

2019-10

VALIDACIÓN DE LA UTILIZACIÓN DE LA HIPÓTESIS DE BOUSSINESQ EN LAS SIMULACIONES DE FLUJOS DE CONVECCIÓN NATURAL EN UNA CAVIDAD DIFERENCIALMENTE CALENTADA

PLAZA RETAMALES, GUSTAVO ALEJANDRO

<https://hdl.handle.net/11673/48987>

Repositorio Digital USM, UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
SANTIAGO-CHILE



**VALIDACIÓN DE LA UTILIZACIÓN DE LA
HIPÓTESIS DE BOUSSINESQ EN LAS
SIMULACIONES DE FLUJOS DE
CONVECCIÓN NATURAL EN UNA
CAVIDAD DIFERENCIALMENTE
CALENTADA**

GUSTAVO ALEJANDRO PLAZA RETAMALES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

PROFESOR GUÍA : PhD. ROMAIN GERS
PROFESOR CORREFERENTE : PhD. OLIVIER SKURTYS

OCTUBRE 2019

Abstract

In the present degree work, the validity of the Boussinesq hypothesis in a differentially heated cavity with an aspect ratio of 4 to different Rayleigh numbers in natural convection was studied by simulation. For this, the Ansys Fluent 19.2 Academic program was used, with a mesh of approximately 500,000 nodes, two models of turbulent viscosity LES WALE and K-Omega SST, pressure algorithm SIMPLE and PISO respectively with pressure based solver. It was not possible to obtain stable results over time for the LES WALE turbulent viscosity model and the study was based only on the results of K-Omega SST. Slight differences were observed in the u and v velocity profiles, as well as in the contours of temperature, eddy viscosity and turbulent kinetic energy giving errors in the range of 0.3 % to 6.7 % , so it was concluded that the hypothesis is valid in the cavity domain for Rayleigh numbers and conditions studied.

Abstracto

En la presente memoria de titulación, se estudió mediante simulación la validez de la hipótesis de Boussinesq en una cavidad diferencialmente calentada con relación de aspecto de 4 a distintos números de Rayleigh en convección natural. Para ello se utilizó el programa Ansys Fluent 19.2 Academic, con una malla de 500.000 nodos aproximadamente, dos modelos de viscosidad turbulenta LES WALE y K-Omega SST, algoritmo de presión SIMPLE y PISO respectivamente con solver basado en presión. No fue posible obtener resultados estables en el tiempo para el modelo viscosidad turbulenta LES WALE y el estudio se basó solo en los resultados de K-Omega SST. Se evidenció leves diferencias en los perfiles de velocidad u y v , como también en los contornos de temperatura, viscosidad de eddy y energía cinética turbulenta dando errores del rango de 0.3 % a 6.7 %, por lo que se concluyó que la hipótesis es válida en el dominio de la cavidad para los números de Rayleigh y condiciones estudiados.

Índice general

1. Introducción	3
2. Objetivos	6
2.1. Objetivo Principal	6
2.2. Objetivos Específicos	6
3. Marco Teórico	7
3.1. Ecuaciones Gobernantes	7
3.1.1. Hipotesis de Boussinesq	7
3.1.2. Ecuación de conservación de momentum	8
3.1.3. Ecuación de conservación de masa	8
3.1.4. Ecuación de conservación de energía	9
3.2. Convección natural Rayleigh-Bénard	9
3.3. Números Adimensionales	10
3.3.1. Número de Prandtl	10
3.3.2. Número de Rayleigh	10
3.3.3. Número de Reynolds	11
3.3.4. Número de Nusselt	11
3.4. Criterios hipótesis de Boussinesq	11
3.5. Turbulencia	12
3.5.1. Esfuerzos de Reynolds	12
3.5.2. Viscosidad turbulenta	14
3.5.3. Longitud de mezcla	14
3.5.4. Energía cinética turbulenta	15
3.5.5. Disipación de energía turbulenta	15
3.6. Método de Volúmenes Finitos	15

3.6.1.	Introducción al Método	15
3.6.2.	Aproximación de la integral de superficie	17
3.6.3.	Aproximación de la integral de volumen	19
3.6.4.	Métodos de Volúmenes Finitos para flujos no estacionarios	20
3.6.5.	Discretización de la ecuación transiente de difusión	21
3.6.6.	Discretización de la ecuación transiente de difusión-convección	22
3.7.	Estabilidad y convergencia numérica	23
3.7.1.	Interpolación Upwind (UDS)	23
3.7.2.	Interpolación Lineal (CDS)	24
3.7.3.	Interpolación Quadratic Upwind (QUICK)	25
3.7.4.	Condición de Courant-Friedrichs-Lewy	26
3.7.5.	Número de Fourier	27
3.8.	Métodos semi-implícitos SIMPLE y SIMPLEC	28
3.8.1.	Esquema SIMPLE	28
3.8.2.	Esquema SIMPLEC	30
3.9.	Solvers y Modelos del Software	32
3.9.1.	K-Épsilon	32
3.9.2.	K-Omega	33
3.9.3.	Large Eddy Simulation (LES)	34
3.9.4.	Solver basado en la Densidad	36
3.9.5.	Solver basado en Presión	37
4.	Metodología	39
4.1.	Condiciones generales de la simulación	39
4.2.	Condiciones de borde	40
4.3.	Elección de Solvers	41
4.4.	Elección de modelos	41
4.5.	Malla	45
4.6.	Métodos de Interpolación escogidos	48
4.7.	Paso de tiempo	49
4.8.	Validación	50
4.9.	Casos de estudio	53
4.10.	Estrategia de Validación de Hipótesis	53

5. Resultados	55
5.1. Computadores y tiempo de procesamiento	55
5.2. Criterios de Phillippe-Emmanuel Roche	56
5.3. Gráficos a distintos número de Rayleigh	56
5.3.1. Laminar	57
5.3.2. Transición	61
5.3.3. Turbulencia	65
5.4. Resultados LES WALE	69
6. Análisis y Conclusiones	72
6.1. Análisis de Resultados	72
6.1.1. Temperatura	72
6.1.2. Energía Cinética Turbulenta	73
6.1.3. Viscosidad Turbulenta	74
6.1.4. Velocidad u	75
6.1.5. Velocidad v	78
6.1.6. Error comparativo	81
6.1.7. Análisis General	82
6.2. Conclusiones	83
Anexos	87
A. Tabla propiedades del aire.	88
B. User Defined Function (UDF)	89

Índice de figuras

1.1. Esquema de la cavidad, paredes adiabáticas, pared fría y caliente y comportamiento capa límite.	4
3.1. Celdas de Rayleigh-Bénard 2-D en un flujo reversible.	9
3.2. Ilustración de nodos centrados en el volumen finito (izquierda) y caras centradas al volumen de control entre nodos (derecha).	16
3.3. Volumen de control y anotación típica utilizada para una malla Cartesiana 2D.	18
3.4. Volumen de control y anotación típica utilizada para una malla Cartesiana 3D.	18
3.5. Simulación estable e inestable al variar el paso de tiempo.	27
3.6. Diagrama de flujo Esquemas SIMPLE, SIMPLEC y SIMPLER	29
3.7. Operaciones del algoritmo SIMPLEC	31
3.8. Diferencias de escalas (izquierda) y del campo de velocidad (derecha) entre DNS y LES.	35
3.9. Diagrama de flujo del método basado en densidad.	36
3.10. Diagrama de flujo del algoritmo segregado (derecha) y algoritmo acoplado (izquierda).	38
4.1. Dimensiones de la cavidad con relación de aspecto de 4.	40
4.2. Configuración de la simulación para el estudio de los modelos LES.	41
4.3. Comparación del perfil de velocidad en un punto A.	42
4.4. Comparación del perfil de velocidad en un punto B.	43
4.5. Rendimiento y máximo error de los distintos modelos SGS.	44
4.6. Diferencias en los resultados para los distintos modelos.	45
4.7. Gráfico de la Ley de la Muralla y sus regiones.	46

4.8. Velocidad v en función de X a un Rayleigh igual a $1,48 \cdot 10^9$ y $Y=0.7$ utilizando K-Omega	51
4.9. Velocidad v en función de X a distinto número de Rayleigh y $Y=0.7$, resultado experimental	51
4.10. Velocidad v en función de X a un Rayleigh igual a $1,48 \cdot 10^9$ y $Y=0.85$, utilizando K-Omega.	52
4.11. Velocidad v en función de X a distintos número de Rayleigh $Y=0.85$, resultado experimental.	52
5.1. Contornos de densidad (Boussinesq), temperatura, viscosidad turbulenta y energía cinética turbulenta a media profundidad para $Ra = 1,48 \cdot 10^9$	58
5.2. Contornos de densidad (gas ideal), temperatura, viscosidad turbulenta y energía cinética turbulenta a media profundidad para $Ra = 1,48 \cdot 10^9$	59
5.3. Velocidad u a lo largo de la cavidad a distintas alturas con $Ra = 1,48 \cdot 10^9$.	60
5.4. Velocidad v a lo largo de la cavidad a distintas alturas con $Ra = 1,48 \cdot 10^9$.	61
5.5. Contornos de Densidad (Boussinesq, Superior Izquierda), Temperatura (Superior Derecha), Viscosidad Turbulenta (Inferior Izquierda) y Energía cinética turbulenta (Inferior Derecha) a media profundidad para $Ra = 4,97 \cdot 10^9$	62
5.6. Contornos de Densidad (Gas Ideal, Superior Izquierda), Temperatura (Superior Derecha), Viscosidad Turbulenta (Inferior Izquierda) y Energía cinética turbulenta (Inferior Derecha) a media profundidad para $Ra = 4,97 \cdot 10^9$	63
5.7. Velocidad u a lo largo de la cavidad a distintas alturas con $Ra = 4,97 \cdot 10^9$.	64
5.8. Velocidad v a lo largo de la cavidad a distintas alturas con $Ra = 4,97 \cdot 10^9$.	65
5.9. Contornos de densidad (Boussinesq), temperatura, viscosidad turbulenta y energía cinética turbulenta a media profundidad para $Ra = 1,13 \cdot 10^{10}$	66
5.10. Contornos de densidad (gas ideal), temperatura, viscosidad turbulenta y energía cinética turbulenta a media profundidad para $Ra = 1,13 \cdot 10^{10}$	67
5.11. Velocidad u a lo largo de la cavidad a distintas alturas con $Ra = 1,13 \cdot 10^{10}$	68
5.12. Velocidad v a lo largo de la cavidad a distintas alturas con $Ra = 1,13 \cdot 10^{10}$	69
5.13. Perfil de velocidad v con la hipótesis de Boussinesq para $Ra = 1,48 \cdot 10^9$ en los dos métodos de cálculo de viscosidad turbulenta.	70

5.14. Contorno de temperatura con la hipótesis de Boussinesq para $Ra = 1,48 \cdot 10^9$ en los dos métodos de cálculo de viscosidad turbulenta. . . .	71
6.1. Diferencia absoluta de la temperatura para ambos casos de cálculo de densidad, para 3 regímenes con distinto número de Rayleigh (Izquierda $Ra = 1,48 \cdot 10^9$, centro $Ra = 4,97 \cdot 10^9$ y derecha $Ra = 1,13 \cdot 10^{10}$) . .	73
6.2. Diferencia absoluta de la energía cinética turbulenta para ambos casos de cálculo de densidad, para 3 regímenes con distinto número de Rayleigh (Izquierda $Ra = 1,48 \cdot 10^9$, centro $Ra = 4,97 \cdot 10^9$ y derecha $Ra = 1,13 \cdot 10^{10}$)	74
6.3. Diferencia absoluta de la viscosidad turbulenta para ambos casos de cálculo de densidad, para 3 regímenes con distinto número de Rayleigh (Izquierda $Ra = 1,48 \cdot 10^9$, centro $Ra = 4,97 \cdot 10^9$ y derecha $Ra = 1,13 \cdot 10^{10}$)	75
6.4. Diferencia absoluta de velocidad u para Rayleigh de $1,48 \cdot 10^9$ a distintas alturas.	76
6.5. Diferencia absoluta de velocidad u para Rayleigh de $4,97 \cdot 10^9$ a distintas alturas.	77
6.6. Diferencia absoluta de velocidad u para Rayleigh de $1,13 \cdot 10^{10}$ a distintas alturas.	78
6.7. Diferencia absoluta de velocidad v para Rayleigh de $1,48 \cdot 10^9$ a distintas alturas.	79
6.8. Diferencia absoluta de velocidad v para Rayleigh de $4,97 \cdot 10^9$ a distintas alturas.	80
6.9. Diferencia absoluta de velocidad v para Rayleigh de $1,13 \cdot 10^{10}$ a distintas alturas.	81

Índice de tablas

3.1. Valores de los coeficientes de a , en sus respectivas paredes.	21
3.2. Valores de las áreas y volumen de cada celda.	21
3.3. Coeficientes de la ecuación para el esquema de diferencia híbrida.	22
3.4. Valores de F y D para el esquema de diferencia híbrida.	23
3.5. Valores de las constantes del modelo estándar K-Épsilon para condiciones generales.	33
3.6. Valores de las condiciones de borde para el modelo K-Épsilon.	33
3.7. Valores de las constantes del modelo Wilcox K-Omega para condiciones generales.	34
4.1. Condiciones generales de la simulación.	39
4.2. Parámetros generales de la simulación.	40
4.3. Tabla resumen de malla utilizado en la cavidad.	48
4.4. Métodos de interpolación para la discretización espacial.	49
4.5. Pasos de tiempo para distintos números de Rayleigh según aproximación con escalas.	50
5.1. Especificaciones técnicas generales de los 2 computadores utilizados para las simulaciones.	55
5.2. Tiempo de procesamiento aproximado para las distintas simulaciones.	56
5.3. Valores de los criterios propuestos por Phillipe-Emmanuel Roche considerando densidad como gas ideal.	56
6.1. Valores de errores promedio en $Z = 0,125$ a distintos número de Rayleigh.	82

6.2. Valores de campos promedio de velocidad en $Z = 0,125$ para todos los casos estudiados (A.- Densidad de Boussinesq B.- Densidad como Gas Ideal). 82

Nomenclatura

Densidad.	ρ
Campo de temperatura.	T
Temperatura promedio entre pared caliente y fría.	T_{∞}
Presión absoluta.	p
Viscosidad dinámica.	μ
Viscosidad cinématica.	ν
Campo de velocidad.	\vec{V}
Fuerzas externas al sistema.	\vec{F}
Generación de calor.	q
Coefficiente de expansión térmica.	β
Conductividad térmica.	k
Término fuente o sumidero.	Φ_v
Densidad promedio en la cavidad .	ρ_{∞}
Presión estática.	p_a
Presión dinámica.	p_d
Fuerza de gravedad en forma vectorial.	\vec{g}
Calor específico a presión constante.	C_p
Número de Rayleigh a un largo característico L.	Ra_L
Diferencia de temperatura.	Δ_h
Número de Prandtl.	Pr
Número de Reynolds.	Re

Temperatura constante.	T_o
Diferencia.	Δ
Largo característico.	L_c
Temperatura pared caliente.	T_s
Coefficiente de transferencia de calor por convección.	h
Escalar primario.	ϕ
Escalar secundario.	ψ
Promedio de la velocidad.	\bar{u}_i
Tensor de esfuerzos de Reynolds.	τ_{ij}^t
Tensor de esfuerzos viscosos.	τ_{ij}^l
Longitud de mezcla.	l_m
Constante de longitud de mezcla.	K_{lm}
Espesor característico.	δ_{ij}
Superficie de integración.	S
Volumen de integración.	Ω
Coefficientes del volumen de control.	a_i
Viscosidad turbulenta.	μ_t
Disipación turbulenta.	ϵ
Energía cinética turbulenta.	K
Componentes del tensor de las tasas de deformación promedio.	E_{ij}
Coefficientes constantes del modelo $k - \epsilon$.	$C_\mu, \sigma_K, \sigma_E, C_{1E}, C_{2E}$
Campo de velocidad filtrado.	$\bar{u}_i(x)$
Filtro del kernel.	$G_{x,x'}$
Largo de escala.	L_e
Subgrid-scale estrés de Reynolds.	τ_{ij}^S

Capítulo 1

Introducción

La Transferencia de Calor ha sido muy estudiada durante los últimos años, sobre todo la convección natural en cavidades que lleva en estudio cerca de 60 años [18], principalmente por el desconocimiento de la estructura del flujo central y la compleja interacción entre las condiciones de borde y el núcleo de la cavidad, por lo que se ha convertido en un clásico problema de la transferencia de calor y mecánica de fluidos. Las configuraciones de cavidades llenas de aire y con paredes verticales calentadas son utilizadas en muchas aplicaciones industriales como enfriamiento de equipos electrónicos, diseño de reactores nucleares y colectores solares [1], debido a esto existe una fuerte motivación por el desarrollo experimental y numérico de estas configuraciones, con el fin de mejorar su diseño y eficiencia de estos sistemas, a través de una mejor comprensión de la transferencia de calor por convección natural.

Esta Memoria de Titulación es parte del Proyecto FONDECYT 1171281, que tiene como principal objetivo mejorar la transferencia de calor en una cavidad llena de aire con una relación de aspecto de 4, estudiando numéricamente como controlar el flujo por perturbaciones mecánicas y térmicas. En la literatura, las simulaciones se basan en la hipótesis de Boussinesq.

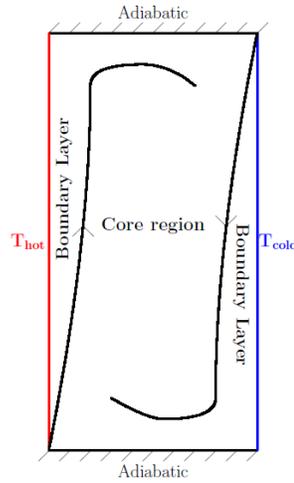


Figura 1.1: Esquema de la cavidad, paredes adiabáticas, pared fría y caliente y comportamiento capa límite.

La hipótesis de Boussinesq ha sido ampliamente utilizada en estudios de transferencia de calor por convección natural en cavidades. Esta hipótesis indica que la variación de densidad del fluido dentro de la cavidad diferencialmente calentada, es despreciable, en otras palabras la densidad es constante excepto en el término gravitatorio de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, por lo que se considera que la diferencia de densidad generada es solo por el efecto de la temperatura considerando además, que la presión no influye sobre la densidad.

Ecuación de conservación de momento simplificada mediante la aproximación de Boussinesq:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = \vec{g} \rho \beta (T - T_{\infty}) - \nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} \quad (1.1)$$

Para validar esta hipótesis, se tendrá que analizar la variación de la densidad en la cavidad en función del número de Rayleigh (número adimensional que mide la importancia de la convección en comparación a la conducción en un fluido calentado), variando la temperatura de la pared fría y caliente 1.1, además, se comprobará si se cumplen cada uno de los criterios de validación de la hipótesis [14]. Se compararán finalmente los campos de velocidad, densidad, presión, temperatura y Nusselt (número adimensional que compara la transferencia de calor por convección y por conducción)

obtenidos al utilizar la aproximación de Boussinesq y al no utilizarla (densidad modelada como gas ideal). De la misma manera se estudiarán diferentes formas de la pared fría y caliente.

Para simular el fluido en la cavidad y la transferencia de calor entre dos placas verticales, una fría y una caliente, se utilizará el software Ansys FLUENT versión 19.2 Academic, con una relación de aspecto de 4, una altura de 1[-], un ancho y profundidad de 0.25[-]. La temperatura de la placa caliente será de 283[K] y la de la placa fría de 263[K], con un Δ de 20[K]. La pared frontal, posterior, superior e inferior, se considerarán adiabáticas. Se generará una malla para dar mayor énfasis al cálculo cercano a la pared fría y caliente, que es donde ocurre el fenómeno de la transferencia de calor por convección natural y donde se va a situar gran parte de la validación de la hipótesis de Boussinesq.

Capítulo 2

Objetivos

2.1. Objetivo Principal

- Validar hipótesis de Boussinesq, en una cavidad llena de aire con una relación de aspecto de 4, a través, del análisis del comportamiento del fluido en función del número de Rayleigh y utilizando el software ANSYS Fluent 19.2.

2.2. Objetivos Específicos

- Estudiar la hipótesis de Boussinesq y sus criterios de validación.
- Analizar el comportamiento del fluido en la cavidad considerando la hipótesis de Boussinesq.
- Analizar el comportamiento del fluido en la cavidad considerándolo compresible.
- Analizar las diferencias entre los análisis anteriormente descritos.

Capítulo 3

Marco Teórico

3.1. Ecuaciones Gobernantes

Para el estudio de la utilización de la hipótesis de Boussinesq en la cavidad, es necesario utilizar las ecuaciones que gobiernan [19] la transferencia de calor por convección natural en ella y además como influye la hipótesis de Boussinesq en estas ecuaciones:

3.1.1. Hipotesis de Boussinesq

La hipótesis o aproximación de Boussinesq, es una aproximación muy comúnmente utilizada en la simulación de fluidos, debido a que esta aproximación sugiere que la variación de densidad del fluido puede ser despreciada o no considerada, excepto en el término gravitatorio de la ecuación de conservación de la cantidad de movimiento, por lo que la diferencia de densidad que ocurra en el dominio solo será por efecto de la temperatura. Utilizar esta aproximación provoca una disminución considerable de los tiempos de procesamiento de las simulaciones de los fluidos, que sin ella se tendría que resolver las ecuaciones gobernantes mencionadas anteriormente en su totalidad mediante métodos numéricos más complejos. Como la variación de densidad no es considerada, las ecuaciones gobernantes son afectadas a esta aproximación.

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0 \quad (3.1)$$

3.1.2. Ecuación de conservación de momentum

La ecuación 3.2 relaciona la aceleración del fluido con las fuerzas viscosas, las fuerzas de inercias, las fuerzas de presión y las fuerzas externas aplicadas al fluido. Conocida también como las ecuaciones de Navier-Stokes.

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p + \mu \nabla^2 \vec{V} + \frac{\mu}{3} \nabla(\nabla \cdot \vec{V}) + \vec{F} \quad (3.2)$$

Al aplicar la hipótesis, como el efecto de la variación de densidad en la cavidad se considera solo por efecto de la temperatura entonces la diferencia de densidad puede ser formulada de la siguiente manera:

$$\rho_\infty - \rho = \rho\beta(T - T_\infty) \quad (3.3)$$

Y donde la fuerza \vec{F} es la fuerza por unidad de volumen, y donde en el campo gravitatorio es considerada $\vec{F} = \vec{g}$. p puede ser descompuesta tanto como presión estática p_a y presión dinámica p_d , con estas simplificaciones tenemos que:

$$\vec{F} - \nabla p = (\rho - \rho_\infty) \vec{g} - \nabla p_d \quad (3.4)$$

Sustituyendo esto en la ecuación de conservación de momento (Ec. 3.2) obtenemos:

$$\rho \frac{D\vec{V}}{Dt} = -\nabla p_d + \mu \nabla^2 \vec{V} + \rho\beta \vec{g} (T - T_\infty) \quad (3.5)$$

3.1.3. Ecuación de conservación de masa

La ecuación de conservación de masa o la ecuación de continuidad, indica en nuestro caso que el sistema no varía en su masa a través del tiempo. Se tiene el término de acumulación más el de advección para los casos donde el fluido no es incompresible, ecuación no conservativa (Ecuación 3.6) y solamente advección cuando es incompresible o con una variación de densidad nula (Ecuación 3.7).

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot (\vec{V}) = 0 \quad (3.6)$$

$$\nabla \cdot (\vec{V}) = 0 \quad (3.7)$$

3.1.4. Ecuación de conservación de energía

La energía total del sistema es conservada, localmente la energía se transforma (Primera ley de la termodinámica, ecuación 3.8).

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = q + \nabla \cdot (k \nabla T) + \beta T \frac{Dp}{Dt} + \mu \Phi_v \quad (3.8)$$

Para la ecuación de energía (Ec. 3.8) las simplificaciones que se realizan son, la generación de calor es $q = 0$, la conductividad térmica es constante y como el número de Prandtl es bastante bajo en este caso $\mu \Phi_v \ll k \nabla^2 T$ se desprecia este término, obteniéndose:

$$\rho C_p \frac{DT}{Dt} = k \nabla^2 T \quad (3.9)$$

3.2. Convección natural Rayleigh-Bénard

La convección natural de Rayleigh-Bénard, es un tipo de configuración de convección natural que considera una cavidad calentada en la parte inferior y enfriada en la parte superior, lo que produce un flujo particular en el cual se desarrolla un patrón regular llamado "Bénard cells" (Figura 3.1).

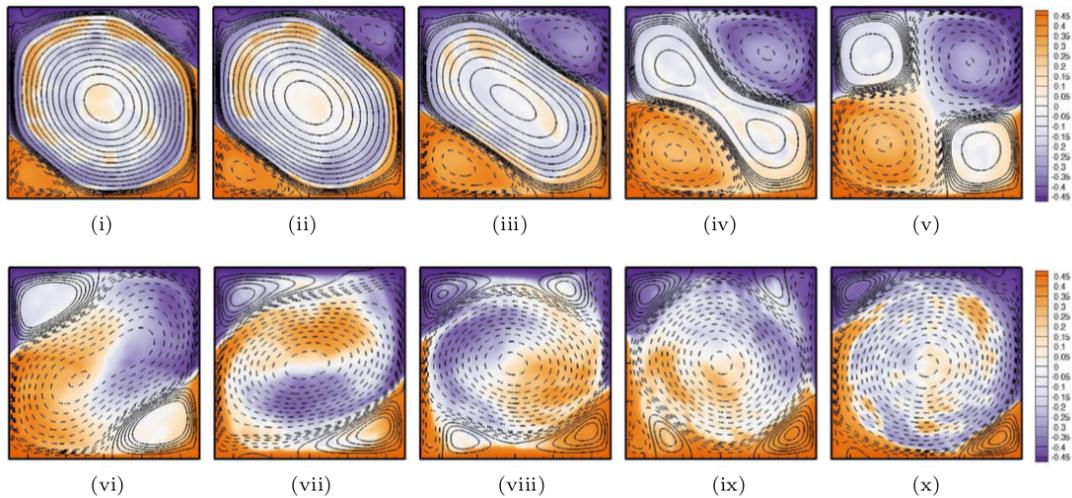


Figura 3.1: Celdas de Rayleigh-Bénard 2-D en un flujo reversible.

Las formas de las células de Bénard depende directamente de la relación de aspecto entre el alto y el ancho de la cavidad, como así también la diferencia de temperatura que

existe entre la pared superior y la inferior. Esta convección natural sucede por efectos de diferencia de densidad y presión, que provoca este particular movimiento del fluido dentro la cavidad. Este movimiento es similar al estudiado en la cavidad calentada en las paredes laterales, en donde se diferencian en gran parte, por la no presencia de capa límite en la convección natural de Rayleigh-Bénard. Este tipo de convección natural ha sido ampliamente estudiado y existen criterios de validación de la hipótesis de Boussinesq [14] para este tipo de configuración, la comprensión de este fenómeno permite obtener una primera aproximación de la validez de la hipótesis.

3.3. Números Adimensionales

3.3.1. Número de Prandtl

El número de Prandtl [4] es un número adimensional que relaciona la difusividad molecular de la cantidad de movimiento y la difusividad molecular del calor, describe el espesor relativo de las capas límite de velocidad y térmica, al relacionarlos.

$$Pr = \frac{\mu C_p}{k} = \frac{v}{\alpha} \quad (3.10)$$

El número de Prandtl para los gases es de alrededor de 1, lo que indica que tanto la cantidad de movimiento como el calor que se disipan a través del fluido a la misma velocidad. Para el caso de metales líquidos el calor se difunde mucho más rápido que la cantidad de movimiento, $Pr \ll 1$ y en contraste en aceites la cantidad de movimiento se difunde más rápido que el calor, $Pr \gg 1$, en consecuencia la capa límite térmica es mucho más gruesa para los metales líquidos y esto se debe en gran parte a su alta conductividad térmica k .

3.3.2. Número de Rayleigh

Se entiende como la razón de las fuerzas de flotabilidad y los productos de las difusividades térmica y de cantidad de movimiento [4]. Esto nos permite medir que tan importante es la convección en comparación con la conducción en un fluido calentado.

$$Ra_L = \frac{g\beta(T_s - T_\infty)L_c^3}{v\alpha} \quad (3.11)$$

Con el número de Rayleigh es posible estimar si el flujo dentro de la cavidad es

laminar, en transición y turbulento. Para un número de Rayleigh superior a $Ra > 10^{10}$ se considera turbulento, $10^9 < Ra < 10^{10}$ en transición y $Ra < 10^9$ laminar [5]. Solo sabiendo las condiciones con las que se harán las simulaciones o las experiencias es posible estimar con el número de Rayleigh el estado del flujo con cierta precisión.

3.3.3. Número de Reynolds

El número de Reynolds es un número adimensional que relaciona las fuerzas de inercia con las fuerzas viscosas [19]. A mayores números de Reynolds (mayor fuerza inercial que viscosa) o cuando pasa cierto Reynolds crítico para la geometría, el fluido pasa de un estado laminar a un estado turbulento.

$$Re = \frac{\rho u L}{\mu} \quad (3.12)$$

3.3.4. Número de Nusselt

El número de Nusselt relaciona la transferencia de calor por convección frente a la transferencia de calor por conducción [4]. A mayor número de Nusselt más eficaz es la convección sobre la conducción.

$$Nu = \frac{h L_c}{k} \quad (3.13)$$

Este número también se conoce como el coeficiente adimensional de transferencia de calor por convección. Para un número de $Nu=1$, la transferencia de calor es solamente por conducción, lo que indica que el fluido está inmóvil sobre el cuerpo.

3.4. Criterios hipótesis de Boussinesq

Los 3 últimos criterios están basados en las ecuaciones gobernantes mencionadas anteriormente y que con una serie de aproximaciones [14] se puede llegar a estas ecuaciones. Estos criterios están basados en una convección natural de Rayleigh-Bénard.

$$\beta \Delta \ll 1 \quad (3.14)$$

$$0,1 Ra^{0,13} (\beta \Delta_h) \ll 1 \quad (3.15)$$

$$\left(\frac{Ra^{0,1} Pr^{-0,25} x}{200} + 10Ra^{-0,17} Pr^{0,25}\right) \frac{\Delta_h}{T_0 \Delta} \ll 1 \quad (3.16)$$

$$0,1Ra^{0,1} Pr^{0,25} x \frac{\Delta_h^2}{T_0 \Delta} \ll 1 \quad (3.17)$$

3.5. Turbulencia

La Turbulencia es un estado de movimiento fluido que se caracteriza por vorticidad tridimensional aparentemente aleatoria y caótica [2]. Cuando hay turbulencia, generalmente domina todos los demás fenómenos de flujo y da como resultado una mayor disipación de energía, mezcla, transferencia de calor y arrastre. El hecho que aumente la disipación de energía, mezcla y transferencia de calor hace que este fenómeno sea estudiado para mejorar eficiencias de sistemas que lo requieran. Las fluctuaciones que presentan los flujos turbulentos en su velocidad, presión y temperatura, llevan a pensar a los científicos que esta puede deberse a la aleatoriedad y que no se puedan describir mediante ecuaciones. Se produce turbulencia cuando se supera cierto valor crítico del número de Reynolds, en donde pequeñas perturbaciones del flujo son inestables y estas al crecer forman la turbulencia como tal. Las fluctuaciones de gran escala están relacionadas al flujo promedio, en cambio, las fluctuaciones de pequeña escala tienen una dinámica propia y son influenciadas por la configuración promedio. La turbulencia al ser disipativa, provoca que la energía cinética turbulenta sea transferida hacia las escalas más pequeñas en donde se disipa por medio de esfuerzos viscosos. En la turbulencia el proceso de mezcla crece fuertemente, con ello aumenta sustancialmente la transferencia de masa, cantidad de movimiento y energía, además son rotacionales.

3.5.1. Esfuerzos de Reynolds

La descomposición de Reynolds consiste en representar cada variable por la suma de un valor y de una fluctuación provocada por la turbulencia, de esta manera se podrá dar un estimación de lo que sucede una vez que se presente turbulencia.

Seleccionando 2 escalares

$$\phi = \bar{\phi} + \phi' \quad (3.18)$$

$$\psi = \bar{\psi} + \psi' \quad (3.19)$$

Al multiplicar (Ec. 3.18) con (Ec. 3.19) obtenemos:

$$\phi\psi = \bar{\phi}\bar{\psi} + \phi'\bar{\psi} + \bar{\phi}\psi' + \phi'\psi' \quad (3.20)$$

Promediando la ecuación (Ec. 3.20) y sabiendo que el promedio de las fluctuaciones es nulo, tenemos:

$$\overline{\phi\psi} = \bar{\phi}\bar{\psi} + \overline{\phi'\psi'} \quad (3.21)$$

Al aplicar la ecuación (Ec. 3.21) sobre las velocidades (u, v, w) , tenemos en resumen:

$$\overline{u_i v_j} = \bar{u}_i \bar{v}_j + \overline{u'_i v'_j} \quad (3.22)$$

Al aplicar la ecuación (Ec. 3.22) a la ecuación (Ec. 3.2), aparecen 3 nuevos términos (analizando solo el eje x, esto se extiende de la misma manera para el eje y, z):

$$+\frac{\partial}{\partial x}(-\rho\overline{u'^2}) + \frac{\partial}{\partial y}(-\rho\overline{u'v'}) + \frac{\partial}{\partial z}(-\rho\overline{u'w'}) \quad (3.23)$$

Estos términos se pueden interpretar como los esfuerzos turbulentos que actúan en la dirección de x sobre las caras del volumen de control, el primer término será un esfuerzo normal y los otros 2 esfuerzos de corte.

Al escribir la ecuación (Ec. 3.2) con las ecuaciones nombradas podemos obtener una forma más general:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\bar{u}_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\rho\overline{u_i u_j} = -\frac{\partial\bar{p}}{\partial x_i} + \rho g_i + \frac{\partial}{\partial x_j}\bar{\tau}_{ij}^l + \frac{\partial}{\partial x_j}\tau_{ij}^t \quad (3.24)$$

Donde el tensor de esfuerzos de Reynolds es:

$$\tau_{ij}^t = -\rho(\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j) \quad (3.25)$$

Y el tensor de los esfuerzos viscosos es:

$$\bar{\tau}_{ij}^l = \mu\left(\frac{\partial\bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial\bar{u}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\mu(\text{div}\bar{u})\delta_{ij} \quad (3.26)$$

El problema central del análisis estadístico de los flujos turbulentos consiste en mo-

delar los esfuerzos de Reynolds y es posible mediante las variables del flujo promedio. Los modelos de turbulencia presentan en forma general ecuaciones para los esfuerzos turbulentos.

3.5.2. Viscosidad turbulenta

La viscosidad turbulenta se introduce como una analogía a la viscosidad laminar, por lo que la analogía con los mecanismo que producen esfuerzos viscosos también es válida y como anteriormente describimos los esfuerzos de Reynolds entonces podemos escribir que:

$$\tau_{ij}^t = \mu_t \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \quad (3.27)$$

lo que indica que el esfuerzo de Reynolds es proporcional al gradiente transversal de velocidad.

Una forma simple es determinar que μ_t sea constante en toda la mezcla, pero también se puede considerar una forma que cambie entre resultados teóricos y experimentales.

$$\mu_t = K_{\mu_t} \rho (\Delta u) \delta \quad (3.28)$$

3.5.3. Longitud de mezcla

Como la viscosidad turbulenta no puede ser constante en las paredes, se busca otra forma de poder caracterizarla, para ello se utilizará el gradiente de velocidad transversal con dependencia lineal, a ello se le suma un término intermediario conocido como longitud de mezcla $l_m(\vec{x}, t)$.

$$\mu_t = \rho l_m^2 \left| \frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} \right| \quad (3.29)$$

Donde x_j es la coordenada transversal al flujo y u_i es la velocidad en el sentido del flujo. La longitud de mezcla caracteriza localmente la escala de correlación de la turbulencia, este valor se fija generalmente de manera empírica. Como en la práctica la longitud de mezcla no es constante, entonces se aproxima a que varía según la distancia perpendicular a la pared (y) y con una constante de la longitud de la mezcla K_{l_m} .

$$l_m = K_{lm}y \quad (3.30)$$

Donde la longitud de la mezcla es el orden del espesor característico entre 10:

$$l_m \approx \frac{\delta(x)}{10} \quad (3.31)$$

3.5.4. Energía cinética turbulenta

La energía cinética turbulenta simbolizada por k , es definida como la mitad de la traza del tensor de estrés de Reynolds [13], esto es el promedio de la energía cinética en el campo de velocidad que varía constantemente.

$$k \equiv \frac{1}{2} \langle u \cdot u \rangle = \frac{1}{2} \langle u_i u_i \rangle \quad (3.32)$$

3.5.5. Disipación de energía turbulenta

Simbolizada por ϵ , la disipación de energía turbulenta transforma la energía cinética de los vórtices en energía interna, al enfrentarse los gradientes de velocidad fluctuantes ($\frac{du_i}{dt}$) con las fluctuaciones de los éstres desviatorios [13].

$$\epsilon \equiv 2\nu \langle s_{ij} s_{ij} \rangle \quad (3.33)$$

3.6. Método de Volúmenes Finitos

3.6.1. Introducción al Método

El Método de volúmenes finitos es un método numérico para aproximar soluciones de ecuaciones diferenciales que se presentan en un dominio o en un cuerpo, mediante la división en muchos volúmenes pequeños (regulares o irregulares), que en su conjunto forman una discretización del cuerpo o dominio [6]. Las ecuaciones diferenciales rigen varios fenómenos físicos, sea en la mecánica clásica, movimientos de fluidos, transferencia de calor, estructuras rígidas, vibración, etc [11]. En los últimos años la aplicabilidad de este método a crecido enormemente y actualmente es el más popular.

El método de volúmenes finitos usa la forma integral de la ecuación de conservación, como punto de partida, para una cantidad ϕ asumiendo que el campo de velocidad

y todas las propiedades del fluido son conocidas (se considera para la ecuación un flujo estacionario, independiente del tiempo).

$$\int_S \rho \phi v \cdot ndS = \int_S \Gamma grad \phi \cdot ndS + \int_{\Omega} S_{\phi} d\Omega \quad (3.34)$$

El dominio de la solución se subdivide en un número finito de pequeños volúmenes de control por una cuadrícula que, define los límites del volumen de control, en donde estos volúmenes se rigen por la ecuación de conservación (Ec. 3.34).

El enfoque habitual es definir los pequeños volúmenes de control por una cuadrícula adecuada y asignar el nodo computacional al centro del volumen finito. Sin embargo, existen otros métodos en el cual, se ubican primero las caras del volumen de control y se centran, luego se ubican los nodos.

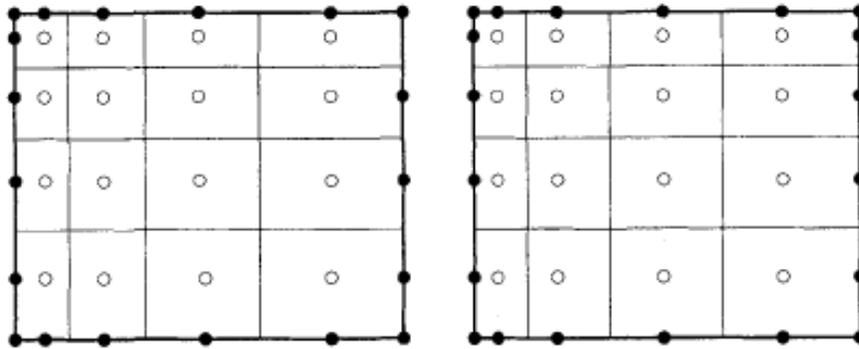


Figura 3.2: Ilustración de nodos centrados en el volumen finito (izquierda) y caras centradas al volumen de control entre nodos (derecha).

Cada uno de estos métodos de ubicación nodal tiene sus ventajas, el valor nodal centrado en el volumen de control representa la media sobre ese volumen con una mayor precisión que el otro (segundo orden), debido a su ubicación (centroide), pero el otro método ofrece mayor precisión en el valor de las derivadas cuando las caras están en el medio de los nodos, esto se puede ver mejor reflejado en la Figura 3.2 en la parte superior derecha en donde el método de centrado de caras posee mayor números de nodos en esa zona que el otro método.

La ecuación de conservación integral (Ec. 3.34) se aplica a cada volumen de control, como se mencionó anteriormente, pero también se aplica a el dominio de la solución como un todo. Esto quiere decir que si sumamos las ecuaciones para todos los volúmenes de control, obtenemos la ecuación de conservación global, ya que las integrales de superficie sobre las caras de los volúmenes de control internas se cancelan.

lan (Por ejemplo en un volumen de control sale cierta cantidad energía, en el siguiente volumen esa misma energía estará entrando, por lo que si sumamos las caras internas se anulará) cancelar. La principal ventaja de este método es que, la conservación global está integrada en el método.

Para obtener las ecuaciones algebraicas para los volúmenes finitos, es necesario aproximar las integrales de superficies y de volumen, para esto se utiliza la fórmula de cuadratura.

3.6.2. Aproximación de la integral de superficie

En las Figuras 3.3 y 3.4 se aprecian los volúmenes de control y su anotación típica para una malla Cartesiana 2D y 3D respectivamente. El volumen de control 2D consiste en 4 caras y en el caso del 3D en 6 caras con anotaciones para las caras de (e,w,n,s,t,b) y el nodo central P. Para problemas 3D que sean independientes del eje Z se transforman en problemas 2D, donde la extensión a problemas 3D es directa. Para ambos casos 2D y 3D, el flujo neto en el volumen de control es la suma de las integrales de superficies de sus respectivas caras (4 para 2D, 6 para 3D). Esto se puede expresar como:

$$\int_S \phi dS = \sum_k \int_{S_k} \phi dS \quad (3.35)$$

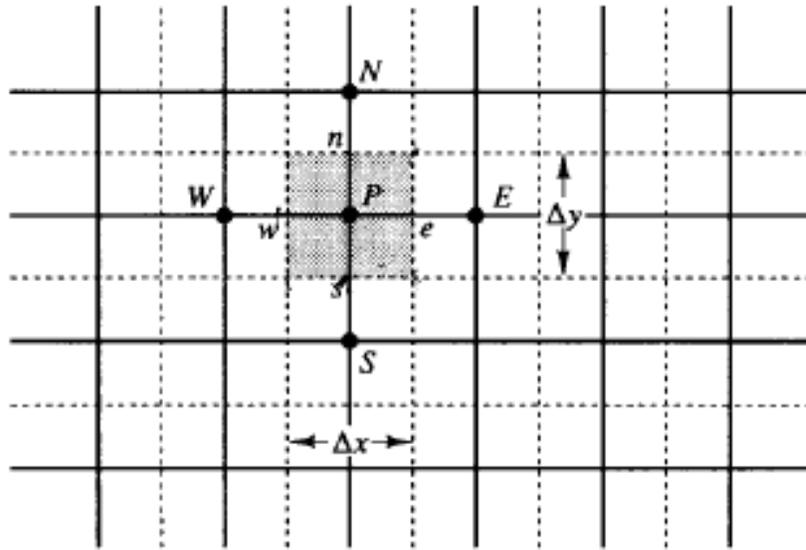


Figura 3.3: Volumen de control y anotación típica utilizada para una malla Cartesiana 2D.

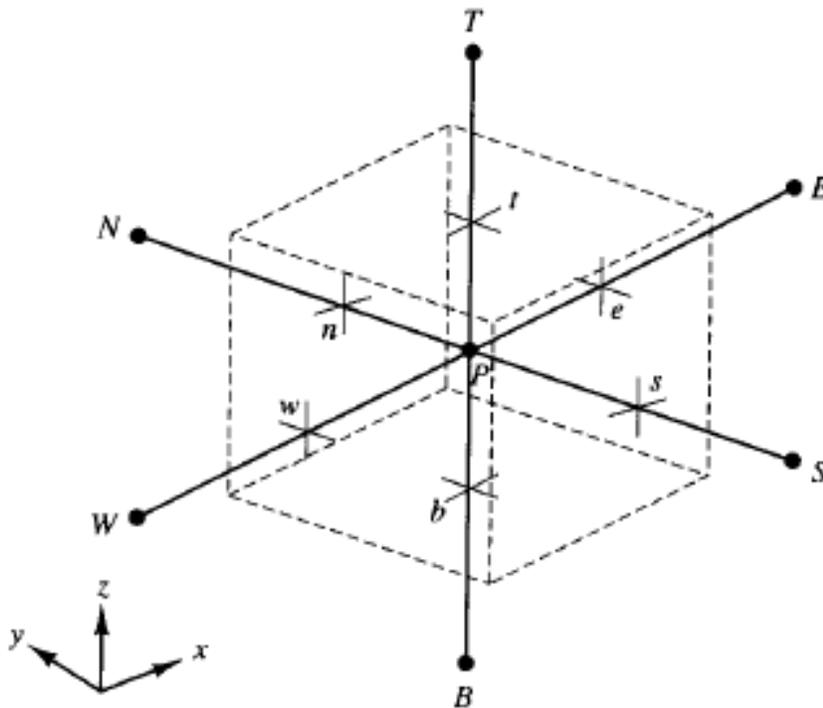


Figura 3.4: Volumen de control y anotación típica utilizada para una malla Cartesiana 3D.

La forma más simple para aproximar la integral de superficie es la regla del punto medio: la integral se aproxima como el producto del escalar a integrar por el área de la cara de la celda. Para la cara "e" sería de esta forma:

$$F_e = \int_{S_e} \phi dS = \bar{\phi}_e S_e \approx \phi_e S_e \quad (3.36)$$

La regla del punto medio tiene precisión de segundo orden, también necesita de saber el valor de ϕ_e .

Otro método que utiliza la interpolación para aproximar el valor de ϕ_e es la regla del trapecioide que la ser de segundo orden mantiene la precisión necesaria del valor aproximado de ϕ_e

$$F_e = \int_{S_e} \phi dS \approx \frac{S_e}{2} (\phi_{ne} + \phi_{se}) \quad (3.37)$$

En la regla del trapecio se necesita evaluar los flujos en las esquinas del volumen de control.

Para una mejor aproximación, el flujo debe ser evaluado en más de un punto la regla de Simpson es del cuarto orden de precisión.

$$F_e = \int_{S_e} \phi dS \approx \frac{S_e}{6} (\phi_{ne} + 4\phi_e + \phi_{se}) \quad (3.38)$$

En esta caso, se evalúa el flujo en 3, en el centro de la cara y en dos esquinas.

3.6.3. Aproximación de la integral de volumen

Algunos términos en las ecuaciones de transporte requieren integración sobre el volumen de control. La aproximación más simple para ellos es reemplazar la integral de volumen por el producto del valor promedio del integrando por el volumen de control que también es aproximadamente el valor del integrando en el centro(p) por su volumen de control:

$$Q_p = \int_{\Omega} \phi d\Omega = \bar{\phi} \Delta\Omega \approx \phi_p \Delta\Omega \quad (3.39)$$

Para una mayor precisión se necesitan más datos, por ejemplo conocer los valores de ϕ en las esquinas. Estos valores se pueden obtener por interpolación o con funciones. Las técnicas en 2D que se mostrarán son equivalentes al hacerlas en 3D. Una integral

de volumen en 2D es una integral de superficie se puede aproximar de esta manera:

$$Q_p = \frac{\Delta x \Delta y}{36} (16\phi_p + 4\phi_n + 4\phi_s + 4\phi_w + 4\phi_e + \phi_{se} + \phi_{sw} + \phi_{ne} + \phi_{nw}) \quad (3.40)$$

Para encontrar los valores de los coeficientes, se utilizan distintas técnicas de interpolación como Upwind Interpolation (UDS), Linear Interpolation (CDS), Quadratic Upwind interpolation (QUICK), entre otros.

3.6.4. Métodos de Volúmenes Finitos para flujos no estacionarios

La ley de conservación de transporte para un escalar ϕ en un flujo no estacionario puede ser expresada por la siguiente ecuación [16]:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \text{div}\rho\phi v \cdot n dS = \text{div}(\Gamma \text{grad}\phi) + S_\phi \quad (3.41)$$

Notar que es parecida a la ecuación (Ec. 3.34), solo que esta en su forma diferencial y con la única diferencia de la adición de la variación de densidad y el escalar en el tiempo. El primer término de la ecuación representa la tasa de cambio, en el cual para flujos estacionarios es 0. Al integrar sobre el volumen de control la ecuación (Ec. 3.41), se debe agregar la integración temporal sobre un espacio de tiempo finito también conocido como "time step." paso de tiempo, que juega un papel relevante con la convergencia de los métodos no estacionarios. La forma integral de la ecuación (Ec. 3.41) es:

$$\int_{\Omega} \int_t^{t+\Delta t} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) dt dV + \int_t^{t+\Delta t} \int_S n \cdot (\rho u \phi) dS dt = \int_t^{t+\Delta t} \int_S n \cdot (\Gamma \text{grad}\phi) dS dt + \int_t^{t+\Delta t} \int_{\Omega} S_\phi dV dt \quad (3.42)$$

El principal problema radica en encontrar un método para aproximar la integración temporal, la integración sobre los volúmenes de control es la misma para problemas estacionarios.

3.6.5. Discretización de la ecuación transiente de difusión

Para discretizar la ecuación transiente de difusión se utilizan métodos implícitos. Los métodos implícitos son altamente recomendables por su estabilidad superior a los métodos explícitos, ya que estos no dependen del paso de tiempo para la estabilidad, depende solo en la precisión de la solución. La ecuación de difusión transiente esta gobernada por la siguiente ecuación:

$$\rho C_p \frac{\partial \phi}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(k \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S \quad (3.43)$$

Considerando un volumen finito en 3D, se debe cumplir que y mediante el esquema de diferencia híbrida:

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e + a_n \phi_n + a_s \phi_s + a_t \phi_t + a_b \phi_b + a_p^0 \phi_p^0 + S_u \quad (3.44)$$

Donde:

$$a_p = a_w + a_e + a_n + a_s + a_t + a_b + a_p^0 - S_p \quad (3.45)$$

$$a_p^0 = \rho c \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (3.46)$$

Donde los valores de los coeficientes a , están dados por la Tabla.3.1:

a_w	a_e	a_s	a_n	a_b	a_t
$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{wp}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{pe}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{sp}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{pn}}$	$\frac{\Gamma_b A_b}{\delta y_{bp}}$	$\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{pt}}$

Tabla 3.1: Valores de los coeficientes de a , en sus respectivas paredes.

Para volúmenes finitos regulares e irregulares, las áreas de las caras y su volumen quedarán determinados, por $\Delta x, \Delta y$ y Δz , los valores se presentan en la Tabla.3.2:

ΔV	$A_w = A_e$	$A_n = A_s$	$A_b = A_t$
$\Delta x \Delta y \Delta z$	$\Delta y \Delta z$	$\Delta x \Delta z$	$\Delta x \Delta y$

Tabla 3.2: Valores de las áreas y volumen de cada celda.

3.6.6. Discretización de la ecuación transiente de difusión-convección

La ecuación transiente en 3D de difusión-convección de una propiedad general ϕ en campo de velocidad (u, v, w) está gobernada por:

$$\frac{\partial \rho \phi}{\partial t} + \frac{\partial \rho u \phi}{\partial x} + \frac{\partial \rho v \phi}{\partial y} + \frac{\partial \rho w \phi}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial z} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial z} \right) + S \quad (3.47)$$

Al utilizar el esquema de diferencia híbrida, es muy parecido al caso anterior de la ecuación transiente con la diferencia de la adición de los coeficientes de F y ΔF , que surgen por la adición del fenómeno de la convección. Se debe cumplir al igual que el caso anterior que:

$$a_p \phi_p = a_w \phi_w + a_e \phi_e + a_n \phi_n + a_s \phi_s + a_t \phi_t + a_b \phi_b + a_p^0 \phi_p^0 + S_u \quad (3.48)$$

Donde se adiciona el término ΔF

$$a_p = a_w + a_e + a_n + a_s + a_t + a_b + a_p^0 + \Delta F - S_p \quad (3.49)$$

Modificándose:

$$a_p^0 = \rho_p^0 \frac{\Delta V}{\Delta t} \quad (3.50)$$

$$\bar{S} \Delta V = S_u + S_p \phi_p \quad (3.51)$$

Para el esquema de diferencia híbrida los coeficientes en la vecindad se calculan de la siguiente manera:

a_w	$\max[F_w, (D_w + \frac{F_w}{2}, 0]$
a_e	$\max[-F_e, (D_e - \frac{F_e}{2}, 0]$
a_s	$\max[F_s, (D_s + \frac{F_s}{2}, 0]$
a_n	$\max[-F_n, (D_s - \frac{F_n}{2}, 0]$
a_b	$\max[F_b, (D_b + \frac{F_b}{2}, 0]$
a_t	$\max[-F_t, (D_t - \frac{F_t}{2}, 0]$
ΔF	$F_e - F_w + F_n - F_s + F_t - F_b$

Tabla 3.3: Coeficientes de la ecuación para el esquema de diferencia híbrida.

Cara	w	e	s	n	b	t
F	$(\rho u)_w A_w$	$(\rho u)_e A_e$	$(\rho v)_s A_s$	$(\rho v)_n A_n$	$(\rho w)_b A_b$	$(\rho w)_t A_t$
D	$\frac{\Gamma_w A_w}{\delta x_{wp}}$	$\frac{\Gamma_e A_e}{\delta x_{pe}}$	$\frac{\Gamma_s A_s}{\delta y_{sp}}$	$\frac{\Gamma_n A_n}{\delta y_{pn}}$	$\frac{\Gamma_b A_b}{\delta y_{bp}}$	$\frac{\Gamma_t A_t}{\delta z_{pt}}$

Tabla 3.4: Valores de F y D para el esquema de diferencia híbrida.

3.7. Estabilidad y convergencia numérica

Para aproximar valores dentro de los volúmenes de control debemos saber los valores de las variables en los nodos computacionales, en el centro de los volúmenes de control. Dependiendo de que método utilicemos, distintas variables se utilizarán para realizar la interpolación para calcular los flujos convectivos y difusivos. Cada método con un costo computacional distinto al igual que su precisión.

3.7.1. Interpolación Upwind (UDS)

La aproximación de ϕ_e , por su valor en el nodo aguas arriba de 'e' (Ver Figura 3.4) es equivalente a usar diferencia adelantada o atrasada para la primera derivada (Varía de una a otra dependiendo de la dirección del flujo). Para UDS, ϕ_e es:

$$\phi_e = \begin{cases} \phi_p & \text{si } (v \cdot n)_e > 0; \\ \phi_e & \text{si } (v \cdot n)_e < 0. \end{cases}$$

Esta aproximación es numéricamente difusiva. Al aplicar la expansión de series de Taylor al punto central P se obtiene:

$$\phi_e = \phi_p + (x_e - x_p) \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_p + \frac{(x_e - x_p)^2}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_p + H \quad (3.52)$$

H representa todos los demás términos de alto grado. La aproximación UDS es de primer orden, debido a que solamente mantiene el primer término de la expansión de Taylor. Como el resto de términos son difusivos (gradientes presentes en todos los demás términos, incluyendo H), el error por lo tanto es difusivo y se semeja a un flujo difusivo:

$$f_e^d = \Gamma_e \left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \quad (3.53)$$

Recordar que f es el integrando del escalar ϕ . En problemas tridimensionales este error difusivo es magnificado por lo que requiere de una malla muy fina para ser preciso.

3.7.2. Interpolación Lineal (CDS)

Otra aproximación hacia adelante para el valor del volumen de control central es la interpolación lineal entre los nodos más cercanos. Localizado en 'e' sobre la malla cartesiana se tiene:

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) \quad (3.54)$$

Donde el factor de interpolación lineal λ_e se define como:

$$\lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} \quad (3.55)$$

La ecuación Ec. 3.54, es de segundo orden como puede ser demostrado usando las series de expansión de Taylor para el escalar ϕ_e , cerca del punto x_p para eliminar la primer derivada en la Ec. 3.52, lo que conduce a:

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) - \frac{(x_e - x_p)(x_E - x_e)}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial^2 x} \right)_p + H \quad (3.56)$$

El error de truncación es proporcional al cuadrado del espacio de la malla Δx . Este esquema al igual que esquemas de alto orden pueden producir soluciones oscilatorias. Este es el esquema más simple y más utilizada de segundo orden.

El asumir un perfil lineal entre los nodos P y E también ofrece la más simple aproximación del gradiente, el cual es necesario para evaluar flujos difusivos-

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P} \quad (3.57)$$

Donde el error de truncación al usar las expansión de series de Taylor es:

$$\left(\frac{\partial \phi}{\partial x} \right)_e \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P} \quad (3.58)$$

3.7.3. Interpolación Quadratic Upwind (QUICK)

La interpolación QUICK permite aproximar de manera parabólica el perfil de la variable entre P y E. Para la construcción de la parábola es necesario tener información de más de un punto; de acuerdo con la naturaleza de la convección el tercer punto es el que está en el lado de aguas arriba, de la misma manera se toma W en caso que el flujo vaya desde P a E si $u_x > 0$) o EE si $u_x < 0$. Así se obtiene:

$$\phi_e = \phi_U + g1(\phi_D - \phi_U) + g2(\phi_U - \phi_{UU}) \quad (3.59)$$

Donde D,U,UU es aguas abajo, primer nodo aguas arriba y segundo nodo aguas arriba, respectivamente (E,P y W o E,P y EE, dependiendo de la dirección del flujo). Los coeficientes $g1$ y $g2$ pueden ser expresados en términos de las coordenadas nodales:

$$g1 = \frac{(x_e - x_U)(x_e - x_{UU})}{(x_D - x_U)(x_D - x_{UU})} \quad (3.60)$$

$$g2 = \frac{(x_e - x_U)(x_D - x_e)}{(x_U - x_{UU})(x_D - x_{UU})} \quad (3.61)$$

Para mallas uniformes, los coeficientes de los 3 valores nodales se vuelven: $\frac{3}{8}$ para el punto aguas abajo, $\frac{6}{8}$ para el primer nodo aguas arriba y $-\frac{1}{8}$ para el segundo nodo aguas arriba. Este esquema tiene un error de truncación del tercer orden en mallados uniformes y no uniformes. Si utilizamos ϕ_w en la Ec. 3.56, sobre su segunda derivada es posible mostrar que su error de truncación es el tercer orden, en cual sobre una malla uniforme con $u_x > 0$, conduce a:

$$\phi_e = \frac{6}{8}\phi_P + \frac{3}{8}\phi_E - \frac{1}{8}\phi_W - \frac{3(\Delta x)^3}{48} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right)_P + H \quad (3.62)$$

Cuando esta aproximación es usada en conjunto con la regla del punto medio sobre una integral de superficie el error de truncación del esquema pasa a ser de segundo orden. Sin embargo, la aproximación QUICK es un poco más precisa que la aproximación CDS, ambos esquemas convergen asintóticamente en un problema del segundo orden y las diferencias entre ellos son raramente considerables.

3.7.4. Condición de Courant-Friedrichs-Lewy

Esta condición es necesaria para la convergencia y resolución de ecuaciones diferenciales parciales de manera numérica y surge en el análisis numérico de esquemas de integración de tiempo explícitos, cuando se utilizan para la solución numérica. Como consecuencia, el intervalo de tiempo debe ser inferior a un cierto tiempo, de lo contrario la simulación produce resultados incorrectos. Para evadir el uso de esta condición se utilizan esquemas implícitos de integración de tiempo, de esta manera no se generan errores, por el no cumplimiento de esta condición pero con un mayor costo computacional. Aclarar que si se utiliza un paso de tiempo muy grande el fenómeno de igual manera no será reproducido fielmente y se incurrirá en errores incluso en un esquema implícito. Para el caso de una dimensión la condición de Courant-Friedrichs-Lewis se representa como:

$$C = \frac{u\Delta t}{\Delta x} < C_{max} \quad (3.63)$$

Donde C es el número adimensional de Courant y C_{max} depende de los métodos utilizados, en casos explícitos es 1 y para esquemas implícitos al resolver la matriz esta es menos sensible a distintos números de Courant. Para el caso de 3 dimensiones, se tiene:

$$C > \frac{u_x\Delta t}{\Delta x} + \frac{u_y\Delta t}{\Delta x} + \frac{u_z\Delta t}{\Delta x} \quad (3.64)$$

En la Figura 3.5 se representa la diferencia entre la simulación de un fenómeno que estable e inestable, donde a un mayor paso de tiempo la simulación se vuelve inestable, debido a que no es posible obtener toda la información necesaria para procesar los datos efectivamente al no existir puntos de dependencia físicos dentro del mallado.

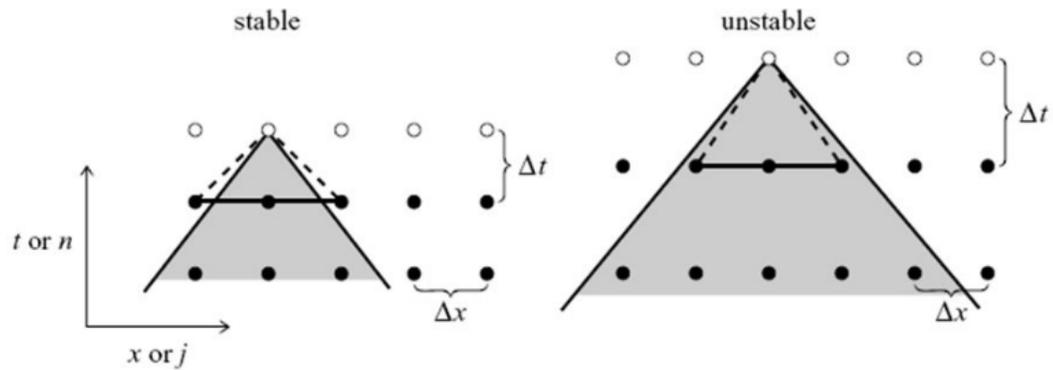


Figura 3.5: Simulación estable e inestable al variar el paso de tiempo.

3.7.5. Número de Fourier

Este número caracteriza la conducción del calor, y es la relación entre la velocidad de la conducción de calor y la velocidad de almacenamiento de energía.

$$Fo = \frac{\alpha t}{L^2} \quad (3.65)$$

En el caso de la cavidad en el tiempo de inicio, esta no posee una temperatura dentro de su dominio, por lo que este número es bastante pequeño y no representa un problema hasta que la transferencia de calor que ocurre entre las paredes y el aire afecte a todo el dominio, por lo que en un principio el número de Courant y el Número Fourier son poco importantes. Para evitar esto se utiliza un perfil de temperatura para que el dominio se encuentre con una temperatura adecuada de tal manera que la velocidad del flujo aire y la transferencia de calor entre las paredes y el fluido, sean tales que desde el principio se pueda predecir que pasos de tiempo son necesarios para simular la cavidad.

3.8. Métodos semi-implícitos SIMPLE y SIMPLEC

3.8.1. Esquema SIMPLE

El algoritmo SIMPLE (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations), es un método semi-implícito para resolver las ecuaciones de Navier Stokes [12], es iterativo (ecuaciones segregadas) en donde se van resolviendo las ecuaciones una a una. Los pasos que sigue este método son:

1. Establecer condiciones de borde (valores de la velocidad, presión, temperatura al inicio).
2. Calcular los gradientes de velocidad y presión.
3. Resolver la ecuación de momento discretizada para calcular la campo velocidad intermedio
4. Calcular las flujos de masa en las caras, no corregidos.
5. Resolver la ecuación de corrección de presión.
6. Actualizar el campo de presión $p^{k+1} = p^k + \text{urf} \cdot p'$, donde urf es el factor de baja-relajación.
7. Actualizar las condiciones de borde para la corrección de presión p'_b .
8. Corrección de flujos de masa en las caras; $\dot{m}_f^{k+1} = \dot{m}_f^* + \dot{m}_f'$
9. Corrección de las velocidades en las celdas; $\vec{v}^{k+1} = \vec{v}^* - \frac{V \nabla p'}{\vec{a}_p^v}$, en donde $\nabla p'$ es el gradiente de la corrección de presión, V es el volumen de la celda y \vec{a}_p^v es el vector de los coeficientes centrales, de un sistema discretizado lineal representando la ecuación de velocidad.
10. Actualizar densidad por cambio en la presión.
11. Repetir hasta lograr convergencia deseada.

En la Figura 3.6, se representa el proceso completo de calculo para los fluidos, en donde se incluyen los esquemas SIMPLE, SIMPLEC y SIMPLER, sin abordar en detalle de sus distintos procesos de calculo.

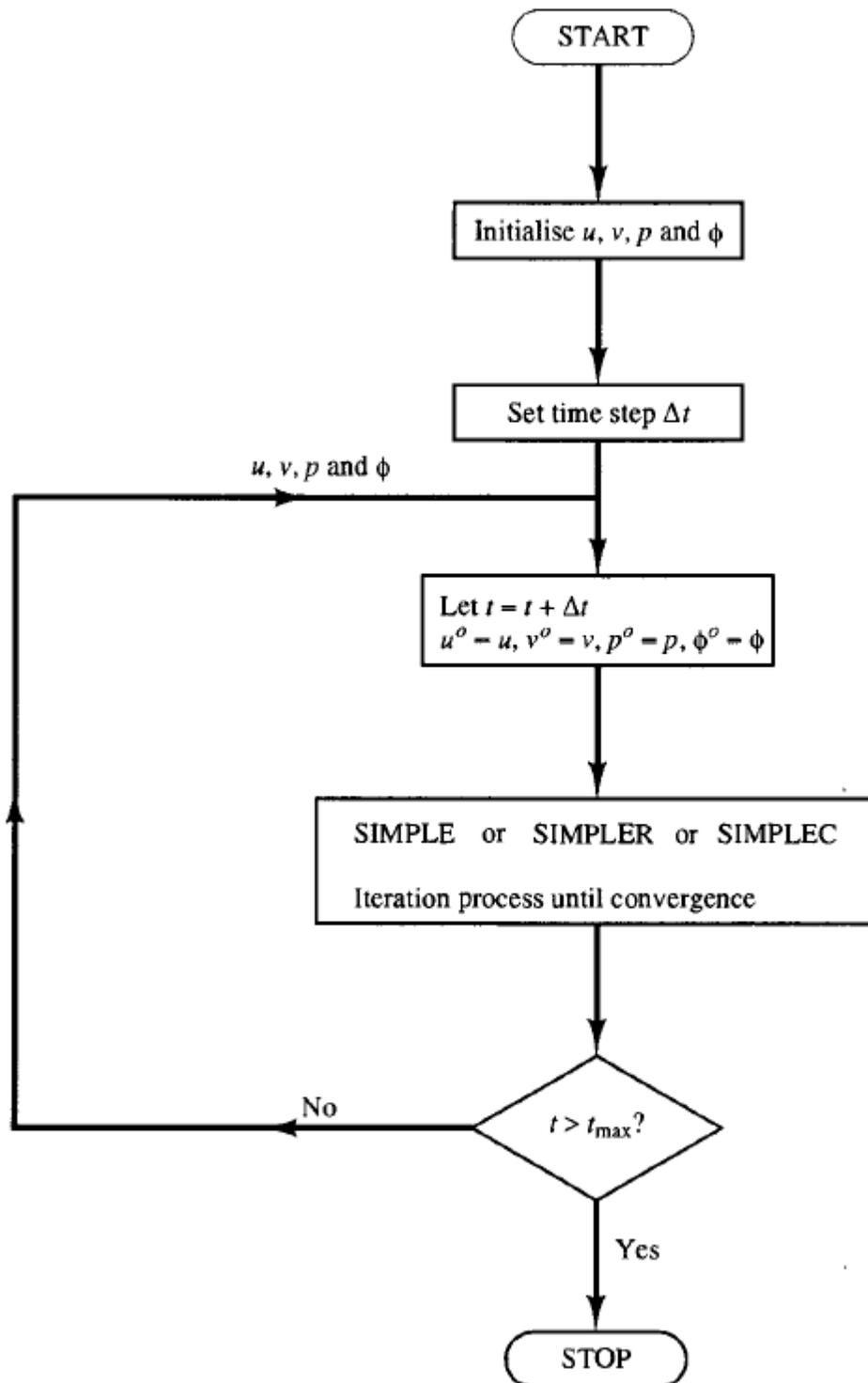


Figura 3.6: Diagrama de flujo Esquemas SIMPLE, SIMPLEC y SIMPLER

3.8.2. Esquema SIMPLEC

El algoritmo SIMPLEC (Semi-Implicit Method for Pressure Linked Equations Consistent) sigue los mismo pasos que el algoritmo SIMPLE, con la diferencia que las ecuaciones de momento son manipuladas de tal manera que la corrección de velocidad de SIMPLEC omite términos que son mas insignificantes que los omitidos en SIMPLE [16]. La ecuación de corrección de velocidad en u esta dada por:

$$u'_{i,j} = d_{i,j}(p'_{i-1,j} - p'_{i,j}) \quad (3.66)$$

donde

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j} - \sum a_{nb}} \quad (3.67)$$

de la misma manera para la ecuación de corrección de velocidad en v:

$$v'_{i,j} = d_{i,j}(p'_{i,j-1} - p'_{i,j}) \quad (3.68)$$

donde

$$d_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{a_{i,j} - \sum a_{nb}} \quad (3.69)$$

La ecuación corregida de presión discretizada es la misma que la del algoritmo SIMPLE, excepto que en los términos d son calculados de las ecuaciones 3.67 y 3.69. La secuencia de operaciones del SIMPLEC son idénticas al SIMPLE. La Figura 3.7, representa las operaciones necesarias para realizar el esquema SIMPLEC, en un diagrama de flujo.

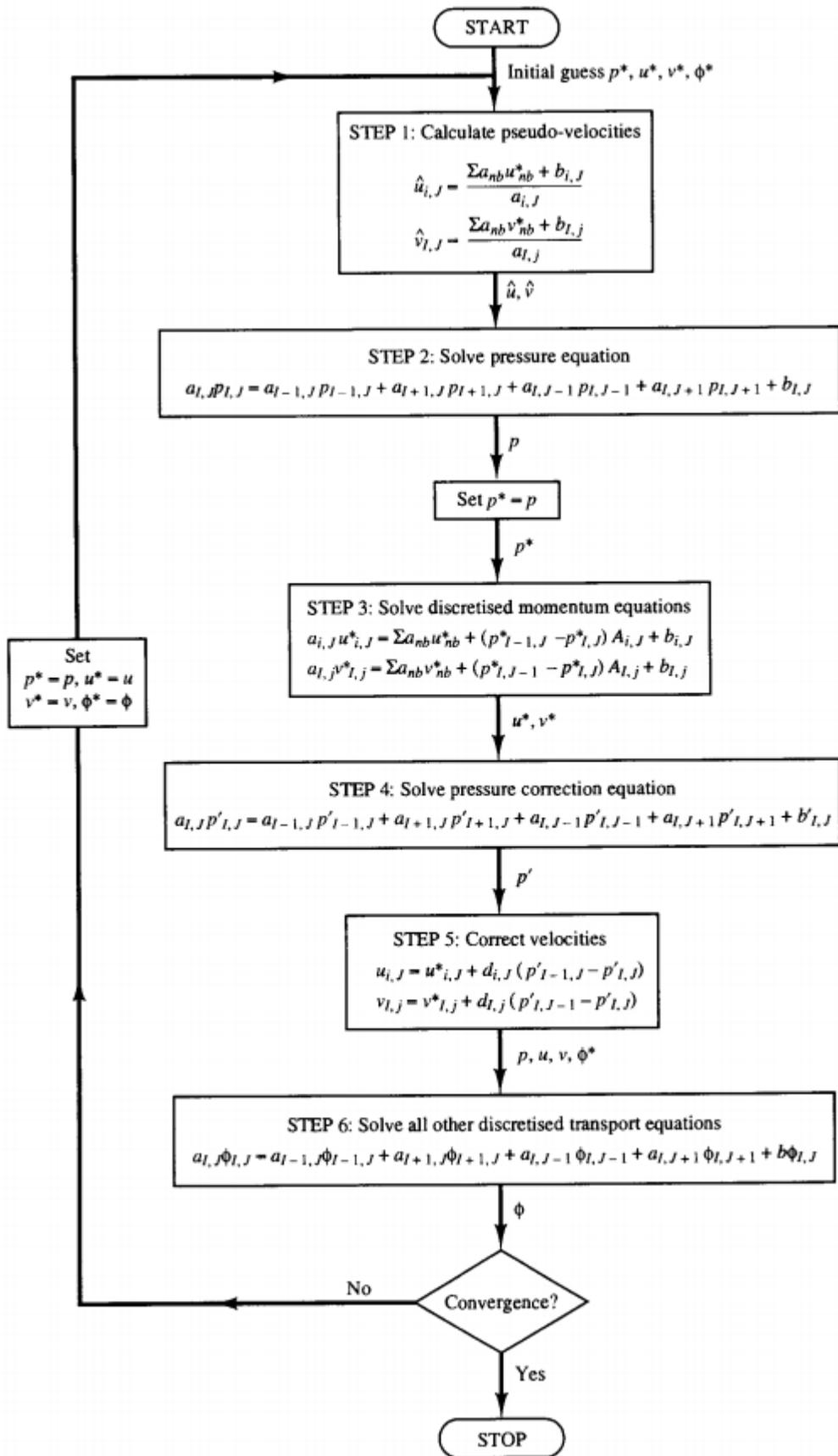


Figura 3.7: Operaciones del algoritmo SIMPLEC

3.9. Solvers y Modelos del Software

3.9.1. K-Épsilon

El modelo K-épsilon es uno de los modelos de turbulencia más comunes. Es un modelo que incluye dos ecuaciones de transporte extra para representar las propiedades turbulentas del flujo. Esto permite modelar los efectos de la convección y la difusión de la energía turbulenta [16].

La primera variable transporte es la energía cinética turbulenta k que determina la energía en la turbulencia. La segunda variable de transporte en este caso es la disipación turbulenta ϵ , que es la variable que determina la escala de la turbulencia.

Ecuación de energía cinética turbulenta (k)

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_k} \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + 2\mu_t E_{ij} E_{ij} - \rho \epsilon \quad (3.70)$$

Ecuación de tasa de disipación de energía turbulenta (ϵ)

$$\frac{\partial(\rho \epsilon)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho \epsilon u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} 2\mu_t E_{ij} E_{ij} - C_{2\epsilon} \rho \frac{\epsilon^2}{k} \quad (3.71)$$

Donde la viscosidad turbulenta es:

$$\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon} \quad (3.72)$$

En otras palabras las ecuaciones describen:

Rate of change of k or ϵ	+ Transport of k or ϵ by convection	=	Transport of k or ϵ by diffusion	+ Rate of production of k or ϵ
			- Rate of destruction of k or ϵ	

Las ecuaciones de transporte para el modelo estándar de K-Épsilon tienen 5 constantes ajustables. Para la mayoría de los casos de flujos turbulentos se emplean estos valores de constantes:

C_μ	σ_k	σ_ϵ	$C_{1\epsilon}$	$C_{2\epsilon}$
0,09	1,00	1,30	1,44	1,92

Tabla 3.5: Valores de las constantes del modelo estándar K-Épsilon para condiciones generales.

Condiciones de borde del modelo:

Entrada	Deben ser dados k y ϵ
Salida	$\frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial \epsilon}{\partial n} = 0$
Eje de simetría	$\frac{\partial k}{\partial n} = \frac{\partial \epsilon}{\partial n} = 0$
Flujo libre	$k = \epsilon = 0$
Pared sólida	Dependiendo del número de Reynolds

Tabla 3.6: Valores de las condiciones de borde para el modelo K-Épsilon.

Este modelo tiene la ventaja de ser el modelo de turbulencia más simple, en donde se necesita solo las condiciones iniciales y de borde, además de tener un excelente rendimiento para la mayoría de los flujos que se utilizan en la industria y se ha validado en numerosas ocasiones. Las desventajas de este modelo radica que para campos de presión adversos o que tienen grandes gradientes de presión este modelo no es lo suficientemente preciso para esos casos y al tener que agregar dos ecuaciones extra pierde rendimiento. Los casos en que no debiera utilizarse son en flujos no confinados, flujos rotativos, flujos totalmente desarrollados en ductos no circulares y en la entrada y salidas de compresores y bombas (gran gradiente de presión).

3.9.2. K-Omega

El modelo que se utiliza en Ansys esta basado en el modelo de Wilcox. Al igual que el modelo K-Épsilon, se incorpora en la ecuación de transporte la energía cinética turbulenta pero además también se incorpora la tasa de disipación específica u Omega simbolizado por w [16]. Al agregar estas dos ecuaciones a la ecuación del transporte es posible calcular distintos tipos de flujos como flujos que son limitados en la pared (Caso de estudio) y flujos de corte libre. La energía cinética turbulenta k y la tasa de disipación específica w son obtenidas de la siguientes ecuaciones de transporte:

$$\frac{\partial(\rho k)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho k u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_k \frac{\partial k}{\partial x_j} \right) + G_k - Y_k + S_k \quad (3.73)$$

$$\frac{\partial(\rho w)}{\partial t} + \frac{\partial(\rho w u_i)}{\partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma_w \frac{\partial w}{\partial x_j} \right) + G_w - Y_w + S_w \quad (3.74)$$

Donde G_k representa la generación de la energía cinética turbulenta debido a los gradientes de velocidad, G_w generación de w , Y_k y Y_w representa la disipación de k y w . Γ_k y Γ_w representa la difusividad efectiva de k y w respectivamente. S_k y S_w como los términos fuentes de k y w).

En la Tabla 4.6, muestra los coeficientes constantes que se utilizan en el método para describir la mayoría de casos. Estas constantes se pueden variar según se necesite.

α	β	β^*	σ	σ^*	ϵ
5/9	3/40	9/100	1/2	1/2	$\beta^* w k$

Tabla 3.7: Valores de las constantes del modelo Wilcox K-Omega para condiciones generales.

3.9.3. Large Eddy Simulation (LES)

La técnica LES para simular flujos turbulentos se basa en tomar en cuenta los movimientos en gran escala, ya que, su tamaño y fuerza los convierten en los transportadores más efectivos de las propiedades que se conservan, además en generalmente son mucho más energéticos que los de pequeña escala [16]. Lo que realiza LES es simular de manera más precisa los remolinos grandes que los pequeños y estos los aproxima y si comparamos este método con un DNS (Direct Numeric Solution) está última requiere mucho más procesamiento que la aproximación que realiza LES, pero en sí ambos métodos computacionalmente son costosos. En general se prefiere DNS en caso que sea factible y LES en situaciones de alto número de Reynolds o con geometrías complejas.

En la Figura 3.8 se puede apreciar las diferencias entre el DNS y el LES:

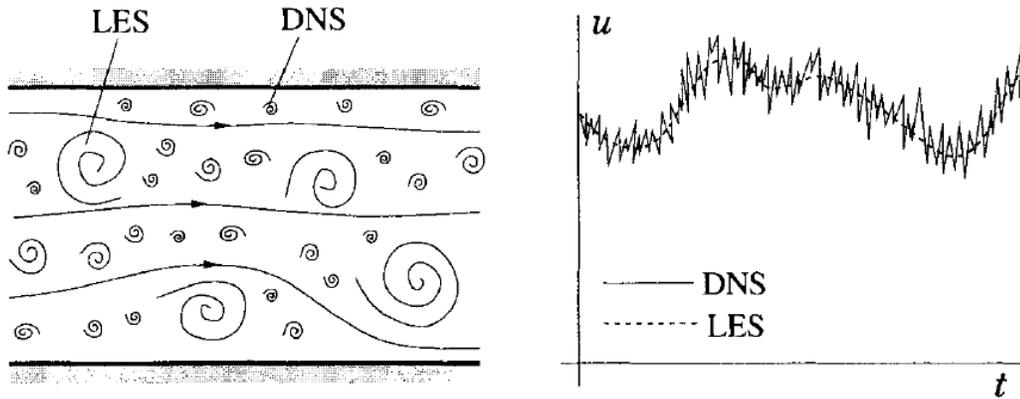


Figura 3.8: Diferencias de escalas (izquierda) y del campo de velocidad (derecha) entre DNS y LES.

Para que LES solo tome en cuenta las grandes escalas del movimiento del fluido, debe filtrar el campo de velocidad, en donde es el promedio local del campo completo. Al filtrar el campo de velocidad queda:

$$u_i(\bar{x}) = \int G(x, x') u_i(x') dx' \quad (3.75)$$

Donde $G(x, x')$ es el filtro del Kernel, una función localizada. Los filtros del Kernel los cuales han sido aplicados en LES incluyen diversos filtros como un filtro Guassiano, un filtro de caja y en filtro 'cutoff' o de corte, este último elimina todos los coeficientes sobre el corte. Estos filtros tienen un largo de escala asociado con cada uno de ellos L_e . Aproximadamente, los remolinos de mayor tamaño que L_e son grandes remolinos, mientras que los más pequeños que L_e son pequeños remolinos, los que necesitan modelarse.

Cuando filtramos las ecuaciones de Navier-Stokes en un flujo incompresible, se obtienen ecuaciones similares a las ecuaciones de RANS:

$$\frac{\partial \rho \bar{u}_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho \bar{u}_i \bar{u}_j}{\partial x_j} = -\frac{\partial \bar{p}}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\mu \left(\frac{\partial \bar{u}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \bar{u}_j}{\partial x_i} \right) \right] \quad (3.76)$$

Para modelar la parte izquierda de la ecuación, dada su complejidad, es necesario introducir un nuevo término:

$$\tau_{ij}^S = -\rho (\overline{u_i u_j} - \bar{u}_i \bar{u}_j) \quad (3.77)$$

τ_{ij}^S es llamado 'subgrid-scale of Reynolds stress', este término aproxima lo que

sucede en la escalas más pequeñas, estos modelos se llaman "subgrid-scale (SGS)".

El SGS estrés de Reynolds contiene promedios locales del campo de escalas más pequeñas, basados en el campo de velocidad local.

3.9.4. Solver basado en la Densidad

El Solver basado en la densidad resuelve las ecuaciones de continuidad, momento y (cuando corresponda) transporte de energía y especies simultáneamente (es decir, acoplados) [7]. Ecuaciones gobernantes para escalares adicionales serán resueltos después y secuencialmente (es decir, segregados el uno del otro y del conjunto acoplado). Debido a que las ecuaciones que rigen son no lineales (y acopladas), varias iteraciones del bucle de solución debe realizarse antes de que se obtenga una solución convergente. Cada iteración consta de los pasos ilustrados en la siguiente Figura 3.9

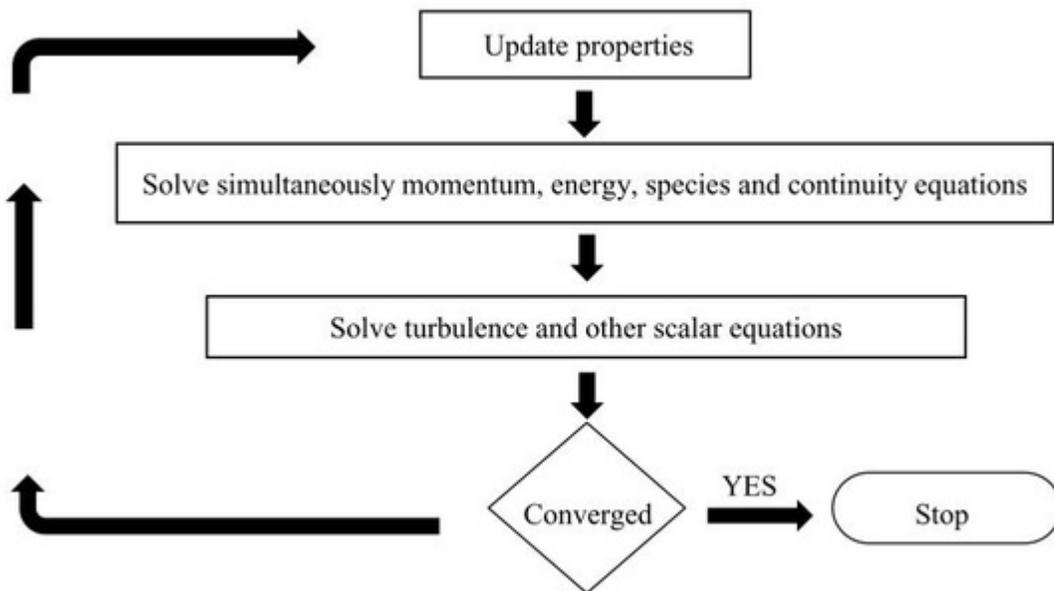


Figura 3.9: Diagrama de flujo del método basado en densidad.

El método de solución basado en la densidad, puede resolver el sistema acoplado de ecuaciones (continuidad, momento, ecuaciones de energía) utilizando, ya sea la formulación explícita acoplada o la formulación acoplada-implícita. La principal distinción entre el solver basado en densidad explícita e implícita, es que el explícito resuelve para todas las variables celda por celda en cambio el enfoque implícito resuelve para todas las variables en todas las celdas al mismo tiempo.

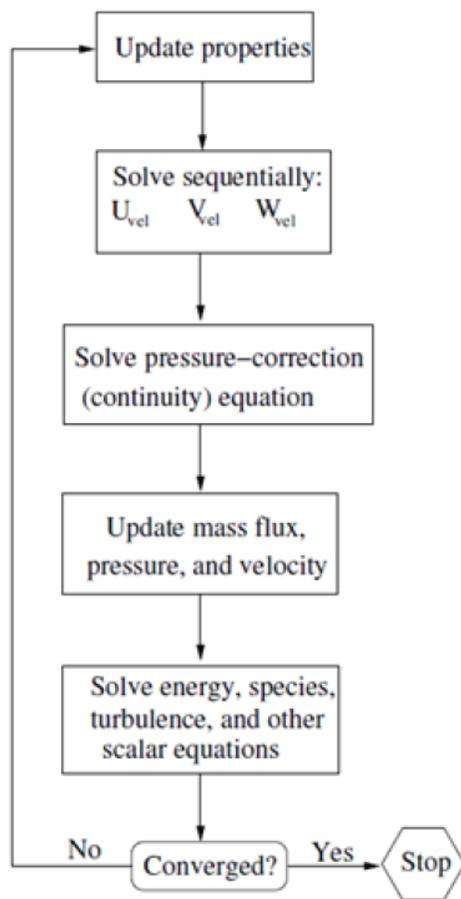
3.9.5. Solver basado en Presión

El Solver basado en presión emplea un algoritmo que pertenece a una clase general de métodos llamados el método de proyección [7]. En el método de proyección, donde la restricción de la conservación de masa del campo de velocidad se logra al resolver una ecuación de presión (o corrección de presión). La ecuación de presión viene de las ecuaciones continuidad y de momento de tal manera que el campo de velocidad, corregido por la presión (se calculan las ecuaciones para masa y momento en un paso intermedio llamado predictor para luego ser corregido posteriormente, Fig. 3.10 parte izquierda) pasos de tiempo , satisface la continuidad . Dado que las ecuaciones gobernantes son no lineales y acopladas entre sí, el proceso de solución involucra iteraciones en las que todo el conjunto de ecuaciones gobernantes se resuelve repetidamente hasta que la solución converge. Existen dos algoritmos de solución basados presión están en ANSYS Fluent. Un algoritmo segregado y un algoritmo acoplados.

El solver basado en presión segregado usa un algoritmo de solución donde las ecuaciones gobernantes se resuelven secuencialmente(u,v,w,etc.). Cada ecuación de gobernante, mientras se resuelve, está "desacoplada." "segregada"de otras ecuaciones. El algoritmo segregado es eficiente desde el punto de vista de la memoria, ya que, las ecuaciones discretizadas solo necesitan almacenarse en la memoria de a la vez. Sin embargo, la convergencia de la solución es relativamente lenta, en la medida en que las ecuaciones se resuelven una por una.

A diferencia del algoritmo segregado descrito anteriormente, el algoritmo acoplado basado en presión resuelve un sistema acoplado de ecuaciones que comprende las ecuaciones de momento y la ecuación de continuidad basada en la presión. Este algoritmo necesita de un paso menos que el algoritmo segregado al resolver inmediatamente todas las variables de solución Figura 3.10. Las ecuaciones restantes están resueltas en forma desacoplada como en el algoritmo segregado.Dado que las ecuaciones de momento y continuidad se resuelven de una manera estrechamente acoplada, la tasa de la convergencia de la solución mejora significativamente cuando se compara con el algoritmo segregado, sin embargo, el requisito de memoria aumenta en 1,5 - 2 veces el del algoritmo segregado, debido a que el sistema de todas las ecuaciones de continuidad basadas en impulso y presión se deben almacenar en la memoria cuando se está resolviendo para los campos de velocidad y presión (en lugar de una sola ecuación, como es el caso con el algoritmo segregado).

Pressure-Based Segregated Algorithm



Pressure-Based Coupled Algorithm

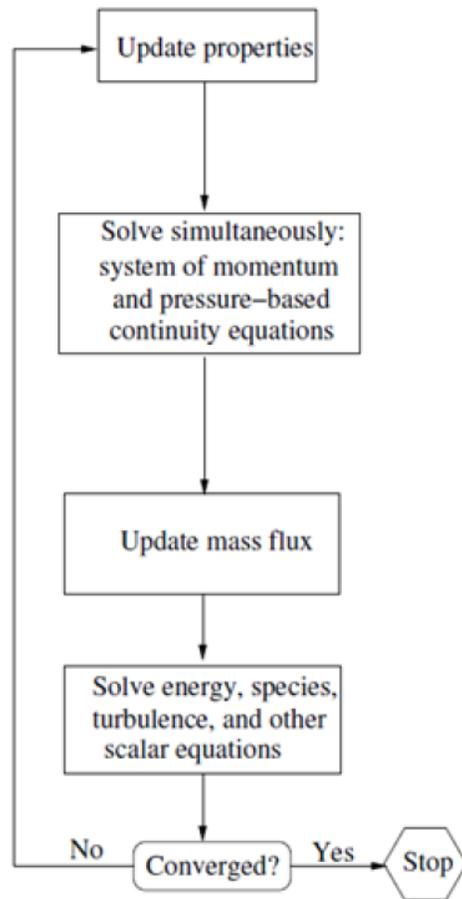


Figura 3.10: Diagrama de flujo del algoritmo segregado (derecha) y algoritmo acoplado (izquierda).

Capítulo 4

Metodología

En esta sección se determina la configuración óptima de la simulación, además se plantea la estrategia utilizada para validar la hipótesis de Boussinesq dentro de la cavidad.

4.1. Condiciones generales de la simulación

Los aspectos generales de la simulación, como condiciones en las paredes, temperatura de la pared caliente y fría, se eligieron en base la investigación con resultados experimentales realizada por Didier Saury, Nicolas Rouger, Francis Djanna, François Penot [15]. El experimento fue realizado en una cavidad de $3,84[m]$ de alto $1[m]$ ancho y $0,86[m]$ de profundidad, paredes laterales de aluminio $K = 134[\frac{W}{mk}]$ y $\epsilon = 0,15$, las paredes son mantenidas a temperatura constante por un circuito donde una mezcla de agua-glycol. temperatura ambiente del aire es aproximada de $20[C^\circ]$.

La Tabla 4.1, muestra un resumen de las condiciones generales de la simulación y la Figura 4.1 ilustra las dimensiones de la cavidad.

$T_{fria}[K]$	$T_{caliente}[K]$	$\Delta T[K]$	$Ra[-]$	$H/L[-]$
263	283	20	$1,5 \cdot 10^9$	4

Tabla 4.1: Condiciones generales de la simulación.

También se consideraron dentro de la configuración inicial de la simulación, los parámetros presentados en la Tabla 4.2. Estos valores se encuentran en el Anexo A Tabla propiedades del aire. [4].

$\rho_{273} [\frac{kg}{m^3}]$	$\alpha_{273} [\frac{m^2}{s}]$	$Cp_{273} [\frac{J}{kg \cdot K}]$	$\beta_{273} [\frac{1}{K}]$	$U_{\infty} [\frac{m}{s}]$
1,292	$1,818 \cdot 10^{-5}$	1006	0,00366	0,1

Tabla 4.2: Parámetros generales de la simulación.

Donde U_{∞} es la velocidad de flujo libre. Flujo que no es influenciado por la capa límite, esta velocidad permite calcular el número de Mach, el tensor de corte en la pared y la energía cinética turbulenta.

4.2. Condiciones de borde

Las paredes inferior y superior mostradas en la Figura 4.1, se consideraron adiabáticas, por lo que no existió transferencia de calor con el aire confinado en el dominio de la cavidad, por otro lado, la pared roja tuvo una temperatura constante de $283[K]$ y la pared azul de $263[K]$. La pared frontal y posterior se consideraron como condición periódica.

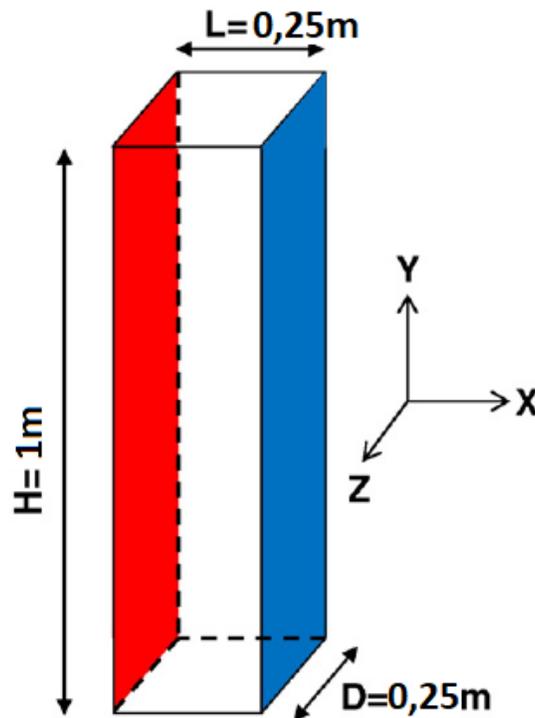


Figura 4.1: Dimensiones de la cavidad con relación de aspecto de 4.

Cabe mencionar que la cavidad utilizada en la investigación de Didier Saury et al. no posee una relación de aspecto de 4, es cercana a 4.4.

4.3. Elección de Solvers

Como la variación de presión dentro de la cavidad es muy baja, debido a que la diferencia de temperatura entre la pared caliente y fría es baja (aire confinado) y además, el número de Mach es menor que 1 al no existir cambios de sección abruptos o entradas de flujo de aire a alta velocidad, se eligió el solver basado en presión por sobre el basado en densidad. ANSYS recomienda el solver basado en densidad cuando el número de Mach es mayor a 1 y existen cambios de secciones que favorecen un gradiente de presión alto, también se recomienda para mezclas de fluidos [7].

4.4. Elección de modelos

Los modelos escogidos para la simulación fueron LES WALE y modelo K-Omega. En el caso de LES, el modelo escogido para realizar la simulación fue el modelo LES WALE, por sobre los modelos LES Smagorinsky-Lilly y LES WMLES, ya que este presenta ventajas en comparación al modelo Smagorinsky al calcular adecuadamente el movimiento del fluido cercano a la pared. La Figura 4.3 muestra la mayor precisión del modelo WALE por sobre el Smagorinsky-Lilly para una configuración de un flujo en un canal [17] (Figura 4.2).

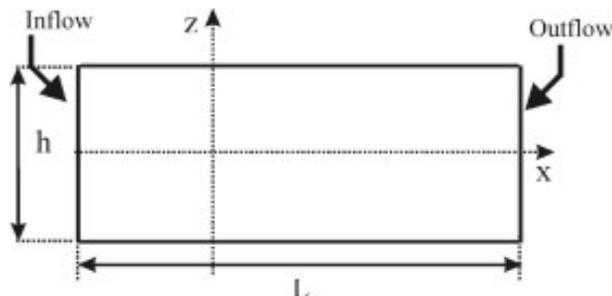


Figura 4.2: Configuración de la simulación para el estudio de los modelos LES.

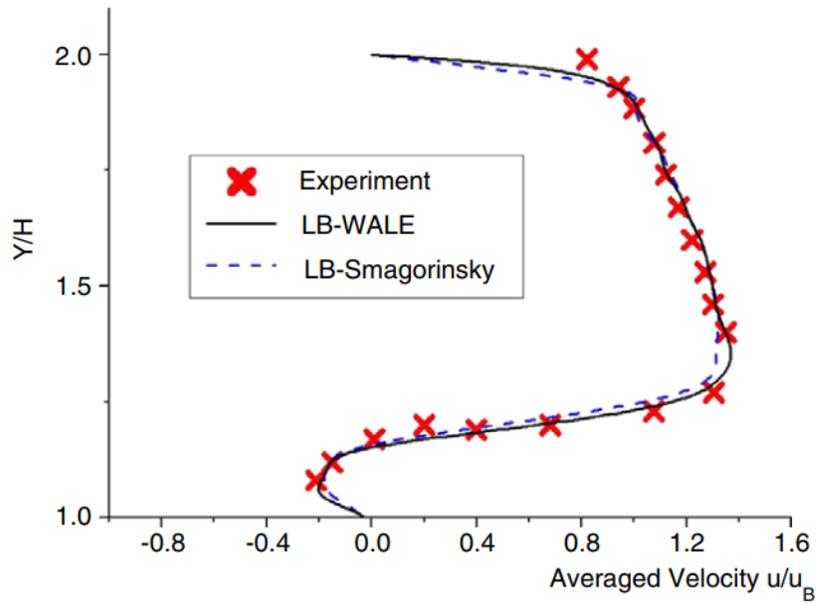


Figura 4.3: Comparación del perfil de velocidad en un punto A.

Por otro lado, el modelo LES WMLES está diseñado para alcanzar buena precisión para número de Reynolds altos, en cambio para un número de Reynolds bajo, como lo es este caso, el modelo LES WMLES se comporta como un LES normal (sólo con las funciones de tratamiento cerca de la muralla), por lo que se deduce que LES WALE es el modelo más conveniente. En un estudio hecho por el Instituto Americano de Aeronáutica y Astronáutica [9], se evaluaron las diferencias que existen entre los modelos LES WALE y WMALES lo cual se ilustra en la Figura 4.4.

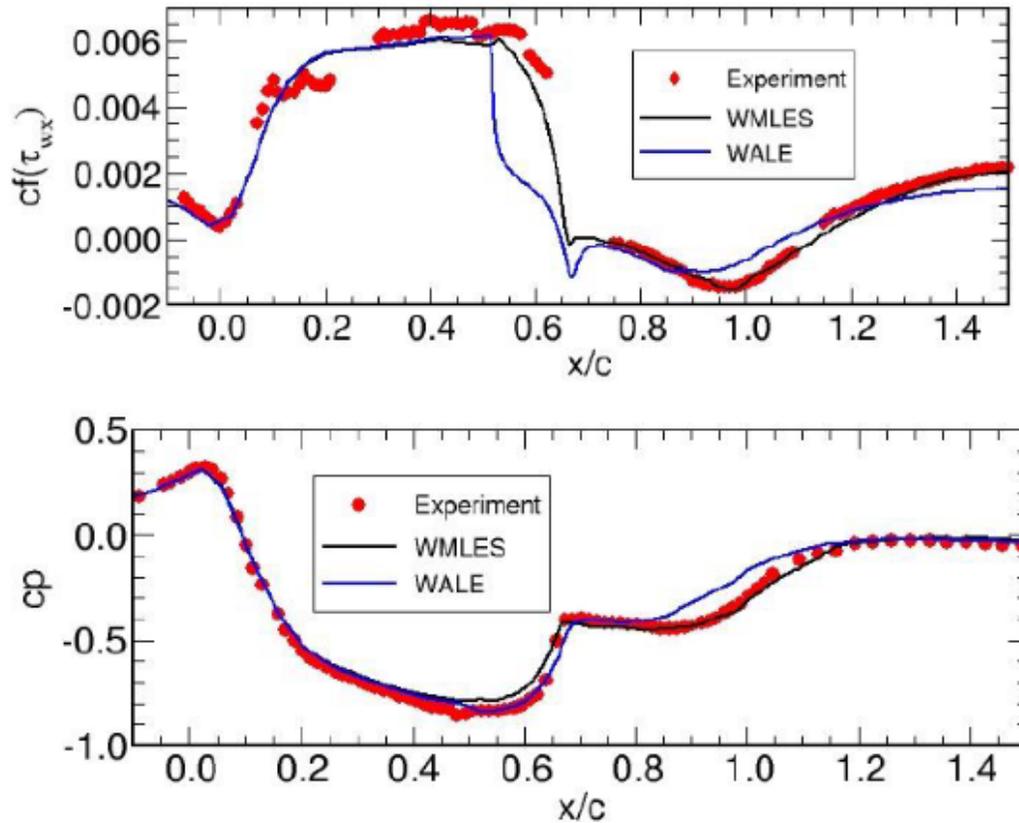


Figura 4.4: Comparación del perfil de velocidad en un punto B.

Para reafirmar lo anteriormente expuesto, en el estudio "Large eddy simulation for improvement of performance estimation and turbulent flow analysis in a hydrodynamic torque converter" [8] se concluyó, que el modelo WALE es el segundo modelo más preciso y eficiente en término de error y tiempo de computación respectivamente, quedando por detrás del modelo KET (Modelo no soportado por ANSYS). En el estudio simulan el flujo que atraviesa una bomba centrífuga, por lo que el número de Reynolds es alto, aún así el modelo WALE es superior al modelo WMLES y WMLES-OMEGA, ambos soportados por ANSYS, esto se ilustra en la Figura 4.5 .

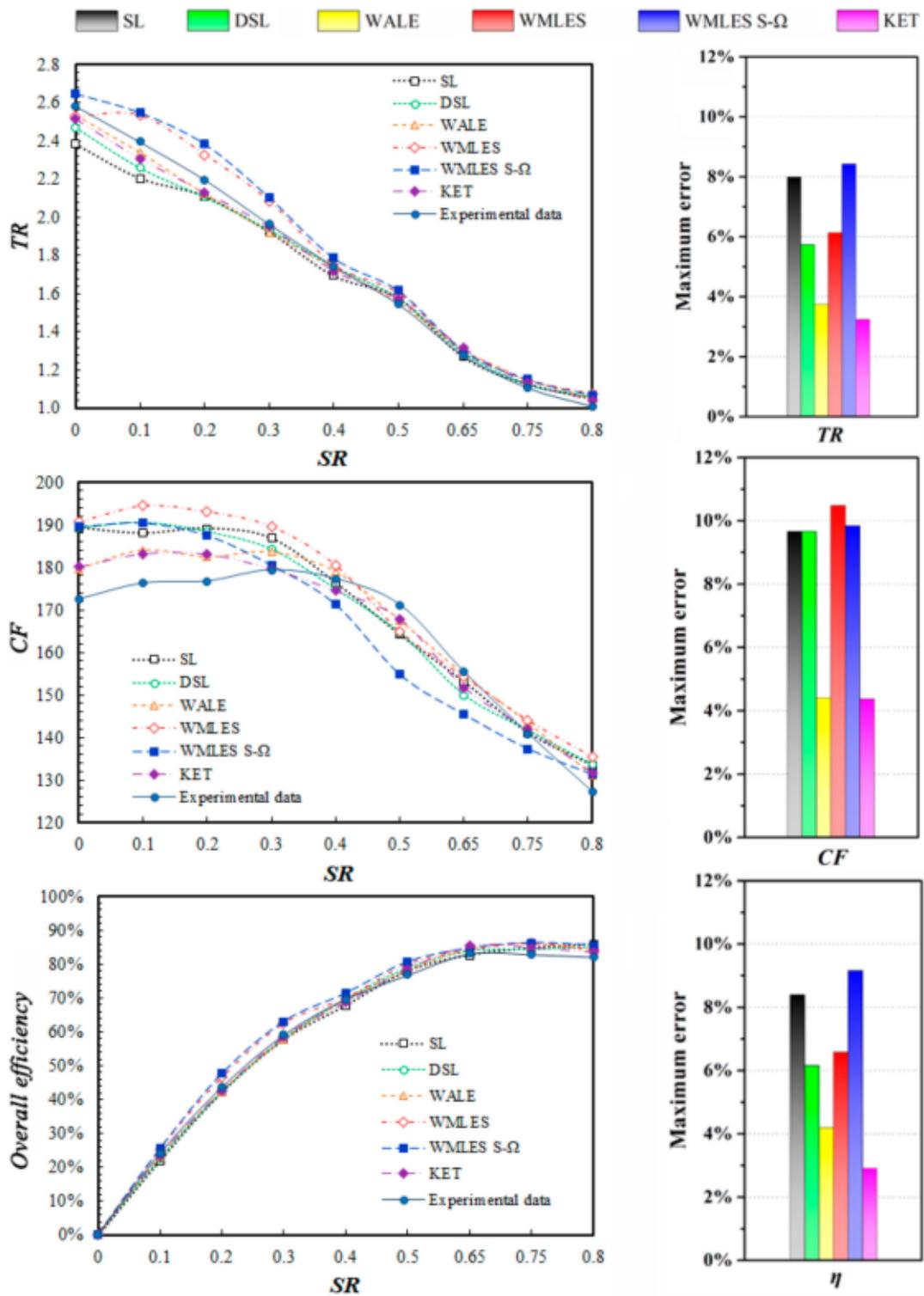


Figura 4.5: Rendimiento y máximo error de los distintos modelos SGS.

Para el caso del modelo K-Omega, este se escogió sobre el modelo K-Epsilon, debido a que presenta mejores resultados en los valores de velocidad y características del fluido cercana a la pared (tiene funciones específicas para ellos), también este modelo es mucho más eficiente que el modelo LES WALE, pero menos preciso, ya que éste no calcula los remolinos dentro de la capa límite. Las diferencias son apreciables en la Figura 4.6.

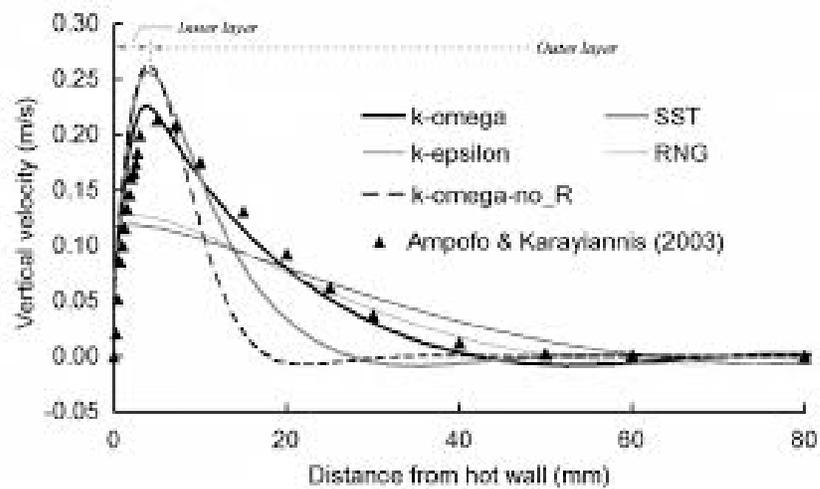


Figura 4.6: Diferencias en los resultados para los distintos modelos.

4.5. Malla

y^+ juega un rol importante a la hora de realizar la malla. y^+ junto con u^+ son ejes normalizados de la distancia y la velocidad respectivamente. Fueron creados para encontrar relaciones con el comportamiento del fluido cercano a la pared [10]. En la Figura 4.7 se muestran las regiones dentro de la capa límite y como se relaciona el y^+ junto con u^+ dentro de ella.

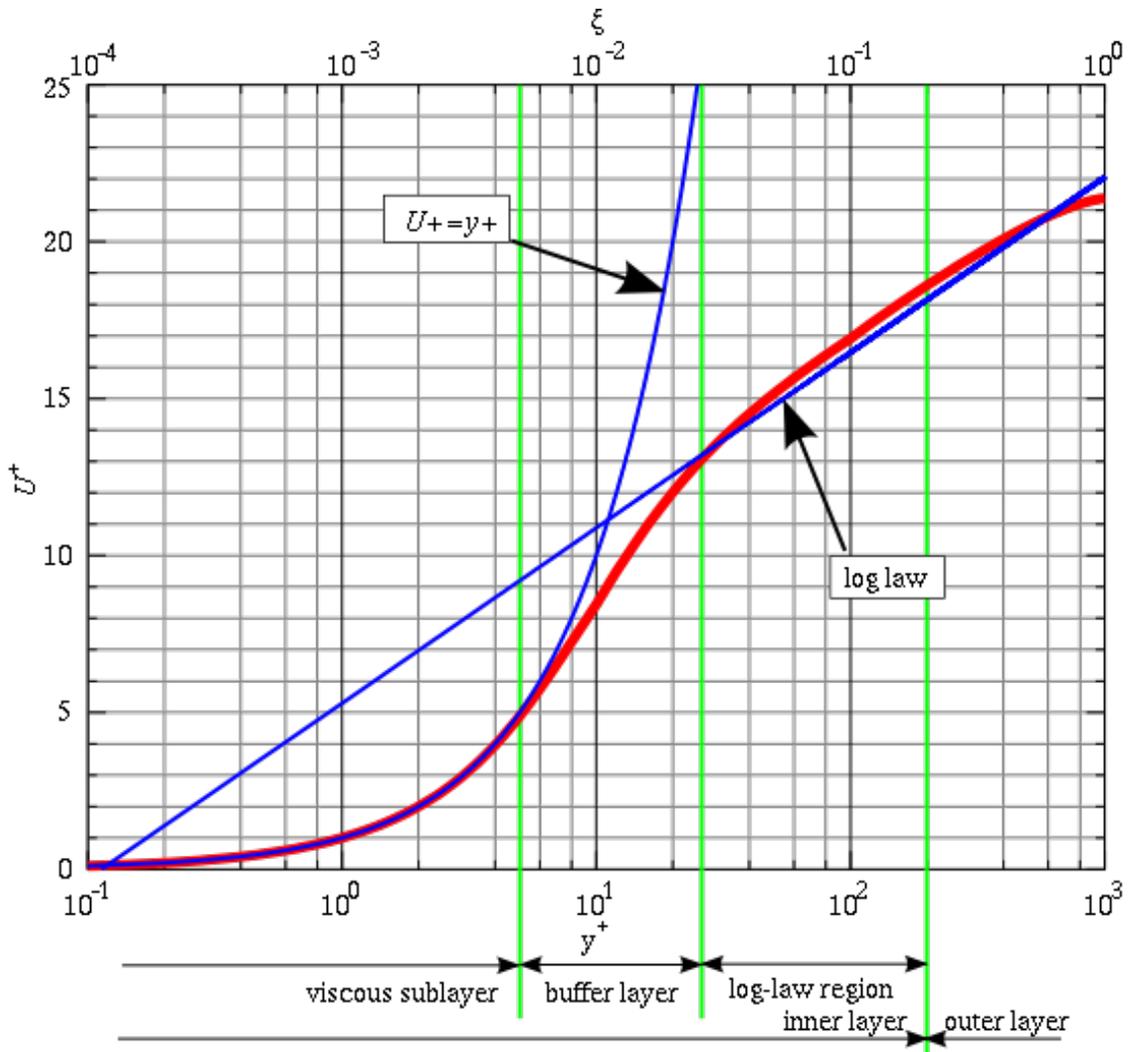


Figura 4.7: Gráfico de la Ley de la Muralla y sus regiones.

La malla depende del modelo a utilizar, en cuanto a LES y K-Omega se debe cumplir que el primer elemento esté a una distancia tal que, $y^+ \approx 1$ (dentro de la subcapa viscosa, modelo a número de Reynolds bajo), con esta condición los vórtices más grandes podrán ser representados de manera más precisa en LES, despreciando los vórtices más pequeños, en cambio el modelo K-Omega utiliza funciones en la pared para calcular adecuadamente las fuerzas viscosas. Para el modelo K-Omega, no es necesario refinar la malla para cumplir con $y^+ \approx 1$. Como este modelo está pensado para número de Reynolds alto, y^+ debe estar entre $30 < y^+ < 300$, prácticamente en la región Log-law (ver Figura 4.7). Al refinar más la malla en el caso de LES y K-Omega, se llega a un punto en el cual no se cumple la condición anterior, donde $y^+ \ll 1$, en

este caso los modelos no pueden calcular adecuadamente los fenómenos, dentro de la capa límite. Para estimar la distancia a la que debe estar la primera celda de la pared, se requiere conocer que y^+ depende de la distancia de la pared, la viscosidad cinemática y la velocidad de fricción, y esta última a su vez, depende de la densidad y tensor de corte en la pared. Por tanto:

$$y^+ = \frac{U^* y}{\nu} \quad (4.1)$$

$$U_* = \sqrt{\frac{\tau_w}{\rho}} \quad (4.2)$$

Mientras tanto el tensor de corte en la pared se puede escribir en función de la densidad, la velocidad fuera de la capa límite y el coeficiente de fricción:

$$\tau_w = \frac{1}{2} \rho U_\infty C_f \quad (4.3)$$

Para calcular el coeficiente de fricción se utilizará la aproximación de Prandtl-Schlichting que es válida para números de Reynolds menores a 10^9 .

$$C_f = 0,0586 [\log_{10}(Re_x)]^{-2,58} \quad (4.4)$$

Con las fórmulas anteriores y los valores de la Tabla 4.2, es posible calcular la distancia necesaria mínima para cumplir con los requisitos del mallado para LES y K-Omega.

$$y = 0,001662 [m] \quad (4.5)$$

Se utilizó la misma malla para ambos problemas, el eje Z no necesita una cantidad considerable de nodos debido a que, la velocidad en el eje Z es insignificante en comparación a las velocidades de los demás ejes (del orden de $10^{-5} [\frac{m}{s}]$, en cambio el eje X es el que necesita de la mayor cantidad de nodos, porque es necesario cumplir con las condiciones para modelos de bajo número de Reynolds ($y^+ \approx 1$). En el eje Y es muy importante tener una cantidad de nodos para describir el movimiento del fluido cerca de la pared de manera correcta. El programa ANSYS utiliza un bios en donde se elije en que sección la pared se puede refinar, con lo que también disminuye la cantidad de nodos en la parte central del eje, en cambio aumenta la cantidad de nodos cerca de las paredes, esto reduce el número de nodos totales en comparación a si utilizamos

divisiones equidistantes.

Divisiones eje X	105
Divisiones eje Y	60
Divisiones eje Z	55
Bias Factor eje X	3.8
Total nodos	499472
Total Celdas	480375

Tabla 4.3: Tabla resumen de malla utilizado en la cavidad.

4.6. Métodos de Interpolación escogidos

El método utilizado para resolver las ecuaciones de Navier Stokes fue SIMPLEC con una corrección de asimetría de 1, debido a que es más eficiente al omitir términos en la corrección de velocidad en la ecuación de momento. En la práctica se probó que es más eficiente y estable que el método SIMPLE.

Como el flujo debe desarrollarse de manera precisa y eficiente, no es posible utilizar métodos de primer orden (sólo se utilizaron para los resultados iniciales) para calcular escalares de orden más alto como la velocidad o la viscosidad turbulenta, por este motivo ninguno de los métodos de interpolación es de primer orden. Bases de celdas de mínimos cuadrados es más eficiente que los otros métodos disponibles. La corrección de presión se calculó con el método PRESTO!, este método es el más eficiente para convección natural con fluidos que se mueven a baja velocidad y cuando los gradientes de presión son bajos. El cambio de densidad en la cavidad es muy pequeño, en este apartado un método de segundo orden es suficiente para calcular la densidad efectivamente, pero al tratar de buscar más precisión en la simulación, se escogió QUICK al igual que la Energía. El método de diferenciación central acotada es necesario al utilizar LES. La tabla 4.4 muestra un resumen de las discretizaciones espaciales escogidas.

Discretización espacial	Método de Interpolación
Gradiente	Bases de celdas de mínimos cuadrados
Presión	PRESTO!
Densidad	QUICK
Momento	Diferenciación central acotada
Energía	QUICK

Tabla 4.4: Métodos de interpolación para la discretización espacial.

Por otra parte la discretización temporal se escogió de segundo orden implícita (primer orden implícita en casos de solución inicial) sin términos de relajación.

4.7. Paso de tiempo

Cuando se tienen número de Rayleigh mayor 10^9 es necesario en ciertas ocasiones utilizar modelos no-estacionarios. El paso de tiempo en estos modelos, depende de el Número Courant mencionados en la Ec. 4.6, que a su vez dependen del mallado y el fenómeno estudiado respectivamente, además influyen en el paso de tiempo la longitud y la velocidad de escala de Kolmogorov que se presentan dentro de la capa límite.

$$C = \frac{u_x \Delta t}{\Delta x} \quad (4.6)$$

Con $C=0.5$ y $\Delta x = y$, para casos de convección natural.

$$\Delta t = \frac{y}{u_x} = 0,00625 \quad (4.7)$$

Por lo tanto, con un $\Delta t < 0,00625[s]$ la simulación es compatible con modelos con un bajo número de Reynolds.

Para calcular el paso de tiempo correspondiente considerando la longitud y la velocidad de escala por turbulencia en convección natural, es necesario estimar la constante de tiempo [3].

$$\tau = \frac{L}{U} \approx \frac{L^2}{\alpha} (Pr Ra)^{-0,5} = \frac{L}{\sqrt{g\beta\Delta TL}} \quad (4.8)$$

Donde L y U son la longitud y la velocidad de escala respectivamente. Con la siguiente aproximación es posible obtener un paso de tiempo considerando las escalas de longitud y velocidad.

$$L = H(Ra_H Pr)^{-\frac{1}{4}} \quad (4.9)$$

$$U = \frac{\alpha}{H}(Ra_H Pr)^{\frac{1}{2}} \quad (4.10)$$

$$\Delta t \approx \frac{\tau}{4} \quad (4.11)$$

Número de Rayleigh	Paso de tiempo
$1,48 \cdot 10^7$	$7,26 \cdot 10^{-2}$
$1,48 \cdot 10^8$	$1,29 \cdot 10^{-2}$
$1,48 \cdot 10^9$	$2,30 \cdot 10^{-3}$
$2,26 \cdot 10^9$	$1,67 \cdot 10^{-3}$
$3,01 \cdot 10^9$	$1,35 \cdot 10^{-3}$
$7,39 \cdot 10^{10}$	$6,87 \cdot 10^{-4}$
$1,48 \cdot 10^{10}$	$4,08 \cdot 10^{-4}$

Tabla 4.5: Pasos de tiempo para distintos números de Rayleigh según aproximación con escalas.

Se compararon los dos métodos para estimar el paso de tiempo, por lo que se utilizó un paso de tiempo de 0,001 para números de Rayleigh inferiores a $5 \cdot 10^9$ y 10^{-4} para número de Rayleigh mayores a $5 \cdot 10^9$.

4.8. Validación

Se comparó el resultado experimental de Saury et al. [15] con una simulación K-Omega compresible y con la hipótesis de Boussinesq con aproximadamente 500.000 nodos. La validación dió como resultado que el modelo esta correctamente configurado al comparar los resultados con el gráfico de la velocidad en el eje Y en función de la distancia X.

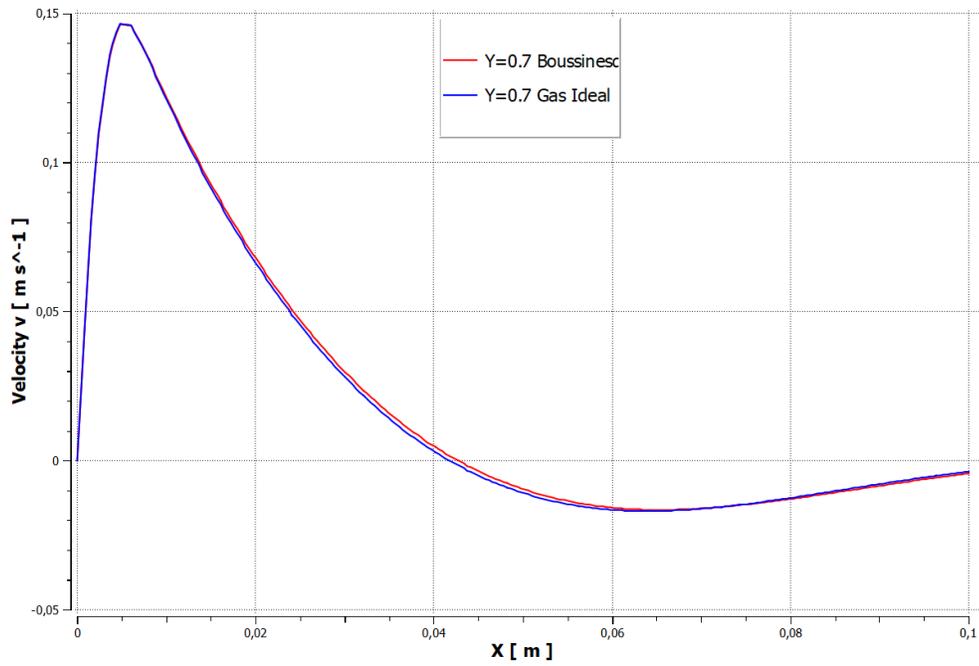


Figura 4.8: Velocidad v en función de X a un Rayleigh igual a $1,48 \cdot 10^9$ y $Y=0.7$ utilizando K-Omega

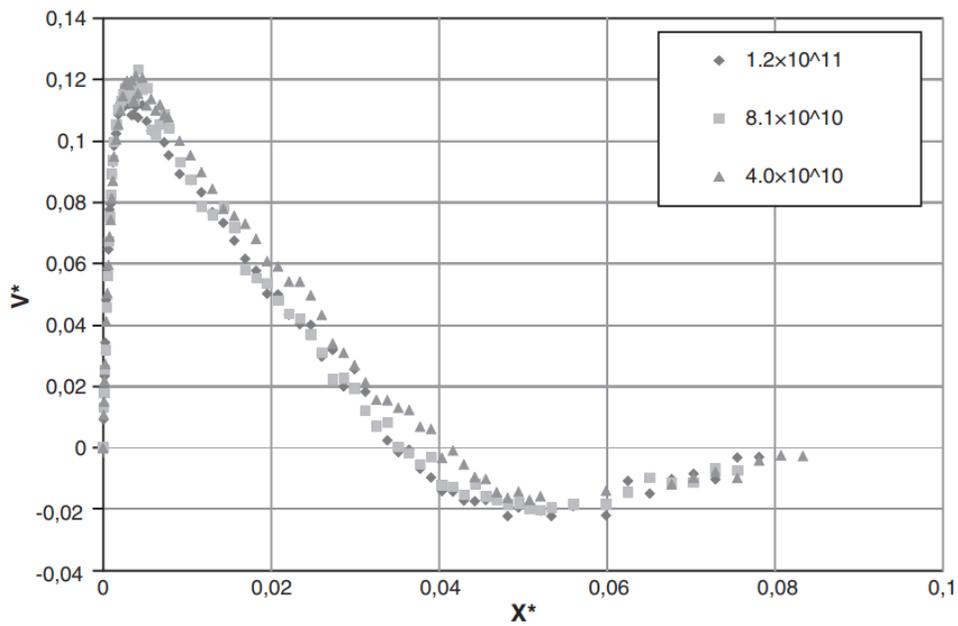


Figura 4.9: Velocidad v en función de X a distinto número de Rayleigh y $Y=0.7$, resultado experimental

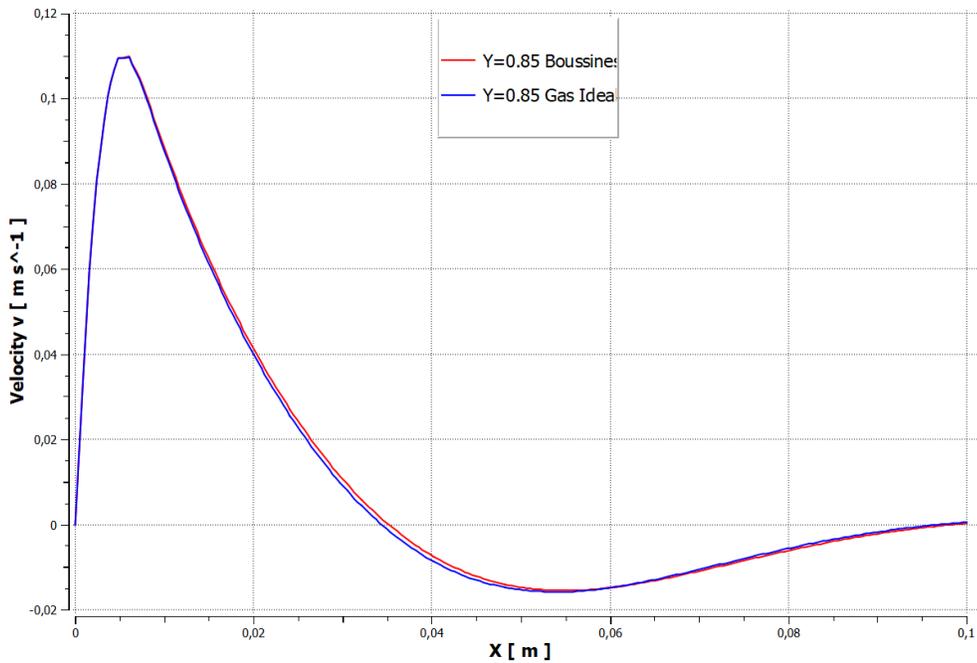


Figura 4.10: Velocidad v en función de X a un Rayleigh igual a $1,48 \cdot 10^9$ y $Y=0.85$, utilizando K-Omega.

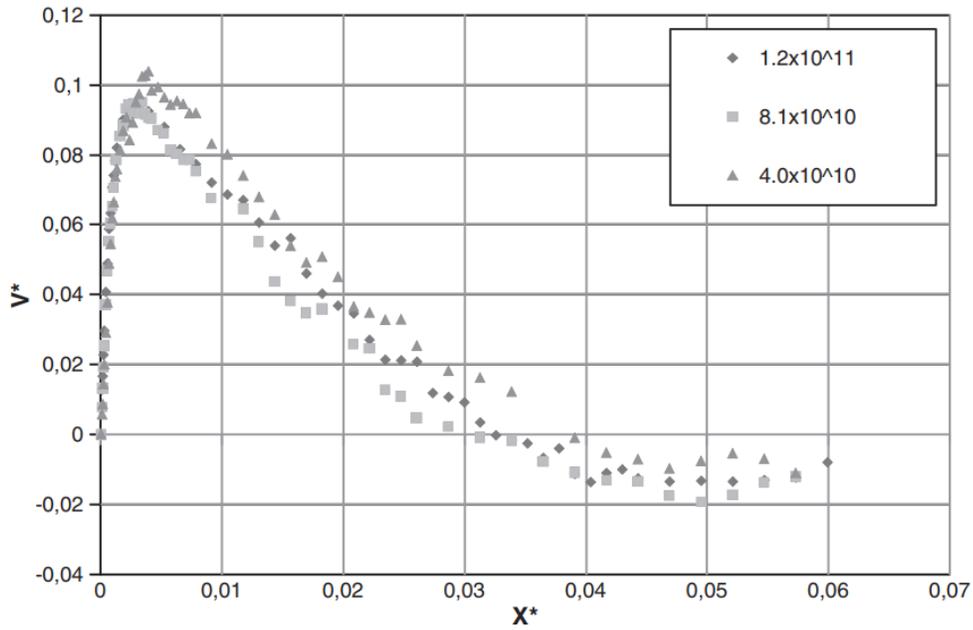


Figura 4.11: Velocidad v en función de X a distintos número de Rayleigh $Y=0.85$, resultado experimental.

Como se muestra las figuras anteriores, los resultados siguen con la tendencia que

los perfiles obtenidos a distintos números de Rayleigh. A la altura de $Y=0.85$, los resultados son aproximados a los experimentales de Saury et al. [15] y siguen con la tendencia, por otra parte a la altura de $Y=0.7$ la tendencia es apreciable pero existen diferencias con los resultados experimentales, sobre todo en la velocidad máxima alcanzada.

4.9. Casos de estudio

Se realizaron 7 simulaciones, con número de Rayleigh distintos, $1,48 \cdot 10^9$, $4,97 \cdot 10^9$ y $1,13 \cdot 10^{10}$ (esto es para evidenciar las diferencias entre los estados del fluido de laminar, transición y turbulencia), 6 de estas corresponden a simulaciones con el modelo K-Omega SST y la otra a LES WALE con Rayleigh igual a $1,48 \cdot 10^9$. Las simulaciones con K-Omega se hicieron en pares para cada número de Rayleigh mencionado con la diferencia en el calculo de densidad. Las simulaciones fueron comparadas unas de otras para identificar los distintos comportamientos del fluido a diversos número de Rayleigh.

4.10. Estrategia de Validación de Hipótesis

Los flujos tipo convección natural son fuertemente influenciados por el número de Rayleigh, a mayor número de Rayleigh es necesario más potencia computacional pero también es necesario obtener una solución más simple. Esta solución se obtiene en régimen laminar por lo tanto, se debe disminuir el número de Rayleigh de nuestro caso inicial (Rayleigh igual a $1,48 \cdot 10^9$). Para ello simplemente se cambió la gravedad, de tal manera que el nuevo número de Rayleigh sea de $1,48 \cdot 10^7$, con ello fue posible obtener una solución estacionaria con métodos de control de primer orden para la solución inicial, luego de obtener esta solución se cambian los métodos de control a de mayor orden. Después de obtenida la solución laminar estacionaria se calcularon las demás soluciones a un número de Rayleigh mayor cambiando levemente la gravedad o la temperatura de las paredes. En algunos casos como en el método K-Omega usando Boussinesq en la densidad se obtuvieron soluciones estacionarias hasta el número de Rayleigh igual a $1,13 \cdot 10^{10}$, no así en el mismo método utilizando como densidad gas ideal, lo que evidencia un aumento en el calculo computacional que demanda el cambio de calcular la densidad como gas ideal. Para el caso de LES WALE, este método fue pensado para calcular soluciones no estacionarias, aunque utilice la misma solución

laminar estacionaria como base a las demás soluciones estas se verán influenciadas por el paso de tiempo seleccionado. Por otro lado fue necesario crear una función definida por el usuario (UDF) para calcular la solución inicial laminar. Esta función incluye un perfil de temperatura lineal con el fin de que la simulación sea más estable, rápida y precisa. El código de la UDF y como se implementa en ANSYS estará disponible en el Anexo B. Se utilizó condición periódica en las paredes a lo largo del eje X, debido a que mejora la estabilidad de la simulación y variación que se produce a lo largo del eje Z es despreciable.

Se estudiaron los contornos de temperatura para cada caso de estudio, 4 contornos de temperatura (K-Omega y LES, con Boussinesq y gas ideal) para un cierto número de Rayleigh, con ello serán apreciables los distintos comportamientos del fluido en cada caso, se espera que para Rayleigh cercanos a 10^9 los comportamientos sean similares y a medida a que aumente el número de Rayleigh se vean las influencias que tienen los métodos en los respectivos flujos. Los contornos de la magnitud de velocidad también fueron estudiados y se esperó un comportamiento similar que el contorno de temperatura. Al estudiar el perfil de velocidad v (dirección y) a lo largo del eje X y cercanos a la pared caliente y fría, se compararon las distintas velocidades que alcanzan dentro y fuera de la capa límite dependiendo del método utilizado para calcular la turbulencia. Esto último nos dió un indicio claro de como afecta la solución el como se calcula la densidad. En la sección 3.3.2 se discutieron los que criterios que agregó Philippe-Emmanuel Roche [14] a la validación de la hipótesis de Boussinesq, por lo que se calculó en cada caso si se cumplen dichos criterios.

Capítulo 5

Resultados

5.1. Computadores y tiempo de procesamiento

Se utilizaron dos máquinas de procesamiento para las distintas simulaciones (Tabla 5.1), estas trabajaban en paralelo y cada una con método de cálculo de densidad.

Hardware y Software	Computador A	Computador B
Procesador	R5 2600	i3 8100
Número de núcleos/hilos	6/12	4/4
Placa Madre	Asus B350 Prime plus	MSI H110m Pro-VH
Almacenamiento	SSD+HDD	SSD
Tarjeta Gráfica	Rx 470 4gb	integrada HD 630
RAM	(2x8gb) a 3200mhz	(2x16gb) a 2666mhz
Sistema Operativo	Windows 10 PRO	Windows 10 PRO
Versión Ansys	19.2 Academic	19.2 Academic
Densidad	Boussinesq	Gas ideal

Tabla 5.1: Especificaciones técnicas generales de los 2 computadores utilizados para las simulaciones.

La tabla 5.2, muestra los tiempos de procesamiento para cada simulación realizada. Notar que a mayor número de Rayleigh el tiempo de procesamiento sube notoriamente. Como son distintos procesadores es difícil hacer una comparativa objetiva en cuanto más se demora en calcular la densidad como gas ideal que como con la hipótesis de Boussinesq, además muchos factores influyen en el tiempo de procesamiento como latencia de las RAMS, velocidad de las mismas (Mhz), frecuencia de los procesadores

y su IPC, número de núcleos e hilos, ancho de banda, etc.

Casos	T.Boussinesq	T.Gas Ideal
$1,48 \cdot 10^9$ K-Omega	100 minutos	180 minutos
$4,97 \cdot 10^9$ K-Omega	180 minutos	300 minutos
$1,13 \cdot 10^{10}$ K-Omega	600 minutos	1 día
$1,48 \cdot 10^9$ LES WALE	5 semanas	N/A

Tabla 5.2: Tiempo de procesamiento aproximado para las distintas simulaciones.

5.2. Criterios de Phillippe-Emmanuel Roche

Los criterios (Ec. 3.14, Ec. 3.15, Ec. 3.16 y Ec. 3.17) fueron presentados anteriormente, estos validan la hipótesis de Boussinesq en una convección natural de Rayleigh-Bénard, si cumplen que son mucho menores a 1 ($Criterio_n \ll 1$). La Tabla 5.3 muestra los resultados obtenidos en la cavidad.

Número de Rayleigh	$1,48 \cdot 10^9$	$4,97 \cdot 10^9$	$1,13 \cdot 10^{10}$
Criterio 1	$7,326 \cdot 10^{-2}$	$7,326 \cdot 10^{-2}$	$7,326 \cdot 10^{-2}$
Criterio 2	$5,558 \cdot 10^{-5}$	$2,189 \cdot 10^{-4}$	$5,535 \cdot 10^{-4}$
Criterio 3	$1,931 \cdot 10^{-7}$	$6,472 \cdot 10^{-7}$	$1,487 \cdot 10^{-6}$
Criterio 4	$5,9306 \cdot 10^{-10}$	$7,576 \cdot 10^{-9}$	$4,2484 \cdot 10^{-8}$

Tabla 5.3: Valores de los criterios propuestos por Phillippe-Emmanuel Roche considerando densidad como gas ideal.

Aunque la cavidad no presenta una configuración de Rayleigh-Bénard la circulación del fluido es la misma con diferencia de la capa límite que se presenta en las paredes laterales, provocando en el caso de la cavidad dentro de ella una mayor transferencia de calor y disipación de energía. Como la turbulencia está ligada directamente a las fluctuaciones del campo de velocidad y esta última al número de Rayleigh (que depende de la geometría, del fluido y la temperaturas de las paredes), entonces se espera un comportamiento similar en ambos escenarios.

5.3. Gráficos a distintos número de Rayleigh

En esta sección se presentarán los resultados obtenidos de las simulaciones anteriormente descritas. El modelo de viscosidad empleado en esta sección es K-Omega

SST con las ecuaciones de pared habilitadas. 3 estados del fluido serán presentados con el fin de analizarlos en el presente capítulo (Laminar, Transición y Turbulencia).

5.3.1. Laminar

En las Figuras 5.1 y 5.2 se muestran los contornos de Densidad, Temperatura, Viscosidad Turbulenta y Energía cinética turbulenta para el régimen de $Ra = 1,48 \cdot 10^9$. Existe una gran diferencia en los contornos de densidad, ya que al usar la hipótesis de Boussinesq la densidad es constante en todo el dominio en cambio considerando la densidad como gas ideal el contorno es muy similar al de la temperatura pero invertida, esto se repite para los 3 estados. Por otro lado los demás contornos no se aprecian grandes diferencias, sólo en la viscosidad turbulenta en la zona superior izquierda e inferior derecha.

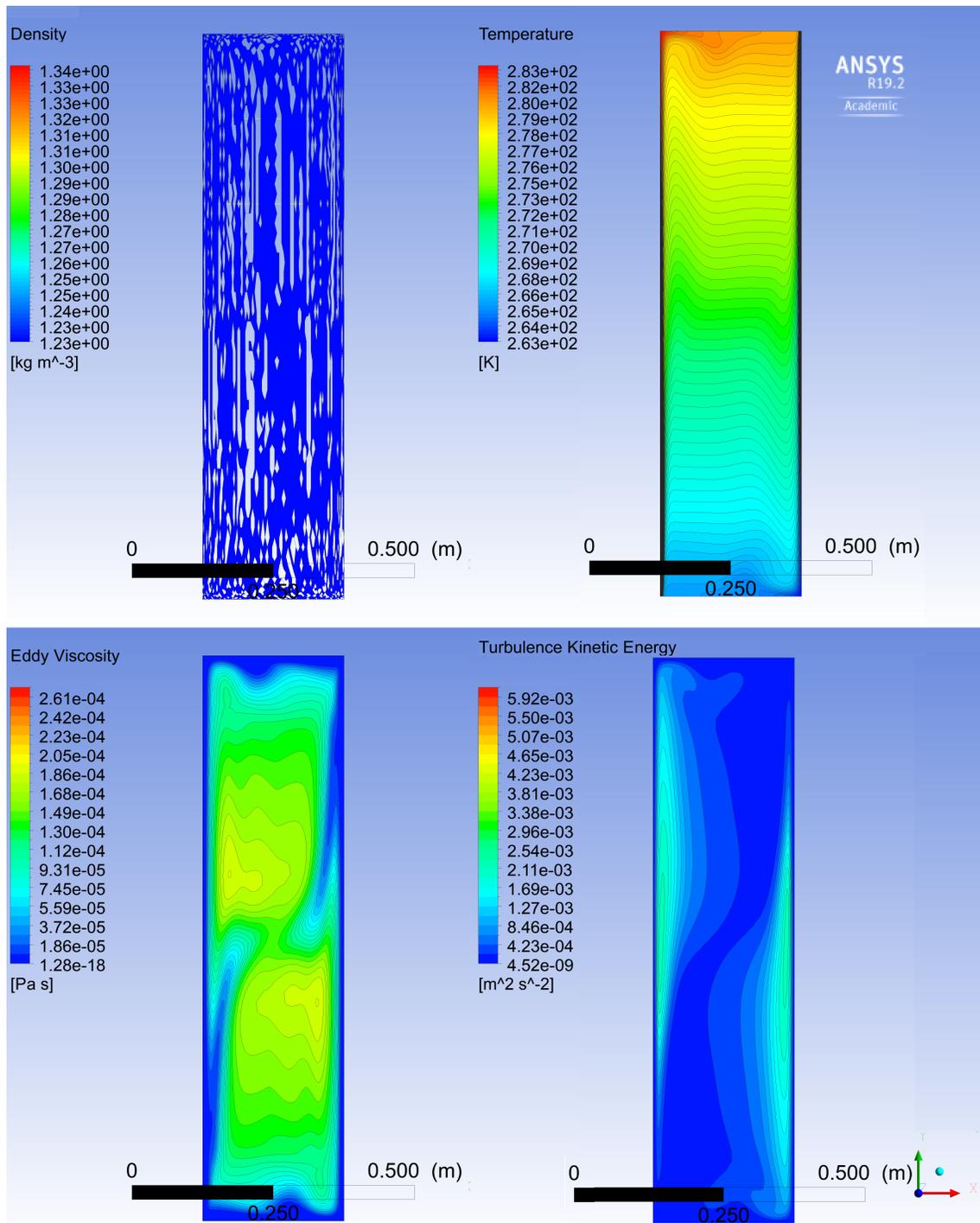


Figura 5.1: Contornos de densidad (Boussinesq), temperatura, viscosidad turbulenta y energía cinética turbulenta a media profundidad para $Ra = 1,48 \cdot 10^9$

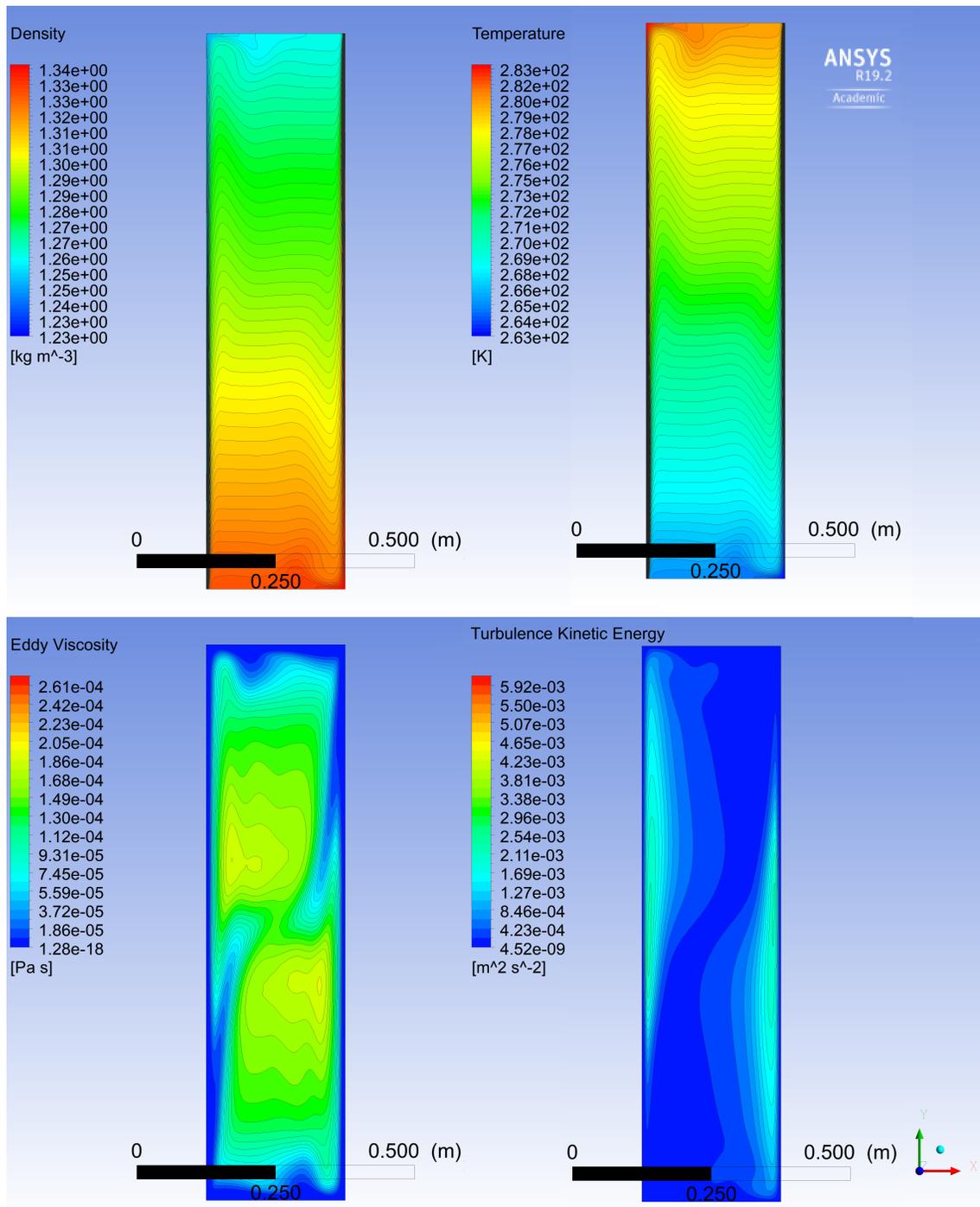


Figura 5.2: Contornos de densidad (gas ideal), temperatura, viscosidad turbulenta y energía cinética turbulenta a media profundidad para $Ra = 1,48 \cdot 10^9$

Se gráfico la velocidad u y v a lo largo de la cavidad, representándose en las Figuras

5.3 y 5.4 para el régimen de $Ra = 1,48 \cdot 10^9$. Se contemplaron diferencias en la Figura 5.3 del orden $10^{-3}[\frac{m}{s}]$, más aún acercarse en la zona de $0,2 < x < 0,25$. La Figura 5.4 no muestra diferencias evidentes en los perfiles de velocidad entre los dos métodos de cálculo de densidad.

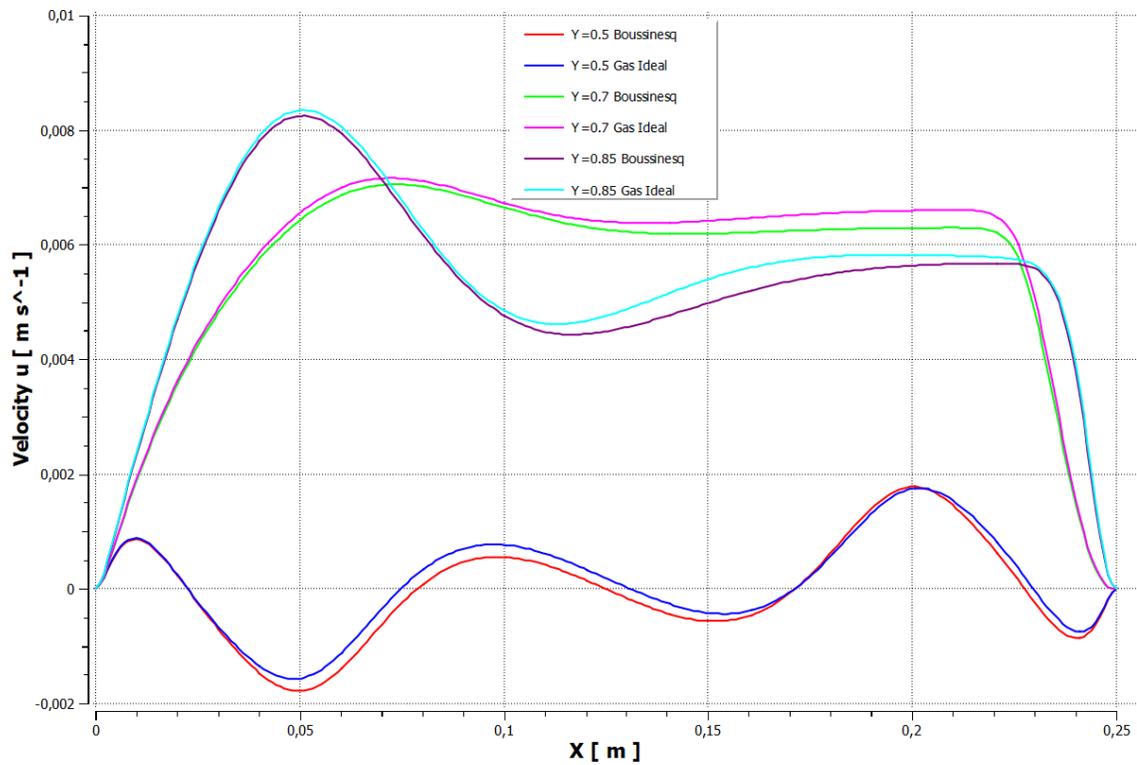


Figura 5.3: Velocidad u a lo largo de la cavidad a distintas alturas con $Ra = 1,48 \cdot 10^9$.

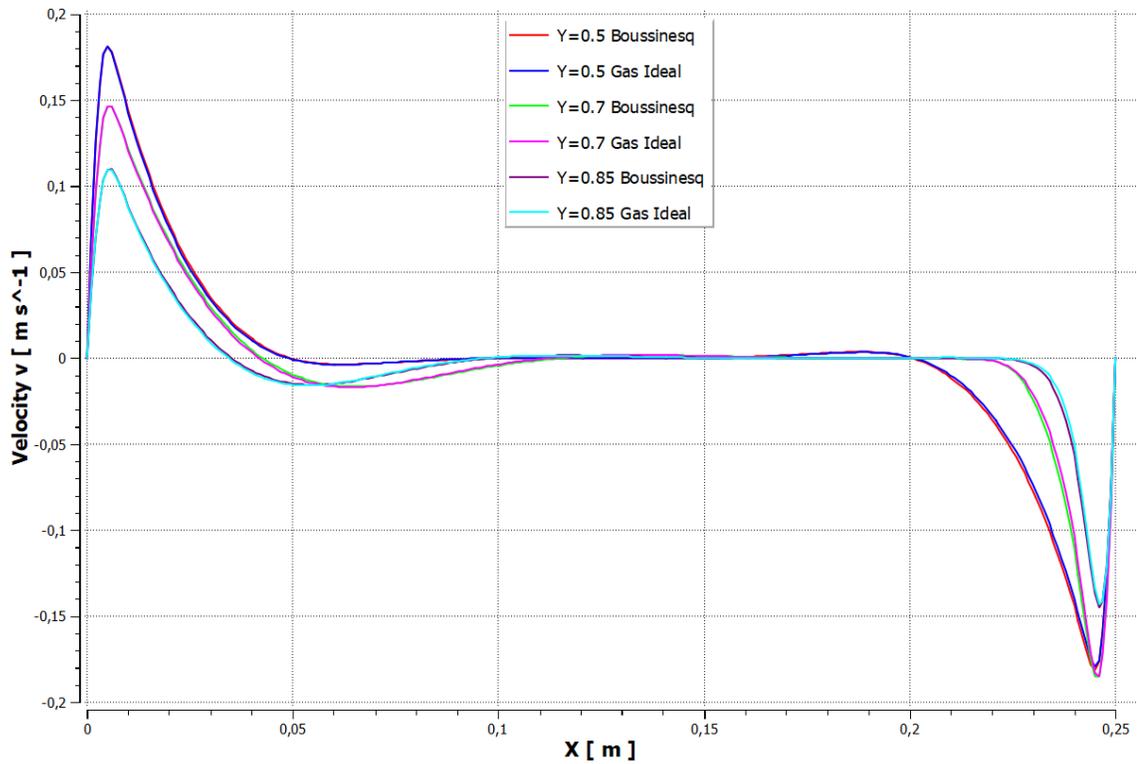


Figura 5.4: Velocidad v a lo largo de la cavidad a distintas alturas con $Ra = 1,48 \cdot 10^9$.

5.3.2. Transición

En las Figuras 5.5 y 5.6 se muestran los contornos de densidad, temperatura, viscosidad turbulenta y energía cinética turbulenta para el régimen de $Ra = 4,97 \cdot 10^9$. No existen diferencias notables en los contornos de temperatura y viscosidad turbulenta, pero sí en la parte central de la cavidad del contorno de energía cinética turbulenta, en donde se estrecha y disminuye globalmente.

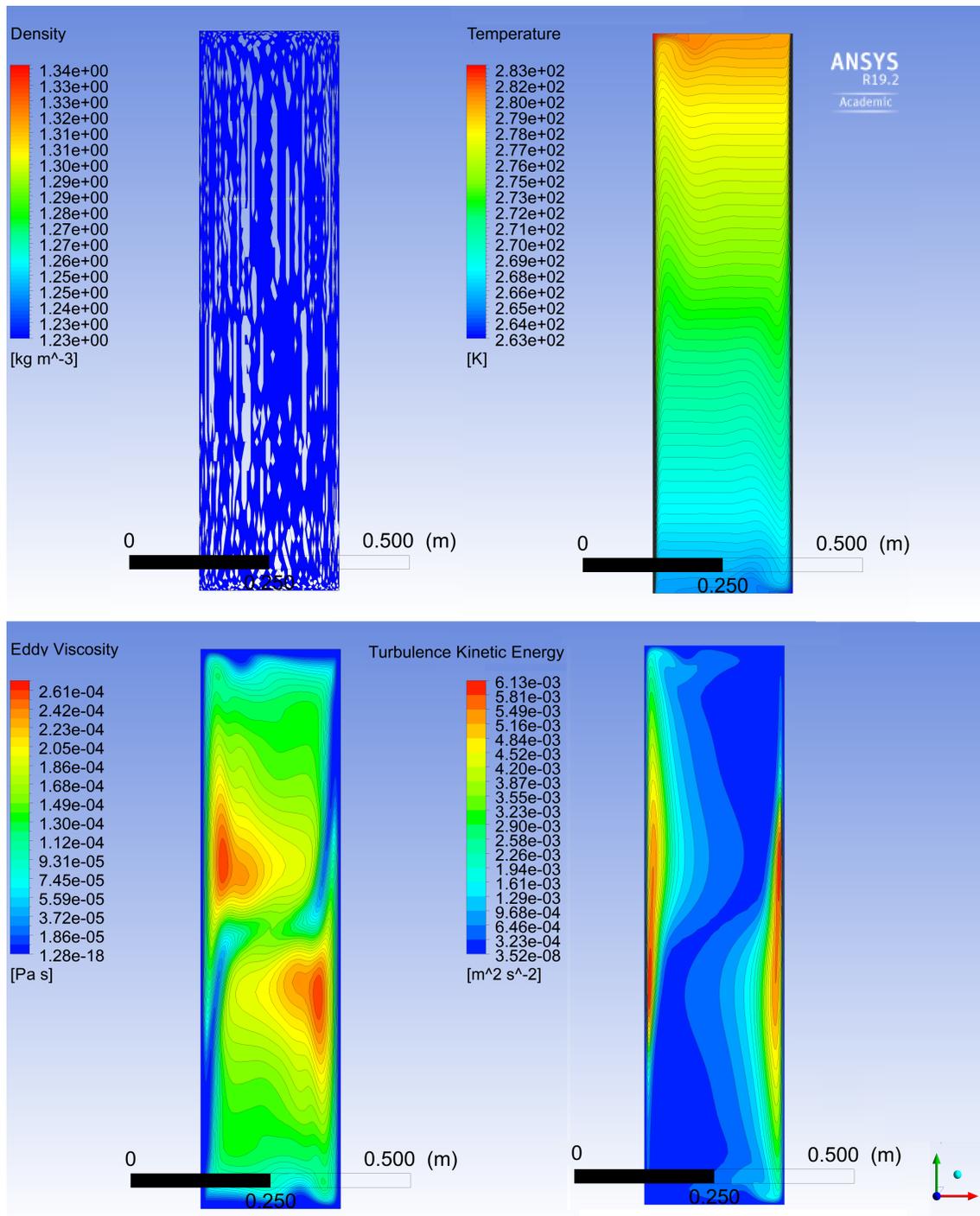


Figura 5.5: Contornos de Densidad (Boussinesq, Superior Izquierda), Temperatura (Superior Derecha), Viscosidad Turbulenta (Inferior Izquierda) y Energía cinética turbulenta (Inferior Derecha) a media profundidad para $Ra = 4,97 \cdot 10^9$

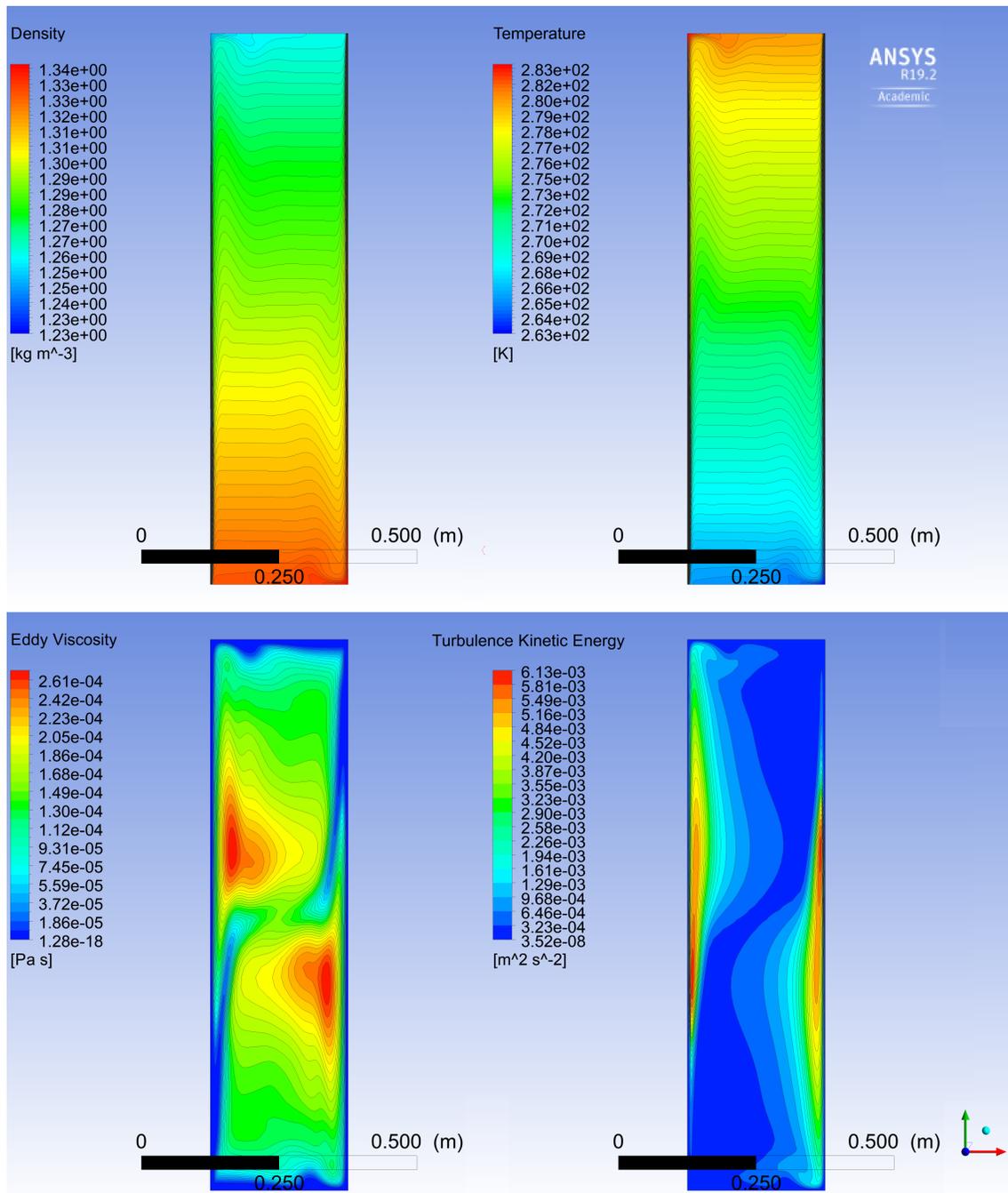


Figura 5.6: Contornos de Densidad (Gas Ideal, Superior Izquierda), Temperatura (Superior Derecha), Viscosidad Turbulenta (Inferior Izquierda) y Energía cinética turbulenta (Inferior Derecha) a media profundidad para $Ra = 4,97 \cdot 10^9$

Se gráfico la velocidad u y v a lo largo de la cavidad, representándose en las Figuras 5.7 y 5.8 para el régimen de $Ra = 4,97 \cdot 10^9$. Se contemplan diferencias en la Figura

5.7 del orden $10^{-3} \left[\frac{m}{s} \right]$ a lo largo de la cavidad solo para el caso de $Y = 0,5$, los otros casos no presentan diferencias evidentes. La Figura 5.8 muestra similitud en los perfiles de velocidad entre los dos métodos de cálculo de densidad, algo igual que el estado laminar.

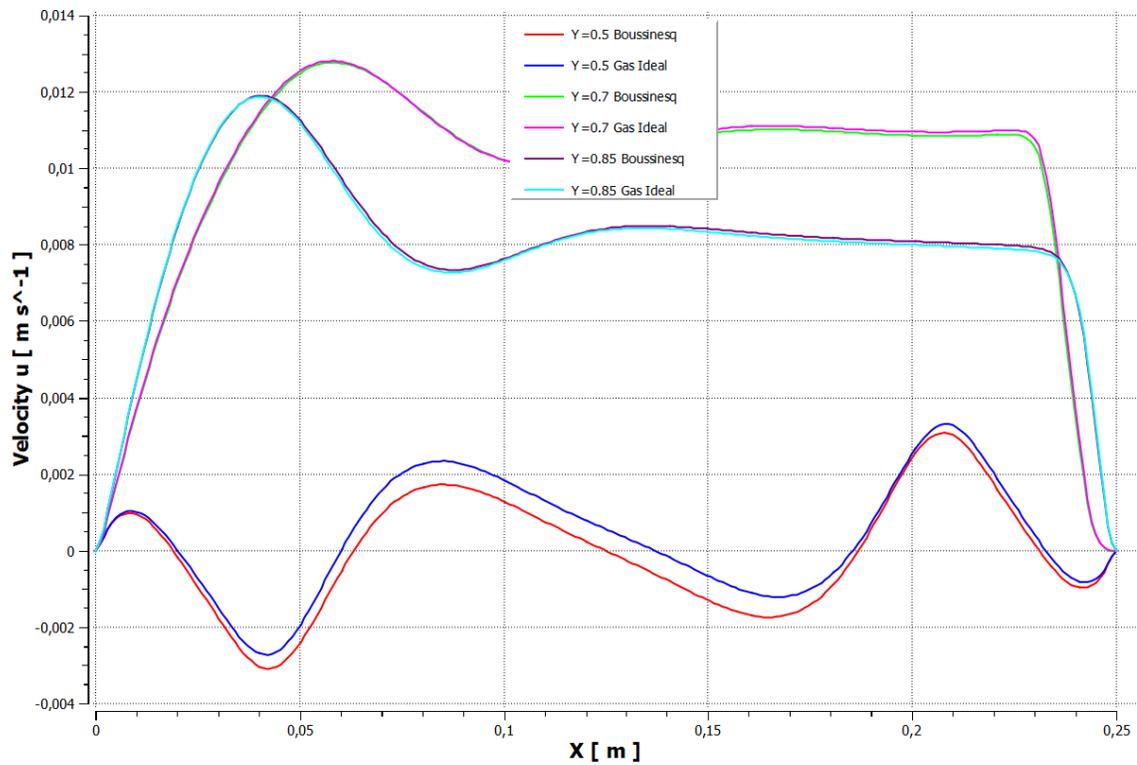


Figura 5.7: Velocidad u a lo largo de la cavidad a distintas alturas con $Ra = 4,97 \cdot 10^9$.

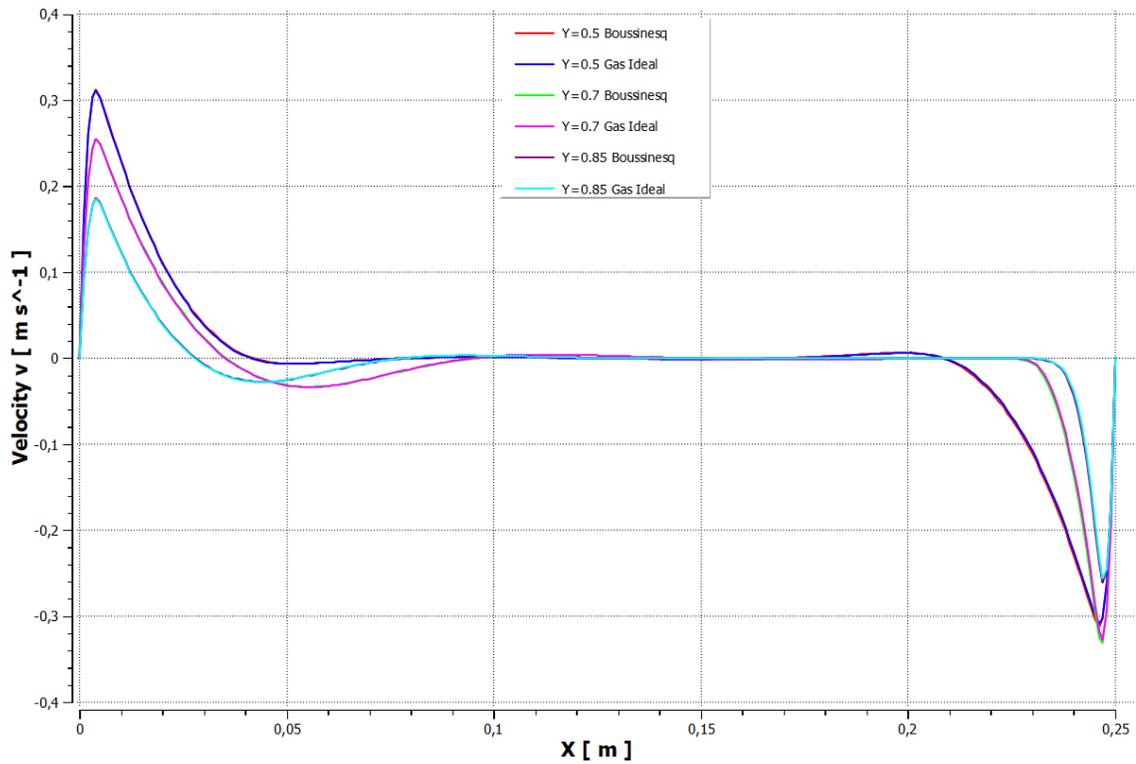


Figura 5.8: Velocidad v a lo largo de la cavidad a distintas alturas con $Ra = 4,97 \cdot 10^9$.

5.3.3. Turbulencia

En las Figuras 5.9 y 5.10 se muestran los contornos de Densidad, Temperatura, Viscosidad Turbulenta y Energía cinética turbulenta para el régimen de $Ra = 1,13 \cdot 10^{10}$. No existen diferencias notorias en los contornos de temperatura y energía cinética turbulenta, en cambio en la zona roja de la Viscosidad Turbulenta muestra un leve aumento en el caso del gas ideal al compararlo con la densidad de Boussinesq.

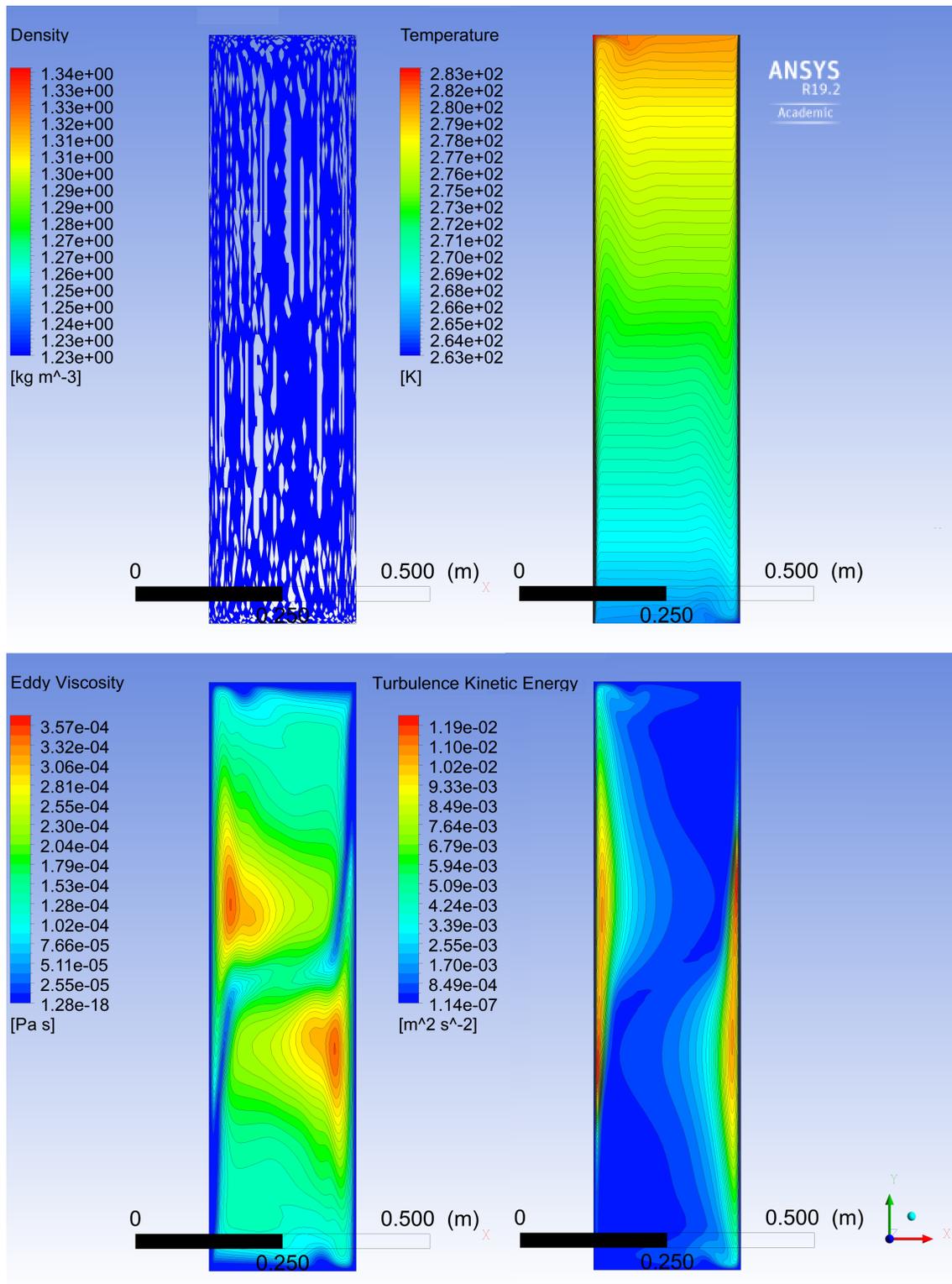


Figura 5.9: Contornos de densidad (Boussinesq), temperatura, viscosidad turbulenta y energía cinética turbulenta a media profundidad para $Ra = 1,13 \cdot 10^{10}$

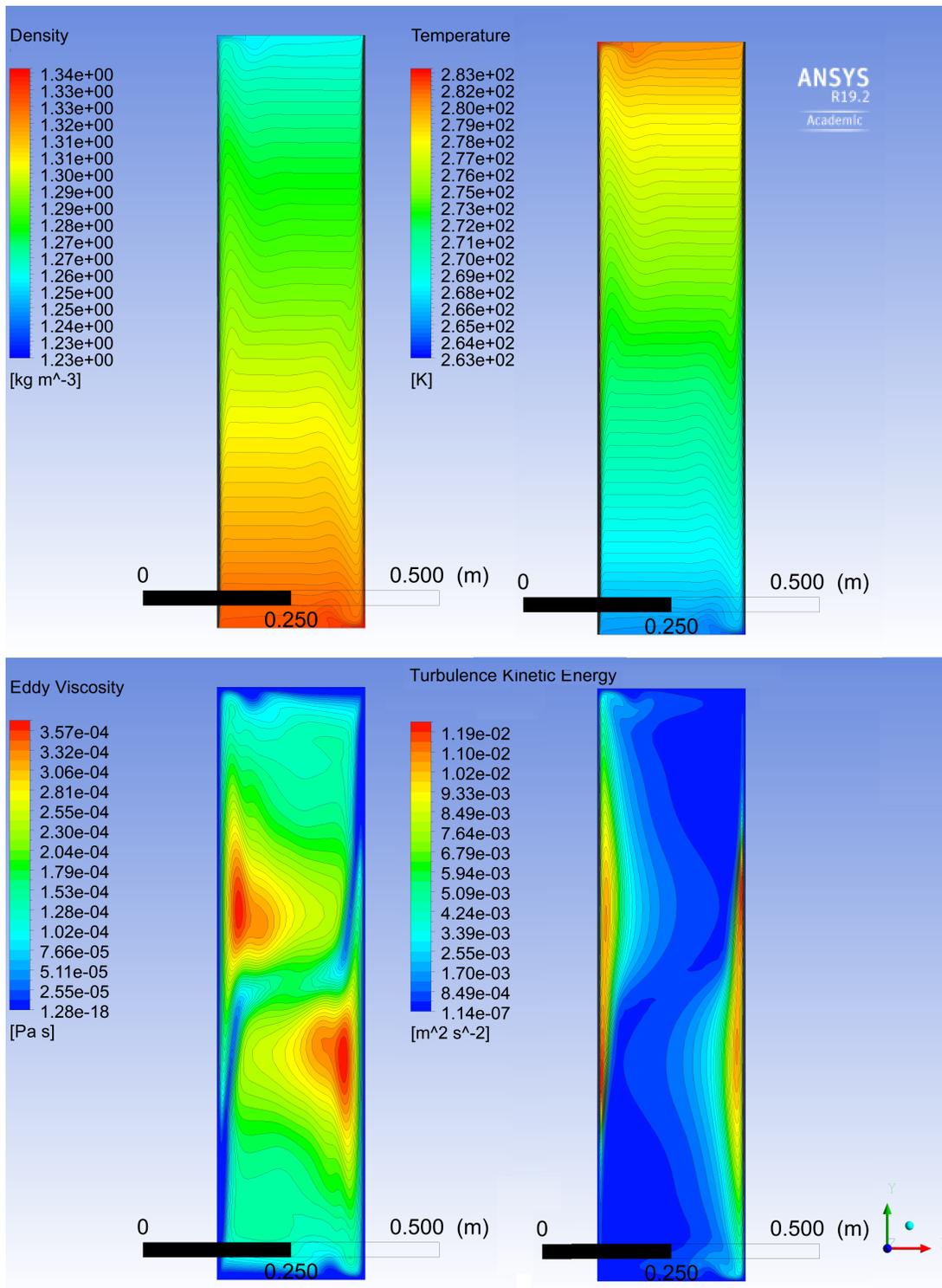


Figura 5.10: Contornos de densidad (gas ideal), temperatura, viscosidad turbulenta y energía cinética turbulenta a media profundidad para $Ra = 1,13 \cdot 10^{10}$

Se gráfico la velocidad u y v a lo largo de la cavidad, representándose en las Figuras 5.11 y 5.12 para el régimen de $Ra = 1,13 \cdot 10^{10}$. Se contemplan diferencias en la Figura 5.11 del orden $10^{-3} [\frac{m}{s}]$ a lo largo de la cavidad solo para el caso de $Y = 0,7$, los otros dos casos no presentan diferencias considerables. La Figura 5.12 muestra similitud en los perfiles de velocidad entre los dos métodos de cálculo de densidad, algo igual que el estado laminar y transición.

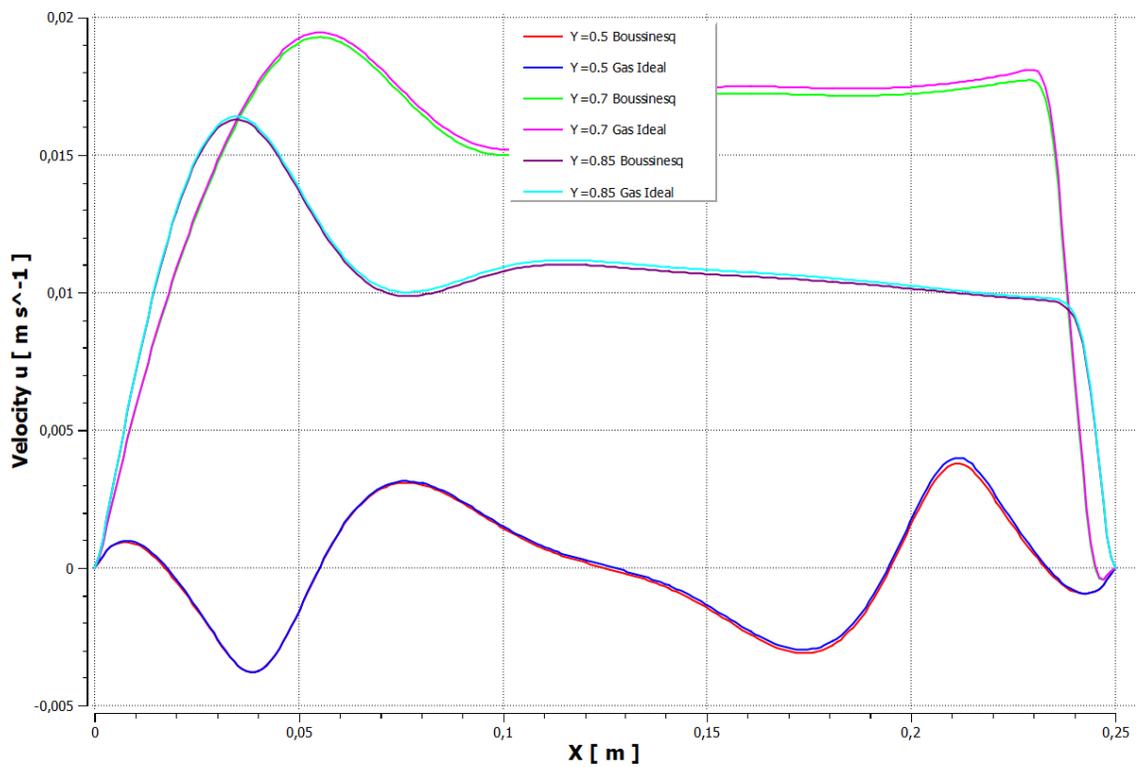


Figura 5.11: Velocidad u a lo largo de la cavidad a distintas alturas con $Ra = 1,13 \cdot 10^{10}$.

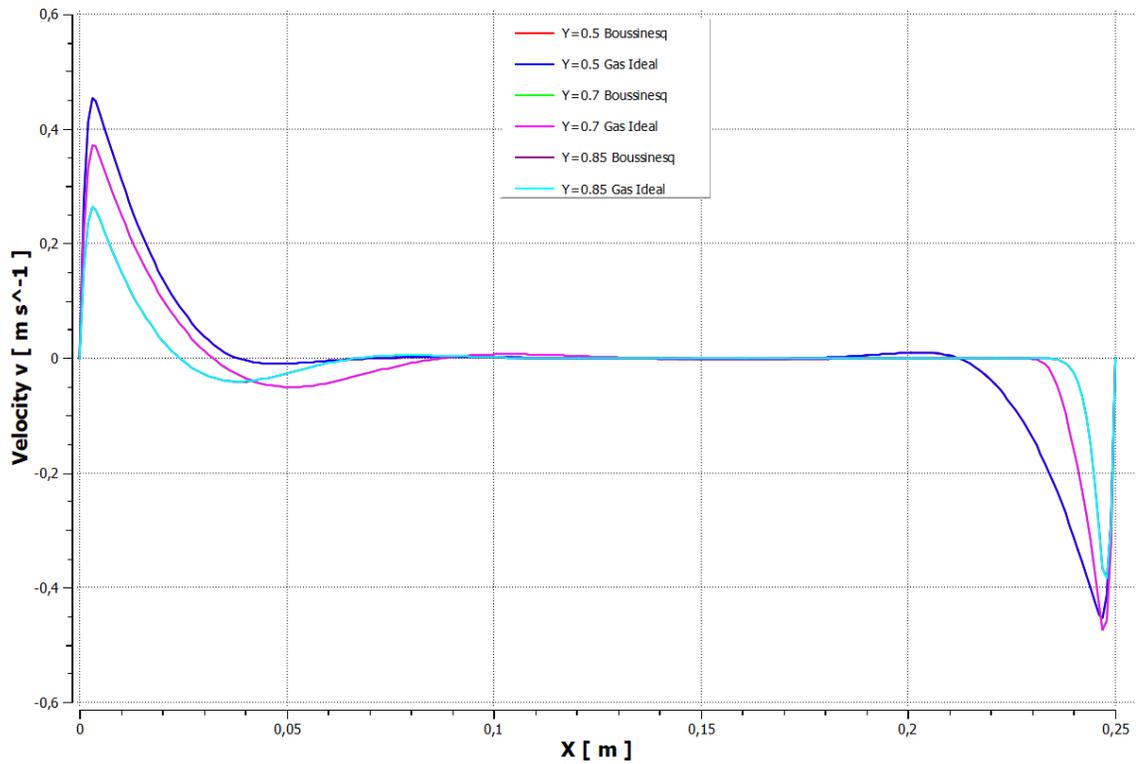


Figura 5.12: Velocidad v a lo largo de la cavidad a distintas alturas con $Ra = 1,13 \cdot 10^{10}$.

5.4. Resultados LES WALE

En primera instancia, la metodología era comparar el resultado de LES WALE con el resultado de K-Omega SST y comparar si es necesario utilizar un método u el otro, con el fin de de ganar tiempo de computación al ser K-Omega SST menor CPU dependiente que LES WALE. El modelo de viscosidad turbulenta K-Omega SST se acercó bastante a los resultados de Saury et al. [15] obteniendo resultados en algunas horas, en cambio para LES que es muy CPU dependiente y necesita de una malla muy fina después de 5 semanas de computó con un paso de tiempo que variaba de $10^{-5}[s]$ a $10^{-8}[s]$ según lo desarrollado del fluido, este no logró estabilizarse a tiempo aunque los perfiles de velocidad dan cuenta de la falta de tiempo de computó para lograr una aproximación al resultado de K-Omega SST. Con lo mencionado anteriormente se decidió proseguir con la simulación solo K-Omega SST al ver los buenos resultados arrojados y el tiempo que se necesitaba para ello.

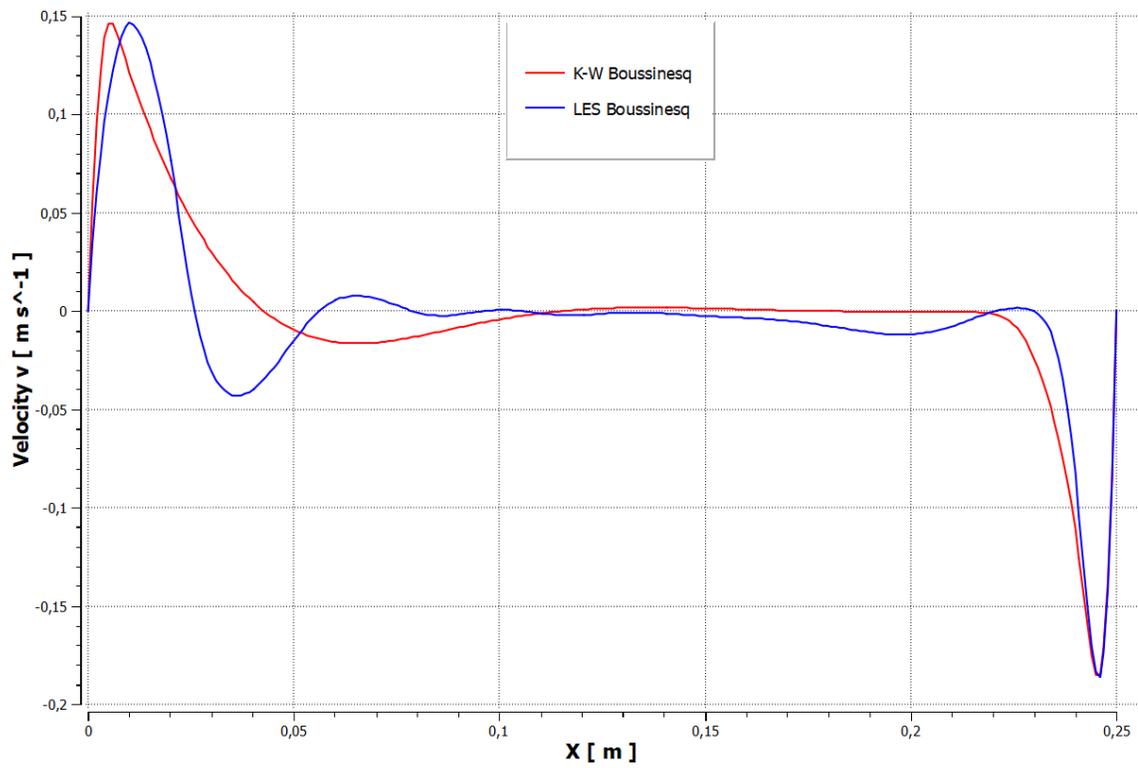


Figura 5.13: Perfil de velocidad v con la hipótesis de Boussinesq para $Ra = 1,48 \cdot 10^9$ en los dos métodos de cálculo de viscosidad turbulenta.

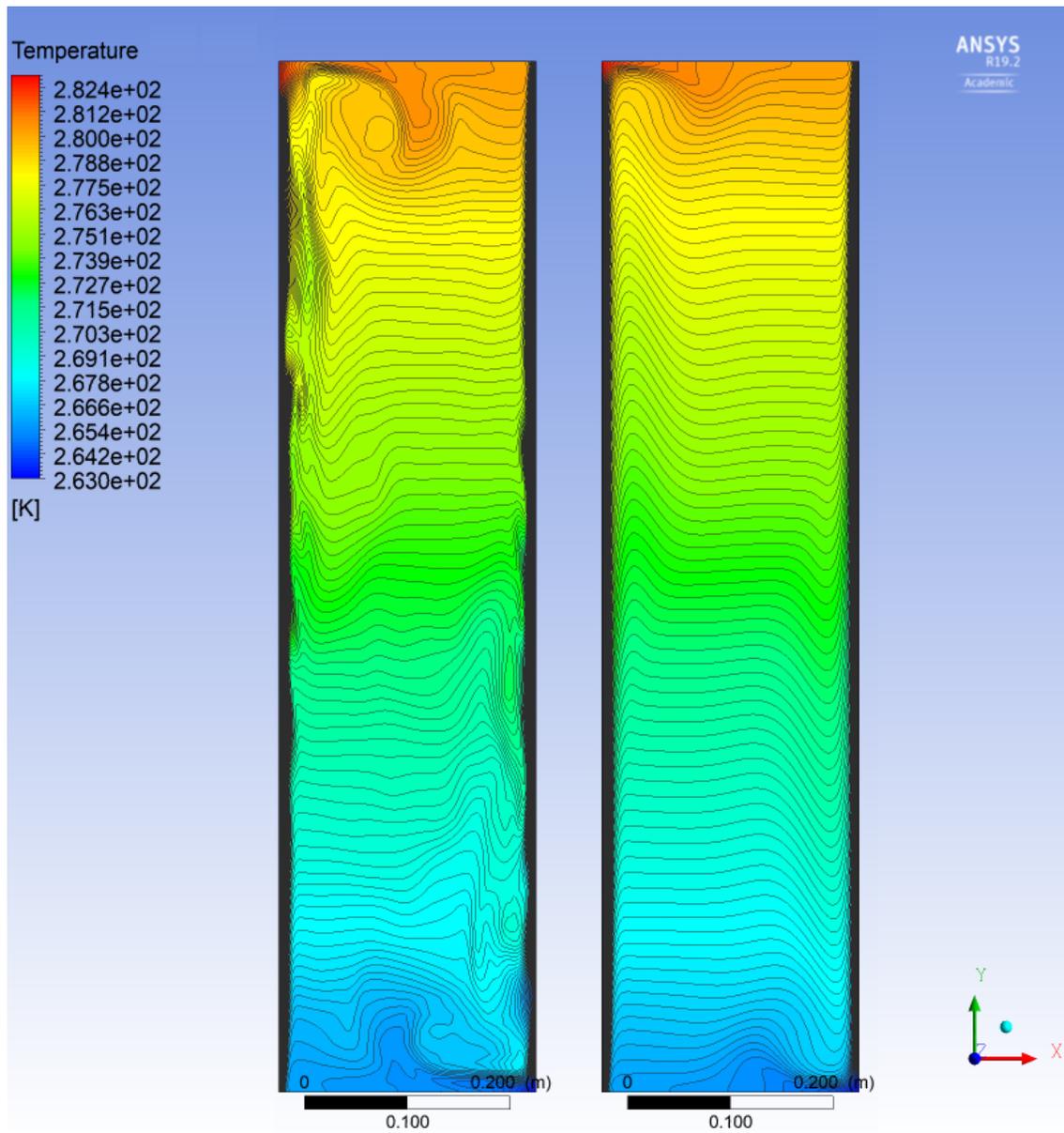


Figura 5.14: Contorno de temperatura con la hipótesis de Boussinesq para $Ra = 1,48 \cdot 10^9$ en los dos métodos de cálculo de viscosidad turbulenta.

En las Figuras 5.13 y 5.14 muestra que LES se aproxima al resultado de K-Omega pero faltando tiempo de cálculo para llegar a un estado pseudo-estacionario.

Capítulo 6

Análisis y Conclusiones

En este capítulo se analizan los resultados obtenidos y se evalúa si se cumplen los objetivos propuestos inicialmente.

6.1. Análisis de Resultados

Se compararon mediante diferencia absoluta, los dominios de temperatura, energía cinética turbulenta y la viscosidad turbulenta o de remolinos. Posteriormente se analizó la diferencia absoluta de las velocidades u y v a distintas alturas ($Y=0.5, Y=0.7$ e $Y=0.85$). Finalmente se realizó un análisis general de lo obtenido en las simulaciones.

6.1.1. Temperatura

La Fig. 6.1 muestra la diferencia de temperatura para distintos números de Rayleigh. Para Rayleigh $1,48 \cdot 10^9$, la diferencia de temperatura es del orden de $5 \cdot 10^{-1}$, en el resto del dominio la diferencia es del orden de $1 \cdot 10^{-1}[K]$. Las mayores diferencias a bajo número de Rayleigh se centran en la esquina inferior derecha del dominio. Para el contorno central la comparación es incluso menor que el régimen anterior, siendo predominante del orden $8 \cdot 10^{-2}$ aproximadamente. La diferencia para el régimen a un número de Rayleigh mayor es del orden $1 \cdot 10^{-3}$ mucho menor que los casos anteriores, se esperaba que la diferencia de temperatura aumentará proporcionalmente con el número de Rayleigh.

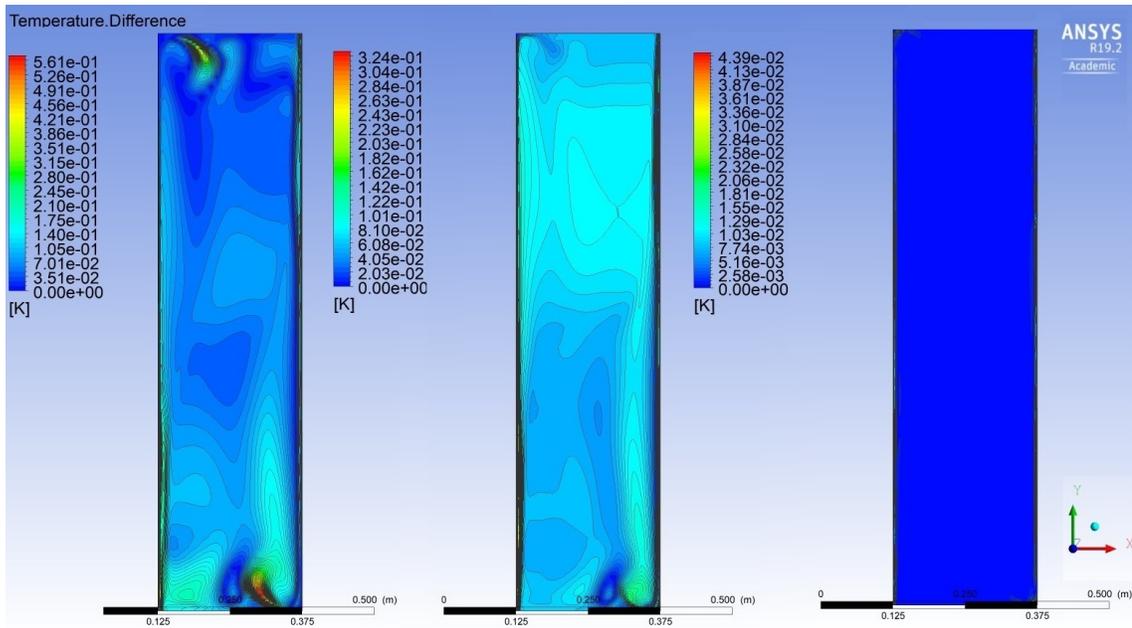


Figura 6.1: Diferencia absoluta de la temperatura para ambos casos de cálculo de densidad, para 3 regímenes con distinto número de Rayleigh (Izquierda $Ra = 1,48 \cdot 10^9$, centro $Ra = 4,97 \cdot 10^9$ y derecha $Ra = 1,13 \cdot 10^{10}$)

6.1.2. Energía Cinética Turbulenta

La diferencia absoluta de la energía cinética turbulenta para distintos números de Rayleigh se muestra en la Fig. 6.2. En el caso de la izquierda en las esquinas inferior derecha y superior izquierda se observan diferencias significativas en forma de vórtices en zonas locales, además en las zonas donde se encuentra la capa límite y el fluido comienza acercarse a las paredes con temperatura, se contemplan diferencias del orden $1,5 \cdot 10^{-4}$ (zona inferior izquierda y superior derecha), en la parte central es bastante menor esta comparación, al aumentar el número de Rayleigh a $5 \cdot 10^9$ la diferencia disminuye considerablemente. Existe una zona con diferencias considerables que es la parte inferior derecha a todo número de Rayleigh estudiado, provocado cuando el fluido choca con la pared y esto genera una recirculación que se evidencia al usar distintos métodos de calculo de densidad. Excepcionalmente la comparación es nula al aumentar aún más el número de Rayleigh, excepto en las zonas dentro o alrededor de la capa límite.

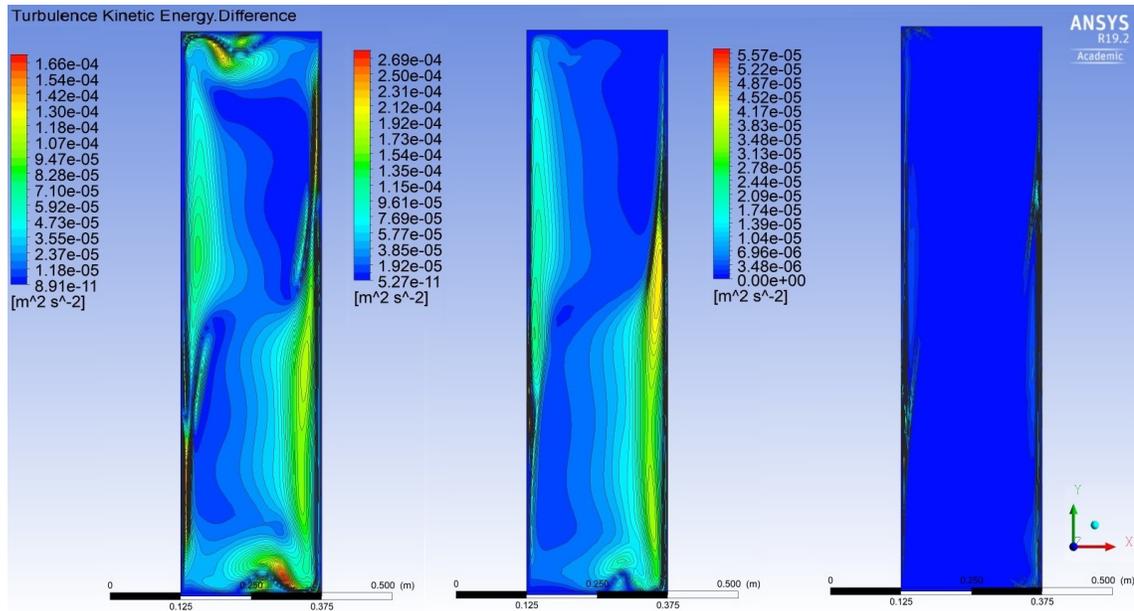


Figura 6.2: Diferencia absoluta de la energía cinética turbulenta para ambos casos de cálculo de densidad, para 3 regímenes con distinto número de Rayleigh (Izquierda $Ra = 1,48 \cdot 10^9$, centro $Ra = 4,97 \cdot 10^9$ y derecha $Ra = 1,13 \cdot 10^{10}$)

6.1.3. Viscosidad Turbulenta

La viscosidad turbulenta es un factor de proporcionalidad que describe la transferencia de energía turbulenta, debido a que los remolinos en movimiento generan esfuerzos tangenciales y disipan energía, por lo que es importante analizar este factor para el estudio de la validación de la hipótesis de Boussinesq. En la Figura 6.3 se ilustra la diferencia de la viscosidad turbulenta para distintos números de Rayleigh. Se vislumbra un comportamiento lógico del fluido, la viscosidad turbulenta a bajos números de Rayleigh en gran parte es cercana a cero, esto quiere decir que la hipótesis de Boussinesq y considerar el como gas ideal son idénticos en gran parte del dominio, pero al incrementar el Rayleigh habrán menos zonas idénticas. La diferencia máxima no se ve afectada por el número de Rayleigh incluso la más alta se encuentra a bajos números de Rayleigh. Es de esperar que al aumentar aún más el número de Rayleigh las diferencias sean cada más evidentes, pero la diferencia en el dominio es tan pequeña que es bastante similar considerar o no la hipótesis de Boussinesq.

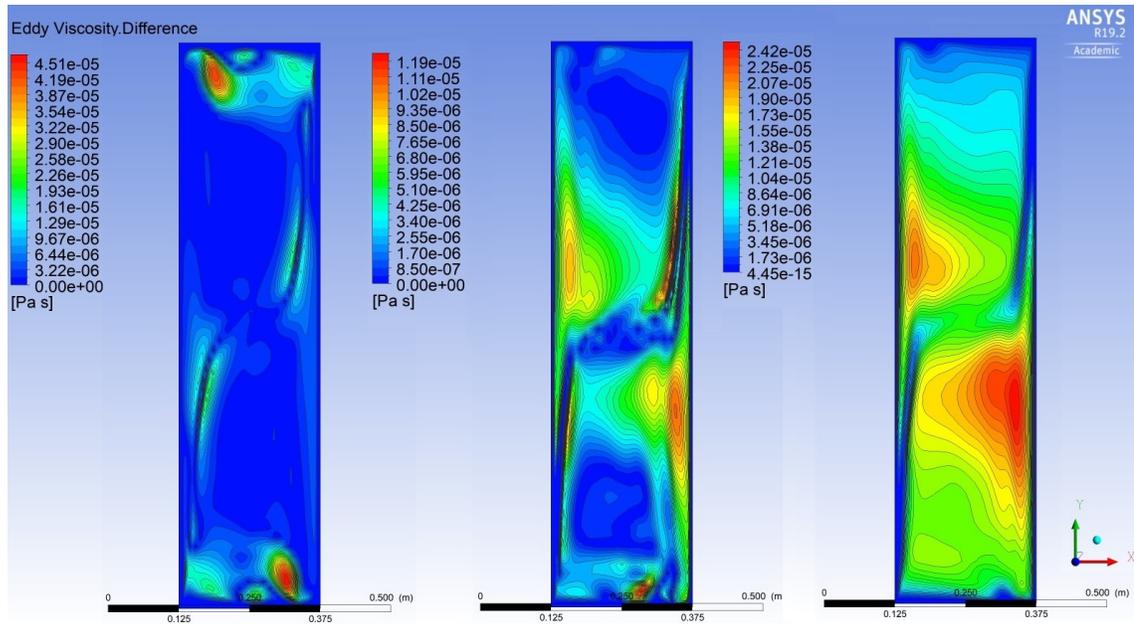


Figura 6.3: Diferencia absoluta de la viscosidad turbulenta para ambos casos de cálculo de densidad, para 3 regímenes con distinto número de Rayleigh (Izquierda $Ra = 1,48 \cdot 10^9$, centro $Ra = 4,97 \cdot 10^9$ y derecha $Ra = 1,13 \cdot 10^{10}$)

6.1.4. Velocidad u

En las Figuras 6.4, 6.5 y 6.6 se muestran la comparación de velocidades para ambos casos de cálculo de densidad a distintos número de Rayleigh ($1,48 \cdot 10^9$, $4,97 \cdot 10^9$ y $1,13 \cdot 10^{10}$ respectivamente). Aunque pareciera que existe diferencias considerables entre ambos métodos de cálculo el orden de magnitud de estos errores es muy bajo $5 \cdot 10^{-4}$ mientras que la velocidades u rondan los $1 \cdot 10^{-2}$ por lo que las diferencias no son se deben considerar. La mayor parte de estas diferencias se ubican en la parte central de la cavidad que es lógico, ya que en los extremos de la cavidad existe prácticamente velocidad vertical debido al cambio de temperatura y la velocidad horizontal se hace presente luego de salir de la zona cercana a la pared luego de interactuar con la parte superior de la cavidad .

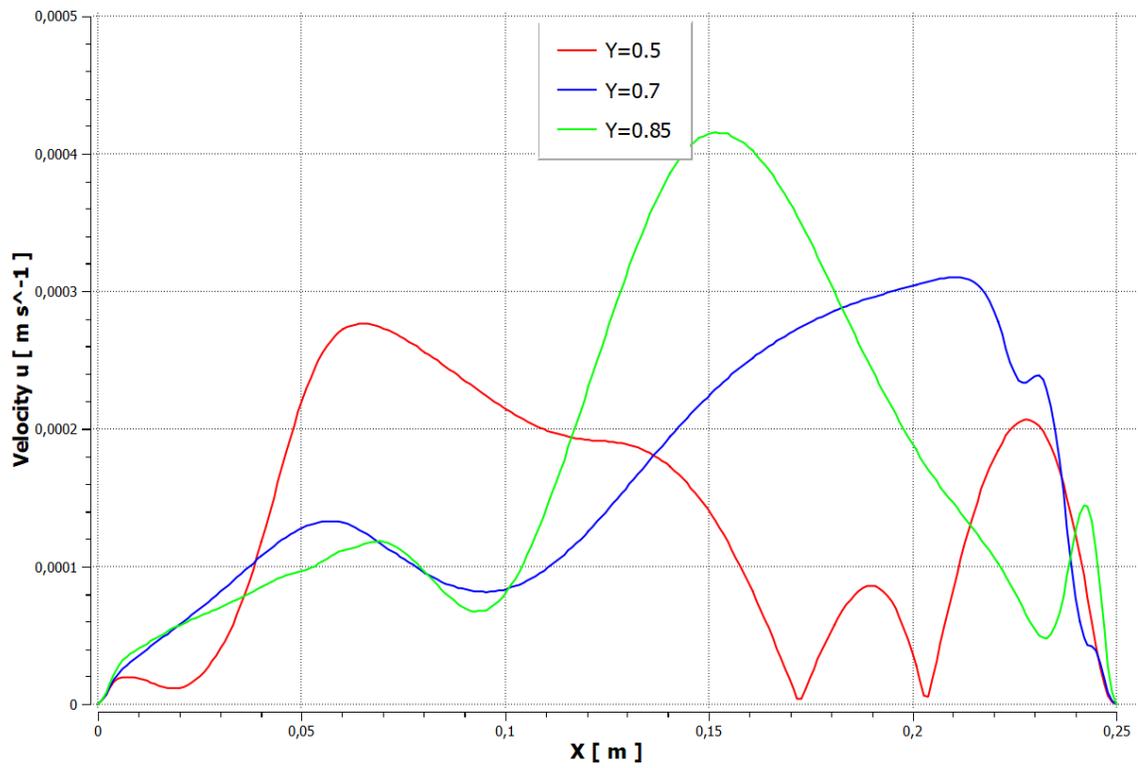


Figura 6.4: Diferencia absoluta de velocidad u para Rayleigh de $1,48 \cdot 10^9$ a distintas alturas.

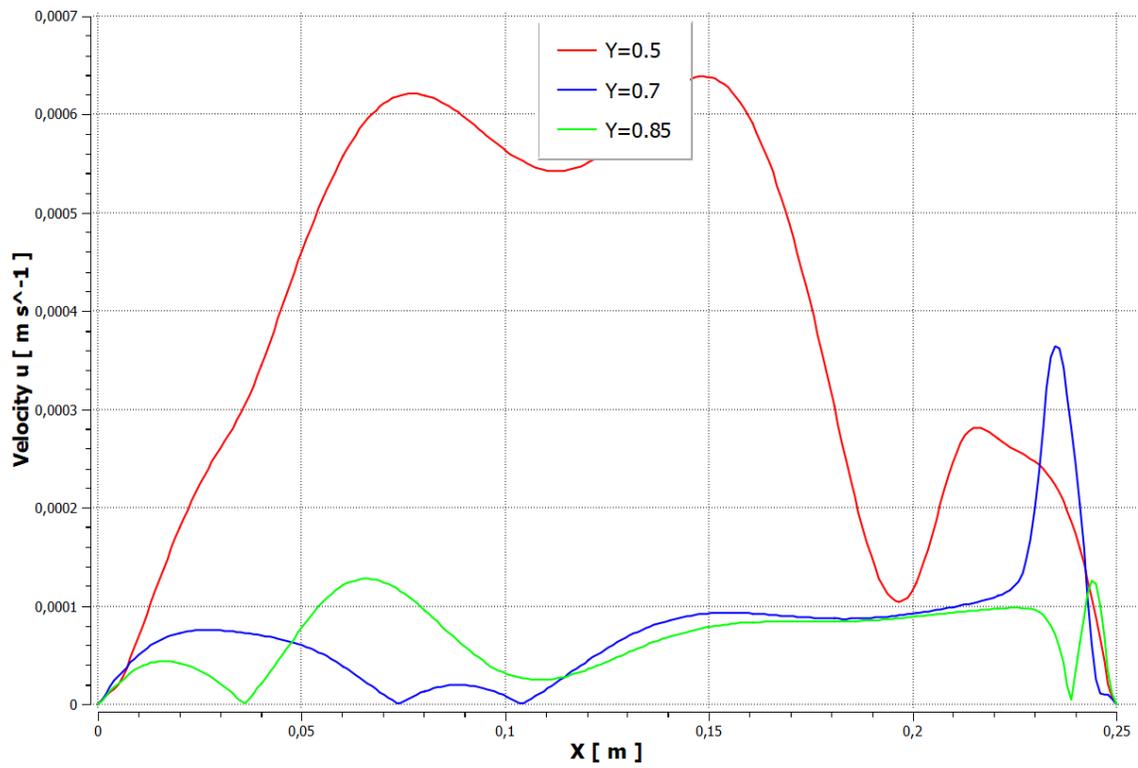


Figura 6.5: Diferencia absoluta de velocidad u para Rayleigh de $4,97 \cdot 10^9$ a distintas alturas.

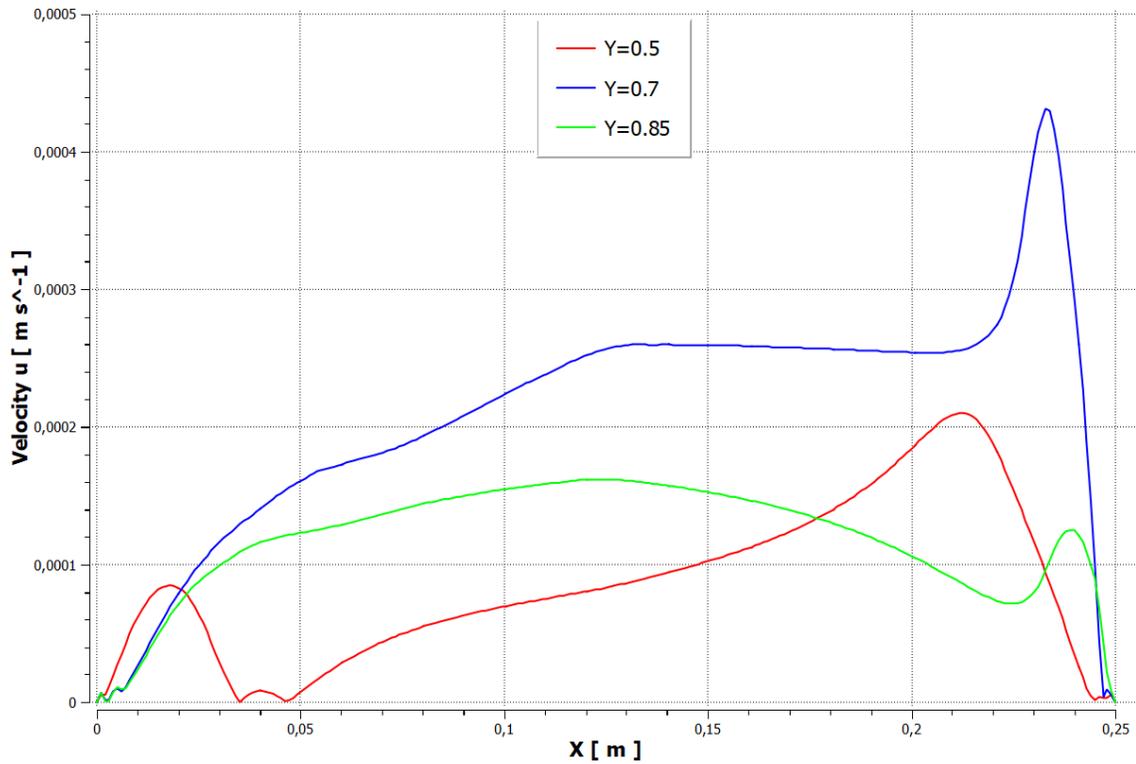


Figura 6.6: Diferencia absoluta de velocidad u para Rayleigh de $1,13 \cdot 10^{10}$ a distintas alturas.

6.1.5. Velocidad v

En las Figuras 6.7, 6.8 y 6.9 se muestran la comparación de velocidades para ambos casos de cálculo de densidad a distintos número de Rayleigh ($1,48 \cdot 10^9$, $4,97 \cdot 10^9$ y $1,13 \cdot 10^{10}$ respectivamente). En las 3 figuras se aprecia una diferencia cercana a la pared fría que va aumentando con el número de Rayleigh, notar que las mayores diferencias de las velocidades están cerca de la pared fría esto se debe a que las partículas al disminuir su temperatura aumenta su densidad y con ello descenden en favor a la gravedad, esto conlleva a que las diferencias entre los métodos sean visibles en esa zona.

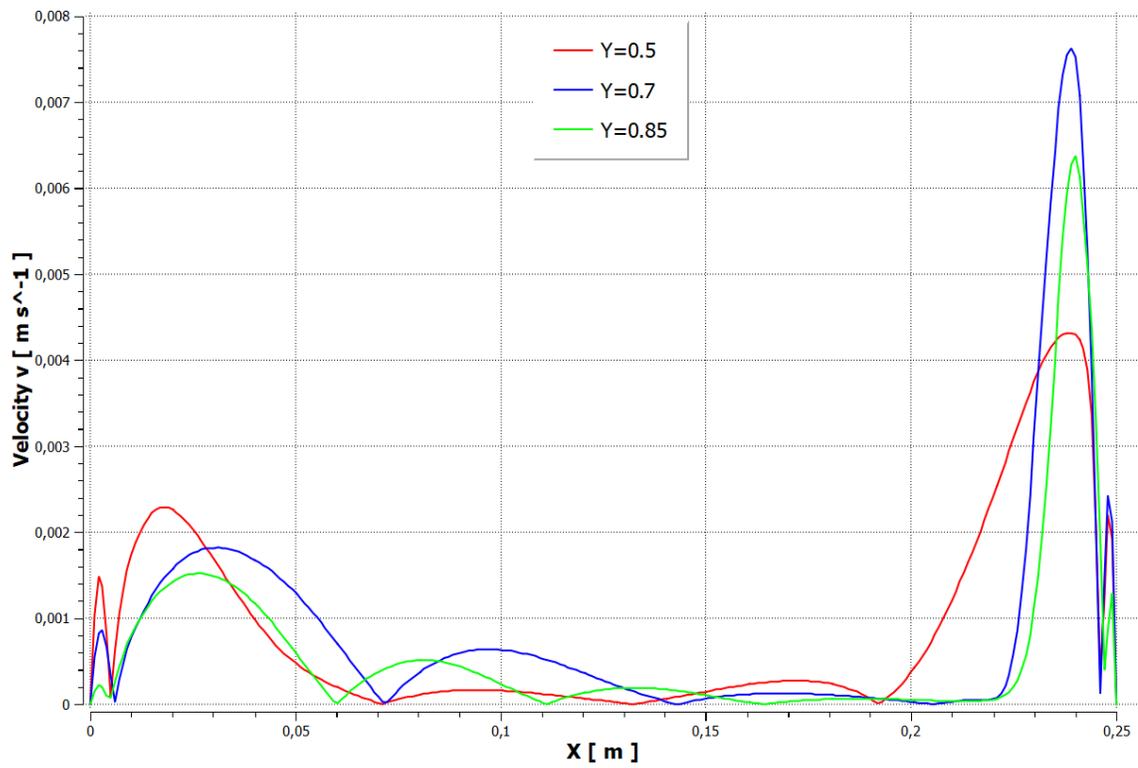


Figura 6.7: Diferencia absoluta de velocidad v para Rayleigh de $1,48 \cdot 10^9$ a distintas alturas.

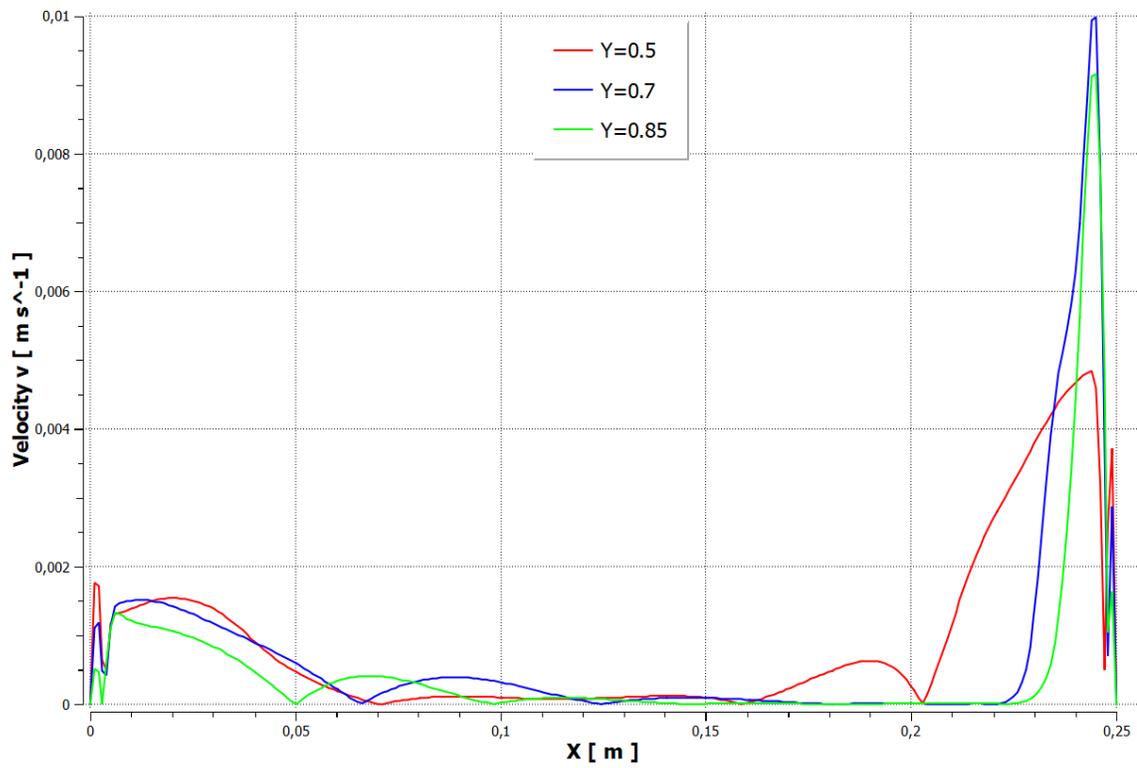


Figura 6.8: Diferencia absoluta de velocidad v para Rayleigh de $4,97 \cdot 10^9$ a distintas alturas.

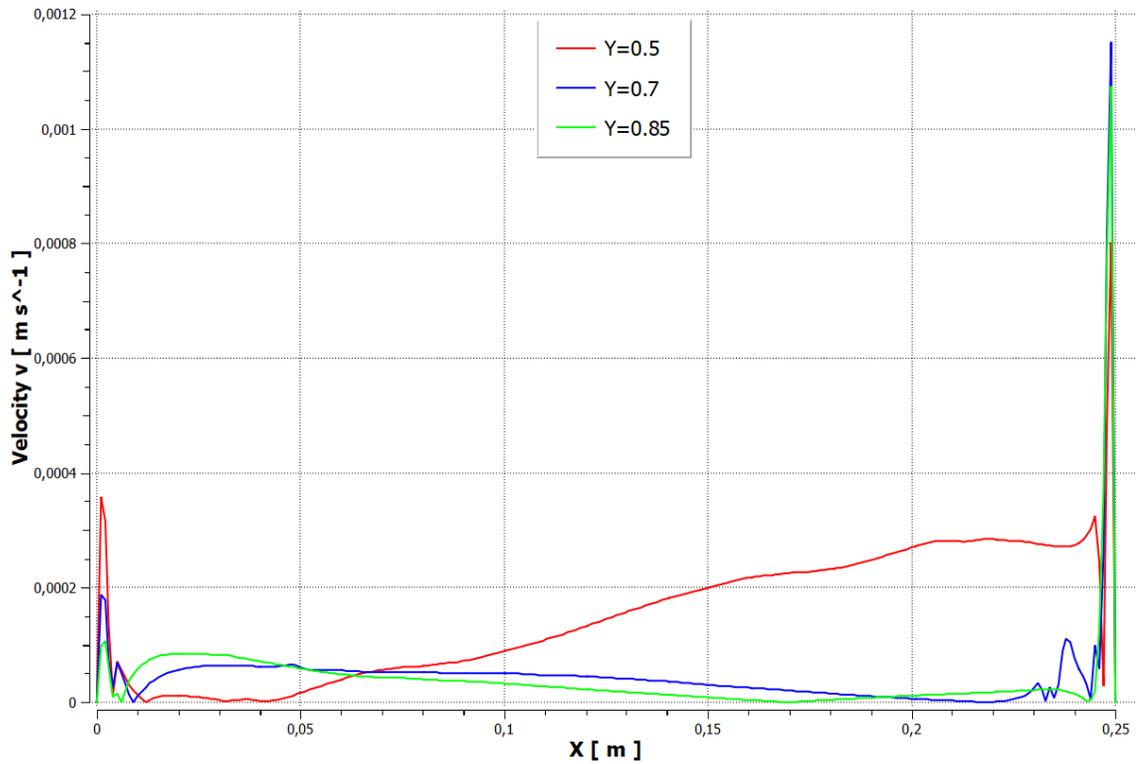


Figura 6.9: Diferencia absoluta de velocidad v para Rayleigh de $1,13 \cdot 10^{10}$ a distintas alturas.

6.1.6. Error comparativo

Para analizar de mejor manera las diferencias entre los métodos, se estudió el error al utilizar la hipótesis de Boussinesq en los tres casos de número de Rayleigh en $Z = 0,125$ calculando el promedio sobre ese plano. La Tabla 6.1 muestra los resultados, en ella los errores de temperatura son muy bajos, esto da cuenta que el promedio de temperatura no se ve afectado, en cambio la energía cinética turbulenta y la viscosidad turbulenta se ven levemente afectados. La mayor diferencia existe al calcular el error campo promedio de velocidad u y v , el orden de magnitud del promedio de la velocidad u y v para el caso al utilizar la hipótesis es de $5 \cdot 10^{-6} [\frac{m}{s}]$ y $5 \cdot 10^{-7} [\frac{m}{s}]$ respectivamente por otro lado al considerarlo como gas ideal este aumenta hasta $1 \cdot 10^{-4} [\frac{m}{s}]$ y $2 \cdot 10^{-4} [\frac{m}{s}]$ respectivamente 6.2, esto se debe a que la hipótesis de Boussinesq desprecia ciertos términos de la ecuación de momentum al aplicarse, por considerar la variación de presión dentro del dominio como nula.

Número de Rayleigh	E. Temperatura[%]	E.Viscosidad Turbulenta [%]	E. EKT [%]
$1,48 \cdot 10^9$	$2,051 \cdot 10^{-2}$	2,296	4,842
$4,97 \cdot 10^9$	$2,125 \cdot 10^{-2}$	2,481	3,208
$1,13 \cdot 10^{10}$	$1,057 \cdot 10^{-2}$	6,738	$2,939 \cdot 10^{-3}$

Tabla 6.1: Valores de errores promedio en $Z = 0,125$ a distintos número de Rayleigh.

Casos Ra	Campo Promedio Velocidad u [$\frac{m}{s}$]	Campo Promedio Velocidad v [$\frac{m}{s}$]
$1,48 \cdot 10^9$ A	$6,111 \cdot 10^{-6}$	$5,275 \cdot 10^{-7}$
$1,48 \cdot 10^9$ B	$1,217 \cdot 10^{-4}$	$1,965 \cdot 10^{-4}$
$4,97 \cdot 10^9$ A	$7,583 \cdot 10^{-6}$	$5,761 \cdot 10^{-7}$
$4,97 \cdot 10^9$ B	$1,611 \cdot 10^{-4}$	$2,736 \cdot 10^{-4}$
$1,13 \cdot 10^{10}$ A	$9,037 \cdot 10^{-6}$	$6,636 \cdot 10^{-7}$
$1,13 \cdot 10^{10}$ B	$7,605 \cdot 10^{-4}$	$2,861 \cdot 10^{-4}$

Tabla 6.2: Valores de campos promedio de velocidad en $Z = 0,125$ para todos los casos estudiados (A.- Densidad de Boussinesq B.- Densidad como Gas Ideal).

6.1.7. Análisis General

Los criterios de Philippe-Emmanuel Roche son válidos, bajo este término se cumple la hipótesis de Boussinesq (Tabla 5.3). Recordar que los criterios son en base a convección natural de Rayleigh Bénard excepto el criterio 1. Para el caso de temperatura en todos los casos se evidencia el mismo comportamiento con un muy bajo error en cuenta a la temperatura promedio (menor al 0,05 %, Tabla 6.1), por otro lado la viscosidad turbulenta y la energía cinética turbulenta muestran leves diferencias entre los casos (2 % al 6,7 %). Las mayores diferencias se ven en los perfiles de velocidad u , pero estas son de orden de magnitud muy bajas en comparación con la velocidades máximas en el dominio correspondientes (máxima diferencia absoluta $6,5 \cdot 10^{-4}$), por otro lado los perfiles de la velocidad v muestran diferencias en la zona cercana a la pared fría pero estas están en el orden del rango 0,267 % – 5,26 %. Los promedio de campo de velocidad son muy distintos, 2 orden de magnitud de diferencia, esto se puede explicar debido a que la hipótesis de Boussinesq considera una variación nula de densidad excepto en término gravitatorio, pero en los demás termino estos se ven afectados al considerar la variación nula y esto afecta directamente al campo de velocidad. El comportamiento del fluido al considerar la hipótesis o no, es similar el uno del otro, se notan ciertas características que se diferencian cercana a las paredes, pero de una magnitud despreciable con el modelo estudiado.

6.2. Conclusiones

Se estudió la hipótesis de Boussinesq en la cavidad diferencialmente calentada y se calcularon los criterios de validación propuestos por Phillippe-Emmanuel Roche, dando como resultado que la hipótesis es válida para una de convección Rayleigh-Bénard.

La simulación con la hipótesis de Boussinesq como método de cálculo para la densidad muestra un comportamiento similar en los 3 número de Rayleigh analizados. La densidad es constante en todo el dominio, la temperatura, viscosidad turbulenta y la energía cinética turbulenta muestran una leve recirculación en la zona superior derecha e inferior izquierda para todo número de Rayleigh analizado. En la viscosidad turbulenta en la zona central superior e inferior están los máximos valores que aumentan con el número de Rayleigh. La energía cinética turbulenta mayormente se expresa dentro de la capa límite y al igual que el caso anterior aumenta con el número de Rayleigh. En tiempo de cómputo la simulación con la hipótesis de Boussinesq es más eficiente y muestra resultados similares a la simulación calculando la densidad como gas ideal.

La simulación con gas ideal como método de cálculo para la densidad muestra un comportamiento similar al descrito en el párrafo anterior, con la gran diferencia que el contorno de densidad en este caso muestra una distribución de temperatura invertida (mayores densidades parte inferior y viceversa). La estabilidad y eficiencia al usar la densidad como gas ideal se ve disminuída al considerar en la ecuación de momento más términos para el cómputo. Se recomienda utilizar para simulaciones de condiciones similares la hipótesis de Boussinesq por sobre gas ideal para el cálculo de la densidad.

Se analizó el comportamiento del fluido comparando la hipótesis de Boussinesq con la de gas ideal en cálculo de densidad, evidenciando que aunque la distribución de densidad en todo el dominio es muy distinta, se obtienen resultados muy similares en el campo de distribución de temperatura, viscosidad turbulenta y energía cinética turbulenta, con un error del orden del 0,5 % a 6,7 % y los perfiles de velocidad u y v a distintas alturas, donde las diferencias son de orden $10^{-4}[\frac{m}{s}]$. La mayor diferencia que existe es en el promedio de los campos de velocidad u y v donde hay dos orden de magnitud de diferencia.

Por lo que se puede concluir que, no se aprecian diferencias considerables para

invalidar la hipótesis de Boussinesq para la simulación de convección natural en una cavidad diferencialmente calentada de relación de aspecto de 4, desde números de Rayleigh de $1,48 \cdot 10^9$ hasta $1,13 \cdot 10^{10}$, en base a los resultados obtenidos y mostrados anteriormente.

Bibliografía

- [1] S Amraqui, A Mezrhab, and C Abid. Combined natural convection and surface radiation in solar collector equipped with partitions. *Applied Solar Energy*, 47(1):36–47, 2011.
- [2] George Keith Batchelor. *An introduction to fluid dynamics*. Cambridge university press, 2000.
- [3] Adrian Bejan. *Convection heat transfer*. John wiley & sons, 2013.
- [4] Yunus A Çengel and Afshin J Ghajar. *Transferencia de calor y masa. Fundamentos y*. 2011.
- [5] Robert Cheesewright. Turbulent natural convection from a vertical plane surface. *Journal of Heat Transfer*, 90(1):1–6, 1968.
- [6] Joel H Ferziger and Milovan Peric. *Computational methods for fluid dynamics*. Springer Science & Business Media, 2012.
- [7] ANSYS Fluent. *Ansys fluent theory guide*. ANSYS Inc., USA, 15317:724–746, 2011.
- [8] Chunbao Liu, Changsuo Liu, and Wenxing Ma. Rans, detached eddy simulation and large eddy simulation of internal torque converters flows: A comparative study. *Engineering Applications of Computational Fluid Mechanics*, 9(1):114–125, 2015.
- [9] Florian Menter, J Schutze, K Kurbatskii, R Lechner, Mikhail Gritskevich, and Andrey Garbaruk. Scale-resolving simulation techniques in industrial cfd. In *6th AIAA Theoretical Fluid Mechanics Conference*, page 3474, 2011.

- [10] Johann Nikuradse. Laws of flow in rough pipes. National Advisory Committee for Aeronautics Washington, 1950.
- [11] Peter J Olver. Applications of Lie groups to differential equations, volume 107. Springer Science & Business Media, 2000.
- [12] Suhas Patankar. Numerical heat transfer and fluid flow. CRC press, 1980.
- [13] Stephen B Pope. Turbulent flows, 2001.
- [14] Philippe-Emmanuel Roche. Applicability of boussinesq approximation in a turbulent fluid with constant properties. arXiv preprint arXiv:0710.3497, 2007.
- [15] Didier Saury, Nicolas Rouger, Francis Djanna, and François Penot. Natural convection in an air-filled cavity: Experimental results at large rayleigh numbers. International Communications in Heat and Mass Transfer, 38(6):679–687, 2011.
- [16] Henk Kaarle Versteeg and Weeratunge Malalasekera. An introduction to computational fluid dynamics: the finite volume method. Pearson Education, 2007.
- [17] M Weickert, G Teike, O Schmidt, and M Sommerfeld. Investigation of the les wale turbulence model within the lattice boltzmann framework. Computers & Mathematics with Applications, 59(7):2200–2214, 2010.
- [18] Shihe Xin and Patrick Le Quéré. Natural-convection flows in air-filled, differentially heated cavities with adiabatic horizontal walls. 50:437–466, 07 2006.
- [19] A Cengel Yunus and John M Cimbala. Fluid mechanics fundamentals and applications. International Edition, McGraw Hill Publication, 185201, 2006.

Anexos

Anexo A

Tabla propiedades del aire.

TABLA A-15

Propiedades del aire a la presión de 1 atm

Temp., $T, ^\circ\text{C}$	Densidad, $\rho, \text{kg/m}^3$	Calor específico, $c_p, \text{J/kg} \cdot \text{K}$	Conductividad térmica, $k, \text{W/m} \cdot \text{K}$	Difusividad térmica, $\alpha, \text{m}^2/\text{s}^2$	Viscosidad dinámica, $\mu, \text{kg/m} \cdot \text{s}$	Viscosidad cinemática, $\nu, \text{m}^2/\text{s}$	Número de Prandtl, Pr
-150	2.866	983	0.01171	4.158×10^{-6}	8.636×10^{-6}	3.013×10^{-6}	0.7246
-100	2.038	966	0.01582	8.036×10^{-6}	1.189×10^{-6}	5.837×10^{-6}	0.7263
-50	1.582	999	0.01979	1.252×10^{-5}	1.474×10^{-5}	9.319×10^{-6}	0.7440
-40	1.514	1 002	0.02057	1.356×10^{-5}	1.527×10^{-5}	1.008×10^{-5}	0.7436
-30	1.451	1 004	0.02134	1.465×10^{-5}	1.579×10^{-5}	1.087×10^{-5}	0.7425
-20	1.394	1 005	0.02211	1.578×10^{-5}	1.630×10^{-5}	1.169×10^{-5}	0.7408
-10	1.341	1 006	0.02288	1.696×10^{-5}	1.680×10^{-5}	1.252×10^{-5}	0.7387
0	1.292	1 006	0.02364	1.818×10^{-5}	1.729×10^{-5}	1.338×10^{-5}	0.7362
5	1.269	1 006	0.02401	1.880×10^{-5}	1.754×10^{-5}	1.382×10^{-5}	0.7350
10	1.246	1 006	0.02439	1.944×10^{-5}	1.778×10^{-5}	1.426×10^{-5}	0.7336
15	1.225	1 007	0.02476	2.009×10^{-5}	1.802×10^{-5}	1.470×10^{-5}	0.7323
20	1.204	1 007	0.02514	2.074×10^{-5}	1.825×10^{-5}	1.516×10^{-5}	0.7309
25	1.184	1 007	0.02551	2.141×10^{-5}	1.849×10^{-5}	1.562×10^{-5}	0.7296
30	1.164	1 007	0.02588	2.208×10^{-5}	1.872×10^{-5}	1.608×10^{-5}	0.7282
35	1.145	1 007	0.02625	2.277×10^{-5}	1.895×10^{-5}	1.655×10^{-5}	0.7268
40	1.127	1 007	0.02662	2.346×10^{-5}	1.918×10^{-5}	1.702×10^{-5}	0.7255
45	1.109	1 007	0.02699	2.416×10^{-5}	1.941×10^{-5}	1.750×10^{-5}	0.7241
50	1.092	1 007	0.02735	2.487×10^{-5}	1.963×10^{-5}	1.798×10^{-5}	0.7228
60	1.059	1 007	0.02808	2.632×10^{-5}	2.008×10^{-5}	1.896×10^{-5}	0.7202
70	1.028	1 007	0.02881	2.780×10^{-5}	2.052×10^{-5}	1.995×10^{-5}	0.7177
80	0.9994	1 008	0.02953	2.931×10^{-5}	2.096×10^{-5}	2.097×10^{-5}	0.7154
90	0.9718	1 008	0.03024	3.086×10^{-5}	2.139×10^{-5}	2.201×10^{-5}	0.7132
100	0.9458	1 009	0.03095	3.243×10^{-5}	2.181×10^{-5}	2.306×10^{-5}	0.7111
120	0.8977	1 011	0.03235	3.565×10^{-5}	2.264×10^{-5}	2.522×10^{-5}	0.7073
140	0.8542	1 013	0.03374	3.898×10^{-5}	2.345×10^{-5}	2.745×10^{-5}	0.7041
160	0.8148	1 016	0.03511	4.241×10^{-5}	2.420×10^{-5}	2.975×10^{-5}	0.7014
180	0.7788	1 019	0.03646	4.593×10^{-5}	2.504×10^{-5}	3.212×10^{-5}	0.6992
200	0.7459	1 023	0.03779	4.954×10^{-5}	2.577×10^{-5}	3.455×10^{-5}	0.6974
250	0.6746	1 033	0.04104	5.890×10^{-5}	2.760×10^{-5}	4.091×10^{-5}	0.6946
300	0.6158	1 044	0.04418	6.871×10^{-5}	2.934×10^{-5}	4.765×10^{-5}	0.6935
350	0.5664	1 056	0.04721	7.892×10^{-5}	3.101×10^{-5}	5.475×10^{-5}	0.6937
400	0.5243	1 069	0.05015	8.951×10^{-5}	3.261×10^{-5}	6.219×10^{-5}	0.6948
450	0.4880	1 081	0.05298	1.004×10^{-4}	3.415×10^{-5}	6.997×10^{-5}	0.6965
500	0.4565	1 093	0.05572	1.117×10^{-4}	3.563×10^{-5}	7.806×10^{-5}	0.6986
600	0.4042	1 115	0.06093	1.352×10^{-4}	3.846×10^{-5}	9.515×10^{-5}	0.7037
700	0.3627	1 135	0.06581	1.598×10^{-4}	4.111×10^{-5}	1.133×10^{-4}	0.7092
800	0.3289	1 153	0.07037	1.855×10^{-4}	4.362×10^{-5}	1.326×10^{-4}	0.7149
900	0.3008	1 169	0.07465	2.122×10^{-4}	4.600×10^{-5}	1.529×10^{-4}	0.7206
1 000	0.2772	1 184	0.07868	2.398×10^{-4}	4.826×10^{-5}	1.741×10^{-4}	0.7260
1 500	0.1990	1 234	0.09599	3.908×10^{-4}	5.817×10^{-5}	2.922×10^{-4}	0.7478
2 000	0.1553	1 264	0.11113	5.664×10^{-4}	6.630×10^{-5}	4.270×10^{-4}	0.7539

Nota: Para los gases ideales, las propiedades c_p , k , μ y Pr son independientes de la presión. Las propiedades ρ , ν y α a una presión P (en atm) diferente de 1 atm se determinan al multiplicar los valores de ρ , a la temperatura dada, por P y al dividir ν y α entre P .

Fuente: Datos generados basándose en el software EES desarrollado por S. A. Klein y F. L. Alvarado. Fuentes originales: Keenan, Chao, Keyes, Gas Tables, Wiley, 1984, y Thermophysical Properties of Matter, Vol. 3: Thermal Conductivity, Y. S. Touloukian, P. E. Liley, S. C. Saxena, Vol. 11: Viscosity, Y. S. Touloukian, S. C. Saxena y P. Hestermans, IFI/Plenum, NY, 1970, ISBN 0-306057020-8.

Anexo B

User Defined Function (UDF)

El formato del código debe ser tipo C, por lo tanto es recomendable escribirlo en Wordpad, VisualCode o similares. El documento en formato C debe ser interpretado por ANSYS y compilado esto se realiza en la pestaña de User Defined Functions, en el icono de Functions. Luego de ser interpretado y compilado la UDF, es necesaria acoplarla a la sección donde se utilizará, esto es en Functions Hooks. En este caso es solución inicial por lo tanto en la primera pestaña Initialization se acopla la UDF al seleccionar Edit y buscar la UDF. El siguiente código inserta en todas las celdas una temperatura que decrece de izquierda a derecha, de pared caliente a fría.

```
#include "udf.h"
DEFINE_INIT(temp,d)
{
  cell_t c;
  Thread *t;
  real xc[ND_ND];
  /* loop over all cell threads in the domain */
  thread_loop_c(t,d)
  {
    /* loop over all cells */
    begin_c_loop_all(c,t)
    {
      C_CENTROID(xc,c,t);
      C_T(c,t) = 283.-xc[0]*80.;
    }
    end_c_loop_all(c,t)
  }
}
```