

2019

# IDENTIFICACIÓN DE UN COEFICIENTE DESCONOCIDO EN LA ECUACIÓN DE KURAMOTO-SIVASHINSKY

GAJARDO MIRANDA, DIEGO FERNANDO

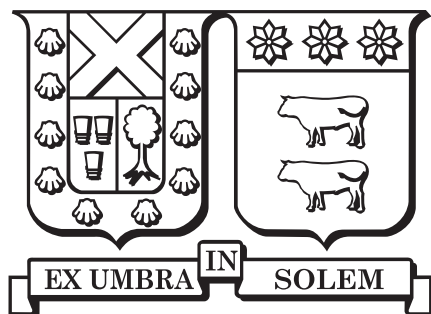
---

<https://hdl.handle.net/11673/47421>

*Repositorio Digital USM, UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA*

# UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
VALPARAÍSO-CHILE



---

## Identificación de un coeficiente desconocido en la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky

---

Tesis presentada por:

**Diego Fernando Gajardo Miranda**

*Como requisito parcial*

*para optar al grado académico de Magíster en Ciencias Mención  
Matemática*

Director de tesis:

**Dr. Alberto Mercado Saucedo**

Enero, 2019



UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
VALPARAÍSO-CHILE



---

# Identificación de un coeficiente desconocido en la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky

---

Tesis presentada por:

**Diego Fernando Gajardo Miranda**

*Como requisito parcial*

*para optar al grado académico de Magíster en Ciencias Mención  
Matemática*

*Examinadores:*

*Director de tesis:*

Dr. Alberto Mercado

Dr. Juan Carlos Muñoz

Dr. Michael Karkulik

Dr. Rodrigo Lecaros

Enero, 2019

Material de referencia, su uso no involucra responsabilidad del autor o de la Institución.



TÍTULO DE LA TESIS:

Identificación de un coeficiente desconocido en la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky.

AUTOR: Diego Fernando Gajardo Miranda.

TRABAJO DE TESIS, presentado como requisito parcial para optar al grado académico de Magíster en Ciencias Mención Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN EVALUADORA:

Integrantes

Firma

Alberto Mercado

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

---

Juan Carlos Muñoz

Universidad del Valle, Colombia

---

Rodrigo Lecaros

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

---

Michael Karkulik

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

---

Valparaíso, Enero 2019.



## *Agradecimientos*

Quiero expresar mis agradecimientos de manera muy especial a mis padres por todo su cariño y apoyo que me han brindado. De igual forma quiero agradecer a mis hermanos por siempre estar ahí.

Valparaíso, Enero 2019.





# Índice general

|                                                        |           |
|--------------------------------------------------------|-----------|
| Índice de figuras                                      | VI        |
| Resumen                                                | VII       |
| Abstract                                               | VIII      |
| <b>1. Introducción</b>                                 | <b>1</b>  |
| 1.1. Descripción del problema y antecedentes . . . . . | 3         |
| <b>2. Problema Directo</b>                             | <b>5</b>  |
| <b>3. Problema Inverso</b>                             | <b>12</b> |
| 3.1. Problema de control optimal . . . . .             | 13        |
| 3.2. Condiciones de optimalidad . . . . .              | 16        |
| 3.3. Desigualdad de estabilidad y unicidad . . . . .   | 21        |
| <b>4. Simulaciones numéricas</b>                       | <b>26</b> |
| 4.1. Discretización del problema directo . . . . .     | 26        |
| 4.2. Experimentos numéricos . . . . .                  | 28        |
| <b>5. Conclusiones y trabajos futuros</b>              | <b>32</b> |
| Bibliografía                                           | 34        |

# Índice de figuras

|      |                                                                                                                                                                                                    |    |
|------|----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|----|
| 4.1. | Izquierda: Reconstrucción numérica del parámetro $\gamma_2$ con $\alpha = 10^{-4}$ y $T = 0,7$ .<br>Derecha: Reconstrucción numérica del parámetro $\gamma_2$ con $\alpha = 10^{-5}$ y $T = 0,7$ . | 30 |
| 4.2. | Izquierda: Reconstrucción numérica del parámetro $\gamma_2$ con $\alpha = 10^{-6}$ y $T = 0,7$ .<br>Derecha: Reconstrucción numérica del parámetro $\gamma_2$ con $\alpha = 0$ y $T = 0,7$ .       | 30 |
| 4.3. | Izquierda: Reconstrucción numérica del parámetro $\gamma_1$ con $\alpha = 0$ y $T = 1$ .<br>Derecha: Medición en tiempo final $u(x, T = 1)$ asociado al parámetro $\gamma_1$ estimado.             | 30 |
| 4.4. | Izquierda: Reconstrucción numérica del parámetro $\gamma_1$ con $\alpha = 0$ y $T = 5$ .<br>Derecha: Medición en tiempo final $u(x, T = 5)$ asociado al parámetro $\gamma_1$ estimado.             | 31 |
| 4.5. | Izquierda: Reconstrucción numérica del parámetro $\gamma_2$ con $\alpha = 0$ y $T = 1$ .<br>Derecha: Medición en tiempo final $u(x, T = 1)$ asociado al parámetro $\gamma_2$ estimado.             | 31 |
| 4.6. | Izquierda: Reconstrucción numérica del parámetro $\gamma_2$ con $\alpha = 0$ y $T = 5$ .<br>Derecha: Medición en tiempo final $u(x, T = 5)$ asociado al parámetro $\gamma_2$ estimado.             | 31 |

**Identificación de un coeficiente desconocido en la ecuación de  
Kuramoto-Sivashinsky**

por DIEGO GAJARDO MIRANDA

## **Resumen**

En este trabajo, estudiamos el problema inverso de recuperar el coeficiente de anti-difusión  $\gamma = \gamma(x)$  en la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky lineal  $u_t + (\sigma(x)u_{xx})_{xx} + \gamma(x)u_{xx} = 0$  a partir de una medición en tiempo final  $m(x) = u(x, T)$ ,  $x \in (0, 1)$ .

Usando un enfoque de control optimal formulamos el problema inverso como un problema de minimización. De este problema mostramos la existencia de un mínimo y derivamos las condiciones de optimalidad. Luego, usando estimaciones de energía del sistema y las condiciones de optimalidad, deducimos la estabilidad y unicidad siempre que  $T$  sea suficientemente pequeño. Finalmente, presentamos simulaciones numéricas para la reconstrucción del parámetro  $\gamma$ .

## Identification of unknown coefficient in the Kuramoto-Sivashinsky equation

por DIEGO GAJARDO MIRANDA

### Abstract

In this work, we study the inverse problem of retrieving the unknown coefficient  $\gamma = \gamma(x)$  in the Kuramoto-Sivashinsky equation  $u_t + (\sigma(x)u_{xx})_{xx} + \gamma(x)u_{xx} = 0$  from the final time measurement  $m(x) = u(x, T)$ ,  $x \in (0, 1)$ .

By using an optimal control approach we formulate the inverse problem as a minimization problem. For this problem we show the existence of a minimum and we derive the optimality conditions. Then, by using energy estimates and the optimality conditions, we deduce the stability and uniqueness provided  $T$  is sufficiently small. Finally, we present some numerical experiments for the reconstruction of the parameter  $\gamma$ .



# Capítulo 1

## Introducción

Los problemas inversos aparecen en muchos campos de la ciencia y la ingeniería, como por ejemplo la geofísica, astronomía, meteorología, entre muchas otras áreas. Sin dar una definición precisa, podemos decir que un *problema directo* consiste en dadas las causas, determinar sus efectos. En cambio, un *problema inverso* consiste en determinar las causas a partir de sus efectos. Un ejemplo de problema inverso y quizá el más conocido por la comunidad matemática es el siguiente: ¿podemos oír la forma de un tambor? es decir, ¿somos capaces de determinar la forma de un tambor conociendo el sonido que este emite? Esta pregunta fue planteada por Marc Kac en el año 1966 en su célebre artículo *Can one hear the shape of a drum?* [Kac66]. En este ejemplo el problema directo es el siguiente: dada la forma de un tambor (causas), determinar el sonido que éste emite (efectos). De manera opuesta, el problema inverso consiste en dado el sonido de un tambor, determinar la forma de éste.

En el año 1923 el matemático francés Jacques Hadamard introdujo el término *well-posed* (*bien puesto*) para un problema matemático. De acuerdo a esta definición, un problema está bien puesto si dicho problema posee una única solución y dicha solución depende continuamente respecto a los datos en alguna topología. Esta última condición se traduce en decir que pequeños cambios en los datos del problema generan pequeños cambios en la solución. De esta forma, un problema está *mal puesto* si alguna de las condiciones anteriores no se cumple. Típicamente los problemas inversos están *mal puestos*. Con la intención de dar una noción precisa de lo anterior es que a continuación presentamos la siguiente definición.

Sean  $(X, \|\cdot\|_X)$ ,  $(Y, \|\cdot\|_Y)$  espacios normados y  $T : X \rightarrow Y$  un mapeo (puede ser lineal o no lineal). Aquí,  $X$  denota el espacio de parámetros mientras que  $Y$  el espacio de observaciones.

**Definición 1.1.** El **problema directo** consiste en, dado  $x \in X$ , determinar  $y = T(x)$ . En cambio, el **problema inverso** consiste en dado  $y \in Y$ , determinar  $x \in X$  tal que  $y = T(x)$ .

El estudio de los problemas inversos consta de varios elementos que son de interés matemático:

- (i) Identificabilidad del problema inverso (inyectividad del operador  $T$ ).
- (ii) Estabilidad del problema inverso (continuidad del operador  $T^{-1}$ , en caso de existir).
- (iii) Reconstrucción numérica.

En esta tesis estamos interesados en estudiar un problema inverso que se presenta en ecuaciones en derivadas parciales (EDP), esto es, dada una EDP, recuperar algún dato de la ecuación a partir del conocimiento de una parte de la solución de la EDP (por ejemplo, la solución en algún subdominio). Esta clase de problemas inversos ha captado especial interés por parte de la comunidad matemática, principalmente por los desafíos matemáticos propios de estos problemas y por el alto grado a nivel de aplicaciones que tienen. Un trabajo que puede considerarse pionero en el área, es el publicado en el año 1980 por A. Calderón [Cal80] (republicado en el año 2006 [Cal06]), en el cual estudia el problema de la tomografía de impedancia eléctrica (EIT por sus siglas en inglés). Este problema, conocido también como el *Problema Inverso de Calderón*, consiste en determinar la conductividad eléctrica de un medio a partir de mediciones del voltaje y la corriente en la frontera del medio. A continuación describimos el modelo matemático usado en este problema. Consideremos  $\Omega \subset \mathbb{R}^n$  un dominio acotado con frontera suave. Denotamos por  $\gamma$  la conductividad eléctrica de  $\Omega$  la cual se asume acotada y positiva. Si  $f \in H^{1/2}(\partial\Omega)$  es el voltaje en la frontera de  $\Omega$  y asumimos ausencia de fuentes o sumideros, se tiene que la ecuación para el potencial es dada por

$$\begin{cases} \nabla \cdot (\gamma \nabla u) = 0, & \text{en } \Omega, \\ u = f, & \text{sobre } \partial\Omega. \end{cases} \quad (1.1)$$

El operador Dirichlet a Neumann o también llamado voltaje a corriente es dado por

$$\Lambda_\gamma : H^{1/2}(\partial\Omega) \rightarrow H^{-1/2}(\partial\Omega), \quad f \mapsto \Lambda_\gamma(f) = \gamma \frac{\partial u}{\partial \nu},$$

donde  $\nu$  denota el vector normal exterior a  $\partial\Omega$ .

El problema inverso de Calderón consiste en reconstruir  $\gamma$  a partir del conocimiento del operador Dirichlet a Neumann  $\Lambda_\gamma$ .

Desde la publicación del trabajo de Calderón, este problema ha sido muy estudiado. En efecto, bajo las hipótesis de que  $n \geq 3$  y  $\gamma \in C^2(\overline{\Omega})$ , los siguientes resultados han sido probados:

**Teorema 1.2.** (*Sylvester-Uhlmann 1987 [SU87]*) Si  $\Lambda_{\gamma_1} = \Lambda_{\gamma_2}$ , entonces  $\gamma_1 = \gamma_2$  en  $\Omega$ .

**Teorema 1.3.** (*Alessandrini 1988 [Ale88]*) Sean  $\gamma_j \in H^s(\Omega)$  para  $s > \frac{n}{2} + 2$ , y asumir que  $\|\gamma_j\|_{H^s(\Omega)} \leq M$  y  $\frac{1}{M} \leq \gamma_j \leq M$  ( $j = 1, 2$ ). Entonces

$$\|\gamma_1 - \gamma_2\|_{L^\infty(\Omega)} \leq \omega \left( \|\Lambda_{\gamma_1} - \Lambda_{\gamma_2}\|_{\mathcal{L}(H^{1/2}(\partial\Omega), H^{-1/2}(\partial\Omega))} \right),$$

donde  $\omega(t) = C|\log(t)|^{-\sigma}$  para  $t > 0$  pequeño, con  $C = C(\Omega, M, n, s) > 0$ ,  $\sigma = \sigma(n, s) \in (0, 1)$ .

**Teorema 1.4.** (*Nachman 1988 [Nac88]*) Existe un algoritmo convergente para reconstruir  $\gamma$  a partir de  $\Lambda_\gamma$ .

## 1.1. Descripción del problema y antecedentes

En este trabajo de tesis consideramos la ecuación parabólica de cuarto orden llamada ecuación de Kuramoto-Sivashinsky (KS). Esta ecuación fue propuesta de manera independiente por Kuramoto y Tsuzuki [KT75] como un modelo para la fase turbulenta en sistemas de reacción-difusión, y por Sivashinsky [Siv77], como un modelo del fenómeno físico de propagación de flamas.

La ecuación KS con coeficientes no constantes  $\sigma = \sigma(x)$  y  $\gamma = \gamma(x)$  es dada por

$$\begin{cases} u_t + (\sigma(x)u_{xx})_{xx} + \gamma(x)u_{xx} + uu_x = 0, & x \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (1.2)$$

junto con adecuadas condiciones de frontera que hacen que el problema esté bien puesto.

A nuestro conocimiento, en lo que refiere al estudio de problemas inversos relacionados con esta ecuación, hay dos trabajos reportados en la literatura que van en esta línea. En Baudouin et al. [LBM13] estudian el problema inverso de recuperar el coeficiente de anti-difusión  $\gamma = \gamma(x)$  a partir de mediciones de la solución de (1.2) en  $u_{xx}(0, t)$ ,  $u_{xxx}(0, t)$  sobre  $(0, T)$  y  $u(x, T_0)$  sobre  $(0, 1)$ , con  $T_0 \in (0, T)$ . En este trabajo los autores prueban una estabilidad tipo Lipschitz para el problema inverso. Para la demostración usan el método de Bukhgeim-Klibanov y por lo tanto la prueba se basa en derivar una estimación de Carleman global para la ecuación KS linealizada. En [Guz13] se estudia el problema inverso de recuperar el coeficiente principal  $\sigma$  desde mediciones de la solución de (1.2) en  $u_{xx}(0, t)$ ,  $u_{xxx}(0, t)$  sobre  $(0, T)$  y  $u(x, T_0)$  sobre  $(0, 1)$ , con  $T_0 \in (0, T)$ . En dicho trabajo se prueba una estabilidad tipo Lipschitz para el problema inverso usando la misma técnica que en el trabajo ya señalado.

Esta ecuación también ha sido estudiada desde el punto de vista de la teoría de control. Se sugiere al lector interesado en revisar por ejemplo [LK01], [CM11], trabajos en los cuales se estudia la estabilidad y controlabilidad a cero de la ecuación (1.2), respectivamente.

En este trabajo de tesis estudiamos el problema inverso de recuperar el coeficiente anti-difusión  $\gamma = \gamma(x)$  en la ecuación KS lineal (1.3) a partir de una medición en tiempo final  $m(x) = u(x, T)$  sobre  $(0, 1)$ .

$$\begin{cases} u_t + (\sigma(x)u_{xx})_{xx} + \gamma(x)u_{xx} = 0, & x \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(0, t) = 0, \quad u(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u_x(0, t) = 0, \quad u_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (1.3)$$

Abordamos este problema inverso usando un enfoque de control optimal. Para ello formulamos el problema como un problema de minimización de un funcional adecuado. De este problema mostramos la existencia de un mínimo y derivamos las condiciones de optimalidad. Luego, usando estimaciones de energía del sistema y las condiciones de optimalidad, deducimos la estabilidad y unicidad siempre que  $T$  sea suficientemente pequeño. Finalmente, presentamos simulaciones numéricas de la reconstrucción del parámetro.

La estrategia de transformar el problema inverso en un problema de control optimal es una técnica que ha sido usada en distintas ecuaciones en evolución. Por ejemplo, Hasanov en [Has07] prueba la identificabilidad de un término fuente y una función desconocida de un término en la frontera en una ecuación parabólica. En Deng et al. [ZCDY08] prueban la identificabilidad de un coeficiente de primer orden en una ecuación parabólica a partir de una medición en tiempo final. Este método también ha sido utilizado en ecuaciones de orden superior. Un trabajo que va en esta línea es el de Sakthivel et al. [KSG16] en el cual los autores estudian el problema inverso de recuperar un término asociado a la velocidad de onda lineal en la ecuación Korteweg-de Vries.

El desarrollo de esta tesis está organizado de la siguiente manera. En el capítulo 2 se muestra la existencia de una única solución del sistema (1.3), la que además depende continuamente respecto a los datos. El capítulo 3 se divide en tres secciones. En la sección 3.1 se plantea el problema inverso como un problema de control optimal y se muestra la existencia de un mínimo de este problema. En la sección 3.2 se derivan las condiciones de optimalidad de primer orden para el problema de control optimal. En la sección 3.3 se prueban estimaciones de energía del sistema, para luego junto a las condiciones de optimalidad del sistema, deducir la identificabilidad del problema inverso siempre que  $T$  sea suficientemente pequeño. En el capítulo 4 presentamos varias simulaciones numéricas de la reconstrucción del coeficiente  $\gamma$ . Finalmente, en el capítulo 5 se dan conclusiones del trabajo de tesis y se discuten posibles estudios futuros.

## Capítulo 2

# Problema Directo

Consideremos el siguiente sistema de Kuramoto-Sivashinsky lineal:

$$\begin{cases} u_t + (\sigma(x)u_{xx})_{xx} + \gamma(x)u_{xx} = f, & x \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (2.1)$$

donde  $T > 0$ ,  $\sigma = \sigma(x)$  es el coeficiente de difusión,  $\gamma = \gamma(x)$  es el coeficiente de anti-difusión,  $f = f(x, t)$  es un término fuente y  $u_0 = u_0(x)$  es la condición inicial.

En este capítulo se probará que el sistema (2.1) está bien puesto en el sentido de Hadamard, es decir, se demostrará que esta ecuación posee una única solución (en algún sentido), la que además depende continuamente respecto de los datos. Para realizar esto usaremos el enfoque de Galerkin ([Sal15], [Eva98]).

**Notación.** Si no hay peligro a confusión, escribiremos  $L^p$  en vez de  $L^p(0, 1)$ , y análogamente  $H^k$  en vez de  $H^k(0, 1)$  para espacios de Sobolev; a los correspondientes espacios de funciones con trazas cero se les añade un subíndice 0.

A lo largo de este capítulo supondremos que  $\sigma_0 > 0$  y  $\sigma \in L^\infty$  tal que  $\sigma(x) \geq \sigma_0$  c.t.p  $x \in (0, 1)$ .

Comenzamos este capítulo definiendo lo que entenderemos por una solución débil del problema (2.1).

**Definición 2.1.** Sean  $u_0 \in L^2$  y  $f \in L^2(0, T; L^2)$ . Diremos que una función  $u : [0, T] \rightarrow H_0^2$  es una **solución débil** de (2.1) si:

$$(1) \quad u \in L^2(0, T; H_0^2) \text{ y } u_t \in L^2(0, T; H^{-2});$$

(2) para cada  $\varphi \in H_0^2$ ,

$$\int_0^1 u_t \varphi dx + \int_0^1 \sigma(x) u_{xx} \varphi_{xx} dx + \int_0^1 \gamma(x) u_{xx} \varphi dx = \int_0^1 f \varphi dx \quad \text{c.t.p } t \in (0, T); \quad (2.2)$$

(3)  $u(0) = u_0$ .

**Observación 2.2.** Notar que las condiciones  $u \in L^2(0, T; H_0^2)$  y  $u_t \in L^2(0, T; H^{-2})$  en la definición 2.1, implican que  $u \in C([0, T]; L^2)$ , de modo que la condición inicial  $u_0 \in L^2$  hace sentido ([Zei90], Proposition 23.23).

El siguiente teorema es el principal resultado de esta sección, en el cual se establece la existencia de una única solución débil del sistema (2.1) la que además depende continuamente respecto a los datos.

**Teorema 2.3.** Sea  $\sigma_0 > 0$  y  $\sigma \in L^\infty$  tal que  $\sigma(x) \geq \sigma_0$  c.t.p  $t \in [0, T]$ . Sean  $\gamma \in L^\infty$ ,  $f \in L^2(0, T; L^2)$  y  $u_0 \in L^2$ . Entonces existe una única solución débil

$$u \in C([0, T]; L^2) \cap L^2(0, T; H_0^2)$$

de (2.1) con  $u_t \in L^2(0, T; H^{-2})$ . Más aún, existe una constante  $C$  tal que

$$\|u\|_{L^\infty(0, T; L^2)} + \|u\|_{L^2(0, T; H_0^2)} + \|u_t\|_{L^2(0, T; H^{-2})} \leq C (\|u_0\|_{L^2} + \|f\|_{L^2(0, T; L^2)}).$$

Sea  $\{w_k\}_{k \in \mathbb{N}}$  una base ortonormal de  $L^2$  y ortogonal en  $H_0^2$ . Consideremos el espacio finito dimensional  $E_N = \text{span}\{w_1, \dots, w_N\}$ .

Ahora definamos lo que entenderemos por una *solución aproximada* del problema (2.1).

**Definición 2.4.** Sean  $u_0 \in L^2$  y  $f \in L^2(0, T; L^2)$ . Una función  $u_N : [0, T] \rightarrow E_N$  es una *solución aproximada* de (2.1) si:

(1)  $u_N \in L^2(0, T; E_N)$  y  $u_{Nt} \in L^2(0, T; E_N)$ ;

(2) para cada  $\varphi \in E_N$

$$\int_0^1 u_{Nt} \varphi dx + \int_0^1 \sigma u_{Nxx} \varphi_{xx} dx + \int_0^1 \gamma u_{Nxx} \varphi dx = \int_0^1 f \varphi dx \quad \text{c.t.p } t \in [0, T]; \quad (2.3)$$

(3)  $u_N(0) = \sum_{k=1}^N \langle u_0, w_k \rangle w_k$ .

Para probar que el problema aproximado posee solución escribimos

$$u_N(t) = \sum_{K=1}^N c_N^k(t) w_k, \quad (2.4)$$

donde  $c_N^k : [0, T] \rightarrow \mathbb{R}$  son funciones absolutamente continuas. De la linealidad de la ecuación se tiene que es suficiente considerar  $\varphi = w_1, \dots, w_N$  en (2.3). Luego, (2.4) es una solución aproximada si y solo si,

$$c_N^k \in L^2(0, T), \quad c_{Nt}^k \in L^2(0, T) \quad \text{para } 1 \leq k \leq N,$$

y  $\{c_N^1, \dots, c_N^N\}$  satisface el sistema de EDOs

$$c_{Nt}^j + \sum_{k=1}^N a^{jk} c_N^k = f^j, \quad c_N^j(0) = u_0^j \quad \text{para } 1 \leq j \leq N, \quad (2.5)$$

donde

$$a^{jk} = \int_0^1 \sigma(x) w_{xx}^k w_{xx}^j dx + \int_0^1 \gamma(x) w_{xx}^k w^j dx, \quad f^j(t) = \int_0^1 f w^j dx, \quad u_0^j = \int_0^1 u_0 w^j dx.$$

La ecuación (2.5) puede ser escrita como

$$\vec{c}_{Nt} + A \vec{c}_N = \vec{f}(t), \quad \vec{c}_N(0) = \vec{u}_0, \quad (2.6)$$

donde

$$\vec{c}_N = (c_N^1, \dots, c_N^N)^T, \quad \vec{f}(t) = (f^1, \dots, f^N)^T, \quad \vec{u}_0 = (u_0^1, \dots, u_0^N)^T,$$

y  $A$  es una matriz con coeficientes  $(a^{jk})_{j,k=1,\dots,N}$ . En el siguiente resultado se establece la existencia de una única *solución aproximada* del sistema (2.1).

**Proposición 2.5.** *Para cada  $N \in \mathbb{N}$ , existe una única solución aproximada  $u_N : [0, T] \rightarrow E_N$  de la forma (2.4).*

*Demostración.* Primero notemos que la ecuación (2.6) es equivalente a la ecuación integral

$$\vec{c}_N = \Phi(\vec{c}_N), \quad \Phi(\vec{c}_N)(t) = \vec{u}_0 - \int_0^t A(s) \vec{c}_N(s) ds + \int_0^t \vec{f}(s) ds.$$

Como  $A \in L^\infty(0, T; \mathbb{R}^{N \times N})$  y  $\vec{f} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^N)$ , se tiene que  $\Phi : C([0, T^*]; \mathbb{R}^N) \rightarrow C([0, T^*]; \mathbb{R}^N)$  para cualquier  $0 < T^* \leq T$ . Observemos además que dados  $\vec{p}, \vec{q} \in C([0, T^*]; \mathbb{R}^N)$ ,

$$\|\Phi(\vec{p}) - \Phi(\vec{q})\|_{L^\infty([0, T^*]; \mathbb{R}^N)} \leq K T^* \|\vec{p} - \vec{q}\|_{L^\infty([0, T^*]; \mathbb{R}^N)},$$

donde

$$K = \sup_{0 \leq t \leq T} \|A(t)\|.$$

De esto último se sigue que si  $KT^* < 1$ , el mapeo  $\Phi$  es una contracción sobre  $C([0, T^*]; \mathbb{R}^N)$ . Luego, el Teorema del punto fijo de Banach implica que existe una única solución sobre  $[0, T^*]$ , la cual se puede extender después de aplicar este resultado un número finito de pasos, a una solución  $\vec{c}_N \in C([0, T]; \mathbb{R}^N)$ . De esta forma se tiene que la solución  $u_N \in C([0, T]; \mathbb{R}^N)$ . Además, de la ecuación (2.6) se tiene que

$$\vec{c}_{Nt} = \Phi(\vec{c}_N)_t = -A\vec{c}_N + \vec{f} \in L^2(0, T; \mathbb{R}^N),$$

de donde se sigue que  $u_{Nt} \in L^2(0, T; E_N)$ . Así finaliza la demostración.  $\square$

En la siguiente proposición se muestran estimaciones energía que satisface la *solución aproximada* del sistema (2.1).

**Proposición 2.6.** *Existe una constante  $C$ , dependiendo solo de  $T$  y los coeficientes  $\sigma$  y  $\gamma$ , tal que para cada  $N \in \mathbb{N}$ , la solución aproximada  $u_N$  de (2.1) satisface*

$$\|u_N\|_{L^\infty(0, T; L^2)} + \|u_N\|_{L^2(0, T; H_0^2)} + \|u_{Nt}\|_{L^2(0, T; H^{-2})} \leq C (\|u_0\|_{L^2} + \|f\|_{L^2(0, T; L^2)}). \quad (2.7)$$

*Demostración.* Multiplicando la ecuación (2.3) por  $c_N^k(t)$  con  $\varphi = w_k$  y sumando para  $k = 1, \dots, N$ , obtenemos

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \|u_N(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^1 \sigma(x) |u_{Nxx}|^2 dx = - \int_0^1 \gamma(x) u_{Nxx} u_N dx + \int_0^1 f u_N dx.$$

Si en el lado derecho de esta última identidad consideramos

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \gamma(x) u_N u_{Nxx} dx + \int_0^1 f u_N dx &\leq \frac{\|\gamma\|_{L^\infty}^2}{2\sigma_0} \|u_N(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \int_0^1 \sigma(x) |u_{Nxx}|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \|f(t)\|_{L^2}^2 + \frac{1}{2} \|u_N(t)\|_{L^2}^2, \end{aligned}$$

entonces

$$\frac{d}{dt} \|u_N(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^1 \sigma(x) |u_{Nxx}|^2 dx \leq \left( \frac{\|\gamma\|_{L^\infty}^2}{\sigma_0} + 1 \right) \|u_N(t)\|_{L^2}^2 + \|f(t)\|_{L^2}^2. \quad (2.8)$$

Usando el lema de Gronwall se tiene que

$$\begin{aligned} \|u_N(t)\|_{L^2}^2 &\leq \exp \left[ T \left( \frac{\|\gamma\|_{L^\infty}^2}{\sigma_0} + 1 \right) \right] \left[ \|u_N(0)\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2(0, T; L^2)}^2 \right] \\ &\leq \exp \left[ T \left( \frac{\|\gamma\|_{L^\infty}^2}{\sigma_0} + 1 \right) \right] \left[ \|u_0\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2(0, T; L^2)}^2 \right]. \end{aligned} \quad (2.9)$$

Integrando sobre  $(0, T)$  en (2.8) y usando que  $\sigma(x) \geq \sigma_0$ , obtenemos

$$\|u_N(t)\|_{L^2(0,T;H_0^2)}^2 \leq \frac{KT}{\sigma_0} \|u_N(t)\|_{L^2}^2 + \|f(t)\|_{L^2}^2 + \|u_0\|_{L^2}^2.$$

Usando (2.9) en ésta última desigualdad para estimar el término  $\|u_N(t)\|_{L^2}^2$ , se tiene

$$\|u_N(t)\|_{L^2(0,T;H_0^2)}^2 \leq \left( \frac{KT}{\sigma_0} \exp(KT) + 1 \right) \left[ \|u_0\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 \right], \quad (2.10)$$

donde

$$K = \frac{\|\gamma\|_{L^\infty}^2}{\sigma_0} + 1.$$

Juntando (2.9) y (2.10) se tiene que existe una constante  $C$  tal que

$$\|u_N\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \|u_N\|_{L^2(0,T;H_0^2)}^2 \leq C \left( \|u_0\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 \right). \quad (2.11)$$

Solo resta estimar la norma  $\|u_{Nt}\|_{L^2(0,T;H^{-2})}$ . Sea  $\varphi = \varphi^1 + \varphi^2 \in H_0^2(0,1)$ , donde  $\varphi^1 \in E_N$  y  $\varphi^2 \in E_N^\perp$ . Notar que  $\|\varphi^1\|_{H_0^2} \leq \|\varphi\|_{H_0^2}$ . Luego

$$\int_0^1 u_{Nt} \varphi dx = \int_0^1 u_{Nt} \varphi^1 dx = \int_0^1 f \varphi^1 dx - \int_0^1 \sigma u_{Nxx} \varphi_{xx}^1 dx - \int_0^1 \gamma u_{Nxx} \varphi^1 dx \quad (2.12)$$

Ahora estimemos el lado derecho de esta última identidad. Usando la desigualdad de Poincaré en  $H_0^2(0,1)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^1 u_{Nt} \varphi dx &\leq \|f(t)\|_{L^2} \|\varphi^1\|_{L^2} + \|\sigma\|_{L^\infty} \|u_N(t)\|_{H_0^2} \|\varphi^1\|_{H_0^2} + \|\gamma\|_{L^\infty} \|u_N(t)\|_{H_0^2} \|\varphi^1\|_{L^2} \\ &\leq C_p \|f(t)\|_{L^2} \|\varphi^1\|_{H_0^2} + \|\sigma\|_{L^\infty} \|u_N(t)\|_{H_0^2} \|\varphi^1\|_{H_0^2} + C_p \|\gamma\|_{L^\infty} \|u_N(t)\|_{H_0^2} \|\varphi^1\|_{H_0^2} \\ &\leq C (\|u_N(t)\|_{H_0^2} + \|f(t)\|_{L^2}) \|\varphi^1\|_{H_0^2} \\ &\leq C (\|u_N(t)\|_{H_0^2} + \|f(t)\|_{L^2}) \|\varphi\|_{H_0^2} \end{aligned} \quad (2.13)$$

donde  $C_p$  denota la constante de Poincaré. De ésta última línea se desprende que

$$\|u_{Nt}(t)\|_{H^{-2}}^2 \leq C \left( \|u_N(t)\|_{H_0^2}^2 + \|f(t)\|_{L^2}^2 \right). \quad (2.14)$$

Finalmente, como ya hemos estimado la norma  $\|u_N(t)\|_{H_0^2}^2$  en términos de los datos (ver (2.11)), usando la desigualdad (2.14) obtenemos

$$\begin{aligned} \|u_{Nt}\|_{L^2(0,T;H^{-2})}^2 &\leq C \left( \int_0^T \|u_N(t)\|_{H_0^2}^2 dt + \int_0^T \|f(t)\|_{L^2}^2 dt \right) \\ &\leq C \left( \|u_0\|_{L^2}^2 + \|f\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 \right). \end{aligned} \quad (2.15)$$

Con esto finaliza la prueba de proposición.  $\square$

A continuación presentamos la prueba del teorema 2.3.

**Demostración Teorema 2.3** La proposición 2.6 implica que las soluciones aproximadas  $\{u_N\}$  están acotadas en  $L^2(0, T; H_0^2)$  y sus derivadas temporales  $\{u_{Nt}\}$  están acotadas en  $L^2(0, T; H^{-2})$ . Luego, existe una subsucesión de  $\{u_N\}$  la cual seguiremos denotando por  $\{u_N\}$ , tal que

$$u_N \rightharpoonup u \text{ en } L^2(0, T; H_0^2), \quad u_{Nt} \rightharpoonup u_t \text{ en } L^2(0, T; H^{-2}). \quad (2.16)$$

Sea  $\phi \in C_0^\infty(0, T)$  y  $w \in E_M$  para algún  $M \in \mathbb{N}$  fijo. Considerando  $\varphi = \phi(t)w$  en (2.3) e integrando sobre  $(0, T)$ , obtenemos que para  $N \geq M$

$$\int_0^T \int_0^1 u_{Nt} \phi(t) w dx dt + \int_0^T \int_0^1 \sigma u_{Nxx} \phi(t) w_{xx} dx dt + \int_0^T \int_0^1 \gamma u_{Nxx} \phi(t) w dx dt = \int_0^T \int_0^1 f \phi(t) w dx dt.$$

Como  $\varphi \in L^2(0, T; H_0^2)$ , de (2.16) deducimos que cuando  $N \rightarrow \infty$ ,

$$\int_0^T \phi \left[ \int_0^1 u_t w dx + \int_0^1 \sigma u_{xx} w_{xx} dx + \int_0^1 \gamma u_{xx} w dx - \int_0^1 f w dx \right] dt = 0.$$

Como la identidad anterior vale para todo  $\phi \in C_0^\infty(0, T)$  entonces

$$\int_0^1 u_t w dx + \int_0^1 \sigma u_{xx} w_{xx} dx + \int_0^1 \gamma u_{xx} w dx = \int_0^1 f w dx \quad \text{c.t.p } t \in [0, T].$$

Más aún, como  $\cup_{m \in \mathbb{N}} E_M$  es denso en  $H_0^2$ , la ecuación anterior vale para cada  $w \in H_0^2$ , y por consiguiente  $u$  satisface (2.2).

Resta probar que  $u(0) = u_0$ . Sea  $\phi \in C^\infty([0, T])$  tal que  $\phi(0) = 1$  y  $\phi(T) = 0$ . Dada  $w \in E_M$  definimos  $\varphi = \phi(t)w$ . Notemos que luego de integrar por partes en tiempo sobre  $(0, T)$  se obtiene

$$\int_0^1 u(0) w dx = - \int_0^T \int_0^1 u \phi_t w dx dt + \int_0^T \int_0^1 \sigma u_{xx} w_{xx} dx + \int_0^T \int_0^1 \gamma u_{xx} w dx - \int_0^T \int_0^1 f w dx dt. \quad (2.17)$$

De manera similar, para la aproximación de Galerkin con  $w \in E_M$  con  $N \geq M$  obtenemos

$$\int_0^1 u_N(0) w dx = - \int_0^T \int_0^1 u_N \phi_t w dx dt + \int_0^T \int_0^1 \sigma u_{Nxx} w_{xx} dx + \int_0^T \int_0^1 \gamma u_{Nxx} w dx - \int_0^T \int_0^1 f w dx dt.$$

Luego de tomar límite cuando  $N \rightarrow \infty$  en esta última ecuación se tiene que

$$\int_0^1 u_0(x) w dx = - \int_0^T \int_0^1 u \phi_t w dx dt + \int_0^T \int_0^1 \sigma u_{xx} w_{xx} dx + \int_0^T \int_0^1 \gamma u_{xx} w dx - \int_0^T \int_0^1 f w dx dt. \quad (2.18)$$

Comparando las identidades (2.17) y (2.18) se llega a que

$$\int_0^1 u(0)w dx = \int_0^1 u_0(x)w dx \text{ para todo } w \in E_M,$$

de donde se deduce que  $u(0) = u_0$ .

Finalmente, veamos que la solución es única. Sean  $u$  y  $\tilde{u}$  dos soluciones débiles de (2.1). Sea  $y = u - \tilde{u}$ . Notemos que  $y$  resuelve

$$\int_0^1 y_t \varphi dx + \int_0^1 \sigma y_{xx} \varphi_{xx} dx = - \int_0^1 \gamma y_{xx} \varphi dx \text{ para toda } \varphi \in H_0^2 \text{ c.t.p } t \in (0, T) \text{ e } y(0) = 0.$$

Tomando  $\varphi = y$  en esta última identidad y estimando el lado derecho obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 |y|^2 dx + \int_0^1 \sigma(x) |y_{xx}|^2 dx \leq \frac{\|\gamma\|_{L^\infty}^2}{\sigma_0} \int_0^1 |y|^2 dx,$$

de donde se deduce que

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 |y|^2 dx \leq \frac{\|\gamma\|_{L^\infty}^2}{\sigma_0} \int_0^1 |y|^2 dx.$$

Finalmente, como  $y(0) = 0$ , del lema de Gronwall deducimos que  $y \equiv 0$ . Luego,  $u = \tilde{u}$ , lo cual prueba la unicidad de soluciones débiles de (2.1).

## Capítulo 3

# Problema Inverso

Dado  $T > 0$ ,  $\sigma$  y  $u_0$  son conocidos, consideremos el siguiente sistema de Kuramoto-Sivashinsky lineal:

$$\begin{cases} u_t + (\sigma(x)u_{xx})_{xx} + \gamma(x)u_{xx} = 0, & x \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.1)$$

Como ya habíamos mencionado en la introducción, en este trabajo de tesis estamos interesados en estudiar el siguiente problema inverso:

**Problema inverso:** Recuperar el coeficiente de anti-difusión  $\gamma = \gamma(x)$  a partir del conocimiento de una medición en tiempo final  $u(x, T)$  sobre  $(0, 1)$ .

Usando un enfoque de control optimal formulamos el problema inverso como un problema de minimización de un funcional. De este problema mostramos la existencia de un mínimo y derivamos las condiciones de optimalidad. Finalmente, usando estimaciones de energía del sistema y las condiciones de optimalidad, deducimos la estabilidad y unicidad siempre que  $T$  sea suficientemente pequeño.

Este capítulo está organizado como sigue. En la sección 3.1 se plantea el problema inverso como un problema de minimización de un funcional. En la sección 3.2 se derivan las condiciones de optimalidad de primer orden del problema de minimización. Finalmente, en la sección 3.3 se establece la desigualdad de estabilidad y el resultado de unicidad local.

### 3.1. Problema de control optimal

En esta sección planteamos el problema inverso como un problema de minimización de un determinado funcional. Luego, probamos que dicho problema de minimización posee al menos una solución.

Consideremos la clase de parámetros admisibles como sigue:

$$\mathcal{M} := \{\gamma \in H^1 : \gamma(x) \geq \gamma_0 > 0 \text{ y } \|\gamma\|_{H^1} \leq \eta\},$$

donde  $\gamma_0$  y  $\eta > 0$  son constantes. Dado  $m \in L^2$ , definimos el funcional  $J : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}_+$  por

$$J(\gamma) := \frac{1}{2} \int_0^1 (u(x, T; \gamma) - m(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 (\gamma'(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 (\gamma(x))^2 dx \quad (3.2)$$

donde  $u = u(\gamma)$  es solución débil de (3.1).

**Observación 3.1.** *Es importante notar que el funcional  $J$  está bien definido, pues para cada  $\gamma \in \mathcal{M}$  el teorema 2.3 implica que existe una única solución  $u \in C([0, T]; L^2)$ , de modo que  $u(\cdot, T) \in L^2$ .*

El problema de control optimal es definido como sigue:

$$\min_{\gamma \in \mathcal{M}} J(\gamma), \quad (3.3)$$

donde  $J$  es el funcional definido en (3.2)

En la siguiente proposición se establecen estimaciones de energía para la solución del sistema (3.1).

**Proposición 3.2. (Estimación de energía)** *Existen constantes  $K_1$  y  $K_2$  independientes de  $T$ , tal que si  $\gamma \in H^1(0, 1)$  y  $u_0 \in L^2(0, 1)$ , la solución débil de (3.1) satisface*

$$\|u_t\|_{L^2(0, T; H^{-2})}^2 + \|u\|_{L^\infty(0, T; L^2)}^2 + \|u\|_{L^2(0, T; H_0^2)}^2 \leq \left(1 + \frac{TK_1}{\sigma_0}\right) \exp(TK_2) \|u_0\|_{L^2}^2. \quad (3.4)$$

*Demostración.* La prueba sigue el mismo argumento usado en la demostración de la proposición (2.6). La constantes  $K_1$  y  $K_2$  vienen dadas por

$$K_1 = (\|\sigma\|_{L^\infty} + C_p^2 \|\gamma\|_{L^\infty})^2 K_2 + K_2$$

y

$$K_2 = \frac{\|\gamma\|_{L^\infty}^2}{\sigma_0},$$

respectivamente. □

En el siguiente teorema se prueba la existencia de un coeficiente admisible  $\gamma^* \in \mathcal{M}$  que minimiza el funcional de costo  $J(\gamma^*)$ , i.e.,  $\inf_{\gamma \in \mathcal{M}} J(\gamma) = J(\gamma^*)$ .

**Teorema 3.3.** *Supongamos que  $m \in L^2(0, 1)$ . Entonces existe  $\gamma^* \in \mathcal{M}$  que minimiza el funcional  $J(\gamma)$ , i.e.,  $\inf_{\gamma \in \mathcal{M}} J(\gamma) = J(\gamma^*)$ .*

*Demostración.* Notar que el funcional  $J$  está acotado inferiormente. Luego, existe una sucesión minimizante  $\{\gamma_k\} \subset \mathcal{M}$  de  $J$  tal que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} J(\gamma_k) = \inf_{\gamma \in \mathcal{M}} J(\gamma). \quad (3.5)$$

Como  $\{\gamma_k\} \subset \mathcal{M}$ , entonces  $\|\gamma_k\|_{H^1} \leq \eta \ \forall k \in \mathbb{N}$ . Así, existe una subsucesión de  $\{\gamma_k\}$ , la cual seguiremos denotando por  $\{\gamma_k\}$ , tal que  $\gamma_k \rightharpoonup \gamma^*$  débilmente en  $H^1$ . Como el conjunto  $\mathcal{M}$  es cerrado en la topología fuerte y además es convexo, se tiene que este es cerrado en la topología débil, lo cual implica que  $\gamma^* \in \mathcal{M}$ . Por otro lado, de la Proposición 3.2 se tiene que la solución  $u(\gamma_k)$  del sistema (3.1) satisface la estimación

$$\|u_t(\gamma_k)\|_{L^2(0,T;H^{-2})}^2 + \|u(\gamma_k)\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \|u(\gamma_k)\|_{L^2(0,T;H_0^2)}^2 \leq K.$$

Esto nos permite extraer una subsucesión de  $\{u(\gamma_k)\}$ , la cual seguiremos denotando por  $\{u(\gamma_k)\}$ , tal que

$$u(\gamma_k) \rightharpoonup u^* \text{ en } L^2(0, T; H_0^2), \quad u_t(\gamma_k) \rightharpoonup u_t^* \text{ en } L^2(0, T; H^{-2}).$$

Primero probaremos que  $u^* = u(x, t; \gamma^*)$ . Sea  $\phi \in C_0^\infty(0, T)$ . Multiplicando por  $\phi$  la identidad (2.2) e integrando sobre  $(0, T)$  obtenemos que para cada  $\varphi \in H_0^2$  se tiene que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 u_t(\gamma_k) \varphi \phi dx dt + \int_0^T \int_0^1 \sigma u_{xx}(\gamma_k) \varphi_{xx} \phi dx dt + \int_0^T \int_0^1 \gamma^* u_{xx}(\gamma_k) \varphi \phi dx dt \\ + \int_0^T \int_0^1 (\gamma_k - \gamma^*) u_{xx}(\gamma_k) \varphi \phi dx dt = 0. \end{aligned} \quad (3.6)$$

Si en el cuarto término del lado izquierdo de la identidad (3.6) consideramos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 (\gamma_k - \gamma^*) u_{xx}(\gamma_k) \varphi \phi dx dt &\leq \|\phi\|_{L^\infty(0,T)} \int_0^T \int_0^1 |(\gamma_k - \gamma^*) u_{xx}(\gamma_k) \varphi| dx dt \\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty(0,T)} \|\varphi\|_{L^\infty} \int_0^T \int_0^1 |(\gamma_k - \gamma^*) u_{xx}(\gamma_k)| dx dt \\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty(0,T)} \|\varphi\|_{L^\infty} \int_0^T \|\gamma_k - \gamma^*\|_{L^2} \|u_{xx}(\cdot, t; \gamma_k)\|_{L^2} dt \\ &\leq \|\phi\|_{L^\infty(0,T)} \|\varphi\|_{L^\infty} \|\gamma_k - \gamma^*\|_{L^2} T^{1/2} \|u(\gamma_k)\|_{L^2(0,T;H_0^2)}, \end{aligned} \quad (3.7)$$

entonces usando la inyección compacta  $H^1 \hookrightarrow L^2$  (lo cual implica que  $\gamma_k \rightarrow \gamma^*$  en  $L^2$ ) y el hecho de que  $\|u(\gamma_k)\|_{L^2(0,T;H_0^2)} \leq K$  y  $\varphi \in H_0^2$ , obtenemos que

$$\int_0^T \int_0^1 (\gamma_k - \gamma^*) u_{xx}(\gamma_k) \varphi \phi dx dt \rightarrow 0 \text{ cuando } k \rightarrow \infty. \quad (3.8)$$

Tomando  $k \rightarrow \infty$  en (3.6) y usando (3.8), se obtiene

$$\int_0^T \phi \left( \int_0^1 u_t^* \varphi dx + \int_0^1 \sigma u_{xx}^* \varphi_{xx} dx + \int_0^1 \gamma^* u_{xx}^* \varphi dx \right) dt = 0,$$

para cualquier  $\phi \in C_0^\infty(0, T)$ . Esto último implica que para cada  $\varphi \in H_0^2$

$$\int_0^1 u_t^* \varphi dx + \int_0^1 \sigma u_{xx}^* \varphi_{xx} dx + \int_0^1 \gamma^* u_{xx}^* \varphi dx = 0 \text{ c.t.p } t \in (0, T). \quad (3.9)$$

Ahora veamos que  $u^*(0) = u_0$ . Si en vez de considerar  $\phi \in C_0^\infty(0, T)$ , tomamos  $\phi \in C^1([0, T])$  tal que  $\phi(0) = 1$  y  $\phi(T) = 0$ , e integramos por partes en tiempo en (3.6) obtenemos

$$\begin{aligned} - \int_0^T \int_0^1 u(\gamma_k) \varphi \phi_t dx dt + \int_0^T \int_0^1 \sigma u_{xx}(\gamma_k) \varphi_{xx} \phi dx dt + \int_0^T \int_0^1 \gamma^* u_{xx}(\gamma_k) \varphi \phi dx dt \\ + \int_0^T \int_0^1 (\gamma_k - \gamma^*) u_{xx}(\gamma_k) \varphi \phi dx dt = \int_0^1 u_0(x) \varphi dx. \end{aligned}$$

Tomando límite cuando  $k \rightarrow \infty$ , luego integrando por partes en tiempo y finalmente usando (3.8) y (3.9), se obtiene

$$\int_0^1 u^*(0) \varphi dx = \int_0^1 u_0(x) \varphi dx \text{ para todo } \varphi \in H_0^2,$$

de donde se deduce que  $u^*(0) = u_0$ .

Solo resta probar que  $\gamma^*$  es optimal. Primero notemos que

$$\int_0^1 ((u(x, T; \gamma_k) - m(x)) - (u(x, T; \gamma^*) - m(x)))^2 dx \geq 0. \quad (3.10)$$

Como  $u(x, T; \gamma_k) \rightharpoonup u(x, T; \gamma^*)$  débilmente en  $L^2$ , usando la desigualdad (3.10) se tiene que

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 (u(x, T; \gamma_k) - m(x))^2 dx &\geq 2 \lim_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 (u(x, T; \gamma_k) - m(x)) (u(x, T; \gamma^*) - m(x)) dx \\ &\quad - \int_0^1 (u(x, T; \gamma^*) - m(x))^2 dx \\ &= \int_0^1 (u(x, T; \gamma^*) - m(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Como  $\gamma_k \rightharpoonup \gamma^*$  débilmente en  $H^1$  y la norma es semicontinua inferior en la topología débil se tiene que

$$\begin{aligned} \liminf_{k \rightarrow \infty} J(\gamma_k) &= \frac{1}{2} \liminf_{k \rightarrow \infty} \int_0^1 (u(x, T; \gamma_k) - m(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\gamma_k'\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2} \liminf_{k \rightarrow \infty} \|\gamma_k\|_{L^2}^2 \\ &\geq \frac{1}{2} \int_0^1 (u(x, T; \gamma^*) - m(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \|(\gamma^*)'\|_{L^2}^2 + \frac{\alpha}{2} \|(\gamma^*)\|_{L^2}^2 = J(\gamma^*). \end{aligned}$$

Usando (3.5) en la última desigualdad, se obtiene

$$\inf_{\gamma \in \mathcal{M}} J(\gamma) \leq J(\gamma^*) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} J(\gamma_k) = \lim_{k \rightarrow \infty} J(\gamma_k) = \inf_{\gamma \in \mathcal{M}} J(\gamma).$$

La prueba del teorema está completa.  $\square$

### 3.2. Condiciones de optimalidad

En esta sección derivamos las condiciones de optimalidad de primer orden para el problema de minimización.

Supongamos que  $\gamma, \gamma + \delta\gamma \in \mathcal{M}$ . Notemos que la variación del funcional  $J$  defido como

$$\delta J(\gamma) = J(\gamma + \delta\gamma) - J(\gamma),$$

satisface

$$\begin{aligned} \delta J(\gamma) &= \int_0^1 (u(x, T; \gamma) - m(x)) \delta u(x, T; \gamma) dx + \alpha \int_0^1 \gamma'(x) \delta \gamma'(x) dx + \alpha \int_0^1 \gamma(x) \delta \gamma(x) dx \\ &\quad + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 (\delta \gamma'(x))^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 (\delta \gamma(x))^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 (\delta u(x, T; \gamma))^2 dx, \end{aligned} \tag{3.11}$$

donde  $\delta u(x, t; \gamma) := u(x, t; \gamma + \delta\gamma) - u(x, t; \gamma)$  es solución del siguiente sistema:

$$\begin{cases} \delta u_t + (\sigma \delta u_{xx})_{xx} + \gamma(x) \delta u_{xx} = -(\delta \gamma(x)) u_{xx}(x, t; \gamma + \delta\gamma), & x \in (0, 1) \times (0, T), \\ \delta u(0, t) = \delta u(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \delta u_x(0, t) = \delta u_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \delta u(x, 0) = 0, & x \in (0, 1). \end{cases} \tag{3.12}$$

**Observación 3.4.** *Utilizando la misma estrategia usada para mostrar que el sistema (3.1) está bien puesto, es posible probar que la ecuación (3.12) admite una única solución débil.*

**Proposición 3.5.** *Supongamos que  $\gamma \in \mathcal{M}$  y  $u_0 \in L^2(0, 1)$ . Entonces la única solución débil de (3.12) satisface la siguiente estimación:*

$$\|\delta u\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \|\delta u\|_{L^2(0,T;H_0^2)}^2 \leq K(T, \eta, u_0, \sigma_0) \|\delta \gamma\|_{H^1}^2. \quad (3.13)$$

*Demostración.* La prueba es similar a la demostración de la proposición 2.6 con  $f = -(\delta \gamma(x))u_{xx}(x, t; \gamma + \delta \gamma)$  de modo que solo debemos estimar este término en la norma  $\|\cdot\|_{L^2(0,T;L^2)}$ . En efecto,

$$\begin{aligned} \|\delta \gamma u_{xx}(\cdot, \cdot; \gamma + \delta \gamma)\|_{L^2(0,T;L^2)}^2 &= \int_0^T \int_0^1 |(\delta \gamma(x))u_{xx}(x, t; \gamma + \delta \gamma)|^2 dx dt \\ &\leq \|\delta \gamma\|_{L^\infty}^2 \int_0^T \int_0^1 |u_{xx}(x, t; \gamma + \delta \gamma)|^2 dx dt \\ &\leq K(T, \eta, u_0, \sigma_0) \|\delta \gamma\|_{H^1(0,1)}^2. \end{aligned}$$

La última desigualdad se sigue de usar la proposición 3.2 y la inyección continua  $H^1 \hookrightarrow L^\infty$ .  $\square$

Para calcular la derivada del funcional  $J$  y obtener las condiciones de optimalidad del problema de minimización, introduciremos un sistema adjunto. Sea  $\phi_T \in L^2$ . Sea  $\phi = \phi(x, t; \gamma)$  una función que satisface el sistema

$$\begin{cases} -\phi_t + (\sigma(x)\phi_{xx})_{xx} + (\gamma(x)\phi)_{xx} = 0, & x \in (0, 1) \times (0, T), \\ \phi(0, t) = \phi(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \phi_x(0, t) = \phi_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \phi(x, T) = \phi_T(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.14)$$

**Observación 3.6.** *Si definimos  $p := \phi(x, T - t)$  donde  $\phi$  resuelve (3.14), vemos que  $p$  resuelve*

$$\begin{cases} p_t + (\sigma(x)p_{xx})_{xx} + (\gamma(x)p)_{xx} = 0, & x \in (0, 1) \times (0, T), \\ p(0, t) = p(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ p_x(0, t) = p_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ p(x, 0) = \phi_T(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.15)$$

Es posible probar que el sistema (3.15) posee una única solución débil  $p \in C([0, T]; L^2) \cap L^2(0, T; H_0^2)$ .

**Proposición 3.7.** *Sea  $\phi_T \in L^2(0, 1)$  y  $\gamma \in H^1(0, 1)$ . Entonces la solución débil  $\phi$  del sistema (3.14) satisface la siguiente estimación:*

$$\|\phi_t\|_{L^2(0,T;H^{-2})}^2 + \|\phi\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + \|\phi\|_{L^2(0,T;H_0^2)}^2 \leq K(T, \eta, \sigma_0) \|\phi_T\|_{L^2}^2. \quad (3.16)$$

*Demostración.* La prueba es análoga a la demostración de la proposición 3.2.  $\square$

En la siguiente proposición se establece el nexo entre las soluciones del sistema (3.1) y del sistema adjunto (3.14).

**Proposición 3.8.** Sean  $u_0, \phi_T \in L^2(0, 1)$ ,  $m \in L^2(0, 1)$  y  $\gamma, \delta\gamma \in \mathcal{M}$ . Sean  $\delta u$  solución de (3.12) y  $\phi$  solución de (3.14). Entonces se tiene la siguiente identidad:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \phi_T(x) \delta u(x, T; \gamma) dx &= - \int_0^T \int_0^1 u_{xx}(x, t; \gamma + \delta\gamma) \phi \delta\gamma(x) dx dt \\ &= - \int_0^T \int_0^1 u_{xx}(x, t; \gamma) \phi \delta\gamma(x) dx dt \\ &\quad - \int_0^T \int_0^1 \delta u_{xx}(x, t; \gamma) \phi \delta\gamma(x) dx dt. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Más aún, existe una constante  $K$  tal que

$$\left| \int_0^T \int_0^1 \delta u_{xx}(x, t; \gamma) \phi \delta\gamma(x) dx dt \right| \leq K(T, \eta, u_0, \gamma_0) \|\phi_T\|_{L^2} \|\delta\gamma\|_{H^1}^2. \quad (3.18)$$

*Demostración.* Multiplicando la ecuación (3.12) por  $\phi$  e integrando sobre  $(0, 1) \times (0, T)$ , obtenemos

$$\int_0^T \int_0^1 (\delta u_t + (\sigma \delta u_{xx})_{xx} + \gamma(x) \delta u_{xx}) \phi dx dt = - \int_0^T \int_0^1 u_{xx}(x, t; \gamma + \delta\gamma) \phi \delta\gamma(x) dx dt. \quad (3.19)$$

Si integramos por partes varias veces en el lado izquierdo de esta última igualdad obtenemos

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 (\delta u_t + (\sigma \delta u_{xx})_{xx} + \gamma(x) \delta u_{xx}) \phi dx dt &= \int_0^T \int_0^1 (-\phi_t + (\sigma \phi_{xx})_{xx} + (\gamma(x) \phi)_{xx}) \delta u dx dt \\ &\quad + \int_0^1 \phi_T(x) \delta u(x, T; \gamma) dx + \int_0^T \gamma(x) \delta u_x \phi \Big|_{x=0}^{x=1} \\ &= \int_0^1 \phi_T(x) \delta u(x, T; \gamma) dx. \end{aligned} \quad (3.20)$$

Combinando (3.19) y (3.20), obtenemos la identidad (3.17).

Resta probar (3.18). Notemos que

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \delta u_{xx}(x, t; \gamma) \phi \delta\gamma(x) dx dt &\leq \|\delta\gamma\|_{L^\infty} \int_0^T \int_0^1 |\delta u_{xx} \phi| dx dt \\ &\leq \|\delta\gamma\|_{L^\infty} \int_0^T \|\delta u_{xx}(\cdot, t)\|_{L^2} \|\phi(\cdot, t)\|_{L^2} dt \\ &\leq \|\delta\gamma\|_{L^\infty} \max_{0 \leq t \leq T} \|\phi(t)\|_{L^2} \sqrt{T} \|\delta u\|_{L^2(0, T; H_0^2)} \\ &\leq \sqrt{T} \|\delta\gamma\|_{L^\infty} K_1(T, \eta, \sigma_0) \|\phi_T\|_{L^2} K_2(T, \eta, u_0) \|\delta\gamma\|_{L^\infty} \\ &\leq K_3(T, \eta, u_0, \sigma_0) \sqrt{T} \|\phi_T\|_{L^2} \|\delta\gamma\|_{L^\infty}^2. \end{aligned}$$

Finalmente, usando la inyección continua  $H^1 \hookrightarrow L^\infty$  se concluye (3.18).  $\square$

Habiendo establecido la conexión entre las soluciones del sistema (3.1) y del sistema adjunto (3.14), a continuación obtenemos la derivada de Fréchet del funcional  $J$  definido en (3.3).

**Proposición 3.9.** Sean  $u_0 \in L^2(0, 1)$ ,  $m \in L^2(0, 1)$  y  $\gamma, \delta\gamma \in \mathcal{M}$ . Entonces la variación del funcional  $J$  satisface lo siguiente:

$$\begin{aligned} \delta J(\gamma) = & \left\langle - \int_0^T u_{xx}(x, t; \gamma) \phi(\cdot, t) dt, \delta\gamma(\cdot) \right\rangle_{L^2} + \alpha \langle \gamma'(\cdot), \delta\gamma'(\cdot) \rangle_{L^2} \\ & + \alpha \langle \gamma(\cdot), \delta\gamma(\cdot) \rangle_{L^2} + o(\|\delta\gamma\|_{H^1}^2), \end{aligned} \quad (3.21)$$

donde  $\phi$  es la solución del sistema adjunto (3.14) con dato final  $\phi_T(\cdot) = u(\cdot, T; \gamma) - m(\cdot)$ . Más aún, la derivada de Fréchet del funcional de costo  $J$  en  $\gamma \in \mathcal{M}$  viene dada por

$$\begin{aligned} J'(\gamma)\delta\gamma = & - \int_0^T \int_0^1 u_{xx}(x, t; \gamma) \phi \delta\gamma(x) dx dt + \alpha \int_0^1 \gamma'(x) \delta\gamma'(x) dx \\ & + \alpha \int_0^1 \gamma(x) \delta\gamma(x) dx, \quad \forall \delta\gamma \in \mathcal{M}. \end{aligned} \quad (3.22)$$

*Demostración.* Tomando  $\phi_T(x) = u(x, T; \gamma) - m(x)$  y usando la identidad (3.17) en (3.11), se tiene que la variación  $\delta J(\gamma)$  puede ser escrita como

$$\delta J(\gamma) = - \int_0^T \int_0^1 u_{xx}(x, t; \gamma) \phi \delta\gamma(x) dx dt + \alpha \int_0^1 \gamma'(x) \delta\gamma'(x) dx + \alpha \int_0^1 \gamma(x) \delta\gamma(x) dx + R(\delta\gamma),$$

donde

$$\begin{aligned} R(\delta\gamma) = & \frac{1}{2} \int_0^1 (\delta u(x, T; \gamma))^2 dx + \int_0^T \int_0^1 \delta u_{xx}(x, t; \gamma) \phi \delta\gamma(x) dx dt + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 (\delta\gamma'(x))^2 dx \\ & + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 (\delta\gamma(x))^2 dx. \end{aligned}$$

Usando (3.13) y (3.18), obtenemos

$$\begin{aligned} |R(\delta\gamma)| \leq & \frac{1}{2} \|\delta u(x, T; \gamma)\|_{L^2}^2 + \left| \int_0^T \int_0^1 \delta u_{xx}(x, t; \gamma) \phi \delta\gamma(x) dx dt \right| + \frac{\alpha}{2} \|\delta\gamma\|_{H^1}^2 \\ \leq & \left( \frac{1}{2} K_1(T, \eta, u_0, \sigma_0) + K_2(T, \eta, u_0, \sigma_0) \|\phi_T\|_{L^2} + \frac{\alpha}{2} \right) \|\delta\gamma\|_{H^1}^2. \end{aligned}$$

Usando la proposición (3.4) se tiene

$$\|\phi_T\|_{L^2}^2 \leq 2 (\|u(\cdot, T; \gamma)\|_{L^2}^2 + \|m\|_{L^2}^2) \leq K_3(T, \eta, u_0, \sigma_0).$$

De esta última estimación se tiene que

$$|R(\delta\gamma)| \leq K_4(T, \eta, u_0, \alpha, \sigma_0) \|\delta\gamma\|_{H^1}^2.$$

Esto prueba (3.21). Finalmente, (3.22) se sigue de la definición de la derivada de Fréchet.  $\square$

Ahora, una vez obtenida la derivada de Fréchet del funcional  $J$ , ya podemos establecer las condiciones de optimalidad que tiene que satisfacer una solución optimal del problema de control (3.3).

**Proposición 3.10.** *Sea  $(u, \gamma)$  solución del problema de minimización (3.3). Entonces se tiene lo siguiente:*

$$-\int_0^T \int_0^1 u_{xx} \phi(h - \gamma)(x) dx dt + \alpha \int_0^1 \gamma'(x)(h - \gamma)'(x) dx + \alpha \int_0^1 \gamma(x)(h - \gamma)(x) dx \geq 0 \quad (3.23)$$

para todo  $h \in \mathcal{M}$ , donde  $\phi$  es solución del sistema adjunto (3.14) con  $\phi_T(x) = u(x, T; \gamma) - m(x)$ .

*Demostración.* Sea  $(u, \gamma)$  solución del problema de minimización. Sea  $\gamma_\lambda = \gamma + \lambda(h - \gamma)$  con  $\lambda \in [0, 1]$  y  $h \in \mathcal{M}$ . Consideremos  $u_\lambda = u(x, t; \gamma_\lambda)$ . Notemos que como  $J$  es Fréchet diferenciable en  $\gamma_\lambda$ , se tiene que

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} J(\gamma_\lambda) \Big|_{\lambda=0} &= \frac{1}{2} \int_0^1 (u_\lambda(x, T) - m(x)) \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda} \Big|_{\lambda=0} dx + \alpha \int_0^1 \gamma'(x)(h'(x) - \gamma'(x)) dx \\ &\quad + \alpha \int_0^1 \gamma(x)(h(x) - \gamma(x)) dx \end{aligned} \quad (3.24)$$

Si definimos  $\widetilde{u}_\lambda = \frac{\partial u_\lambda}{\partial \lambda}$  vemos que esta función resuelve

$$\begin{cases} (\widetilde{u}_\lambda)_t + (\sigma(\widetilde{u}_\lambda)_{xx})_{xx} + (h - \gamma)(u_\lambda)_{xx} + (\gamma + \lambda(h - \gamma))(\widetilde{u}_\lambda)_{xx} = 0, & x \in (0, 1) \times (0, T), \\ \widetilde{u}_\lambda(0, t) = \widetilde{u}_\lambda(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ (\widetilde{u}_\lambda)_x(0, t) = (\widetilde{u}_\lambda)_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \widetilde{u}_\lambda(x, 0) = 0, & x \in (0, 1). \end{cases}$$

Si además definimos  $\rho = \widetilde{u}_\lambda|_{\lambda=0}$ , vemos que  $\rho$  resuelve

$$\begin{cases} \rho_t + (\sigma \rho_{xx})_{xx} + \gamma(x) \rho_{xx} = -(h - \gamma) u_{xx}, & x \in (0, 1) \times (0, T), \\ \rho(0, t) = \rho(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \rho_x(0, t) = \rho_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ \rho(x, 0) = 0, & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.25)$$

Como  $\gamma$  es optimal se tiene que

$$\frac{d}{d\lambda} J(\gamma_\lambda) \Big|_{\lambda=0} \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{M},$$

o de manera equivalente usando (3.24), para cada  $h \in \mathcal{M}$

$$\int_0^1 (u(x, T; \gamma) - m(x)) \rho(x, T) dx + \alpha \int_0^1 \gamma'(x) (h'(x) - \gamma'(x)) dx + \alpha \int_0^1 \gamma(x) (h(x) - \gamma(x)) dx \geq 0.$$

Ahora, usando el sistema adjunto (3.14) con la condición final  $\phi(x, T) = u(x, T; \gamma) - m(x)$ , se tiene que

$$\int_0^1 \phi(x, T) \rho(x, T) dx + \alpha \int_0^1 \gamma'(x) (h'(x) - \gamma'(x)) dx + \alpha \int_0^1 \gamma(x) (h(x) - \gamma(x)) dx \geq 0, \quad \forall h \in \mathcal{M}. \quad (3.26)$$

Finalmente, multiplicando la primera ecuación en el sistema adjunto (3.14) por  $\rho$  e integrando por partes sobre  $(0, 1) \times (0, T)$ , se obtiene

$$\int_0^1 \phi(x, T) \rho(x, T) dx = - \int_0^T \int_0^1 u_{xx} \phi (h - \gamma) dx dt \quad (3.27)$$

Luego, el resultado se sigue de usar (3.26) y (3.27).  $\square$

### 3.3. Desigualdad de estabilidad y unicidad

En esta sección probamos el principal resultado de este trabajo de tesis. De manera precisa, demostramos los siguientes resultados:

**Teorema 3.11.** *Dados  $m$  y  $\tilde{m} \in L^2(0, 1)$ , sean  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma} \in \mathcal{M}$  soluciones del problema de optimización (3.3) correspondiente. Entonces, existe  $T_0 > 0$  y una constante  $K$  positiva tal que para cada  $T \in (0, T_0)$ ,*

$$\|\gamma - \tilde{\gamma}\|_{H^1} \leq K \|m - \tilde{m}\|_{L^2}. \quad (3.28)$$

**Corolario 3.12.** *Asumamos las hipótesis del teorema 3.11. Si  $m = \tilde{m}$ , entonces se tiene que existe  $T_0 > 0$  tal que para cada  $T \in (0, T_0)$ ,  $\gamma = \tilde{\gamma}$ .*

Antes de probar el teorema 3.11, mostramos algunas proposiciones auxiliares que usaremos en la demostración del citado teorema.

Sean  $u$  y  $\tilde{u}$  soluciones del sistema (3.1) correspondientes a los coeficientes  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma}$ , respectivamente. Dadas  $m$  y  $\tilde{m}$  las mediciones, definamos por  $\phi$  y  $\tilde{\phi}$  las correspondientes soluciones del sistema adjunto (3.14) con datos finales

$$\phi_T(x) = u(x, T; \gamma) - m(x) \quad \text{y} \quad \tilde{\phi}_T(x) = \tilde{u}(x, T; \tilde{\gamma}) - \tilde{m}(x),$$

respectivamente. Sean  $U = u - \tilde{u}$ ,  $Q = \gamma - \tilde{\gamma}$  y  $V = \phi - \tilde{\phi}$ . Vemos que  $U$  y  $V$  satisfacen respectivamente las siguientes ecuaciones:

$$\begin{cases} U_t + (\sigma(x)U_{xx})_{xx} + \gamma(x)U_{xx} = -Q\tilde{u}_{xx}, & x \in (0, 1) \times (0, T), \\ U(0, t) = U(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ U_x(0, t) = U_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ U(x, 0) = 0, & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (3.29)$$

y

$$\begin{cases} -V_t + (\sigma(x)V_{xx})_{xx} + (\gamma(x)V)_{xx} = -(Q\tilde{\phi})_{xx}, & x \in (0, 1) \times (0, T), \\ V(0, t) = V(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ V_x(0, t) = V_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ V(x, T) = U(x, T) - (m(x) - \tilde{m}(x)), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (3.30)$$

En las siguientes dos proposiciones se establecen estimaciones de energía para los sistemas (3.29) y (3.30).

**Proposición 3.13.** Sean  $\gamma, \tilde{\gamma} \in H^1(0, 1)$ . Entonces existe una constante  $K_1$  independiente de  $T$ , tal que la solución de (3.29) satisface

$$\|U(t)\|_{L^2}^2 + \int_0^T \int_0^1 |U_{xx}|^2 dx dt \leq \left( e^{K_1 T} + \frac{K_1 T}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0} \right) \|Q\|_{L^\infty}^2 \|\tilde{u}\|_{L^2(0, T; H_0^2)}^2. \quad (3.31)$$

*Demostración.* Multiplicando la primera ecuación en (3.29) por  $U$  e integrando por partes sobre  $(0, 1)$  se obtiene

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |U|^2 dx + \int_0^1 \sigma(x) |U_{xx}|^2 dx = - \int_0^1 \gamma(x) U_{xx} U dx - \int_0^1 Q(x) \tilde{u}_{xx} U dx.$$

Si consideramos la siguiente estimación de los términos del lado derecho de esta última identidad

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \gamma(x) U_{xx} U dx - \int_0^1 Q \tilde{u}_{xx} U dx &\leq \frac{\|\gamma\|_{L^\infty}^2}{2\sigma_0} \int_0^1 |U|^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \sigma |U_{xx}|^2 dx \\ &\quad + \frac{1}{2} \int_0^1 |U|^2 dx + \frac{\|Q\|_{L^\infty}^2}{2} \int_0^1 |\tilde{u}_{xx}|^2 dx, \end{aligned}$$

entonces se obtiene

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 |U|^2 dx + \int_0^1 \sigma(x) |U_{xx}|^2 dx \leq \left[ \frac{\|\gamma\|_{L^\infty}^2}{\sigma_0} + 1 \right] \int_0^1 |U|^2 dx + \|Q\|_{L^\infty}^2 \int_0^1 |\tilde{u}_{xx}|^2 dx. \quad (3.32)$$

Usando el lema de Gronwall en esta última desigualdad se tiene

$$\int_0^1 |U|^2 dx \leq \exp(K_1 T) \|Q\|_{L^\infty}^2 \int_0^T \int_0^1 |\tilde{u}_{xx}|^2 dx dt, \quad (3.33)$$

donde

$$K_1 = \frac{\|\gamma\|_{L^\infty}^2}{\sigma_0} + 1.$$

Integrando sobre  $(0, T)$  en la desigualdad (3.32)

$$\int_0^T \int_0^1 |U_{xx}|^2 dx dt \leq \frac{K_1 T}{\sigma_0} e^{K_1 T} \|Q\|_{L^\infty}^2 \|\tilde{u}\|_{L^2(0,T;H_0^2)}^2 + \frac{1}{\sigma_0} \|Q\|_{L^\infty}^2 \|\tilde{u}\|_{L^2(0,T;H_0^2)}^2. \quad (3.34)$$

Finalmente combinando (3.33) y (3.34) se concluye (3.31).  $\square$

**Proposición 3.14.** Sean  $\gamma, \tilde{\gamma} \in H^1(0, 1)$  y  $m, \tilde{m} \in L^2(0, 1)$ . Entonces existen constantes  $K_1$  y  $K_2$  independientes de  $T$ , tal que la solución  $V$  de la ecuación (3.30) satisface

$$\begin{aligned} \int_0^1 |V|^2 dx &\leq 2e^{K_2 T} \left( e^{K_1 T} + \frac{K_1 T}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0} \right) \|\tilde{u}\|_{L^2(0,T;H_0^2)}^2 \|Q\|_{L^\infty}^2 \\ &\quad + \frac{2T}{\sigma_0} \|Q\|_{L^\infty}^2 \|\tilde{\phi}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 + 2e^{K_2 T} \|m - \tilde{m}\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (3.35)$$

*Demostración.* Si consideramos el cambio de variable  $t \mapsto T - t$  vemos que  $V := V(x, T - t)$  resuelve la ecuación (3.30) con condición inicial  $V(x, 0) = U(x, T) - (m(x) - \tilde{m}(x))$ . Multipliquemos la primera ecuación en (3.30) por  $V$  e integremos por partes sobre  $(0, 1)$ , obteniendo

$$\frac{1}{2} \frac{d}{dt} \int_0^1 |V|^2 dx + \int_0^1 \sigma(x) |V_{xx}|^2 dx = - \int_0^1 \gamma(x) V V_{xx} dx - \int_0^1 Q \tilde{\phi} V_{xx} dx \quad (3.36)$$

Estimamos los términos del lado derecho en esta última identidad:

$$\begin{aligned} - \int_0^1 \gamma(x) V V_{xx} dx - \int_0^1 Q \tilde{\phi} V_{xx} dx &\leq \frac{\|\gamma\|_{L^\infty}^2}{\sigma_0} \int_0^1 |V|^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^1 \sigma(x) |V_{xx}|^2 dx \\ &\quad + \frac{\|Q\|_{L^\infty}^2}{\sigma_0} \int_0^1 |\tilde{\phi}|^2 dx + \frac{1}{4} \int_0^1 \sigma(x) |V_{xx}|^2 dx. \end{aligned}$$

Usando esta última de desigualdad en la identidad (3.36), obtenemos

$$\frac{d}{dt} \int_0^1 |V|^2 dx + \int_0^1 \sigma(x) |V_{xx}|^2 dx \leq \frac{2\|\gamma\|_{L^\infty}^2}{\sigma_0} \int_0^1 |V|^2 dx + \frac{2\|Q\|_{L^\infty}^2}{\sigma_0} \int_0^1 |\tilde{\phi}|^2 dx. \quad (3.37)$$

Usando el lema de Gronwall se tiene

$$\int_0^1 |V|^2 dx \leq \exp \left[ \frac{2T\|\gamma\|_{L^\infty}^2}{\sigma_0} \right] \int_0^1 |U(x, T) - (m(x) - \tilde{m}(x))|^2 dx + \frac{2\|Q\|_{L^\infty}^2}{\sigma_0} \int_0^T \int_0^1 |\tilde{\phi}|^2 dx dt, \quad (3.38)$$

Finalmente, usando la proposición 3.13 se estima el lado derecho (3.38) y se obtiene (3.35).  $\square$

A continuación probamos el Teorema 3.11 en el cual se establece el resultado de estabilidad de las soluciones del problema de control optimal (3.3).

**Demostración Teorema 3.11.** Sean  $u$  y  $\tilde{u}$  soluciones de (3.1) correspondientes a los coeficientes  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma}$ , respectivamente. Sean  $\phi$  y  $\tilde{\phi}$  soluciones del correspondiente sistema adjunto (3.14). Como  $\gamma$  y  $\tilde{\gamma}$  satisfacen la condición de optimalidad se tiene que

$$-\int_0^T \int_0^1 u_{xx} \phi (\tilde{\gamma} - \gamma) dx dt + \alpha \int_0^1 \gamma' (\tilde{\gamma}' - \gamma') dx + \alpha \int_0^1 \gamma (\tilde{\gamma} - \gamma) dx \geq 0 \quad (3.39)$$

y

$$-\int_0^T \int_0^1 \tilde{u}_{xx} \tilde{\phi} (\gamma - \tilde{\gamma}) dx dt + \alpha \int_0^1 \tilde{\gamma}' (\gamma' - \tilde{\gamma}') dx + \alpha \int_0^1 \tilde{\gamma} (\gamma - \tilde{\gamma}) dx \geq 0. \quad (3.40)$$

Luego de sumar las desigualdades (3.39) y (3.40), y posteriormente reordenar términos de manera adecuada, obtenemos

$$\alpha \|\gamma - \tilde{\gamma}\|_{H^1}^2 \leq \int_0^T \int_0^1 (U_{xx} \phi Q + \tilde{u}_{xx} V Q) dx dt. \quad (3.41)$$

La idea ahora es estimar los dos términos del lado derecho en ésta última desigualdad. Comencemos analizando el primer término. Usando las proposiciones 3.2, 3.7 y 3.13, se tiene

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 U_{xx} \phi Q dx dt &\leq \frac{1}{2\sqrt{T}} \int_0^T \int_0^1 |U_{xx}|^2 dx dt + \sqrt{T} \frac{\|Q\|_{L^\infty}^2}{2} \int_0^T \int_0^1 |\phi|^2 dx dt \\ &\leq \frac{1}{2\sqrt{T}} \left( e^{K_1 T} + \frac{K_1 T}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0} \right) \|Q\|_{L^\infty}^2 \|\tilde{u}\|_{L^2(0,T;H_0^2)}^2 \\ &\quad + T \sqrt{T} \frac{\|Q\|_{L^\infty}^2}{2} \left( 1 + \frac{TK_2}{\sigma_0} \right) e^{K_2 T} \|u(\cdot, T) - m(\cdot)\|_{L^2}^2 \\ &\leq K_3 \sqrt{T} e^{K_4 T} \left( e^{K_1 T} + \frac{K_1 T}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0} \right) \|Q\|_{L^\infty}^2 \\ &\quad + K_5 T^2 \sqrt{T} e^{K_6 T} \left( 1 + \frac{TK_2}{\sigma_0} \right) \|Q\|_{L^\infty}^2. \end{aligned} \quad (3.42)$$

Veamos ahora el segundo término. Notemos que usando las proposiciones 3.2 y 3.14 llegamos a la siguiente estimación:

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_0^1 \tilde{u} V Q dx dt &\leq \frac{1}{2} \int_0^T \int_0^1 |V|^2 dx dt + \frac{\|Q\|_{L^\infty}^2}{2} \int_0^T \int_0^1 |\tilde{u}_{xx}|^2 dx dt \\ &\leq C_1 T (e^{C_2 T} + T) \|\tilde{u}\|_{L^2(0,T;H_0^2)}^2 \|Q\|_{L^\infty}^2 + C_3 \|Q\|_{L^\infty}^2 \|\tilde{\phi}\|_{L^\infty(0,T;L^2)}^2 \\ &\quad + C_4 e^{C_5 T} \|m - \tilde{m}\|_{L^2}^2 \\ &\leq C_6 T e^{C_7 T} (e^{C_2 T} + T) \|Q\|_{L^\infty}^2 + C_8 T e^{C_9 T} \|Q\|_{L^\infty}^2 + C_4 e^{C_5 T} \|m - \tilde{m}\|_{L^2}^2. \end{aligned} \quad (3.43)$$

De esta forma ya hemos acotado los dos términos del lado derecho en la desigualdad (3.41), lo cual nos permite concluir la siguiente desigualdad:

$$\|\gamma - \tilde{\gamma}\|_{H^1}^2 \leq \frac{K_T}{\alpha} \|Q\|_{H^1}^2 + \frac{C e^{CT}}{\alpha} \|m - \tilde{m}\|_{L^2}^2, \quad (3.44)$$

donde

$$K_T = K_3\sqrt{T}e^{K_4T} \left( e^{K_1T} + \frac{K_1T}{\sigma_0} + \frac{1}{\sigma_0} \right) + K_5T^2\sqrt{T}e^{K_6T} \left( 1 + \frac{TK_2}{\sigma_0} \right) + C_6Te^{C_7T} (e^{C_2T} + T) \\ + C_8Te^{C_9T}.$$

Finalmente, eligiendo  $T = T_0 > 0$  tal que  $\frac{K_T}{\alpha} < 1$  en (3.44), se concluye la demostración del teorema.

## Capítulo 4

# Simulaciones numéricas

En este capítulo presentamos simulaciones numéricas del problema inverso. El capítulo se divide en dos secciones. En la sección 4.1 partimos describiendo la discretización usada para resolver numericamente el problema directo. Luego, en la sección 4.2 presentamos algunos experimentos numéricos a fin de evaluar el desempeño del algoritmo.

### 4.1. Discretización del problema directo

Consideremos el siguiente sistema de Kuramoto-Sivashinsky lineal:

$$\begin{cases} u_t + (\sigma(x)u_{xx})_{xx} + \gamma(x)u_{xx} = 0, & x \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1), \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $T > 0$ ,  $\sigma = \sigma(x)$  es el coeficiente de difusión,  $\gamma = \gamma(x)$  es el coeficiente de anti-difusión,  $f = f(x, t)$  es un término fuente y  $u_0 = u_0(x)$  es la condición inicial.

En la literatura hay trabajos en los cuales se estudian métodos numéricos para resolver la ecuación (4.1), inclusive con el término no lineal  $uu_x$  ([LD12]). Excluyendo la dificultad propia que origina el término no lineal, otra dificultad no menor, reside en aproximar el término de cuarto orden en la ecuación. Si queremos utilizar esquemas de elementos finitos usuales para resolver esta ecuación, una manera para abordar la dificultad que causa la presencia del término de cuarto orden, es definir una variable auxiliar, digamos,  $v := u_{xx}$ , reduciendo así el problema a un sistema de menor orden.

Es precisamente la idea descrita más arriba la que usamos para resolver numericamente el problema directo (4.1), de modo que a continuación pasamos a describir en más detalle cada uno de los aspectos ya comentados.

Si definimos  $v := u_{xx}$  en la ecuación (4.1), obtenemos

$$\begin{cases} v = u_{xx}, & x \in (0, 1) \times (0, T), \\ u_t + (\sigma(x)v)_{xx} + \gamma(x)v = 0, & x \in (0, 1) \times (0, T). \end{cases} \quad (4.2)$$

Multiplicando por  $w \in H^1$  y  $\varphi \in H_0^1$  la primera y segunda ecuación en (4.2), respectivamente, y luego integrando por partes sobre  $(0, 1)$ , obtenemos

$$\begin{cases} \int_0^1 v w dx + \int_0^1 u_x w_x dx = 0, & \text{c.t.p } t \in (0, T), \\ \int_0^1 u_t \varphi dx - \int_0^1 (\sigma(x)v)_x \varphi_x dx + \int_0^1 \gamma(x)v \varphi dx = 0, & \text{c.t.p } t \in (0, T). \end{cases} \quad (4.3)$$

Un enfoque para resolver numericamente el sistema (4.3) usando el método de elementos finitos, es primero discretizar la derivada temporal usando un esquema de diferencias finitas, lo cual conduce a una sucesión de problemas estacionarios.

Denotemos por  $u^n$  la solución  $u$  en el tiempo  $t_n$ , donde  $n = 0, 1, \dots, N$ . La derivada temporal puede ser aproximada usando diferencias finitas. En este caso usaremos *forward difference*, de modo que se tiene la siguiente aproximación para la derivada temporal:

$$u_t^n \approx \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t},$$

donde  $\Delta t$  es el tamaño del paso en la discretización de la variable temporal. A modo de tener un esquema más general, proponemos usar el método  $\theta$ . Para describir éste método definimos para cada  $n = 0, 1, \dots, N$

$$g(u^n, v^n) := \int_0^1 (\sigma(x)v^n)_x \varphi_x dx - \int_0^1 \gamma(x)v^n \varphi dx. \quad (4.4)$$

Luego, dado  $\theta \in [0, 1]$ , el sistema (4.3) semi-discretizado queda dado por

$$\begin{cases} \int_0^1 v^{n+1} w dx + \int_0^1 u_x^{n+1} w_x dx = 0, & \text{c.t.p } t \in (0, T), \\ \int_0^1 \frac{u^{n+1} - u^n}{\Delta t} \varphi dx = (1 - \theta)g(u^{n+1}, v^{n+1}) + \theta g(u^n, v^n), & \text{c.t.p } t \in (0, T), \end{cases} \quad (4.5)$$

para cada  $n = 0, 1, \dots, N$ .

Si  $\theta = 0$  en (4.5) se obtiene el método conocido como *backward Euler* o también llamado *implicit Euler*. Cuando  $\theta = 1/2$  se tiene el método de *Crank-Nicolson*.

Para transformar el sistema semi-discreto (4.5) en uno completamente discreto confiamos en el método de elementos finitos ([BS08]). Es importante comentar que también necesitamos aproximar la condición inicial. Para hacer esto podemos simplemente proyectar la condición inicial en el espacio de elementos finitos. La implementación computacional de este problema fue realizada en FEniCS ([ABH<sup>+</sup>15]).

## 4.2. Experimentos numéricos

En esta sección presentamos experimentos numéricos para el problema inverso. En la sección anterior discutimos cómo proceder con la aproximación numérica para resolver el problema directo (4.2). Para resolver el problema de optimización utilizamos *dolfin-adjoint* ([PFR13]). En (1) describimos brevemente en forma esquemática cómo opera el algoritmo para la reconstrucción numérica del parámetro  $\gamma$ . Es importante añadir que en la rutina *minimize*, el algoritmo *L-BFGS* (Limited-memory Broyden-Fletcher-Goldfarb-Shanno) usado pertenece a la familia de los métodos quasi-Newton [dlR15], los cuales comparten la característica de aproximar la matriz Hessiana mediante evaluaciones del gradiente.

---

### Algoritmo 1

---

- 1: Definir parámetro inicial  $\gamma^0$ .
  - 2: Dado el parámetro  $\gamma^k$  en el paso  $k$ , resolver los problemas directos y adjuntos.
  - 3: Usando la clase *ReduceFuncional* obtener el gradiente del funcional  $J$ .
  - 4: Con la rutina *minimize* resolver el problema de optimización usando el algoritmo L-BFGS.
  - 5: Parar cuando  $J(\gamma^{k+1})$  sea menor a cierta tolerancia o Número de iteraciones mayor a un número dado.
- 

Es importante comentar que con estos experimentos preliminares buscamos tener una primera idea de la calidad de la reconstrucción numérica del parámetro  $\gamma$ , junto con vislumbrar futuras mejoras principalmente en lo que respecta a la aproximación de la solución del problema directo.

Para el diseño de los experimentos numéricos utilizamos las siguientes funciones para  $\gamma$ , las cuales llamamos *parámetros reales*:

$$\gamma_1 = 2 + \exp(-10(x - 1,5)^2)$$

y

$$\gamma_2 = 2 + \exp(-10(x - 1,5)^2) + 0,5 \exp(-30(x - 0,5)^2) + 0,5 \exp(-30(x - 2,5)^2)$$

Para cada uno éstos parámetros *reales* resolvimos el problema directo y guardamos la medición en tiempo final  $T$ , obteniendo así la que llamamos medición *real*. En cada uno de los experimentos que se detallan más abajo se utilizaron los siguientes parámetros para  $\sigma$ ,  $u_0$ :

$$\sigma = 0,5, \quad u_0(x) = \exp(-30(x-1)^2)$$

Además, para inicializar el algoritmo en dolfin-adjoint, en cada uno de los experimentos se utilizó el siguiente parámetro inicial:

$$\gamma_0(x) = 2.$$

Añadimos que tanto la ecuación del problema directo como la del adjunto se resolvieron sobre el intervalo  $(0, 3)$ . También comentamos que para la discretización temporal se usó  $\theta = 1/2$ .

Con la idea de evaluar el efecto del término regularizante se desarrolló un experimento en el cual analizamos la calidad de las reconstrucciones numéricas para un tiempo final  $T$  fijo ( $T = 0,7$ ) y distintos valores de  $\alpha$  ( $\alpha = 10^{-4}, 10^{-5}, 10^{-6}, 0$ ). Como punto de partida consideramos el funcional  $J$  solo con término regularizante en la norma  $L^2$  normalizada respecto a 2, es decir

$$J(\gamma) = \frac{1}{2} \int_0^1 |u(x, T; \gamma) - m(x)|^2 dx + \frac{\alpha}{2} \int_0^1 |\gamma(x) - 2|^2 dx.$$

Esto experimento se realizó para la reconstrucción del parámetro  $\gamma_2$ . En las figuras 4.1 y 4.2 se muestran los resultados de las reconstrucciones para el experimento descrito, en las cuales observamos que las reconstrucciones mejoran al disminuir el valor de  $\alpha$ . De hecho con  $\alpha = 10^{-4}$  (ver gráfico parte izquierda en la figura 4.1) notamos que se logra capturar de manera correcta la posición de la amplitud central, pero no así el alto de ésta. Vemos también que las dos amplitudes menores ni siquiera son captadas. Por otro lado cuando  $\alpha = 10^{-5}$  observamos una mejora respecto al caso anterior, pues ya las dos amplitudes menores son captadas. Ahora bien, cuando  $\alpha = 10^{-6}$  o  $\alpha = 0$  (ver figura 4.2) notamos que la amplitud central se recupera bastante mejor que en el caso  $\alpha = 10^{-4}$ .

En las figuras 4.3 y 4.4 se muestran las reconstrucciones numéricas del parámetro  $\gamma_1$  y los correspondientes estados en tiempo final asociados a las soluciones obtenidas de la rutina de dolfin-adjoint donde el funcional  $J$  se asumió sin término de regularización, es decir,  $\alpha = 0$ . En ambas figuras notamos que en términos cualitativos las reconstrucciones de los parámetros son bastante similares a la que llamamos *real*. De igual manera, las mediciones asociadas a los parámetros obtenidos se asemejan bastante a las *mediciones reales*. Conclusiones similares son obtenidas en las reconstrucciones del parámetro  $\gamma_2$ , cuyos resultados son expuestos en las figuras 4.5 y 4.6.

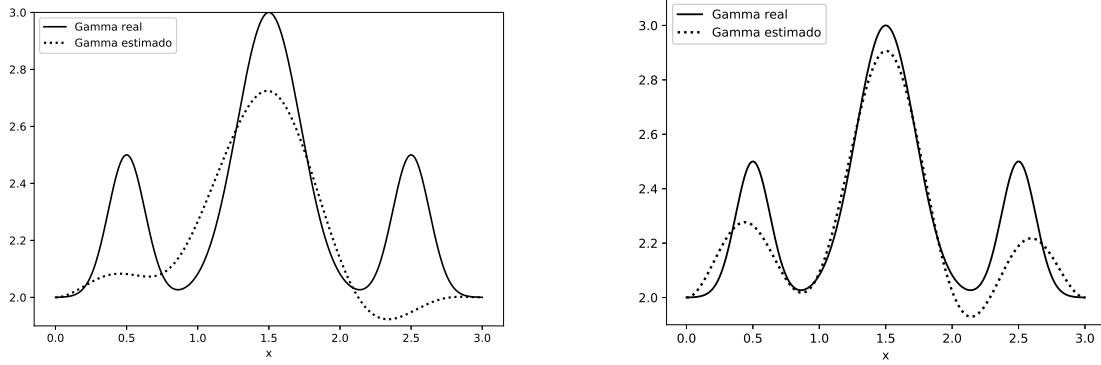


FIGURA 4.1: Izquierda: Reconstrucción numérica del parámetro  $\gamma_2$  con  $\alpha = 10^{-4}$  y  $T = 0,7$ .  
Derecha: Reconstrucción numérica del parámetro  $\gamma_2$  con  $\alpha = 10^{-5}$  y  $T = 0,7$ .

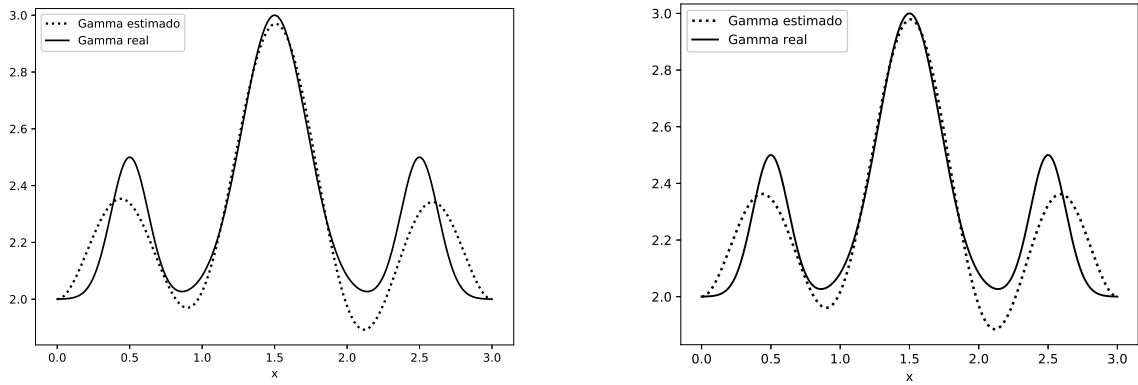


FIGURA 4.2: Izquierda: Reconstrucción numérica del parámetro  $\gamma_2$  con  $\alpha = 10^{-6}$  y  $T = 0,7$ .  
Derecha: Reconstrucción numérica del parámetro  $\gamma_2$  con  $\alpha = 0$  y  $T = 0,7$ .

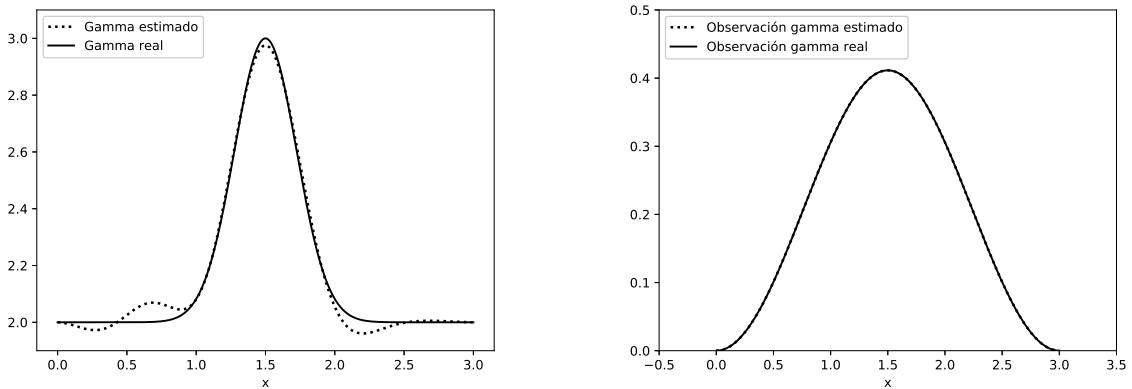


FIGURA 4.3: Izquierda: Reconstrucción numérica del parámetro  $\gamma_1$  con  $\alpha = 0$  y  $T = 1$ .  
Derecha: Medición en tiempo final  $u(x, T = 1)$  asociado al parámetro  $\gamma_1$  estimado.

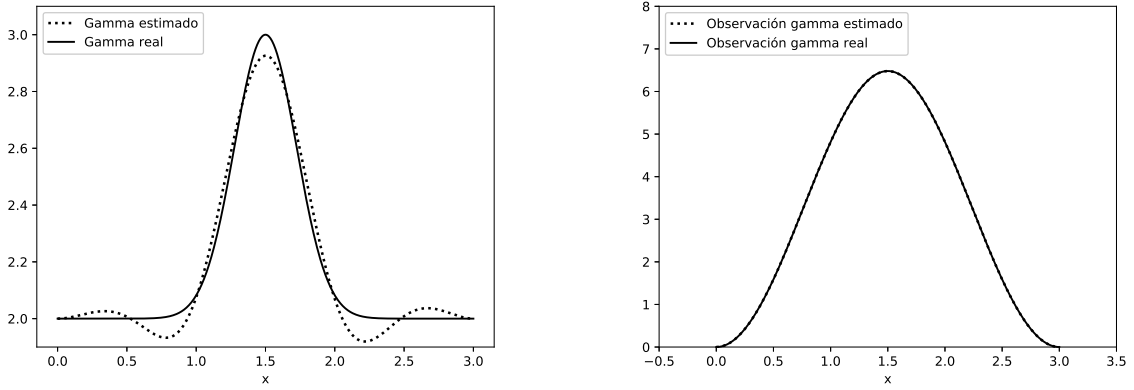


FIGURA 4.4: Izquierda: Reconstrucción numérica del parámetro  $\gamma_1$  con  $\alpha = 0$  y  $T = 5$ .  
Derecha: Medición en tiempo final  $u(x, T = 5)$  asociado al parámetro  $\gamma_1$  estimado.

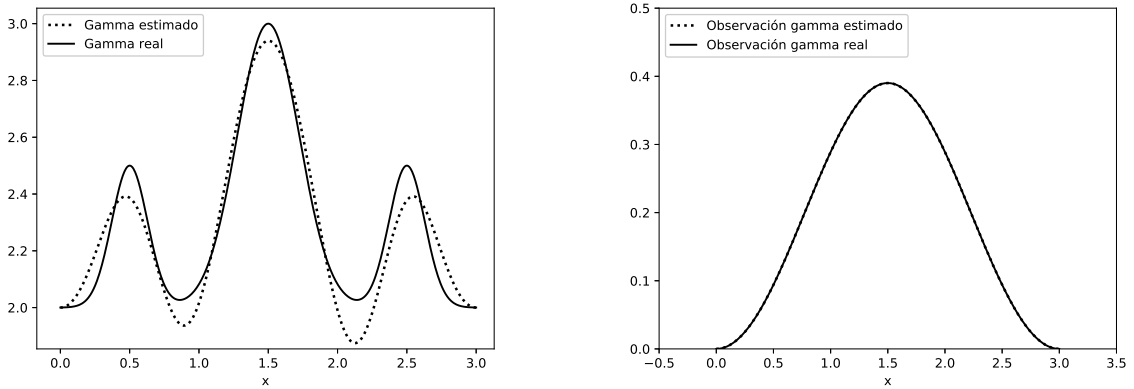


FIGURA 4.5: Izquierda: Reconstrucción numérica del parámetro  $\gamma_2$  con  $\alpha = 0$  y  $T = 1$ .  
Derecha: Medición en tiempo final  $u(x, T = 1)$  asociado al parámetro  $\gamma_2$  estimado.

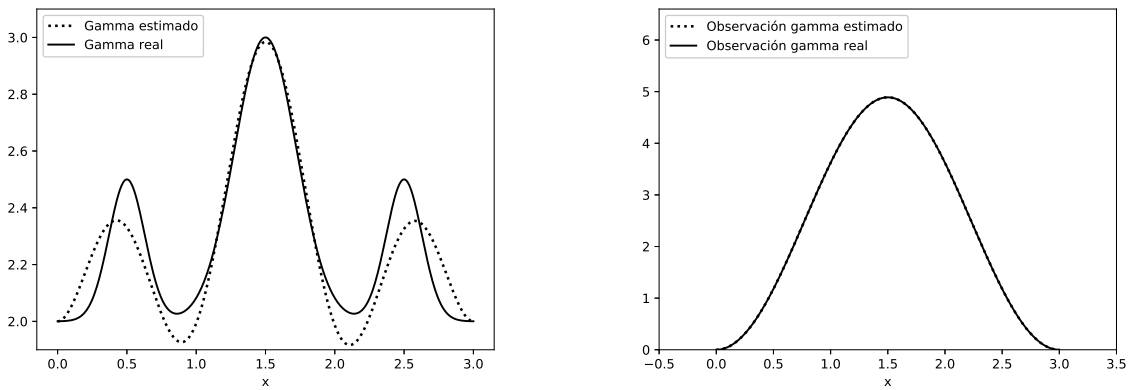


FIGURA 4.6: Izquierda: Reconstrucción numérica del parámetro  $\gamma_2$  con  $\alpha = 0$  y  $T = 5$ .  
Derecha: Medición en tiempo final  $u(x, T = 5)$  asociado al parámetro  $\gamma_2$  estimado.

## Capítulo 5

# Conclusiones y trabajos futuros

A continuación se presentan las conclusiones de este trabajo de tesis junto algunas ideas de posibles trabajos futuros que siguen la línea de lo presentado.

En este trabajo de tesis se consideró la ecuación de Kuramoto-Sivashinsky lineal dada por

$$\begin{cases} u_t + (\sigma(x)u_{xx})_{xx} + \gamma(x)u_{xx} = 0, & x \in (0, 1) \times (0, T), \\ u(0, t) = u(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u_x(0, t) = u_x(1, t) = 0, & t \in (0, T), \\ u(x, 0) = u_0(x), & x \in (0, 1). \end{cases} \quad (5.1)$$

De este modelo se estudió el problema inverso de recuperar el coeficiente  $\gamma = \gamma(x)$  a partir de una medición en tiempo final. Con el objetivo de analizar este problema inverso, partimos mostrando que el correspondiente problema directo está bien puesto. Luego, formulamos el problema inverso usando un enfoque de control optimal, definiendo para ello un determinado problema de minimización. Usando las condiciones de optimalidad del problema de minimización y estimaciones de energía del sistema (5.1), probamos la estabilidad y unicidad de soluciones de dicho problema, siempre que  $T$  sea suficientemente pequeño. Finalmente, se realizaron distintos experimentos numéricos.

A continuación enumeramos algunos de los posibles trabajos futuros que planeamos estudiar.

- Considerar  $\gamma = \gamma(x, t)$  en la ecuación (5.1) y analizar el problema inverso de recuperar dicho parámetro a partir de una medición en tiempo final  $u(x, T)$ . Este caso implica estudiar qué hipótesis son necesarias imponer para replicar el enfoque usado en el caso  $\gamma = \gamma(x)$ . Por otro lado, la reconstrucción numérica también supone algunas dificultades en términos de implementación computacional.

- Otro trabajo que resulta también interesante abordar es, conociendo  $\gamma$  en la ecuación (5.1), estudiar el problema inverso de recuperar el coeficiente principal  $\sigma = \sigma(x)$  a partir de una medición en tiempo final  $u(x, T)$ . En principio, este problema parece ser aún más difícil pues el coeficiente que se busca recuperar se encuentra en el término de cuarto orden en la ecuación. A esto hay que sumarle las dificultades que se puedan presentar en la implementación computacional para la reconstrucción numérica del parámetro.

- El modelo original propuesto por Kuramoto, Tsuzuki y Sivashinsky, incluye un término adicional en la ecuación (5.1), el cual viene dado por la no linealidad  $uu_x$ . Un trabajo futuro sería estudiar el problema inverso estudiado en esta tesis, pero considerando la ecuación (5.1) con el término no lineal.

- En lo que refiere a aspectos numéricos, es importante comentar que el esquema numérico que resuelve el problema directo resulta relevante al momento de resolver numericamente el problema inverso. Es por esto último que un desafío futuro es implementar otros esquemas que por ejemplo incluyan adaptividad temporal.

- En vez de considerar una medición en tiempo final como medida de sobredeterminación del problema inverso estudiado en este trabajo, resulta interesante estudiar el caso en el cual la observación sea por ejemplo  $u_{xx}(0, t)$  con  $t \in (0, T)$ .

# Bibliografía

- [ABH<sup>+</sup>15] Martin S. Alnæs, Jan Blechta, Johan Hake, August Johansson, Benjamin Kehlet, Anders Logg, Chris Richardson, Johannes Ring, Marie E. Rognes, and Garth N. Wells. The fenics project version 1.5. *Archive of Numerical Software*, 3(100), 2015.
- [Ale88] G. Alessandrini. Stable determination of conductivity by boundary measurements. *Appl. Anal.*, (27):153–172, 1988.
- [BS08] S. C. Brenner and L. Ridgway Scott. *The Mathematical Theory of Finite Element Methods*. Text in Applied Mathematics. Springer, 2008.
- [Cal80] A.P. Calderón. On an inverse boundary value problem. *Seminar on Numerical Analysis and its Applications to Continuum Physics*, Río de Janeiro, 1980.
- [Cal06] A.P. Calderón. On an inverse boundary value problem. *Comput. Appl. Math.*, 25:133–138, 2006.
- [CM11] E. Cerpa and A. Mercado. Local exact controllability to the trajectories of the 1-d kuramoto–sivashinsky equation. *J. Differ. Eqns.*, 4(250):2024–2044, 2011.
- [dlR15] J.C. de los Reyes. *Numerical PDE-Constrained Optimization*. SpringerBriefs in Optimization. Springer International Publishing, 2015.
- [Eva98] L. C. Evans. *Partial Differential Equations*. Graduate Studies in Mathematics. A.M.S., 1998.
- [FF] Simon W. Funke and Patrick E. Farrell. A framework for automated pde-constrained optimisation. *submitted. arXiv:1302.3894*.
- [Guz13] P. Guzmán. Lipschitz stability in an inverse problem for the main coefficient of a kuramoto–sivashinsky type equation. *JJ. Math. Anal. Appl.*, (408):275–290, 2013.
- [Has07] A. Hasanov. Simultaneous determination of source terms in a linear parabolic problem from the final overdetermination: Weak solution approach. *J. Math. Anal. Appl.*, (330):766–779, 2007.

- [Kac66] M. Kac. Can one hear the shape of a drum? *Am. Math. Monthly*, (73):1–23, 1966.
- [KSG16] A. Hasanov K. Sakthivel, S. Gnanavel and R. K. George. Identification of an unknown coefficient in kdv equation from final time measurement. *J. Inverse Ill-Posed Probl.*, (24):469–487, 2016.
- [KT75] Y. Kuramoto and T. Tsuzuki. On the formation of dissipative structures in reaction-diffusion systems. *Prog. Theor. Phys*, (54):687–699, 1975.
- [LBM13] E. Crépeau L. Baudouin, E. Cerpa and A. Mercado. Lipschitz stability in an inverse problem for the kuramoto–sivashinsky equation. *Appl. Anal.*, 92(250):2084–2102, 2013.
- [LD12] M. Lakestani and M. Dehghan. Numerical solutions of the generalized kuramoto–sivashinsky equation using b-spline functions. *Applied Mathematical Modelling*, 36(2):605–617, 2012.
- [LK01] W-J Liu and M. Krstic. Stability enhancement by boundary control in the kuramoto-sivashinsky equation. *Nonlinear Anal. Ser. A: Theory Methods*, (43):485–507, 2001.
- [Nac88] A. Nachman. Reconstructions from boundary measurements. *Ann. of Math.*, 2(128):531–576, 1988.
- [PFR13] S. Funke P. Farrell, D. Ham and M. Rognes. Automated derivation of the adjoint of high-level transient finite element programs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, (35):369–393, 2013.
- [Sal15] S. Salsa. *Partial Differential Equations in Action. From Modelling to Theory*. Unictext. Springer International Publishing, 2015.
- [Siv77] G.I. Sivashinsky. Nonlinear analysis of hydrodynamic instability in laminar flames i: Derivation of basic equations. *Acta Astronaut.*, (4):1177–1206, 1977.
- [SU87] J. Sylvester and G. Uhlmann. A global uniqueness theorem for an inverse boundary value problem. *Ann. of Math.*, 2(125):153–169, 1987.
- [ZCDY08] J. N. Yu Z. C. Deng and L. Yang. Identifying the coefficient of first-order in parabolic equation from final measurement data. *Math. Comput. Simulation*, (77):421–435, 2008.
- [Zei90] E. Zeidler. *Nonlinear Functional Analysis and Its Applications. II/ A: Linear Monotone Operators*. Springer-Verlag New York, 1990.