reflectometría en el dominio de la frecuencia o *Optical Frequency Domain Reflectometry (OFDR)* o del tiempo a través de *Phase-sensitive Optical Time Domain Reflectometry (Φ -OTDR)*, en la figura 2.7 presenta un esquema de OFDR clásico. Rayleigh OFDR sintoniza un rango de frecuencias y convierte la respuesta de frecuencia de la fibra en el dominio temporal/espacial mediante la transformada de Fourier.

El esquema Φ -OTDR se puede observar en la figura 2.8 el cual será detallado más adelante en la sección 2.2.2.

Por otro lado, los sensores que detectan vibraciones mediante la dispersión de Rayleigh se conocen *sensores distribuidos de vibración*, y a su vez, los sensores que logran describir la forma de onda de la perturbación se llaman *sensores acústicos distribuidos*. Estos sensores son detallados a continuación.

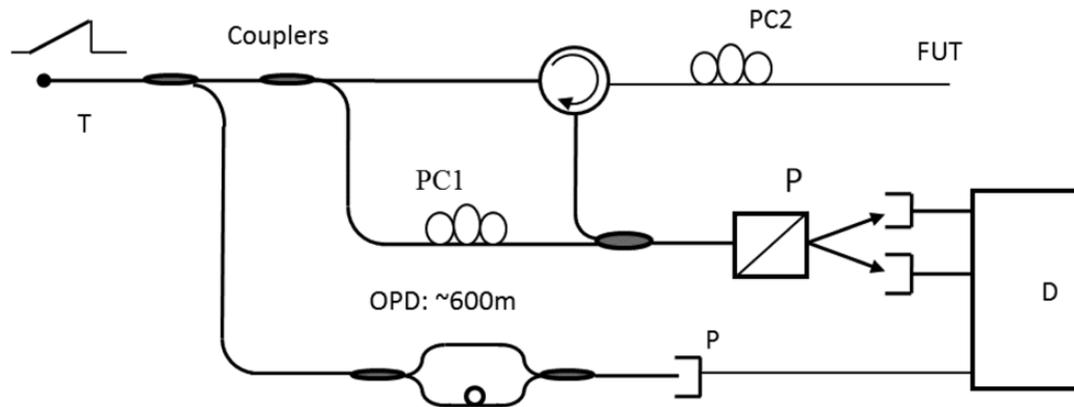


Figura 2.7: Esquema de sensado Rayleigh OFDR
 PC: Polarization Controler; OPD: Optical Path Difference; P: Photodetector; D: Digitizer;
 FUT: Fiber Under Test [20]

2.2.1. Sensores distribuidos de vibración

El sensado distribuido de vibraciones o *Distributed Vibration Sensing (DVS)* fue uno de los primeros esquemas propuestos, con el fin de detectar intrusiones a lo largo de una fibra óptica. Debido a la relación no monótonica (no lineal) entre la vibración y la variación de amplitud, la forma de onda de la vibración no puede ser reconstruida de modo preciso, sin embargo, es posible detectarla cualitativamente a través de un análisis en frecuencia.

Utilizar una transformada rápida de Fourier o *Fast Fourier Transform (FFT)* permite obtener la frecuencia correspondiente a la vibración, con el costo de incluir distintas armónicas debido a la no-linealidad existente.

Por lo tanto, un sensor DVS es todo aquel sensor que mide vibraciones distribuidas a lo largo de la fibra. Al medir intensidad óptica, ésta no varía linealmente con una vibración. Esta no linealidad limita a éste tipo de sistema de sensado, donde queda relegado únicamente a la detección de vibraciones, mas no a su reconstrucción.

2.2.2. Sensores acústicos distribuidos

El sensado acústico distribuido o *Distributed Acoustic Sensing (DAS)*, a diferencia del sensado DVS, permite recuperar la forma de onda de una perturbación. Es decir, lo que se conoce por onda mecánica u onda acústica.

Un sensor DAS requiere una respuesta lineal respecto de la vibración incidente sobre la fibra. De este modo, al recuperar la amplitud y fase de la perturbación se puede recuperar la señal completa. Un DVS se basa en la medición de intensidad lo que sólo permite obtener la frecuencia y, en cierto modo, identificar una magnitud basada en las armónicas en el dominio de la frecuencia. Muchas veces en la literatura, un sensor DAS se considera como un subconjunto de sensores DVS.

Por otro lado, debido a que la fase óptica cambia linealmente con el índice de refracción, y el índice a su vez, cambia de forma lineal con las perturbaciones incidentes, es que los sensores DAS deben utilizar esquemas de reflectometría especiales, como son OFDR o Φ -OTDR con detección de fase.

Φ -OTDR en DAS

El principio de DAS se basa en mediciones de la retrodispersión de Rayleigh. En esta sección se profundiza principalmente sobre el esquema Φ -OTDR mostrado en la figura 2.8.

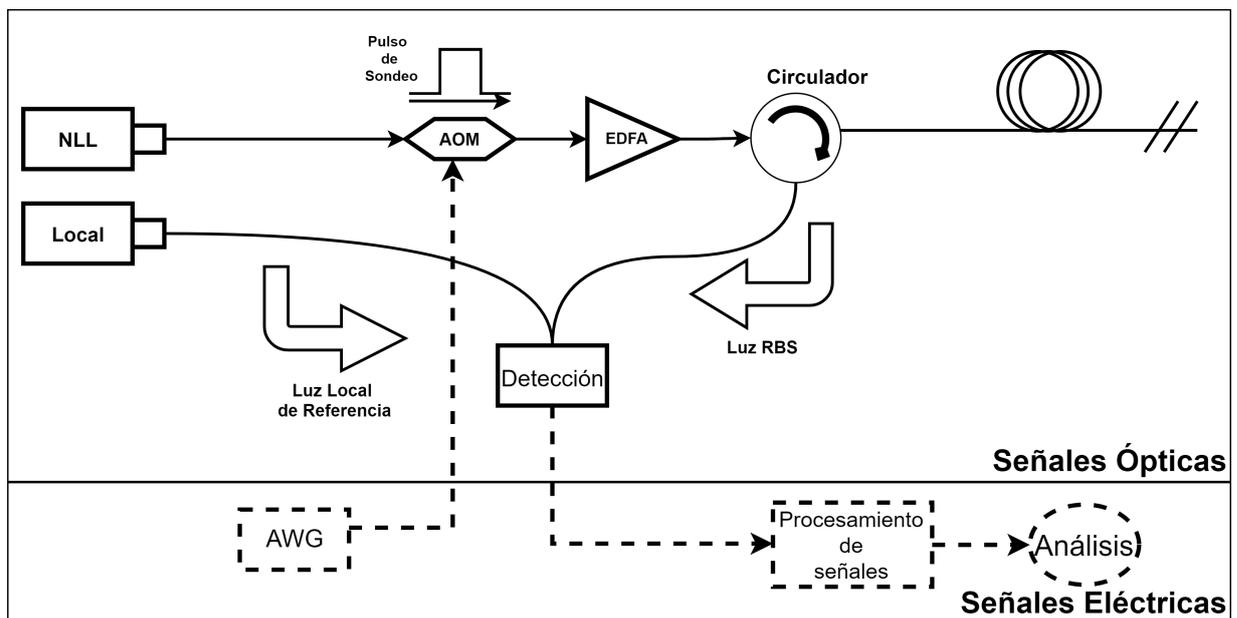


Figura 2.8: Esquema de sensado para técnica Φ -OTDR

En Φ -OTDR se emite luz a través de un láser de ancho espectral estrecho o *Narrow Linewidth Laser (NLL)*. La luz emitida es modulada mediante un modulador acústico óptico o *Acousto-optic Modulator (AOM)*). A la salida del AOM, se obtiene un pulso de sonda a una longitud de onda



levemente diferente al láser, el cual es amplificado utilizando un amplificador de fibra dopada con erbio o *Erbium-Doped Fiber Amplifier (EDFA)*. Por medio de un circulador, el pulso amplificado ingresa a la fibra de sensado o *Fiber Under Test (FUT)*. La señal de retrodispersión de Rayleigh o *Rayleigh Backscattering (RBS)* pasa a través del circulador, para posteriormente ser dirigida al módulo de detección en combinación con la luz emitida por un oscilador local óptico. Se debe destacar que un generador arbitrario de onda o *Arbitrary Waveform Generator (AWG)* se encarga de modular a través del AOM el pulso enviado a través de la FUT. El módulo de detección se encarga de traducir las señales ópticas a señales eléctricas, a través de un detector heterodino. Las señales eléctricas son obtenidas mediante un ADC ya nombrado para poder realizar post-procesamiento y finalmente permitir el análisis de las perturbaciones detectadas. Los esquemas de detección serán profundizados en la sección 2.3.

El principio de funcionamiento de Φ -OTDR se observa en la figura 2.9, donde un pulso de prueba, representado en color azul, viaja a través de la fibra, siendo afectado por una perturbación externa a ella (vibración, *strain*, etc.). Esto provoca que la señal azul genere una señal Rayleigh que es modulada pasando a ser la señal de color naranja. La señal modulada (naranja) lleva consigo información sobre la perturbación externa. Al contrario, la señal no modulada (azul) no posee información alguna respecto de la perturbación. Esto significa que, la diferencia de fase entre las dos señales de retro-dispersión, dentro de la duración de un pulso, refleja información sobre la perturbación externa. [21]

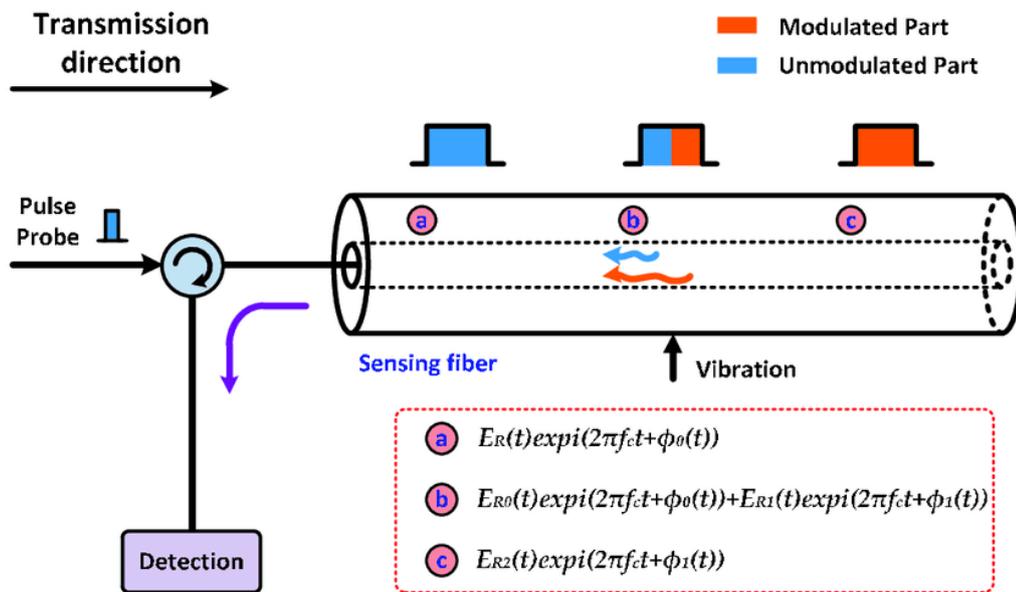


Figura 2.9: Principio de funcionamiento de un sensor Φ -OTDR [21]

En el caso de Φ -OTDR, el efecto de una vibración en algún punto de la fibra óptica cambia la fase de propagación del pulso enviado a través de ella. El cambio de fase se produce por una variación en el índice de refracción original n_0 . Según [8] esta variación es:

$$\Delta n_{eff} = \gamma \eta_0 \Delta \epsilon \quad (2.2)$$

donde γ es el coeficiente elástico-óptico y $\Delta \epsilon$ es la deformación axial o *strain*.

Por otro lado, la variación en el largo l de una fibra, puede ser expresado como $\Delta l = \Delta \epsilon \cdot l$. Por lo tanto, según [8], el cambio de fase adicional, producido por la vibración incidente, se define como:

$$\Delta \phi = (1 + \gamma) n_0 k l \Delta \epsilon \quad (2.3)$$

Donde k es el vector de onda.

2.3. Esquemas de Detección

El proceso de recuperación de la señal RBS requiere de un esquema de detección que permita obtener información relevante para el usuario respecto de la perturbación que incide sobre la



fibra óptica. En este escenario se puede optar por alguno de los dos tipos de detección principales: detección coherente y detección directa. De estos esquemas, la detección directa es más simple de implementar; sin embargo, presenta limitaciones en la capacidad de recuperar la fase óptica, esto debido a que se basa sólo en detección de la intensidad óptica, lo que hace imposible obtener la fase de la señal óptica de modo directo [22]. La recuperación de fase utilizando detección directa requiere de configuraciones extras basadas en interferómetros, como son el interferómetro Mach-Zehnder MZI o el interferómetro de Michelson MI [23].

Por otro lado, un esquema de detección coherente se basa en el uso de un láser con ancho de banda espectral angosto (NLL), es decir, un láser con alta coherencia espectral. Para detectar dicha señal se requiere de un oscilador local óptico o *Optical Local Oscillator (OLO)* que se incorpore a la señal RBS.

Así, la luz RBS que retorna desde la fibra puede ser descrita como:

$$E_{RBS} = A_s(t) \exp[j2\pi f_0 t + j\phi_1(t)] \quad (2.4)$$

Y la ecuación que define el campo eléctrico del oscilador local es:

$$LO = A_{LO} \exp[j2\pi(f_0 + \Delta f)t + j\phi_2(t)] \quad (2.5)$$

Donde Δf es la diferencia de frecuencia entre el oscilador local y la señal RBS.

A partir del valor utilizado en la diferencia de frecuencia Δf se pueden definir dos implementaciones de detección coherente. Cuando la frecuencia del oscilador local es la misma que la frecuencia del pulso enviado a través de la fibra (y por ende la señal RBS), es decir, $\Delta f = 0$ el detector se denomina homodino. Por otro lado, cuando estas frecuencias son distintas siendo $\Delta f \neq 0$, al detector se le conoce por heterodino.

2.3.1. Detector Homodino

Un detector homodino y por ende la detección homodina se basa en el uso de una frecuencia del oscilador local igual a la frecuencia de la señal RBS, esto permite obtener la señal sólo en frecuencias positivas o negativas. Este tipo de detección requiere un ancho de banda menor

comparado a una detección heterodina [19]. En la figura 2.10a se puede apreciar ambos tipos de detección.

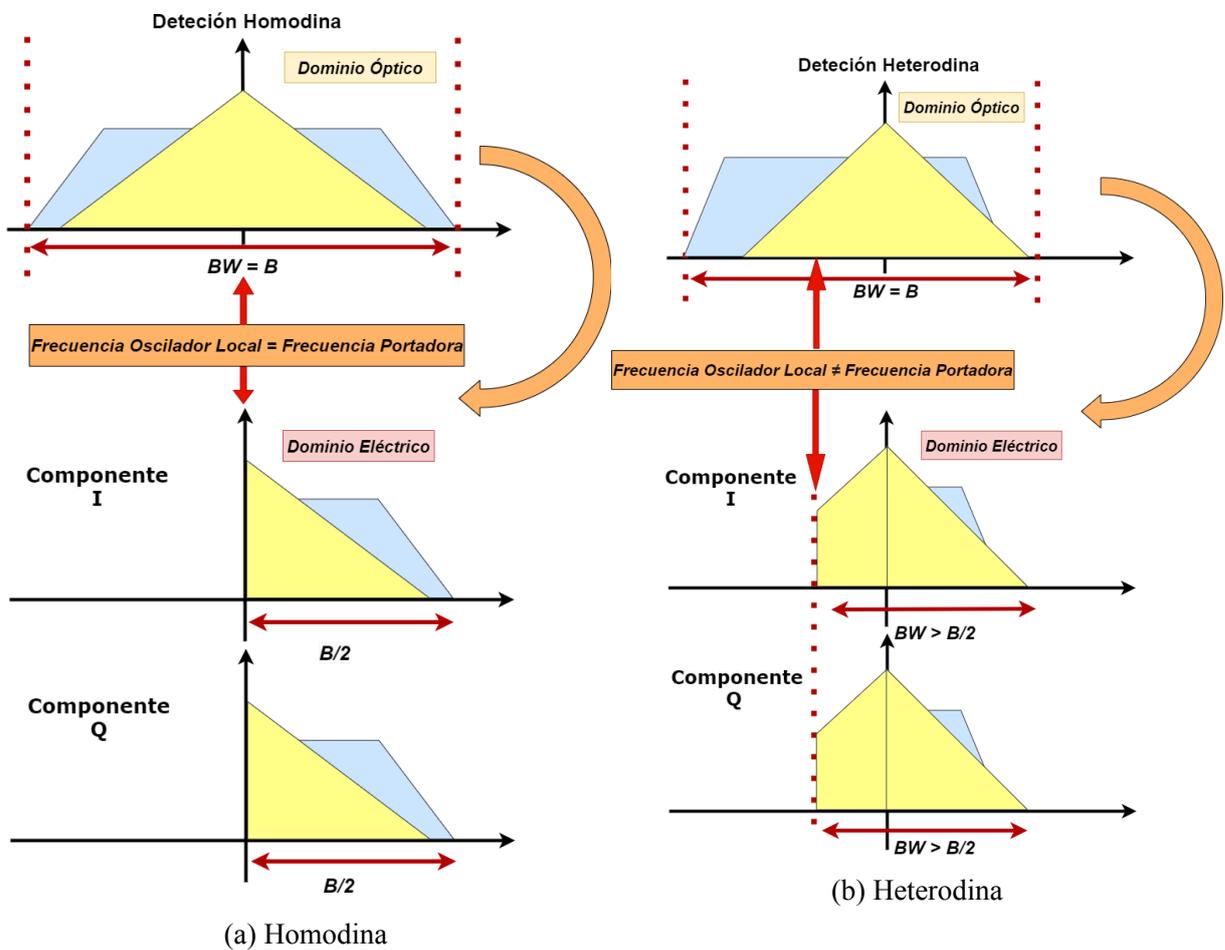


Figura 2.10: Comportamiento del ancho de banda para detección homodina y heterodina

Pese a este beneficio, utilizar detección homodina requiere por definición mantener la diferencia de frecuencia igual a cero, es decir, el campo entrante de la mezcla de la señal óptica y el oscilador local debe tener su frecuencia y fase enlazada con la frecuencia y fase de la señal portadora a través de un *Optical Phase Lock Loop (OPLL)*. Tal dispositivo puede observarse en el esquema de un detector homodino de la figura 2.11. Cabe destacar, que la oscilador local depende del OPLL.

Por otro lado, para detectar la fase, dado que no existe portadora en la señal eléctrica de batimiento, se requiere de un híbrido óptico para proporcionar diversidad de fase. El híbrido óptico será explicado en la siguiente sección.

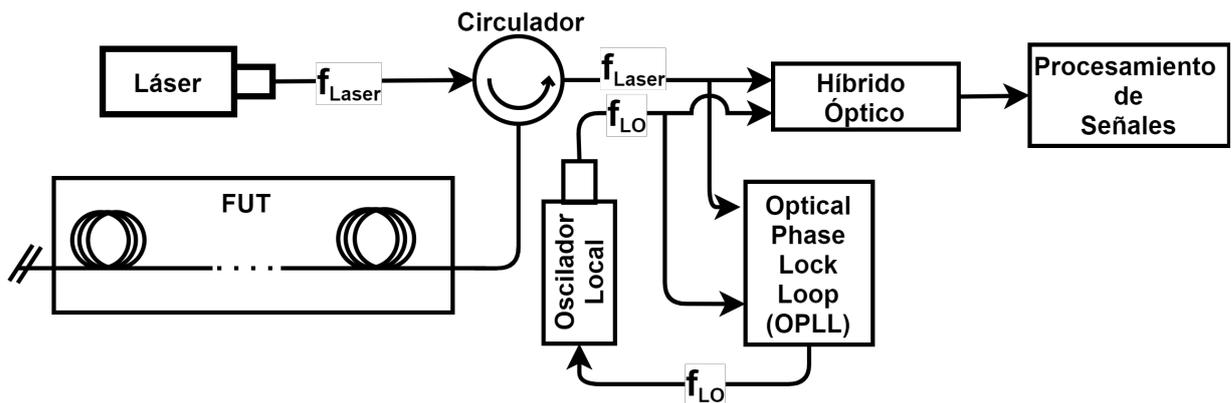


Figura 2.11: Detector Homodino

2.3.2. Detector Heterodino

El detector heterodino, al contrario del detector homodino, no requiere de un OPLL. Sin embargo, el ancho de banda que se requiere es mayor debido a la diferencia de frecuencia entre el láser y el oscilador local. En la figura 2.10b se aprecia tal diferencia.

Por otro lado, el esquema de detección heterodina se observa en la figura 2.12, donde se aprecia la ausencia del OPLL.

En la práctica, la mayor parte de los trabajos sobre el detección coherente para OTDR han involucrado detección heterodina en lugar de homodina. Esto se debe posiblemente a razones prácticas, como el uso de moduladores acústico-ópticos que se utilizan habitualmente para formar el pulso de sondeo a partir de la fuente láser. Los AOM desplazan naturalmente la frecuencia del pulso modulado y esto simplifica el proceso de detección. [14]

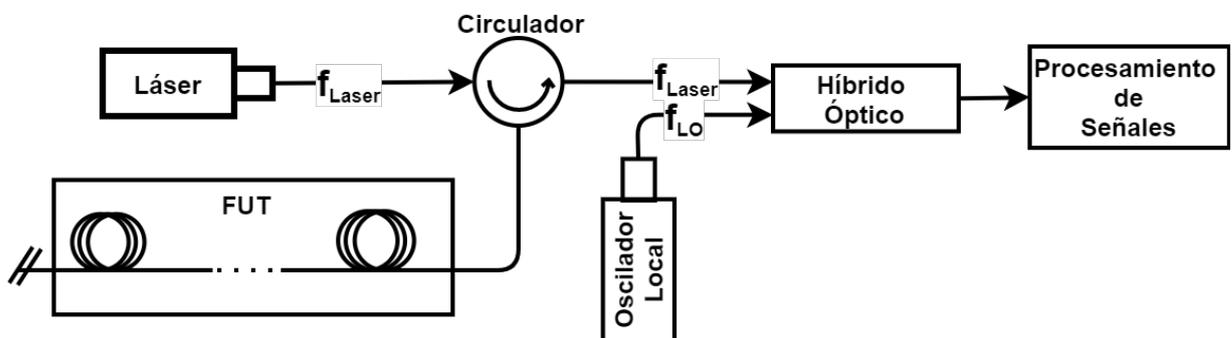


Figura 2.12: Detector Heterodino

2.3.3. Demodulación I/Q

El proceso de demodulación se conoce como el conjunto de técnicas utilizadas para recuperar información transportada por una onda portadora. Entonces, al momento de medir perturbaciones externas es importante el proceso de demodulación de la señal que retorna desde la fibra óptica. A continuación se explica, paso a paso, la construcción de un esquema de detección con demodulación I/Q.

Inicialmente, para recuperar una señal S , se puede utilizar un fotodetector. Esto se observa en la figura 2.13, esquema conocido como detección directa. Sin embargo, como se ha comentado anteriormente, este tipo de detección no provee información sobre la fase de la señal óptica que se detecta en el fotodetector, sólo sobre su amplitud. Es decir, la información que se puede obtener utilizando esta configuración es limitada. Entonces, la fotocorriente de la señal obtenida a partir del fotodetector es proporcional al cuadrado de la amplitud de la señal S , esto se aprecia en la ecuación 2.6.

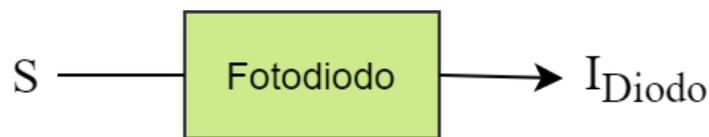


Figura 2.13: Detección Directa

Donde:

$$I_{Diodo} \propto S \cdot S^* = A_s e^{j(2\pi f_s t + \varphi_s)} \cdot A_s e^{-j(2\pi f_s t + \varphi_s)} = A_s^2 \quad (2.6)$$

Una solución al problema de falta de información recae en no medir la fase absoluta, sino que, medir la fase relativa respecto a una señal de referencia u oscilador local.

Las ecuaciones 2.7 y 2.8 describen la señal a recuperar (S) y la señal del oscilador local (LO), respectivamente. Estas señales se mezclan mediante un combinador óptico presentado en la figura 2.14 lo que resulta una analogía igual a la suma de los campos eléctricos de ambas señales.

$$S = A_s e^{j(2\pi f_s t + \varphi_s)} \quad (2.7)$$

$$LO = A_{LO} e^{j(2\pi f_{LO} t + \varphi_{LO})} \quad (2.8)$$

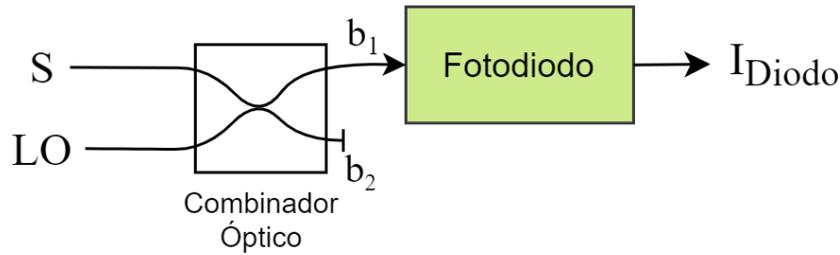


Figura 2.14: Detección Directa con oscilador local

El proceso real del combinador óptico 2x2 no es directamente la suma algebraica de los campos ópticos, sino que se presenta un desplazamiento de fase de $\frac{\pi}{2}$ que afecta a una de las señales de entrada, dependiendo de la rama de salida utilizada. Siendo la salida de la rama superior distinta de la rama inferior.

En la figura 2.15 se describen las entradas y salidas del combinador óptico 2x2, siendo a_1, a_2, b_1, b_2 señales de ópticas.

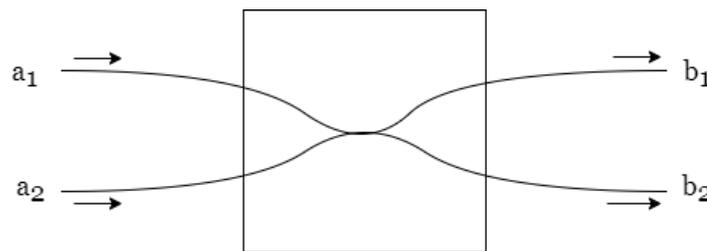


Figura 2.15: Combinador óptico 2x2

La matriz de transferencia que permite relacionar las señales de salida b_1 y b_2 y las señales de entrada a_1 y a_2 para un combinador óptico 2x2 con un coeficiente de acoplamiento de potencia del 50 % [24]:

$$\begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & j \\ j & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} \quad (2.9)$$

A partir de la matriz de transferencia 2.9 y las ecuaciones de campo eléctrico que describen a las señales S (2.7) y LO (2.8), se pueden obtener las ecuaciones de salida que describen los campos ópticos que entrarán al fotodetector.

Siendo:

$$b_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(a_1 + ja_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[A_s e^{j(2\pi f_s t + \phi_s)} + jA_{LO} e^{j(2\pi f_{LO} t + \phi_{LO})}] \quad (2.10)$$



$$b_2 = \frac{1}{\sqrt{2}}(ja_1 + a_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}[jA_s e^{j(2\pi f_s t + \varphi_s)} + A_{LO} e^{j(2\pi f_{LO} t + \varphi_{LO})}] \quad (2.11)$$

Reemplazando $a_1 = S$ y $a_2 = LO$ se puede obtener la fotocorriente (I_{Diodo}) del fotodiodo para el esquema de la figura 2.14:

$$\begin{aligned} I_{Diodo} &\propto b_1 \cdot b_1^* \\ &= \frac{1}{2} \{A_s e^{j(2\pi f_s t + \varphi_s)} + jA_{LO} e^{j(2\pi f_{LO} t + \varphi_{LO})}\} \cdot \\ &\quad \{A_s e^{j(2\pi f_s t + \varphi_s)} + jA_{LO} e^{j(2\pi f_{LO} t + \varphi_{LO})}\}^* \\ &= \frac{1}{2} \{A_s e^{j(2\pi f_s t + \varphi_s)} + jA_{LO} e^{j(2\pi f_{LO} t + \varphi_{LO})}\} \\ &\quad \{A_s e^{-j(2\pi f_s t + \varphi_s)} - jA_{LO} e^{-j(2\pi f_{LO} t + \varphi_{LO})}\} \end{aligned} \quad (2.12)$$

Desarrollando la ecuación 2.12:

$$\begin{aligned} I_{Diodo} &\propto \frac{1}{2} [A_s^2 + jA_s A_{LO} e^{j(2\pi f_s t + \varphi_s - 2\pi f_{LO} t - \varphi_{LO})} - jA_s A_{LO} e^{-j(2\pi f_s t + \varphi_s - 2\pi f_{LO} t - \varphi_{LO})} + A_{LO}^2] \\ &= \frac{1}{2} [A_s^2 + A_{LO}^2 + jA_s A_{LO} \{\cos(2\pi \Delta f t + \Delta \varphi) + j \sin(2\pi \Delta f t + \Delta \varphi)\} \\ &\quad - \cos(2\pi \Delta f t + \Delta \varphi) + j \sin(2\pi \Delta f t + \Delta \varphi)] \\ &= \frac{1}{2} [A_s^2 + A_{LO}^2 + j^2 2A_s A_{LO} \sin(2\pi \Delta f t + \Delta \varphi)] \\ &= \frac{1}{2} [A_s^2 + A_{LO}^2 - 2A_s A_{LO} \sin(2\pi \Delta f t + \Delta \varphi)] \end{aligned} \quad (2.13)$$

En base a la identidad trigonométrica $\sin(x) = -\cos(x + \pi/2)$ el resultado de la ecuación 2.13 es:

$$\frac{1}{2} [A_s^2 + A_{LO}^2 + 2A_s A_{LO} \cos(2\pi \Delta f t + \Delta \varphi + \pi/2)] \quad (2.14)$$

En la ecuación 2.13 se observa que existe un desplazamiento de fase en $\frac{\pi}{2}$. Debido a esto, es deseable que los términos que no dependen de la fase de interés (A_s^2 y A_{LO}^2) se eliminen y así se recupere únicamente el término que contiene información de fase relevante de la señal S.

Para este propósito se utiliza un detector balanceado presente en la figura 2.16.

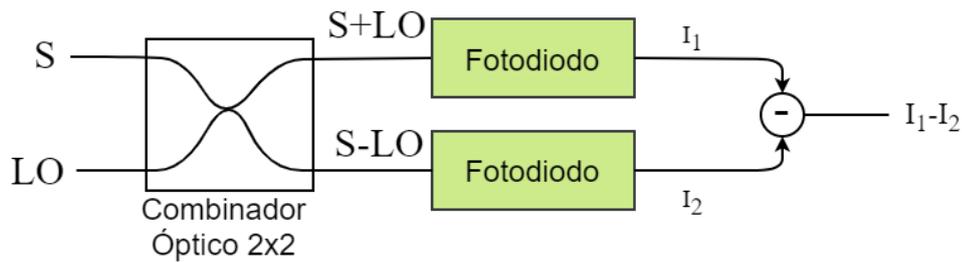


Figura 2.16: Detector Balanceado

Este detector utiliza un fotodetector extra haciendo uso de ambas salidas del combinador óptico 2x2. La ecuación de la rama I_1 se presentó en la ecuación 2.13.

Para el caso de la rama I_2 , el desarrollo es similar, resultando:

$$\begin{aligned}
 I_2 &\propto b_2 \cdot b_2^* \\
 &= \frac{1}{2} [A_s^2 + A_{LO}^2 + 2A_s A_{LO} \sin(2\pi\Delta f t + \Delta\phi)] \\
 &= \frac{1}{2} [A_s^2 + A_{LO}^2 - 2A_s A_{LO} \cos(2\pi\Delta f t + \Delta\phi + \pi/2)]
 \end{aligned} \tag{2.15}$$

Posteriormente se obtiene la diferencia entre la rama I_1 y la rama I_2 , esto nos permite obtener:

$$\begin{aligned}
 I_1 - I_2 &\propto b_1 \cdot b_1^* - b_2 \cdot b_2^* = \\
 &= 2A_s A_{LO} \cos[2\pi\Delta f t + \Delta\phi + \pi/2]
 \end{aligned} \tag{2.16}$$

Para recuperar amplitud y fase de una señal compleja, a partir de un detector coherente, es necesario conseguir las dos componentes principales: la componente In-Phase (I) y la componente Quadrature (Q). En el caso anterior, sólo se obtuvo la componente I de la señal, por lo que para obtener la componente Q se requiere un segundo detector balanceado. Tal detector presenta una diferencia fundamental, la cual consiste en desplazar la fase del oscilador local en 90° .

El esquema de detección y su implementación es visible en la figura 2.17, la cual muestra un componente óptico (pasivo) que se conoce como híbrido óptico. Este dispositivo requiere de la señal RBS y la señal del oscilador local en los conectores de entrada, obteniéndose a su salida las componentes I_{IF} y Q_{IF} [25]

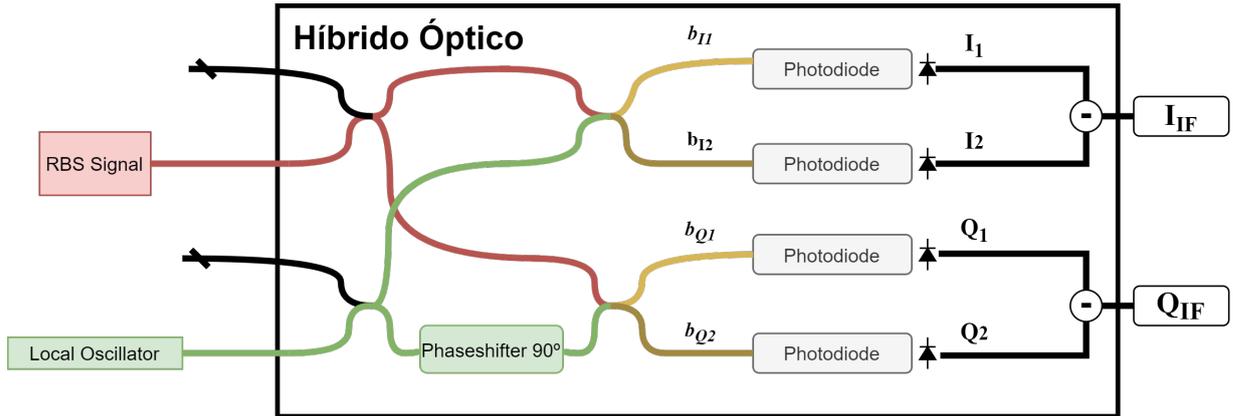


Figura 2.17: Detector I/Q

Se definen las entradas de cada fotodiodo segun el esquema de la figura 2.17:

$$b_{I1} = \frac{1}{\sqrt{2}} [A_s(t)e^{j(2\pi f_s t + \varphi_s)} + jA_{LO}e^{(2\pi f_{LO} t + \varphi_{LO})}] \quad (2.17)$$

$$b_{I2} = \frac{1}{\sqrt{2}} [jA_s(t)e^{j(2\pi f_s t + \varphi_s)} + A_{LO}e^{(2\pi f_{LO} t + \varphi_{LO})}] \quad (2.18)$$

$$b_{Q1} = \frac{1}{\sqrt{2}} [jA_s(t)e^{j(2\pi f_s t + \varphi_s)} + jA_{LO}e^{(2\pi f_{LO} t + \varphi_{LO})}] \quad (2.19)$$

$$b_{Q2} = \frac{1}{\sqrt{2}} [A_s(t)e^{j(2\pi f_s t + \varphi_s)} + j^2 A_{LO}e^{(2\pi f_{LO} t + \varphi_{LO})}] \quad (2.20)$$

Las señales de las 4 ramas: I_1 , I_2 , Q_1 , y Q_2 , están definidas en las ecuaciones siguientes ecuaciones [2.21-2.24]:.

$$I_1(t) = b_{I1} \cdot b_{I1}^* \quad (2.21)$$

$$I_2(t) = b_{I2} \cdot b_{I2}^* \quad (2.22)$$

$$Q_1(t) = b_{Q1} \cdot b_{Q1}^* \quad (2.23)$$

$$Q_2(t) = b_{Q2} \cdot b_{Q2}^* \quad (2.24)$$



Donde el símbolo (*) representa el conjugado del número complejo a operar.

Utilizando las ecuaciones 2.4 y 2.5:

$$E_{RBS} = A_s(t) \exp[j2\pi f_0 t + j\varphi_1(t)]$$

$$LO = A_{LO} \exp[j2\pi(f_0 + \Delta f)t + j\varphi_2(t)]$$

Y considerando que el conjugado de la suma dos números complejos z_1, z_2 es:

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

Se expande la ecuación 2.21 para obtener $I_1(t)$:

$$I_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \{A_s(t) \exp[j2\pi f_0 t + j\varphi_1] + jA_{LO} \exp[j2\pi(f_0 + \Delta f)t + j\varphi_2]\} \times \{A_s(t) \exp[-j(2\pi f_0 t + \varphi_1)] - jA_{LO} \exp[-j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2)]\} \quad (2.25)$$

Resolviendo la multiplicación de los términos de la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} I_1(t) &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) \exp[j(2\pi f_0 t + \varphi_1) - j(2\pi f_0 t + \varphi_1)] + \\ &\quad jA_s(t)A_{LO} \exp[j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2) - j(2\pi f_0 t - \varphi_1)] + \\ &\quad jA_s(t)A_{LO} \exp[j(2\pi(f_0 t + \varphi_1) - j(2\pi(f_0 + \Delta f)t - \varphi_2))] - \\ &\quad j^2 A_{LO}^2 \exp[j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2) - j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2)]\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) + A_{LO}^2 + jA_s(t)A_{LO}(\exp[j(2\pi\Delta f t + \Delta\varphi)] - \exp[-j(2\pi\Delta f t + \Delta\varphi)])\} \end{aligned} \quad (2.26)$$

Donde se define $\Delta\varphi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ como la diferencia entre la fase del Oscilador Local y la fase de la señal RBS.

Los términos exponenciales se expanden utilizando la identidad de Euler

$$Ae^{jb} = A \cos(b) + A \sin(b)$$



resultando:

$$\begin{aligned}
 & \exp [j(2\pi\Delta ft - \Delta\varphi)] + \exp [-j(2\pi\Delta ft + \Delta\varphi)] \\
 = & \cos [2\pi\Delta ft - \Delta\varphi] + j \sin [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi] - \cos [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi] + j \sin [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi] \quad (2.27) \\
 = & 2j \sin [(2\pi\Delta ft + \Delta\varphi)]
 \end{aligned}$$

Utilizando la identidad trigonométrica $\sin(x) = -\cos(x + \pi/2)$ el resultado de la ecuación 2.27 es:

$$2j \sin [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi] = -2j \cos [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi + \pi/2]$$

Continuando con el desarrollo de la ecuación 2.26

$$\begin{aligned}
 I_1(t) &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) + A_{LO}^2 + jA_s(t)A_{LO}(-2j \cos [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi + \pi/2])\} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) + A_{LO}^2 + 2A_s(t)A_{LO} \cos [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi + \pi/2]\} \quad (2.28)
 \end{aligned}$$

El desarrollo de las ecuaciones para las ramas I_2 , Q_1 y Q_2 son equivalentes a I_1 , y se presentan en el anexo A

De esta forma la rama I y la rama Q en frecuencia intermedia o *intermediate frequency* (IF) se obtienen a partir de la diferencia de las ramas previas:

$$\begin{aligned}
 I_{IF}(t) &= I_1(t) - I_2(t) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) + A_{LO}^2 + 2A_s(t)A_{LO} \cos [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi + \pi/2]\} \\
 &\quad - \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) + A_{LO}^2 - 2A_s(t)A_{LO} \cos [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi + \pi/2]\} \quad (2.29) \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \{4A_s(t)A_{LO} \cdot \cos [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi + \pi/2]\} \\
 &= 2A_s(t)A_{LO} \cdot \cos [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi(t) + \pi/2]
 \end{aligned}$$



Para el caso de la rama Q el desarrollo es similar:

$$\begin{aligned} Q_{IF}(t) &= Q_1(t) - Q_2(t) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) + A_{LO}^2 + 2A_s(t)A_{LO} \sin [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi + \pi/2]\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) + A_{LO}^2 - 2A_s(t)A_{LO} \sin [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi + \pi/2]\} \quad (2.30) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{4A_s(t)A_{LO} \cdot \sin [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi + \pi/2]\} \\ &= 2A_{LO}A_s(t) \cdot \sin[2\pi\Delta ft + \Delta\varphi(t) + \pi/2] \end{aligned}$$

2.3.4. Detector Kramers-Kronig

El principio fundamental de un detector Kramers-Kronig es el uso de las relaciones KK para obtener, mediante la transformada de Hilbert, la parte imaginaria a partir de la parte real, o viceversa, de una señal analítica. Así, este detector puede considerarse como un caso especial de un detector heterodino [11], pero es importante definir dos perspectivas de las relaciones KK. Éstas están definidas por las variables que entrelazan, es decir, entre Intensidad-Fase y Real-Imaginario. El primer escenario es mayormente expuesto en los trabajos [11, 12, 26], y el segundo es expuesto principalmente en [12]. Estos dos escenarios de procesamiento requieren diversas entradas y condiciones para poder obtener de manera más precisa la señal deseada. A continuación se presentan las condiciones existentes en el estado del arte.

KK en base a Intensidad-Fase

La aplicación de las relaciones KK a una señal compleja, enfocada en el par Intensidad-Fase ($I\Phi$ -KK), requiere que esta señal sea de fase mínima o *Minimum Phase (MP)*, según [26].

En base a lo expuesto en [11], el concepto de una señal de fase mínima asegura que la amplitud de la señal y su fase tengan relación única. Es decir, para la amplitud muestreada, al realizar la recuperación de fase, no existirán dos o más fases posibles con el procesamiento realizado, por lo tanto, no existirá ambigüedad.

Así, para poder considerar que una señal sea de fase mínima requiere de una condición necesaria y suficiente explicitada por el teorema expuesto en [26]:

“La curva descrita por un campo eléctrico $E(t)$, cuando t recorre desde $t \rightarrow -\infty$ a $t \rightarrow \infty$, no debe rodear el origen para ser de fase mínima.”

Es decir, para una señal compleja, que en el contexto de señales ópticas es un campo eléctrico, no debe rodear el origen del plano complejo en todo el rango de valores en los tiempos desde $-\infty$ a ∞ . Esto se puede apreciar en la figura 2.18, la cual presenta una curva que describe dos vueltas al rededor del origen, lo que según plantea [26], no cumpliría con la definición de una curva de campo eléctrico de fase mínima.

Por otro lado, la curva que se puede observar en la figura 2.19 si cumple con la condición de fase mínima dado que no rodea al origen en ningún momento.

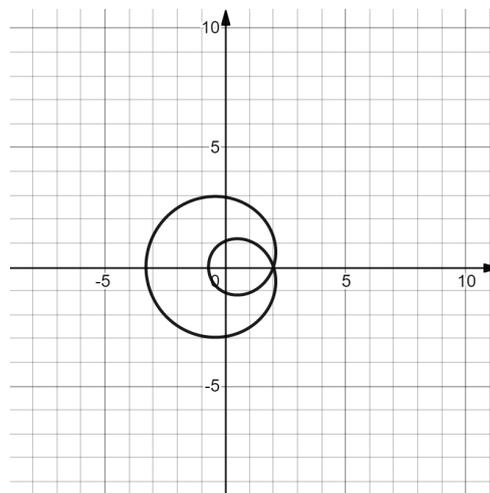


Figura 2.18: Ejemplo de curva que no cumple condición de mínima fase

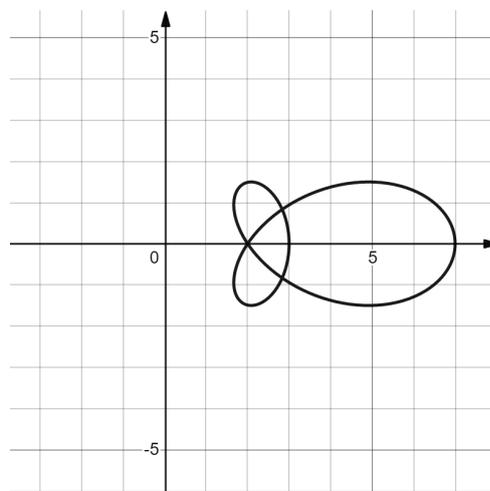


Figura 2.19: Ejemplo de curva que si cumple condición de mínima fase



Junto con el teorema anterior, se define la relación entre magnitud y la fase a recuperar de la señal compleja. La ecuación 2.32 se afirma que, la fase de una señal $E(t)$ puede ser determinada a partir de la transformada de Hilbert logarítmica de su magnitud cuadrática [26].

Para un campo $E(t)$ arbitrario:

$$E_0(t) = |E(t)| \exp [j\Phi_0(t)] \quad (2.31)$$

donde:

$$\phi_0(t) = \bar{\phi} + \frac{1}{2\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\log[|E(t')|^2]}{t' - t} dt', \quad (2.32)$$

donde $\bar{\phi}$ es una fase arbitraria y la obtención de ella es a través del valor principal de Cauchy o *Cauchy's principal value* (p.v.). Éste método permite asignar valores a ciertas integrales impropias que, de otro forma, resultarían indefinidas.

Junto con las condiciones anteriores, Jiang *et al.* [12] presentan como condiciones de aplicación de las relaciones KK, que la amplitud del oscilador local debe ser lo suficientemente grande respecto de la señal a recuperar. Además debe cumplirse que, la señal de la fase que se desea recuperar debe ser de banda lateral única o *Single Side Band (SSB)*, y para lograr tal cometido, la diferencia de frecuencia (Δf), entre la frecuencia del láser y la frecuencia del oscilador local tiene que ser lo suficientemente grande.

KK en base a Real-Imaginario

En los fundamentos iniciales del uso de las relaciones Real-Imaginario KK (RI-KK) se considera que la señal debe ser holomórfica, y por ende analítica en el semiplano superior del plano complejo.

Que una función compleja sea analítica implica que cumpla con la condición de Cauchy-Riemman. Esto es que, dada una función $f(z) \in \mathbb{C}$ con $z = x + iy$ donde la función $f(z)$ se puede descomponer en la suma de dos funciones reales de dos variables u y v

$$f(z) = f(x, y) = f(x + iy) = u(x, y) + iv(x, y),$$

debe cumplirse que: $u_x = v_y$ y $u_y = -v_x$. Donde u_x es la derivada parcial de la función u respecto



de la variable x , es decir, $\frac{\partial u}{\partial x}$. De igual forma, u_y es la derivada parcial de la función u respecto de la variable y ($\frac{\partial u}{\partial y}$), $v_y = \frac{\partial v}{\partial y}$ y $v_x = \frac{\partial v}{\partial x}$.

En el escenario de fibra óptica, Jiang *et al.* en [12] pone como condición principal que la diferencia de frecuencia, entre la frecuencia del láser y la frecuencia de batimento, sea lo suficientemente grande para que la señal pueda recuperarse correctamente.

El criterio expuesto como: “valor que sea suficientemente grande”, no deja en claro las limitaciones existentes para tal valor, menos aún, cual es la diferencia en frecuencia óptima que permite obtener el mejor resultado en recuperación de señales a través de las relaciones RI-KK. Esto no queda definido en [12], por lo que en el desarrollo de este proyecto se busca caracterizar el efecto que poseen diversos valores de frecuencia intermedia en la calidad de la señal recuperada.

Por lo que si utilizamos un demodulador I/Q se posee las componentes In-phase(I) y Quadrature (Q) de una señal de campo eléctrico de la forma $E_{field} = I + j \cdot Q$, donde al aplicar la transformada Hilbert a la parte real I se puede lograr recuperar la parte imaginaria Q utilizando la ecuación 2.33:

$$Q_{KK}(t) = -\frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(\tau)}{t' - \tau} d\tau, \quad (2.33)$$

Investigaciones recientes - Sampling

En el trabajo recientemente publicado en [27], se hace énfasis en la falencia existente al confiar únicamente en la condición de fase mínima (2.3.4), en el campo de recuperación de fase en el contexto de comunicaciones por fibra óptica. En [27] se demuestra que los cambios en la tasa de muestreo a la señal afectan a la recuperación de fase. Además se realizan pruebas variando el *Carrier-to-Signal Power Ratio (CSPR)* donde el efecto de poseer un CSPR mayor es beneficioso en la reconstrucción de la señal original.

Finalmente en base a lo propuesto en [27], en este trabajo se considera analizar el impacto de la tasa de muestreo en la recuperación de la fase de la señal RBS, como también el uso de técnicas de upsampling.



Interpretación física de las relaciones KK

Una interpretación física de lo que son las relaciones KK según [28] nos entrega la siguiente analogía:

La parte imaginaria de una función respuesta describe como un sistema disipa energía, ya que está desfasada con la fuerza de impulso. Las relaciones Kramers-Kronig implican que observar la respuesta disipativa o quadrature (Q) de un sistema es suficiente para determinar su respuesta reactiva o in-phase y viceversa.

Capítulo 3

Implementación, Análisis y Resultados

3.1. Metodología

La metodología general para el análisis del funcionamiento de un detector KK está basado en la figura 3.1. Este esquema presenta las dos perspectivas principales de uso de las relaciones KK. Inicialmente se abordará el caso de KK Real-Imaginario (RI-KK) presentando el análisis propuesto, el alcance que se consideró y resultados relevantes. En la sección posterior el análisis irá enfocado al par Magnitud-Fase ($I\Phi$ -KK).

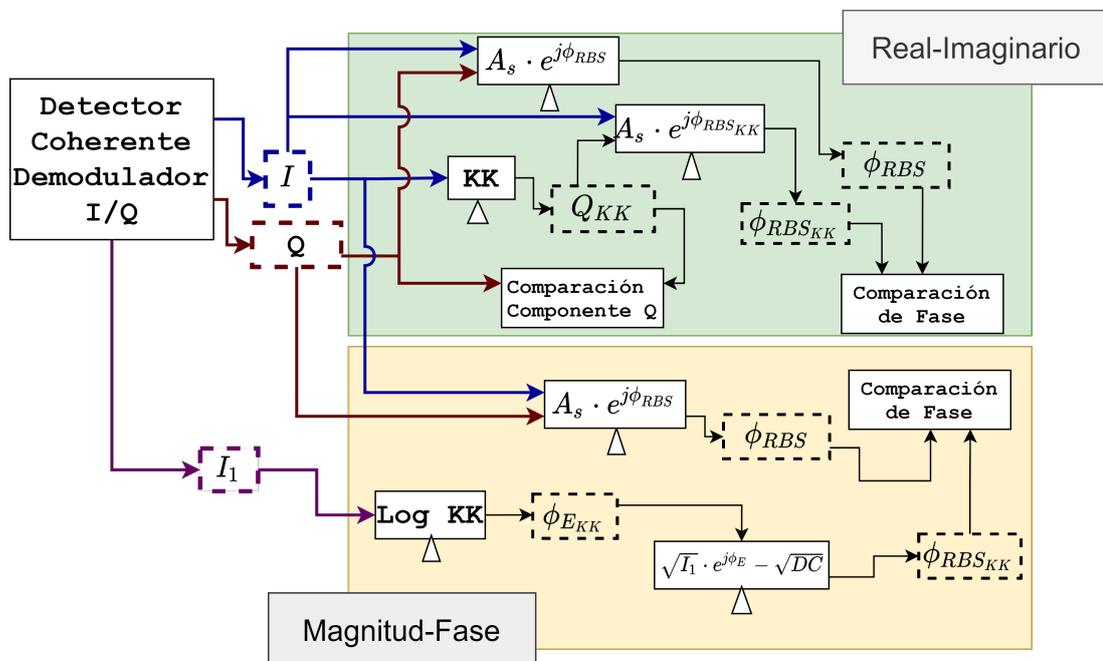


Figura 3.1: Metodología de Implementación del Detector Kramers-Kronig



En RI-KK, se utiliza la salida I del demodulador I/Q para el proceso de post-procesamiento. Ésta componente sólo posee un término en banda base, por lo que no es necesario realizar ningún tratamiento previo a los datos.

Con ayuda de las relaciones KK se recupera la componente Q denotada como Q_{KK} en la figura 3.1. De manera simultánea, la componente Q a la salida del demodulador se almacena y utiliza como señal de referencia para realizar una comparación sobre el nivel de error presente en la obtención de Q_{KK} .

Por otro lado, dado que la fase de la señal RBS contiene información relevante para la medición de perturbaciones, es imperativo evaluar cómo el error en la obtención de Q_{KK} afecta a la fase recuperada. Así, al utilizar las componentes de referencia I y Q , se obtiene una señal eléctrica de referencia, de la cual es posible conseguir la fase de referencia de la señal RBS que se desea recuperar. Ésta fase se compara con la fase recuperada través de la señal reconstruida a partir de las componentes I y Q_{KK} .

Para el método $I\Phi$ -KK, se utiliza la rama I_1 del proceso de detección y demodulación I/Q. La rama I_1 del detector se puede observar en la figura 2.17.

Los datos obtenidos a partir del fotodetector I_1 contienen la fase y amplitud de la señal RBS que se desea recuperar, esta señal se compone de términos en banda base y en frecuencia intermedia. La descripción en profundidad de esta señal se analizará en la sección 3.2.3.

A partir de señal I_1 se obtiene la fase de la señal RBS utilizando las relaciones KK en su forma logarítmica presentada en la ecuación 2.32 y recuperando la señal completa mediante el procedimiento de la ecuación 3.43.

3.1.1. Error de estimación

Para evaluar las condiciones de funcionamiento del detector KK es fundamental evaluar el error de estimación, el cual aporta un punto de comparación en el análisis entre la traza real recuperada (ya sea por simulación o medición) y la traza obtenida mediante las relaciones KK.

El error cuadrático medio o *Root Mean Square Error (RMSE)* es una medida comúnmente utilizada para evaluar el error existente entre dos conjuntos de datos.



Inicialmente, el RMSE se define como:

$$RMSE = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\hat{y}_i - y_i)^2} \quad (3.1)$$

donde y_i es el valor estimado en i y \hat{y}_i es el valor observado en i .

Para este proyecto se evaluarán los errores de las trazas Q del demodulador y la fase de la señal RBS (ϕ).

Por lo tanto, las ecuaciones 3.2 y 3.3 definen el RMSE para la traza Q y la traza de fase.

$$RMSE_Q = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Q_i - Q_{KK_i})^2} \quad (3.2)$$

$$RMSE_\phi = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (\phi_i - \phi_{KK_i})^2} \quad (3.3)$$

Sin embargo, el valor obtenido es un número que requiere de un punto de comparación o de referencia. Es por esto que se utiliza el valor *Root Mean Square (RMS)* de una señal discreta, que se define como:

$$RMS = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i^2} \quad (3.4)$$

donde a_i es el valor de la señal, con n valores discretos, en el punto i .

Entonces el error RMS relativo se define como la cantidad porcentual de error RMS contenido en el valor RMS de la señal prevista:

$$RMSE_{rel} = \frac{RMSE}{RMS_{ref}} \cdot 100\% \quad (3.5)$$

Y los términos RMS_{ref_Q} y RMS_{ref_ϕ} son los valores RMS de la traza de referencia Q y la fase de referencia, respectivamente. Por lo tanto, el valor de RMSE relativo en la fase está dado por:

$$RMSE_{rel_\phi} = \frac{RMSE_\phi}{RMS_{ref_\phi}} \cdot 100\% \quad (3.6)$$

Y la expresión para el error relativo RMSE de la traza Q será:

$$RMSE_{relQ} = \frac{RMSE_Q}{RMS_{refQ}} \cdot 100\% \quad (3.7)$$

Fase Diferencial

Inicialmente, se requiere utilizar la función arco tangente en cuatro cuadrantes para obtener la fase de la señal RBS, en MATLAB, es el resultado de la función *angle*. Esta función entrega valores comprendidos entre $[-\pi, \pi]$, sin embargo, las trazas obtenidas a partir de ella, no pueden ser comparadas directamente utilizando la ecuación 3.3, ya que estas trazas al estar limitadas entre $[-\pi, \pi]$ no incluyen apropiadamente los múltiplos de 2π que puedan existir en la fase real de la señal. Una traza de ejemplo se presenta en la figura 3.2, esta traza muestra la fase de una señal Rayleigh simulada a lo largo de una fibra de 1 [Km], la fase es obtenida a partir de un sensor DAS.

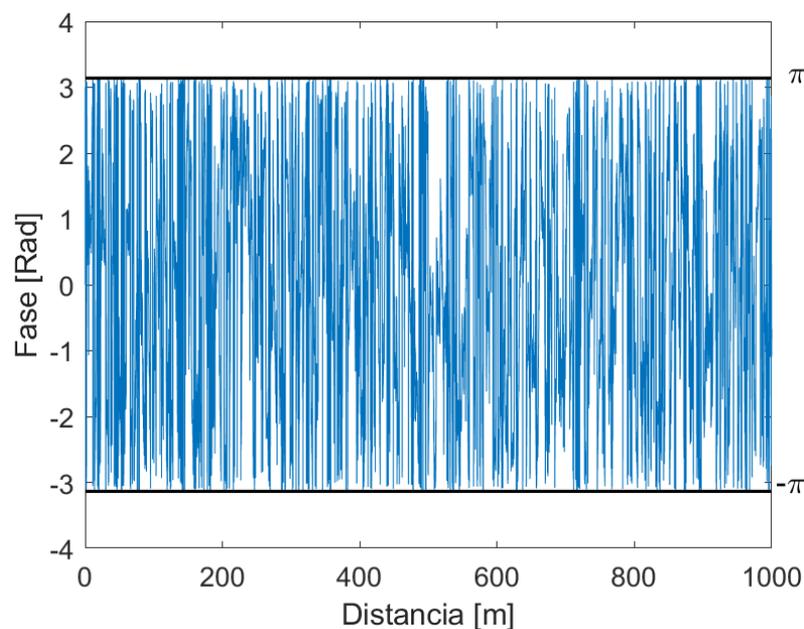


Figura 3.2: Fase obtenida a través del demodulador I/Q no desenrollada
 $f_s = 20 \text{ GSps}$, $f_{IF} = 5 \text{ GHz}$

Debido a lo anterior, se requiere desenrollar (*unwrap*) la fase obtenida a partir de la función arco tangente de la señal de campo eléctrico. De esta forma, se consigue una curva que no está limitada entre los valores $-\pi$ y π , sino más bien, se obtiene la fase “real” que contiene todos los

múltiplos de 2π que pueda contener.

Al observar las trazas de las fases desenrolladas en la figura 3.3, la traza de referencia (curva azul) tiene mucha similitud con traza recuperada a través de las relaciones KK (curva naranja), no obstante, pese a ser similares en forma, no son iguales ya que una de ellas se encuentra desplazada de la otra. Esto sucede dado que en el proceso de *unwrapping*, el algoritmo presenta un límite para el cual en el proceso se le adicionará 2π a la fase desenrollada final. Sin embargo, dado que las curvas de fase recuperadas son aproximaciones de la fase real, estas adiciones pueden no ocurrir en el mismo punto, lo que genera acumulaciones de estos saltos a lo largo de la traza.

Por otro lado, la figura 3.4 muestra la diferencia punto a punto entre la traza de referencia y la traza recuperada a través de las relaciones KK, donde se observan los saltos de $\approx 2\pi$ mencionados anteriormente.

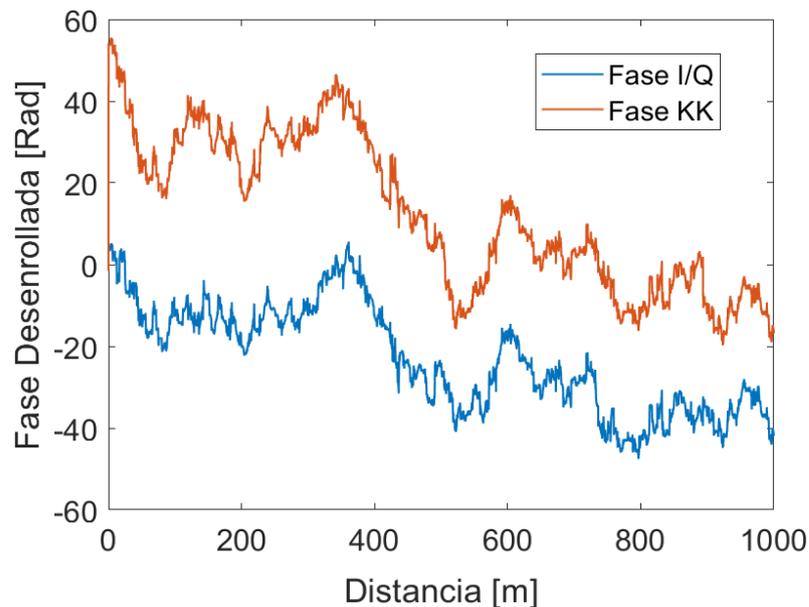


Figura 3.3: Fases desenrolladas obtenidas a través del demodulador I/Q (curva azul) y de las relaciones KK (curva naranja)
 $f_s = 20 \text{ GSps}$, $f_{IF} = 5 \text{ GHz}$

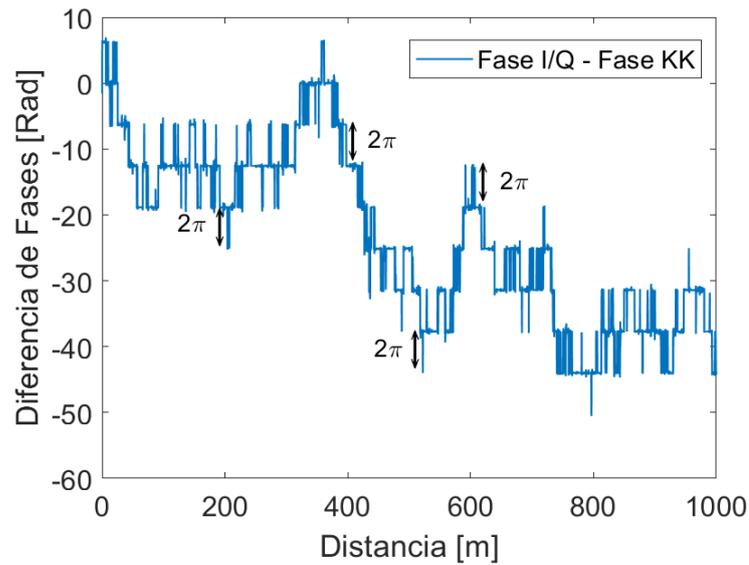


Figura 3.4: Diferencia entre fases las desenrolladas obtenidas a través del demodulador I/Q y de las relaciones KK

$$f_s = 20 \text{ GSps}, f_{IF} = 5 \text{ GHz}$$

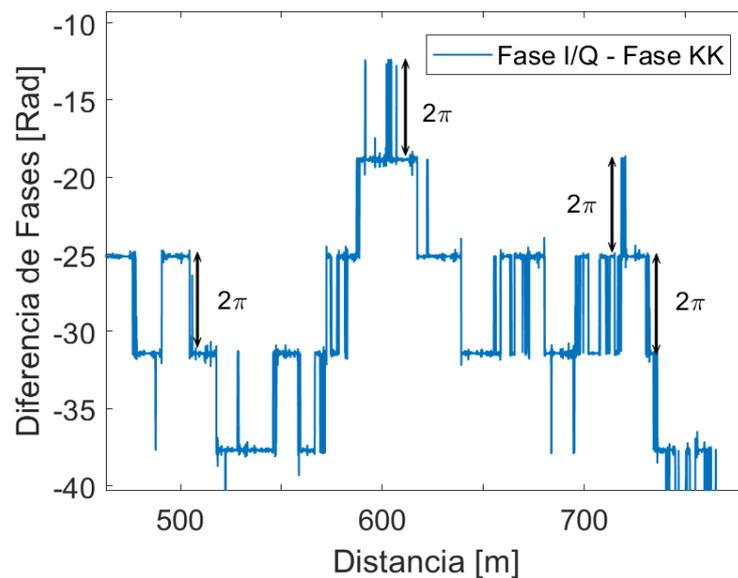


Figura 3.5: Acercamiento a diferencia entre las fases desenrolladas obtenidas a través del demodulador I/Q y de las relaciones KK

$$f_s = 20 \text{ GSps}, f_{IF} = 5 \text{ GHz}$$

Los saltos que se observan en la figura 3.4 provocan que el error relativo de la fase recuperada se comporte de manera aleatoria. Esta aleatoriedad incide en el desplazamiento que se genera entre las trazas. Por lo tanto, cuando se comparan las fases desenrolladas, el nivel de error relativo

no es una medida confiable, y por ende, se requiere utilizar un método para calcular la fase diferencial a lo largo de la fibra de sensado.

La fase diferencial se basa en el *gauge length* que se define como el largo de fibra de una unidad de sensado. En la mayoría de los esquemas DAS, la modulación cuantitativa se consigue mediante el diferencial de fase entre dos puntos. La distancia física de la fibra entre dos puntos se denomina *gauge length* [20].

La fase diferencial se calcula como la diferencia entre los dos puntos del *gauge length*, es decir, una ventana móvil en la cual se calcula la diferencia entre sus extremos hasta que limitar con el fin de la traza. La figura 3.6 muestra las trazas que se obtienen al utilizar la fase diferencial.

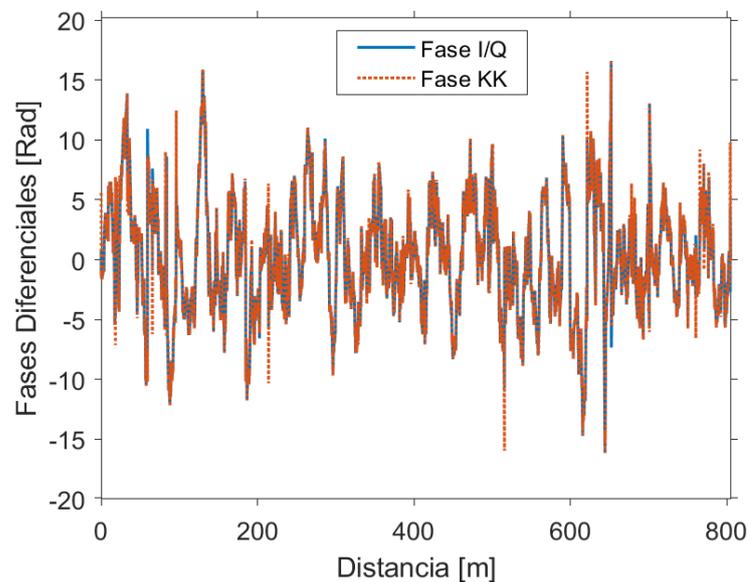


Figura 3.6: Fases diferenciales obtenidas a través del demodulador I/Q (curva azul) y de las relaciones KK (curva naranja)

$$f_s = 20 \text{ GSps}, f_{IF} = 5 \text{ GHz}$$

En la figura 3.7 se realiza un acercamiento a las curvas, donde se aprecia la similitud de las trazas obtenidas directamente desde la demodulación I/Q, y a través de aplicar el detector KK. Estas trazas contrastan con las fases desenrolladas en la figura 3.3 debido a que las curvas de fase diferencial no presentan un desplazamiento acumulativo de 2π , sino más bien, son diferencias longitudinales a lo largo de la fibra.

Por otro lado, para calcular el error de la fase diferencial, se obtiene la diferencia punto a punto entre la traza de fase diferencial de referencia y la traza de fase recuperada a través de

las relaciones KK. Tal diferencia se puede observar en la figura 3.8, en la cual los saltos de 2π persisten. Estos saltos no son de interés ya que son producto del proceso de *unwrapping*. Por lo tanto, se busca eliminar cada rango de datos que sean igual o mayor a 2π , en la figura 3.8, las líneas horizontales definen los límites de $\pm 2\pi$. De esta forma, el cálculo del error relativo $RMSE_{rel_\phi}$ no se ve afectado por dichos saltos.

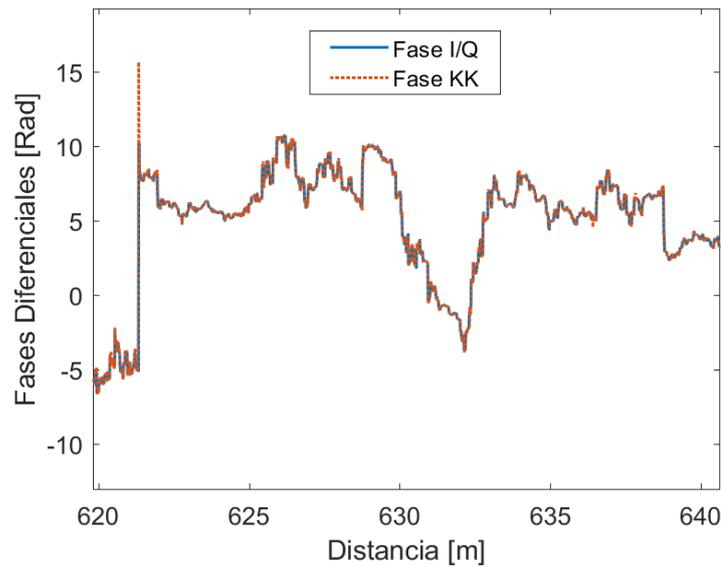


Figura 3.7: Acercamiento a fases diferenciales obtenidas a través del demodulador I/Q (curva azul) y de las relaciones KK (curva naranja)

$$f_s = 20 \text{ GSps}, f_{IF} = 5 \text{ GHz}$$

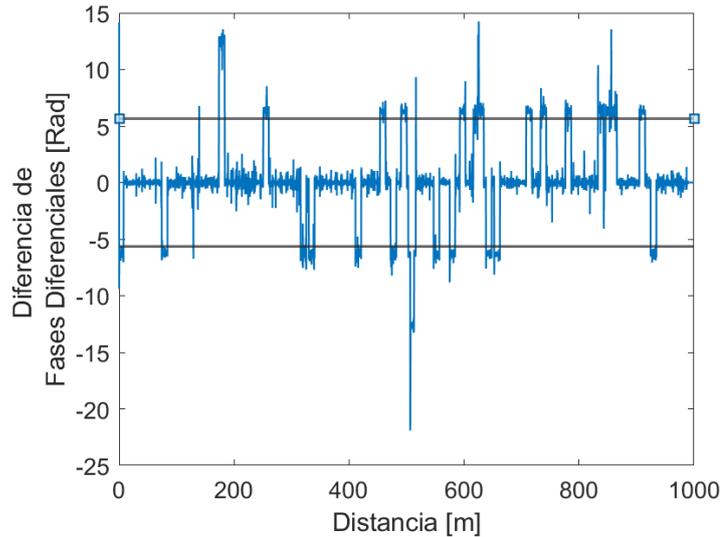


Figura 3.8: Diferencia Fases Diferenciales entre las fases obtenidas a través del demodulador I/Q y de las relaciones KK
 $f_s = 20 \text{ GSps}$, $f_{IF} = 5 \text{ GHz}$

En la figura 3.9 se muestra el resultado de eliminar todos los valores superiores al límite de 2π desde las trazas de fase diferencial. Es decir, para el cálculo del error relativo de fase se elimina el efecto aleatorio que generen los saltos antes mencionados resultando en la curva de la figura 3.9.

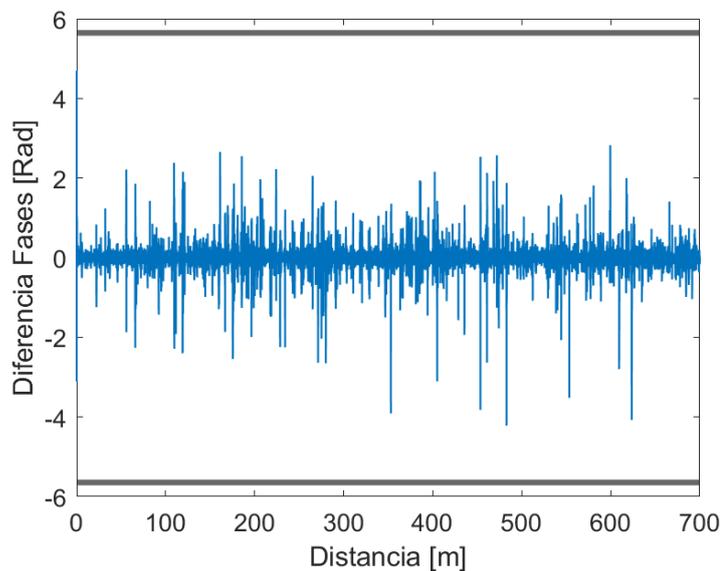


Figura 3.9: Diferencia de Fases Diferenciales al eliminar saltos de 2π . Fases obtenidas a través del demodulador I/Q y de las relaciones KK
 $f_s = 20 \text{ GSps}$, $f_{IF} = 5 \text{ GHz}$



Tras realizar este procedimiento, es posible obtener el error relativo utilizando la ecuación 3.3 comparando las fases diferenciales de la fase de referencia y la fase recuperada a través de las relaciones KK.

3.2. Implementación de un detector Kramers-Kronig

En el análisis del funcionamiento e implementación de un detector Kramers-Kronig, se ha optado por utilizar un algoritmo de simulación de la fibra óptica realizado en MATLAB, el cual permite obtener el campo eléctrico complejo de la señal de retro-dispersión de Rayleigh en una fibra óptica. Este simulador presenta diversos parámetros que logran representar virtualmente una fibra óptica, tales como, el largo de la fibra, el índice de refracción, el coeficiente de atenuación, la cantidad de *scatters* a simular y sus amplitudes máximas. Además incluye los parámetros del láser como es la longitud de onda (*wavelength*) y la duración del pulso de prueba. Por otro lado, los parámetros como el desplazamiento en frecuencia para una detección heterodina y la amplitud del oscilador local, también son modificables. De esta forma, los parámetros utilizados de manera transversal en este trabajo son: una fibra óptica estándar de largo 1000 m con un índice de refracción de 1.5 sin atenuación, una duración del pulso de sondeo de 50 ns, con una longitud de onda del láser de 1550 nm sin ruido de fase en el láser.

En el capítulo 2 se entregaron condiciones de funcionamiento para los dos tipos o métodos de detección que utilizan las relaciones KK: Real-Imaginario KK y Magnitud-Fase KK. En este capítulo se definirán en profundidad las señales utilizadas y el procedimiento requerido para la recuperación de fase en ambos métodos, además de complementar y corregir detalles de implementación en la investigación realizada en el estado del arte (en especial en la referencia [12]).

Los dos métodos son analizados mediante simulaciones, estas simulaciones pretenden evaluar el impacto que tiene el cambio de parámetros sobre la fase óptica recuperada. Los parámetros elegidos son la tasa de muestreo, la frecuencia intermedia y la amplitud del oscilador local. Estos parámetros son seleccionados por su incidencia directa sobre la demodulación de una señal como la tasa de muestreo [27] y la frecuencia intermedia [12]. Para la comparación de fase, se calcula el error de recuperación de fase mediante la ecuación 3.6, lo cual permite un punto de



comparación equiparable entre ambos métodos. Por otro lado, en el método RI-KK se incluye un análisis extra y previo a la comparación de fase, el cual consiste en calcular el error en la recuperación de la traza Q (Q_{KK}) a través de la ecuación 3.7.

En la figura 2.17 se presentó el esquema de demodulación I/Q a utilizar. Este esquema se encuentra descrito por las ecuaciones 2.21 a 2.30, las cuales en conjunto con las ecuaciones 3.8 a 3.12 nos permiten recuperar la señal RBS deseada.

Primeramente, se define como E la señal de campo eléctrico previa a la detección en el fotodetector I_1 . Esta señal está dada por la suma entre la señal RBS (ecuación 2.4) y el oscilador local (ecuación 2.5). Utilizando las definiciones de ambas señales, el campo E queda definido como:

$$E = E_{RBS}(t) + LO(t) \quad (3.8)$$

$$= A_s(t) \exp[j2\pi f_0 t + j\varphi_1(t)] + A_{LO} \exp[j2\pi(f_0 + \Delta f)t + j\varphi_2(t)] \quad (3.9)$$

Factorizando por $\exp[j2\pi f_0 t]$:

$$E = \exp[j2\pi f_0 t] \{A_s(t) \exp[j\varphi_1(t)] + A_{LO} \exp[j2\pi\Delta f t + j\varphi_2(t)]\} \quad (3.10)$$

De esta forma queda definida la variable E_{mix} a partir de la ecuación 3.10 como:

$$E_{mix}(t) = A_s(t) \exp[j\varphi_1(t)] + A_{LO} \exp[j2\pi\Delta f t + j\varphi_2(t)] \quad (3.11)$$

En base a la ecuación anterior, se define E_{beat} :

$$E_{beat_{RI-KK}}(t) = A_s(t) \exp[j\varphi_1(t)] \quad (3.12)$$

La ecuación 3.12 contiene la amplitud A_s de la señal RBS y su fase $\varphi_1(t)$, ambas variantes en el tiempo. Estos términos permiten conocer la información sobre la perturbación externa, que mide un sensor ϕ -OTDR.



3.2.1. Corrección de ecuaciones utilizadas en referencia

Es importante aclarar, con la intención de evitar futuras confusiones, lo siguiente:

En el trabajo presentado por Jiang *et al.* en [12], se define inicialmente la señal E_{beat} como:

$$E_{beat} = A_s(t) \exp[j2\pi\Delta ft + \varphi(t)] \quad (3.13)$$

La ecuación 3.13 está correctamente definida, sin embargo, en la ecuación (8) de dicho artículo se redefine E_{beat} como una aproximación en base a las componentes en frecuencia intermedia (o según ellos denominan AC). Redefiniendo E_{beat} :

$$E_{beat} = I_{AC}(t) + jQ_{AC}(t) \quad (3.14)$$

Esta definición está errada, ya que la ecuación 3.14 al ser desarrollada resulta:

$$E_{beat} = 2A_{LO}A_s(t) \exp[j(2\pi\Delta ft + \Delta\varphi(t))] \quad (3.15)$$

La ecuación 3.15 difiere de la definición original (ecuación 3.13) en una amplificación dependiente del oscilador local de $2A_{LO}$.

La redefinición de E_{beat} vuelve a repetirse en la ecuación 3.16 (ecuación (15) del mismo artículo):

$$E_{beat} = \sqrt{I(t)} \exp j\phi_E(t) - \sqrt{DC} \quad (3.16)$$

Esta ecuación es utilizada más adelante al definir el método Intesidad-Fase (ecuación 3.42).

Finalmente, es importante recalcar que las tres ecuaciones presentadas en esta sección son distintas, siendo las ecuaciones 3.15 y 3.16 aproximaciones a la ecuación 3.13.



3.2.2. Kramers Kronig Real-Imaginario

La implementación del método Real-Imaginario (RI-KK) en MATLAB solo requiere de la transformada de Hilbert en base a la ecuación 2.33.

$$Q_{KK}(t) = -\frac{1}{\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{I(\tau)}{t' - \tau} d\tau,$$

El parámetro requerido para esta función es la componente In-Phase I_{IF} , señal recibida a la salida del híbrido óptico y definida por la ecuación 2.29.

En la metodología presentada en la figura 3.1 la exactitud en la recuperación de la componente Q se obtiene comprando la componente Q obtenida a través de las relaciones KK (Q_{KK}) y aquella obtenida directamente desde la detección I/Q (Q_{IF}).

Es relevante destacar que, pese a evaluar el error entre Q_{IF} y Q_{KK} , la intención final es la recuperación de la señal E_{beat} para analizar cuantitativa y cualitativamente las perturbaciones externas que se deseen medir. Por lo tanto, es importante recuperar la fase de la señal RBS.

La recuperación de E_{beat} proviene de las componentes I_{IF} y Q_{KK} utilizando directamente la ecuación 3.17:

$$E_{RI_{KK}} = I_{IF} + jQ_{KK} \quad (3.17)$$

El uso de Q_{KK} proviene de la recuperación de Q_{IF} a través de las relaciones KK, por lo tanto, Q_{KK} puede definirse a partir de la ecuación 2.30:

$$Q_{IF}(t) = 2A_{LO}A_s(t) \cdot \sin[2\pi\Delta ft + \Delta\phi(t)],$$

y la ecuación definida en 2.29:

$$I_{IF}(t) = 2A_{LO}A_s(t) \cdot \cos[2\pi\Delta ft + \Delta\phi(t)].$$

Así, utilizando las ecuaciones 2.29 y 2.30, nos permiten desarrollar la ecuación 3.17 de la si-



guiente forma:

$$\begin{aligned} E_{RI_{KK}} &= 2A_{LO}A_s(t) \cos [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi(t)] + j2A_{LO}A_s(t) \sin [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi(t)] \\ &= 2A_{LO}A_s(t) (\cos [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi(t)] + j \sin [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi(t)]) \\ &= 2A_{LO}A_s(t) \exp [j(2\pi\Delta ft + \Delta\varphi(t))] \end{aligned} \quad (3.18)$$

La ecuación 3.18 contiene los términos necesarios para describir la perturbación externa a través del cambio de fase $\Delta\varphi(t)$ y la amplitud de la señal RBS contenida igualmente en la ecuación nombrada.

Así, es posible obtener el cambio de fase de la señal RBS mediante:

$$\Delta\varphi(t) = \arctan \{ E_{RI_{KK}} \cdot \exp [-j2\pi\Delta ft] \} \quad (3.19)$$

donde el término $\exp [-j2\pi\Delta ft]$ elimina los cambios de fase asociados a la frecuencia intermedia, dejando únicamente la fase $\Delta\varphi(t)$.

Al reemplazar 3.18 en 3.19 resulta:

$$\begin{aligned} \Delta\varphi(t) &= \arctan \{ 2A_{LO}A_s(t) \exp [j(2\pi\Delta ft + \Delta\varphi(t))] \cdot \exp [-j2\pi\Delta ft] \} \\ &= \arctan \{ 2A_{LO}A_s(t) \exp [j(\Delta\varphi(t))] \} \end{aligned} \quad (3.20)$$

Es importante destacar que la función *angle*(\cdot) del software MATLAB, se utiliza en equivalencia al arco tangente de la ecuación 3.20. La función *angle* realiza la tangente inversa en cuatro cuadrantes, obteniéndose resultados entre $[-\pi, \pi]$.

Resultados del método RI-KK

Para observar cambios en el nivel de recuperación de la señal se realizan simulaciones basadas en:

- Variación de la frecuencia intermedia: Manteniendo fija una tasa de muestreo y una amplitud del oscilador local, se analiza el efecto de la variación de frecuencia intermedia en la recuperación de las señales respectivas. Se utilizan los errores relativos $RMSE_{rel_Q}$ y



$RMSE_{rel\Phi}$, según corresponda, para obtener el error de recuperación de la componente Q o de la fase de la señal RBS, respectivamente.

- Variación de la tasa de muestreo: Manteniendo fijas la frecuencia intermedia y la amplitud del oscilador local, se obtienen las curvas de error relativo v/s tasa de muestreo, con el interés de analizar el nivel de error $RMSE_{relQ}$ y $RMSE_{rel\Phi}$.
- Variación de la amplitud del oscilador local: Utilizando una tasa de muestreo y una frecuencia intermedia fijas, se realizan simulaciones almacenando las curvas de error relativo $RMSE_{relQ}$ y $RMSE_{rel\Phi}$ que describan el nivel de error en función de la variación la amplitud del oscilador local normalizado.

Las variaciones de las distintas variables son utilizadas en la comparación de las dos variable importantes en este método, la recuperación de la componente Q y la recuperación de la fase de la señal RBS. Éstas se presentan a continuación.

Variación de la frecuencia intermedia

Inicialmente se utiliza una tasa de muestreo fija mientras se hace variar la frecuencia intermedia entre cada simulación. Esta frecuencia intermedia está teóricamente limitada en su extremo superior por el criterio de Nyquist, entonces, se debe tener en cuenta que la frecuencia intermedia o *Intermediate Frequency* (f_{IF}) debe ser menor a la mitad de la frecuencia de muestreo f_s . Por otro lado, en el límite inferior, teóricamente una frecuencia intermedia debe ser igual o mayor al ancho de banda de la señal en banda base, sin embargo, para evaluar el comportamiento del error, se comienza a analizar a partir de una frecuencia intermedia igual a cero.

Es importante añadir que, debido al comportamiento estocástico de las simulaciones originado por la aleatoriedad de los *scatters*, se debe realizar un gran número de simulaciones por escenario. Para este trabajo, se utiliza un promedio de 50 repeticiones para poder calcular cada punto de error obtenido. Es decir, el valor del error relativo RMS obtenido en cada simulación independiente será distinto pese a tener una misma tasa de muestreo, frecuencia intermedia y amplitud del oscilador local. Para obtener valores de error estadísticamente confiables para cada escenario los errores son promediados entre sí.

En este sentido, en las figuras 3.10-3.12 en la columna izquierda 3.10a-3.12a se pueden observar las curvas de la señal de referencia Q_{IF} y la señal Q_{KK} con frecuencias intermedias de un 1% de la frecuencia de muestreo. Estas figuras muestran cómo las curvas de recuperación Q_{KK} en color naranja tienen similitudes de manera general respecto de la señal de referencia Q_{IF} en color azul, sin embargo, en diversos puntos existe una marcada diferencia donde el error en recuperación es visible. Por otro lado, al utilizar una frecuencia intermedia igual a $\frac{1}{4}$ de la frecuencia de muestreo se obtienen las figuras de la columna derecha 3.10b-3.12b. En estas figuras se puede observar un diferencia clara respecto de las figuras de la columna izquierda, ya que al momento de recuperar las señales, la precisión es mucho mayor y la curva de la señal Q_{KK} se asemeja aun más a la señal de referencia.

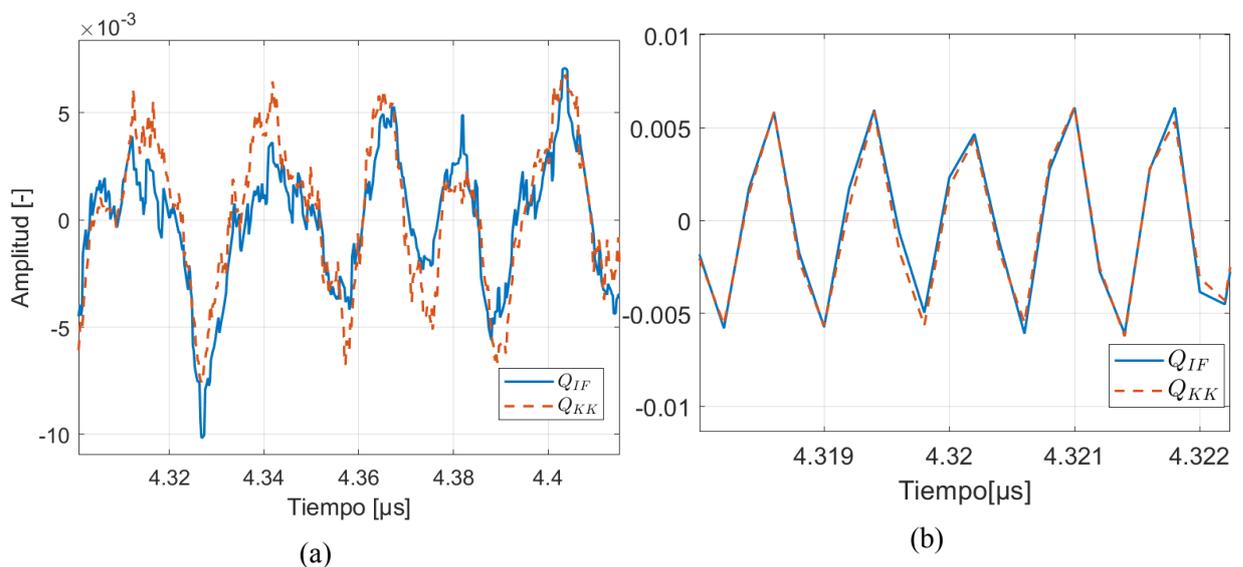


Figura 3.10: Componentes en cuadratura (Q) obtenidas a 5 GSps, usando una frecuencia intermedia igual a (a) 50 MHz y (b) 1,25 GHz

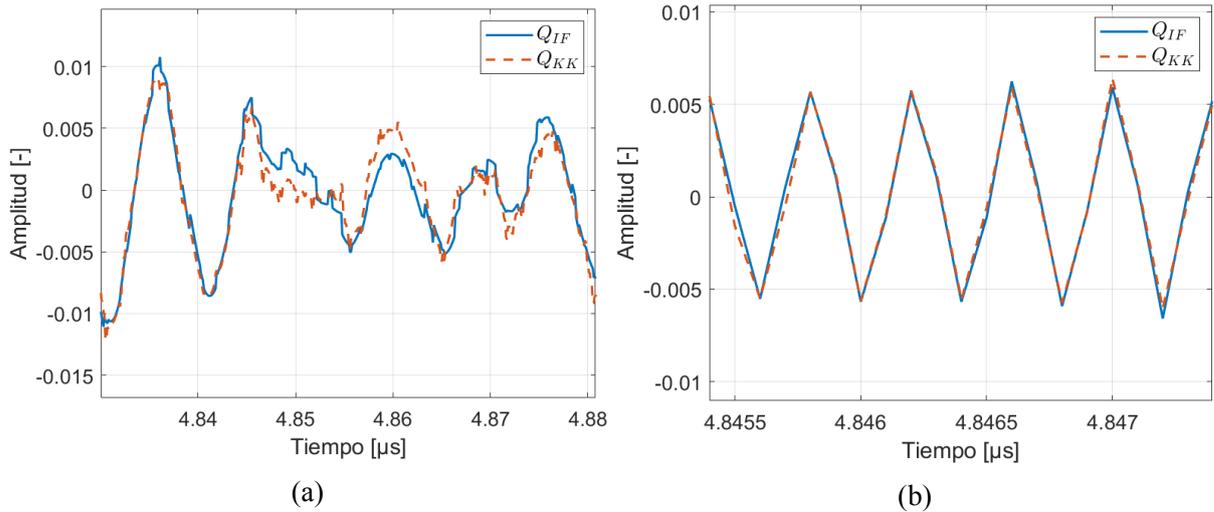


Figura 3.11: Componentes en cuadratura (Q) obtenidas a 10 GSps, usando una frecuencia intermedia igual a (a) 100 MHz y (b) 2,5 GHz

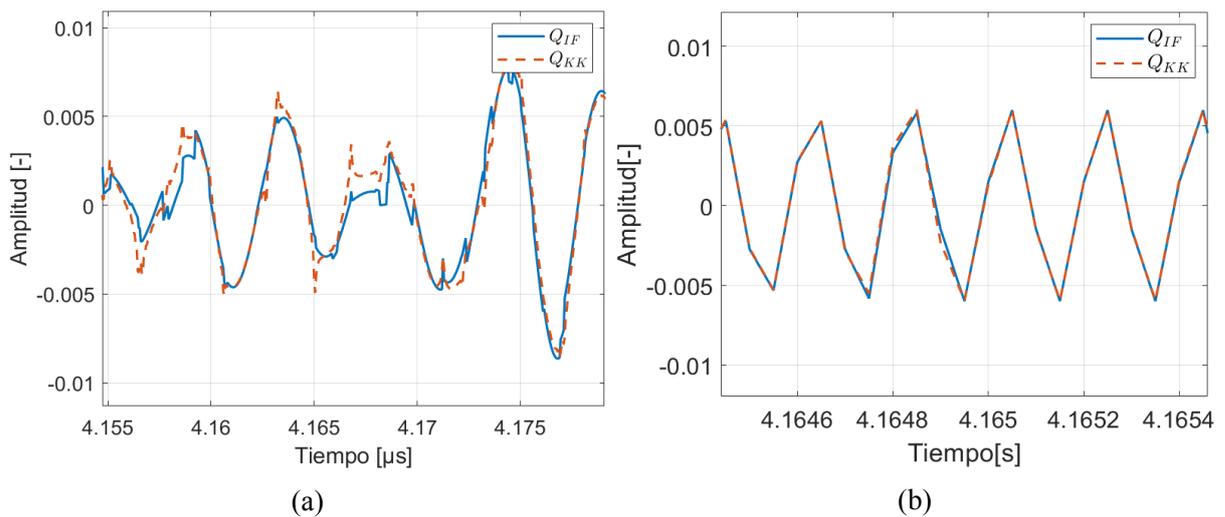


Figura 3.12: Componentes en cuadratura (Q) obtenidas a 20 GSps, usando una frecuencia intermedia igual a (a) 200 MHz y (b) 5 GHz

En la figura 3.13 se observan las curvas de error relativo RMS de la componente Q ($RMSE_{relQ}$), resultantes para un promedio de 50 simulaciones con frecuencias de muestreo en 5 GSps, 10 GSps y 20 GSps, utilizando los siguientes rangos de frecuencias intermedias:

- $f_s = 5 \text{ Gpsps} \rightarrow f_{IF} = [0, 2.5] \text{ GHz}$
- $f_s = 10 \text{ Gpsps} \rightarrow f_{IF} = [0, 5] \text{ GHz}$
- $f_s = 20 \text{ Gpsps} \rightarrow f_{IF} = [0, 10] \text{ GHz}$



Se observa que, indistintamente de la curva, elevar la tasa de muestreo induce un error significativamente menor para los puntos intermedios de cada curva. Por otro lado, el error relativo es bastante grande cuando la frecuencia intermedia (f_{IF}) es cercana a 0, y va disminuyendo a medida que f_{IF} aumenta. Esta disminución del error RMS relativo se detiene al centro de cada curva, para posteriormente volver a aumentar a medida que aumenta f_{IF} . Cuando f_{IF} se acerca al límite superior determinado por la frecuencia de Nyquist (f_N), el error vuelve a tomar valores considerablemente grandes. Es destacable que el RMSE relativo tiene valor mínimo al centro de cada curva, y por lo tanto se puede concluir que el error se minimiza usando una frecuencia intermedia que sea $\frac{1}{4}$ de la frecuencia de muestreo.

Para el caso de comparación de la fase, en la figura 3.14 se observan las curvas de $RMSE_{rel\Phi}$ para las mismas condiciones. Estas curvas son originadas a partir de un promedio de 50 simulaciones con los mismos parámetros utilizados en la figura 3.13.

El comportamiento de las curvas es similar al caso del error RMS de la componente Q, observando que el nivel de error disminuye a medida que aumenta la frecuencia intermedia, llegando a un valor mínimo al centro de cada curva, y volviéndose a incrementar hasta llegar al límite impuesto por el criterio de Nyquist.

Nótese que al disminuir la frecuencia intermedia y utilizar un valor cercano a cero, el error RMS mínimo aumenta, al igual que el error en la componente Q (figura 3.13). Este comportamiento es consistente con que el valor de la frecuencia intermedia debe ser lo suficientemente grande para que cumpla con la condición expuesta en la sección 2.3.4.

Por lo tanto, a partir de las figuras anteriores se puede afirmar que el comportamiento del error está estrechamente relacionado con el valor de frecuencia intermedia (f_{IF}) considerando una tasa de muestreo fija (f_s).

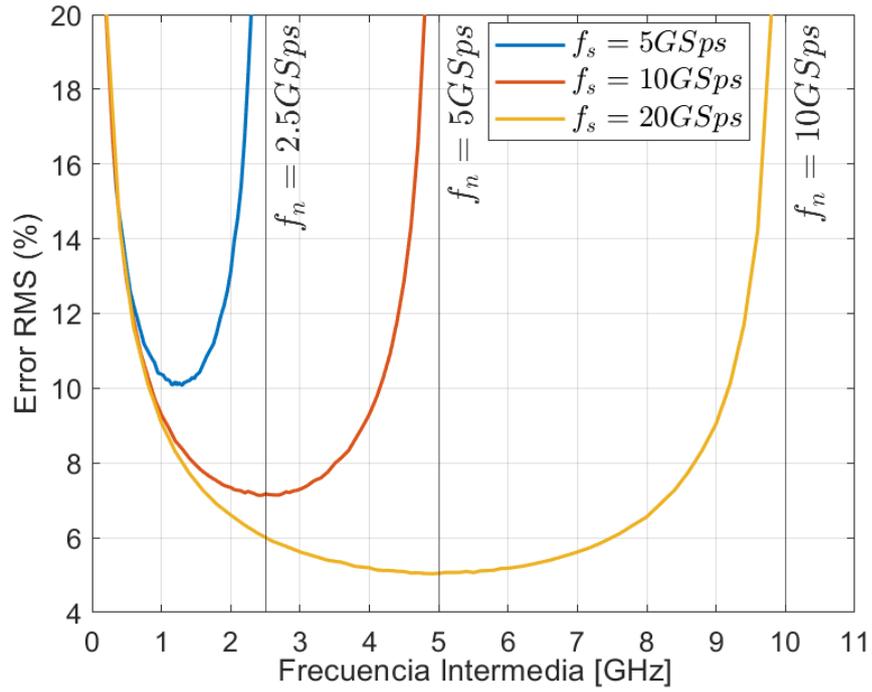


Figura 3.13: $RMSE_{rel_Q}$ v/s Frecuencia Intermedia para método RI-KK

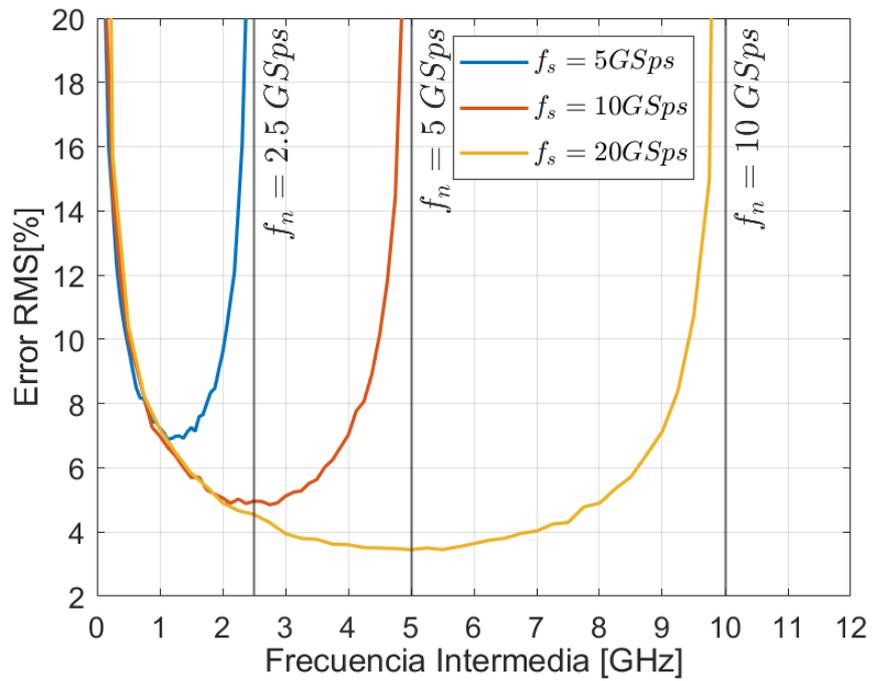


Figura 3.14: $RMSE_{rel_\Phi}$ v/s Frecuencia Intermedia para método RI-KK

Así, en base a las figuras 3.13 -3.14 puede considerarse como valor óptimo de frecuencia



intermedia (f_{IF}^{opt}) la siguiente relación:

$$f_{IF}^{opt} = \frac{f_N}{2} = \frac{f_s}{4} \quad (3.21)$$

donde $f_n = \frac{f_s}{2}$ es la frecuencia de Nyquist.

Variación de la tasa de muestreo

En el análisis anterior, se observó el efecto provocado por la elección de una frecuencia intermedia considerando distintas tasas de muestreo fijas. En esta subsección se obtiene el error RMS relativo a partir del uso de distintas frecuencias intermedias fijas, mientras se hace variar la frecuencia de muestreo.

Se observa el comportamiento del error relativo para cuatro curvas con las siguientes frecuencias intermedias y rangos de tasas de muestreo:

- $f_{IF} = 100 \text{ MHz} \rightarrow f_s = [0.2, 2] \text{ GSps}$
- $f_{IF} = 500 \text{ MHz} \rightarrow f_s = [1, 5] \text{ GSps}$
- $f_{IF} = 1 \text{ GHz} \rightarrow f_s = [2, 10] \text{ GSps}$
- $f_{IF} = 2.5 \text{ GHz} \rightarrow f_s = [5, 20] \text{ GSps}$

El valor inicial de cada rango de frecuencias de muestreo está definido por el criterio de Nyquist. Es decir, $f_s > 2f_{IF}$, sin embargo, se incluye igualmente el valor límite $f_s = 2f_{IF}$ como punto inicial de cada curva.

En la figura 3.15 se presentan las curvas de error RMS relativo en la recuperación de la componente Q. Las curvas fueron obtenidas mediante la variación de la frecuencia de muestreo, donde se puede observar que, independiente de la curva, el error relativo disminuye significativamente en los valores iniciales cercanos a la frecuencia de Nyquist. Sin embargo, a partir de una frecuencia de muestreo cuatro veces mayor al valor inicial, aproximadamente, la tasa de disminución del error RMS relativo comienza a decaer, estableciéndose en torno a cierto valor distinto para cada curva.

El error relativo al cual tienden las curvas depende de la frecuencia intermedia, es decir, el porcentaje de error no mejorará significativamente al aumentar la frecuencia de muestreo por

sobre cuatro veces la frecuencia intermedia. Por otro lado, la disminución del error dado el aumento de la frecuencia intermedia es consistente con los resultados presentados en la subsección anterior.

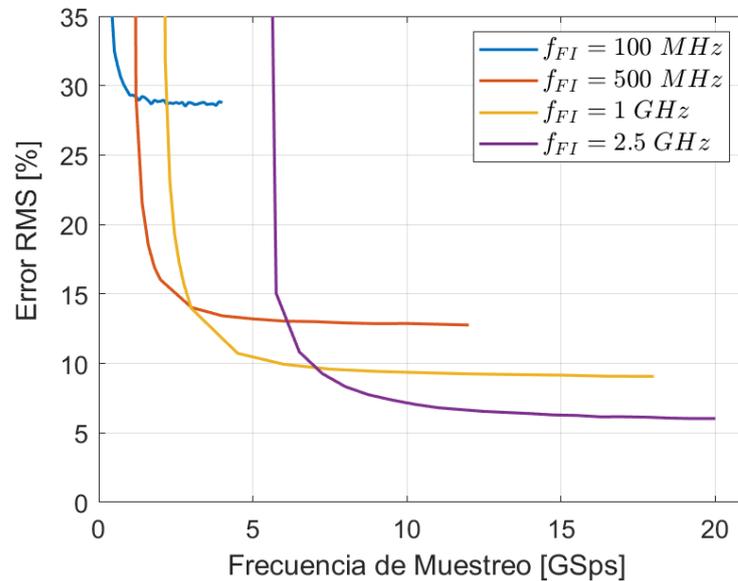


Figura 3.15: $RMSE_{relQ}$ v/s Frecuencia de Muestreo para método RI-KK

Para la comparación de fase, el contexto de simulación es el mismo. Se utilizan los mismos límites y rangos de frecuencia expuestos anteriormente.

El comportamiento del error es similar en la comparación del error de la componente Q, sin embargo, la diferencia principal es el nivel de error al que tienden las curvas finalmente. En la comparación de fase el error RMS es menor respecto del error en la comparación de la componente Q. Esta diferencia entre el nivel de error de la componente Q y la fase puede explicarse por el proceso de *unwrapping* y fase diferencial, ya que dicho algoritmo puede disminuir el error y el proceso de eliminación de saltos de 2π también puede influir.

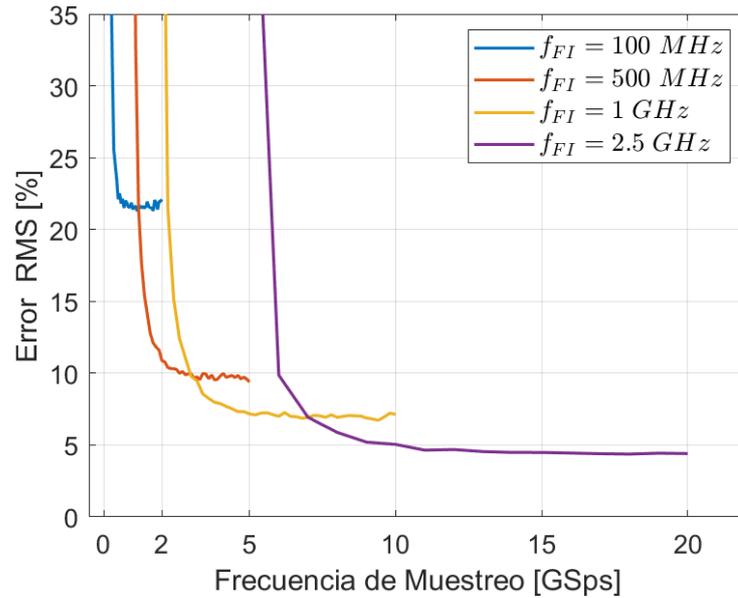


Figura 3.16: $RMSE_{rel\phi}$ v/s Frecuencia de Muestreo para método RI-KK

Variación de la Amplitud del Oscilador Local

Con el objeto de verificar el comportamiento del error RMS relativo como función de la amplitud del oscilador local normalizada, se realizan simulaciones para cinco tasas de muestreo distintas, donde la frecuencia intermedia se ajusta a $\frac{1}{4}$ del valor de la tasa de muestreo. Las frecuencias de muestreo utilizadas son: 500 MSps, 1 GSps, 5 GSps, 10 Gps y 20 GSps.

Por otro lado, la amplitud del oscilador local es normalizada en base al valor promedio RMS de la amplitud del campo eléctrico previo al fotodetector, para el cual se utiliza un promedio de 2750 de valores RMS. El proceso de normalización de la amplitud del oscilador local tiene la intención de identificar cuántas veces más grande debe ser la amplitud del oscilador local respecto del RMS de la señal RBS óptica.

La figura 3.17 muestra el comportamiento del error $RMSE_{rel\phi}$ al recuperar la señal Q con el detector RI-KK. Al igual que en las simulaciones previas se realiza un promedio de 50 simulaciones por cada punto existente en cada curva.

Se puede apreciar que independiente de la tasa de muestreo y amplitud del oscilador local, el error RMS relativo, se mantiene en torno a un valor distinto para cada curva. Sólo se observan pequeñas variaciones aleatorias, las cuales son más grandes a frecuencias de muestreo más bajas, como es el caso de la curva obtenida a una tasa de 500 MSps respecto de la curva a 20 GSps. Estos

peaks de error pueden deberse a que al utilizar una frecuencia de muestreo menor la variabilidad es mayor, y por lo tanto, se requiere de una mayor cantidad de simulaciones a promediar, para disminuir dichos *peaks*.

Finalmente, se repite el comportamiento del error en función de la tasa de muestreo, donde el error disminuye drásticamente desde aproximadamente 23% para 500 MSps hasta alrededor de un 4% para 20 GSps.

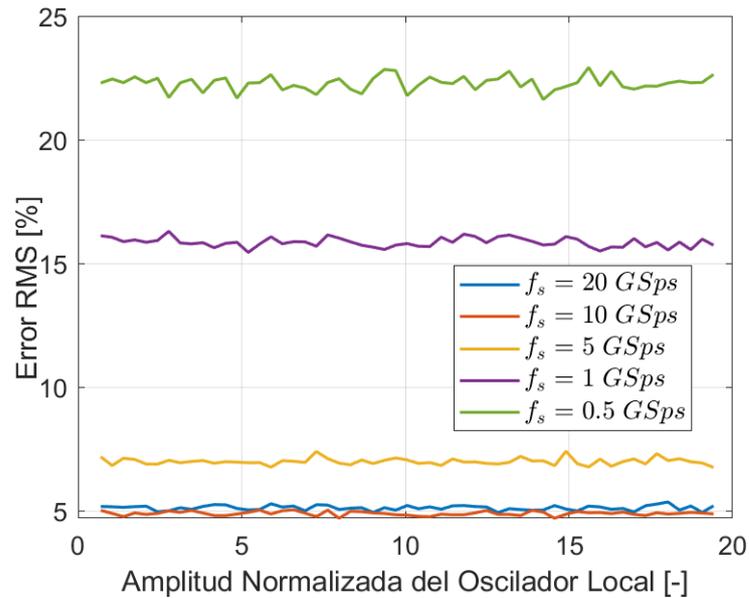


Figura 3.17: $RMSE_{rel\phi}$ v/s Amplitud del Oscilador local normalizada para método RI-KK

3.2.3. Kramers Kronig Intensidad-Fase

Para la implementación del método Intensidad-Fase (IΦ-KK) primero se deben clarificar las ecuaciones que nacen desde un demodulador I/Q. El interés de la sección presente es recuperar la fase de la señal E_{beat} a través de la intensidad del campo eléctrico del foto-detector I_1 . A diferencia del caso anterior, en este esquema se requieren las componentes en banda base y frecuencia intermedia de la señal eléctrica, para la recuperación de fase mediante las relaciones KK.

Reescribiendo la señal E_{mix} (ecuación 3.11) en su forma exponencial, se tiene:

$$E_{mix} = A_{E_{mix}} \exp[j\phi_{E_{mix}} t] \quad (3.22)$$



Por otro lado, como indica la ecuación 3.8, la intensidad eléctrica de la luz mezclada en el fotodetector se puede obtener a partir de del campo eléctrico E :

$$E = E_{RBS}(t) + LO(t)$$

$$E = A_s(t) \exp [j2\pi f_0 t + j\varphi_1(t)] + A_{LO} \exp [j2\pi(f_0 + \Delta f)t + j\varphi_2(t)]$$

donde la magnitud de la señal E se calcula sustituyendo sus términos de la siguiente forma:

$$E = a \exp [jb] + c \exp [jd] \quad (3.23)$$

Donde cada termino sustituido es:

$$\begin{aligned} a &= A_s(t) \\ b &= 2\pi f_0 t + \varphi_1(t) \\ c &= A_{LO} \\ d &= 2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2(t) \end{aligned} \quad (3.24)$$

Donde $|E|$ resulta:

$$|E| = \sqrt{\operatorname{Re}\{E\}^2 + \operatorname{Im}\{E\}^2} \quad (3.25)$$

Obteniendo la parte real e imaginaria de E a partir de la ecuación 3.23, se tiene:

$$\begin{aligned} E &= a \cos [b] + ja \sin [b] + c \cos [d] + jc \sin [d] \\ E &= a \cos [b] + c \cos [d] + ja \sin [b] + jc \sin [d] \\ \implies \operatorname{Re}\{E\} &= a \cos [b] + c \cos [d] \end{aligned} \quad (3.26)$$

$$\implies \operatorname{Im}\{E\} = a \sin [b] + c \sin [d] \quad (3.27)$$



Remplazando 3.26 y 3.27 en 3.25, se obtiene:

$$|E| = \sqrt{(a \cos [b] + c \cos [d])^2 + (a \sin [b] + c \sin [d])^2} \quad (3.28)$$

quitando la raíz al elevar al cuadrado ambos lados de la ecuación y expandiendo los términos al cuadrado, se tiene:

$$\begin{aligned} |E|^2 &= (a \cos [b] + c \cos [d])^2 + (a \sin [b] + c \sin [d])^2 \\ &= a^2 \cos^2 [b] + 2ac \cos [b] \cos [d] + c^2 \cos^2 [d] \\ &\quad + a^2 \sin^2 [b] + 2ac \sin [b] \sin [d] + c^2 \sin^2 [d] \end{aligned} \quad (3.29)$$

Agrupando los términos semejantes de la ecuación 3.29, se tiene:

$$\begin{aligned} |E|^2 &= a^2(\cos^2 [b] + \sin^2 [b]) + c^2(\cos^2 [d] + \sin^2 [d]) \\ &\quad + 2ac(\cos [b] \cos [d] + \sin [b] \sin [d]) \end{aligned} \quad (3.30)$$

Utilizando las siguientes identidades trigonométricas, se obtiene:

$$\begin{aligned} \cos^2 [x] + \sin^2 [y] &= 1 \\ \cos [x] \cos [y] &= \frac{\cos [x - y]}{2} + \frac{\cos [x + y]}{2} \\ \sin [x] \sin [y] &= \frac{\cos [x - y]}{2} - \frac{\cos [x + y]}{2} \end{aligned}$$

Se obtiene al reemplazar en 3.30:

$$\begin{aligned} |E|^2 &= a^2 + c^2 + 2ac \left(\frac{\cos [b - d]}{2} + \frac{\cos [b + d]}{2} + \frac{\cos [b - d]}{2} - \frac{\cos [b + d]}{2} \right) \\ &= a^2 + c^2 + 2ac \left(\frac{2 \cos [b - d]}{2} \right) \\ &= a^2 + c^2 + 2ac \cdot \cos [b - d] \end{aligned} \quad (3.31)$$



Volviendo a los términos originales a partir de 3.24 y 3.31 se obtiene:

$$\begin{aligned} |E|^2 &= A_s^2(t) + A_{LO}^2 + 2A_{LO}A_s(t) \cos [2\pi f_0 t + \varphi_1(t) - 2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2(t)] \\ &= A_s^2(t) + A_{LO}^2 + 2A_{LO}A_s(t) \cos [\varphi_1(t) - 2\pi\Delta f t + \varphi_2(t)] \\ &= A_s^2(t) + A_{LO}^2 + 2A_{LO}A_s(t) \cos [-\{2\pi\Delta f t + \varphi_2(t) - \varphi_1(t)\}] \end{aligned} \quad (3.32)$$

Dado que la función *coseno* es par y $\Delta\varphi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$, la ecuación 3.32 resulta:

$$|E|^2 = A_s^2(t) + A_{LO}^2 + 2A_{LO}A_s(t) \cos [\{2\pi\Delta f t + \Delta\varphi(t)\}] \quad (3.33)$$

La ecuación 3.33 cumple que $I_1 = |E|^2$. Por otro lado, el cuadrado de la magnitud de E_{mix} es:

$$|E_{mix}|^2(t) = |A_s(t) \exp[j\varphi_1(t)] + A_{LO} \exp[j2\pi\Delta f t + j\varphi_2(t)]|^2$$

Puede desarrollarse, sustituyendo sus términos por las siguientes variables:

$$\begin{aligned} a &= A_s(t) \\ b &= \varphi_1(t) \\ c &= A_{LO} \\ d &= 2\pi\Delta f t + \varphi_2(t) \end{aligned} \quad (3.34)$$

De esta forma, ocupando el resultado de la ecuación 3.31 al reemplazarla con las sustituciones 3.34, se tiene:

$$\begin{aligned} |E_{mix}|^2 &= A_s^2(t) + A_{LO}^2 + 2A_{LO}A_s(t) \cos [\varphi_1(t) - 2\pi\Delta f t - \varphi_2(t)] \\ &= A_s^2(t) + A_{LO}^2 + 2A_{LO}A_s(t) \cos [-(2\pi\Delta f t + \varphi_2(t) - \varphi_1(t))] \end{aligned} \quad (3.35)$$

Dado que la función *coseno* es par y $\Delta\varphi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$, la ecuación 3.35 resulta:

$$|E_{mix}|^2 = A_s^2(t) + A_{LO}^2 + 2A_{LO}A_s(t) \cos [\{2\pi\Delta f t + \Delta\varphi(t)\}] \quad (3.36)$$



Por lo tanto, al igual que el cuadrado de la magnitud del campo eléctrico E , previo al foto-detector, el cuadrado del campo eléctrico E_{mix} , cumple que:

$$|E_{mix}|^2 = |E|^2 = I_1 \quad (3.37)$$

Así, las relaciones de la ecuación 3.37 permiten sustituir la magnitud de la señal E_{mix} por la raíz cuadrada de la señal del foto-detector I_1 . Por ende, podemos reescribir la ecuación 3.22 como:

$$E_{mix} = \sqrt{I_1(t)} \exp [j\phi_{E_{mix}} t] \quad (3.38)$$

Al aplicar logaritmo natural a ambos lados de la ecuación con la intención de obtener la parte real y la parte imaginaria de E_{mix} de forma explícita, obtenemos:

$$\ln [E_{mix}] = \ln [I_1(t)^{\frac{1}{2}}] + j\phi_{E_{mix}}(t) \quad (3.39)$$

$$= \frac{1}{2} \ln [I_1(t)] + j\phi_{E_{mix}}(t) \quad (3.40)$$

Dado que la ecuación se presenta en su forma compleja, se puede aplicar directamente la transformada de Hilbert a $Re\{\ln [E_{mix}]\} = \frac{1}{2} \log [I_1]$, permite recuperar la fase de E_{mix} :

$$\phi_{E_{mix_{KK}}}(t) = \frac{1}{2\pi} \text{p.v.} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln [I_1](t')}{t' - t} dt' \quad (3.41)$$

Nótese que la fase recuperada a través de la ecuación 3.41 no es la fase de la señal E_{beat} que se desea obtener. Sin embargo, ésta puede ser extraída a partir de la ecuación 3.42 utilizando las ecuaciones 3.11 y 3.12. Por lo que la recuperación de la señal E_{beat} mediante las relaciones KK ($E_{beat_{I\Phi-KK}}$), se define como:

$$E_{beat_{I\Phi-KK}} = E_{mix_{KK}} - A_{LO} \exp [j2\pi\Delta f t + j\phi_2(t)] \quad (3.42)$$

Utilizando la ecuación 3.42 en conjunto con la ecuación 3.38 se tiene:

$$E_{beat_{I\Phi-KK}} = \sqrt{I_1(t)} \exp [j\phi_{E_{mix_{KK}}} t] - A_{LO} \exp [j2\pi\Delta f t + j\phi_2(t)] \quad (3.43)$$



donde $\phi_{E_{mix_{KK}}}$ es la fase recuperada a través de las relaciones KK.

Finalmente, para recuperar la fase de la señal E_{beat} se utiliza la función arco tangente ($angle(\cdot)$ en MATLAB):

$$\varphi_{E_{beat_{KK}}}(t) = \arctan \{ E_{beat_{I\Phi-KK}} \} \quad (3.44)$$

La función arco tangente es realizada en cuatro cuadrantes por lo que la función queda definida entre $[-\pi, \pi]$.

Resultados del método IΦ-KK

Para verificar la factibilidad del método Intensidad-Fase, junto con las condiciones de amplitud y la diferencia de frecuencia (Δf) expuestas en la sección 2.3.4, se trabaja con la fase recuperada $\varphi_{E_{beat_{KK}}}$.

Este método tiene como interés la comparación de fase entre la señal de referencia obtenida desde el demodulador I/Q y la señal recuperada a través de las relaciones KK, es por esto que el error a utilizar es el presentado en la ecuación 3.3.

Al contrario del método RI-KK, en este método no se aplica la comparación de la componentes Q, ya que ésta no es utilizada en el proceso de recuperación de la señal RBS.

Por lo tanto, la fase a comparar está definida a partir de la ecuación 3.44:

$$\varphi_{E_{beat_{KK}}}(t) = \arctan \{ E_{beat_{I\Phi-KK}} \}$$

Por otro lado, la señal de referencia se construye a partir de las componentes en frecuencia intermedia a la salida del demodulador I/Q presentes en las ecuaciones 2.29 y 2.30 mediante:

$$E_{beat_{IQ}} = \frac{1}{2A_{LO}} [I_{IF} + jQ_{IF}] = A_s(t) e^{[2\pi\Delta f t + \Delta\varphi(t)]} \quad (3.45)$$

El término $\frac{1}{2A_{LO}}$ surge en la necesidad de normalizar la señal saliente del demodulador para poder realizar una correcta comparación con la señal recuperada en la ecuación 3.44. Para obtener la fase de la señal de referencia se utiliza la ecuación 3.46 donde se elimina el término que



contiene la frecuencia intermedia para obtener únicamente a la fase deseada $\Delta\varphi(t)$

$$\varphi(t) = \text{angle}[E_{beatIQ} \cdot \exp(-j2\pi\Delta ft)] \quad (3.46)$$

Así, similar al método RI-KK, en el método I Φ -KK se busca analizar el comportamiento del error RMS relativo de fase al realizar cambios en la frecuencia intermedia, la tasa de muestreo y la amplitud del oscilador local. Cabe resaltar que cada punto, en las distintas curvas obtenidas, es el resultado de un promedio de 50 simulaciones para obtener resultados estadísticamente confiables. El comportamiento del error en función de las variables nombradas es analizado a continuación.

Variación de la frecuencia intermedia

Al igual que en el método RI-KK, se busca analizar el comportamiento del error relativo de fase ($RMSE_{rel\phi}$) considerando una tasa de muestreo fija mientras la frecuencia intermedia varía, tomando valores dentro de los mismos rangos utilizados en RI-KK.

- $f_s = 5$ Gsps $\longrightarrow f_{IF} = [0, 2.5]$ GHz
- $f_s = 10$ Gsps $\longrightarrow f_{IF} = [0, 5]$ GHz
- $f_s = 20$ Gsps $\longrightarrow f_{IF} = [0, 10]$ GHz

En la figura 3.18 se observan las curvas de error para las frecuencias mencionadas anteriormente. En esta figura se puede apreciar que el error relativo RMS disminuye desde un valor elevado para una frecuencia intermedia igual a 0 hasta un mínimo (distinto para cada curva), para posteriormente volver a aumentar a medida que f_{FI} aumenta, hasta que vuelve a tomar valores máximos de error cuando f_{FI} es cercano o igual a la frecuencia de Nyquist f_n . Este comportamiento del error se repite para todas las curvas.

Ahora bien, para cada valor mínimo de error RMS relativo en cada curva, es decir, utilizando una frecuencia intermedia óptima igual a

$$f_{FI}^{opt} = \frac{f_n}{2} = \frac{f_s}{4},$$

el comportamiento del error es similar al método RI-KK. Es decir, el error RMS relativo disminuye para frecuencias de muestreo altas, mientras que, para frecuencias de muestreo bajas, el error RMS relativo es alto.

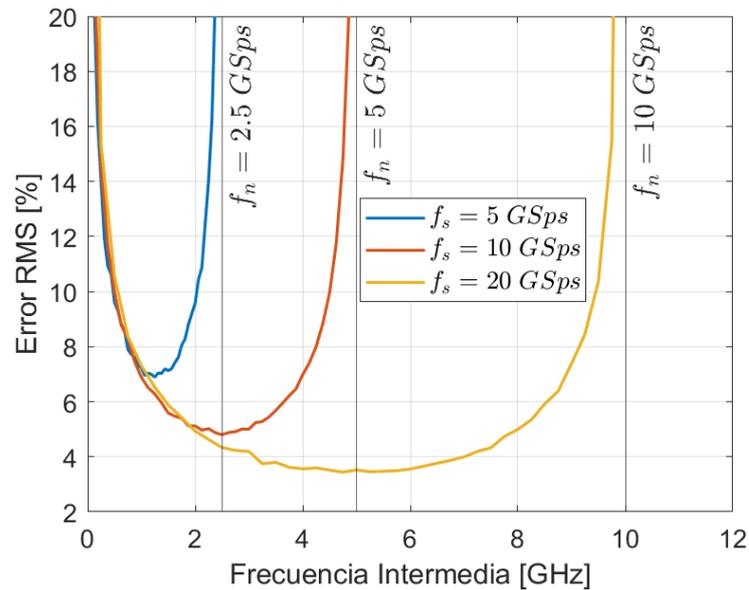


Figura 3.18: Curvas $RMSE_{rel\Phi}$ v/s Frecuencia de Intermedia para método $I\Phi$ -KK

Variación de la tasa de muestreo

Con el propósito de analizar el comportamiento del error relativo ante variaciones en la frecuencia de muestreo f_s , se utiliza una frecuencia intermedia fija f_{IF} . Se analizan los siguientes rangos de f_s respecto de un valor fijo de f_{IF} :

- $f_{IF} = 100 \text{ MHz} \rightarrow f_s = [0.2, 2] \text{ GSps}$
- $f_{IF} = 500 \text{ MHz} \rightarrow f_s = [1, 5] \text{ GSps}$
- $f_{IF} = 1 \text{ GHz} \rightarrow f_s = [2, 10] \text{ GSps}$
- $f_{IF} = 2.5 \text{ GHz} \rightarrow f_s = [5, 20] \text{ GSps}$

Las simulaciones realizadas dan origen a las curvas de la figura 3.19, en donde se puede observar que, independiente de la frecuencia intermedia utilizada, el error disminuye de manera drástica al aumentar la frecuencia de muestreo. Luego de aproximadamente 4 veces la frecuencia

intermedia utilizada, el error disminuye su tasa de descenso para mantenerse en torno a un valor distinto para cada curva.

Por otro lado, el valor de error RMS relativo en cada curva es menor para frecuencias intermedias más altas, considerando en el análisis, puntos que tienden a estabilizarse en torno cierto valor.

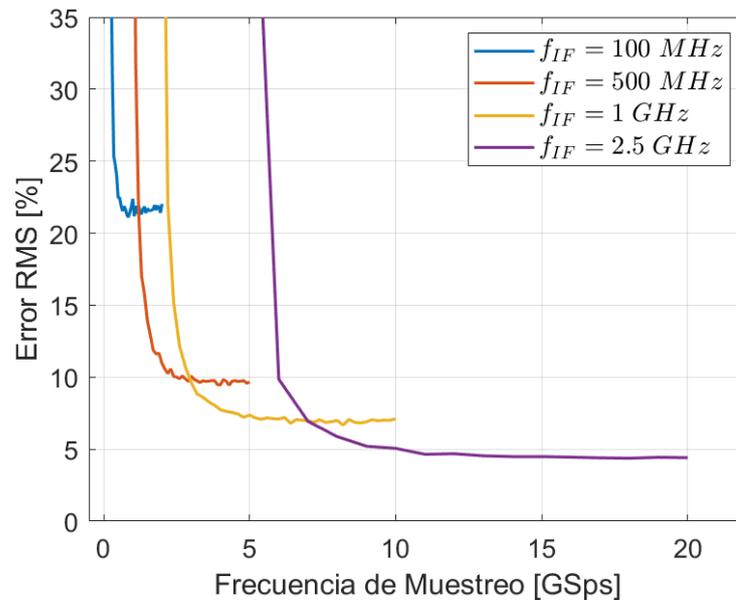


Figura 3.19: Curvas $RMSE_{rel\phi}$ v/s Frecuencia de Muestreo para método IΦ-KK

Variación de la Amplitud del Oscilador Local

Como última variable a analizar para este método, es importante evaluar el comportamiento del error RMS relativo de fase al utilizar distintas amplitudes del oscilador local. En base a las pruebas realizadas anteriormente, se realizan simulaciones que utilizan el valor mínimo de error RMS relativo en función de la frecuencia de muestreo y la frecuencia intermedia, esto es,

$$f_{FI}^{opt} = \frac{f_n}{2} = \frac{f_s}{4}$$

Así, en la figura 3.20, se observa el comportamiento del error en función de la amplitud normalizada del oscilador local.

Primeramente, se aprecia que en todas las curvas, independiente de la frecuencia de muestreo utilizada, el error relativo de fase disminuye a medida que la amplitud normalizada es mayor. Así,

para valores de amplitud local menor a uno el error relativo es elevado, disminuyendo de manera considerable a medida que la amplitud aumenta. Luego de, aproximadamente cinco unidades de amplitud normalizada, el error relativo de fase comienza a tender a un valor específico constante, distinto para cada tasa de muestreo utilizada.

Por otro lado, se puede observar que la tasa de muestreo utilizada incide de manera importante en el error final al que tienden las curvas, siendo las tasas de muestreo más altas las que entregan valores de error RMS relativo menores.

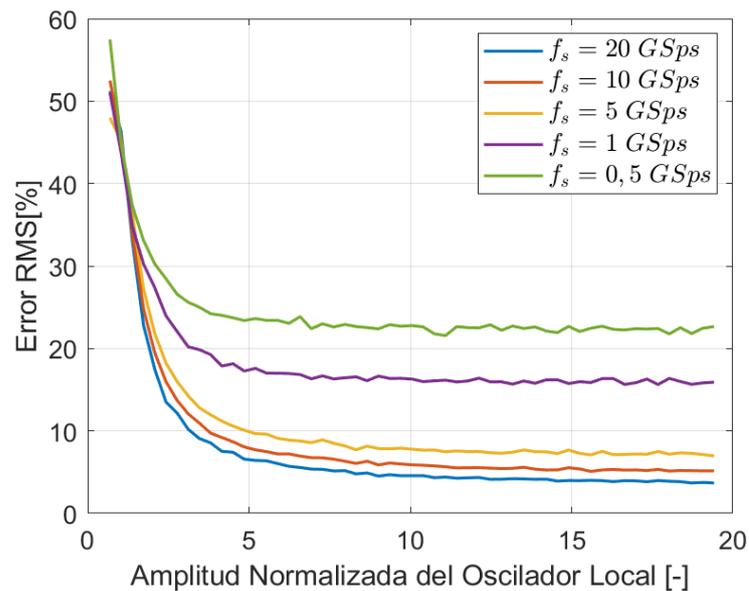


Figura 3.20: Curvas $RMSE_{rel\phi}$ v/s amplitud normalizada del oscilador local para método $I\Phi$ -KK.

3.2.4. Comparación Final

Como último análisis de este capítulo, se presentan las figuras 3.21, 3.22 y 3.23 que agrupan el comportamiento del error relativo RMS de fase en función de la frecuencia intermedia, frecuencia de muestreo y la amplitud del oscilador local normalizada, respectivamente. En las siguientes secciones se busca comparar los métodos RI-KK e $I\Phi$ -KK analizando sus similitudes y diferencias mediante las gráficas anteriormente mencionadas.

Variación de la Frecuencia intermedia

En la figura 3.21 se observa el comportamiento del error relativo RMS de fase en función de la frecuencia intermedia para diferentes tasas de muestreo. Se puede apreciar que no existe una diferencia sustancial entre ambos métodos, RI-KK e $I\Phi$ -KK, ya que para cada frecuencia de muestreo utilizada, las curvas son similares y prácticamente idénticas. No obstante, es posible observar que el comportamiento del error relativo depende fuertemente de la tasa de muestreo utilizada, lo que significa un error RMS menor a tasas de muestreo mayores, en conjunto con una frecuencia intermedia $f_{IF} = f_s/4$, para ambos métodos analizados.

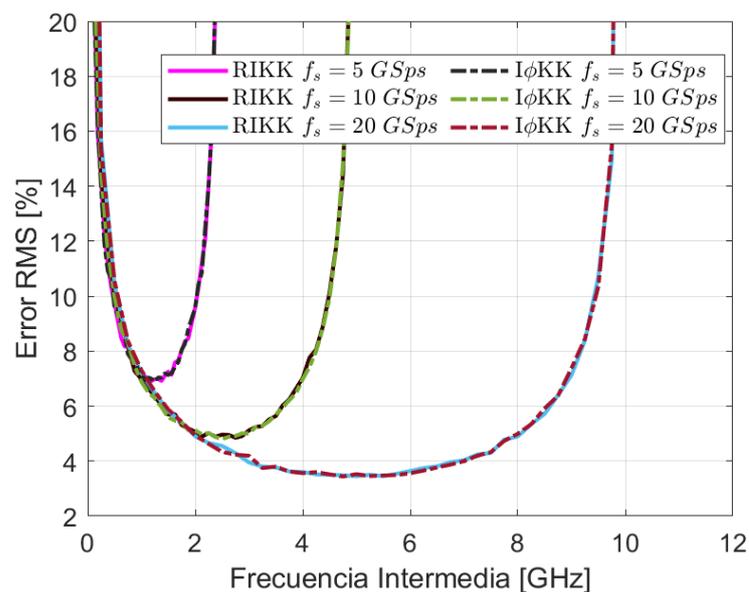


Figura 3.21: Curvas de error RMS relativo de fase como función de la frecuencia intermedia. Métodos RI-KK y $I\Phi$ -KK

Variación de la Frecuencia de Muestreo

Para el caso de la figura 3.21 se observa el comportamiento del error relativo RMS de fase en función de la frecuencia de muestreo para cierta frecuencia intermedia. Nuevamente, el comportamiento del error de fase es idéntico para ambos métodos. Es decir, se puede observar que ambos métodos presentan similares niveles de error al recuperar la fase de la señal RBS. Por lo tanto, se puede afirmar que ambos métodos presentan el mismo comportamiento ante un a tasa de muestreo más alta y a su vez una frecuencia intermedia mayor.

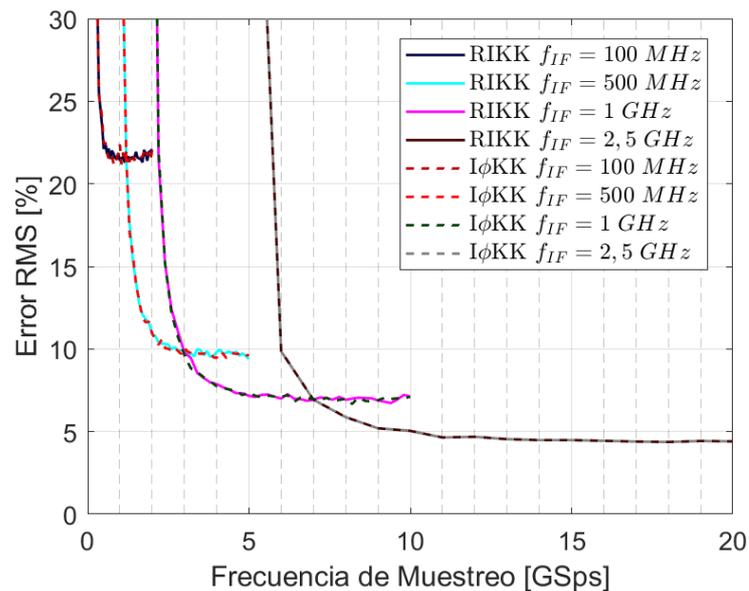


Figura 3.22: Curvas de error RMS relativo de fase como función de la frecuencia de muestreo. Métodos RI-KK y $I\Phi$ -KK

Variación de la Amplitud del Oscilador Local

Por último, el comportamiento del error relativo RMS de fase en función de la amplitud del oscilador local normalizada se puede observar en la figura 3.23. Se puede apreciar que el comportamiento del error es distinto para ambos métodos. Para el caso de RI-KK, utilizar amplitudes pequeñas no presenta un error de fase elevado, es decir, el error se mantiene en torno a un valor distinto para cada frecuencia intermedia utilizada. Sin embargo, para el método $I\Phi$ -KK, el comportamiento del error es distinto, ya que, para valores de amplitud pequeños el valor del error es elevado. El error posteriormente va disminuyendo a medida que aumenta el valor de la amplitud del oscilador local.

Así, el comportamiento del error para el método RI-KK es debido a que el algoritmo de recuperación detallado en la sección 3.2.2, no depende directamente de la amplitud del oscilador local, sólo interviene en el proceso de demodulación IQ y en las condiciones ideales expuestas en este trabajo el efecto de la amplitud no influye. Por otro lado, para el método $I\Phi$ -KK, el algoritmo de recuperación del detector explicado en la sección 3.2.3 requiere directamente de la amplitud del oscilador local (ecuación 3.42).

Además, es importante destacar que, las curvas de error a 10 GSps y 20 GSps en el método RI-KK, son casi idénticas. No obstante, para el método $I\Phi$ -KK, las curvas a 10 GSps y 20 GSps son distintas, e inclusive, las simulaciones realizadas a 20 GSps, muestran un valor menor de error para valores de amplitud normalizada superiores a 10. En el método $I\Phi$ -KK, esto puede ocurrir debido al efecto significativo de la amplitud del oscilador local en la recuperación de fase. Independiente de la frecuencia de muestreo utilizada, el valor del error relativo disminuye al aumentar la amplitud del oscilador local por las razones expuestas en el párrafo anterior. Al contrario, en el caso RI-KK es más relevante la frecuencia de muestreo y la frecuencia intermedia ya que para el detector RI-KK no utiliza la amplitud del oscilador local en la recuperación de la señal RBS.

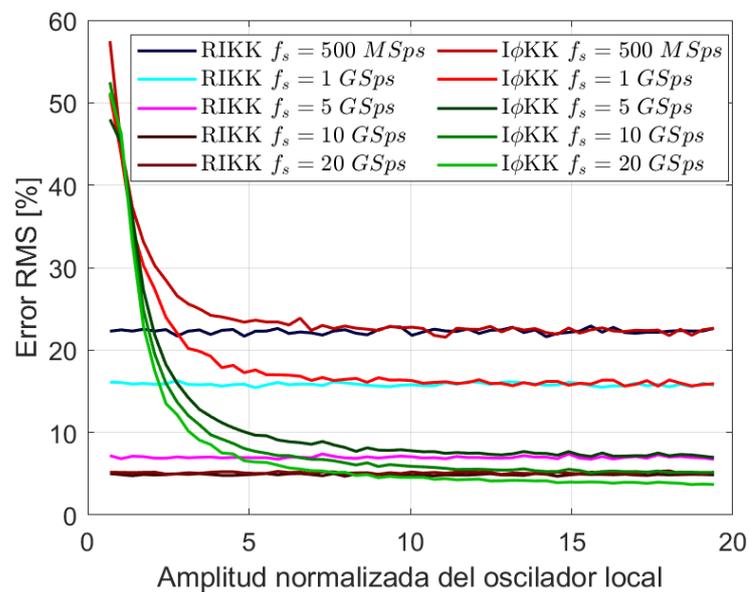


Figura 3.23: Curvas de error RMS relativo de fase como función de la amplitud normalizada del oscilador local. Métodos RI-KK y $I\Phi$ -KK



Capítulo 4

Aplicación de un detector Kramers-Kronig a datos reales

Hasta el momento, en el desarrollo de este proyecto sólo se ha utilizado datos simulados sin perturbaciones externas. Por lo anterior, se desea aplicar un esquema de detección KK a un sensor distribuido Rayleigh recuperando una perturbación aplicada en un segmento de la fibra.

Para este cometido, se han facilitado los datos del trabajo realizado por X. Lu *et. al* [23], los cuales han sido procesados. La investigación en dicha referencia implementa dos esquemas de detección, uno basado en detección coherente en conjunto con las relaciones KK, y el otro, en detección directa utilizando un interferómetro desbalanceado Mach-Zender (IMZI). Estos esquemas buscan evaluar el error de fase en la recuperación de la señal al utilizar Φ -OTDR basada en demodulación I/Q. El interés de este capítulo es recuperar la perturbación aplicada a la fibra utilizando la componente I obtenida a través de mediciones y proporcionada por los investigadores. Asimismo, se buscará evaluar el efecto que tenga un sobremuestreo o *upsampling* de los datos proporcionados en la perturbación.

4.1. Esquema

El esquema de detección utilizado se puede observar en la figura 4.1, en esta configuración se utiliza un láser con ancho de banda angosto basado en retroalimentación distribuida o *Distributed FeedBack Laser (DFB)*, con una longitud de onda de 1550 nm. Además, se pueden observar dos ramas a partir del láser, en la rama superior se observa un AOM utilizado para desplazar la frecuencia óptica de la señal proveniente del láser. En este *setup* se utilizó un desplazamiento de 80 MHz. Posteriormente, la generación de pulsos de luz es realizada a través de un amplificador óptico semiconductor o *Semiconductor Optical Amplifier (SOA)*. Estos pulsos tienen una duración de 40 ns con tiempos de subida y bajada de 1 ns. A continuación, estos pulsos son amplificados mediante un amplificador de fibra dopada con erbio EDFA, donde la emisión espontánea amplificada¹ es suprimida mediante un filtro ajustable pasabanda o *Tunable Bandpass Filter (TBPF)*. Luego, el *peak* de potencia es ajustado mediante el uso de un atenuador variable óptico o *Variable Optical Attenuator (VOA)*, finalmente los pulsos son enviados a través de la fibra óptica de sensado a través de un circulador. La luz de *backscattering* retornada se mezcla con la señal de oscilación local proveniente de la rama inferior. Un acoplador 2x2 realiza el proceso descrito para luego detectar la señal de *backscattering* a través de un fotodetector balanceado. La data digitalizada es procesada en un computador personal o *Personal Computer (PC)*. Es importante destacar que el espaciado entre muestras es de 0.8 m. Por otro lado, las características de la perturbación mencionada en la investigación se refieren a una perturbación sinusoidal de 60 [Hz] en una sección de 60 m de fibra.

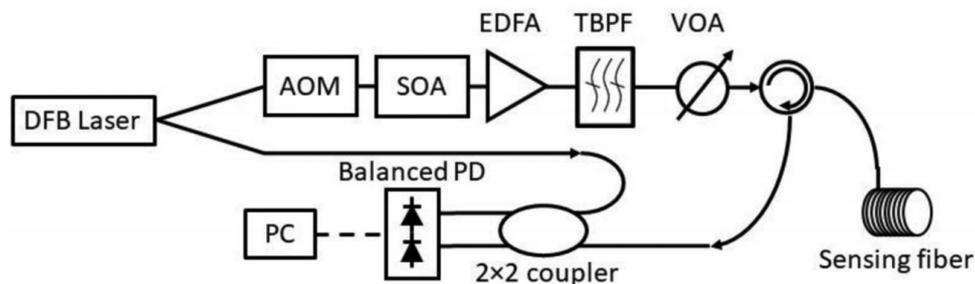


Figura 4.1: Configuración experimental para un sistema Φ -OTDR basado en detección coherente [23]

¹Emisión espontánea: Proceso en el cual un electrón que se encuentra en un nivel de energía elevado, tiende a caer espontáneamente a un nivel de energía inferior con la subsiguiente emisión de luz.

4.2. Recuperación de Fase

Inicialmente, para poder obtener la perturbación aplicada a la fibra se requiere obtener la fase de la señal de *backscattering*. Los datos de la componente I que se posee se traducen en una matriz de trazas v/s distancia, correspondiendo a filas y columnas de la matriz respectivamente.

Al aplicar las relaciones KK a través de la transformada de Hilbert en cada traza se recuperan las curvas que determinan la componente Q. Esta matriz mantiene las columnas como distancia y las filas como trazas.

Posteriormente, se obtiene la fase de la señal mediante el cálculo del arcotangente en cuatro cuadrantes a partir de la señal de campo eléctrico definida por $I + j * Q_{KK}$. En esta etapa, la fase se encuentra enrollada o envuelta sobre si misma, lo cual se puede observar en la figura 4.2.

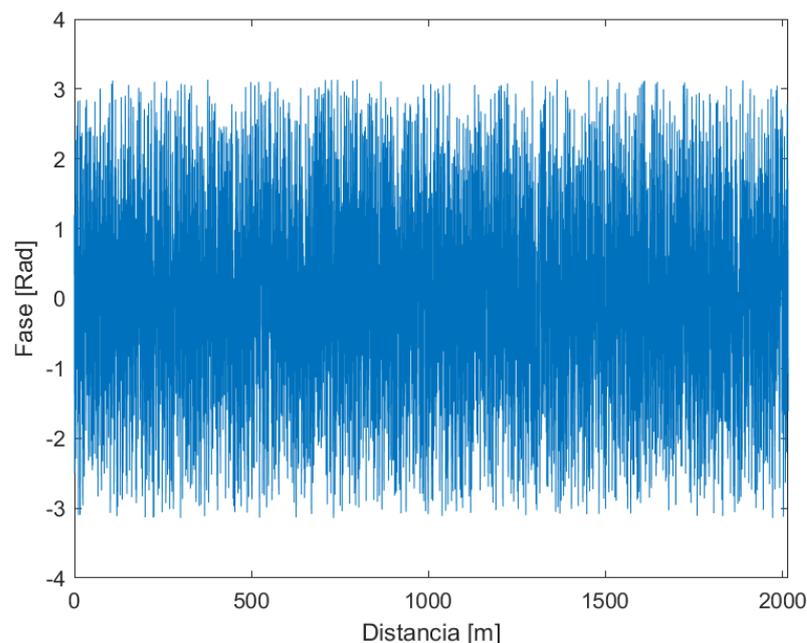


Figura 4.2: Fase enrollada de la primera traza resultante del detector KK a partir de datos experimentales

A partir de la fase enrollada, al igual que lo expuesto en el Capítulo 3, se requiere realizar un proceso de *unwrapping* para obtener una fase real. En la figura 4.3 se puede observar la fase desenvuelta de la traza de la figura 4.2. Así, las fases desenvueltas en la matriz son el resultado del procesamiento utilizando *unwrapping* a lo largo de cada fila, es decir, por cada traza Φ -OTDR.

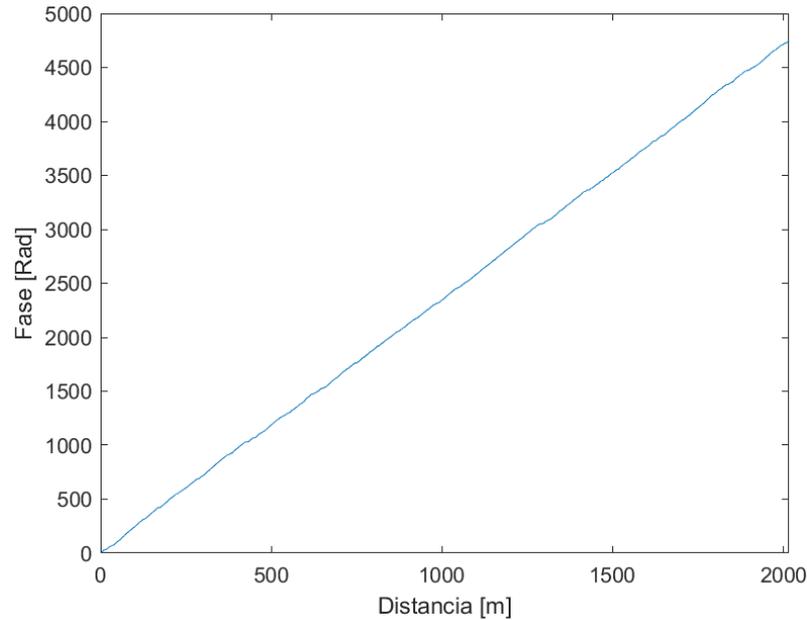


Figura 4.3: Fase desenvuelta de la primera traza

El siguiente paso es obtener la fase diferencial para cada traza, la cual se calcula utilizando un *gauge length* (gl). Este valor se obtiene a partir de la ecuación 4.1, donde c es la velocidad de la luz en m/s y n el índice de refracción de la fibra, T_p es el ancho temporal del pulso utilizado, que en este caso es de 40 ns.

$$gl > 2 \cdot W_p = 2 \cdot \frac{T_p \cdot c}{2 \cdot n} \quad (4.1)$$

Por lo tanto, el *gauge length* debe ser mayor a 8 m. Para este caso, se utilizará un gl de 10 m. De esta forma, se puede observar la fase diferencial en la figura 4.4, esta curva aun posee saltos no deseados, por lo tanto es posible mejorar el desenrollado a través de un nuevo proceso de *unwrapping* en la dimensión de distancia.

Tal proceso de *unwrapping* en 2 dimensiones, se justifica bajo el concepto principal de generar robustez ante el ruido existente. El fundamento principal para aplicar un *unwrapping* en la dimensión de distancia se debe a la baja variabilidad de fase en un punto dado de la fibra, es decir, en una posición X no perturbada, la fase en tal punto, debiese ser constante en las distintas trazas obtenidas.

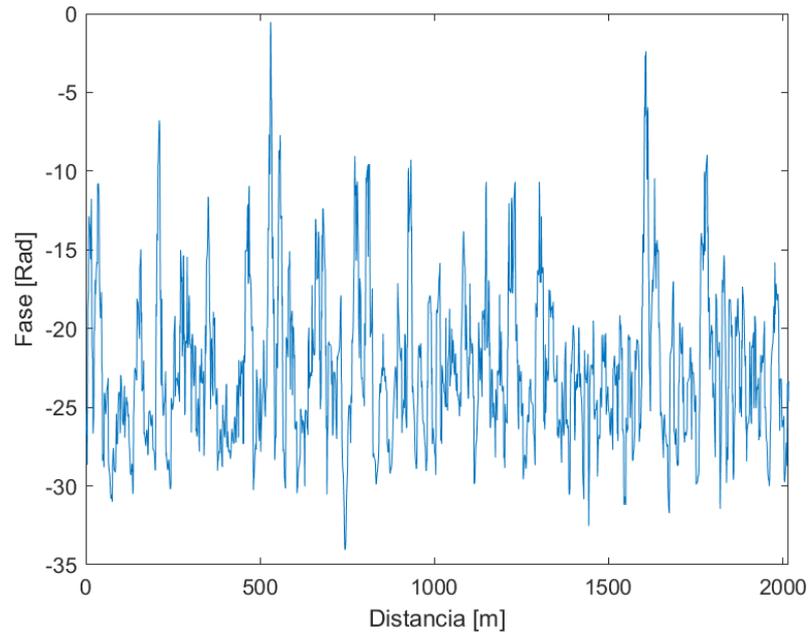


Figura 4.4: Fase Diferencial de la primera traza

Así, se puede observar en la figura 4.5, el resultado de aplicar un *unwrapping* en 2D de manera diferida, es decir, un *unwrapping* para cada traza, previo al calculo de fase diferencial, y un *unwrapping* por cada punto de distancia en la fibra utilizando las fases diferenciales.

La figura 4.5 muestra la sección perturbada de la fibra, donde se pueden observar las oscilaciones producidas en la fase a causa de una perturbación externa a la fibra (*strain*). Además, el tamaño de la sección perturbada es de 60 m, lo que corrobora lo expuesto en [23].

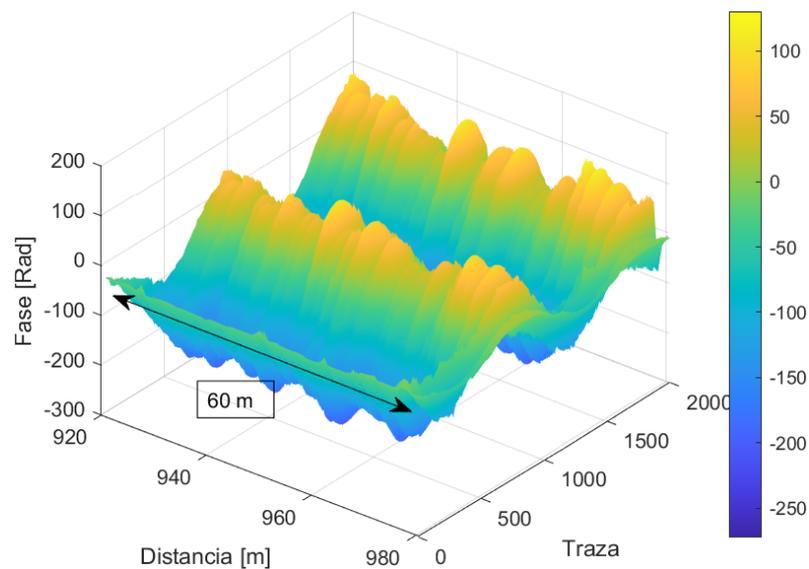


Figura 4.5: Fase envuelta a partir de datos experimentales

Finalmente, en la figura 4.6 se observa la variación de fase en la posición de 958 m. Nuevamente se puede afirmar el efecto de la perturbación externa sobre la fibra, y por lo tanto, sobre la fase.

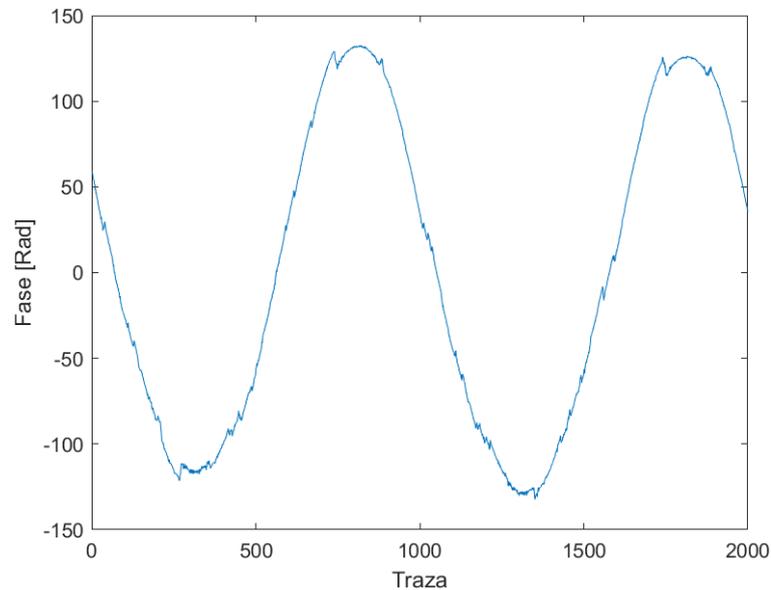


Figura 4.6: Curva de perturbación en el punto 958 m

4.3. Upsampling

Con el interés de complementar los resultados obtenidos, en ésta última sección se presentan los resultados de aplicar *upsampling* o sobremuestreo a la componente I. El sobremuestreo utilizado se basa en interpolación de paso bajo 8.1 descrito en [29], aumentando la frecuencia de muestreo original por un factor entero. Un ejemplo del upsampling de 4 veces aplicado a la señal sinusoidal visible en la figura 4.7, permite obtener la curva que se observa en la figura 4.8.

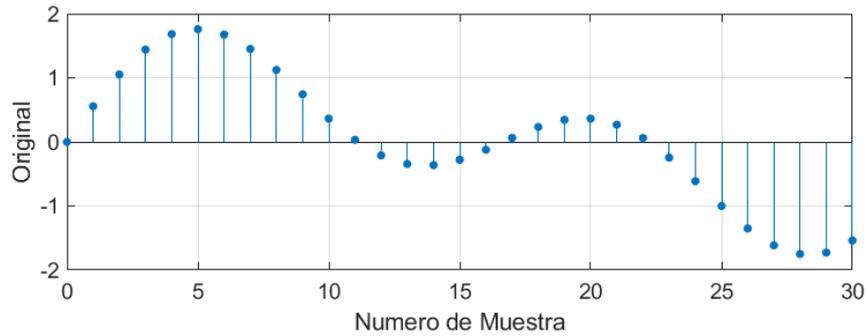


Figura 4.7: Curva de ejemplo a interpolar

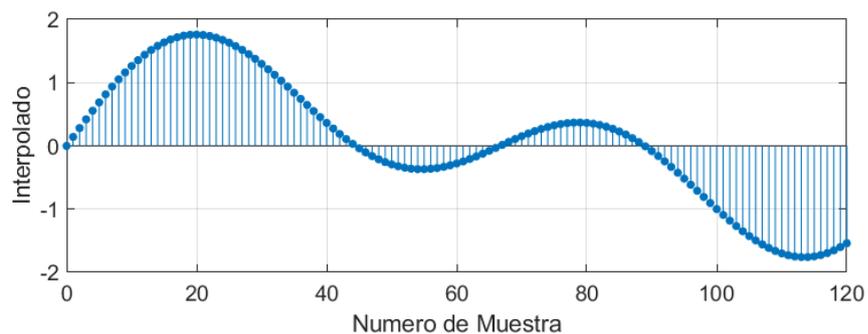


Figura 4.8: Curva de ejemplo interpolada

Basados en los resultados obtenidos en la sección 3.2.4 del capítulo 3, se propone aumentar la frecuencia original de muestreo de la señal I en un factor de 10. Este aumento de la frecuencia de muestreo la posiciona por sobre la frecuencia de Nyquist y a un valor mayor que cuatro veces la frecuencia intermedia utilizada.

Es decir, siendo $f_{IF} = 80\text{MHz}$ y la frecuencia de muestreo original $f_s = 125\text{MHz}$. Se obtiene:

$$f_{S_{up}} = 10 \cdot f_s = 10 \cdot 125[\text{MHz}] = 1.25[\text{GHz}]$$

donde

$$f_{S_{up}} > 4 \cdot f_{IF} > f_N$$

Cabe destacar que la frecuencia de muestreo original no cumple el criterio de Nyquist, lo cual representa una limitación de los datos presentados en [23].

De esta manera, al utilizar la misma metodología de recuperación de fase, se obtiene la figura 4.9, la que presenta los cambios de fase en la sección perturbada sobremuestreada. Además en

la figura 4.10 se observa la variación de fase en torno a la posición 958 m.

En la figura 4.11 se observan las dos curvas que describen el comportamiento de la fase como efecto del *strain* en el punto 958 m. Puede rescatarse que la recuperación de la perturbación, de manera general, se mantiene al realizar *upsampling*. Sin embargo, no se puede afirmar una mejora o deterioro de dicha recuperación, dado que, no se posee la componente Q original.

Por otro lado, el uso de datos que no cumplen con el criterio de Nyquist conlleva *Aliasing* o solapamiento. Además, la propuesta de *upsampling* presentada en [27], no debe de cumplirse en este escenario, debido a los efectos del *aliasing*. Es decir, concluir que la señal sobremuestreada mejora o no respecto a la original queda ligado a un muestreo inicial correcto, y sobremuestrear tal curva puede ser inocuo.

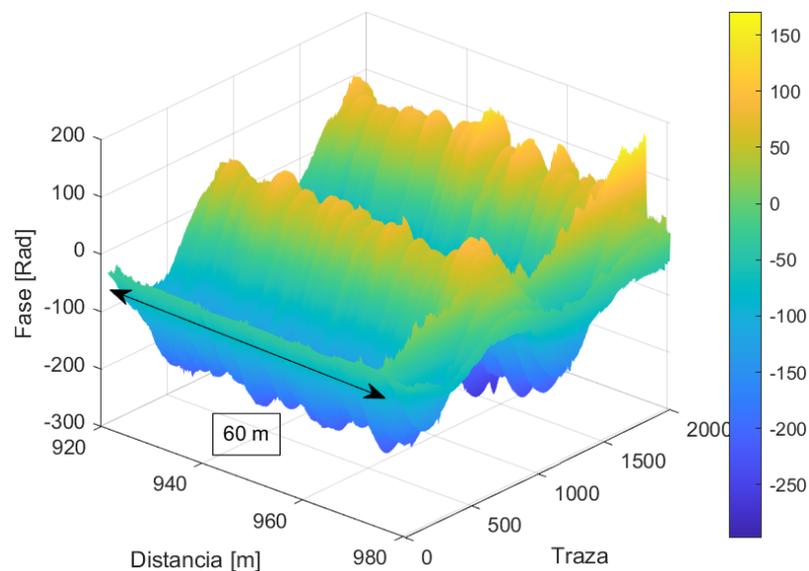


Figura 4.9: Vista lateral 3D de la sección perturbada con datos interpolados

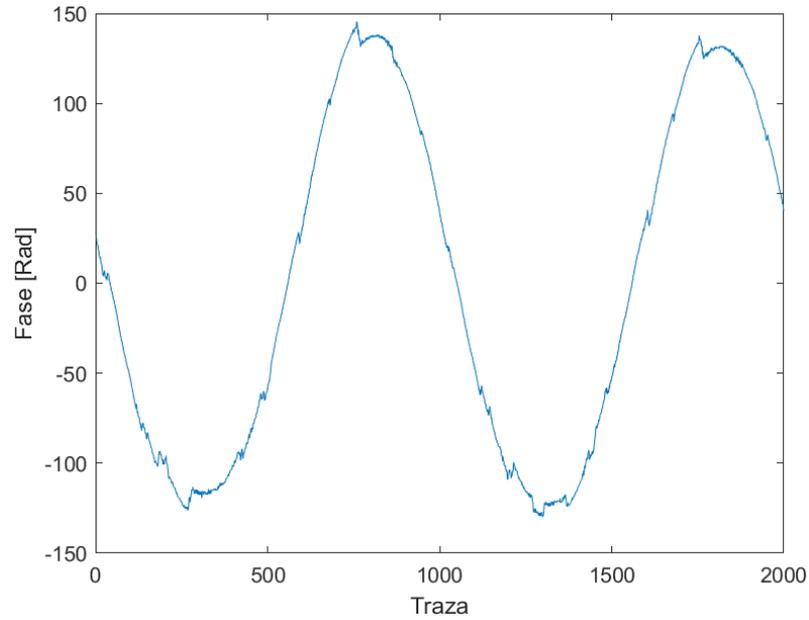


Figura 4.10: Curva sobremuestreada de perturbación en la posición 958 m

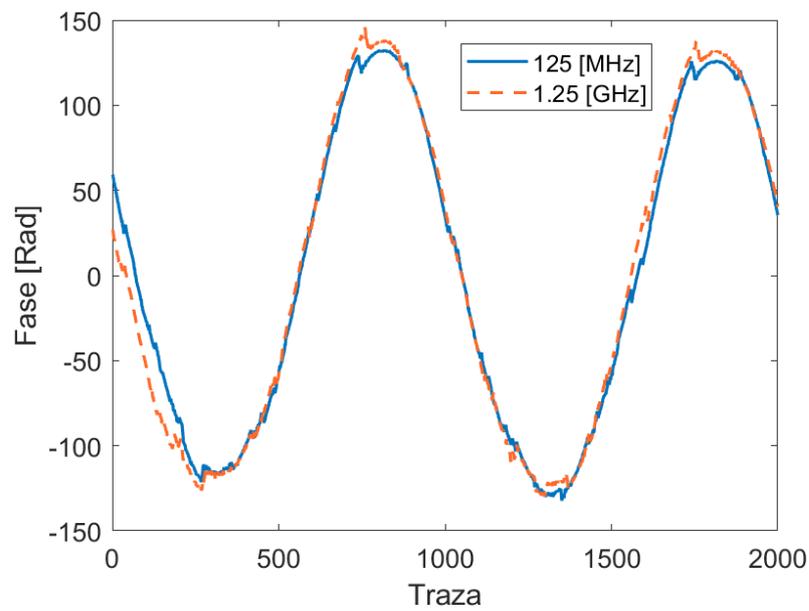


Figura 4.11: Comparación de curvas de perturbación en la posición 958 m. Datos experimentales (azul) y datos sobremuestreados (naranja)



Capítulo 5

Conclusiones

En esta memoria se implementó y estudió la factibilidad técnica de un detector Kramers-Kronig para sensores Rayleigh distribuidos en fibra óptica aplicado en un entorno de simulación. Lo anterior se llevó a cabo utilizando como base una detección coherente y un esquema de demodulación I/Q.

Se han logrado realizar simulaciones de una fibra óptica de parámetros convencionales a lo largo de 1000 m en condiciones ideales sin atenuación en la fibra. Se ha recuperado con éxito la señal retornada RBS a través del detector Kramers-Kronig junto con la implementación de los dos enfoques presentados. Éstos han permitido confirmar que las variables más influyentes, con mayor o menor grado sobre la señal recuperada, son la amplitud del oscilador local, la frecuencia intermedia y la tasa de muestreo. Resalta en gran medida el efecto de la tasa de muestreo, confirmando lo que en la reciente investigación [27] se plantea y profundiza mediante el concepto de upsampling. El efecto positivo en el aumento de la tasa de muestreo no es único, la frecuencia intermedia forma parte importante en obtener una recuperación fiable. Así en este trabajo se demuestra que el uso de una frecuencia intermedia igual a $\frac{1}{4}$ de la tasa de muestreo es fundamental para alcanzar el mínimo error en la obtención de la fase.

En el método Intensidad-Fase el efecto de una amplitud del oscilador local suficientemente grande, respecto a la amplitud del campo eléctrico retornado desde la fibra, genera una mejora significativa. Sin embargo, la fiabilidad de la recuperación en este escenario no es únicamente dependiente de la amplitud del oscilador local, se repite lo descrito anteriormente, el correcto ajuste de la frecuencia intermedia en relación con la tasa de muestreo influye nuevamente de



manera positiva si se cumplen las condiciones presentadas o pueden empeorar la recuperación pese a poseer una amplitud muchas veces mayor a la amplitud de la señal.

Junto con lo anterior, los métodos método RI-KK e $I\Phi$ -KK presentan el mismo comportamiento del error de recuperación de fase al realizar variaciones de frecuencia intermedia o variaciones en la frecuencia de muestreo, es decir, un aumento en la frecuencia de muestreo reduce el error en la recuperación. En el caso de la frecuencia intermedia, el nivel de error disminuye al aumentar dicha frecuencia hasta alcanzar un valor mínimo en $\frac{1}{4}$ del valor de la frecuencia de muestreo. Por otro lado, en el caso de la variación de la amplitud del oscilador local, se observó que un aumento en dicha amplitud ocasiona una disminución del error sólo para el método $I\Phi$ -KK. Para el método RI-KK dicho aumento de amplitud no produce una disminución, sino más bien es inofensivo manteniéndose el valor de error sólo relacionado al valor de la frecuencia intermedia y la frecuencia de muestreo.

Finalmente se comprueba la recuperación de una perturbación por *strain* utilizando un detector Kramers-Kronig con datos reales, además, se reafirma la importancia de utilizar una frecuencia de muestreo correcta, cumpliendo con el criterio de Nyquist.



Trabajos a Futuro

Dentro de lo abarcado en esta memoria existen pruebas y desarrollos que pueden profundizar esta línea de investigación.

- Implementar un detector KK en el contexto de laboratorio para comprobar las condiciones y requerimientos mínimos encontrados en el proceso de esta memoria. verificando el efecto de la frecuencia de muestreo y su relación con la frecuencia intermedia.
- Medir el efecto del ruido de fase proveniente desde una fuente óptica en la recuperación de la señal utilizando los métodos RI-KK y $I\Phi$ -KK evaluando nuevas condiciones en un contexto cercano a la realidad.
- Evaluar el nivel de error al existir perturbaciones en la fibra óptica mediante la comparación de la recuperación de la señal a través de las relaciones KK y su relación con la magnitud de la perturbación.
- Evaluar el nivel de error de una señal sobremuestreada recuperada con KK a partir una señal que cumpla con el criterio de Nyquist. Plantear nuevos métodos de sobremuestreo no planteados en este trabajo de memoria.



Bibliografía

- [1] J. Hecht. *City of light the story of fiber optics*. Oxford Univ. Press, 2004.
- [2] A. Hartog. A distributed temperature sensor based on liquid-core optical fibers. *Journal of Lightwave Technology*, 1(3):498–509, 1983.
- [3] A.H. Hartog and D.N. Payne. Fibre optic sensing device, 1984. GB2122337.
- [4] A.H. Hartog and D.N. Payne. A fibre-optic temperature-distribution sensor. In *IEE Colloquium Optic Fibre Sensors (01/12/82)*, December 1982. Digest 1982/60.
- [5] S. Villalba and J. Casas. Application of optical fiber distributed sensing to health monitoring of concrete structures. *Mechanical Systems and Signal Processing*, 39:441–451, 08 2013.
- [6] M. Jofré Prieto. Diseño y construcción de un sensor ϕ -OTDR para detectar perturbaciones en polines de correas transportadoras. *UTFSM*, Valparaíso, 2019.
- [7] M. Roman, D. Balogun, Y. Zhuang, R. E. Gerald, L. Bartlett, R. J. O’Malley, and J.s Huang. A spatially distributed fiber-optic temperature sensor for applications in the steel industry. *Sensors*, 20(14), 2020.
- [8] Z. Wang, B. Lu, Q. Ye, and H. Cai. Recent Progress in Distributed Fiber Acoustic Sensing with Φ -OTDR. *Sensors*, 20(22), 2020.
- [9] Z. Wang, L. Zhang, S. Wang, N. Xue, F. Peng, M. Fan, W. Sun, X. Qian, J. Rao, and Y. Rao. Coherent Φ -OTDR based on I/Q demodulation and homodyne detection. *Opt. Express*, 24(2):853–858, Jan 2016.



- [10] X. Lu and K. Krebber. Direct detection based Φ -OTDR using the Kramers-Kronig receiver. *Opt. Express*, 28(24):37058–37068, Nov 2020.
- [11] A. Mecozzi, C. Antonelli, and M. Shtaif. Kramers Kronig receivers. *Adv. Opt. Photon.*, 11(3):480–517, Sep 2019.
- [12] J. Jiang, Z. Wang, Z. Wang, Y. Wu, S. Lin, J. Xiong, Y. Chen, and Y. Rao. Coherent kramers-kronig receiver for ϕ -otdr. *Journal of Lightwave Technology*, 37(18):4799–4807, 2019.
- [13] A. Mecozzi & C. Antonelli & M. Shtaif. Kramers-Kronigs coherent receivers. *Advances in Optics and Photonics*, 11 no.3:1220–1227, September-2019.
- [14] A. H. Hartog. *An Introduction to Distributed Optical Fibre Sensors*. CRC Press, 6000 Broken Sound Parkway NW, Suite 300, 2017.
- [15] H. F. Taylor and C. E. Lee. Apparatus and method for fiber optic intrusion sensing, U.S. Patent US5194847A, March. 1993.
- [16] X. Liu, B. Jin, Q. Bai, Y. Wang, D. Wang, and Y. Wang. Distributed fiber-optic sensors for vibration detection. *Sensors*, 16:1164, 07 2016.
- [17] X. Bao and Y. Wang. Recent advancements in rayleigh scattering-based distributed fiber sensors. *Advanced Devices & Instrumentation*, 2021, 03 2021.
- [18] M. Fenta and J. Szanyi. Fibre optic methods of prospecting: A comprehensive and modern branch of geophysics. *Surveys in Geophysics*, 03 2021.
- [19] J. Pastor Graells. *Chirped-Pulse Phase-Sensitive Optical Time Domain Reflectometry*. Phd. thesis, Dept. Elect. Universidad de Alcalá, Madrid, España, 2018.
- [20] X. Bao and L. Chen. Recent progress in distributed fiber optic sensors. *Sensors*, 12(7):8601–8639, 2012.
- [21] H. He, LY. Shao, Z. Li, Z. Zhang, X. Zou, B. Luo, W. Pan, and L. Yan. Self-mixing demodulation for coherent phase-sensitive otdr system. *Sensors*, 16:681, 05 2016.



- [22] E. Ip, A. Pak, D. Barros, and J. Kahn. Coherent detection in optical fiber systems. *Opt. Express*, 16(2):753–791, Jan 2008.
- [23] X. Lu, M. A. Soto, P. J. Thomas, and E. Kolltveit. Evaluating Phase Errors in Phase-Sensitive Optical Time-Domain Reflectometry Based on I/Q Demodulation. *Journal of Lightwave Technology*, 38(15):4133–4141, 2020.
- [24] R. Hui. *Introduction to Fiber-Optic Communications*. Elsevier Science, 2019.
- [25] 90 Degree Optical Hybrid. http://www.optoplex.com/Optical_Hybrid.htm.
- [26] A. Mecozzi. A necessary and sufficient condition for minimum phase and implications for phase retrieval. *CoRR*, abs/1606.04861, 2016.
- [27] T. Wang and A. J. Lowery. Minimum Phase Conditions in Kramers-Kronig Optical Receivers. *Journal of Lightwave Technology*, 38(22):6214–6220, 2020.
- [28] Kramers-Kronig relation. http://snst-hu.lzu.edu.cn/zhangyi/ndata/Kramers-Kronig_relations.html.
- [29] IEEE Digital Signal Processing Committee. *Programs for digital signal processing*. IEEE Press, 1979.



Apéndice A

Señales Demodulador I/Q

A.1. Componente I_2

Expandiendo ecuación 2.21:

$$I_2(t) = b_{I2} \cdot b_{I2}^* \quad (\text{A.1})$$

Considerando que el conjugado de la suma dos números complejos z_1, z_2 es:

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

Se expresan sus términos:

$$I_2(t) = \frac{1}{2} \cdot \{jA_s(t) \exp[j2\pi f_0 t + j\varphi_1] + A_{LO} \exp[j2\pi(f_0 + \Delta f)t + j\varphi_2]\} \times \{-jA_s(t) \exp[-j(2\pi f_0 t + \varphi_1)] + A_{LO} \exp[-j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2)]\} \quad (\text{A.2})$$



Expandiendo la ecuación A.2

$$\begin{aligned}
 I_2(t) &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) \exp [j(2\pi f_0 t + j\varphi_1) - j(2\pi f_0 t + \varphi_1)] \\
 &\quad - jA_s(t)A_{LO} \exp [j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2) - j(2\pi f_0 t + \varphi_1)] \\
 &\quad + jA_s(t)A_{LO} \exp [j(2\pi(f_0 t + \varphi_1) - j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2))] \\
 &\quad + A_{LO}^2 \exp [j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2) - j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2)]\} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) + A_{LO}^2 - jA_s(t)A_{LO}(\exp [j(2\pi\Delta f t + \Delta\varphi)] - \exp [-j(2\pi\Delta f t + \Delta\varphi)])\}
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Donde se define $\Delta\varphi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ como la diferencia entre la fase del Oscilador Local $\varphi_2(t)$ y la fase de la señal RBS $\varphi_1(t)$.

Los términos exponenciales se expanden utilizando la identidad de Euler:

$$\begin{aligned}
 &\exp [j(2\pi\Delta f t + \Delta\varphi)] - \exp [-j(2\pi\Delta f t + \Delta\varphi)] \\
 &= \cancel{\cos [2\pi\Delta f t + \Delta\varphi]} + j \sin [2\pi\Delta f t + \Delta\varphi] - \cancel{\cos [2\pi\Delta f t + \Delta\varphi]} + j \sin [2\pi\Delta f t + \Delta\varphi] \tag{A.4} \\
 &= 2j \sin [(2\pi\Delta f t + \Delta\varphi)] = -2j \cos [2\pi\Delta f t + \Delta\varphi + \pi/2]
 \end{aligned}$$

Continuando con el desarrollo de la ecuación A.3

$$\begin{aligned}
 I_2(t) &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) + A_{LO}^2 - jA_s(t)A_{LO} \cdot (-2j \cos [2\pi\Delta f t + \Delta\varphi + \pi/2])\} \\
 &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) + A_{LO}^2 - 2A_s(t)A_{LO} \cdot \cos [2\pi\Delta f t + \Delta\varphi + \pi/2]\}
 \end{aligned} \tag{A.5}$$

A.2. Componente Q_1

$$Q_1(t) = b_{Q1} \cdot b_{Q1}^* \tag{A.6}$$

Considerando que el conjugado de la suma dos números complejos z_1, z_2 es:

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$



y dado que: $j = e^{j\pi/2}$, se expresan sus términos de la siguiente forma:

$$Q_1(t) = \frac{1}{2} \cdot \{jA_s(t) \exp[j(2\pi f_0 t + \varphi_1)] + jA_{LO} \exp[j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2)]\} \times \{ -jA_s(t) \exp[-j(2\pi f_0 t + \varphi_1)] - jA_{LO} \exp[-j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2)] \} \quad (A.7)$$

Expandiendo la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) \exp[j(2\pi f_0 t + j\varphi_1) - j(2\pi f_0 t + \varphi_1)] \\ &\quad + A_s(t)A_{LO} \cdot \exp[j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2) - j(2\pi f_0 t + \varphi_1)] \\ &\quad + A_s(t)A_{LO} \cdot \exp[j(2\pi(f_0 t + \varphi_1) - j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2)] \\ &\quad + A_{LO}^2 \exp[j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2) - j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2)]\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) + A_{LO}^2 + A_s(t)A_{LO}(\exp[j(2\pi\Delta f t + \Delta\varphi)] + \exp[-j(2\pi\Delta f t + \Delta\varphi)])\} \end{aligned} \quad (A.8)$$

Donde $\Delta\varphi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ se define como la diferencia entre la fase del Oscilador Local $\varphi_2(t)$ y la fase de la señal RBS $\varphi_1(t)$.

Los términos exponenciales se expanden utilizando la identidad de Euler:

$$\begin{aligned} &\exp[j(2\pi\Delta f t + \Delta\varphi)] + \exp[-j(2\pi\Delta f t + \Delta\varphi)] \\ &= \cos[2\pi\Delta f t + \Delta\varphi] + \underline{j \sin[2\pi\Delta f t + \Delta\varphi]} \\ &+ \cos[2\pi\Delta f t + \Delta\varphi] - \underline{j \sin[2\pi\Delta f t + \Delta\varphi]} \\ &= 2 \cos[2\pi\Delta f t + \Delta\varphi] \end{aligned} \quad (A.9)$$

Dado que $\cos[x] = \sin[x + \pi/2]$ la ecuación A.9 resulta:

$$2 \cos[2\pi\Delta f t + \Delta\varphi] = 2 \sin[2\pi\Delta f t + \Delta\varphi + \pi/2] \quad (A.10)$$

Continuando con el desarrollo de la ecuación A.8:

$$\begin{aligned} Q_1(t) &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) + A_{LO}^2 + A_s(t)A_{LO} \cdot (2 \sin[2\pi\Delta f t + \Delta\varphi + \pi/2])\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) + A_{LO}^2 + 2A_s(t)A_{LO} \cdot \sin[2\pi\Delta f t + \Delta\varphi + \pi/2]\} \end{aligned} \quad (A.11)$$



A.3. Componente Q_2

$$Q_2(t) = b_{Q2} \cdot b_{Q2}^* \quad (\text{A.12})$$

Considerando que el conjugado de la suma dos números complejos z_1, z_2 es:

$$(z_1 + z_2)^* = z_1^* + z_2^*$$

y dado que: $j = e^{j\pi/2}$, se expresan sus términos de la siguiente forma:

$$Q_2(t) = \frac{1}{2} \cdot \{A_s(t) \exp[j(2\pi f_0 t + \varphi_1)] + j^2 A_{LO} \exp[j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2)]\} \times \{A_s(t) \exp[-j(2\pi f_0 t + \varphi_1)] - A_{LO} \exp[-j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2)]\} \quad (\text{A.13})$$

Expandiendo la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} Q_2(t) &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) \exp[j(2\pi f_0 t + j\varphi_1) - j(2\pi f_0 t + \varphi_1)] \\ &\quad - A_s(t) A_{LO} \cdot \exp[j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2) - j(2\pi f_0 t + \varphi_1)] \\ &\quad - A_s(t) A_{LO} \cdot \exp[j(2\pi(f_0 t + \varphi_1) - j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2))] \\ &\quad + A_{LO}^2 \exp[j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2) - j(2\pi(f_0 + \Delta f)t + \varphi_2)]\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) + A_{LO}^2 - A_s(t) A_{LO} (\exp[j(2\pi\Delta f t + \Delta\varphi)] + \exp[-j(2\pi\Delta f t + \Delta\varphi)])\} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

Donde $\Delta\varphi(t) = \varphi_2(t) - \varphi_1(t)$ se define como la diferencia entre la fase del Oscilador Local $\varphi_2(t)$ y la fase de la señal RBS $\varphi_1(t)$.

Los términos exponenciales se expanden utilizando la identidad de Euler:

$$\begin{aligned} &\exp[j(2\pi\Delta f t + \Delta\varphi)] + \exp[-j(2\pi\Delta f t + \Delta\varphi)] \\ &= \cos[2\pi\Delta f t + \Delta\varphi] + \underline{j \sin[2\pi\Delta f t + \Delta\varphi]} \\ &+ \cos[2\pi\Delta f t + \Delta\varphi] - \underline{j \sin[2\pi\Delta f t + \Delta\varphi]} \\ &= 2 \cos[2\pi\Delta f t + \Delta\varphi] \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$



Dado que $\cos [x] = \sin [x + \pi/2]$ la ecuación A.15 resulta:

$$2 \cos [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi] = 2 \sin [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi + \pi/2] \quad (\text{A.16})$$

Continuando con el desarrollo de la ecuación A.14:

$$\begin{aligned} Q_2(t) &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) + A_{LO}^2 - A_s(t)A_{LO} \cdot (2 \sin [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi + \pi/2])\} \\ &= \frac{1}{2} \cdot \{A_s^2(t) + A_{LO}^2 - 2A_s(t)A_{LO} \cdot \sin [2\pi\Delta ft + \Delta\varphi + \pi/2]\} \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$