

2022-12

# Cromodinámica cuántica a bajas energías

Teca Wellmann, Diego Matías

---

<https://hdl.handle.net/11673/55009>

*Repositorio Digital USM, UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA*

**UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA**  
**Departamento de Física**  
**Valparaíso - Chile**



**UNIVERSIDAD TECNICA  
FEDERICO SANTA MARIA**

**CROMODINÁMICA CUÁNTICA A BAJAS  
ENERGÍAS**

**Diego Matías Teca Wellmann**

*Tesis para optar al grado de Doctor en Física*

Director de Tesis

Dr. Gorazd Cvetič

Codirector de Tesis

Dr. César Ayala

Evaluador Externo

Dr. Marcelo Loewe

Evaluador Interno

Dr. William Brooks

Diciembre - 2022



Hay suficiente traición  
odio, violencia  
Necedad en el humano corriente  
Como para abastecer cualquier ejército  
o cualquier jornada.  
Y Los Mejores Asesinos Son Aquellos  
Que Predican En Su Contra.  
Y Los Que Mejor Odian Son Aquellos  
Que Predican Amor  
Y Los Que Mejor Luchan En La Guerra  
Son - Al Final- Aquellos Que  
Predican  
PAZ.

Aquellos Que Hablan de Dios  
NECESITAN a Dios  
Aquellos Que Predican Paz  
No Tienen Paz.  
AQUELLOS QUE PREDICAN AMOR  
NO TIENEN AMOR  
CUIDADO CON LOS PREDICADORES  
Cuidado Con Los Que Saben.  
Cuidado Con  
Aquellos Que  
Están SIEMPRE  
LEYENDO  
LIBROS.

**El Genio de la Multitud**  
**Charles Bukowski**

## § Prólogo

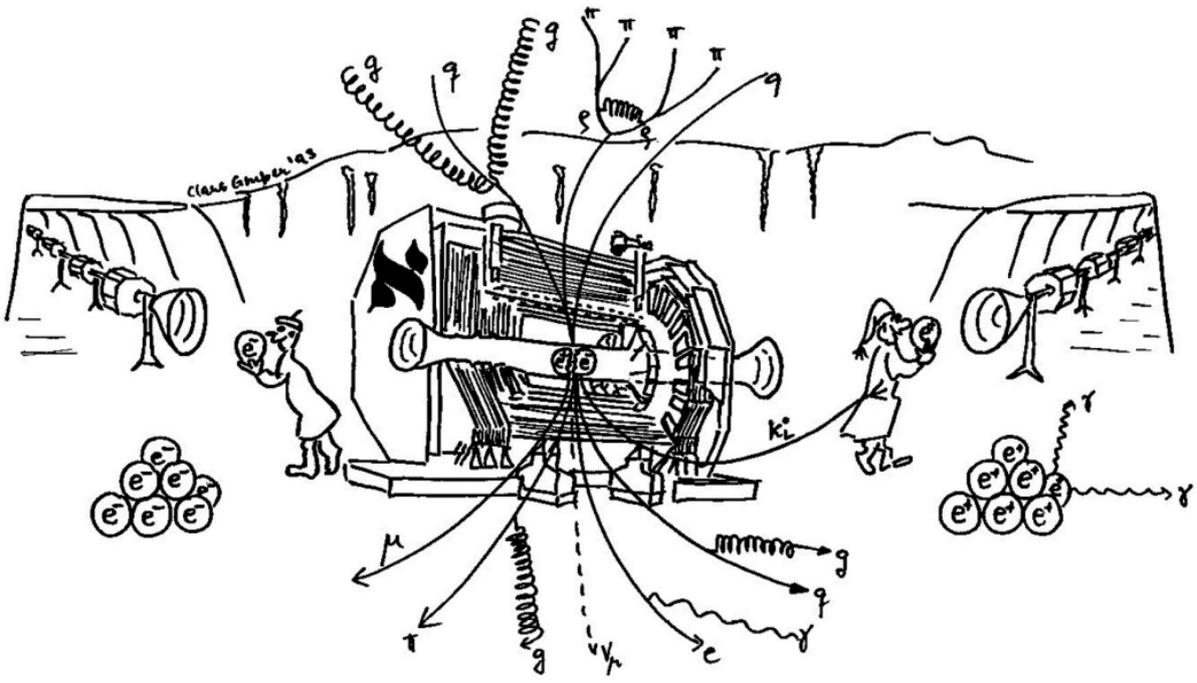
Esta tesis estará dividida en dos secciones; esto porque la *cromodinámica cuántica* es quizás unas de las formulaciones más complejas que hay, por eso la necesidad de dividir la tesis en dos. La primera parte es más bien un intento de hacer la tesis más amigable, manteniendo una línea más divulgativa, en donde expondré algunos conceptos fundamentales. Mientras que la segunda parte, contiene la investigación rigurosa la cual he realizado durante mi doctorado. Con dos trabajos publicados y un tercero en arbitraje, estas publicaciones en esencia tienen el mismo fin, la cual es extraer el valor de la constante de acoplamiento  $\alpha_s$  desde los datos obtenidos por ALEPH. Los tres trabajos son: Determination of perturbative QCD coupling from ALEPH  $\tau$  decay data using pinched Borel-Laplace and Finite Energy Sum Rules [1], Using improved Operator Product Expansion in Borel-Laplace Sum Rules with ALEPH  $\tau$  decay data, and determination of pQCD coupling [2] y Borel-Laplace Sum Rules with ALEPH  $\tau$  decay data, using OPE with improved anomalous dimensions [3]. La segunda parte de la tesis estará enfocada en explicar los últimos dos trabajos, aunque considero que el tercero, es el más completo y realista de todos. Algunas diferencias entre estos artículos se enumeran de la siguiente manera:

- Para el coeficiente  $d_4$  en la función de Adler, en [1] usamos  $d_4 = 338.2 \pm 63.2$ , mientras que en [2] y [3] fue  $d_4 = 275 \pm 63.2$ . En otros trabajos el coeficiente es prácticamente el mismo, por ejemplo, para Beneke & Jamin  $d_4 = 283$  [4], Pich & R.-S  $d_4 = 275 \pm 400$  [5], Baikov et al.  $d_4 = 275$  [6], Caprini  $d_4 = 277 \pm 51$  [7] y Boito et al.  $d_4 = 283 \pm 283$  [8],
- Otra característica del error asociado a  $d_4$  es que al variar la escala de renormalización, los coeficientes que anteceden y preseden a  $d_4$  en [1] no los cambiamos, no así para [2] y [3], los cuales si cambian,
- El parámetro de escala de renormalización  $\kappa$  en [1] tiene los valores  $\kappa = 0.5, 1, 2$  mientras que para [2] y [3] tiene los valores  $\kappa = 1/3, 1, 2$ . Donde  $\kappa = 1$  corresponde al valor central,
- Y finalmente, cuando consideramos los Operadores de dimensión  $D = 2k$ , en [1] usamos  $k = 2, 3, 4, 5$ . En [2] usamos solamente  $k = 2, 3$  y en [3]  $k = 2, 3, 4$ . La razón para usar distintos condensados es porque en [1] no fueron consideradas las dimensiones anómalas, en [2] usamos dimensiones anómalas con valores enteros ( $\gamma = 1, 2$ ), y finalmente en [3], estas dimensiones poseen valores semi-enteros ( $\gamma = 0.222, 0.625$ ).

Al realizar estos cambios, encontramos que nuestro modelo se vuelve más realista, sobre todo si conderamos el tercer artículo ([3]), aunque obtenemos un valor para  $\alpha_s$  más alto que en [2], aun contuamos estando dentro del rango de valores del promedio mundial.

Para la introducción conceptual, básicamente quiero presentar los conceptos de *materia y fuerzas fundamentales* de la manera más sencilla posible, intentando siempre presentar a través de una cronología histórica. El fin es poder presentar la concepción de *escala* a la cual se lleva a cabo la Cromódinámica Cuántica y su importancia como materia de estudio. Además se presentan aspectos generales para su descripción matemática y experimental. La conexión entre teoría y experimento recae en el parámetro fundamental que describe la interacción nuclear fuerte,  $\alpha_s$ . Aunque este parámetro no se mide explícitamente, si se pueden medir otras cantidades físicas que dependen de él. Por consiguiente, la *constante de acoplamiento*  $\alpha_s$  se convierte en una cantidad que se puede en los casos considerados aquí, inferir o extraer desde las *Reglas de Suma*; también se pueden extraer los *Condensados para QCD*.

Para finalizar este prólogo, quiero citar la bibliografía en la que esta basada esta primera parte: para la introducción es importante mencionar los libros de divulgación que he leído, [9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16]; para la sección de cromodinámica cuántica y la constante de acoplamiento, los libros usados fueron [17, 18]; para los condensados las citas estan enmarcadas en la misma sección; para las reglas de suma un buen libro es [19] y para los aspectos experimentales [20, 21, 22, 23].



# Índice general

<b>1. Conceptos Fundamentales</b>	<b>8</b>
1.1. Introducción . . . . .	8
1.2. Cromodinámica Cúantica . . . . .	19
1.3. Constante de Acoplamiento . . . . .	21
1.4. Condensados en Cromodinámica Cúantica . . . . .	24
1.5. Reglas de Suma . . . . .	30
1.6. Algunos Aspectos Experimentales . . . . .	31
<b>2. Fundamentos Teóricos</b>	<b>33</b>
2.1. Introducción . . . . .	33
2.2. Marco Teórico General . . . . .	35
2.3. Extensión Renormalón a la Función de Adler . . . . .	38
2.4. Regla de Suma Borel-Laplace y Momentos $a(Q^2)^{(2,n)}$ . . . . .	47
2.5. Métodos de evaluación para la contribución $D = 0$ . . . . .	49
2.5.1. Contour-Improved . . . . .	49
2.5.2. Fixed-Order . . . . .	50
2.5.3. Principal-Value . . . . .	51
<b>3. Resultados</b>	<b>52</b>
3.1. Resultados para Dimensiones Anómalas en large- $\beta_0$ . . . . .	55
3.1.1. Resultado Final y Conclusión . . . . .	58
3.2. Resultados para Dimensiones Anómalas más allá de large- $\beta_0$ . . . . .	59
3.2.1. Resultado Final y Conclusión . . . . .	62
3.3. Comparación con otros trabajos . . . . .	63
<b>4. Apéndice</b>	<b>66</b>
4.1. Transformada de Borel para la contribución Renormalón UV $u = -1$ . . . . .	66
4.2. Resultados para los casos Subprincipales de aportes Renormalón . . . . .	66
4.3. Función característica $G_d$ . . . . .	67

# Capítulo 1

## Conceptos Fundamentales

### 1.1. Introducción

#### §Estructura de la Materia

Si comenzamos desde una valoración histórica, la cuestión sobre cuál es, o cuáles son nuestros constituyentes surgió con los Filósofos Griegos. Sin embargo, esta no era la pregunta que suscitaba el razonamiento de los pensadores, ya que para ellos, la materia era dividida en dos categorías: la *Materia Animada* y la *Materia Inanimada*. Prácticamente se hacía distinción entre la capacidad de que un cuerpo pueda contener un *alma* o *espíritu*, lo cual te distinguía entre un ser vivo o no. Uno de los más influyentes en esta corriente del pensamiento, pero que expuso sus ideas de una manera diferente fue Parménides. Él en su obra "*Sobre la Naturaleza*" expone los conceptos de *Ser* y *No Ser*, adjudicándoles características como: Infinito-Finito, Movimiento-Quietud, Todo-Nada, por nombrar algunas. Aunque estos conceptos dan la impresión de usar la *contrariedad* para formular sus ideas, su método es más bien llamado *Principio de Identidad*; como ejemplo consideremos el siguiente enunciado :«lo que es es y lo que no es no es». Este método lo llevó a ser considerado por muchos como el padre de la Lógica y por sus ideas y la influencia que tuvo sobre los filósofos posteriores, fue catalogado como el fundador de la *Metafísica*.

Posteriormente, en la búsqueda del entendimiento sobre lo *material* e *inmaterial*, Platón postuló la *Teoría de las ideas*, la que divide el mundo en dos: *el mundo físico, sensible y material* y *el mundo inteligible*. Con estas dos hipótesis, Platón ante Sócrates, expone su modelo cosmológico, presentando a Timeo como el más sabio en Astronomía y él que más ha trabajado para conocer la naturaleza de las cosas, comenzando por la formación del Universo. Timeo comienza afirmando que el mundo (Universo) ha tenido un comienzo. En efecto, el Universo es visible, tangible y corpóreo y todo lo que tiene estas cualidades es sensible; y todo lo que es percibido por los sentidos requiere una causa, por lo que el mundo debe tener una causa, es decir, un creador (Demiurgo). Para ser visible necesita el fuego y para ser tangible la tierra. De ahí que el creador, cuando comenzó a armar el cuerpo del Universo, se dispuso a hacerlo de fuego y tierra, y para que haya un vínculo entre ambas el Demiurgo colocó el agua y el aire entre el fuego y la tierra. Estos son los cuatro elementos principales y son la base para lo que se conoce como : *Estados de la Materia*.

A continuación es necesario mencionar la corriente de los *atomistas*, y aunque el concepto no hace referencia literal a lo que actualmente se conoce como átomo, pero su esencia sí se preserva. Además fueron los primeros en proponer la idea de *estructura de la materia*. Leucipo y

Demócrito fueron sus máximos exponentes, y definieron al átomo como la división última de la materia, esta era inmutable y eterna, la cual está desprovista de cualidades y lo único que las diferencia de otras es su tamaño y su forma. Además las diferentes formas que tienen los cuerpos es consecuencia de como estos se agrupan. Esta concepción de una naturaleza absolutamente materialista, podía explicar todos los fenómenos naturales en términos de número, forma y tamaño de los átomos. Esta corriente surgió para explicar las transformaciones (causas) que se observaban en ciertos elementos, por consiguiente, esta corriente se alejaba de la dialéctica lógica de Parménides.

Casi dos mil años tuvieron que pasar para volver al estudio y entendimiento de la materia, aunque antes se debe mencionar a la *Alquimia* como una de las grandes contribuciones que precedieron a la Química, y a pesar de no explicar la estructura de la materia, sí logró explicar varias *transmutaciones* de la materia. Ya en los tiempos en que Newton había sentado las bases de la Física, un pionero en los estudios de la materia fue Robert Boyle (1627-1691). Él postuló la ley de los gases, y esta establece que la presión de un gas en un recipiente cerrado es inversamente proporcional al volumen del recipiente, cuando la temperatura es constante. Recordemos que para esta parte de la historia, toda hipótesis debía tener una prueba experimental que la respalde. Así que desde este punto en adelante, se puede hablar que comienza la construcción histórica de la ciencia y también la manera de entender y confirmar la naturaleza de los fenómenos.

Al final de la Ilustración surge, la ley más importante de nuestra historia y la cual abriría el camino hacia la revolución industrial y al desarrollo de la termodinámica y todo lo venidero. Este principio fue propuesto por Lavoisier y afirma lo siguiente : « *la materia no se crea ni se destruye, solo se transforma* ». Con estas palabras, Lavoisier constituyó el pilar fundamental para cualquier proceso de transformación. Con esta premisa, surge el concepto de *conservación*. Para esta época, el estudio de los gases se había convertido en el tema central de investigación tanto para químicos como para físicos, así que toda la génesis de la formulación y entendimiento de los constituyentes de la materia nacen desde estas investigaciones. A finales del siglo XVIII y comienzos del XIX se formula el resto de las leyes de los gases por J.A.C. Charles y Louis Joseph Gay-Lussac. La *Ley de Charles* relaciona el volumen y la temperatura de una cierta cantidad de gas ideal, mantenida a una presión constante, mediante una constante de proporcionalidad directa. En esta ley, Jacques Charles dice que para una cierta cantidad de gas a una presión constante, al aumentar la temperatura, el volumen del gas aumenta y al disminuir la temperatura, el volumen del gas disminuye. Esto se debe a que la temperatura está directamente relacionada con la energía de movimiento de las moléculas del gas. Así, para cierta cantidad de gas a una presión dada, a mayor velocidad de las moléculas (temperatura), mayor volumen del gas. Por otra parte, la *Ley de Gay-Lussac* dice que un gas se expande proporcionalmente a su temperatura si se mantiene constante la presión y que aumenta proporcionalmente su presión si el volumen se mantiene constante.

A principios del siglo XIX, John Dalton, a partir de sus estudios sobre el comportamiento de los gases, elabora las bases de la estructura y la visión moderna sobre la concepción de la materia. En 1803 presenta su teoría atómica de la materia basada en cinco principios:

- Los elementos están formados por partículas extremadamente pequeñas denominadas *átomos*
- Los átomos de un determinado elemento son idénticos en tamaño, masa y otras propiedades.

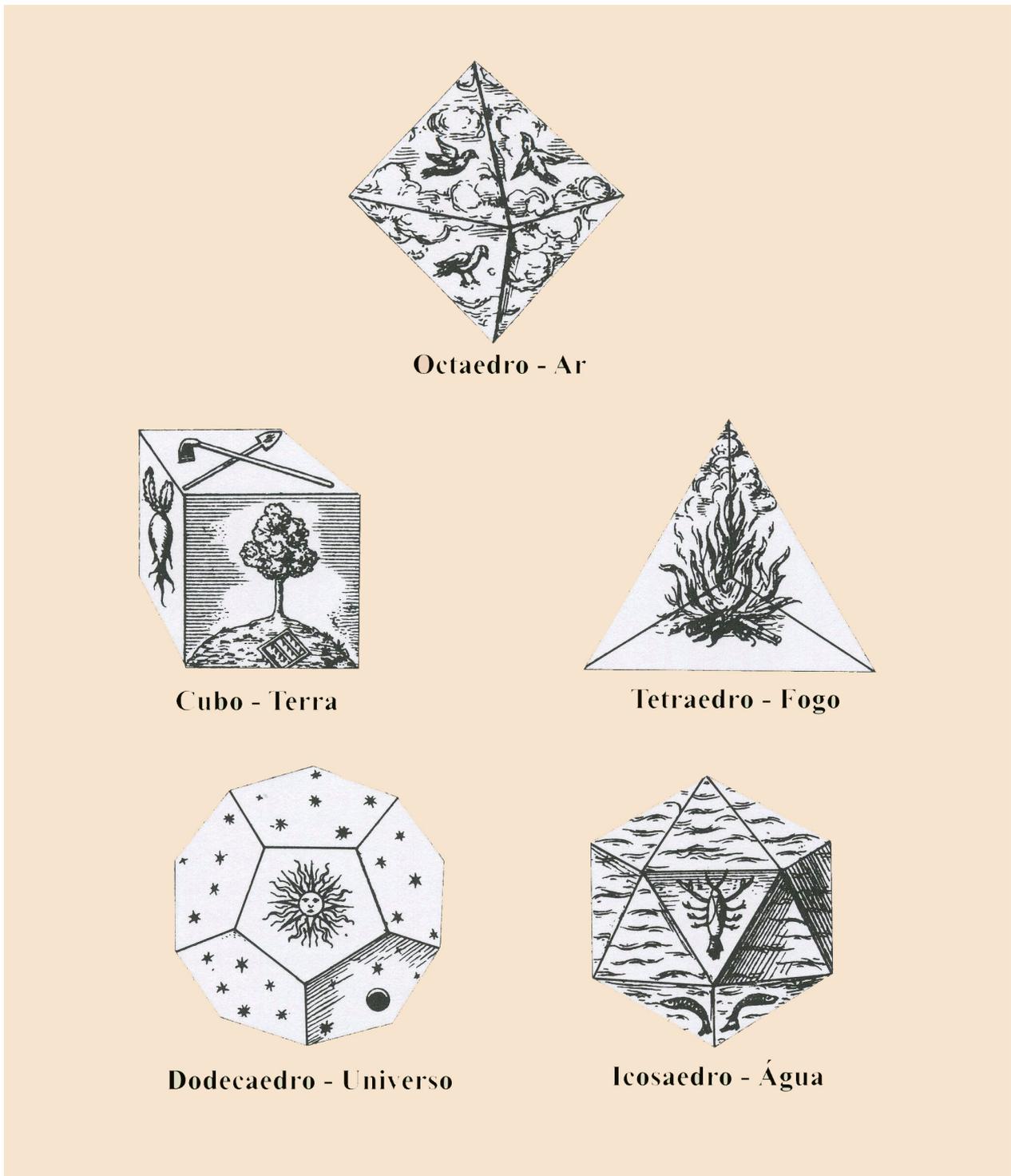


Figura 1.1: Estados de la materia

- Los átomos no pueden subdividirse, crearse o destruirse.
- Los átomos de distintos elementos se combinan en relaciones simples para formar compuestos químicos.
- En las reacciones químicas, los átomos se combinan, separan o reordenan.

La teoría atómica de Dalton es el pilar de la química, y si bien el segundo y tercer postulado fueron desechados a medida que avanzó el desarrollo científico y tecnológico, su contribución también constituye la primera crítica a la formulación del *continuo* a nivel filosófico. Dalton realiza la primera clasificación de los elementos sobre la base de sus pesos atómicos. Para finalizar, hay que mencionar dos aportes fundamentales para el entendimiento sobre la constitución de la materia. Siguiendo el orden cronológico. El primero es de Amadeo Avogadro, quien en 1811, y basado en los trabajos de Gay-Lussac y Dalton, formula su ley: volúmenes iguales de gases diferentes sometidos a las mismas condiciones de presión y temperatura tienen el mismo número de partículas. De esta manera, el número de átomos o moléculas contenidos en un mol recibe el nombre de *Número de Avogadro* cuyo valor es  $N_A = 6,022 \times 10^{23} [\text{mol}^{-1}]$ . Finalmente hay que hablar sobre el trabajo de Dmitri Mendeléyev. Este químico ruso fue quien dió origen a la *tabla periódica de los elementos*, y aunque su trabajo estuvo basado más en los espectros de emisión de los átomos para encontrar los patrones correspondientes para organizar los elementos, la estructura de la tabla se estableció por sus masas atómicas.

Anteriormente se trató la materia desde una perspectiva química, ya que gran parte de su desarrollo histórico está basado en el estudio de los gases, y su comportamiento cuando era expuesto a parámetros que podían ser manejados en el laboratorio. Estos parámetros cruciales fueron la Temperatura, Presión y Volumen, y con ellos se pudo cuantificar, medir y predecir varios fenómenos que ayudaron al desarrollo de la ciencia y a la tecnología y a finalizar en la organización de los átomos con respecto a sus masas atómicas. Es importante mencionar que en el aprendizaje de los gases, no fue necesario incluir la naturaleza de los gases, es decir, solo fue suficiente imaginar que un gas está compuesto por pequeñas esferas macizas; cuestionarse si estas esferas tenían alguna característica especial quedaba fuera, ya que con la Temperatura, Presión y Volumen era suficiente para entender el comportamiento de los gases.

A continuación un breve resumen sobre la *naturaleza electromagnética* de la materia. Una buena forma de comenzar, es hablando sobre Thomas Melvil, quien es considerado el padre de la espectroscopía. Él estudió lo que históricamente se conoce como la primera prueba de la llama. En su trabajo describió cómo había usado un prisma para observar una llama coloreada para varias sales. En su informe explicaba que siempre veía una línea amarilla en el mismo lugar del espectro; concluyendo que este patrón se deriva del sodio, elemento que estaba siempre presente como impureza de las sales. Muchos años después Michael Faraday realiza experimentos relacionados con el paso de la electricidad a través de gases a muy baja presión y observa un arco eléctrico que sale del cátodo y llega al ánodo. Faraday concluye que este arco eléctrico se debe a que los iones presentes aceleraban en presencia del campo eléctrico. Posteriormente, Eugen Goldstein le dará a esta radiación el nombre de rayos catódicos. Posteriormente Kirchhoff y Bunsen estudiaron el espectro del Sol, pudiendo identificar con ello los elementos químicos de la atmósfera solar y a la vez descubrir los elementos *Cesio* y *Rubidio*. Kirchhoff además es conocido por ser el primero en explicar las líneas oscuras del espectro del Sol como resultado de la absorción de longitudes de onda conforme la luz pasa a través de los gases presentes en la atmósfera solar.

A finales del siglo XIX, el científico J.J. Thompson, trabajando con los rayos catódicos, postula que estos están formados por partículas cargadas mil veces más pequeñas que un átomo. Thompson las llamó *corpúsculos*, y estas constituían parte del átomo. Estos corpúsculos son rebautizados con el nombre de *electrones* por George Johnstone Stoney. El descubrimiento de los electrones lleva a Thompson a postular su modelo atómico de la materia. Él sabía que los electrones tenían carga negativa y supuso que, dado que la materia es neutra, existe otra parte del átomo que tiene carga positiva. A partir de estas premisas, propone un modelo de estructura atómica que se denominó como «*budín de pasas*» el cual postula que los electrones son como las pasas que están incrustadas en una «*masa*» de carga positiva. La carga del electrón se determinaría, de forma precisa, por Robert Millikan en 1909.

A finales del siglo XIX se encuentra la última figura clave en el modelo de la naturaleza clásica de la materia: Ernest Rutherford. En sus estudios sobre la radioactividad, clasificó la radiación resultante de los procesos radioactivos en alfa, beta y gamma dependiendo de la capacidad de penetración y de causar ionización. En 1911, Rutherford y sus colaboradores diseñan un experimento que consiste en disparar partículas alfa a una lámina de oro con el fin de registrar las trayectorias que tendrían estas cuando se encuentren con la lamina de oro. De acuerdo al modelo atómico de Thompson, se esperaba que las partículas alfas sufrirían una leve desviación en su trayectoria. Sin embargo, mostraron que, si bien la mayor parte de las partículas alfa no variaban su trayectoria al atravesar la lámina de oro, había un pequeño porcentaje que sufrían una desviación bien significativa y que incluso algunas llegaban rebotar completamente en la misma dirección en la que habían sido lanzadas. Con estos resultados experimentales Rutherford postuló un nuevo modelo atómico. Este sistema atómico consistía en un núcleo que concentra toda la carga positiva del átomo. Además, la mayor parte de la masa alrededor de este núcleo estarían los electrones orbitando. Estos electrones tendrían que circular a una velocidad que permitiese compensar la atracción ejercida por la carga del núcleo. El modelo atómico de Rutherford fue un gran avance. Sin embargo, era un modelo inestable, ya que los electrones al girar, de acuerdo a las leyes del electromagnetismo, deberían emitir radiación, perder energía y acabar colapsando sobre el núcleo. Aunque la esquematización del modelo es la correcta, en su momento no poseía una consistencia teórica que pudiese explicar la estabilidad del átomo. Por lo tanto, la mecánica y el electromagnetismo, en este punto, ya no fueron suficiente. Con esto llegamos al final de la teoría atómica clásica.

Aunque el descubrimiento de la *radioactividad* se conoce hoy como fundamental, es irónico que en ese momento no tuviera un impacto especial. Becquerel midió el primer elemento que produce radioactividad, el *uranio*. Por otra parte, es Marie Curie Sklodowska quien inventó el nombre de radioactividad y que junto a Pierre Curie trabajaron en otras fuentes de radioactividad además del Uranio. Ellos descubrieron dos nuevos elementos radiactivos: *radio* y *polonio*. Creció con esto la sospecha de que los átomos tenían estructura interna y que está difiere solo ligeramente entre un átomo y el otro. Los electrones ya eran bien conocidos por los trabajos de Thomson, por lo que si los electrones eran uno de los ingredientes elementales que formaban los átomos, ¿qué más había? La revelación del interior del átomo comenzó a emerger a principios del siglo XIX, y con el nacimiento de la *Mecánica Cuántica* se pudo revelar la estructura interna de la materia atómica.

Para explicar la visión moderna de la materia, tenemos que hacer una breve revisión histórica sobre la *Mecánica Cuántica* desde sus inicios, hasta llegar al modelo estándar de partículas. La historia comienza en 1900 con Max Planck; este propone una idea revolucionaria al sugerir que la energía está discretizada, y que no era un continuo energético. Esta idea ya se venía plan-

teando desde el siglo anterior con el desarrollo de la química y la radioactividad.

**revisar** A continuación fue Einstein quien planteó la idea de *cuántos de energía*. Este modelo explicaba el efecto fotoeléctrico suponiendo que la absorción o emisión de luz es por medio de un cuanto o partícula y no una onda. La estructura atómica comenzaba así a formularse bajo nuevos conceptos y nuevas concepciones sobre la interpretación de la luz. A continuación Born, demostró teóricamente de que en un átomo es el núcleo el que concentra casi la totalidad de la masa del átomo, y que además posee carga positiva, y a su vez, alrededor del núcleo se encontraba orbitando el electrón, cuya masa proporcionaba una fracción de un por ciento de la masa del átomo, y que poseía carga negativa. Además, los electrones solo podían estar en órbitas específicas alrededor del núcleo; mientras los electrones se encuentren en estas órbitas, el átomo no irradia ningún tipo de radiación electromagnética.

Una de las hipótesis más importantes fue introducida por De Broglie; en ella explicaba que el comportamiento dual de la radiación entre onda y partícula eran equivalentes. Así, como un cuanto de radiación llevaba consigo una onda asociada a la su movimiento, la materia llevará consigo una onda de materia asociada a su movimiento. De Broglie propuso que los aspectos ondulatorios de la materia estaban relacionados cualitativamente con los aspectos de una partícula.

Para este punto, la materia subatómica, había sido dividida en dos categorías: fermiones y bosones. Durante el desarrollo de la mecánica cuántica, se encontró una propiedad meramente cuántica y que consideraba la rotación intrínseca de las partículas: el *espín*. Para los fermiones el espín posee un valor numérico fraccionario en unidades de  $\hbar$  (constante de Planck), mientras que el bosón tiene espín de valor entero. Con esta característica de la materia microscópica, Pauli describió una de las ideas fundamentales, y lo llamó principio de exclusión. Esta dice que dos fermiones idénticos no pueden ocupar el mismo estado cuántico de manera simultánea. Por lo tanto dos electrones en un átomo no pueden tener idénticos números cuánticos.

En el año 1932 se logró medir y comprobar la existencia del neutrón, y con ello se consigue finalmente completar el cuadro para la estructura del átomo. En esta época, Dirac ya había formulado su teoría cuántica relativista y además comenzaban a desarrollarse nuevos métodos para medir la radiación atómica y cósmica. Al pasar los años, se pudieron detectar muones, neutrino, piones, kaones, etc.

Con el desarrollo de nuevos colisionadores y la física teórica, se concluyó que los protones y neutrones no eran partículas fundamentales, sino que éstas estaban constituidas de partículas más pequeñas, las cuales fueron llamadas *quarks* y el portador de la fuerza fuerte entre ellos fue llamado *gluón*, llamado así por la capacidad que tenía para unir a los quarks, mantener estable el núcleo y vencer la fuerza electromagnética.

Actualmente se consideran 6 quarks. Para el sector liviano tenemos los quark *up* (u), *down* (d) y *strange* (s). Para el sector de quarks pesados tenemos *charm* (c), *top* (t) y *bottom* (b).

Al aumentar el número de partículas que se detectaban, también surgió el intento de clasificarlos y organizarlos en familias dependiendo de sus propiedades fundamentales. Así, habían partículas como el electrón o el neutrino, que no sienten la interacción fuerte, a este grupo se les denominó *Leptones*. Por otra parte, las partículas que sí interactúan fuertemente fueron llama-

das *Hadrones*. Los hadrones fueron a su vez catalogados en familias: los *Mesones*, cuya estructura interna esta constituida por un quark y un anti-quark, y por otro lado, tenemos a los *Bariones*, los cuales se forman con tres quarks.

Con el modelo estandar completo, se comprendía el mundo como si fuera una cebolla, en donde cada capa es un nuevo nivel subatómico, y en el cual para alcanzar capas más internas, necesitamos aceleradores más potentes; y además en cada capa vamos a encontrar siempre nuevas partículas subatómicas. Así, la materia son solo partículas unidas en diferentes escalas dimensionales. Finalmente cabe preguntarse, hasta qué punto podemos crear aceleradores más potentes para observar efectos a distancias cada vez más pequeñas y esperar detectar posiblemente nuevas partículas.

## §Fuerzas Fundamentales

Las interacciones entre las partículas a diferentes escalas que existen en la naturaleza fueron catalogadas como "*fuerzas*". Las cuatro fuerzas fundamentales son: Fuerza de Gravedad, Fuerza Electromagnética, Fuerza Nuclear Débil y Fuerza Nuclear Fuerte.

### Gravedad

Cuando queremos levantar, arrastrar o sujetar algo, nos sentimos realizando un esfuerzo físico. A esta experiencia intuitivamente la llamamos *fuerza*. Si hacemos el ejercicio de soltar un objeto, observamos que esta cae. Esto nos lleva a conjeturar que hay una fuerza que hace que el objeto caiga hacia la Tierra. Esta propiedad que tiene el planeta, para atraer objetos hacia él, es lo que se denomina comúnmente como *gravedad*.

La ley de gravitación se debe a Newton, quien la dedujo a partir de las leyes de Kepler y la ideas de Galileo. Newton entendió que la fuerza que ejerce el Sol sobre los Planetas, era la misma que hacía que los cuerpos en la Tierra cayeran hacia su centro. Con esto, formuló su ley de gravitación universal y las leyes sobre la mecánica del movimiento, la cual rigió por aproximadamente doscientos años. Posteriormente, ya en el siglo XX, fue Einstein quien formuló en su teoría de la Relatividad General, que la gravedad no afecta solo al espacio, sino que también al tiempo, aunque actualmente se a puesto en duda, si la gravedad es una fuerza fundamental o solo es una consecuencia geométrica de masa actuando sobre el espacio-tiempo.

Nuestras ideas sobre el movimiento de los cuerpos son herencia de Galileo y Newton. Aunque antes de ellos, era la física de Aristóteles la que gobernaba. El suponía que el estado natural de un cuerpo es el reposo, y mientras no se aplique una fuerza externa, este seguiría en reposo. Se deducía que los cuerpos más pesados debían caer más rápido que uno más liviano, esto porqué sufría una mayor fuerza de atracción hacia la Tierra.

Aristóteles mantenía que la verdad puede ser alcanzada por el pensamiento puro, y por ello, nadie antes de Galileo había puesto a pruebas experimentales las ideas de Aristóteles. Galileo dejó caer diferentes pesos en planos inclinados, observando que los diferentes pesos caían con diferentes velocidades. Los experimentos indicaron, que la velocidad de un cuerpo aumentaba al mismo ritmo, independiente de su peso. Obviamente, una bola de plomo caerá más rápido que una pluma, pero esto es porque la resistencia del aire frenará más a la pluma. En cambio, si se sueltan dos bolitas de plomo, de diferentes pesos, ambas caeran con la misma rapidez.

Las mediciones de Galileo sobre el movimiento de los cuerpos, demostraron que Aristóteles estaba equivocado, ya que cuando caían rodando por planos inclinados, cuerpos de distintos pesos, se podía ver que actuaba sobre ellos la misma fuerza y ese efecto se producía porque eran acelerado de una forma constante. Con esto demostraba que el efecto de la gravitación en la Tierra era cambiar de velocidad a los cuerpos, independientemente de la masa de los cuerpos.

**ver** Junto a las ideas de Kepler sobre las órbitas elípticas, fueron la base la teoría de gravitación de Newton. La cual sostenía que la fuerza gravitacional era proporcional a la masa de los cuerpos, es decir, entre más masa, más fuerza habría. Por otro lado, esta fuerza era inversamente proporcional al cuadrado de la distancia entre los cuerpos, es decir, la fuerza era más débil, mientras más lejos estén los cuerpos, o al contrario, mientras más cercanos, más fuerza gravitacional.

La diferencia fundamental que existía entre las ideas de Aristóteles y las de Newton, es que Aristóteles sostenía que el estado preferente de los cuerpos es el reposo, a menos que una fuerza externa o impulso lo saque de ese estado. Para Newton, el reposo absoluto era solo cuestión de definir el marco de referencia, es decir, se puede suponer que un cuerpo A esté en reposo o moviéndose con velocidad constante con respecto de otro B, y no habría razón para preferir qué punto de vista es mejor que el otro, esto, por la No existencia de un reposo absoluto. De esta manera, se elimina la existencia de una posición absoluta.

Tanto Aristóteles como Newton estaban de acuerdo con que el tiempo era absoluto. Es decir, que si dos observadores miden el tiempo entre dos sucesos, estos marcaran el mismo tiempo en sus relojes. El tiempo era independiente y estaba separado del espacio. Más bien, este concepto funciona solo cuando el movimiento de los objetos son lentos si los comparas con la velocidad de la luz. Estas ideas sobre la relatividad del tiempo fueron introducidas por Einstein a principios del siglo XX. Esta nueva ley consiste en que todos los observadores deben medir la misma velocidad de la luz, sin importar a qué rapidez se estén moviendo. Es decir, cada observador debe tener su propia medida de tiempo, y no tiene por qué marcar el mismo tiempo que otros observadores.

Con estas nuevas ideas, Einstein sugirió que la gravedad no era una fuerza como las otras, sino que es una consecuencia de que el tiempo-espacio no es plano, y hoy el espacio-tiempo se considera curvado. Estas deformaciones se producen por la distribución de la masa y la energía embebidas en el espacio-tiempo. La Tierra por ejemplo, ya no orbitaría alrededor del Sol por la fuerza de gravedad, sino que ahora seguiría trayectorias rectas pero en un espacio curvo.

### **Electricidad y Magnetismo**

Al principio, la Electricidad y el Magnetismo eran dos fenómenos completamente diferentes. Para entender la electricidad hay que mencionar que a la materia se le asoció la propiedad de *carga*. Esta carga tenía dos posibilidades, la carga podría ser positiva o negativa. Así la ley de cargas se define como: « *cargas iguales se repelen y cargas opuestas se atraen* ». Con esta ley, se concluye que la fuerza eléctrica puede ser atractiva o repulsiva.

El fenómeno magnético se describe mejor usando de ejemplo un imán, ya que este posee un polo norte y un polo sur, y como ocurre en la electricidad, polos opuestos se atraen y polos iguales se repelen. La diferencia fundamental entre electricidad y magnetismo, es que en la

naturaleza pueden existir cargas aisladas, es decir, se pueden encontrar cargas positivas o negativas sin la necesidad de una codependencia para existir; en cambio, en el magnetismo, los polos siempre aparecen juntos, es decir, no existen los monopolos magnéticos.

En 1820, Oersted descubrió que la aguja de una brújula se desviaba cuando por un hilo cerca de él circulaba una corriente eléctrica; esta fue la primera prueba de que una corriente producía efectos magnéticos. A continuación, Faraday descubrió que al introducir un imán a una bobina, esta generaba una corriente. Así, demostró que un imán producía efectos eléctricos. Estos dos descubrimientos, casi complementarios, sentaron la base para que en el 1864, Maxwell formulara sus ecuaciones, en las cuales *unificaba* en una sola ley los fenómenos eléctricos y magnéticos; es lo que hoy llamamos *electromagnetismo*. La consecuencia más valiosa, fue la predicción de la *radiación electromagnética*.

En 1928, Dirac mezcló el electromagnetismo, la relatividad general y la mecánica cuántica para formular la *electrodinámica cuántica*. Esta teoría permite calcular los efectos producidos por la interacción de la luz con la materia, específicamente, para partículas subatómicas que estén eléctricamente cargadas, como por ejemplo, el electrón. Cuando una partícula cargada es acelerada, ésta irradia una onda electromagnética. En la teoría de Dirac, esta onda se comporta como si fuera un serie de fotones, lo que nos proporciona la imagen de que una partícula acelerada emite uno o más fotones.

### Fuerzas Nucleares

Para finalizar, las fuerzas fundamentales que gobiernan el microcosmos son las fuerzas nucleares. Estas fuerzas son las llamadas: Fuerza Nuclear Fuerte y Fuerza Nuclear Débil.

La Fuerza Nuclear Fuerte surgió prácticamente con una contradicción o parádoja, pues se sabía que el átomo estaba constituido de electrones (carga negativa) orbitando alrededor del núcleo. Este núcleo a su vez, está constituido de protones (carga positiva) y neutrones (carga neutra). La estabilidad del átomo está regida por la ley de cargas eléctricas, "*cargas iguales se repelen, cargas distintas se atraen*", por lo tanto, la pregunta era: cómo se mantiene estable el núcleo, qué fuerza hace para que los protones venzan la fuerza de repulsión electromagnética. Por esta característica fue que la llamaron fuerza nuclear fuerte, además sólo afecta a protones y neutrones, por lo que es considerada un fuerza de corto alcance.

El hecho de que esta fuerza no actúa sobre los electrones, sugiere que existe una *carga fuerte* que sólo se da entre protones y neutrones; análogamente al fotón en el caso electromagnético, se propuso que la partícula mediadora de la fuerza fuerte era el *pión*. Yukawa postuló desde el principio de incertidumbre, que la masa del pión es 1/7 la masa del protón, en contraposición al fotón que no tiene masa. El descubrimiento en 1947 comprobó que la fuerza fuerte actúa a distancia del orden de 1 fermi ( $1 \text{ fermi} = 10^{-13} \text{ cm}$ ).

Por otra parte, existen tres tipos de desintegraciones radiactivas:  $\alpha$ ,  $\beta$  y  $\gamma$ . Las desintegraciones  $\alpha$  y  $\gamma$  pueden explicarse con la fuerza fuerte y la fuerza electromagnética. En ambos procesos, el número de protones y neutrones se conservan. En cambio, la desintegración  $\beta$  no podía explicarse con estas fuerzas, ya que en este proceso el neutrón se convierte en protón, por lo tanto, no se conserva el número de protones y neutrones en el núcleo. El agente responsable de esta desintegración del neutrón se conoce como *fuerza nuclear débil*, ya que este proceso es

Cuadro 1.1: Niveles de la estructura de la materia

Niveles de la estructura de la materia	tamaño en cm	constituyentes	interacción responsable de la estructura
Quarks	$< 10^{-18}$	parece ser elemental	-
Electrón	$< 10^{-18}$	parece ser elemental	-
Protón	$10^{-15}$	u,u,d quarks	Fuerte, débil, E/M
Neutrón	$10^{-15}$	u,d,d quarks	Fuerte, débil, E/M
Núcleo	$10^{-15}$	Protones, Neutrones	Fuerte, E/M, débil
Átomo	$10^{-10}$	Núcleo, Electrones	E/M
Molécula	$> 10^{-10}$	Átomos y/o iones, Electrones	E/M
Sólido (célula primitiva)	$> 10^{-10}$	Átomos y/o iones, Electrones	E/M
Célula	$\geq 10^{-10}$	Molécula	E/M
Entidades Biológicas	$10^{-8} - 10^2 - 10^0$		E/M
Planetas	$10^6 - 10^7$	Sólido, Líquido, Gas	E/M, Gravitacional
Estrellas, Sol	$10^8 - 10^{12}, 10^9$	Electrones, Núcleo, Iones, Fotón	Gravitacional, Fuerte, E/M, débil
Enana Blanca	$10^7$	Núcleo, Electrones	Gravitacional
Estrella de Neutrones	$10^4$	Núcleo y algunos Protones y Electrones	Gravitacional
Astrofísica de Agujeros Negros	$10^4$	?	Gravitacional
Galaxias	$10^{21}$	Estrellas, materia ordinaria y oscura, fotones, neutrinos	Gravitacional
Universo Observable	$10^{26}$	Galaxias, materia oscura, energía oscura	Gravitacional, Otras ?

mucho menos intensa que la fuerza fuerte.

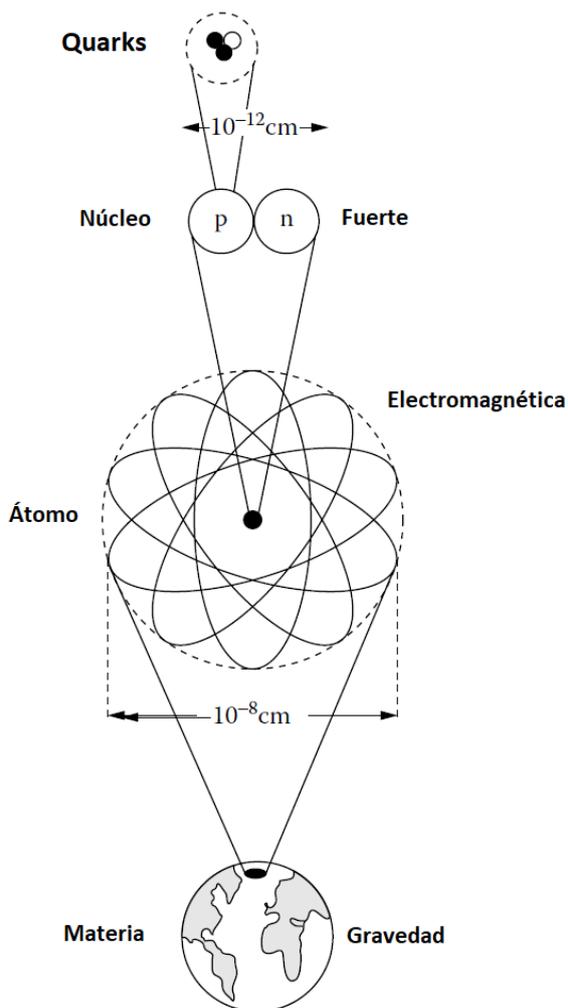
La propiedad fundamental que tiene la desintegración  $\beta$ , es que en el proceso se crean *neutrinos* ( $\nu^0$ ). Estas partículas no poseen carga, por lo tanto no sienten las fuerzas electromagnéticas ni fuertes. Esta insensibilidad los hace interesantes para entender la fuerza débil; y al igual como el fotón y el gluón, la fuerza débil debería tener una partícula portadora de carga. se propusieron tres:  $W^+$ ,  $W^-$  y  $Z^0$ . Dos bosones con carga y uno sin carga.

### Unificación

Actualmente cada una de estas interacciones o fuerzas fundamentales posee su teoría para ser descrita, tanto clásicamente como cuánticamente. Uno de los objetivos principales de la física teórica es poder *unificar* estas cuatro fuerzas fundamentales en una sola teoría. Hasta ahora este propósito sólo ha sido cubierto parcialmente por el Modelo Estándar, el cual pudo unificar tres de las cuatro fuerzas, siendo la gravedad, en la forma actual, incompatible con la teoría cuántica.

Una particularidad fundamental que debe tener una teoría de unificación, es que debe ser necesariamente cuántica, ya que hay fuerzas que sólo actúan a nivel microscópico. Esta característica hace que es difícil cuantizar la gravedad. La mecánica cuántica posee una restricción en la certeza con la que puede medirse: el principio de incertidumbre nos dice que no podemos conocer la posición y el momentum de una partícula simultáneamente con exactitud, por lo tanto, siempre tendremos un error asociado a la incapacidad de medir con exactitud. En la mecánica clásica, las observaciones siempre tienen una precisión extraordinaria, esto porque se puede conocer exactamente la posición y el momentum de un objeto. Quizás algunos aspectos del caos sean el análogo clásico del principio de incertidumbre.

Algunas de las teorías más populares para explicar la gran unificación son : Teoría de Supersimetría, Teoría de Cuerdas o Supergravedad entre otras.



Los *quarks* son tan pequeños que su tamaño no ha podido ser determinado, además su estructura interna es desconocida. La *fuerza fuerte* es la que mantiene estable la materia que está constituida de quarks.

Protones y neutrones se agrupan para formar el núcleo del átomo

Los átomos se mantienen unidos por la interacción *electromagnética*. Los electrones parecen orbitar alrededor del núcleo. Existe una atracción entre las cargas opuestas de los electrones y el núcleo.

La gravedad es una fuerza dominante de largo alcance, que atrae planetas y galaxias.

Figura 1.2: Las fuerzas de la naturaleza actúan sobre las partículas formando la materia del universo

## 1.2. Cromodinámica Cúantica

La Cromodinámica Cuántica (QCD) es la teoría de la fuerza fuerte. Puede explicar, al menos cualitativamente, todas las mediciones de los fenómenos de interacción fuerte, que van desde los estados ligados de quarks (bariones y mesones), hasta la libertad asintótica en distancias cortas. Sin embargo, la precisión de las pruebas de QCD están limitadas típicamente por las siguientes razones: los cálculos perturbativos son difíciles debido a la gran cantidad de diagramas involucrados, y la convergencia de la expansión de la serie en  $\alpha_s$  es pobre debido al gran valor de la fuerte constante de acoplamiento  $\alpha_s$ . Además, hay que tener en cuenta los efectos no perturbativos (hadronización, funciones de estructura), que hoy en día hay que modelar. Además explica la interacción fuerte a nivel de quarks, que se unen mediante gluones: los bariones están formados por tres quarks y los mesones son estados ligados entre un quark y antiquark. Hoy entendemos las fuerzas entre nucleones bariones y mesones como una especie de interacción residual de van der Waals entre estados ligados de tres quarks de color resultante neutro. Desafortunadamente, todavía no es posible utilizar este conocimiento para hacer predicciones cuantitativas sobre las interacciones de los nucleones y las propiedades de los núcleos atómicos. Se espera que esto sea posible con un mayor progreso de los cálculos en Lattice QCD. Debido a las limitaciones actuales de los cálculos dentro de QCD perturbativos, las pruebas cuantitativas de la teoría solo se pueden realizar a nivel de partón (quark y gluones). Los quarks se introdujeron formalmente como constituyentes de mesones y bariones en el modelo de Gell-Mann-Zweig. Se descubrió que los quarks están naturalmente asociados con los constituyentes puntuales, llamados partones, los cuales fueron descubiertos en la dispersión elástica profunda entre leptones y nucleones. El concepto de color fue introducido para prevenir problemas estadísticos con el spín de bariones, que estaban constituidos por quarks con el mismo sabor, por ejemplo  $\Delta^{++}$ . Se asignó de esta manera, un nuevo número cuántico, el color, correspondiente a una nueva simetría  $SU(N_c)$ , el cual resolvía el problema estadístico del spín. Los gluones fueron propuestos para explicar los hadrones como estados de quarks ligados. Desempeñan el papel de mantener unidos a los quarks. Los conceptos de confinamiento y libertad asintótica fueron importantes para el desarrollo de QCD como una teoría de Gauge no Abelianiana con una constante de acoplamiento decreciente con la energía: los quarks libres no existen, y solo se pueden observar hadrones de color neutro.

### §Lagrangiano en QCD

QCD es una teoría de campos descrita por una simetría local  $SU(N_c)$ <sup>1</sup>. En esta formulación la interacción entre partículas masivas con spin  $-\frac{1}{2}$  (quarks) y bosones de gauge sin masa de spin-0 (gluones). Debido al carácter no-Abeliano, los bosones interactúan entre ellos, por lo tanto, el Lagrangiano de QCD es

$$\mathcal{L} = \bar{\psi}(iD_\mu\gamma^\mu - m)\psi + \frac{1}{2}Tr G_{\mu\nu}G_{\nu\mu}, \quad (1.1)$$

donde  $m$  es la matriz de masa y  $G_{\mu\nu}$  es el tensor de campo gluónico

$$G_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu^B - \partial_\nu A_\mu^B + g_s f_{ABC} A_\mu^A A_\nu^B - g_s f_{ABC} A_\nu^A A_\mu^B = \frac{i}{g_s} [D_\mu, D_\nu] \quad (1.2)$$

y

$$D_\mu = \partial_\mu - i g_s A_\mu^B t^B \quad (1.3)$$

<sup>1</sup>en nuestro trabajo usamos  $N_c = 3$

es la derivada covariante. Las matrices  $t^B = \frac{\lambda^B}{2}$ , ( $B = 1, 2, 3, \dots, 8$ ) ( $\lambda^B$  son las matrices de Gell-Mann) representan los generadores de SU(3). Y satisfacen las siguientes relaciones

$$[t^A, t^B] = i f^{ABC} t^C, \quad \text{Tr}(t^A) = 0, \quad \text{Tr}(t^A t^B) = \frac{1}{2} \delta_{AB}. \quad (1.4)$$

Las constantes de estructura de SU(3),  $f^{ABC}$ , son completamente antisimétricas. El campo  $\psi$  contiene información de seis quarks, estos están divididos en el sector liviano: *up*, *down* y *strange*, (u,d,s); el sector pesado: *charm*, *bottom* y *top* (c,b,t). De ahí que el campo  $\psi(x)$  y la matriz de masa para la primera generación, se reducen a

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} u(x) \\ d(x) \end{pmatrix}, \quad m = \begin{pmatrix} m_u & \\ & m_d \end{pmatrix}$$

donde  $u(x)$  y  $d(x)$  son tripletes de color. Una propiedad única de QCD, y a la cual se le debe el nombre, es que estos tripletes tienen *carga de color*. Estos son Red(R), Green (G) y Blue(B). De esta manera, el triplete queda representado como

$$u(x) = \begin{pmatrix} u_R(x) \\ u_G(x) \\ u_B(x) \end{pmatrix}$$

En QCD al igual que en QED, la constante de acoplamiento  $a \equiv g_s^2/4\pi^2$  depende de la escala de energía,  $a(Q^2)$ . Por ejemplo, a altas energías,  $a(Q^2)$ , es pequeña, permitiendo una teoría de perturbaciones para  $a(Q^2)$ . Este fenómeno es llamado *libertad asintótica*. Por otra parte, cuando  $|Q^2| < 1 \text{ GeV}^2$ , la constante de acoplamiento se vuelve largo, por lo que un tratamiento perturbativo es casi imposible. Este incremento conlleva al *confinamiento*. Por esta razón, quark y gluones no pueden ser observados como partículas libres. Debido a la imposibilidad de usar QCD perturbativo a bajas energías, usamos métodos alternativos, como Lattice, Perturbación Quiral o Reglas de Suma, enfoques disipativos, etc.

## § Simetría Quiral

Una simetría importante, es la *Simetría Quiral*. Descomponemos los campos de los quark u y d en partes con diferentes quiralidades

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L = \frac{1 - \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R = \frac{1 + \gamma_5}{2} \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix},$$

$$\psi = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L + \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R = \psi_L + \psi_R.$$

Al insertar esta descomposición quiral dentro del Lagrangiano, observamos que solo los términos de masa son una mezcla entre parte derecha e izquierda

$$\bar{\psi}(i\not{D} - m)\psi = \bar{\psi}_L i\not{D}\psi_L + \bar{\psi}_R i\not{D}\psi_R - \bar{\psi}_L m \psi_R - \bar{\psi}_R m \psi_L$$

Cuando  $m \rightarrow 0$ , esto se conoce como límite quiral. En este límite, el Lagrangiano es invariante bajo transformaciones SU(2) en el espacio de sabores

$$\begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L \rightarrow U_L \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_L, \quad \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R \rightarrow U_R \begin{pmatrix} u \\ d \end{pmatrix}_R.$$

Las corrientes de Noether correspondientes a estas simetrías son

$$j_L^{\mu k} = \bar{\psi}_L \gamma^\mu \frac{\tau^k}{2} \psi_L, \quad j_R^{\mu k} = \bar{\psi}_R \gamma^\mu \frac{\tau^k}{2} \psi_R,$$

donde  $\tau^k$ , ( $k = 1, 2, 3$ ) son las matrices de Pauli. La corriente vectorial y la corriente vectorial axial son definidos como una combinación lineal

$$j_V^{\mu k} = j_L^{\mu k} + j_R^{\mu k} = \bar{\psi} \gamma^\mu \frac{\tau^k}{2} \psi$$

$$j_A^{\mu k} = j_L^{\mu k} - j_R^{\mu k} = \bar{\psi} \gamma^\mu \gamma_5 \frac{\tau^k}{2} \psi$$

En la simetría  $SU(2)_L \times SU(2)_R$ , todas las partículas deberían existir como dobletes de paridad. Sin embargo, mesones ligeros pseudoescalares (paridad negativa) tienen una masa mucho menor que mesones escalares (paridad positiva). Se concluye que la simetría axial  $SU(2)_A$  está relacionada con el quiebre espontáneo (estrictamente, un quiebre dinámico) en  $j_x^{\mu k}$ ,  $SU(2)_L \times SU(2)_R \rightarrow SU(2)_V$ . El grupo  $SU(2)_V$  se llama grupo de isospín. Dado que la simetría quiral también se rompe explícitamente debido a las masas finitas de los quarks, los piones también adquieren masas finitas. Los mismos argumentos son válidos cuando se incluye el quark  $s$ . La simetría entonces es  $SU(3)_L \times SU(3)_R$ , rompiéndose espontáneamente:  $SU(3)_L \times SU(3)_R \rightarrow SU(3)_V$ .

### 1.3. Constante de Acoplamiento

Hay varias razones por las cuales interesa medir la constante de acoplamiento: (1) Es el único parámetro libre en QCD perturbativo, (2) muchas pruebas de QCD requieren que se conozca  $\alpha_s$ , (3) para un gran número de pruebas electrodébiles, las correcciones fuertes deben calcularse con precisión, (4) en las teorías de unificación, la constante de acoplamiento debe acoplarse a las demás constantes fundamentales en muy altas energías.

Así mismo, con la medición de la constante de acoplamiento, podemos comparar varios test de QCD con los diferentes valores de  $\alpha_s$  (consistencia de la teoría), la medición de varios procesos y reacciones (su universalidad), también en diferentes especies de quark (independencia del sabor) y a diferentes escalas de energías (*running*).

Las divergencias ultravioletas para la constante de acoplamiento en Cromodinámica Cuántica y en teorías de campos, deben ser eliminadas por medio de la renormalización de los campos y el acoplamiento. Existen diferentes esquemas de renormalización, y técnicas de regularización; en QCD, se usa frecuentemente la regularización dimensional, y el esquema favorito es *Modified Minimal Subtraction* o  $\overline{MS}$ , (el cuál se usará en los dos trabajos que presentaré en la sección dos de esta tesis). En este esquema de sustracción mínima modificado, se realizan los cálculos en un tiempo-espacio de dimensión  $d \neq 4$ , mientras que las divergencias se expresan como polos en  $\epsilon = |4 - d|$ . Estos polos, más un término constante, se restan para obtener cantidades finitas.

La ecuación del grupo de renormalización (RGE) conduce a la solución para la constante de acoplamiento, que es

$$\beta(Q^2) \left( \equiv Q^2 \frac{da(Q^2)}{dQ^2} \right) = -\beta_0 a^2(Q^2) - \beta_1 a^3(Q^2) - \beta_2 a^4(Q^2) - \beta_3 a^5(Q^2) - \beta_4 a^6(Q^2) - \dots \quad (1.5)$$

donde  $a \equiv \alpha_s/\pi = g_s^2/4\pi^2$ . Esta ecuación es conocida como la función beta  $\beta$ , cuyos primeros dos coeficientes son universales, es decir, independientes del esquema de renormalización que se use, estos coeficientes son  $\beta_0 = (11 - 2N_f/3)/4$  y  $\beta_1 = (1/16)(102 - 38N_f/3)$ , donde  $N_f$  es el número de sabores activos.

Aquí  $Q^2$  es la escala de renormalización, y se interpreta como una escala de energía o momento al cuadrado  $Q^2 \equiv -q^2$ . La constante de acoplamiento que describe interacciones fuertes es entonces  $a(Q^2) = \alpha_s/\pi$  y corre con la escala de energía  $Q^2$ . Los primeros cinco coeficientes han sido calculados en el esquema  $\overline{MS}$

$$\beta_0 = 2.25, \quad (1.6)$$

$$\beta_1 = 4, \quad (1.7)$$

$$\beta_2 = 10.06, \quad (1.8)$$

$$\beta_3 = 47.2281, \quad (1.9)$$

$$\beta_4 = 127.322. \quad (1.10)$$

Los valores numéricos se han calculado usando  $N_f = 3$ . Los coeficientes  $-\beta_j$  de la función beta  $\beta$ , son negativos, lo que conduce a una disminución del acoplamiento al aumentar la energía  $Q^2$  (lo que se llama también la libertad asintótica). Esto es diferente de QED, donde la función beta es positiva, lo que hace que el acoplamiento aumente con  $Q^2$ .

La solución de la ecuación (1.5) a primer orden (un loop) es:

$$Q^2 \frac{da(Q^2)}{dQ^2} \equiv \frac{da(Q^2)}{d \log(Q^2)} = -\beta_0 a^2(Q^2). \quad (1.11)$$

Podemos encontrar la solución explícita de la ecuación anterior

$$a(Q^2; \Lambda^2) = \frac{a(Q_0^2)}{1 + \beta_0 a(Q_0^2) \log\left(\frac{Q^2}{\Lambda^2}\right)}. \quad (1.12)$$

Cuando se incluyen  $\beta'_j$ 's ( $j \geq 1$ ), no existe en general solución explícita, pero una solución aproximada  $a(Q^2; \Lambda^2)$  es más complicada que (1.12). El parámetro  $\Lambda$  indica el límite entre los rangos de energía no-perturbativa y perturbativa.  $\beta_0$  depende del número de sabores activos y el parámetro  $a(Q^2)$  ( $\equiv \alpha_s(Q^2)/\pi$ ) está relacionado directamente con los observables que podemos extraer de los experimentos, además es una función de la escala  $Q^2$ . La escala  $Q^2$  es ahora la escala típica del experimento. Cuando se comparan valores de  $a(Q^2)$  o  $\Lambda$  en diferentes publicaciones, se requiere mucha precaución. El valor de  $\Lambda$  depende de:

- diferentes esquemas de renormalización (MOM, MS,  $\overline{MS}$ , Lambert,...),
- Número de sabores activos  $N_j$  en los coeficientes  $\beta_j$ ,
- órdenes en la expansión perturbativa, correspondiente a la truncación de la función  $\beta$  después del primer, segundo o tercer término,

- elección de la constante de integración para la solución de la función beta  $\beta$ .

Por razones históricas, las mayoría de las veces  $\Lambda^2$  ha sido utilizado como parámetro fundamental en QCD. Hoy tenemos una escala de referencia  $Q^2 = m_Z^2$  ( $m_Z$  del bosón Z), lo cual hace que la constante de acoplamiento se exprese como  $a(Q^2) \equiv a(m_Z^2)$ . Para cálculos de bajas energía, generalmente se usa la escala del leptón  $\tau$ ,  $a(Q^2) \equiv a(m_\tau^2)$ . En ambas escalas se usa el esquema  $\overline{MS}$ .

La figura 1.4 muestra la dependencia de la constante de acoplamiento con la energía. Con el aumento de la energía, la fuerza se vuelve más pequeña, a esto se le denomina *libertad asintótica*. En esta región de altas energías ( $Q^2 > 1 \text{ GeV}^2$ ), el acoplamiento es pequeño, por lo que se pueden realizar cálculos perturbativos. Para bajas energías, la región no perturbativa ( $Q^2 < 1 \text{ GeV}^2$ ), la constante de acoplamiento se vuelve muy grande (no se conoce bien el comportamiento de  $a(Q^2)$  en este régimen), dando origen al fenómeno de *confinamiento*.

Para medir la constante de acoplamiento  $\alpha_s$ , supongamos que tenemos una cantidad  $\mathcal{D}$  que es sensible a dicho acoplamiento y que simbólicamente puede escribirse como :

$$\mathcal{D}(\alpha_s) = d(\alpha_s)^{\text{perturbativo}} \otimes d^{\text{no-perturbativo}} \quad (1.13)$$

La parte  $d(\alpha_s)^{\text{perturbativo}}$  se puede calcular perturbativamente y también puede depender de parámetros electrodébiles, pero aquí suponemos que se conoce con exactitud. La parte perturbativa en el caso (1.13) está convolucionada con las correcciones no perturbativas. A primer orden,  $d^{\text{no-perturbativo}}$  también depende del acoplamiento, pero no aparece por ejemplo, en procesos de fragmentación. En particular, la dependencia no perturbativa se desprecia cuando las correcciones perturbativas son pequeñas.

Se debe enfatizar, que hablar sobre partes perturbativas y las no-perturbativas es ambiguo. En general, una parte se define simplemente como algo que contiene todas las partes que la otra no incluye. Expresado de otra manera, el borde entre las contribuciones perturbativas y no-perturbativas es ambiguo.

Para el cálculo perturbativo se puede realizar una aproximación logarítmica principal o como elementos de matriz orden a orden. La constante de acoplamiento está bien definida, sobre todo en el límite de masas nulas. Entonces, podemos escribir  $d(\alpha_s)^{\text{perturbativo}}$  como una expansión en potencias de  $a(\mu^2 = \kappa Q^2)$ , ( $\kappa$  representa un parámetro de escala)

$$d(Q^2)_{\text{perturbativo}} = a(\mu^2) + d_1(\kappa) a(\mu^2)^2 + d_2(\kappa) a(\mu^2)^3 + \dots + d_N(\kappa) a(\mu^2)^{N+1} + \dots, \quad (1.14)$$

donde los coeficientes  $d_i(\kappa)$  se calculan en un esquema de renormalización y escala de energía más convenientes para cierto número de sabores de quarks  $N_f$ . El acoplamiento y los coeficientes deben evaluarse siempre en la misma escala de renormalización  $\mu^2$ , y si la escala de renormalización se cambia  $\mu^2 \rightarrow \mu'^2$ , la serie total (1.14) tiene que permanecer sin cambios, ya que  $\mu'^2$  no es un parámetro físico.

Para entender mejor la independencia de la serie más allá de un loop, reescribamos (1.14) de manera truncada de la siguiente manera

$$d(Q^2; \kappa)_{\text{perturbativo}}^{[N]} = a(\mu^2) + d_1(\kappa) a(\mu^2)^2 + d_2(\kappa) a(\mu^2)^3 + \dots + d_{N-1}(\kappa) a(\mu^2)^N \quad (1.15)$$

Por lo tanto, si la serie (1.14) es independiente de la escala de renormalización, entonces

$$\frac{d}{d \ln \mu^2} d(Q^2, \kappa)^{[N]} = \mathcal{O}(a^{[N+1]}) \quad (1.16)$$

Además si usamos

$$\frac{da(\kappa Q^2)}{d \ln \kappa} = \frac{da(\mu^2)}{d \ln \mu^2} = -\beta_0 a^2(\mu^2) - \beta_1 a^3(\mu^2) - \beta_2 a^4(\mu^2) - \dots, \quad (1.17)$$

Por ejemplo, si consideramos  $[N = 3]$ , encontramos dos ecuaciones diferenciales

$$\frac{d}{d \ln \kappa} d_1(\kappa) = \beta_0 \quad (1.18)$$

$$\frac{d}{d \ln \kappa} d_2(\kappa) = 2\beta_0 d_1(\kappa) + \beta_1 \quad (1.19)$$

cuyas soluciones son

$$d_1(\kappa) = d_1 + \beta_0 \ln \kappa \quad (1.20)$$

$$d_2(\kappa) = d_2 + (2\beta_0 d_1(\kappa) + \beta_1) \ln \kappa + (\beta_0 \ln \kappa)^2 \quad (1.21)$$

se observa que  $d_1$  contiene  $\beta_0$ , y  $d_2$  contiene  $\beta_0$  y  $\beta_1$ , por lo tanto, podemos concluir que  $d_3$  será una función de  $(\beta_0, \beta_1$  y  $\beta_2)$  y así sucesivamente, obteniendo de esta manera, las relaciones generales para los coeficientes  $d_n$  de la función de Adler independiente del parámetro de renormalización  $\kappa$ .

## 1.4. Condensados en Cromodinámica Cúantica

### §Introducción

La principal confirmación de QCD proviene de considerar procesos a altas energías, donde se logra una alta precisión de los cálculos teóricos para comparación con los datos experimentales. En el dominio de bajas energías ( $Q^2 \sim 0.1 - 3 \text{ GeV}^2$ ) la situación es más compleja, ya que la constante de acoplamiento es grande,  $\alpha_s \sim 0.3 - 0.4$ , además se necesitan cálculos perturbativos de muchos loop. A diferencia de la Electrodinámica Cuántica, el vacío de QCD tiene una estructura no trivial: debido a efectos no perturbativos, las fluctuaciones distintas de cero de los campos glúonicos y de quarks persisten en el vacío de QCD. La compleja estructura del vacío de QCD se manifiesta en presencia de condensados análogos a los de la física de materia condensada (por ejemplo, la magnetización espontánea). Por lo tanto, en estos regímenes de QCD, hay que considerar los efectos no perturbativos y/o las correcciones de altos órdenes de  $\alpha_s$ .

Los condensados son muy importantes para explicar la estructura del vacío en QCD y también para la descripción de las propiedades de los hadrones a bajas energía. Los condensados, en particular los de quarks y los de gluones, se investigaron a partir de la década de 1970. Aquí, en primer lugar, se debe tener en cuenta el método de la regla de suma de Shifman, Vainshtein y Zakharov [24]. En los artículos entre 1970-1980, la constante de acoplamiento se tomó del orden  $\alpha_s(1 \text{ GeV}) \approx 0.3$ , por lo que era suficiente limitarse al primer orden en  $\alpha_s$ , incluso a veces, ignorar los efectos perturbativos en las regiones mayores a 1 GeV. Actualmente en los cálculos perturbativos se agregan los órdenes superiores ( $\alpha_s^2, \alpha_s^3, \alpha_s^4$ ) y, además, se han obtenido nuevos datos experimentales que son más precisos a bajas energías.

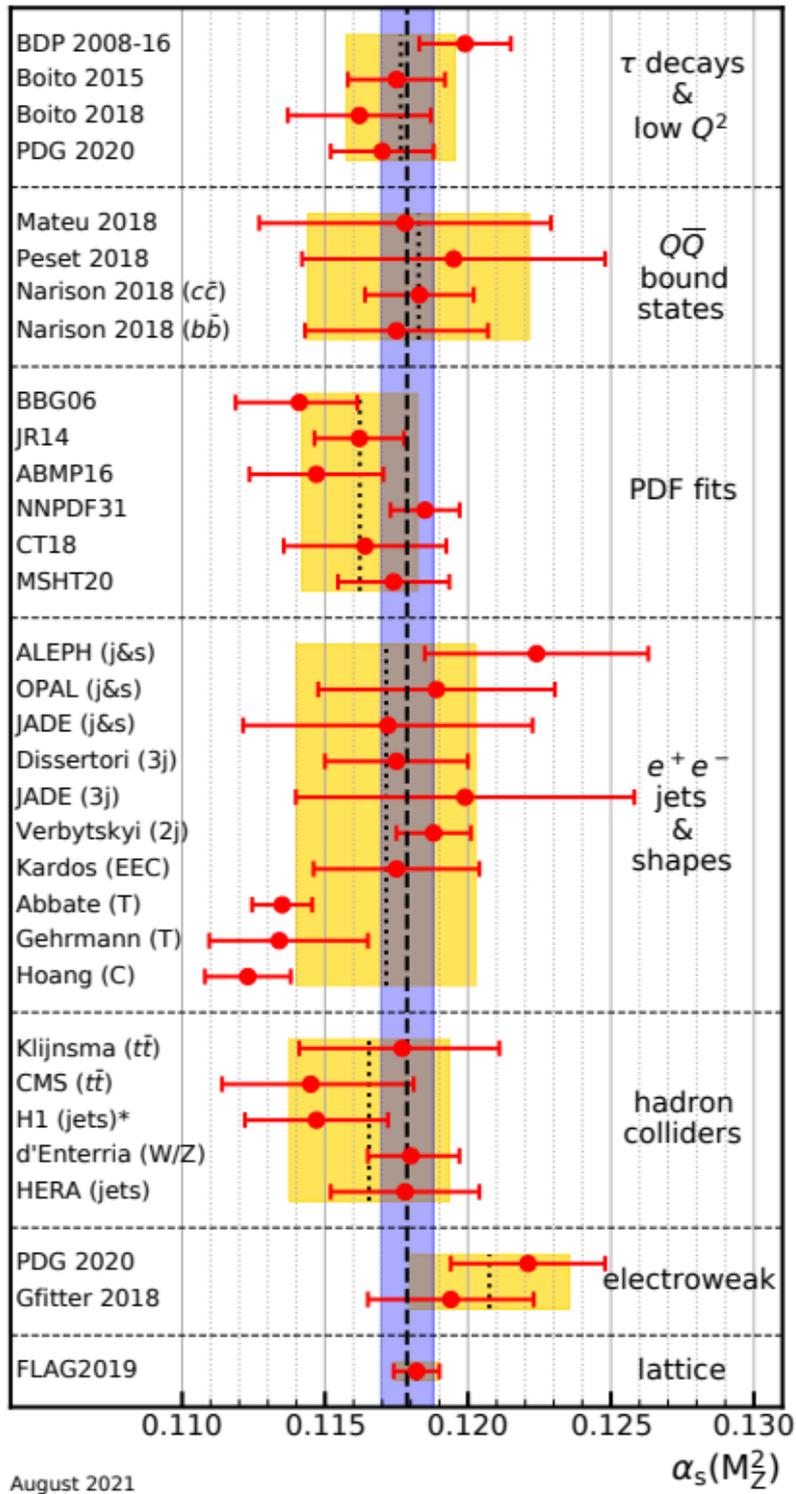


Figura 1.3: Los valores de  $\alpha_s(M_Z)$  extraídos de varios análisis y experimentos; la banda gris es el valor promedio mundial.

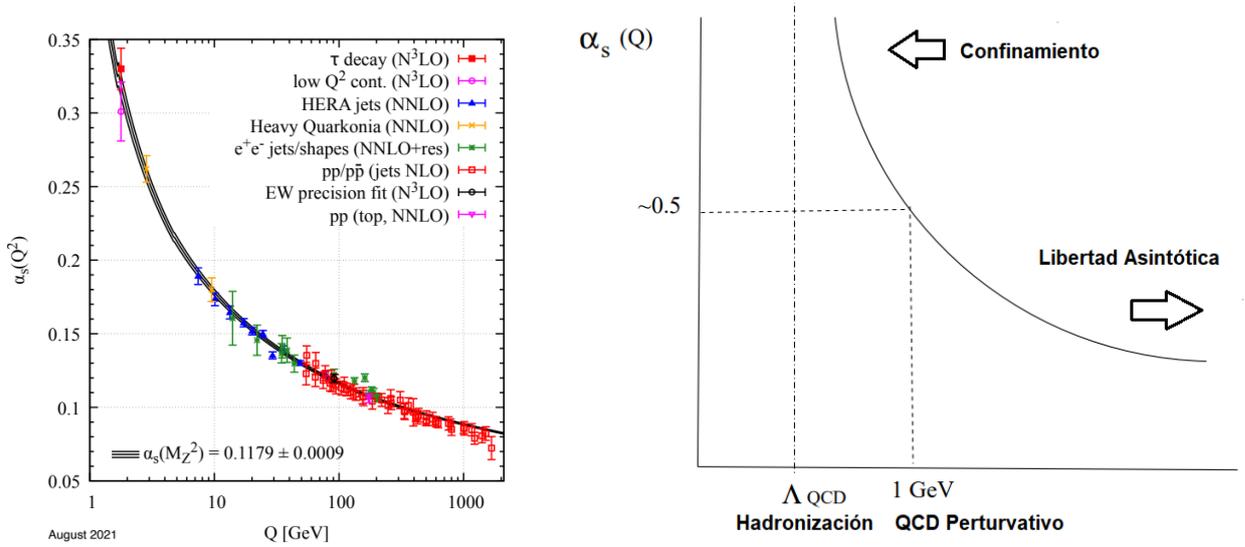


Figura 1.4: La curva representa el resultado de evolución RGE  $\left(Q^2 \frac{d\alpha_s}{dQ^2} = \beta_{\overline{MS}}(\alpha_s)\right)$

## §Propiedades Generales

En Teoría Cuántica de Campos (QFT), los *Condensados* usualmente significan valores de expectación del vacío de operadores locales ( $\langle 0|\mathcal{O}|0\rangle$ ). Y se consideran como efectos no perturbativos. En QFT, el correlador de corriente ( $\Pi_{AB}(x, y)$ ) de dos operadores locales cualquiera  $A(x), B(y)$  se escribe como

$$\Pi_{AB}(x, y) = \langle 0|T A(x)B(y)|0\rangle \quad (1.22)$$

Para cantidades tipo espacio [ $(x-y)^2 \leq 0$ ], y pequeños  $x-y$  [ $x-y \rightarrow 0$ ], puede representarse como una serie de condensados de operadores  $\mathcal{O}_i$  en expansión (OPE)

$$\Pi_{AB}(x-y) \equiv \langle 0|A(x)B(y)|0\rangle = \sum_i a_i(x-y) \langle 0|\mathcal{O}_i(0)|0\rangle \quad (1.23)$$

donde  $a_i(x-y)$  son coeficiente y provienen desde la teoría de perturbaciones. Aquí, se debe tener cuidado de separar las partes perturbativas y no perturbativas en la definición de los condensados. La expansión de la perturbación para  $a_i(x-y)$  es una serie asintótica y los términos que surgen al sumar dichas series pueden interpretarse como contribuciones de operadores  $\mathcal{O}_i$  de mayor dimensión. Estos coeficientes ( $a_i(x-y)$ ) pueden ser divergentes en el infrarrojo, lo que sería una señal de la aparición de un condensado adicional en el OPE. Además, el OPE para  $\Pi_{AB}(x-y)$  es probablemente una serie asintótica. Para evitar todos estos problemas en los cálculos prácticos, es necesario exigir una razonable convergencia de la OPE y la de serie de perturbaciones en el dominio de interés, para los primeros (pocos) términos considerados.

Separar las contribuciones perturbativas y no perturbativas  $a_i(x-y) \langle 0|\mathcal{O}_i(0)|0\rangle$  tiene cierta arbitrariedad. Generalmente [25, 26], esta arbitrariedad se evita introduciendo algún punto de normalización  $\mu^2$  ( $\mu^2 \sim 1 \text{ GeV}^2$ ). La integración sobre momentos virtuales de quarks y gluones en la región por debajo de  $\mu^2$  está relacionada con los condensados o efectos no perturbativos, por encima de  $\mu^2$ , con la teoría perturbativa. En esta teoría, la corrección a los condensados aparecen como una serie en la constante de acoplamiento  $\alpha_s$

$$\langle 0|\mathcal{O}_i|0\rangle_Q = \langle 0|\mathcal{O}_i|0\rangle_\mu \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(i)}(Q, \mu) \alpha_s^n(\mu) \quad (1.24)$$

La constante de acoplamiento  $\alpha_s$  en la parte derecha de (1.24) está normalizada en  $\mu$ . La parte izquierda de (1.24) representa el valor del condensado normalizado en el punto  $Q$ . Los coeficientes  $C_n^{(i)}(Q, \mu)$  pueden tener logaritmos  $\ln(Q^2/\mu^2)$  en potencias hasta  $n$  para  $C_n^{(i)}$ . La suma de los términos con las potencias más altas de los logaritmos conduce a la aparición de la *dimensión anómala* de los operadores, por lo que en forma general esto se puede escribir como

$$\langle 0|\mathcal{O}_i|0\rangle_Q = \langle 0|\mathcal{O}_i|0\rangle_\mu \left( \frac{\alpha_s(Q)}{\alpha_s(\mu)} \right)^{\gamma_i} \sum_{n=0}^{\infty} C_n^{(i)}(Q, \mu) \alpha_s^n(\mu), \quad (1.25)$$

donde  $\gamma_i$  son las dimensiones anómalas (números) y  $C_n^{(i)}$  ya no tienen logaritmos principales.

En sus propiedades físicas, los condensados en QCD tienen mucho en común con los condensados que aparecen en la física de la materia condensada: como el superfluido (condensado de Bose) en líquido  $He^4$ , condensado de pares de Cooper en superconductores, magnetización espontánea en imanes, etc. Por eso, análogamente a efectos en la física de la materia condensada, si se considera QCD a una temperatura finita  $T$ , con  $T$  aumentando hasta algún  $T = T_c$ , habrá una transición de fase y los condensados (o una parte de ellos) serán destruidos. En particular, tal fenómeno debe ser válido para los condensados responsables de la ruptura espontánea de la simetría: en  $T = T_c$  deben desaparecer y la simetría debe restaurarse (en principio, QCD puede tener algunas transiciones de fase).

Los condensados en QCD se dividen en dos tipos: los que conservan la quiralidad y los que violan la quiralidad. Las masas de los quarks ligeros  $u, d, s$  en el Lagrangiano de QCD son pequeñas comparadas con la escala característica de masas hadrónicas ( $M \sim 1$  GeV). Al despreciar las masas de quarks ligeros, el lagrangiano de QCD se vuelve invariante quiral, es decir, los quarks ligeros izquierdo y derecho no interactúan entre sí. En el caso de los condensados que violan la simetría quiral, estos son proporcionales a las masas de los quarks ligeros y además se hacen cero en el límite quiral ( $m_u = m_d = m_s = 0$ ). Dichos condensados se determinan en la teoría mucho mejor que aquellos que conservan la quiralidad.

Entre los condensados que violan la simetría quiral, el de mayor importancia es el condensado de quark-antiquarks  $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$  ( $q$  representa los campos de quarks  $u$  y  $d$ ).  $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle$  puede escribirse como

$$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle = \langle 0|\bar{q}_L q_R + \bar{q}_R q_L|0\rangle \quad (\propto m_u, m_d), \quad (1.26)$$

donde  $q_L, q_R$  son los campos de quarks izquierdo y derecho (en quiralidad). Como se desprende de (1.26), un valor distinto de cero de un condensado de quarks significa la transición de los campos de quarks de la izquierda a los de quiralidad derecha y si no tiene un valor pequeño significa una violación de la simetría quiral en QCD. (Si la simetría quiral no se viola explícitamente, entonces  $m_u, m_d$  son pequeñas,  $\langle 0|\bar{q}q|0\rangle \sim m_u, m_d$ ). En virtud de la invariancia de isospín:

$$\langle 0|\bar{u}u|0\rangle = \langle 0|\bar{d}d|0\rangle. \quad (1.27)$$

Para un condensado de quarks se cumple la relación Gell-Mann-Oakes-Renner [27]

$$\langle 0|\bar{q}q|0\rangle = -\frac{1}{2} \frac{m_\pi^2 f_\pi^2}{m_u + m_d}. \quad (1.28)$$

Aquí  $m_\pi, f_\pi$  simboliza a la masa y la constante de decaimiento del pión ( $\pi$ ) ( $m_\pi = 140 \text{ MeV}^2, f_\pi = 131 \text{ MeV}^2$ );  $m_u$  y  $m_d$  son las masas de los quarks u y d. La relación (1.28) se obtiene a primer orden en  $m_u, m_d, m_s$  (para una derivación ver [28]). Para estimar el valor del condensado de quarks, se pueden usar los valores de masas de quarks,  $m_u + m_d = 9.6 \text{ MeV}$ , obteniendo:

$$\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle = -(260 \text{ MeV})^3 \quad (1.29)$$

Vale subrayar, que la masa  $m_\pi$  desaparece cuando no hay quiebre explícito de la simetría quiral, es decir,  $m_\pi \rightarrow 0$  cuando  $m_u, m_d \rightarrow 0$ , es decir, el valor no cero, de (1.29) señala el rompimiento espontáneo (dinámico) de la simetría quiral.

Por otro lado, la violación espontánea de la simetría quiral en QCD tiene como consecuencia la existencia de bariones y mesones masivos ( $m \approx 1 \text{ GeV}$ ). De hecho, en la teoría quiral todos los estados fermiónicos deberían ser sin masa. Obviamente, los bariones, en particular los núcleos, no poseen esta propiedad. Se puede demostrar [28, 29] que ambos fenómenos —la presencia del condensado de quarks que violan la simetría quiral y la existencia de bariones masivos— están estrechamente relacionados entre sí. De acuerdo con el teorema de Goldstone, la violación espontánea de la simetría conduce a la aparición de partículas sin masa en el espectro de los bosones de Goldstone. En QCD, los bosones de Goldstone se pueden identificar con un triplete de mesones con  $m_u, m_d \rightarrow 0, m_s = 0$  (simetría SU(2)) o con un octeto de mesones pseudoscalares ( $\pi, \kappa, \eta$ ) dentro del límite  $m_u, m_d, m_s \rightarrow 0$  (simetría SU(3)). La presencia de bosones de Goldstone en QCD hace posible formular una teoría efectiva quiral de interacciones fuertes de baja energía (ver revisiones [28, 30, 31]). Estos bosones de Goldstone son sin masa, pero por el efecto del quiebre explícito de la simetría quiral, obtienen una masa pequeña ( $m \approx 0.1 \text{ GeV}$ ).

Un condensado de quarks puede considerarse como un parámetro de orden en QCD correspondiente a la violación explícita y espontánea de la simetría quiral. A la temperatura de restauración de la simetría quiral  $T = T_c$  debe desaparecer. La investigación de la dependencia de la temperatura del condensado de quarks en la teoría quiral efectiva [32] muestra que  $\langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle$  desaparece en  $T = T_c \approx 150 - 200 \text{ MeV}$ . También se obtuvieron indicaciones similares en los cálculos de Lattice [33].

Por lo tanto, el condensado de quarks: (1) tiene las dimensiones más bajas ( $d = 3$ ) en comparación con otros condensados en QCD; (2) determina masas de bariones usuales (no extraños); (3) es el parámetro de orden en la transición de fase entre las fases de simetría quiral violada y restaurada. Estos tres hechos determinan su importante papel en la física hadrónica de baja energía.

El siguiente condensado en dimensión ( $d = 5$ ) que viola la simetría quiral es el condensado quark gluónico:

$$g \left\langle 0 \left| \bar{q} \sigma_{\mu\nu} \frac{\lambda^n}{2} G_{\mu\nu}^n q \right| 0 \right\rangle \equiv m_0^2 \langle 0 | \bar{q}q | 0 \rangle \quad (1.30)$$

Aquí  $G_{\mu\nu}^n$  es el tensor de intensidad de campo gluónico,  $\lambda^n$  son las matrices de Gell-Mann,  $\sigma_{\mu\nu} = (i/2)(\gamma_\mu \gamma_\nu - \gamma_\nu \gamma_\mu)$ . El valor del parámetro  $m_0^2$  se encontró en [34] a partir de las reglas de suma para resonancias bariónicas:

$$m_0^2 = 0.8 \pm 0.2 \text{ GeV}^2 \quad (1.31)$$

El mismo valor de  $m_0^2$  se encontró a partir del análisis de los mesones B utilizando las reglas de suma QCD [35], cerca del valor (1.31) de  $m_0^2 = 1 \text{ GeV}^2$  calculado dentro del modelo de corre-

ladores de campo [36]. La dimensión anómala del operador en (1.30) es pequeña [37]. Por tanto, la dimensión anómala de  $m_0^2$  es aproximadamente igual a  $\gamma_m = -4/9$ .

Consideremos ahora los condensados que conservan la quiralidad. Aquí es fundamental el condensado gluón-gluón:

$$\left\langle 0 \left| \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^n G_{\mu\nu}^n \right| 0 \right\rangle \quad (1.32)$$

Dado que el condensado gluónico es proporcional al valor de expectación del vacío de la traza del tensor de energía-momento  $\theta_{\mu\nu}$ , su dimensión anómala es cero. La existencia de un condensado gluónico fue indicada por primera vez por Shifman, Vainshtein y Zakharov [24]. Ellos también obtuvieron (estimaron) su valor numérico de las reglas de suma para charmonium:

$$\left\langle 0 \left| \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^n G_{\mu\nu}^n \right| 0 \right\rangle = 0.012 \text{ GeV}^4 \quad (1.33)$$

Como demostraron los mismos autores, el valor distinto de cero y positivo del condensado gluónico significa que la energía del vacío es negativa en QCD: la densidad de energía del vacío en QCD viene dada por  $\epsilon = -(9/32) \langle 0 | \frac{\alpha_s}{\pi} G^2 | 0 \rangle$ . La persistencia del campo de quarks en el vacío destruye (o suprime) el condensado. Por lo tanto, si un quark se incrusta en el vacío, se produce su excitación, es decir, un aumento de energía. De este modo, es posible explicar el bag model en QCD: en el dominio alrededor del quark aparece un exceso de energía, que se trata como la densidad de energía B en bag model (aunque la magnitud de B probablemente no concuerde con la valor de  $\epsilon$ ). En [24] los efectos perturbativos se tuvieron en cuenta solo en el orden  $\alpha_s$ , tomando el valor de  $\alpha_s$  unas dos veces menor que el actual. Más tarde se hicieron muchos intentos para determinar el valor del condensado gluónico mediante el estudio de varios procesos y la aplicación de varios métodos. Pero los resultados de diferentes enfoques fueron inconsistentes entre sí y con (1.33) y, a veces, la diferencia fue incluso muy grande: los valores del condensado parecían ser varias veces mayores.

El condensado de dimensión  $d = 6$  es de la forma

$$g^3 f^{abc} \left\langle 0 \left| G_{\mu\nu}^a G_{\nu\lambda}^b G_{\lambda\mu}^c \right| 0 \right\rangle \quad (1.34)$$

( $f^{abc}$  son constantes de estructura del grupo SU(3)). No existen métodos fiables para determinarlo a partir de datos experimentales. Solo hay una estimación [38] que se deriva del modelo de un gas de instantón diluido:

$$g^3 f^{abc} \left\langle 0 \left| G_{\mu\nu}^a G_{\nu\lambda}^b G_{\lambda\mu}^c \right| 0 \right\rangle \approx \frac{4}{5} (12\pi^2) \frac{1}{\rho_c^2} \left\langle 0 \left| \frac{\alpha_s}{\pi} G_{\mu\nu}^2 \right| 0 \right\rangle, \quad (1.35)$$

donde  $\rho_c$  es el radio efectivo del instantón en el modelo (para la estimación se puede tomar  $\rho_c \sim (1/3 - 1/2) \text{ fm}$ ).

Finalmente, hay pocos condensados de gluones y quarks-gluones de dimensión 8. (La lista completa se puede encontrar en [39].) Como regla general, se usa la hipótesis de factorización del vacío para su estimación. La otra forma para estimar los valores de estos condensados es utilizar el modelo de gas diluido de instantones. Sin embargo, este último, para algunos condensados, da resultados un orden de magnitud mayor que los métodos de factorización. Se presentan argumentos [40] que indican que el modelo de gas instantón sobreestima los valores de

condensados de gluones de  $d = 8$ . Por lo tanto, las estimaciones basadas en la hipótesis de factorización del vacío son aquí más confiables.

## 1.5. Reglas de Suma

Reglas de Suma es uno de los métodos más exitosos que hay para obtener información en QCD. El éxito y la fiabilidad de este tratamiento se debe a las innumerables predicciones y mejoras a resultados ya conocidos. En esencia, las reglas de suma nos permite estudiar la materia hadrónica a través de interacción entre constituyentes fundamentales (quark y gluones). La medición de números cuánticos, como la paridad o el espín para bariones y mesones, y la extracción de valores de parámetros como los condensados o la constante de acoplamiento, son pruebas de que la relación entre experimento y teoría nos permite entender la fenomenología de hadrones.

El foco de las Reglas de Suma está en la función de correlación (o correlador), la cual está compuesta por operadores de corrientes locales. La construcción de estos operadores es por medio de campos de quark y/o gluones. La idea es generar una apropiada función de correlación que nos permita una correspondencia entre los grados de libertad de los hadrones y los grados de libertad de quarks y/o gluones. Esta descripción, hecha en terminos de los grados de libertad, es a través de una expansión del producto de operador (OPE). Además, para lograr esta correspondencia, la función de correlación aparece como su discontinuidad, la función espectral, que presenta los datos experimentales hadrónicos centrales que se usan en el método. La equivalencia entre QCD y la física hadrónica (función espectral) es a través el Teorema de Residuos de Cauchy en el plano complejo, utilizando el comportamiento holomorfo del correlador en el plano de los momentos  $Q^2$ .

Como ya mencionamos en el capítulo 1.4, la esencia de OPE es separar la física de corta y larga distancia. En QCD, esta separación es entre la física perturbativa [coeficientes de Wilson  $C_n(Q^2, \mu^2)$ ], y la física no perturbativa [condensados ( $\hat{\mathcal{O}}_n(\mu^2)$ )]. En principio, estos coeficientes pueden ser calculados por métodos de teoría de perturbaciones, mientras que los condensados en la práctica, suelen determinarse fenomenológicamente a partir de un conjunto de reglas de suma. Principalmente, OPE es una expansión de corta distancia, y a cualquier orden finito, solo puede describir la función de correlación con precisión razonable sólo para momentos espaciales suficientemente grandes.

Existen limitaciones a la Reglas de Sumas, las cuales hay que considerar cuando se aplican a nuevos dominios; por ejemplo, no se hacen predicciones directas de observables experimentales. Es necesario hacer suposiciones dependientes del modelo, como aproximaciones de densidad local, para relacionar los cálculos de las propiedades de la materia nuclear con observables experimentales de núcleos finitos.

Otra limitación en las Reglas de Sumas, es que la información espectral que usamos es necesariamente aproximada y no se puede mejorar sistemáticamente. Por ejemplo, la extracción de masas hadrónicas con una fiabilidad superior a  $\sim 100$  MeV normalmente no es posible. Por lo tanto, el enfoque no es lo suficientemente preciso para realizar cálculos detallados del estado fundamental de la materia nuclear a una escala de unos pocos MeV. Otra limitación es el hecho de que en las Reglas de sumas uno no resuelve dinámicamente el estado fundamental de la teoría, más bien, uno caracteriza el estado fundamental: la descripción QCD del estado fun-

damental se caracteriza por varios valores esperados de operadores compuestos. Por lo tanto, el enfoque no necesita ser lo suficientemente preciso para calcular el estado fundamental de manera confiable; siempre que se tenga una forma razonable de extraer fenomenológicamente estos condensados, se puede proceder a estudiar las características cualitativas de las excitaciones sin resolver realmente el problema del estado fundamental.

Aunque se puede evitar resolver el estado fundamental de la materia nuclear, la naturaleza aproximada del enfoque de las Reglas de Sumas, significa que se debe tener mucho cuidado si se usa el método para extraer cantidades que son pequeñas en la escala de la física hadrónica. Por lo tanto, el uso de la técnica para describir detalles finos de la física nuclear de baja energía debe depender de la construcción de las Reglas de Sumas, confiables para propiedades nucleares que sean mucho más precisas (en términos absolutos) que las Reglas de Sumas, a nivel hadrónico. Si esto es posible o no, sigue siendo una pregunta abierta, pero vemos cualquier resultado para cantidades a esta escala con cierto escepticismo. De hecho, se puede plantear la cuestión de si existen propiedades en la física nuclear de baja o intermedia energía cuya escala natural sea lo suficientemente grande como para hacer razonable el enfoque de las Reglas de Sumas.

## 1.6. Algunos Aspectos Experimentales

Esta sección está enfocada en dar una descripción general sobre los aspectos experimentales que se llevan a cabo en ALEPH. El detector ALEPH fue construido para medir eventos creados por colisiones de electrones y positrones en LEP (CERN). Operó de 1989 a 1995 en el rango de energía de alrededor de 91 GeV, que es la energía provista para la formación de la partícula  $Z$  y más tarde desde 1995 a 2000 por encima del umbral de producción de pares  $W$  (hasta 200 GeV).

El detector de ALEPH (ver figura 1.5), fue planeado y construido con varias especificaciones: medir momentos de partículas con carga, medir la energía de partículas neutras en calorímetros, identificar los tres sabores de leptones e identificar la trayectoria del leptón tau. El detector de ALEPH se construyó por capas cilíndricas alrededor de un tubo de haz de berilio, cuyo punto de colisión electrón-positrón está en el centro. Hacia el exterior del tubo, ALEPH poseía un detector de vértices compuesto por dos capas de microtiras de silicio de doble cara; una cámara de deriva interna que proporcionó ocho coordenadas de seguimiento y una señal de activación para partículas cargadas desde el punto de interacción; una cámara de proyección de tiempo para detectar partículas cargadas; un calorímetro electromagnético para identificar electrones y fotones; un calorímetro de hadrones para detectar hadrones; y una bobina superconductora para generar el campo magnético de 1.5 Tesla necesario para determinar la carga de una partícula y permitir mediciones del momento. Los detectores ATLAS y CMS que aparecieron más tarde en el Gran Colisionador de Hadrones siguen una configuración de capa de cebolla similar a ALEPH.

Los números cuánticos medidos en los hadrones finales permiten comprender las corrientes vectorial y axial, y también separar los sectores Cabibbo permitido ( $\bar{d}u$ ) y Cabibbo suprimido ( $\bar{s}u$ ). Por lo tanto, el leptón  $\tau$  proporciona un excelente laboratorio para estudiar la dinámica de los bosones de pseudo Goldstone ( $\pi$ ,  $K$ ,  $\eta$ ) en la región de resonancia, alrededor de 1 GeV.

Las distribuciones inclusivas miden directamente las funciones espectrales de los correladores de dos puntos, las corrientes vector y axial. Las integrales ponderadas de estas funciones espectrales se pueden evaluar teóricamente con precisión con técnicas de expansión de producto de operador (OPE) de corta distancia. Las contribuciones perturbativas dominantes se conocen actualmente con una precisión hasta cuatro loop, es decir, en  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ , mientras que las

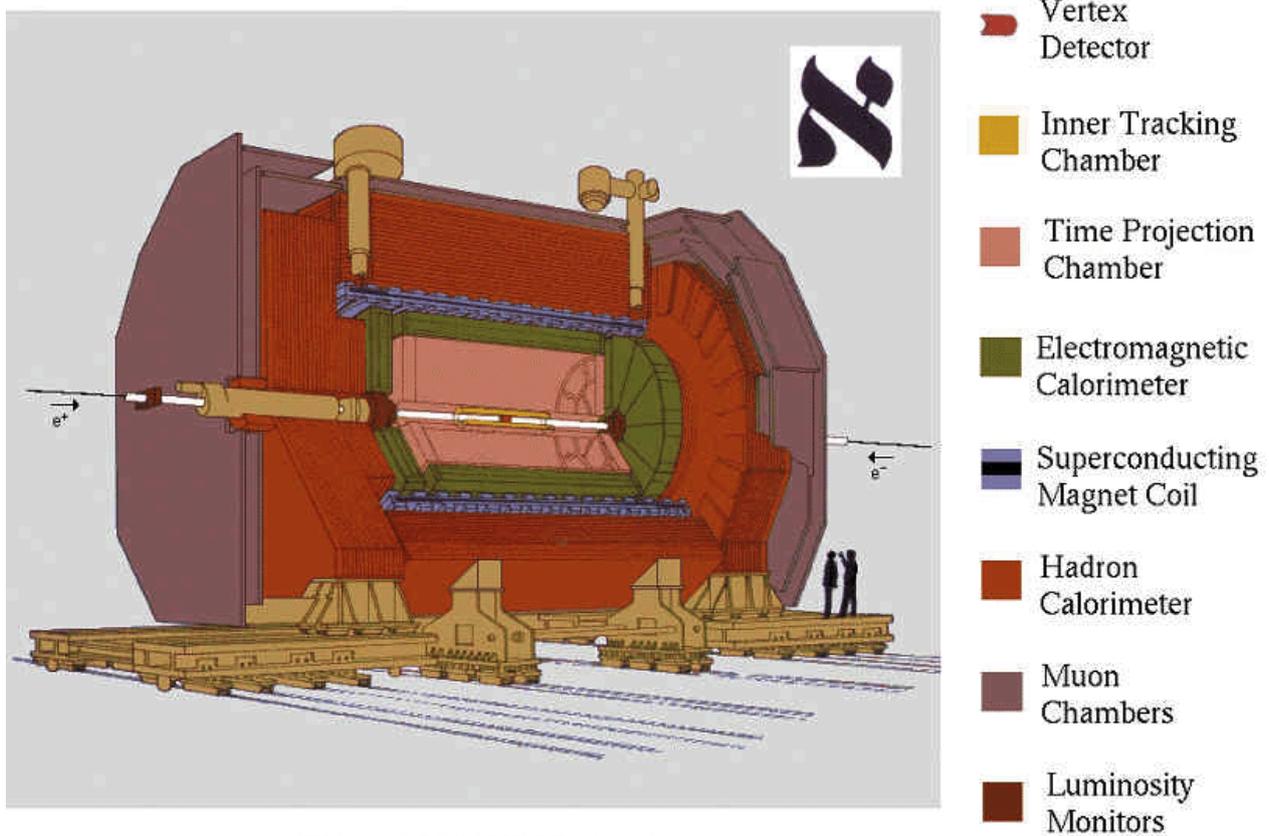


Figura 1.5: Esquema del detector ALEPH

correcciones no perturbativas son suprimidas por al menos cuatro potencias de la masa  $\tau$  (la potencia exacta depende de la función de peso que uno escoja).

Las mediciones precisas de las distribuciones hadrónicas espectrales permitirían una mejor precisión de valores extraídos de las correcciones no perturbativas. Se necesita especialmente una muestra de datos muy grande para acceder al rango más alto de energías cinemáticamente permitidas, donde el gran tamaño de los errores experimentales dificulta la precisión de los análisis teóricos actuales.

Estas distribuciones espectrales también contienen información valiosa sobre la estructura no trivial del vacío QCD. La diferencia de las funciones de correlación de corriente vectorial y de la corriente axial es un objeto puro no perturbativo (la teoría de la perturbación da una contribución nula a todos los órdenes en  $\alpha_s$ ) que es sensible entre otras cosas, a la ruptura de la simetría quiral QCD. Los datos actuales se han utilizado para extraer varios parámetros relevantes que caracterizan el vacío QCD y el acoplamiento a baja energía de la teoría de la perturbación.

# Capítulo 2

## Fundamentos Teóricos

### 2.1. Introducción

Uno de los más importante desafíos de la física es la determinación de parámetros fundamentales. En el caso de la interacción fuerte, el principal parámetro es la constante de acoplamiento  $a(Q^2) \equiv \alpha_s(Q^2)/\pi$ , la cual depende del cuadrado del momento  $Q^2 (\equiv -q^2)$  que es la escala característica del proceso. El acoplamiento está bien determinado para altas energías ( $Q^2 > 1 \text{ GeV}^2$ ) con una alta precisión de los experimentos y la teoría. Por otra parte, la determinación a bajas energías ( $Q^2 \sim 1 \text{ GeV}^2$ ) es un buen test para determinar la consistencia de la teoría. Estudiamos aquí las cantidades relacionadas con el decaimiento semihadrónico del leptón  $\tau$ , ya que existen resultados experimentales de alta precisión disponibles de la colaboración ALPEH [41, 42, 43, 44]. Tanto los resultados experimentales como los teóricos están relacionados con la función de correlación  $\Pi(Q^2)$  para corrientes de quarks ( $u$  y  $d$ ); los resultados experimentales se dan en términos de la función espectral  $\omega(\sigma) \propto \text{Im}\Pi(-\sigma - i\epsilon)$ , mientras que los resultados teóricos generalmente se dan en términos de integrales de contorno de la derivada de la función de correlación,  $\mathcal{D}(Q^2) \propto d\Pi(Q^2)/d\ln Q^2$ , conocida como función de Adler.

Es de particular interés estudiar el decaimiento inclusivo para el leptón  $\tau$ , ya que este proceso prueba la dinámica infrarroja para hadrones con energía por debajo de la masa del leptón  $\tau$  ( $m_\tau \sim 1.7 \text{ GeV}$ ) y entrega resultados experimentales bastante exactos sobre la consistencia del modelo estandar a altas energías. El observable físico que podemos medir experimentalmente es el ancho de decaimiento sin el quark extraño para el canal V+A

$$R_\tau = \frac{\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau \text{hadrons})}{\Gamma(\tau \rightarrow \nu_\tau e^- \bar{\nu}_e)} \quad (2.1)$$

$$= 3|V_{ud}|^2 S_{\text{EW}} (1 + \delta'_{\text{EW}} + r_\tau) \quad (2.2)$$

$S_{\text{EW}} = 1.0198 \pm 0.0006$  [45], y  $\delta'_{\text{EW}} = 0.0010$  [46] son correcciones electrodébiles, y  $|V_{ud}|$  es el elemento de matrix CKM. Además, la parte canónica de QCD en  $R_\tau$  es la cantidad  $r_\tau = r_\tau^{(D=0)} + \delta r_\tau(m_{u,d} \neq 0) + \sum_{D \geq 4} r_\tau^{(D)}$ , donde  $\delta r_\tau(m_{u,d} \neq 0) \approx -8\pi^2 f_\pi^2 m_\pi^2 / m_\tau^4 \approx -0.0026$  (con  $f_\pi = 0.1305 \text{ GeV}$ ), cf. [47, 48, 49, 50]

Las integrales de contorno específicas que involucran la función de Adler nos dan varias reglas de suma. La función de Adler se calculó mediante técnicas de perturbación de QCD hasta  $\mathcal{O}(\alpha_s^4)$ , cf. [51, 52, 53]. Determinar el acoplamiento a partir de tales reglas de suma, es decir, en momentos bajos  $\sim m_\tau$  ( $\sim 1.7 \text{ GeV}$ ), nos permite ver la confiabilidad de la teoría, ya que podemos comparar el valor extraído de  $\alpha_s(m_\tau^2)$  con las determinaciones conocidas en altas energías

a través de la evolución de la ecuación de grupo de renormalización (RGE) (ver, por ejemplo [54, 55, 56]).

Para las expresiones teóricas de las reglas de suma, se utiliza la expansión del producto del operador (OPE) para el correlador de corriente de quarks. Esto implica que las reglas de suma tienen la parte perturbativa (dimensión  $D = 0$ ) y las correcciones no perturbativas ( $D > 0$ ), donde estas últimas suelen ser pequeñas, como en el caso de  $R_\tau$  ( $r_\tau$ ) [49, 57].

En nuestros trabajos previos [58, 59], usamos la Regla de Suma Borel-Laplace doble-pinch para los datos de ALEPH en el canal semihadrónico del decaimiento  $\tau$ . En el presente trabajo, mejoramos nuestros trabajos previos, incorporando en el OPE truncado (con  $D \leq 6$ ) para la función de Adler, el conocimiento actual sobre las dimensiones anómalas efectivas de orden principal  $\gamma^{(1)}(\mathcal{O}_D^{(j)})$ , de los operadores de dimensión  $\mathcal{O}_D^{(j)}$  con  $D = 4$  y  $D = 6$  en el OPE de la función de Adler para el canal (V+A). Mientras que el operador  $D = 4$  (condensado de gluón) tiene  $\gamma^{(1)}(\mathcal{O}_4) = 0$ , por otra parte, hay en total nueve operadores no quirales  $D = 6$  para la función de Adler de canal (V+A): dos operadores tienen el valor más bajo casi igual entre sí  $\gamma^{(1)}(\mathcal{O}_6) \approx 0.5$ , y otros dos tienen el siguiente valor  $\gamma^{(1)}(\mathcal{O}_6) \approx 1.4$ , [60] (cf. también [61, 62, 63]). Si ignoramos los otros operadores  $D = 6$ , entonces la contribución  $D=6$  OPE a la función de Adler en el canal (V+A) es

$$d(Q^2)_{D=6} = \frac{6\pi^2}{(a(Q^2))^3} \left[ \langle \mathcal{O}_6^{(2)} \rangle (a(Q^2))^{\kappa^{(2)}} + \langle \mathcal{O}_6^{(1)} \rangle (a(Q^2))^{\kappa^{(1)}} \right]. \quad (2.3)$$

En nuestro trabajo previo [59], usamos  $\kappa^{(2)} = \gamma^{(2)}(\mathcal{O}_6^2)/\beta_0 = -1$  y  $\kappa^{(1)} = \gamma^{(1)}(\mathcal{O}_6^1)/\beta_0 = 0$ , que son los valores en el límite de large- $\beta_0$  (LB). Mientras que en el trabajo actual [64], usamos  $\kappa^{(2)} = \gamma^{(1)}(\mathcal{O}_6^2)/\beta_0 = 0.222$  y  $\kappa^{(1)} = \gamma^{(1)}(\mathcal{O}_6^1)/\beta_0 = 0.625$ , los cuales se consideran como valores más allá de large- $\beta_0$  (bLb).

Truncamos el OPE en  $D = 6$ , suponiendo que no se necesitan más términos. Además, para los términos  $D > 6$  no conocemos los valores de las dimensiones anómalas. Usaremos para la contribución  $D = 0$  una función de Adler extendida  $d(Q^2)_{D=0}$  que se basa en un Ansatz motivado por renormalones para la transformada de Borel  $B[d](u)$  que incluye solo los dos primeros renormalones infrarojos (IR)  $u = 2, 3$ , (lo que refleja la estructura OPE truncada con contribuciones  $D = 4, 6$ ) y el primer Renormalón ultravioleta (UV),  $u = -1$ , [65].

La evaluación de la parte perturbativa ( $D = 0$ ) de las reglas de suma se basa en resumaciones y truncaciones en potencias de  $a$  ( $\equiv \alpha_s/\pi$ ). Estas resumaciones requieren la integración de la serie de perturbaciones en un contorno circular en el plano complejo  $Q^2$  con radio  $|Q^2| = \sigma_{\max}$  ( $\sim m_\tau^2$ ), que es el límite superior del bins de energía para ALEPH con mejor medición ( $\sigma_{\max} \equiv \sigma_m = 2.8 \text{ GeV}^2$ ), donde  $\sigma$  denota el cuadrado de la masa invariante del producto hadrónico en las desintegraciones  $\tau$ . Debido a las truncaciones, diferentes formas de evaluación dan resultados diferentes; en nuestro estudio, nos enfocaremos en tres de ellos. El primero es Fixed-Order (FO), donde el acoplamiento en la función de Adler es una expansión en Taylor alrededor del punto espacial  $Q^2 = \sigma_{\max} > 0$ . Para FO se realiza una serie en potencias y truncada  $a(\sigma_{\max})^{[N_t]}$ . Otro método de evaluación es Contour-Improved (CI), que evoluciona  $a(\sigma_m)$  a través de RGE a lo largo del contorno  $Q^2 = \sigma_{\max} e^{i\phi}$ . Y por último, tenemos Principal-Value (PV), donde la transformación inversa de Borel se aplica a la parte singular de la transformada de Borel de la función de Adler  $B[d](u)$ , y agrega un polinomio de corrección  $\delta d(\sigma_m e^{i\phi})_{D=0}^{N_t}$  truncado en  $a(\sigma_m)^{[N_t]}$ , donde el último polinomio está mayormente libre de los efectos de renormalón; posteriormente, tal expresión se usa en la integral de contorno de la regla de la suma.

La extracción de  $\alpha_s(m_\tau^2)$  desde los datos para el decaimiento  $\tau$  se realizó en el pasado en la literatura con los enfoques FO y CI, dando resultados diferentes. La tendencia muestra que CI da valores más altos de  $\alpha_s(m_\tau^2)$  que FO, incluso si los efectos de la violación de la dualidad se tienen en cuenta explícitamente con un modelo [43, 53, 66, 67]. La discrepancia entre CI y FO se discutió en [68, 69] en la aproximación large- $\beta_0$  (LB) y luego más allá de LB (bLB) en un modelo renormalón. Los autores de [68, 69] argumentaron que el enfoque FO truncado en la regla de la suma  $r_\tau$  tiene en cuenta correctamente algunas cancelaciones de las principales contribuciones de renormalón a la función de Adler. Se presentaron argumentos teóricos para estas cancelaciones en la aproximación LB. Además, dicha cancelación no tiene lugar en el enfoque de CI truncado. Más allá de LB (bLB), dichas cancelaciones se demostraron en un enfoque con una transformada de Borel modificada en un esquema de renormalización específico [70]. En nuestro trabajo anterior [58], presentamos argumentos de que dichas cancelaciones tienen lugar en reglas de suma a nivel de (bLB) en cualquier esquema de renormalización cuando la contribución  $D = 0$  a la regla de suma se escribe en términos de una serie de derivadas logarítmicas de  $a(\sigma_{\max})$  (cf. Apéndice de [58]).

El objetivo principal de este trabajo es determinar el valor del acoplamiento  $\alpha_s(m_\tau^2)$ . En nuestro enfoque con las reglas de suma de Borel-Laplace doble-pinch, extraemos para cada índice de truncación  $N_t$  los valores correspondientes de  $\alpha_s$  y de los tres condensados  $\langle \mathcal{O}_4 \rangle$ ,  $\langle \mathcal{O}_6^1 \rangle$ , y  $\langle \mathcal{O}_6^2 \rangle$ , en cada uno de los métodos (FO, PV y CI). El valor óptimo de cada truncación  $N_t$ , en cada método, se fija entonces requiriendo que las reglas de suma de momentos (doble pinch)  $a^{(2,0)}(\sigma_m)$  y  $a^{(2,1)}(\sigma_m)$  sean localmente insensibles a la variación de  $N_t$  alrededor del valor de  $N_t$ .

Este trabajo puede considerarse como una continuación y mejora de nuestro análisis anterior [58], donde ahora se usa la forma mejorada (2.3) de los términos OPE; además, la generación de los coeficientes de perturbación de orden superior de la extensión de la función de Adler por renormalón se realiza ahora de una manera más realista.

## 2.2. Marco Teórico General

La función de Adler  $\mathcal{D}(Q^2)$  se define como una derivada logarítmica de la función de polarización de corrientes de quarks  $\Pi(Q^2)$

$$\mathcal{D}(Q^2) \equiv -2\pi^2 \frac{d\Pi(Q^2)}{d\ln Q^2}. \quad (2.4)$$

Consideraremos el canal total (V+A), es decir,  $\Pi(Q^2)$  será la función de polarización del canal total (V+A)

$$\Pi(Q^2) = \Pi_V^{(1)}(Q^2) + \Pi_A^{(1)}(Q^2) + \Pi_A^{(0)}(Q^2). \quad (2.5)$$

En esta suma V+A (2.5), el término  $\Pi_V^{(0)}(Q^2)$  da una contribución insignificante (a las reglas de suma) porque  $\text{Im}\Pi_V^{(0)}(-\sigma + i\epsilon) \propto (m_d - m_u)^2$ . Además, tampoco incluiremos las correcciones  $\mathcal{O}(m_{u,d}^2)$  y  $\mathcal{O}(m_{u,d}^4)$  por ser numéricamente despreciables. Las funciones  $\Pi_J^{(i)}$  ( $J = V, A$  y  $i = 0, 1$ ) caracterizan el correlador de corriente de quarks

$$\Pi_{J,\mu\nu}(q) = i \int d^4x e^{iq \cdot x} \langle T J_\mu(x) J_\nu(0)^\dagger \rangle = (q_\mu q_\nu - g_{\mu\nu} q^2) \Pi_J^{(1)}(Q^2) + q_\mu q_\nu \Pi_J^{(0)}(Q^2), \quad (2.6)$$

donde  $J_\mu$  son las corrientes de los quarks up-down  $J_\mu = \bar{u}\gamma_\mu d$  y  $\bar{u}\gamma_\mu\gamma_5 d$  para  $J = V, A$ , respectivamente. Recordemos que  $q^2 \equiv -Q^2$  es el cuadrado de la cantidad de momento transferido,  $q^2 = (q^0)^2 - \vec{q}^2$ .

La expresión teórica generalmente utilizada de la función de polarización tiene la siguiente forma OPE [71]:

$$\Pi_{\text{th}}(Q^2; \mu^2) = -\frac{1}{2\pi^2} \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) + \Pi(Q^2)_{D=0} + \sum_{p \geq 2} \frac{\langle O_{2p} \rangle}{(Q^2)^p} (1 + \mathcal{O}(a)). \quad (2.7)$$

Aquí,  $\mu^2$  es la escala de renormalización, y  $\langle O_{2p} \rangle (\equiv \langle O_{2p} \rangle_{V+A})$  son condensados (valores de expectación del vacío) de dimensión  $D = 2p$  ( $\geq 4$ ), para todo el canal V+A. Este OPE suele utilizarse en análisis numéricos, cf. [58, 67, 72, 73, 74, 75, 76, 77]. La función de Adler correspondiente (2.4) es entonces

$$\mathcal{D}_{\text{th}}(Q^2) \equiv -2\pi^2 \frac{d\Pi_{\text{th}}(Q^2)}{d \ln Q^2} = 1 + d(Q^2)_{D=0} + 2\pi^2 \sum_{p \geq 2} \frac{p \langle O_{2p} \rangle}{(Q^2)^p}. \quad (2.8)$$

Sin embargo, para  $D (\equiv 2p) \geq 6$ , la expansión OPE (2.7) [ $\longleftrightarrow$  (2.8)] no es exactamente correcta. Es decir, para cada dimensión  $D = 2p$  existen en general varios operadores D-dimensionales  $\mathcal{O}_D^j$  que van acompañados de potencias  $a^{k_D^{(j)}}$  donde  $k_D^{(j)} = \gamma^{(1)}(\mathcal{O}_D^{(j)})/\beta_0$ . Aquí,  $\gamma^{(1)}(\mathcal{O}_D^{(j)})$  es la dimensión anómala efectiva para el orden principal D-dimensional del operador  $\mathcal{O}_D^{(j)}$ , y  $\beta_0$  es el coeficiente de la función  $\beta_0$  a un loop del acoplamiento  $a(Q^2)$ . Esto significa que la forma general de la contribución D-dimensional al OPE de la función de Adler tiene la forma

$$\mathcal{D}_{\text{th}, D=2p}(Q^2) = 2\pi^2 \frac{p}{(Q^2)^p} \sum_j \langle O_{2p}^{(j)} \rangle a(Q^2)^{k_D^{(j)}} (1 + \mathcal{O}(a)) \quad (2.9)$$

$$= 2\pi^2 \frac{p}{(Q^2)^p} \sum_j \langle O_{2p}^{(j)} \rangle a(Q^2)^{\gamma^{(1)}(\mathcal{O}_D^{(j)})/\beta_0} (1 + \mathcal{O}(a)), \quad (2.10)$$

donde las correcciones relativas  $\mathcal{O}(a)$  normalmente se desprecian. Para  $D = 4$  la situación es más simple, ya que en el operador  $D = 4$  predomina el condensado de gluones que tiene dimensiones anómalas igual a cero, es decir,  $\gamma^{(1)}(\mathcal{O}_4) = 0$ . Para  $D = 6$  tenemos nueve operadores, y aproximaremos la contribución de  $D = 6$  para los primeros cuatro operadores, que, entre ellos, tienen aproximadamente solo dos dimensiones anómalas efectivas de orden principal,  $\gamma^{(1)}(\mathcal{O}_6^{(2)})/\beta_0 \approx 0.222$  y  $\gamma^{(1)}(\mathcal{O}_6^{(1)})/\beta_0 \approx 0.625$ . El primer estudio se realizará con dimensiones anómalas enteras, es decir:  $k^{(2)} = \gamma^{(1)}(\mathcal{O}_6^{(2)})/\beta_0 = -1$  y  $k^{(1)} = \gamma^{(1)}(\mathcal{O}_6^{(1)})/\beta_0 = 0$ , es decir, en la aproximación LB. Todo esto implica que la expansión OPE de la función de Adler, mejorada con respecto a la expansión (1.8), y truncada en  $D = 6$ , tiene la siguiente forma aproximada:

$$\mathcal{D}(Q^2) \equiv -2\pi^2 \frac{d\Pi(Q^2)}{d \ln Q^2} = 1 + d_{D=0}(Q^2) + 4\pi^2 \frac{\langle O_4 \rangle}{(Q^2)^2} + \frac{6\pi^2}{(Q^2)^3} \left[ \langle O_6^{(2)} \rangle (a(Q^2))^{k^{(2)}} + \langle O_6^{(1)} \rangle (a(Q^2))^{k^{(1)}} \right] \quad (2.11)$$

que tiene dos condensados diferentes en  $D = 6$ . Se puede comprobar que esta expansión corresponde entonces a la siguiente expansión de la función de polarización:

$$\Pi(Q^2; \mu^2) = -\frac{1}{2\pi^2} \ln\left(\frac{Q^2}{\mu^2}\right) + \Pi_{D=0}(Q^2) + \frac{\langle O_4 \rangle}{(Q^2)^2} + \frac{1}{(Q^2)^3} \left[ \langle O_6^{(2)} \rangle (a(Q^2))^{k^{(2)}} + \langle O_6^{(1)} \rangle (a(Q^2))^{k^{(1)}} \right] \quad (2.12)$$

En las expresiones anteriores no se incluyeron las correcciones relativas de  $\mathcal{O}(a)$ .

Usaremos esta expansión OPE (2.11)-(2.12) en las reglas de suma. De acuerdo con los principios generales de la teoría cuántica de campos, la función de polarización considerada  $\Pi(Q^2; \mu^2)$  y su derivada logarítmica  $\mathcal{D}(Q^2)$  son funciones holomórficas, es decir, analíticas en el plano complejo  $Q^2$ , con excepción del eje real negativo  $(-\infty, -m_\pi^2)$ . Entonces, si  $g(Q^2)$  es una función holomórfica de  $Q^2$ , entonces el Teorema de Cauchy se puede aplicar a la integral  $\oint dQ^2 g(Q^2) \Pi(Q^2; \mu^2)$  a lo largo de un camino cerrado en el plano complejo  $Q^2$  que consiste, en un círculo de radio finito  $|Q^2| = \sigma_{\max} (\equiv \sigma_m)$  y cuyos caminos de integración van por encima y por debajo del eje negativo, evitando así encerrar los valores  $Q^2 < 0$  donde el integrando no es holomórfica (cf. Fig. 2.1).

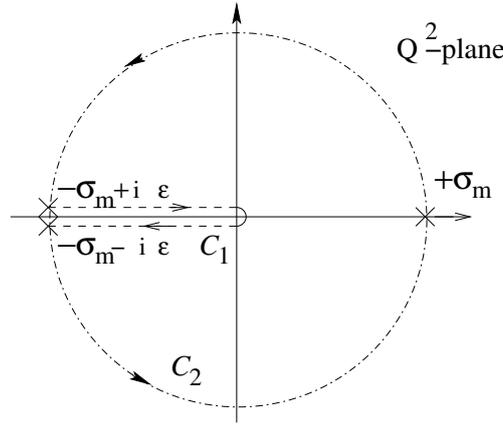


Figura 2.1: El camino de integración cerrada  $C_1 + C_2$  para  $\oint dQ^2 g(Q^2) \Pi(Q^2)$ . El radio del círculo  $C_2$  es  $|Q^2| = \sigma_{\max} (\equiv \sigma_m) (\leq m_\tau^2)$ . En los sectores del camino  $C_1$  tenemos  $\epsilon \rightarrow +0$ .

Esto implica entonces

$$\oint_{C_1+C_2} dQ^2 g(Q^2) \Pi(Q^2) = 0 \quad (2.13)$$

$$\Rightarrow \int_0^{\sigma_m} d\sigma g(-\sigma) \omega_{\exp}(\sigma) = -i\pi \oint_{|Q^2|=\sigma_m} dQ^2 g(Q^2) \Pi_{\text{th}}(Q^2), \quad (2.14)$$

donde la integración en el lado derecho de Eq. (2.14) es en sentido antihorario ( $Q^2 = \sigma_m e^{i\phi}$ ,  $-\pi < \phi < \pi$ ), y  $\omega(\sigma)$  es proporcional a la función de discontinuidad (espectral) de la función de polarización del canal (V+A)

$$\omega(\sigma) \equiv 2\pi \text{Im} \Pi(Q^2 = -\sigma - i\epsilon). \quad (2.15)$$

La cantidad  $\omega(\sigma)$  fue medida por ALEPH para decaimientos semihadrónicos para el leptón  $\tau$ . En Fig. 2.2 presentamos los datos de ALEPH.

La integración por partes nos permite reemplazar la función de polarización teórica en la regla de la suma (2.14) por la función de Adler (2.4)

$$\int_0^{\sigma_m} d\sigma g(-\sigma) \omega_{\exp}(\sigma) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi \mathcal{D}_{\text{th}}(\sigma_m e^{i\phi}) G(\sigma_m e^{i\phi}), \quad (2.16)$$

y la función holomorfa  $G$ , es la siguiente integral de  $g$ :

$$G(Q^2) = \int_{-\sigma_m}^{Q^2} dQ'^2 g(Q'^2), \quad (2.17)$$

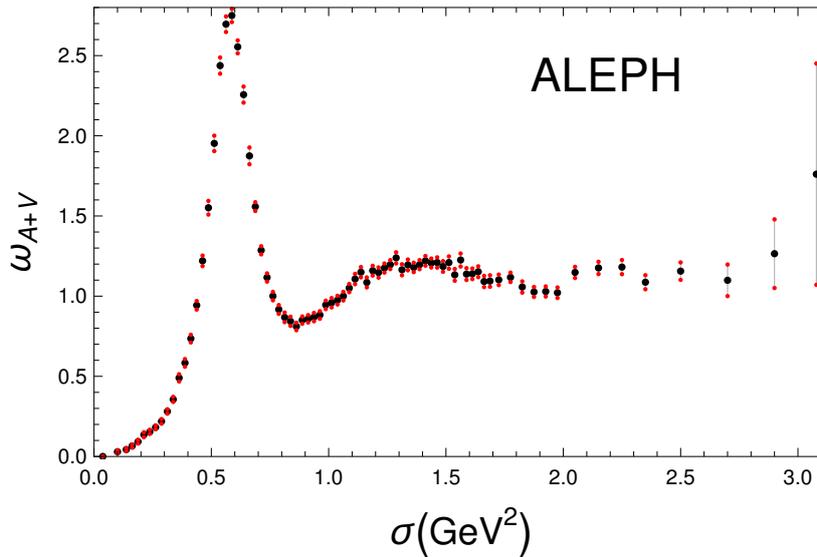


Figura 2.2: La función espectral  $\omega(\sigma)$  para el canal (V+A), medida por ALEPH Collaboration [41, 42, 43, 44]. La contribución extremadamente estrecha del pico del pión  $2\pi^2 f_\pi^2 \delta(\sigma - m_\pi^2)$  ( $f_\pi = 0.1305$  GeV) debe agregarse a este. Los dos últimos bins tienen grandes incertidumbres, por lo que los excluimos y esto significa que  $\sigma_m = 2.80$  GeV<sup>2</sup> en las reglas de suma.

Las funciones de polarización de corriente del vector y del vector axial  $\Pi_j^{(k)}(Q^2)$  y la función de Adler  $\mathcal{D}(Q^2)$  son cantidades que son funciones holomorfas (analíticas) de  $Q^2$  en el plano complejo  $Q^2$  con la excepción del semieje negativo, es decir, son cantidades tipo espacio. Por otro lado, la función espectral (2.15) y las reglas de suma (2.16) son observables temporales, siendo funciones de la energía al cuadrado  $\sigma > 0$  ( $= -Q^2$ ) o  $\sigma_m \equiv \sigma_{\max} > 0$ . Existen varias otras cantidades temporales que tienen la forma de integrales de  $\mathcal{D}(Q^2)$  y son de interés fenomenológicas [78], tales como: (a)  $e^+ e^-$  relación de producción de hadrones  $R(s)$  [79, 80] (con cualquier  $s > 0$ ); (b) la contribución de la polarización del vacío hadrónico de orden principal al momento magnético anómalo del muón ( $g_\mu - 2$ ) [81, 82], donde los momentos cuadráticos dominantes en el tiempo son muy bajos,  $s \sim m_\mu^2$  ( $\sim 0.01$  GeV<sup>2</sup>) [83, 84].

### 2.3. Extensión Renormalón a la Función de Adler

Aquí presentamos la construcción de una extensión Renormalón de la función de Adler, siguiendo el enfoque de [65] (ver también [58]).<sup>1</sup> La expansión de la contribución del orden principal ( $D = 0$ ) de la función de Adler en potencias de  $a \equiv \alpha_s/\pi$  tiene<sup>2</sup> la forma

$$d(Q^2)_{D=0} = d_0 a(\kappa Q^2) + d_1(\kappa) a(\kappa Q^2)^2 + \dots + d_n(\kappa) a(\kappa Q^2)^{n+1} + \dots, \quad (d_0 = 1), \quad (2.18)$$

los valores exactos de los primeros cuatro coeficientes de expansión ( $d_0 = 1; d_1; d_2; d_3$ ) se conocen [51, 52, 53]. Esta serie puede reorganizarse en términos de derivadas logarítmicas  $\tilde{a}_{n+1}$  usando la siguiente relación

$$\tilde{a}_{n+1}(Q'^2) \equiv \frac{(-1)^n}{n! \beta_0^n} \left( \frac{d}{d \ln Q'^2} \right)^n a(Q'^2) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.19)$$

<sup>1</sup>Una revisión extensa de los temas sobre renormalones, incluyendo muchas referencias, se da en [85]. Desde entonces, han aparecido varios otros trabajos sobre renormalones, entre ellos [70, 86, 87, 88, 89].

<sup>2</sup>Denotamos  $\kappa \equiv \mu^2/Q^2$  ( $0 < \kappa \sim 1$ ), es decir,  $\kappa$  es el parámetro adimensional para la escala de renormalización  $\mu^2$ .

Aquí  $\beta_0$  es el primer coeficiente en la función beta de la ecuación del grupo de renormalización (RGE)

$$\frac{da(Q^2)}{d\ln Q^2} \equiv \beta(a(Q^2)) = -\beta_0 a(Q^2)^2 - \beta_1 a(Q^2)^3 - \beta_2 a(Q^2)^4 - \dots \quad (2.20a)$$

$$= -\beta_0 a(Q^2)^2 [1 + c_1 a(Q^2) + c_2 a(Q^2)^2 + \dots], \quad (2.20b)$$

donde  $\beta_0$  y  $\beta_1$  son universales, es decir, independientes del esquema de renormalización,  $\beta_0 = (11 - 2N_f/3)/4$  ( $= 9/4$  para  $N_f = 3$ ) y  $\beta_1 = (1/16)(102 - 38N_f/3)$ , mientras que  $\beta_j$  para  $j \geq 2$  tienen valores específicos dependientes del esquema. Tomamos el número efectivo de quarks como  $N_f = 3$ .

Para poder relacionar la función de Adler (2.18) con las derivadas logarítmicas (2.19), debemos escribir la función beta (2.20) como  $\tilde{a}_2$ , es decir, a modo de ejemplo, tenemos que

$$\frac{da(Q^2)}{d\ln Q^2} = -\beta_0 \tilde{a}_2 \quad (2.21)$$

o que es lo mismo que

$$\tilde{a}_2 = a^2 + c_1 a^3 + c_2 a^4 + c_3 a^5 + \dots \quad (2.22)$$

Por lo tanto, podemos relacionar esta correspondencia solo si tenemos derivadas del acoplamiento  $a(Q^2)$  o de  $D(Q^2)$ , por consiguiente, en principio este método no podría ser usado para CI. Podemos relacionar  $a^n \longleftrightarrow \tilde{a}_n$  como

$$\tilde{a}_n(Q^2) = a(Q^2)^n + \sum_{m=1}^{\infty} k_m(n) a(Q^2)^{n+m}. \quad (2.23)$$

Por ejemplo, tenemos  $\tilde{a}_1 = a$ , y

$$\tilde{a}_2 = a^2 + c_1 a^3 + c_2 a^4 + c_3 a^5 + \dots, \quad (2.24a)$$

$$\tilde{a}_3 = a^3 + \frac{5}{2} c_1 a^4 + \left(3c_2 + \frac{3}{2} c_1^2\right) a^5 + \dots, \quad (2.24b)$$

$$\tilde{a}_4 = a^4 + \frac{13}{3} c_1 a^5 + \dots, \quad (2.24c)$$

$$\tilde{a}_5 = a^5 + \dots, \quad \text{etc.}, \quad (2.24d)$$

omitimos la dependencia de  $Q^2$  por simplicidad [ $a^n \equiv a(Q^2)^n$ ,  $\tilde{a}_n \equiv \tilde{a}_n(Q^2)$ ]. La inversión paso a paso de estas relaciones hace posible expresar potencias separadas en términos de derivadas logarítmicas

$$a(Q^2)^n = \tilde{a}_n(Q^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{k}_m(n) \tilde{a}_{n+m}(Q^2). \quad (2.25)$$

Además tenemos

$$a^5 = \tilde{a}_5 + \dots, \quad (2.26a)$$

$$a^4 = \tilde{a}_4 - \frac{13}{3}c_1\tilde{a}_5 + \dots, \quad (2.26b)$$

$$a^3 = \tilde{a}_3 - \frac{5}{2}c_1\tilde{a}_4 + \left(-3c_2 + \frac{28}{3}c_1^2\right)\tilde{a}_5 + \dots, \quad (2.26c)$$

$$a^2 = \tilde{a}_2 - c_1\tilde{a}_3 + \left(-c_2 + \frac{5}{2}c_1^2\right)\tilde{a}_4 + \left(-c_3a^5 + \frac{22}{3}c_1c_2 - \frac{28}{3}c_1^3\right)\tilde{a}_5 + \dots, \quad (2.26d)$$

etc. Cuando estas expresiones para cada una de las potencias  $a^n$  se sustituyen en la expansión de potencias Eq. (2.18) de  $d(Q^2)_{D=0}$ , la expansión reorganizada en derivadas logarítmicas (expansión de perturbación logarítmica - 'lpt') es

$$D_{\text{lpt}}(Q^2) = \tilde{d}_0 a(Q^2) + \tilde{d}_1 \tilde{a}_2(Q^2) + \tilde{d}_2 \tilde{a}_3(Q^2) + \dots + \tilde{d}_n \tilde{a}_{n+1}(Q^2) + \dots \quad (2.27)$$

Los nuevos coeficientes  $\tilde{d}_n$  son combinaciones específicas de  $d_n, d_{n-1}, \dots, d_0$

$$\tilde{d}_n = \sum_{s=0}^{n-1} \tilde{k}_s(n+1-s) d_{n-s} \quad (n = 1, 2, \dots; \tilde{k}_0(m) = 0), \quad (2.28)$$

y los coeficientes  $\tilde{k}_s(n+1-s)$  son los que aparecen en las relaciones (2.25). La forma más explícita de Eqs. (2.28) es

$$\tilde{d}_0 = d_0, \quad \tilde{d}_1 = d_1, \quad \tilde{d}_2 = d_2 - c_1 d_1, \quad (2.29a)$$

$$\tilde{d}_3 = d_3 - \frac{5}{2}c_1 d_2 + \left(-c_2 + \frac{5}{2}c_1^2\right) d_1, \quad (2.29b)$$

$$\tilde{d}_4 = d_4 - \frac{13}{3}c_1 d_3 + \left(-3c_2 + \frac{28}{3}c_1^2\right) d_2 + \left(-c_3 + \frac{22}{3}c_1 c_2 - \frac{28}{3}c_1^3\right) d_1, \quad (2.29c)$$

$$\begin{aligned} \tilde{d}_5 = & d_5 - \frac{77}{12}c_1 d_4 + \left(-6c_2 + \frac{791}{36}c_1^2\right) d_3 + \left(-\frac{7}{2}c_3 + \frac{123}{4}c_1 c_2 - \frac{1631}{36}c_1^3\right) d_2 \\ & + \left(-c_4 + \frac{119}{12}c_1 c_3 + 6c_2^2 - \frac{949}{18}c_1^2 c_2 + \frac{1631}{36}c_1^4\right) d_1, \end{aligned} \quad (2.29d)$$

etc. Las relaciones inversas son

$$d_n = \sum_{s=0}^{n-1} k_s(n+1-s) \tilde{d}_{n-s} \quad (n = 1, 2, \dots; k_0(m) = 0), \quad (2.30)$$

los coeficientes  $k_s(n+1-s)$  son los que aparecen en las relaciones (2.23). Para las relaciones de recurrencia que nos permiten obtener los coeficientes  $k_m(n)$  y  $\tilde{k}_m(n)$  en cualquier orden en cualquier esquema de renormalización, tomamos la convención  $c_0 = 1$ , y  $c_j = \beta_j / \beta_0$  ( $j \geq 1$ ), cf. Eqs. (2.20b). Recordamos que los coeficientes  $c_j$  ( $j \geq 2$ ) caracterizan aquí el esquema de renormalización (la convención de escala de momento se fija a lo largo de este trabajo usando la escala habitual  $\overline{\text{MS}}$ , [90]). Las relaciones de recurrencia para  $k_m(n+1)$  en términos de  $k_s(n)$  son

$$k_m(2) = c_m \quad (m = 0, \dots, N-2), \quad (2.31a)$$

$$k_m(n+1) = \frac{1}{n} \sum_{s=0}^m (n+s) c_{m-s} k_s(n) \quad (m = 0, \dots, N-n-1; n = 2, \dots, N-1), \quad (2.31b)$$

$$(2.31c)$$

el índice  $N$  significa que las relaciones de recurrencia (2.23) y (2.25) se consideran truncadas en  $\sim a^N$  y en  $\sim \tilde{a}_N$ , respectivamente.

Una vez conocidos los coeficientes  $k_i(j)$ , las relaciones de recursión para  $\tilde{k}_{m+1}(n)$  en términos de  $\tilde{k}_p(r)$  ( $p \leq m$ ) son

$$\tilde{k}_0(n) = 1 \quad (n = 2, \dots, N), \quad (2.32a)$$

$$\tilde{k}_{m+1}(n) = - \sum_{s=1}^{m+1} k_s(n) \tilde{k}_{m+1-s}(n+s) \quad (m = 0, \dots, N-n-1; n = 2, \dots, N-1). \quad (2.32b)$$

$$(2.32c)$$

Recapitulando, si conocemos los coeficientes  $\beta_j$ , se pueden encontrar las relaciones entre las derivadas logarítmicas  $\tilde{a}_{n+1}$  y las potencias  $a^k$  ( $k \geq n+1$ ), y tienen la siguiente forma

$$\tilde{a}_{n+1}(Q'^2) = a(Q'^2)^{n+1} + \sum_{m \geq 1} k_m(n+1) a(Q'^2)^{n+1+m}, \quad (2.33a)$$

$$a(Q'^2)^{n+1} = \tilde{a}_{n+1}(Q'^2) + \sum_{m \geq 1} \tilde{k}_m(n+1) \tilde{a}_{n+1+m}(Q'^2). \quad (2.33b)$$

Además, los coeficientes de la expansión correspondientes  $\tilde{d}_n$  y  $d_k$  están relacionados de manera análoga

$$\tilde{d}_n(\kappa) = d_n(\kappa) + \sum_{s=1}^{n-1} \tilde{k}_s(n+1-s) d_{n-s}(\kappa) \quad (\tilde{d}_0 = d_0 = 1), \quad (2.34a)$$

$$d_n(\kappa) = \tilde{d}_n(\kappa) + \sum_{s=1}^{n-1} k_s(n+1-s) \tilde{d}_{n-s}(\kappa) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (2.34b)$$

Aquí, los coeficientes  $\tilde{k}_s(n+1-s)$  y  $k_s(n+1-s)$  son expresiones específicas de los coeficientes de la función  $\beta$ . Por ejemplo, los primeros coeficientes  $k_s$  tienen la siguiente forma:

$$k_1(2) = c_1, \quad k_1(3) = \frac{5}{2}c_1, \quad k_2(2) = c_2, \quad (2.35a)$$

$$k_1(4) = \frac{13}{3}c_1, \quad k_2(3) = 3c_2 + \frac{3}{2}c_1^2, \quad k_3(2) = c_3, \quad (2.35b)$$

etc., donde  $c_j \equiv \beta_j / \beta_0$ , y los coeficientes  $\beta_j$  aparecen en RGE (2.20). Estos coeficientes son independientes del parámetro de escala de renormalización  $\kappa$ .

Los coeficientes de expansión  $d_n$ , y los nuevos coeficientes de expansión  $\tilde{d}_n$ , nos permiten construir las transformadas de Borel  $B[d](u)$  y  $B[\tilde{d}](u)$

$$B[d](u; \kappa) \equiv d_0 + \frac{d_1(\kappa)}{1!\beta_0} u + \dots + \frac{d_n(\kappa)}{n!\beta_0^n} u^n + \dots, \Rightarrow \quad (2.36a)$$

$$B[\tilde{d}](u; \kappa) \equiv \tilde{d}_0 + \frac{\tilde{d}_1(\kappa)}{1!\beta_0} u + \dots + \frac{\tilde{d}_n(\kappa)}{n!\beta_0^n} u^n + \dots \quad (2.36b)$$

La transformada  $B[\tilde{d}](u)$  es la transformada de Borel de una cantidad auxiliar a la función de Adler  $\tilde{d}(Q^2; \kappa)$

$$\tilde{d}(Q^2; \kappa) \equiv a(\kappa Q^2) + \tilde{d}_1(\kappa) a(\kappa Q^2)^2 + \dots \tilde{d}_n(\kappa) a(\kappa Q^2)^{n+1} + \dots \quad (2.37)$$

Esta cantidad tiene una dependencia del parámetro de renormalización  $\kappa$ , en contraste con la función de Adler Eq. (2.18). Solo en la aproximación de a un loop de la cantidad auxiliar  $\tilde{d}(Q^2; \kappa)$  y la función de Adler  $d(Q^2)_{D=0}$  coinciden (entonces:  $\tilde{a}_{n+1} = a^{n+1}$ ,  $\tilde{d}_n = d_n$ ).

Primero discutimos la estructura de la singularidad de la transformada de Borel  $B[d](u)$  en  $u > 0$  (renormalones IR). Es decir, la estructura debe ser de tal forma que la ambigüedad renormalón, que aparece tras la integración en la transformada inversa de Borel, tenga la misma dependencia  $Q^2$  que los términos OPE correspondientes (de dimensión  $D > 0$ ).<sup>3</sup> Si el renormalón IR tiene un término con un polo (punto de bifurcación) en  $u = p > 0$  de la forma

$$B[d](u)^{(0)} = \frac{1}{(p-u)^{\kappa_p^{(j)} + pc_1/\beta_0}}, \quad (2.38)$$

entonces la ambigüedad renormalón correspondiente tiene la siguiente dependencia  $Q^2$ :

$$\delta d(Q^2) \sim \frac{1}{\beta_0} \text{Im} \int_{+i\epsilon}^{+\infty+i\epsilon} du \exp\left(-\frac{u}{\beta_0 a(Q^2)}\right) \frac{1}{(p-u)^{\kappa_p^{(j)} + pc_1/\beta_0}} \quad (2.39a)$$

$$\sim \frac{1}{(Q^2)^p} a(Q^2)^{k_{2p}^{(j)}} [1 + \mathcal{O}(a)]. \quad (2.39b)$$

Esta es la misma dependencia de  $Q^2$  para la función de Adler que posee una contribución dimensional  $D = 2p$  (2.10) en OPE, entonces identificamos

$$p = D/2, \quad k_D^{(j)} = 1 - \kappa_p^{(j)} = \frac{\gamma^{(1)}(O_D^{(j)})}{\beta_0}. \quad (2.40)$$

Esto significa que las expresiones del renormalón IR (2.38) en la transformada de Borel  $B[d](u)$  de la parte  $D = 0$  en la función de Adler,  $d(Q^2)_{D=0}$  [cf. Eq. (2.11)] refleja uno por uno los términos OPE de la función de Adler ( $D = 2p > 0$ ) Eq. (2.10). También observamos que el término adicional  $pc_1/\beta_0$  ( $= p\beta_1/\beta_0^2$ ) en el índice del renormalón IR en la Ec. (2.38) es un reflejo de los efectos RGE de  $a(Q^2)$  más allá del único loop (es decir, más allá de  $\beta_0$ ).<sup>4</sup>

Ahora pasamos a los términos de renormalón IR correspondientes en la transformada de Borel  $B[\tilde{d}](u)$  de la cantidad auxiliar  $\tilde{d}(Q^2; \kappa)$ . Señalamos que la transformada  $B[\tilde{d}](u)$  contiene toda la información sobre los coeficientes de la función de Adler  $\tilde{d}_n$  (y por lo tanto  $d_n$ ). No obstante, a diferencia de  $B[d](u)$ , tiene la dependencia de escala de renormalización de tipo un loop

$$\frac{d}{d \ln \kappa} \tilde{d}_n(\kappa) = n\beta_0 \tilde{d}_{n-1}(\kappa) \Rightarrow B[\tilde{d}](u; \kappa) = \kappa^u B[\tilde{d}](u). \quad (2.41)$$

Esto sugiere que la estructura de renormalón de  $B[\tilde{d}](u)$  no tiene efectos explícitos provenientes de RGE del acoplamiento más allá de un loop, es decir, no hay términos  $\propto \beta_1$  en el

<sup>3</sup>Entonces es posible argumentar que la ambigüedad de renormalón del término  $D = 0$  (obtenido por la transformada inversa de Borel) puede ser cancelada por la contribución correspondiente de  $D > 0$  en el OPE.

<sup>4</sup>El razonamiento anterior se refiere a los términos OPE Eq. (2.10) que tienen los condensados  $\langle O_{2p} \rangle$  de origen no quiral, es decir, no relacionados con la generación de masas distintas de cero. En ese contexto, notamos que  $d(Q^2)_{D=0}$  es una cantidad puramente sin masa.

índice de potencia de las singularidades cuando se compara con los términos de renormalón IR correspondientes Eq. (2.38)

$$B[\tilde{d}](u)^{(0)} = \frac{1}{(p-u)^{\kappa_p^{(j)}}}. \quad (2.42)$$

El comportamiento sugerido Eq. (2.42) resulta ser correcto, como se muestra numéricamente en Ref. [65] para varios casos de  $\kappa_p^{(j)}$  de valor entero y no entero. Específicamente, siguiendo el enfoque numérico de [65], se deduce de (2.42) que los coeficientes de la expansión correspondientes  $\tilde{d}_n$ , y luego  $d_n$  a través de las relaciones (2.34b), y el comportamiento numérico de los coeficientes  $d_n$  obtenidos para  $n$  alto, nos da la siguiente transformada de Borel  $B[d](u)$ :

$$B[\tilde{d}](u) = \frac{\pi \tilde{d}_{p,j}^{\text{IR}}}{(p-u)^{\kappa_p^{(j)}}} \Rightarrow \quad (2.43a)$$

$$B[d](u) = \frac{\pi d_{p,j}^{\text{IR}}}{(p-u)^{\kappa_p^{(j)} + pc_1/\beta_0}} \left\{ 1 + \frac{(b_1^{(2p)} + \mathcal{C}_{1,j}^{(2p)})}{\beta_0(\kappa_p^{(j)} + pc_1/\beta_0 - 1)} (p-u) + \frac{(b_2^{(2p)} + b_1^{(2p)} \mathcal{C}_{1,j}^{(2p)} + \mathcal{C}_{2,j}^{(2p)})}{\beta_0^2(\kappa_p^{(j)} + pc_1/\beta_0 - 1)(\kappa_p^{(j)} + pc_1/\beta_0 - 2)} (p-u)^2 + \dots \right\}, \quad (2.43b)$$

donde los coeficientes  $b_j^{(2p)}$  son los que aparecen en la expresión de la potencia  $1/(Q^2)^p$  en términos de  $a(Q^2)$  ( $\equiv a_Q$ )

$$\frac{1}{(Q^2)^p} = \text{const} \times \exp\left(-\frac{p}{\beta_0 a_Q}\right) a_Q^{-pc_1/\beta_0} \left[ 1 + b_1^{(2p)} a_Q + b_2^{(2p)} a_Q^2 + \mathcal{O}(a^3) \right]. \quad (2.44)$$

Sus expresiones explícitas son

$$b_1^{(2p)} = \frac{p}{\beta_0} (c_1^2 - c_2), \quad (2.45a)$$

$$b_2^{(2p)} = \frac{1}{2} \left( b_1^{(2p)} \right)^2 - \frac{p}{2\beta_0} (c_1^3 - 2c_1 c_2 + c_3). \quad (2.45b)$$

Los coeficientes  $\mathcal{C}_{n,j}^{(2p)}$  en expansión (2.43b) reflejan ciertas combinaciones de los coeficientes de Wilson para loop superiores y los efectos subprincipales de la dimensión anómala del operador  $\mathcal{O}_{2p}^{(j)}$  [65]. Además, la relación  $d_{p,j}^{\text{IR}}/\tilde{d}_{p,j}^{\text{IR}}$  de residuos en Eqs. (2.43) también tienen ciertos valores numéricos. En la Tabla 2.1 presentamos los valores de estas cantidades, para el esquema  $\overline{\text{MS}}$ ; los términos de nuestro interés, es decir,  $p=2$  y  $k_4=0$  ( $\kappa_2=1$ ); y  $p=3$  y  $k_6^{(2)}=0,222$  ( $\kappa_3^{(2)}=0,778$ ) y  $k_6^{(1)}=0,625$  ( $\kappa_3^{(1)}=0,375$ ).<sup>5</sup>

Incluimos en la Tabla 2.1 también el caso del primer renormalón UV. El comportamiento para el renormalón UV es muy similar al caso de IR, excepto que ahora tenemos  $-p < 0$  en lugar de  $p$ . Específicamente, para el renormalón principal UV, en  $u = -p = -1$ , y tomaremos la aproximación  $\kappa_{-1} = 2$ , que es el índice dominante de la aproximación large- $\beta_0$  (LB) [85, 91, 92]. Para

<sup>5</sup>Como argumentaremos más adelante, cerca de la ubicación del renormalón principal IR  $p=2$ , es razonable incluir una singularidad sub-principal  $\sim \ln(1-u/2)$  en  $B[\tilde{d}](u)$ , que corresponde en la transformada de Borel de la función de Adler a la singularidad sub-principal  $B[d](u) \sim 1/(2-u)^{2c_1/\beta_0}$ , cf. [65]. Incluimos este caso en la Tabla 2.1, usando las notaciones de [65].

Cuadro 2.1: Los valores extraídos numéricamente de los coeficientes  $\mathcal{C}_{1,j}^{(D)}$  y  $\mathcal{C}_{2,j}^{(D)}$ , y las proporciones  $d_{p,k}^X / \tilde{d}_{p,k}^X$ , para  $X=IR$  con  $p = 2, 3$  ( $D = 2p$ ), y  $X=UV$  y  $-p = -1$  ( $D = -2p$ ) en el esquema de renormalización  $\overline{MS}$  a 5 loop. En la notación,  $\pm p$  significa que se toma  $+p$  para casos IR y  $-p$  para casos UV. Los casos  $X = IR$  con  $p = 2$  y  $X = UV$  con  $-p = -1$  son los que se dan en la Tabla II de Ref. [65]. El caso  $p = 2$  y  $j = 0$  es el caso con  $B[\tilde{d}](u) = \pi \tilde{d}_{2,0}^{IR}(-1) \ln(1 - u/2)$ , cf. [65].

tipo (X)	$\pm p$	$j$	$\kappa_{\pm p}^{(j)}$	$d_{p,k}^X / \tilde{d}_{p,k}^X$	$\mathcal{C}_{1,j}^{(D)}$	$\mathcal{C}_{2,j}^{(D)}$
X=IR	$p = 2$	$j = 1$	1	$(+1.7995 \pm 0.0001)$	$(-0.03 \pm 0.02)$	$(+1.7 \pm 0.3)$
X=IR	$p = 2$	$j = 0$	0	$(+1.155 \pm 0.005)$	$(+7.7 \pm 0.4)$	...
X=IR	$p = 3$	$j = 2$	0.778	$(+6.078 \pm 0.031)$	$(+1.55 \pm 0.27)$	$(+3.1 \pm 1.7)$
X=IR	$p = 3$	$j = 1$	0.375	$(+2.177 \pm 0.039)$	$(+3.20 \pm 1.00)$	$(+29.6 \pm 6.2)$
X=UV	$-p = -1$	$j = 2$	2	$(+1.056 \pm 0.014)$	$(-10.1 \pm 2.1)$	$(-83. \pm 8.)$

los renormalones UV, tenemos relaciones análogas a las Ecs. (2.43), y por conveniencia presentamos estas relaciones en el Apéndice 4.1.

En el Apéndice 4.2 también presentamos, para completar, los resultados análogos para los casos subprincipales, es decir, cuando el índice de potencia  $\kappa_{\pm p}^{(j)}$  se reduce en una o dos unidades; esos resultados son necesarios cuando cambiamos el parámetro de escala de renormalización  $\kappa \equiv \mu^2 / Q^2$  de  $\kappa = 1$  a  $\kappa \neq 1$ .

Con base en estas consideraciones, hacemos para  $B[\tilde{d}](u)$  (con  $\kappa = 1$ ) en el esquema  $\overline{MS}$  el ansatz que refleja las correspondientes singularidades discutidas en  $u = 2, 3$  (renormalones IR,  $p = 2, 3$ ) y en  $u = -1$  (renormalones UV,  $-p = -1$ )

$$B[\tilde{d}](u) = \exp(\tilde{K}u) \pi \left\{ \tilde{d}_{2,1}^{IR} \left[ \frac{1}{(2-u)} + \tilde{\alpha}(-1) \ln\left(1 - \frac{u}{2}\right) \right] + \frac{\tilde{d}_{3,2}^{IR}}{(3-u)^{\kappa^{(2)}}} + \frac{\tilde{d}_{3,1}^{IR}}{(3-u)^{\kappa^{(1)}}} + \frac{\tilde{d}_{1,2}^{UV}}{(1+u)^2} \right\}. \quad (2.46)$$

Para los términos de renormalón  $u = 3$  tenemos índices de potencia no enteros  $\kappa^{(j)} = 1 - \gamma^{(1)}(O_6^{(j)}) / \beta_0 = 1 - k^{(j)}$ , donde  $\kappa^{(2)} \approx 0.778$  y  $\kappa^{(1)} \approx 0.375$ , cf. también la discusión después de Eqs. (2.3) y (2.11).<sup>6</sup> Para simplificar, en estos índices omitimos el subíndice  $p = 3$ , cf. también Eqs. (2.3) y (2.11)-(2.12) donde omitimos el subíndice  $D = 2p = 6$  en  $k_D^{(j)}$ . Además, el valor del parámetro  $\tilde{\alpha}$ , en el esquema  $\overline{MS}$ , es  $\tilde{\alpha} = -0.255$  [65]. Es decir, el valor de  $\tilde{\alpha}$  está determinado por el conocimiento del coeficiente subprincipal  $\hat{c}_1^{(D=4)}$ , que es una combinación de la dimensión anómala de orden principal y sub-principal del operador  $D = 4$  (gluón) y del correspondiente coeficiente de Wilson [85, 93]. Los otros cinco parámetros, es decir, el parámetro de escala  $\tilde{K}$  y los cuatro residuos  $(\tilde{d}_{2,1}^{IR}, \tilde{d}_{3,2}^{IR}, \tilde{d}_{3,1}^{IR}, \tilde{d}_{1,2}^{UV})$  están determinados por el conocimiento de los primeros cinco coeficientes  $\tilde{d}_n$ , es decir, por el conocimiento de  $d_n$  ( $n = 0, 1, 2, 3, 4$ ), cf. Eqs. (2.18), (2.34), (2.36). Mientras que para  $n \leq 3$  los valores de los coeficientes  $d_n$  de la función de Adler son exactamente conocidos [51, 52, 53], el valor del coeficiente  $d_4$  no es (todavía) conocido con exactitud.

<sup>6</sup>En [58, 59] usamos en el ansatz para  $B[\tilde{d}](u)$  del renormalón  $u = 3$  expresa los índices de potencia  $\kappa^{(2)} = 2$  y  $\kappa^{(1)} = 1$ , que corresponde a la aproximación LB.

Cuadro 2.2: Los valores de los parámetros  $\tilde{K}$  y de los residuos para  $\tilde{d}_{i,j}^X$ , ( $X=IR,UV$ ) de la expresión (2.46), para esquema  $\overline{MS}$  a cinco -Loop, cuando el valor del coeficiente  $d_4$  se toma como el valor central y los valores límites de la estimación Eq. (2.47).

$d_4$	$\tilde{K}$	$\tilde{d}_{2,1}^{IR}$	$\tilde{d}_{3,2}^{IR}$	$\tilde{d}_{3,1}^{IR}$	$\tilde{d}_{1,2}^{UV}$
275.	0.131144	1.09671	1.03356	-0.992974	-0.0120413
275. - 63.	-0.409096	2.59142	2.49249	-3.05914	-0.0115282
275. + 63.	0.525533	0.98966	-1.04184	0.420453	-0.0117992

Existen varias estimaciones del valor de  $d_4$ . El método de carga efectiva (ECH) [94] da una estimación  $d_4 = 275$  [53, 95]. Una estimación basada en las aproximaciones de Padé da un valor similar  $d_4 = 277 \pm 51$  [96]; se obtiene otra estimación similar  $d_4 = 283$  mediante la extrapolación del comportamiento de la serie aproximadamente geométrica de FO de  $r_\tau^{(D=0)}$  [ $= a^{(2,1)}(m_\tau^2)_{D=0}$ ] [68]. Por otro lado, en [65] se usó un ansatz simple para  $B[\tilde{d}](u)$  en el esquema de renormalización MiniMOM (relacionado con Lattice), dando la estimación de  $d_4$  que, transformado al esquema  $\overline{MS}$ , dio  $d_4 \approx 338$ . Usaremos,<sup>7</sup> como hicimos en [59, 98], para el valor central de  $d_4$  la estimación ECH  $d_4 = 275$ , e incluir la estimación  $d_4 = 338$  para variación máxima

$$d_4 = 275 \pm 63 \quad (2.47)$$

El procedimiento descrito da, a un valor de  $d_4$ , varias soluciones para los valores de los parámetros  $\tilde{K}$  y los cuatro residuos mencionados. Sin embargo, estas soluciones, con una excepción, tienen valores absolutos grandes, y los valores de los residuos  $p = 3$  ( $\tilde{d}_{3,2}^{IR}, \tilde{d}_{3,1}^{IR}$ ) son grandes y con signos opuestos, lo que indica efectos espurios de fuertes cancelaciones. Una solución, sin embargo, tiene valores absolutos claramente más pequeños de los parámetros, y en la Tabla 2.2 presentamos los valores resultantes de esta solución, para tres valores del parámetro  $d_4$  ( $d_4 = 275., 275. - 63., 275. + 63.$ ).

Además, en la Tabla 2.3 presentamos los coeficientes de expansión correspondientes  $\tilde{d}_n$  y  $d_n$  para estos tres casos, para  $n \leq 10$ .

En la expresión (2.46) para  $B[\tilde{d}](u)$ , podemos expandir el factor exponencial total  $\exp(\tilde{K}u)$  en potencias de  $(p - u)$  ( $p = 2, 3$ ) para los términos IR, y potencias de  $(1 + u)$  para el término UV. Como se explicó anteriormente en esta sección, cada término (singular) de la expresión obtenida para  $B[\tilde{d}](u)$  conduce a una serie correspondiente de términos singulares en la transformada de Borel  $B[d](u)$  [cf. Ecs. (2.43) y (4.1)]. Por lo tanto, la expresión (2.46) de  $B[\tilde{d}](u)$  conduce a la siguiente expansión (renormalón) de la transformada de Borel  $B[d](u)$  (para  $\kappa = 1$ ;  $d_4 = 275.$ ;  $N_f = 3$ ):

<sup>7</sup>Un método basado en una reorganización específica de la serie de perturbaciones [97], que es una expansión doble en las potencias de la anomalía conforme  $\beta(a)/a$  y de  $a$ , puede dar otra estimación interesante para  $d_4$ .

Cuadro 2.3: Los coeficientes  $\tilde{d}_n$  y  $d_n$  (en el esquema  $\overline{MS}$  y con  $\kappa = 1$ ) para los tres casos de  $d_4$  Eq. (2.47), para  $n \leq 10$ .

$n$	$d_4 = 275.: \tilde{d}_n$	$d_n$	$d_4 = 212.: \tilde{d}_n$	$d_n$	$d_4 = 338.: \tilde{d}_n$	$d_n$
0	1	1	1	1	1	1
1	1.63982	1.63982	1.63982	1.63982	1.63982	1.63982
2	3.45578	6.37101	3.45578	6.37101	3.45578	6.37101
3	26.3849	49.0757	26.3849	49.0757	26.3849	49.0757
4	-25.4180	275.	-88.4180	212.	37.5820	338.
5	1859.36	3206.48	2471.54	3099.99	1718.45	3784.23
6	-19035.2	16901.6	-31100.9	8666.78	-10053.	29341.8
7	421210.	358634.	628468.	375914.	319293.	458189.
8	$-7.80444 \times 10^6$	621177.	$-1.22286 \times 10^7$	$-1.07315 \times 10^6$	$-5.11629 \times 10^6$	$3.09086 \times 10^6$
9	$1.82502 \times 10^8$	$7.52194 \times 10^7$	$2.82236 \times 10^8$	$9.29524 \times 10^7$	$1.27983 \times 10^8$	$8.66934 \times 10^7$
10	$-4.43137 \times 10^9$	$-5.21168 \times 10^8$	$-6.94764 \times 10^9$	$-1.15783 \times 10^9$	$-2.99926 \times 10^9$	$1.43836 \times 10^8$

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\pi} B[d](u) &\equiv \frac{1}{\pi} \left[ d_0 + \frac{d_1}{1! \beta_0} u + \dots + \frac{d_n}{n! \beta_0^n} u^n + \dots \right] \\
&= \left\{ \frac{2.565390}{(2-u)^{209/81}} [1 - 0.499518(2-u) - 1.36093(2-u)^2 + \mathcal{O}((2-u)^3)] \right\} \\
&\quad + \left\{ \frac{9.310304}{(3-u)^{3.14837}} [1 - 0.039861(3-u) - 0.415167(3-u)^2 + \mathcal{O}((3-u)^3)] \right\} \\
&\quad + \left\{ \frac{(-3.203771)}{(3-u)^{2.74537}} [1 + 0.418500(3-u) + \mathcal{O}((3-u)^3)] \right\} \\
&\quad + \left\{ \frac{(-0.0111528)}{(1+u)^{98/81}} [1 + 20.7769(1+u) + 103.042(1+u)^2 + \mathcal{O}((1+u)^3)] \right\}.
\end{aligned} \tag{2.48}$$

Análogamente se obtienen las expresiones para los casos  $d_4 = 275 - 63$  y  $d_4 = 275 + 63$ . Además, cuando el parámetro de escala de renormalización  $\kappa$  se cambia de  $\kappa = 1$  a  $\kappa \neq 1$  ( $\kappa = 2/3$ ;  $\kappa = 2$ ), entonces la expresión  $B[\tilde{d}](u; \kappa)$  se obtiene multiplicando por el factor exponencial simple  $\exp(u \ln \kappa)$ , cf. Eq. (2.41), y la expansión correspondiente para  $B[d](u; \kappa)$  se obtiene de forma análoga a  $B[d](u)$  en la Ec. (2.48).

Uno puede preguntarse por qué nuestro enfoque se basa en un ansatz para la transformada de Borel  $B[\tilde{d}]$  de la cantidad auxiliar  $\tilde{d}(Q^2)$  Eq. (2.37) y no en un ansatz de la transformada de Borel  $B[d]$  de la función de Adler  $d(Q^2)_{D=0}$  en sí misma Eq. (2.18), como se explica en Ref. [65]. El conocimiento de  $B[\tilde{d}]$  tiene la ventaja de obtener la función característica  $F_d(t)$  de la función de Adler, donde aparece como la función resumada para la función de Adler

$$d(Q^2)_{D=0; res} = \int_0^\infty \frac{dt}{t} F_d(t) a(tQ^2). \tag{2.49}$$

Es decir, si la transformada de Borel  $B[\tilde{d}](u)$  cumple ciertas condiciones de convergencia, entonces la función característica  $F_d(t)$  es la transformada inversa Mellin de  $B[\tilde{d}](u)$

$$F_d(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{u_0 - i\infty}^{u_0 + i\infty} du B[\tilde{d}](u) t^u, \tag{2.50}$$

donde  $u_0$  es cualquier valor real entre las singularidades de  $B[\tilde{d}](u)$  más cercanas al origen, es decir,  $-1 < u_0 < +2$ . Podemos tomar  $u_0 = +1$ , y el cambio de variable  $u \mapsto z$ , donde  $u = 1 - iz$ , transforma esta integral en una integral a lo largo del eje real

$$F_d(t) = \frac{t}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz B[\tilde{d}](u = 1 - iz) e^{-iz \ln t}. \quad (2.51)$$

Entonces en el caso de la expresión (2.46) para  $B[\tilde{d}](u)$ , la fórmula anterior se puede aplicar sin modificaciones a todos los términos no logarítmicos, cf. Apéndice 4.3. Para el término logarítmico ( $\propto \tilde{\alpha} \ln(1 - u/2)$ ), las condiciones de convergencia no se cumplen y se necesita una resta [65]. Finalmente, la fórmula resumada tiene la forma

$$d(Q^2)_{D=0;res} = \int_0^\infty \frac{dt}{t} G_d(t) a(te^{-\tilde{\kappa}} Q^2) + \int_0^1 \frac{dt}{t} G_d^{\tilde{\alpha}}(t) \left[ a(te^{-\tilde{\kappa}} Q^2) - a(e^{-\tilde{\kappa}} Q^2) \right], \quad (2.52)$$

donde la función característica  $G_d^{\tilde{\alpha}}(t)$  de la parte logarítmica es [65]

$$G_d^{\tilde{\alpha}}(t) = -\tilde{\alpha} \tilde{d}_{2,1}^{\text{IR}} \frac{\pi t^2}{\ln t}. \quad (2.53)$$

La función característica  $G_d(t)$  para los términos  $B[\tilde{k}](u)_{\xi, \tilde{\kappa}} = \pi \exp(\tilde{\kappa} u) / (3 - u)^\xi$  se da en el Apéndice 4.3, Eq. (4.8). Combinando el resultado (4.8) con los resultados de las funciones características de los términos de potencia simple  $1/(2 - u)$  y  $1/(1 + u)^2$  dados en Ref. [65], obtenemos la expresión completa para la función característica  $G_d(t)$  que aparece en (2.52) y correspondiente a la transformada de Borel considerada  $B[\tilde{d}](u)$  Eq. (2.46)

$$G_d(t) = G_d^{(-)}(t) \Theta(1 - t) + G_d^{(+)}(t) \Theta(t - 1), \quad (2.54a)$$

$$G_d^{(-)}(t) = \pi \left[ \tilde{d}_{2,1}^{\text{IR}} t^2 + \tilde{d}_{3,2}^{\text{IR}} \frac{t^3}{\Gamma(\kappa^{(2)}) (\ln(1/t))^{1-\kappa^{(2)}}} + \tilde{d}_{3,1}^{\text{IR}} \frac{t^3}{\Gamma(\kappa^{(1)}) (\ln(1/t))^{1-\kappa^{(1)}}} \right], \quad (2.54b)$$

$$G_d^{(+)}(t) = \pi \tilde{d}_{1,2}^{\text{UV}} \frac{\ln t}{t}. \quad (2.54c)$$

Sin embargo, esta resumación tiene un serio obstáculo para el acoplamiento perturbativo  $a(Q'^2)$ , Las singularidades de Landau de este acoplamiento están en  $0 < Q'^2 \lesssim 1 \text{ GeV}^2$ . Para valores positivos suficientemente bajos de  $t$ , la integración (2.52) golpea estas singularidades y hace que la evaluación allí sea imposible o, al menos, ambigua. Debido a este problema, aquí no usaremos la resumación (2.52) en el análisis numérico de las reglas de suma. La aplicación de tal enfoque de resumación parece ser óptima en las formulaciones de QCD donde el acoplamiento  $a(Q'^2) [\mapsto \mathcal{A}(Q'^2)]$  está libre de estas singularidades de Landau, es decir, cuando es una función holomorfa en el plano complejo  $Q'^2$  excepto en el eje negativo.

## 2.4. Regla de Suma Borel-Laplace y Momentos $a(Q^2)^{(2,n)}$

Después de haber encontrado los coeficientes  $d(Q^2)_{D=0}$ , podemos calcular las Reglas de Suma, es decir, evaluar la función de peso  $g(Q^2)$  [cf. Eq. (2.16)]. Este trabajo está enfocado en la Regla Borel-Laplace doble-pinch  $B(M^2)$  donde  $M^2$  es un parámetro complejo con dimensiones de energía al cuadrado<sup>8</sup>

$$g_{M^2}(Q^2) = \left( 1 + \frac{Q^2}{\sigma_m} \right)^2 \frac{1}{M^2} \exp\left( \frac{Q^2}{M^2} \right) \Rightarrow \quad (2.55)$$

<sup>8</sup>doble-pinch significa que la función de peso  $g(Q^2)$  tiene un cero-doble en el punto Minkowskiano,  $Q^2 = -\sigma_m$ .

$$G_{M^2}(Q^2) = \left\{ \left[ \left(1 + \frac{Q^2}{\sigma_m}\right)^2 - 2\frac{M^2}{\sigma_m} \left(1 + \frac{Q^2}{\sigma_m}\right) + 2\left(\frac{M^2}{\sigma_m}\right)^2 \right] \exp\left(\frac{Q^2}{M^2}\right) - 2\left(\frac{M^2}{\sigma_m}\right)^2 \exp\left(-\frac{\sigma_m}{M^2}\right) \right\} \quad (2.56)$$

La regla de suma en general, Eq. (2.16), tiene en la parte izquierda los valores experimentales, y en la parte derecha los valores teóricos. Si usamos la función de peso para Borel-Laplace Eq. (2.55), la parte izquierda puede ser escrita como

$$B_{\text{exp}}(M^2; \sigma_m) = \int_0^{\sigma_m} d\sigma g_{M^2}(-\sigma) \omega_{\text{exp}}(\sigma) = \frac{1}{M^2} \int_0^{\sigma_m} d\sigma \left(1 - \frac{\sigma}{\sigma_m}\right)^2 \exp\left(-\frac{\sigma}{M^2}\right) \omega_{\text{exp}}(\sigma), \quad (2.57)$$

y la parte derecha

$$\begin{aligned} B_{\text{th}}(M^2; \sigma_m) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi G_{M^2}(\sigma_m e^{i\phi}) \mathcal{D}_{\text{th}}(\sigma_m e^{i\phi}) \\ &= \left[ \left(1 - 2\frac{M^2}{\sigma_m}\right) + 2\left(\frac{M^2}{\sigma_m}\right)^2 \left(1 - \exp\left(-\frac{\sigma_m}{M^2}\right)\right) \right] \\ &+ \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \left\{ \left[ \left(1 + e^{i\phi}\right)^2 - 2\frac{M^2}{\sigma_m} \left(1 + e^{i\phi}\right) + 2\left(\frac{M^2}{\sigma_m}\right)^2 \right] \exp\left(\frac{\sigma_m}{M^2} e^{i\phi}\right) - 2\left(\frac{M^2}{\sigma_m}\right)^2 \exp\left(-\frac{\sigma_m}{M^2}\right) \right\} d(\sigma_m e^{i\phi})_{D=0} \\ &+ B_{\text{th}}(M^2; \sigma_m)_{D=4} + B_{\text{th}}(M^2; \sigma_m)_{D=6}, \end{aligned} \quad (2.58)$$

donde tenemos que

$$B_{\text{th}}(M^2; \sigma_m)_{D=4} = \frac{2\pi^2 \langle O_4 \rangle}{(M^2)^2} \left(1 + 2\frac{M^2}{\sigma_m}\right), \quad (2.59)$$

y evaluamos la contribución  $D = 6$  usando el acoplamiento  $a(\sigma_m e^{i\phi})$  de acuerdo con RGE a un loop a lo largo del contorno, es decir, usamos (2.3)

$$\begin{aligned} B_{\text{th}}(M^2; \sigma_m)_{D=6} &= \frac{1}{2\pi} \frac{6\pi^2}{\sigma_m^3} \int_{-\pi}^{+\pi} d\phi \\ &\times e^{-i3\phi} \left\{ \left[ \left(1 + e^{i\phi}\right)^2 - 2\frac{M^2}{\sigma_m} \left(1 + e^{i\phi}\right) + 2\left(\frac{M^2}{\sigma_m}\right)^2 \right] \exp\left(\frac{\sigma_m}{M^2} e^{i\phi}\right) - 2\left(\frac{M^2}{\sigma_m}\right)^2 \exp\left(-\frac{\sigma_m}{M^2}\right) \right\} \\ &\times \left[ \langle O_6^{(2)} \rangle \left( \frac{a(\sigma_m)}{1 + i\beta_0 \phi a(\sigma_m)} \right)^{k^{(2)}} + \langle O_6^{(1)} \rangle \left( \frac{a(\sigma_m)}{1 + i\beta_0 \phi a(\sigma_m)} \right)^{k^{(1)}} \right]. \end{aligned} \quad (2.60)$$

En nuestra aplicación de estas reglas de suma de Borel-Laplace doble-pinch, usaremos solo la parte real de Borel-Laplace,  $\text{Re}B(M^2; \sigma_m)$ . En tal caso la contribución del condensado  $D = 4$  domina sobre la contribución del condensado  $D = 6$  cuando  $M^2$  varía a lo largo del rayo  $M^2 = |M^2| \exp(i\pi/6)$ , y  $D = 6$  domina sobre  $D = 4$  cuando  $M^2 = |M^2| \exp(i\pi/4)$ . Por otra parte, cuando  $\Psi = 0$  ( $M^2 = |M^2|$ ), se obtiene una mezcla de ambos condensados, es decir,  $\langle \mathcal{O}_6 \rangle + \langle \mathcal{O}_4 \rangle$ . Además, no incluimos  $D = 8$  en este trabajo, ya que no conocemos las dimensiones anómalas.

En general, los valores bajos de  $|M^2|$  tienden a minimizar los efectos de violación de dualidad, lo que hace que las contribuciones de los condensados sean más altos [67]. Además, para valores más grandes de  $|M^2|$  conducen a grandes incertidumbres experimentales, porque,

$\omega_{\text{exp}}(\sigma)$  tiene mayores incertidumbres para valores grandes de  $\sigma$ . Consideraremos un rango razonable,

$$0.9 \text{ GeV}^2 \leq |M^2| \leq 1.5 \text{ GeV}^2 \quad (2.61)$$

Usaremos las reglas de suma de Borel-Laplace anteriores para extraer los valores del acoplamiento y de los condensados.

Posteriormente, evaluaremos además dos Reglas de suma de energía finita (FESR) específicas, los momentos de doble-pinch  $a^{(2,n)}(\sigma_m)$  (con  $n = 0, 1$ ). Los momentos  $a^{(2,n)}(\sigma_m)$  tienen las siguientes funciones de peso  $g^{(2,n)}(Q^2)$  ( $n = 0, 1, \dots$ ):

$$\begin{aligned} g^{(2,n)}(Q^2) &= \left(\frac{n+3}{n+1}\right) \frac{1}{\sigma_m} \left(1 + \frac{Q^2}{\sigma_m}\right)^2 \sum_{k=0}^n (k+1)(-1)^k \left(\frac{Q^2}{\sigma_m}\right)^k \\ &= \left(\frac{n+3}{n+1}\right) \frac{1}{\sigma_m} \left[1 - (n+2) \left(-\frac{Q^2}{\sigma_m}\right)^{n+1} + (n+1) \left(-\frac{Q^2}{\sigma_m}\right)^{n+2}\right] \Rightarrow \end{aligned} \quad (2.62a)$$

$$G^{(2,n)}(Q^2) = \left(\frac{n+3}{n+1}\right) \frac{Q^2}{\sigma_m} \left[1 - \left(-\frac{Q^2}{\sigma_m}\right)^{n+1}\right] + \left[1 - \left(-\frac{Q^2}{\sigma_m}\right)^{n+3}\right]. \quad (2.62b)$$

Cuando aplicamos estas funciones de peso a las reglas de suma (2.16), y restamos la unidad, obtenemos los momentos FESR  $a^{(2,n)}$

$$a_{\text{exp}}^{(2,n)}(\sigma_m) = \int_0^{\sigma_m} d\sigma g^{(2,n)}(-\sigma) \omega_{\text{exp}}(\sigma) - 1, \quad (2.63a)$$

$$a_{\text{th}}^{(2,n)}(\sigma_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi G^{(2,n)}(\sigma_m e^{i\phi}) \left[D_{\text{th}}(\sigma_m e^{i\phi}) - 1\right]. \quad (2.63b)$$

Como en el caso de las reglas de suma de Borel-Laplace, Eq. (2.60), se tomará el acoplamiento  $a(\sigma_m e^{i\phi})$  en las contribuciones  $D = 6$  de acuerdo con RGE a un loop a lo largo del contorno. Observamos que  $a^{(2,1)}(\sigma = m_\tau^2)$  corresponde a QCD canónico (sin el quark extraño y sin masa) del decaimiento  $r_\tau$ .

## 2.5. Métodos de evaluación para la contribución $D = 0$

### 2.5.1. Contour-Improved

El método Contour-Improved (CI) es representado por la integración directa en el plano complejo de  $Q^2$ , cuyo radio de integración es  $Q^2 = \sigma_{\text{max}} e^{i\phi}$  en el integrando de la parte derecha de la ecuación (2.16). La función de Adler tiene la forma de una serie truncada en potencias de  $a(\kappa Q^2)^{[N]}$

$$\left(-\frac{i}{2\pi} \oint_{|Q^2|=\sigma_m} \frac{dQ^2}{Q^2} d(Q^2)_{(D=0)} G(Q^2)\right)^{(CI,[N])} = \frac{1}{2\pi} \oint_{-\pi}^{\pi} d\phi d(\sigma_m e^{i\phi})_{(D=0)}^{[N]} G(\sigma_m e^{i\phi}), \quad (2.64)$$

Esta expresión tiene una dependencia en la escala de renormalización  $\kappa$  debido a la truncación,  $(d/d \ln \kappa) d(Q^2; \kappa)_{D=0}^{[N]} \sim a^{N_i+1}$ , donde la expansión de la serie truncada es

$$d(\sigma_m e^{i\phi})_{D=0}^{[N_t]} = a(Q^2) + d_1(\kappa) a(\kappa Q^2)^2 + d_2(\kappa) a(\kappa Q^2)^3 + \dots + d_{[N_t-1]}(\kappa) a(\kappa Q^2)^{N_t} \quad (2.65)$$

Esta serie aparece en las ecuaciones (2.58) y (2.63b); se escribe como una serie de Taylor truncada en potencias de  $a(\kappa\sigma_m)$  hasta (incluido)  $a(\kappa\sigma_m)^{N_t}$ .

### 2.5.2. Fixed-Order

La aproximación Fixed-Order (FO) es la aplicación de la expansión Taylor a la parte  $D=0$  de la función de Adler

$$d(\sigma_m e^{i\phi})_{D=0} = d(\sigma_m)_{D=0} + i\phi \frac{d}{d \ln Q^2} d(Q^2)_{D=0}|_{Q^2=\sigma_m} + \dots + \frac{1}{k!} (i\phi)^k \left( \frac{d}{d \ln Q^2} \right)^k d(Q^2)_{D=0}|_{Q^2=\sigma_m} + \dots, \quad (2.66)$$

Si usamos la ecuación (2.18)

$$d(Q^2)_{D=0} = d_0 a(\kappa Q^2) + d_1(\kappa) a(\kappa Q^2)^2 + \dots + d_n(\kappa) a(\kappa Q^2)^{n+1} + \dots, \quad (d_0 = 1), \quad (2.67)$$

podemos insertar esta expresión con  $Q^2 = \sigma_m e^{i\phi}$  en la expansión (2.66) y en la parte derecha de la regla de suma (2.16), con  $Q^2 = \sigma_m e^{i\phi}$  ( $-\pi \leq \phi \leq \pi$ ) obtenemos la expresión

$$\left( -\frac{i}{2\pi} \oint_{|Q^2|=\sigma_m} \frac{dQ^2}{Q^2} d(Q^2)_{(D=0)} G(Q^2) \right)^{(FO, [N_t])} = r_0 a(\kappa\sigma_m) + r_1(\kappa) a(\kappa\sigma_m)^2 + \dots + r_{N_t-1}(\kappa) a(\kappa\sigma_m)^{N_t}, \quad (2.68)$$

donde los coeficientes  $r_n(\kappa)$  estan dados por

$$r_n = \tilde{r}_n + \sum_{s=1}^{n-1} k(n+1-s) \tilde{r}_{n-s}(\kappa) \quad (n = 0, 1, 2, \dots), \quad (2.69)$$

y la expansión para los coeficientes  $\tilde{r}_n(\kappa)$  es:

$$\tilde{r}_n(\kappa) = \sum_{l=0}^n \binom{n}{n-l} \beta_0^{n-l} \mathcal{K}_{n-l}(\sigma_m) \tilde{d}_l(\kappa), \quad (2.70)$$

$\tilde{d}_0(\kappa) = 1$  y los coeficientes  $\mathcal{K}_{n-l}(\sigma_m)$  son representadas por las siguientes integrales:

$$\mathcal{K}_k(\sigma_m) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} d\phi (-i\phi)^k G(\sigma_m e^{i\phi}) \quad (2.71)$$

La dependencia en  $\phi$  en la expansión de los coeficientes  $\tilde{d}_n(\phi; \kappa)$  está en la siguiente combinación de los coeficientes  $\tilde{d}_n(\kappa)$

$$\tilde{d}_n(\phi; \kappa) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (-i\phi\beta_0)^k \tilde{d}_{n-k}(\kappa) \quad (\tilde{d}_0(\kappa) = 1) \quad (2.72)$$

Estos coeficientes, son los que aparecen en la ecuación (2.28)-(2.29)

### 2.5.3. Principal-Value

Principal Value (PV) usa la expansión (2.48) de la transformada de Borel  $B[d](u)$  alrededor de las singularidades de renormalón. La expansión se trunca como se indica en la Ec. (2.48), es decir, los términos indicados allí como ' $\mathcal{O}(\dots)$ ' no están incluidos, y esto nos da la parte singular  $B[d](u)_{\text{sing}}$ . La expresión  $d(\sigma_m e^{i\phi})_{D=0}$  se escribe como Principal Value (PV) de la transformada inversa de Borel

$$\left(d(\sigma_m e^{i\phi})_{D=0}\right)^{(\text{PV}, [N_t])} = \frac{1}{\beta_0} \frac{1}{2} \left( \int_{\mathcal{C}_+} + \int_{\mathcal{C}_-} \right) du \exp \left[ -\frac{u}{\beta_0 a(\sigma_m e^{i\phi})} \right] B[d](u)_{\text{sing}} + \delta d(\sigma_m e^{i\phi})_{D=0}^{[N_t]}. \quad (2.73)$$

Los caminos de integración  $\mathcal{C}_{\pm}$  comienzan en  $u = 0$  y van por encima y por debajo del eje real positivo en el plano  $u$  complejo hacia  $\text{Re}(u) \rightarrow +\infty$ .<sup>9</sup> La expresión  $\delta d(\sigma_m e^{i\phi})_{D=0}^{[N_t]}$  es un polinomio de la forma

$$\delta d(\sigma_m e^{i\phi})_{D=0}^{[N_t]} = (\delta d)_0 a(\sigma_m e^{i\phi}) + \dots + (\delta d)_{N_t-1} (a(\sigma_m e^{i\phi}))^{N_t}, \quad (2.74)$$

que representa los términos de corrección necesarios para que la expansión de la expresión (2.73), al expandirse en potencias de  $a(\sigma_m e^{i\phi})$ , reproduzca los términos  $d_n a(\sigma_m e^{i\phi})^{n+1}$  a  $a(\sigma_m e^{i\phi})^{N_t}$ , donde  $d_n$  son los coeficientes de la función de Adler predicho por el modelo renormalón explicado en Sec. 2.3. El polinomio de corrección es necesario porque la expresión para  $B[d](u)_{\text{sing}}$  tiene su propia truncación como se explicó anteriormente. Si bien este polinomio de corrección  $\delta d(Q^2)_{D=0}$  trae la dependencia de evaluación descrita por el índice de truncación  $N_t$ , se espera que esta dependencia de  $N_t$  ( $N_t \geq 5$ ) será significativamente más débil que en el enfoque FO. Esto porque la transformada de Borel en la ecuación (2.73) les quita a los coeficientes  $(\delta d)_n$  en los polinomios del renormalón. Esto se confirmará en nuestro análisis numérico.

<sup>9</sup>Otros detalles de los caminos  $\mathcal{C}_{\pm}$  son irrelevantes debido al teorema de Cauchy.

# Capítulo 3

## Resultados

Procedemos ahora al ajuste de las reglas de suma. Las reglas de suma de Borel-Laplace se utilizan primero para ajustarse a los datos ALEPH correspondientes, a fin de obtener, para cada método (FO, PV y CI) y cada índice de truncación  $N_t$ , un conjunto de valores óptimos de  $\alpha_s$  y de los tres condensados  $\langle O_4 \rangle$ ,  $\langle O_6^{(2)} \rangle$  y  $\langle O_6^{(1)} \rangle$ . Posteriormente, se evalúan los FESR  $a^{(2,0)}(\sigma_m)$  y  $a^{(2,1)}(\sigma_m)$  para cada método, donde el índice preferido  $N_t$  se elige de tal manera que tenga estabilidad local, es decir, evaluamos la diferencia  $|a^{(2,n)}(N_t) - a^{(2,n)}(N_t - 1)|$  con  $N_t = 4, 5, \dots$  creciendo, y miramos para que  $N_t$  este valor es mínimo. También estimamos las incertidumbres teóricas de los valores extraídos para los parámetros  $(\alpha_s, \langle \mathcal{O}_D^{(j)} \rangle)$  provenientes de las incertidumbres teóricas del coeficiente  $d_4$ , aquí usamos  $d_4 = 275 \pm 63$ . Otras incertidumbres provenientes de las incertidumbres del parámetro de la escala de renormalización  $\kappa$ , del índice de truncación  $N_t$  y también las incertidumbres provenientes de los datos experimentales  $\omega(\sigma)$ .

En nuestro ajuste de las reglas de suma (2.16), aplicamos las partes reales de la regla de suma de Borel Laplace doble-pinch Ecs. (2.56) y (2.58) - (2.60)

$$\text{Re}B_{\text{exp}}(M^2; \sigma_m) = \text{Re}B_{\text{th}}(M^2; \sigma_m). \quad (3.1)$$

En la parte teórica incluimos, además del aporte  $D = 0$ , también las contribuciones  $D = 4, 6$  (2.58). Una de las ventajas de usar estas reglas de suma, es que ahora tenemos un parámetro complejo continuo adicional  $M^2 = |M^2| \exp(i\Psi)$ . Los parámetros  $M^2$  se toman con el argumento  $\text{Arg}(M^2) = \Psi$  a lo largo de tres rayos diferentes en el primer cuadrante:  $\Psi = 0, \pi/6, \pi/4$ . Mientras que las longitudes de los rayos se toman en el rango  $0.9 \text{ GeV}^2 \leq |M^2| \leq 1.5 \text{ GeV}^2$ . En evaluaciones prácticas minimizamos los ajustes con la siguiente suma de cuadrados de las diferencias de las cantidades (3.1):

$$\chi^2 = \sum_{\alpha=1}^n \left( \frac{\text{Re}B_{\text{th}}(M_\alpha^2; \sigma_m) - \text{Re}B_{\text{exp}}(M_\alpha^2; \sigma_m)}{\delta_B(M_\alpha^2)} \right)^2. \quad (3.2)$$

Aquí,  $M_\alpha^2$  se tomó como un conjunto de puntos a lo largo de los tres rayos mencionados anteriormente. A lo largo de cada uno de los tres rayos, tomamos 11 puntos equidistantes que cubren todo el rayo. Esto significa que la suma (3.2) contiene en la práctica 33 términos. Además, en la suma (3.2), las cantidades  $\delta_B(M_\alpha^2)$  son las desviaciones estándar experimentales de  $\text{Re}B_{\text{exp}}(M_\alpha^2; \sigma_m)$ .

Para obtener la incertidumbre de los valores para los parámetros extraídos ( $\alpha_s$  y de los tres condensados  $\langle O_4 \rangle$ ,  $\langle O_6^{(2)} \rangle$  y  $\langle O_6^{(1)} \rangle$ ) vamos a proceder de la siguiente manera. Para varios valores de  $M_\alpha^2$ , las cantidades  $\text{Re}B_{\text{exp}}(M_\alpha^2; \sigma_m)$  están correlacionadas entre sí de manera complicada.

Primero explicamos cómo se obtiene la matriz de covarianza de las reglas de suma de Borel-Laplace  $\text{Re}B(M^2)$ . Los elementos de la matriz de covarianza  $U_{ij} \equiv U(\sigma_i, \sigma_j)$  para las funciones espectrales experimentales  $\omega(\sigma)$  son los siguientes valores esperados:

$$U_{ij} \equiv U(\sigma_i, \sigma_j) \equiv \langle \Delta\omega(\sigma_i)\Delta\omega(\sigma_j) \rangle \quad (3.3)$$

donde

$$\Delta\omega(\sigma_i) \equiv \omega(\sigma_i) - \langle \omega(\sigma_i) \rangle. \quad (3.4)$$

Aquí  $\langle \omega(\sigma_i) \rangle = \omega_{\text{exp}}(\sigma_i)$  es el valor promedio experimental (central) para las mediciones de  $\omega(\sigma_i)$  en el  $i$ -ésimo  $\sigma$ -bin, es decir, el bin cuya longitud es  $(\Delta\sigma)_i$  y su punto central es  $\sigma_i$ .

La matriz de covarianza  $U_B$  para las reglas de suma Borel-Laplace,  $\text{Re}B(M^2)$  se obtiene desde la evaluación del valor experimental de  $\text{Re}B(M^2)$  como una suma sobre todos los bins [cf. Eq. (2.16)]

$$\text{Re}B(M^2) = \sum_{j=1}^N (\Delta\sigma)_j f(\sigma_j; M^2) \omega(\sigma_j) \quad (3.5)$$

donde [cf. Eq. (2.55)]

$$f(\sigma_j; M^2) \equiv \text{Re } g_{M^2}(-\sigma_j) = \text{Re} \left( 1 - \frac{\sigma_j}{\sigma_m} \right)^2 \frac{1}{M^2} \exp\left(-\frac{\sigma_j}{M^2}\right). \quad (3.6)$$

La matriz de covarianza de la regla de suma Borel,  $(U_B(\Psi))_{\alpha\beta} \equiv U_B(M_\alpha^2, M_\beta^2)$ , donde  $M_\alpha^2$  es una secuencia de  $n(=33)$  valores complejos de  $M^2$  que aparecen en la suma Eq. (3.2), la podemos expresar en términos de la matriz de covarianza-bin  $U$ , Eq. (3.3), de la siguiente manera:

$$(U_B)_{\alpha\beta} \equiv U_B(M_\alpha^2, M_\beta^2) = \langle \Delta\text{Re}B(M_\alpha^2)\Delta\text{Re}B(M_\beta^2) \rangle \quad (3.7a)$$

$$= \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N (\Delta\sigma)_j (\Delta\sigma)_k f(\sigma_j; M_\alpha^2) f(\sigma_k; M_\beta^2) U_{jk}, \quad (3.7b)$$

donde  $N = 77$  (número bins) y usamos la notación

$$\Delta\text{Re}B(M^2) \equiv \text{Re}B(M^2) - \langle \text{Re}B(M^2) \rangle. \quad (3.8)$$

Aquí,  $\langle \text{Re}B(M_\alpha^2) \rangle$  es el valor experimental central de la parte real de la regla de suma Borel-Laplace en una escala  $M^2 = M_\alpha^2$ ,  $(\alpha = 1, \dots, n)$ , es decir, es la expresión (3.5) calculada con los valores espectrales experimentales centrales  $\langle \omega(\sigma_j) \rangle = \omega_{\text{exp}}(\sigma_j)$ . La raíz cuadrada de los elementos diagonales de la matriz anterior

$$\delta_B(M_\alpha^2) = (U_B(M_\alpha^2, M_\alpha^2))^{1/2}, \quad (3.9)$$

que también aparecen en la suma  $\chi^2$  de Eq. (3.2), da la desviación estándar experimental para la regla de la suma de Borel  $\text{Re}B(M^2)$  en una escala dada  $M_\alpha^2$ .

Una vez que tenemos la matriz de covarianza  $n \times n$   $U_B$  ( $n = 33$  en nuestro caso) de los valores de  $\text{Re}B_{\text{exp}}(M_\alpha^2)$ , Eq. (3.7), y observando que los valores teóricos correspondientes  $\text{Re}B_{\text{th}}(M_\alpha^2)$  que aparecen en la suma  $\chi^2$  de Eq. (3.2) dependen de varios parámetros  $p_j$  a extraer,<sup>1</sup> podemos

<sup>1</sup>  $p_1 = a(\sigma_m) = \alpha_s(\sigma_m)/\pi$ ,  $p_2 = \langle O_4 \rangle$ ,  $p_3 = \langle O_6^{(1)} \rangle$ ,  $p_4 = \langle O_6^{(2)} \rangle$ .

proceder directamente de acuerdo con el formalismo presentado en el Apéndice de Ref. [74], que da el siguiente resultado cuando las notaciones se ajustan a nuestro caso considerado:

$$\langle \delta p_i \delta p_j \rangle = (A^{-1})_{ik} (A^{-1})_{j\ell} \frac{\partial \text{Re} B_{\text{th}}(M_\alpha^2; \vec{p})}{\partial p_k} \frac{\partial \text{Re} B_{\text{th}}(M_\beta^2; \vec{p})}{\partial p_\ell} \frac{U_B(M_\alpha^2, M_\beta^2)}{U_B(M_\alpha^2, M_\alpha^2) U_B(M_\beta^2, M_\beta^2)}, \quad (3.10)$$

donde  $\vec{p} = (p_1, p_2, p_3, p_4)$ , y la matrix  $A$ ,  $4 \times 4$  is

$$A_{rs} = \frac{\partial \text{Re} B_{\text{th}}(M_\gamma^2; \vec{p})}{\partial p_r} \frac{\partial \text{Re} B_{\text{th}}(M_\gamma^2; \vec{p})}{\partial p_s} \frac{1}{U_B(M_\gamma^2, M_\gamma^2)}. \quad (3.11)$$

Los índices que aparecen repetidamente se suman. La incertidumbre experimental de  $a(\sigma_m)$ ,  $\delta a(\sigma_m)$  es  $\sqrt{\langle \delta p_1 \delta p_1 \rangle}$ ;  $\delta \langle \mathcal{O}_4 \rangle$  es  $\sqrt{\langle \delta p_2 \delta p_2 \rangle}$ ; etc. Con esto concluimos la explicación de las incertidumbres experimentales.

En los resultados para el enfoque CI de las reglas de suma, este mantiene sin cambios sus coeficientes  $d_n$  de la serie perturbativa de la función de Adler. Es cierto que transforma las potencias  $a(Q^2)^n$  de la función de Adler en diferentes funciones a través de la integración de contorno con funciones de peso específico, pero este cambio en general no tiene en cuenta las cancelaciones renormalón de las reglas de suma que tampoco se reflejan en los coeficientes  $d_n$  de la expansión de la serie CI. Los coeficientes  $d_n$  reflejan la estructura renormalón de la función de Adler  $d(Q^2)_{D=0}$ , pero no de las reglas de suma (la parte  $D = 0$  de ellas). Creemos que estos aspectos son la razón principal por la cual los valores extraídos de  $\alpha_s$  del enfoque CI difiere significativamente de los métodos FO y PV (mientras que los dos últimos métodos dan resultados mutuamente similares).

Por otro lado, la expansión FO de las reglas de suma de Borel-Laplace solo tiene suprimida los renormalones UV por una potencia, en comparación con la función de Adler  $(Q^2)_{D=0}$ ; pero los renormalones IR no se suprimen. Por lo tanto, uno podría esperar que en el Fit Global, FO con las reglas de suma nos den resultados más inestables y un valor menos confiable de los valores extraídos para  $\alpha_s$ . Sin embargo, la inclusión de las contribuciones del condensado (con  $D = 4, 6$ ) en el análisis se encarga del hecho de que las contribuciones de la función de Adler al renormalón IR no se suprimen en FO. Nuestro análisis con Borel-Laplace se realizó con las contribuciones de condensado ( $D = 4, 6$ ) incluidas. Por lo tanto, podemos argumentar que el Fit Global de FO y con las reglas de suma de Borel-Laplace nos brinda una extracción confiable de los valores de  $\alpha_s$  y de los condensados. También se espera que para PV, las reglas de suma de Borel-Laplace y los condensados brinden resultados confiables, porque en la estructura renormalón de la función de Adler se tiene en cuenta correctamente en una forma aislada y resumada ( $\delta d$ ), como se ve en eq. (2.73) (la parte  $B[d](u)_{\text{sing}}$ ).

Sin embargo, se espera que el Fit Global de CI con las reglas de suma de Borel-Laplace presente problemas nuevamente, porque el enfoque de CI truncado no suprime las principales contribuciones renormalón UV y estropea de manera significativa la relación entre los efectos renormalón IR (en el  $D = 0$  parte de Borel Laplace) y las contribuciones de condensado. En este contexto, recordamos que el CI truncado no es una serie perturbativa en potencias, ni representa un resumación de la cantidad evaluada (porque se trunca).<sup>2</sup>

<sup>2</sup>Argumentos algo relacionados para la preferencia del método FO por sobre el CI, en FESRs para decaimiento semihadrónico de  $\tau$ , fueron presentados en las Refs. [68, 69, 70, 101].

Por las razones explicadas anteriormente, consideramos correcto incluir solo los resultados de FO y PV como los resultados finales a nuestro trabajo, y no incluir los valores de los  $\alpha_s$  extraídos de las evaluaciones CI; aunque de igual manera se presentaran a modo de ejemplo.

La expresión teórica  $\text{Re}B_{\text{th}}(M_\alpha^2; \sigma_m)$  ahora depende de cuatro parámetros diferentes:  $\alpha_s$  y  $\langle O_4 \rangle$ ,  $\langle O_6^{(2)} \rangle$  y  $\langle O_6^{(1)} \rangle$ . La minimización de  $\chi^2$  de la eq. (3.2) se realiza en el sentido global, es decir, simultáneamente con respecto a estos cuatro parámetros, resultando en una calidad de los ajustes muy buena,  $\chi^2 \sim 10^{-3}$ , cf. Fig. 3.1.

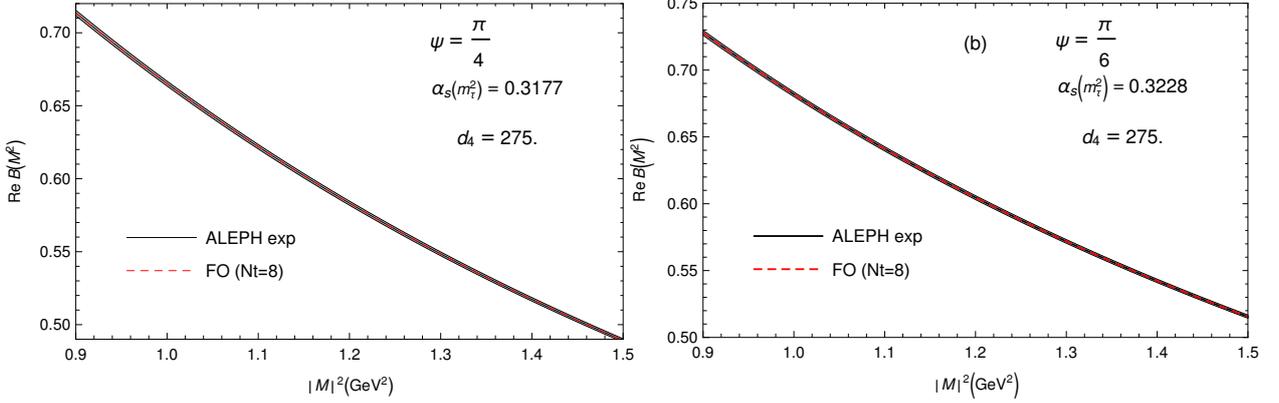


Figura 3.1: Los valores ajustados de  $\text{Re}B(M^2; \sigma_m)$  para  $\Psi = \pi/4$  y  $\pi/6$ . La estrecha banda gris representa las predicciones experimentales. La línea discontinua roja dentro de la banda es el resultado del ajuste global de FO con índice de truncación  $N_t = 8$ . Se obtiene una curva similarmente bien para el rayo  $\Psi = 0$ .

### 3.1. Resultados para Dimensiones Anómalas en large- $\beta_0$

En la aproximación formal para large- $\beta_0$ , tenemos las dimensiones anómalas

$$\kappa^{(2)} = \gamma^{(1)}(\mathcal{O}_6^{(2)})/\beta_0 = -1 \quad \kappa^{(1)} = \gamma^{(1)}(\mathcal{O}_6^{(1)})/\beta_0 = 0 \quad (3.12)$$

para la parte  $D = 0$  de la función de Adler en  $B[\tilde{d}](u)$ , en eq. (2.46) los índices de la potencia  $k = 1 - \kappa^{(j)} = 2, 1$  para  $\gamma^{(2)}$  y  $\gamma^{(1)}$  respectivamente.

Los valores extraídos para  $\alpha_s$ , con incertidumbres de varias fuentes proporcionadas por separado, son

$$\alpha_s(m_\tau^2)^{(\text{FO})} = 0.3228 \pm 0.0024(\text{exp})_{+0.0070}^{-0.0026}(\kappa)_{+0.0079}^{-0.0103}(d_4)_{-0.0057}^{+0.0081}(N_t) \quad (3.13a)$$

$$= 0.3228_{-0.0123}^{+0.0135} \approx 0.323_{-0.012}^{+0.014} \quad (3.13b)$$

$$\alpha_s(m_\tau^2)^{(\text{PV})} = 0.3269 \pm 0.0024(\text{exp})_{+0.0102}^{+0.0007}(\kappa)_{+0.0155}^{-0.0064}(d_4)_{-0.0006}^{+0.0092}(N_t)_{-0.0067}^{+0.0167}(\text{amb}) \quad (3.13c)$$

$$= 0.3269_{-0.0096}^{+0.0267} \approx 0.327_{-0.010}^{+0.027} \quad (3.13d)$$

$$\alpha_s(m_\tau^2)^{(\text{CI})} = 0.3488 \pm 0.0025(\text{exp})_{+0.0004}^{+0.0078}(\kappa) \pm 0.0000(d_4)_{+0.0119}^{-0.0027}(N_t) \quad (3.13e)$$

$$= 0.3488_{-0.0037}^{+0.0144} \approx 0.349_{-0.004}^{+0.014} \quad (3.13f)$$

Se extrajeron los valores centrales para el índice de truncación  $N_t = 8, 8, 4$  para los métodos FO, PV y CI, respectivamente, cf. Cuadro 3.1<sup>3</sup>. Estos valores de  $N_t$  se obtuvieron buscando la

<sup>3</sup>En las Tablas IV y V de Ref. [58], los valores de los condensados  $\langle O_D \rangle$  se escribieron en unidades  $10^{-3} \text{ GeV}^D$ .

Cuadro 3.1: Los resultados para  $\alpha_s(m_\tau^2)$  y los tres condensados (del canal V+A completo) obtenidos por la regla de la suma de Borel-Laplace. Se incluyen los números de truncación óptimos ( $N_t$ ) y los valores de la calidad  $\chi^2$  [cf. ec. (3.2)]. Tenga en cuenta que  $\langle O_6^{(2)} \rangle$  se da en unidades de  $10^{-4} \text{ GeV}^6$  porque en general es más pequeño que  $\langle O_6^{(1)} \rangle$  en un orden de magnitud.

método	$\alpha_s(m_\tau^2)$	$\langle O_4 \rangle (10^{-3} \text{ GeV}^4)$	$\langle O_6^{(1)} \rangle (10^{-3} \text{ GeV}^6)$	$\langle O_6^{(2)} \rangle (10^{-4} \text{ GeV}^6)$	$N_t$	$\chi^2$
FO	$0.3228_{-0.0123}^{+0.0135}$	$-5.3_{-5.2}^{+4.8}$	$-2.8_{-0.1}^{+1.5}$	$+7.1_{-4.4}^{+2.3}$	8	$1.3 \times 10^{-3}$
CI	$0.3488_{-0.0037}^{+0.0144}$	$-3.6_{-3.8}^{+1.5}$	$-3.2_{-6.8}^{+2.1}$	$+5.8_{-2.8}^{+10.1}$	4	$0.5 \times 10^{-3}$
PV	$0.3269_{-0.0096}^{+0.0267}$	$-4.6_{-7.0}^{+2.4}$	$-6.7_{-19.0}^{+5.3}$	$+8.9_{-6.0}^{+26.4}$	8	$3.1 \times 10^{-3}$

estabilidad local de los FESR resultantes  $a^{(2,j)}(\sigma_m)$  ( $j = 0, 1$ ) bajo variación de  $N_t$  (ver también Figs. 3.2). En los resultados (3.13), el símbolo ' $\kappa$ ' representa la variación cuando el parámetro de escala de renormalización  $\kappa$  ( $\equiv \mu^2/Q^2$ ) es variado desde  $\kappa = 1$  hasta  $\kappa_{\max} = 2$  y hasta  $\kappa_{\min} = 2/3$ , respectivamente.<sup>4</sup> Por ejemplo, en las conversiones, para el caso FO tenemos que la variación de  $\alpha_s$  es de  $-0.0026$  cuando  $\kappa$  crece a 2, y es  $+0.0070$  cuando cae a  $\kappa = 2/3$ . En el símbolo ' $N_t$ ' está la variación máxima cuando el número de truncación varía alrededor de su valor central  $N_t$ : en los casos de FO, y PV, la variación fue en el intervalo  $N_t = 8_{-3}^{+2}, 8_{-3}^{+2}$ , respectivamente; en el caso de CI,  $N_t = 4_{-1}^{+2}$ , es decir,  $N_t = 2$  no se consideró, por ser una truncación extrema). Para el símbolo ' $d_4$ ' está la variación cuando el coeficiente  $d_4$  varía según Eq. (2.47) [cf. también cuadro 2.2]. Para el símbolo '(exp)', las variaciones son estimaciones (aproximadas) de las incertidumbres experimentales. En el método PV, existe una (cuarta) fuente adicional de incertidumbre teórica '(amb)', que es una estimación de la incertidumbre debida a la ambigüedad de integración de Borel para la función de Adler [58] por los renormalones IR.

En los resultados Eqs. (3.13) y Cuadro 3.1, las incertidumbres totales se obtuvieron sumando las diversas incertidumbres en cuadratura. Vemos de Eqs. (3.13) que las fuentes principales de incertidumbres son teóricas, especialmente ' $d_4$ ' y ' $\kappa$ '.

En las Figs. 3.2(a)-(b) presentamos los momentos FESR doble-pinch  $a^{(2,0)}(\sigma_m)$  y  $a^{(2,1)}(\sigma_m)$ , Ec. (2.63), en cada índice de truncación  $N_t$ , para los métodos de evaluación (FO y PV). Para cada  $N_t$  y cada método, usamos los valores correspondientes de los parámetros  $\alpha_s$ ,  $\langle O_4 \rangle$ ,  $\langle O_6^{(1)} \rangle$  y  $\langle O_6^{(2)} \rangle$  obtenidos a partir de los ajustes de Borel-Laplace doble-pinch. De estas Figuras podemos deducir que los valores (relativamente) más estables bajo la variación de  $N_t$  son  $N_t = 8, 4, 8$  para FO, CI, PV, respectivamente. Por esta razón, elegimos estos valores de  $N_t$  como los valores centrales para los respectivos métodos en Eqs. (3.13). Podemos ver que, en general, y para un rango razonablemente amplio de  $N_t$ , los valores pronosticados resultantes de  $a^{(2,0)}(\sigma_m)$  y  $a^{(2,1)}(\sigma_m)$  son bien compatibles con los resultados experimentales.

Uno puede preguntarse cómo se comportan los momentos  $a^{(2,0)}(\sigma_m)$  y  $a^{(2,1)}(\sigma_m)$  bajo la variación de  $N_t$  cuando los parámetros  $\alpha_s$ ,  $\langle O_4 \rangle$ ,  $\langle O_6^{(1)} \rangle$  y  $\langle O_6^{(2)} \rangle$  no varían, sino que se mantienen fijos. En ese caso, solo la contribución  $D = 0$  varía con  $N_t$ , mientras que las contribuciones  $D = 4, 6$  se vuelven independientes de  $N_t$ . En las Figs. 3.3(a)-(b) presentamos estos resultados, usando para  $\alpha_s$  el valor central de cada método, es decir, los valores centrales correspondientes

<sup>4</sup>Si reducimos  $\kappa$  a  $\kappa_{\min} = 1/2$ , la variación de los resultados aumentaría debido a la proximidad de las singularidades del acoplamiento pQCD  $a(0.5\sigma_m e^{i\phi})$  en tal caso ( $0.5\sigma_m = 1.4 \text{ GeV}^2$  es bastante bajo; el polo y enramamiento de Landau está en alrededor de  $0.4 \text{ GeV}^2$ ), y la dependencia en  $\kappa$  se convertiría (artificialmente) en la incertidumbre dominante.

en el Cuadro 3.1.

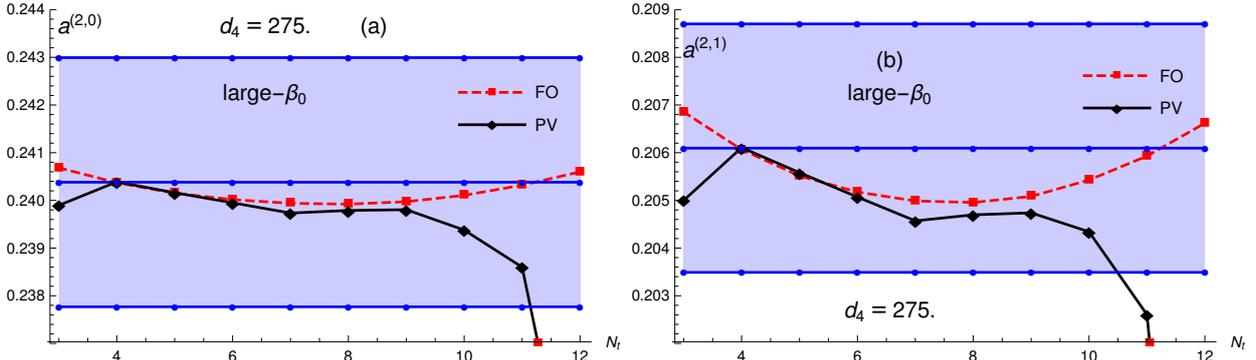


Figura 3.2: Para LB, el momento  $a^{(2,0)}(\sigma_m)$  (a) y  $a^{(2,1)}(\sigma_m)$  (b), en función del índice de truncación  $N_t$ , en los enfoques FO y PV. En cada  $N_t$ , se utilizaron los valores correspondientes de los parámetros  $\alpha_s$  y  $\langle O_D \rangle$  obtenidos del ajuste de Borel-Laplace. La banda azul claro representa los valores experimentales (basados en los datos de ALEPH).

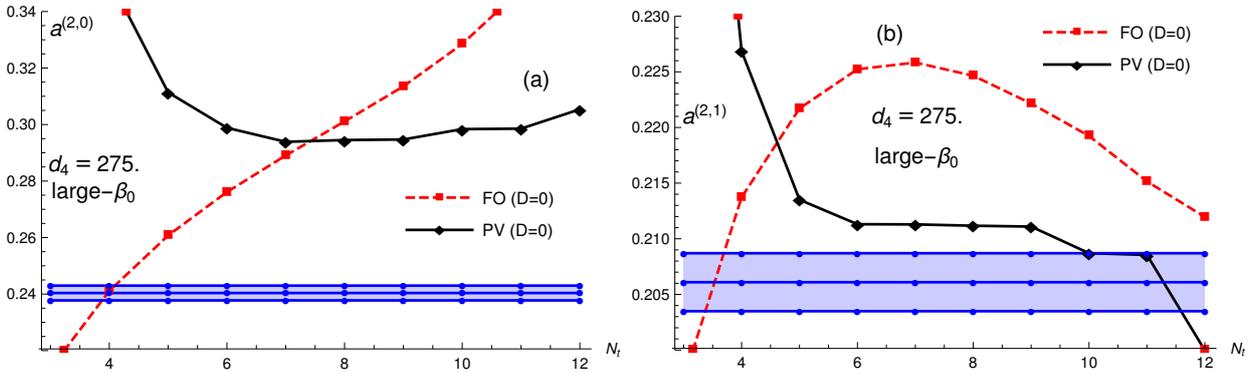


Figura 3.3: Para LB, el momento  $a^{(2,0)}(\sigma_m)_{D=0}$  (a) y  $a^{(2,1)}(\sigma_m)_{D=0}$  (b), en función del índice de truncación  $N_t$ , en los enfoques FO y PV. Para todos los  $N_t$ , el valor correspondiente del parámetro  $\alpha_s$  se mantuvo fijo para cada método. La banda azul experimental es muy estrecha a esta escala.

Podemos ver que, en contraste con los resultados de las Figs. 3.2(a)-(b), ahora las predicciones son mucho más inestables bajo la variación del índice de truncación  $N_t$ , indicando la importancia de la inclusión de las contribuciones de OPE  $D = 4$  y  $D = 6$  en el análisis de ajuste de Borel-Laplace (en cada  $N_t$ ).

Al final de esta Sección, deseamos abordar la siguiente pregunta. En el esquema  $\overline{\text{MS}}$  considerado, conocemos la función  $\beta$  (2.20) solo hasta el nivel de cinco loop (es decir, hasta el coeficiente  $\beta_4$  [100]), pero no obstante usamos en los enfoques FO y PV el índice de truncación relativamente alto  $N_t = 8$ . En principio, debido a las conexiones (2.34), los coeficientes de la función de Adler  $d_n$  generados a partir de los coeficientes de perturbación  $\tilde{d}_{n-s}$  de  $B[\tilde{d}](u)$  involucran los coeficientes  $k_s(n+1-s)$  ( $s = 1, \dots, n-1$ ) que a su vez son funciones de  $\beta_j$  ( $j = 1, \dots, n-1$ ). Es decir,  $d_6$  implica  $\beta_5$  y  $d_7$  (en  $a^{N_t} = a^8$ ) implica los coeficientes  $\beta_5$  y  $\beta_6$  que aquí se toman como cero. Tal efecto de truncación de la función  $\beta$ , es decir, establecer  $\beta_5 = \beta_6 = 0$ , en principio cambia los coeficientes  $d_n$  ( $n \geq 6$ ) deducidos de la transformada de Borel  $B[\tilde{d}](u)$  Eq. (2.46) del modelo renormalón. En [65], estos efectos fueron investigados en el caso del llamado esquema Lambert MiniMOM (LMM), y allí se demostró que la truncación del esquema LMM en el nivel de cuatro loop ( $\beta_j = 0$  for  $j \geq 4$ ) da resultados numéricamente muy similares para los parámetros relevantes  $\mathcal{E}_{j,k}^{(D)}$  y proporciones de residuos  $d_{p,k}^X / \tilde{d}_{p,k}^X$ , lo que lleva a expresiones similares para

la transformada de Borel  $B[d](u)$  de la función de Adler en los dos casos y, por lo tanto, a valores similares de  $d_n$  ( $n \geq 5$ ).<sup>5</sup> Por estas razones, creemos que los valores de los coeficientes  $d_n$  en el modelo renormalón no se ven afectados significativamente por la configuración  $\beta_5 = \beta_6 = 0$ .

### 3.1.1. Resultado Final y Conclusión

Al aplicar reglas de suma de Borel-Laplace de doble-pinch para los casos large- $\beta_0$  (LB) a los datos de decaimiento semihadrónicos  $\tau$  para el canal V+A de ALEPH, usamos para la contribución de  $D = 0$  la extensión renormalón de función de Adler [65] para los términos de orden superior. Se aplicaron los métodos (FO, CI, PV). El índice de truncación óptimo  $N_t$  (de la contribución de  $D = 0$  Adler) en las reglas de suma de Borel-Laplace se fijó de tal manera que los momentos FESR predichos  $a^{(2,0)}$  y  $a^{(2,1)}$  mostró estabilidad local bajo la variación de  $N_t$ .

Los métodos de evaluación de las reglas de suma, FO y PV, conducen a series truncadas<sup>6</sup> que tienen suprimida la contribución del renormalón principal de la función de Adler: el método CI en las reglas de suma no tiene esta propiedad.<sup>7</sup>

Los tres métodos diferentes (FO, CI, PV) dan los principales resultados presentados, para cada método, en Eqs. (3.13) y Cuadro 3.1. Por los motivos argumentados anteriormente, excluimos los métodos CI de nuestro promedio, así el promedio aritmético de los dos métodos (FO y PV) da

$$\alpha_s(m_\tau^2) = 0.3248_{-0.0124}^{+0.0137} \quad (\text{FO} + \text{PV}) \quad (3.14a)$$

$$\Rightarrow \alpha_s(M_Z^2) = 0.1193 \pm 0.0016 \quad (3.14b)$$

Si usamos, en lugar de la estimación (2.47) para  $d_4$  la estimación más alta  $d_4 = 338.19 \pm 63.19$ , entonces la repetición del análisis descrito da, en lugar del resultado (3.14), valores algo más bajos  $\alpha_s(m_\tau^2) = 0.3198_{-0.0148}^{+0.0139}$  y  $\alpha_s(M_Z^2) = 0.1187_{-0.0019}^{+0.0016}$ . Notamos que el último resultado es significativamente más alto que el resultado correspondiente cuando se usa el OPE más ingenuo (2.8) (truncado en  $D \equiv 2k = 8$ ) para la función de Adler [58] (y  $d_4 = 338.19 \pm 63.19$ ):  $\alpha_s(m_\tau^2) = 0.3116 \pm 0.0073$  [ $\alpha_s(M_Z^2) = 0.1176 \pm 0.0010$ ]. Los valores del acoplamiento extraído aumentan significativamente cuando usamos la forma mejorada (2.11) de OPE (correspondientemente truncada en  $D \equiv 2k = 6$ ), en lugar de la forma tradicionalmente utilizada (truncado) en OPE (2.8):  $\delta\alpha_s(m_\tau^2) \approx +0.008$ . Además, los valores aumentan aún más (pero algo menos) cuando disminuimos la estimación  $d_4 = 338.19 \pm 63.19$  a  $d_4 = 275. \pm 63.19$  [Eq. (2.47)]:  $\delta\alpha_s(m_\tau^2) \approx +0.004$ .

Dado que nuestros resultados tienen un índice de truncación relativamente alto  $N_t = 8$  (donde  $a^{N_t}$  es la potencia donde se realiza la truncación) para los enfoques FO y PV, uno puede preguntarse cuánto dependen los resultados obtenidos del modelo renormalón. En FO tenemos la independencia de la extensión renormalón para  $N_t = 5$  [el coeficiente  $d_4$  se toma de acuerdo con la Eq. (2.47)], y esto también es cierto en gran medida para la aproximación PV

<sup>5</sup>Para detalles, las notaciones y los resultados, nos referimos a [65], y en particular a las Tablas I y II allí (casos LMM y TLMM). Para la definición de la función LMM  $\beta$  (de tipo Padé), nos referimos a la Eq. (8) de [99].

<sup>6</sup>En el caso PV, la serie truncada se refiere a la serie  $\delta d(\sigma_m e^{i\phi})_{D=0}^{[N_t]}$  en Eq. (2.73) que está libre de las principales singularidades de renormalón, da las integrales de contorno correspondientes (reglas de suma) también libres de singularidades de renormalones principales.

<sup>7</sup>Estos argumentos, presentados de manera muy general en [58] (especialmente el Apéndice A), también son compatibles con argumentos algo relacionados presentados en [68, 69, 70]. Se propuso e investigó una construcción de transformadas de Borel de reglas de suma de CI en [101] (cf. también [102]).

. Como puede verse en los resultados (3.13a) y (3.13c), los valores extraídos del acoplamiento cambian muy poco si se toma  $N_t = 5$  en lugar de  $N_t = 8$ : el valor central el valor de  $\alpha_s(m_\tau^2)$  cambia de 0,3228 a 0,3171 en el caso FO, y de 0,3269 a 0,3263 en el caso PV; el valor central promedio  $\alpha_s(m_\tau^2) = 0.3248$  Eq. (3.14) cambia a  $\alpha_s(m_\tau^2) = 0.3219$  cuando  $N_t = 5$  en los tres métodos [y  $\alpha_s(M_Z^2)$  cambia de 0.1193 a 0.1189].

## 3.2. Resultados para Dimensiones Anómalas más allá de large- $\beta_0$

En la aproximación formal para más allá de large- $\beta_0$ , tenemos las dimensiones anómalas

$$\kappa^{(2)} = \gamma^{(1)}(\mathcal{O}_6^{(2)})/\beta_0 = 0.625 \quad \kappa^{(1)} = \gamma^{(1)}(\mathcal{O}_6^{(1)})/\beta_0 = 0.222 \quad (3.15)$$

para la parte  $D = 0$  de la función de Adler en  $B[\tilde{d}](u)$ , en eq. (2.46) los índices de la potencia  $k = 1 - \kappa^{(j)} = 0.375, 0.778$  para  $\gamma^{(1)}(\mathcal{O}_6^{(2)})/\beta_0$  y  $\gamma^{(1)}(\mathcal{O}_6^{(1)})/\beta_0$  respectivamente.

Los principales resultados de este análisis se presentan en el cuadro 3.2, también presentamos los valores del condensado efectivo  $D = 6$

$$\langle O_6^{\text{(eff)}} \rangle = \langle O_6^{(2)} \rangle a(\sigma_m)^{\kappa_2} + \langle O_6^{(1)} \rangle a(\sigma_m)^{\kappa_1} \quad (\kappa_2 = 0.222, \kappa_1 = 0.625), \quad (3.16)$$

que aparece en el OPE (2.11) de la función Adler en  $Q^2 = \sigma_m (= 2.8 \text{ GeV}^2)$ . En este condensado, como se puede ver en el Cuadro 3.2, produce una cancelación significativa entre las dos contribuciones. A modo de comparación, también presentamos en el Cuadro los valores obtenidos por CI. Sin embargo, los valores de CI extraídos no se utilizan en nuestros resultados finales porque las series de CI no son series en potencias de  $a(\sigma_m)$  ni en derivadas logarítmicas  $\tilde{a}_n(\sigma_m)$ , y no reflejan la estructura renormalón de la función de Adler y de las reglas de suma.

Las incertidumbres en el Cuadro 3.2 provienen de fuentes teóricas y experimentales. Los valores finales extraídos de  $\alpha_s(m_\tau^2)$ , para cada método y con incertidumbres separadas, son

$$\alpha_s(m_\tau^2)^{\text{(FO)}} = 0.3177 \pm 0.0023 (\text{exp})_{+0.0034}^{-0.0008} (\kappa)_{+0.0050}^{-0.0082} (d_4)_{-0.0029}^{+0.0033} (N_t) \quad (3.17a)$$

$$= 0.3177_{-0.0090}^{+0.0073} \approx 0.318_{-0.009}^{+0.007} \quad (N_t = 8_{-3}^{+2}), \quad (3.17b)$$

$$\alpha_s(m_\tau^2)^{\text{(PV)}} = 0.3195 \pm 0.0023 (\text{exp})_{-0.0023}^{-0.0013} (\kappa)_{+0.0035}^{-0.0086} (d_4)_{+0.0031}^{-0.0001} (N_t) \mp 0.0003 (\text{amb}) \quad (3.17c)$$

$$= 0.3195_{-0.0092}^{+0.0053} \approx 0.320_{-0.009}^{+0.005}, \quad (N_t = 5 \pm 2), \quad (3.17d)$$

$$\alpha_s(m_\tau^2)^{\text{(CI)}} = 0.3432 \pm 0.0027 (\text{exp})_{+0.0018}^{+0.0102} (\kappa)_{+0.0121}^{-0.0058} (N_t) \quad (3.17e)$$

$$= 0.3432_{-0.0064}^{+0.0161} \approx 0.343_{-0.006}^{+0.016} \quad (N_t = 4_{-1}^{+2}). \quad (3.17f)$$

Como se mencionó anteriormente, los valores de CI se dan aquí solo para comparar. Los valores anteriores de  $\alpha_s(m_\tau^2)$  se extrajeron para los métodos FO, PV y CI con los índices de truncación  $N_t = 8, 5, 4$ , respectivamente. Las incertidumbre en eq.(3.17) fueron explicadas en detalle en el caso LB después de ecuación (3.13).

Además, las incertidumbres totales en las Ecs. (3.17) y la Tabla 3.2 se obtuvieron sumando todas estas incertidumbres separadas en cuadratura. Es evidente a partir de las Ecs. (3.17) que las incertidumbres teóricas son significativamente mayores que las experimentales, y que la incertidumbre ' $d_4$ ' suele ser la dominante.

Cuadro 3.2: Los valores extraídos de  $\alpha_s(m_\tau^2)$  y los condensados [del canal completo (V+A)] obtenidos mediante la regla de suma de Borel-Laplace descrita. Se incluyen los números de truncación óptimos ( $N_t$ ) y los valores de  $\chi^2$  [cf. el texto y la ecuación (3.2)]. Tenga en cuenta que  $\langle O_6^{\text{eff}} \rangle$  se da en unidades de  $10^{-3} \text{ GeV}^6$  porque en general es más pequeño que  $\langle O_6^{(j)} \rangle$  ( $j = 1, 2$ ) en un orden de magnitud.

método	$\alpha_s(m_\tau^2)$	$\langle O_4 \rangle (10^{-3} \text{ GeV}^4)$	$\langle O_6^{(1)} \rangle (10^{-2} \text{ GeV}^6)$	$\langle O_6^{(2)} \rangle (10^{-2} \text{ GeV}^6)$	$\langle O_6^{\text{eff}} \rangle (10^{-3} \text{ GeV}^6)$	$N_t$	$\chi^2$
FO	$0.3177^{+0.0073}_{-0.0090}$	$-3.8^{+4.0}_{-3.4}$	$-3.6^{+2.0}_{-0.6}$	$+1.9^{+0.3}_{-1.1}$	$+2.4^{+0.9}_{-1.4}$	8	$3.1 \times 10^{-3}$
PV	$0.3195^{+0.0053}_{-0.0092}$	$-2.7 \pm 0.9$	$-2.3^{+0.4}_{-3.0}$	$+1.3^{+1.5}_{-0.1}$	$+2.4^{+1.4}_{-0.3}$	5	$2.0 \times 10^{-3}$
CI	$0.3432^{+0.0161}_{-0.0064}$	$-2.6^{+1.0}_{-2.0}$	$-2.2^{+1.0}_{-3.7}$	$+1.1^{+1.5}_{-0.4}$	$+0.8^{+0.3}_{-0.1}$	4	$0.2 \times 10^{-4}$

Como se mencionó anteriormente, los índices de truncación óptimos para  $N_t$  en cada método de evaluación, están determinados por la estabilidad local de los FESR  $a^{(2,0)}(\sigma_m)$  y  $a^{(2,1)}(\sigma_m)$  bajo la variación de<sup>8</sup>  $N_t$ . Presentamos en las Figs. 3.4(a)-(b) los valores de los momentos FESR teóricos  $a^{(2,0)}(\sigma_m)$  y  $a^{(2,1)}(\sigma_m)$ , Eq. (2.63b), para cada índice de truncación  $N_t$ , para los dos métodos de evaluación (FO, PV).

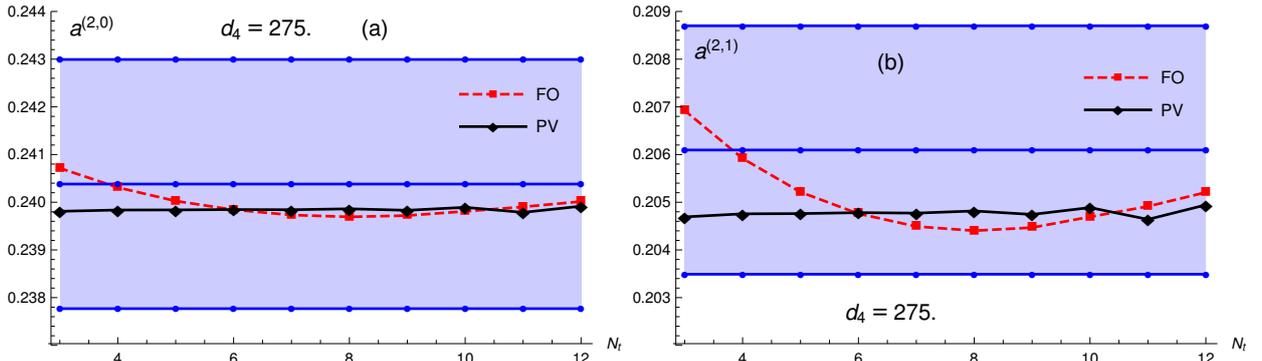


Figura 3.4: Para bLB, los valores teóricos resultantes de los momentos  $a^{(2,0)}(\sigma_m)$  (a) y  $a^{(2,1)}(\sigma_m)$  (b), como función del índice de truncación  $N_t$ , en los métodos (FO, PV). Los valores experimentales, basados en datos ALEPH, están representados por la banda gris claro.

También incluimos la banda de los valores experimentales correspondientes (2.63a) basados en los datos de ALEPH. Podemos ver en estas Figuras que la estabilidad local se alcanza en  $N_t = 8, 5$  para los métodos FO, PV, respectivamente.

Los resultados para los momentos  $a^{(2,n)}(\sigma_m)$  presentados en las Figs. 3.4, fueron evaluados con  $\alpha_s$  y  $\langle \mathcal{O}_D \rangle$ . Estos últimos valores se obtuvieron mediante el ajuste de las reglas de suma de Borel-Laplace a los valores experimentales para cada  $N_t$  por separado, como consecuencia, los valores resultantes de  $a^{(2,n)}(\sigma_m)$  también estén dentro de la banda experimental y, por lo tanto, relativamente estables bajo la variación de  $N_t$ . Esta expectativa es confirmada por los resultados en las Figs. 3.4. Además cuando los valores de  $\alpha_s$  no varían, y tampoco los valores de los condensados, solo la parte  $D = 0$  de los momentos,  $a^{(2,n)}(\sigma_m)_{D=0}$ , no varía con  $N_t$ , por lo tanto presentamos en las Figs. 3.5(a)-(b) para valores fijos de  $\alpha_s$ , es decir, el valor central del método correspondiente (cf. Table 3.2).

<sup>8</sup>Recordemos que cada método de evaluación implica una truncación en el índice  $N_t$ , y que el ajuste descrito de la regla de la suma de Borel-Laplace nos da para cada método en cada  $N_t$  un conjunto separado de valores óptimos de  $\alpha_s(m_\tau^2)$ ,  $\langle O_4 \rangle$ ,  $\langle O_6^{(2)} \rangle$ , y  $\langle O_6^{(1)} \rangle$ .

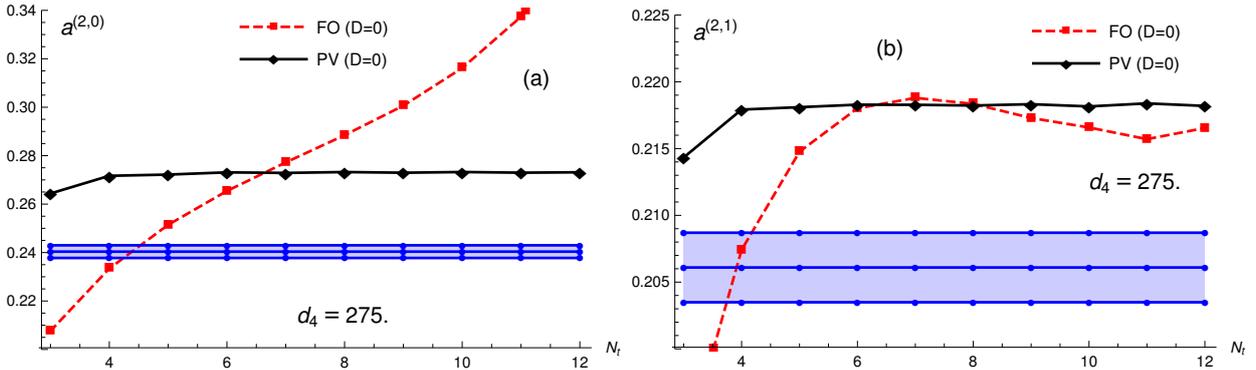


Figura 3.5: Para bLB, los valores del momento  $a^{(2,0)}(\sigma_m)_{D=0}$  (a), y  $a^{(2,1)}(\sigma_m)_{D=0}$  (b), en función del índice de truncación  $N_t$ , para los dos métodos considerados FO y PV, utilizando para el acoplamiento un valor fijo,  $\alpha_s(m_\tau^2) = 0.3177, 0.3195$ , respectivamente [cf. Eqs. (3.17)]. La banda gris claro (azul) representa los resultados experimentales para estos momentos.

Como podemos ver de la comparación de las Fig. 3.4 con Fig. 3.5, las predicciones para los momentos  $a^{(2,n)}(\sigma_m)$  en FO son mucho más estables bajo la variación de  $N_t$  cuando se incluyen las contribuciones OPE  $D = 4, 6$  y los valores de  $\alpha_s$  y de los condensados. En el método PV (resumación de Borel), la mejora en la estabilidad también es significativa, pero no tan drástica. Es decir, las variaciones  $\delta a^{(2,n)}(\sigma_m)$  bajo la variación de  $N_t$  son  $\sim 10^{-5}$  en las Figs. 3.4(a)-(b) y  $\sim 10^{-4}$  en las Figs. 3.5 (cuando  $N_t \geq 4$ ) para el método PV.

Para ver más claramente cómo los valores de los parámetros, extraídos de las reglas de suma de Borel-Laplace, dependen de  $N_t$  en los tres métodos, en la Fig. 3.6 presentamos los valores extraídos de  $\alpha_s(m_\tau^2)$ , y en las Figs 3.7(a)-(b) con los valores extraídos de los condensados ( $V+A$ )  $\langle O_4 \rangle$  y  $\langle O_6^{(\text{eff})} \rangle$ , en función de  $N_t$ , para los tres métodos considerados.

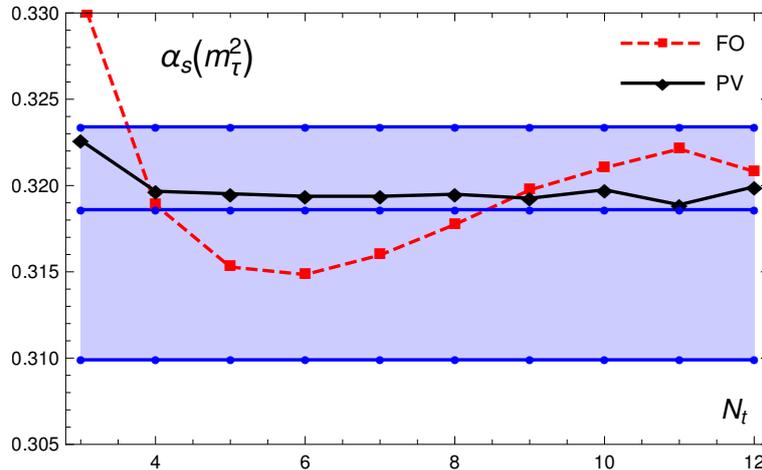


Figura 3.6: Los valores de  $\alpha_s(m_\tau^2)$  extraídos de la regla de suma de Borel-Laplace, en función del índice de truncación  $N_t$ , para cada uno de los métodos (FO y PV). La banda gris claro (azul) representa la banda de los valores promedio finales  $\alpha_s(m_\tau^2) = 0.3186^{+0.0052}_{-0.0092}$ , Eq. (3.18a) en la siguiente Sección.

Como podemos ver en todas estas Figuras 3.4-3.7, en la práctica, el método PV, Eq. (2.73) parece ser mejor que FO. Una explicación de esto es que la mayor parte de los efectos renormalón están incluidos en la integral de Borel (PV de la transformada inversa de Borel) en la Ec. (2.73), mientras que la dependencia  $N_t$  solo se siente en la serie de perturbaciones de corrección trun-

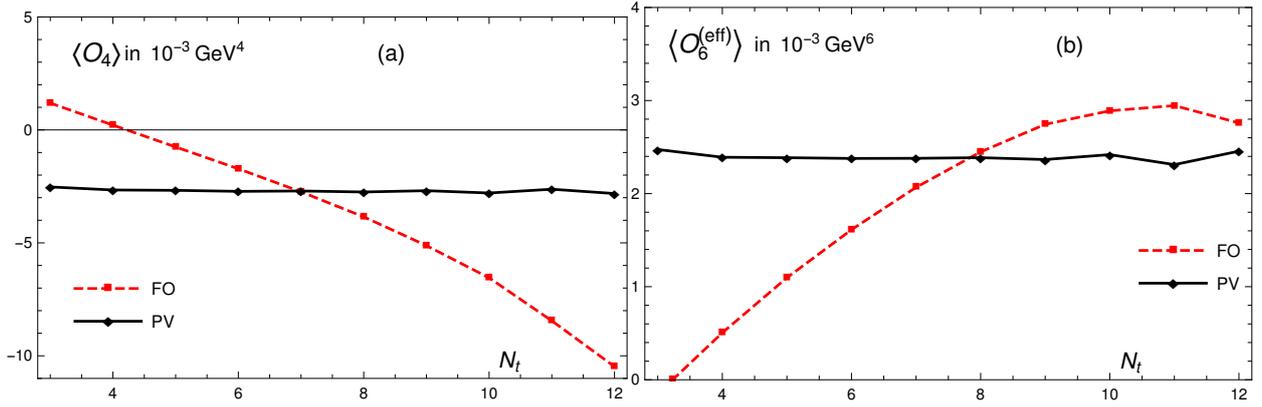


Figura 3.7: Los valores de los condensados del canal (V+A)  $\langle O_4 \rangle$  (a), y  $\langle O_6^{\text{eff}} \rangle$  (b), extraídos de la suma de Borel-Laplace regla, en función del índice de truncación  $N_t$ , para cada uno de los métodos (FO y PV).

Cuadro 3.3: Los valores de los coeficientes de los parámetros  $d_n$  y  $(\delta d)_n$ , para el caso central donde  $d_4 = 275$  (y  $\kappa = 1$ ) y las razones  $(\delta d)_n/d_n$ .

$n$ :	3	4	5	6	7	8	9	10
$d_n$ :	49.0757	275	3206.48	16901.6	358634.	621177.	$7.52194 \times 10^7$	$-5.21168 \times 10^8$
$(\delta d)_n$ :	22.0585	14.1972	255.489	-661.352	11178.3	-97789.3	$1.1759 \times 10^6$	$-1.34274 \times 10^7$
$(\delta d)_n/d_n$	0.44948	0.0516262	0.0796792	-0.0391296	0.031169	-0.157426	0.0156329	0.0257641

cada  $\delta d(\sigma_m e^{i\phi})_{D=0}^{[N_t]}$  Eq. (2.74) que está en gran parte libre de los efectos renormalón. En el Cuadro 3.3 presentamos los valores de los coeficientes  $(\delta d)_n$  de esta serie frente a los coeficientes  $d_n$  de la función de Adler ( $D = 0$ ) generada por la función renormalón explicada en Sec. 2.3. En este cuadro (3.3) podemos ver que al aumentar  $n$ , el crecimiento de  $d_n$  está prácticamente ausente en los coeficientes  $(\delta d)_n/d_n$  es chico y, en general, disminuye cuando  $n$  crece.

### 3.2.1. Resultado Final y Conclusión

En este trabajo, mejoramos nuestros trabajos anteriores [58, 59] a la aplicación de las reglas de suma Borel-Laplace de doble-pincha a los datos de decaimiento  $\tau$  semihadronico para el canal (V+A) de ALEPH. En [58] aplicamos el OPE simple (2.11) hasta  $D = 8$ , mientras que en [59] aplicamos OPE de la forma (2.11) para los índices de potencia de la contribución  $D = 6$ :  $k^{(2)} = -1$  y  $k^{(1)} = 0$  que corresponde a la aproximación large- $\beta_0$ , y no incluimos términos con  $D > 6$ . En ambos trabajos [58, 59], la parte  $D = 0$  de la función de Adler se construyó de acuerdo con el supuesto large- $\beta_0$  en el sector de renormalón de IR  $u = 3$ . En el presente trabajo, usamos para los índices  $k^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ) de la contribución  $D = 6$  OPE (2.11) los valores  $k^{(2)} (\equiv \gamma^{(1)}(O_6^{(2)})/\beta_0) \approx 0.222$  y  $k^{(1)} (\equiv \gamma^{(1)}(O_6^{(1)})/\beta_0) \approx 0,625$ , según se obtiene en el cálculo de las dimensiones anómalas efectivas de orden principal  $\gamma^{(1)}(O_6^{(j)})$  de la dimensión  $D = 6$  operadores  $O_6^{(j)}$  en la función de Adler para el canal (V+A) [60]. Otros índices  $k^{(j)}$  ( $j \geq 3$ ) se ignoran aquí. Además, se sabe que la dimensión anómala efectiva de orden principal del operador  $D = 4$  (gluón-gluón) es cero,  $\gamma^{(1)}(O_4) = 0$  [85]. La contribución  $D = 0$  para la función de Adler,  $d(Q^2)_{D=0}$ , se construyó ahora en correspondencia con estos valores de  $\gamma^{(1)}(O_D^{(j)})$  ( $D = 6$ ), es decir, de tal manera que permita cancelar las ambigüedades de renormalón (IR) en  $u = 3$  para la parte  $D = 0$  de la función de Adler con los términos OPE correspondientes  $D = 6$ . En la practica esto significa que la transformada de Borel  $B[\tilde{d}](u)$  de la función auxiliar  $\tilde{d}(Q^2)$  tiene términos  $\sim 1/(3-u)^{\kappa^{(j)}}$  donde  $\kappa^{(j)} = 1 - k^{(j)}$  ( $j = 1, 2$ ).

En nuestro análisis, aplicamos dos métodos de evaluación de la parte  $D = 0$  a las reglas de suma: Teoría de perturbación de orden fijo (a) en potencias  $a(\sigma_m)^n$  (FO); y (b) Borel Resumado, es decir, transformada inversa de Borel con la prescripción del valor principal (PV), cf. Eq. (2.73). Los métodos (FO y PV) implican una truncación en la potencia  $a(\sigma_m)^{N_t}$ . El índice de truncación  $N_t$  se fijó de manera similar a nuestros trabajos anteriores [58, 59], es decir, considerando los valores resultantes de los FESR  $a^{(2,0)}(\sigma_m)$  y  $a^{(2,1)}(\sigma_m)$  en cada  $N_t$  para cada método, y eligiendo el valor de  $N_t$  donde estos dos momentos FESR se vuelven localmente independientes de la variación de  $N_t$ . En particular, el método PV dio como resultado una dependencia muy pequeña de la variación de  $N_t$  (para  $N_t \geq 4$ ).

Los resultados principales, para cada método (FO y PV) se presentaron en las Ecs. (3.17) y en el Cuadro 3.2. El promedio aritmético de los resultados de estos dos métodos da

$$\alpha_s(m_\tau^2) = 0.3186_{-0.0092}^{+0.0052} \quad (\text{FO + PV}) \quad (3.18a)$$

$$\Rightarrow \alpha_s(M_Z^2) = 0.1185_{-0.0011}^{+0.0007}. \quad (3.18b)$$

Consideramos esto como el resultado central de nuestro análisis. Las incertidumbres  $_{-0.0092}^{+0.0052}$  en la Ec. (3.18a) se obtuvieron sumando en cuadratura la mayor desviación entre el valor promedio 0.3186 y los valores centrales de los dos métodos Eqs. (3.17) ( $\pm 0.0009$ ), y las incertidumbres del método PV ( $_{-0.0092}^{+0.0053}$ ) [cf. Eq. (3.17d)], similar al razonamiento en Refs. [67, 58]. Como consecuencia, como se ve en las Ecs. (3.17c)-(3.17d) [y en general en las Ecs. (3.17)], en nuestro resultado final (3.18) la incertidumbre total está dominada por las incertidumbres teóricas por sobre las experimentales. En este contexto, sería de mucha ayuda saber el valor exacto del coeficiente  $d_4$  (en  $a^5$ ) de la función de Adler  $d(Q^2)_{D=0}$ , ya que la variación (2.47) en la estimación de  $d_4$  es la mayor fuente de incertidumbres (teóricas) en este análisis.

### 3.3. Comparación con otros trabajos

En el cuadro 3.4 presentamos, a modo de comparación, los valores de  $\alpha_s(m_\tau^2)$  que fueron extraídos de los datos de decaimiento  $\tau$  de ALEPH por varios grupos que usaron varias reglas de suma y diversos métodos de evaluación.

Si usáramos, en lugar de las contribuciones  $D = 6$  [cf. Eqs. (2.8), (2.11), (2.46)], las dimensiones anómalas efectivas en la aproximación large- $\beta_0$  (LB) como hicimos en nuestro análisis anterior [59], entonces se obtendrían valores más altos,  $\alpha_s(m_\tau^2) = 0.3248_{-0.0124}^{+0.0137}$  y  $\alpha_s(M_Z^2) = 0.1193 \pm 0.0016$ , cf. también Cuadro 3.4.

Cuando se usa un OPE más simple, es decir,  $\gamma^{(1)}(O_D^{(1)}) = 0$ , para  $D = 4, 6, 8$ , como hicimos en [58], entonces los valores centrales se convierten en  $\alpha_s(m_\tau^2) = 0.3153$  y  $\alpha_s(M_Z^2) = 0.1181$ , que son algo más bajos que nuestros valores centrales obtenidos aquí en Eqs. (3.18). Notamos que este enfoque más simple se utilizó en nuestro trabajo anterior [58], pero los valores centrales obtenidos allí fueron aún más bajos porque se usó el valor central más alto para el coeficiente  $d_4$  ( $d_4 = 338.$ ) que aquí ( $d_4 = 275.$ ).

Dado que nuestros resultados en el enfoque FO tienen un índice de truncación relativamente alto  $N_t = 8$  (donde  $a^{N_t}$  es la potencia donde se realiza el truncación), uno puede preguntarse cuánto dependen los resultados obtenidos por la función de Adler proveniente de nuestro modelo Renormalón. El enfoque FO es independiente de la extensión motivada por renormalón

Cuadro 3.4: Los valores de  $\alpha_s(m_\tau^2)$  extraídos mediante la aplicación de reglas de suma a los datos de decaimiento de ALEPH  $\tau$  y varios métodos de evaluación. En la segunda columna, 'BL' representa las reglas de suma de Borel-Laplace, 'DV' un modelo de violación de dualidad en las reglas de suma.

Grupo	Regla de Suma	FO	CI	PV	Promedio
Baikov et al. [53]	$a^{(2,1)} = r_\tau$	$0.322 \pm 0.020$	$0.342 \pm 0.011$	—	$0.332 \pm 0.016$
Beneke & Jamin [68]	$a^{(2,1)} = r_\tau$	$0.320^{+0.012}_{-0.007}$	—	$0.316 \pm 0.006$	$0.318 \pm 0.006$
Caprini [104]	$a^{(2,1)} = r_\tau$	—	—	$0.314 \pm 0.006$	$0.314 \pm 0.006$
Davier et al. [105]	$a^{(i,j)}$	0.324	$0.341 \pm 0.008$	—	$0.332 \pm 0.012$
Pich & R.-S. [67]	$a^{(i,j)}$	$0.320 \pm 0.012$	$0.335 \pm 0.013$	—	$0.328 \pm 0.013$
Boito et al. [76]	DV in $a^{(i,j)}$	$0.296 \pm 0.010$	$0.310 \pm 0.014$	—	$0.303 \pm 0.012$
nuestro trabajo previo [58]	BL (FO+PV)	$0.311 \pm 0.007$	$0.341^{+0.010}_{-0.007}$	$0.320^{+0.009}_{-0.006}$	$0.315 \pm 0.009$
nuestro trabajo previo [59, 98]	BL (FO+PV)	$0.323^{+0.013}_{-0.012}$	$0.349^{+0.014}_{-0.004}$	$0.327^{+0.027}_{-0.010}$	$0.325^{+0.013}_{-0.012}$
este trabajo ( $D = 6$ )	BL (FO+PV)	$0.318^{+0.007}_{-0.009}$	$0.343^{+0.016}_{-0.006}$	$0.320^{+0.005}_{-0.009}$	$0.318^{+0.005}_{-0.009}$

para  $N_t = 5$  [el coeficiente  $d_4$  se toma de acuerdo con la Eq. (2.47)] (esto es cierto para el enfoque PV). Como puede verse en los resultados (3.17a), los valores extraídos del acoplamiento cambian muy poco si  $N_t$  varía alrededor de  $N_t = 8$ ; cuando  $N_t = 8$  se cambia a  $N_t = 5$ , el valor central de  $\alpha_s(m_\tau^2)$  para FO cambia de 0.3177 a 0.3148; el valor central promedio  $\alpha_s(m_\tau^2) = 0.3186$  Eq. (3.18) luego cambia a  $\alpha_s(m_\tau^2) = 0.3170$  cuando se toma  $N_t = 5$  para los dos métodos [y  $\alpha_s(M_Z^2)$  cambia de 0.1184 a 0.1183], es decir, muy poco.

Los resultados para nuestro trabajo [58] fueron obtenidos para el rango del coeficiente  $d_4 = 338 \pm 63$ , en el Cuadro 3.4 fueron ajustados al rayo  $d_4 = 275 \pm 63$  que usamos en [59, 98] y en esta tesis, para facilitar la comparación.

Los efectos de las violaciones de la dualidad de quarks y hadrones (DV) pueden ser importantes para momentos específicos en las reglas de suma, como se argumenta en [77, 106] donde se usó un modelo DV [66]. Por otro lado, extrajimos nuestros resultados de las reglas de suma de Borel-Laplace cuya función de peso Eq. (2.55) se suprime en el punto Minkowskiano  $Q^2 = -\sigma_m$  mediante el factor de doble-pinch  $(1 + Q^2/\sigma_m)^2$  y, además, el factor exponencial  $\exp(Q^2/M^2)$ . La supresión del factor exponencial es especialmente fuerte y se extiende alrededor del mencionado punto Minkowskiano cuando  $|M^2|$  es pequeño ( $|M^2| \approx 1 \text{ GeV}^2$ ), es decir, en esos valores de  $|M^2|$  donde los efectos no perturbativos ( $D = 4, 6$ ) en la regla de la suma de Borel-Laplace son grandes. Esto indica que las reglas de suma de Borel-Laplace aplicadas están diseñadas para suprimir los efectos DV más fuertemente cuando estos efectos DV son más fuertes.

Los resultados se obtuvieron mediante un análisis basado en programas escritos por nosotros en Mathematica que están disponibles gratuitamente en [107].

## §Epílogo

Para finalizar la tesis, quiero mencionar lo optimista de nuestro resultado final cuando consideramos las dimensiones anómalas más allá de  $\text{large-}\beta_0$ . Esto porque si los comparamos con los resultados obtenidos por Lattice ( $\alpha_s(m_Z^2) = 0.1182 \pm 0.0008$ ) (PDG 2022), el cual es un método completamente diferente al enfoque de nuestro grupo y a los considerados en Cuadro 3.4, observamos que nuestros rangos valores son muy consistentes con los resultados obtenidos por Lattice. Por otra parte, si comparamos con el promedio mundial ( $\alpha_s(m_Z^2) = 0.1176 \pm 0.0010$ ) (PDG 2022), nuestros rangos tienen menos consistencia con el promedio mundial sin Lattice. Por lo tanto, consideramos que con nuestro modelo renormalón podemos extraer resultados fehaciente con respecto a los datos experimentales. Finalmente, vimos que el coeficiente  $d_4$  de nuestra función de Adler es el parámetro que contribuye mayormente a nuestras incertidumbres.

Para una mejor comprensión para lo descrito arriba, dejamos las siguientes comparaciones

$$\begin{aligned} \text{Promedio Mundial sin Lattice (PDG)} &= 0.1176 \pm 0.0010 \\ \text{Promedio Mundial solo Lattice (PDG)} &= 0.1182 \pm 0.0008 \\ \text{Esta Tesis} &= 0.1185^{+0.006}_{-0.0011} \end{aligned}$$

o en forma de rango de valores

$$\begin{aligned} \text{Promedio Mundial sin Lattice (PDG)} &= 0.1176 < \alpha_s < 0.1186 \\ \text{Promedio Mundial solo Lattice (PDG)} &= 0.1174 < \alpha_s < 0.1190 \\ \text{Esta Tesis} &= 0.1174 < \alpha_s < 0.1192 \end{aligned}$$

# Capítulo 4

## Apéndice

### 4.1. Transformada de Borel para la contribución Renormalón UV $u = -1$

Las expresiones para las singularidades de renormalón UV en  $u = -p$  ( $< 0$ ), en las transformadas de Borel  $B[\tilde{d}]$  y  $B[d]$ , son análogas a las singularidades de la renormalón IR en  $u = p$  ( $> 0$ ) Eqs. (2.43)

$$B[\tilde{d}](u)_{-p, \kappa_{-p}^{(j)}} = \frac{\pi \tilde{d}_{p,j}^{\text{UV}}}{(p+u)^{\kappa_{-p}^{(j)}}} \Rightarrow \quad (4.1a)$$

$$B[d](u)_{-p, \kappa_{-p}^{(j)}} = \frac{\pi d_{p,j}^{\text{UV}}}{(p+u)^{\kappa_{-p}^{(j)} - pc_1/\beta_0}} \left\{ 1 + \frac{(b_1^{(-2p)} + \mathcal{C}_{1,j}^{(-2p)})}{(-\beta_0)(\kappa_{-p}^{(j)} - pc_1/\beta_0 - 1)}(p+u) + \frac{(b_2^{(-2p)} + b_1^{(-2p)}\mathcal{C}_{1,j}^{(-2p)} + \mathcal{C}_{2,j}^{(-2p)})}{(-\beta_0)^2(\kappa_{-p}^{(j)} - pc_1/\beta_0 - 1)(\kappa_{-p}^{(j)} - pc_1/\beta_0 - 2)}(p+u)^2 + \dots \right\}. \quad (4.1b)$$

Las expresiones  $b_n^{(-2p)}$  se dan en Eqs. (2.45), reemplazando allí  $p \mapsto -p$ . El renormalón UV principal tiene  $-p = -1$ . En la aproximación large- $\beta_0$  (LB), los índices de potencia son  $\kappa_{-1}^{(2)} = 2$  y  $\kappa_{-1}^{(1)} = 1$  [85, 91, 92]. Incluimos en nuestro enfoque en la transformada de Borel  $B[\tilde{d}](u)$  Eq. (2.46) el renormalón principal UV  $-p = -1$  con un solo término [cf. Eq. (4.1a)] y allí usamos el índice  $\kappa_{-1} = 2$ , es decir, el término principal en la aproximación LB.

### 4.2. Resultados para los casos Subprincipales de aportes Renormalón

Como se puede ver en la transformación (2.41), el cambio de parámetro de escala de renormalización  $\kappa$  se genera a partir de la expresión de un término del tipo Eq. (2.43a) (en  $\kappa = 1$ ), resultando en una serie de términos con índices de potencia  $\kappa_p^{(j)}$ ,  $\kappa_p^{(j)} - 1$ ,  $\kappa_p^{(j)} - 2$ , etc., en  $B[\tilde{d}](u; \kappa)$ . Esto implica entonces la generación de los términos correspondientes en  $B[d](u; \kappa)$  del tipo (2.43b), que incluye los casos de estos índices inferiores  $\kappa_p^{(j)} - 1$ ,  $\kappa_p^{(j)} - 2$ , etc. En el Cuadro 4.1 mostramos los resultados numéricos para estos casos subprincipales, en analogía con los resultados del Cuadro 2.1, donde solo se mostraban los casos principales.

Cuadro 4.1: Como en la Tabla 2.1, pero ahora incluyendo los casos de índices subprincipales  $\kappa_p^{(j)} - 1$  (SL),  $\kappa_p^{(j)} - 2$  (SSL), etc. El caso SL para UV ( $-p = -1, j = 2$ ) ya se dio en la Tabla II de [65], y el caso subprincipal (SL) de IR  $p = 2, j = 0$  en la Tabla 1 de [58]. Las notaciones SL y SSL significan que el índice de potencia  $\kappa_{\pm p}^{(j)} - n$  en  $B[\tilde{d}](u)$  es  $\kappa_{\pm p}^{(j)} - 1$  y  $\kappa_{\pm p}^{(j)} - 2$ , respectivamente.

type (X)	$\pm p$	$j$	$\kappa_{\pm p}^{(j)} - n$	$d_{p,k}^X / \tilde{d}_{p,k}^X$	$\mathcal{C}_{1,j}^{(D)}$	$\mathcal{C}_{2,j}^{(D)}$
X=IR	$p = 2$	$j = 0$ SL	$(0 - 1)$	$(+2.00 \pm 0.02)$	$(+17. \pm 1.)$	...
X=IR	$p = 3$	$j = 2$ SL	$(0.778 - 1)$	$(-0.0455 \pm 0.0017)$	$(+6.96 \pm 2.24)$	$(+56.8 \pm 13.3)$
X=IR	$p = 3$	$j = 2$ SSL	$(0.778 - 2)$	$(+0.727 \pm 0.064)$	$(+14.58 \pm 5.62)$	$(+118.2 \pm 30.4)$
X=IR	$p = 3$	$j = 1$ SL	$0.375 - 1$	$(-0.807 \pm 0.042)$	$(+9.99 \pm 3.17)$	$(+76.0 \pm 18.2)$
X=UV	$-p = -1$	$j = 2$ SL	$2 - 1$	$(+5.0098 \pm 0.0001)$	$(+0.0 \pm 0.0)$	$(+0.5 \pm 0.1)$

El caso UV SL ( $-p = -1; j = 2$  SL) ya estaba dado en la Tabla II de [65], y el IR SL ( $p = 2, j = 0$  SL) en la Tabla 1 de [58]. Recordamos que el caso IR ( $p = 2, j = 0$ ) se da en la Tabla 2.1 y corresponde a  $B[\tilde{d}](u) = \pi \tilde{d}_{2,0}^{\text{IR}}(-1) \ln(1 - u/2)$ ; mientras que el caso SL de esto, dado aquí, corresponde a  $B[\tilde{d}](u) = \pi \tilde{d}_{2,-1}^{\text{IR}}(2 - u) \ln(1 - u/2)$ . El caso IR ( $p = 2, j = 1$ ) se da en la Tabla 2.1 y corresponde a  $B[\tilde{d}](u) = \pi \tilde{d}_{2,1}^{\text{IR}} / (2 - u)^1$ ; el caso SL de esto es una constante simple para  $B[\tilde{d}](u)$  y por lo tanto para  $B[d](u)$ . De manera similar, el caso UV de ( $-p = -1, j = 2$ ) tiene  $B[\tilde{d}](u) = \pi \tilde{d}_{-1,2}^{\text{UV}} / (1 + u)^2$ , y el caso SSL de esto es una constante simple para  $B[\tilde{d}](u)$  y por lo tanto para  $B[d](u)$ .

### 4.3. Función característica $G_d$

En Ref. [65], se obtuvo la función característica  $G_d(t)$  que aparece en la Ec. (2.52) para los términos de  $B[\tilde{d}](u)$  de la forma de renormalón IR  $\exp(\tilde{K}u) / (p - u)^k$  para potencias enteras  $k = 2, 1$ ; así como para la forma de renormalón UV  $\exp(\tilde{K}u) / (1 + u)^2$ .

Aparte de estos términos, en la forma actualmente considerada Eq. (2.46) para  $B[\tilde{d}](u)$  también tenemos términos de la forma  $\exp(\tilde{K}u) / (3 - u)^\xi$  donde:  $\xi = \kappa^{(2)} = 0.778$ ; o  $\xi = \kappa^{(1)} = 0.375$ . Para simplificar, primero omitimos el factor exponencial  $\exp(\tilde{K}u)$  en estos términos ( $\tilde{K} \rightarrow 0$ ); este factor se incorporará de manera trivial más adelante. Esto significa que nuestra transformada inicial de Borel es

$$B[\tilde{d}](u)_\xi \equiv \frac{\pi}{(3 - u)^\xi}. \quad (4.2)$$

Usamos la forma Eq. (2.51) de la transformada inversa de Mellin (es decir, con:  $u = 1 - iz$ ), para obtener la función característica correspondiente  $G_d(t)_\xi$

$$G_d(t)_\xi = \frac{t}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} dz B[\tilde{d}](1 - iz)_\xi e^{-iz \ln t} = \frac{t}{2} H_\xi(t), \quad (4.3)$$

donde

$$H_{\xi}(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dz}{(2+iz)^{\xi}} e^{-iz \ln t}. \quad (4.4)$$

El corte de la función  $B[\tilde{d}](u)_{\xi}$ , Eq. (4.2), es a lo largo del semieje real  $3 \leq u$ . Esto entonces corresponde al corte  $2 \leq (-i)z$  de la función  $H_{\xi}(t)$ , Eq. (4.4), es decir, a lo largo del semieje positivo imaginario en el plano  $z$ .

Cuando  $t > 1$ , tenemos  $\ln t > 0$  y podemos cerrar el contorno en el semicírculo inferior, dándonos en tal caso el valor cero de  $H_{\xi}(t)$ . Sin embargo, cuando  $0 < t < 1$  ( $\ln t < 0$ ), aplicamos el teorema de Cauchy al contorno de integración presentado en la Fig. 4.1, el contorno que no rodea las singularidades del integrando.

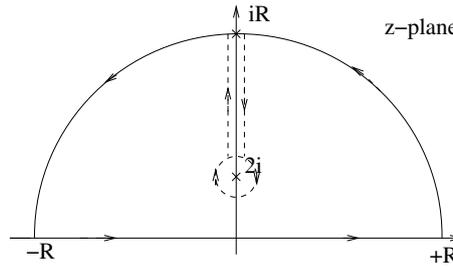


Figura 4.1: El contorno cerrado de integración en el plano  $z$  complejo para el integrando  $(e^{-iz \ln t})/(2+iz)^{\xi}$  para  $0 < t < 1$  ( $\ln(t) < 0$ ). Tenemos  $R \rightarrow +\infty$ . Alrededor del punto  $z = 2i$  hay una trayectoria circular de radio  $\delta$ . Las líneas verticales de integración tienen  $z = i(2+s) \pm \epsilon$  donde  $s$  corre a lo largo del intervalo  $\delta < s < (R-2)$ . El proceso limitante es  $0 < \epsilon \ll \delta \rightarrow +0$ .

Realizando esta integración con cuidado y aplicando los procedimientos de limitación mencionados en la figura, obtenemos (para  $0 < t < 1$ )

$$H_{\xi}(t) = 2t^2 \sin(\xi\pi) \int_0^{+\infty} ds s^{-\xi} t^s \quad (4.5a)$$

$$= 2t^2 \sin(\xi\pi) \frac{\Gamma(1-\xi)}{(\ln(1/t))^{1-\xi}} \quad (4.5b)$$

$$= 2t^2 \frac{\pi}{\Gamma(\xi)} \frac{1}{(\ln(1/t))^{1-\xi}} \quad (t < 1). \quad (4.5c)$$

La integral sobre  $s$  en Eq. (4.5a) converge solo para  $\xi < 1$ . Sin embargo, la expresión resultante (4.5c) existe también para  $\xi \geq 1$ , representa una continuación analítica en  $\xi$  y es válida también para  $\xi \geq 1$ .

Esto, junto con la relación (4.3), nos da el resultado

$$G_d(t)_{\xi} = \frac{\pi}{\Gamma(\xi)} \frac{t^3}{(\ln(1/t))^{1-\xi}} \Theta(1-t). \quad (4.6)$$

Aquí, la función escalón de Heaviside  $\Theta(1-t)$  es la unidad para  $t < 1$  y cero para  $t > 1$ .

Este resultado se puede extender al caso de la transformada de Borel recalculada por un factor exponencial

$$B[\tilde{d}](u)_{\xi, \tilde{K}} \equiv \exp(\tilde{K}u) \frac{\pi}{(3-u)^{\xi}}. \quad (4.7)$$

Es decir, al definir  $t' \equiv t \exp(\tilde{K})$ , obtenemos para la función característica el mismo resultado, excepto que ahora  $t$  se reemplaza por  $t'$ . Entonces podemos escribir el resultado de la integral

resumada [la primera integral en el lado derecho de la Ec. (2.52)] en términos de  $t'$  y renombrando nuevamente  $t' \mapsto t$ , y así obtener para la transformada de Borel  $B[\tilde{d}](u)$  de la forma (4.7) la correspondiente función Adler resumada

$$d(Q^2)_{\xi, \tilde{K}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} G_d(t)_\xi a(te^{-\tilde{K}} Q^2) \quad (4.8a)$$

$$= \frac{\pi}{\Gamma(\xi)} \int_0^{+1} \frac{dt}{t} \frac{t^3}{(\ln(1/t))^{1-\xi}} a(te^{-\tilde{K}} Q^2). \quad (4.8b)$$

El mismo cálculo se puede repetir para el caso en que la transformada de Borel en  $B[\tilde{d}](u)_\xi$  en Eq. (4.2) tiene  $1/(2-u)^\xi$  [en lugar de:  $1/(3-u)^\xi$ ]; el resultado para  $G_d(t)$  es el mismo que en Eq. (4.6), excepto que el factor  $t^3$  se reemplaza por  $t^2$ .

# Bibliografía

- [1] C. Ayala, G. Cvetič and D. Teca, “Determination of perturbative QCD coupling from ALEPH  $\tau$  decay data using pinched Borel–Laplace and Finite Energy Sum Rules,” *Eur. Phys. J. C* **81** (2021) no.10, 930 [arXiv:2105.00356 [hep-ph]].
- [2] C. Ayala, G. Cvetič and D. Teca, “Using improved operator product expansion in Borel–Laplace sum rules with ALEPH  $\tau$  decay data, and determination of pQCD coupling,” *Eur. Phys. J. C* **82** (2022) 4, 362 [arXiv:2112.01992 [hep-ph]].
- [3] C. Ayala, G. Cvetič and D. Teca, “Borel-Laplace Sum Rules with ALEPH  $\tau$  decay data, using OPE with improved anomalous dimensions,” [arXiv:2206.05631 [hep-ph]].
- [4] M. Beneke and M. Jamin, “ $\alpha_s$  and the  $\tau$  hadronic width: fixed-order, contour-improved and higher-order perturbation theory,” *JHEP* **09** (2008), 044 [arXiv:0806.3156 [hep-ph]].
- [5] A. Pich and A. Rodríguez-Sánchez, “Determination of the QCD coupling from ALEPH  $\tau$  decay data,” *Phys. Rev. D* **94** (2016) no.3, 034027 [arXiv:1605.06830 [hep-ph]].
- [6] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin and J. H. Kühn, “Order  $\alpha_s^4$  QCD Corrections to  $Z$  and  $\tau$  Decays,” *Phys. Rev. Lett.* **101** (2008), 012002 [arXiv:0801.1821 [hep-ph]].
- [7] I. Caprini, “Conformal mapping of the Borel plane: going beyond perturbative QCD,” *Phys. Rev. D* **102** (2020) no.5, 054017 [arXiv:2006.16605 [hep-ph]].
- [8] D. Boito, M. Golterman, M. Jamin, A. Mahdavi, K. Maltman, J. Osborne and S. Peris, “An updated determination of  $\alpha_s$  from  $\tau$  decays,” *Phys. Rev. D* **85** (2012), 093015 [arXiv:1203.3146 [hep-ph]].
- [9] Murray Gell-Mann, "*El Quark y el jaguar: aventuras en lo simple y en lo complejo*", Tusquets Editores, S.A., (1996).
- [10] Frank Close, "*La cebolla cósmica*", Editorial Crítica, (1988).
- [11] Harald Fritzsch, "*Los quarks, la materia prima de nuestro universo*", Alianza Editorial, (1982).
- [12] Linda Bartrom-Olsen, "*En Busca del Quark: Una Introducción para estudiantes a la física de partículas*", Editorial Xlibris, (2013).
- [13] James S. Trefil, "*De los átomos a los quarks*", Editorial Salvat, (1988).
- [14] Donald J. Hughes, "*Historia del Neutrón*", Editorial Universidad de Buenos Aires, (1960).
- [15] Eleftherios N. Economou. "*From Quarks to the Universe: A Short Physics Course*", Springer, (2016).

- [16] Stephen W. Hawking, "*Historia del Tiempo*", Editorial Crítica, (1988).
- [17] T. Muta, "*Foundation of Quantum Chromodynamics: an Introduction to Perturbative Methods in Gauge Theories*", World Scientific Lecture Notes in Physics, Vol. 57, (2000).
- [18] John Collins, "*Fundations of perturbative QCD*", Cambridge Monographs on Particle Physics, Nuclear Physics and Cosmology, Series Number 32, (2011).
- [19] Cesareo A. Dominguez, "*Quantum Chromodynamics Sum Rules*", Springer, (2018).
- [20] S. Schael *et al.* [ALEPH Collaboration], "Branching ratios and spectral functions of tau decays: final ALEPH measurements and physics implications," Phys. Rept. **421** (2005), 191 [hep-ex/0506072]; M. Davier, A. Höcker and Z. Zhang, "The Physics of hadronic tau decays," Rev. Mod. Phys. **78** (2006), 1043 [hep-ph/0507078].
- [21] M. , S. Descotes-Genon, A. Höcker, B. Malaescu and Z. Zhang, "The Determination of  $\alpha_s$  from  $\tau$  decays revisited," Eur. Phys. J. C **56** (2008), 305 [arXiv:0803.0979 [hep-ph]].
- [22] M. Davier, A. Höcker, B. Malaescu, C. Z. Yuan and Z. Zhang, "Update of the ALEPH non-strange spectral functions from hadronic  $\tau$  decays," Eur. Phys. J. C **74** (2014) no. 3, 2803 [arXiv:1312.1501 [hep-ex]].
- [23] The measured data of ALEPH Collaboration, with covariance matrix corrections described in Ref. [22], are available on the following web page: <http://aleph.web.lal.in2p3.fr/tau/specfun13.html>
- [24] M.A. Shifman, A.I. Vainshtein, V.I. Zakharov, Nucl. Phys. B 147 (1979) 385, 448.
- [25] V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainstein, V.I. Zakharov, Nucl. Phys. B 249 (1985) 445.
- [26] M.A. Shifman, Lecture at 1997 Yukawa International Seminar, Kyoto, 1997, Suppl. Prog. Theor. Phys. 131 (1998) 1.
- [27] M. Gell-Mann, R.J. Oakes, B. Renner, Phys. Rev. 175 (1968) 2195.
- [28] B.L. Ioffe, Physics-Uspekhi 44 (2001) 1211.
- [29] B.L. Ioffe, Nucl. Phys. B 188 (1981) 317; 192 (1982) 591 (Errata).
- [30] H. Leutwyler, in: M. Shifman (Ed.), At the Frontier of Particle Physics, in: Handbook of QCD, Boris Ioffe Festschrift, vol. 1, World Scientific, 2001, p. 271.
- [31] U. Meissner, in: M. Shifman (Ed.), At the Frontier of Particle Physics, in: Handbook of QCD, Boris Ioffe Festschrift, vol. 1, World Scientific, 2001, p. 417.
- [32] P. Gerber, H. Leutwyler, Nucl. Phys. B 321 (1989) 387.
- [33] P. Chen et al., Phys. Rev. D 64 (2001) 014503.
- [34] V.M. Belyaev, B.L. Ioffe, Sov. Phys. JETP 56 (1982) 493.
- [35] H.G. Dosch, S. Narison, Phys. Lett. B 417 (1998) 173.
- [36] A. Di Giacomo, Yu. Simonov, hep-ph/0404044.
- [37] M.A. Shifman, Pis'ma v ZhETF 24 (1976) 376.

- [38] V.A. Novikov, M.A. Shifman, A.I. Vainstein, V.A. Zakharov, Phys. Lett. B **86** (1979) 347.
- [39] S.N. Nikolaev, A.V. Radyushkin, Sov. J. Nucl. Phys. **39** (1984) 91.
- [40] B.L. Ioffe, A.V. Samsonov, Phys. Atom. Nucl. **63** (2000) 1448.
- [41] S. Schael *et al.* [ALEPH Collaboration], “Branching ratios and spectral functions of tau decays: final ALEPH measurements and physics implications,” Phys. Rept. **421** (2005), 191 [hep-ex/0506072]; M. Davier, A. Höcker and Z. Zhang, “The Physics of hadronic tau decays,” Rev. Mod. Phys. **78** (2006), 1043 [hep-ph/0507078].
- [42] M. , S. Descotes-Genon, A. Höcker, B. Malaescu and Z. Zhang, “The Determination of  $\alpha_s$  from  $\tau$  decays revisited,” Eur. Phys. J. C **56** (2008), 305 [arXiv:0803.0979 [hep-ph]].
- [43] M. Davier, A. Höcker, B. Malaescu, C. Z. Yuan and Z. Zhang, “Update of the ALEPH non-strange spectral functions from hadronic  $\tau$  decays,” Eur. Phys. J. C **74** (2014) no. 3, 2803 [arXiv:1312.1501 [hep-ex]].
- [44] The measured data of ALEPH Collaboration, with covariance matrix corrections described in Ref. [43], are available on the following web page: <http://aleph.web.lal.in2p3.fr/tau/specfun13.html>
- [45] W. J. Marciano and A. Sirlin, “Electroweak Radiative Corrections to tau Decay,” Phys. Rev. Lett. **61** (1988), 1815-1818
- [46] E. Braaten and C. S. Li, “Electroweak radiative corrections to the semihadronic decay rate of the tau lepton,” Phys. Rev. D **42** (1990), 3888-3891
- [47] S. Narison and A. Pich, “QCD formulation of the  $\tau$  decay and determination of  $\Lambda(MS)$ ,” Phys. Lett. B **211** (1988), 183-188.
- [48] E. Braaten, “QCD predictions for the decay of the  $\tau$  lepton,” Phys. Rev. Lett. **60** (1988), 1606-1609; E. Braaten, “The perturbative QCD corrections to the ratio R for  $\tau$  decay,” Phys. Rev. D **39** (1989), 1458.
- [49] E. Braaten, S. Narison and A. Pich, “QCD analysis of the  $\tau$  hadronic width,” Nucl. Phys. B **373** (1992), 581-612.
- [50] G. Cvetič and T. Lee, “Bilocal expansion of Borel amplitude and hadronic tau decay width,” Phys. Rev. D **64** (2001), 014030 [arXiv:hep-ph/0101297 [hep-ph]].
- [51] K. G. Chetyrkin, A. L. Kataev and F. V. Tkachov, “Higher order corrections to  $\sigma_T(e^+e^- \rightarrow \text{Hadrons})$  in Quantum Chromodynamics,” Phys. Lett. B **85** (1979), 277; M. Dine and J. R. Sapiirstein, “Higher order QCD corrections in  $e^+e^-$  annihilation,” Phys. Rev. Lett. **43** (1979), 668; W. Celmaster and R. J. Gonsalves, “An analytic calculation of higher order Quantum Chromodynamic corrections in  $e^+e^-$  annihilation,” Phys. Rev. Lett. **44** (1980), 560.
- [52] S. G. Gorishnii, A. L. Kataev and S. A. Larin, “The  $\mathcal{O}(\alpha_s^3)$  corrections to  $\sigma_{tot}(e^+e^- \rightarrow \text{hadrons})$  and  $\Gamma(\tau^- \rightarrow \nu_\tau + \text{hadrons})$  in QCD,” Phys. Lett. B **259** (1991), 144; L. R. Surguladze and M. A. Samuel, “Total hadronic cross-section in  $e^+e^-$  annihilation at the four loop level of perturbative QCD,” Phys. Rev. Lett. **66** (1991), 560 Erratum: [Phys. Rev. Lett. **66** (1991), 2416].
- [53] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin and J. H. Kühn, “Order  $\alpha_s^4$  QCD Corrections to Z and  $\tau$  Decays,” Phys. Rev. Lett. **101** (2008), 012002 [arXiv:0801.1821 [hep-ph]].

- [54] A. Deur, S. J. Brodsky and G. F. de Teramond, “The QCD running coupling,” Nucl. Phys. **90** (2016), 1 [arXiv:1604.08082 [hep-ph]].
- [55] D. d’Enterria, S. Kluth, S. Alekhin, P. A. Baikov, A. Banfi, F. Barreiro, A. Bazavov, S. Bethke, J. Blümlein and D. Boito, *et al.* “ $\alpha_s(2019)$ : Precision measurements of the QCD coupling,” Workshop Proceedings, ECT, Trento, 11-15 Febr. 2019 [arXiv:1907.01435 [hep-ph]].
- [56] P.A. Zyla *et al.* [Particle Data Group], “Review of Particle Physics,” PTEP **2020** (2020) no.8, 083C01
- [57] F. Le Diberder and A. Pich, “Testing QCD with  $\tau$  decays,” Phys. Lett. B **289** (1992), 165-175.
- [58] C. Ayala, G. Cvetič and D. Teca, “Determination of perturbative QCD coupling from ALEPH  $\tau$  decay data using pinched Borel–Laplace and Finite Energy Sum Rules,” Eur. Phys. J. C **81** (2021) no.10, 930 [arXiv:2105.00356 [hep-ph]].
- [59] C. Ayala, G. Cvetič and D. Teca, “Using improved operator product expansion in Borel–Laplace sum rules with ALEPH  $\tau$  decay data, and determination of pQCD coupling,” Eur. Phys. J. C **82** (2022) 4, 362 [arXiv:2112.01992 [hep-ph]].
- [60] D. Boito, D. Hornung and M. Jamin, “Anomalous dimensions of four-quark operators and renormalon structure of mesonic two-point correlators,” JHEP **12** (2015), 090 [arXiv:1510.03812 [hep-ph]].
- [61] M. Jamin and M. Kremer, “Anomalous dimensions of spin-0 four quark operators without derivatives,” Nucl. Phys. B **227** (1986), 349-358
- [62] L. V. Lanin, V. P. Spiridonov and K. G. Chetyrkin, “Contribution of four-quark condensates to sum rules for  $\rho$  and  $A_1$  mesons. (In Russian),” Yad. Fiz. **44** (1986), 1372-1374
- [63] L. E. Adam and K. G. Chetyrkin, “Renormalization of 4-quark operators and QCD sum rules,” Phys. Lett. B **328**329 (1994), 129-135 [arXiv:hep-ph/9404331 [hep-ph]].
- [64] C. Ayala, G. Cvetič and D. Teca, “Borel–Laplace Sum Rules with ALEPH  $\tau$  decay data, using OPE with improved anomalous dimensions,” [arXiv: 9404331 [hep-ph]].
- [65] G. Cvetič, “Renormalon-motivated evaluation of QCD observables,” Phys. Rev. D **99** (2019) no. 1, 014028 [arXiv:1812.01580 [hep-ph]].
- [66] O. Catà, M. Golterman and S. Peris, “Unraveling duality violations in hadronic  $\tau$  decays,” Phys. Rev. D **77** (2008), 093006 [arXiv:0803.0246 [hep-ph]]; “Possible duality violations in  $\tau$  decay and their impact on the determination of  $\alpha_s$ ,” Phys. Rev. D **79** (2009), 053002 [arXiv:0812.2285 [hep-ph]].
- [67] A. Pich and A. Rodríguez-Sánchez, “Determination of the QCD coupling from ALEPH  $\tau$  decay data,” Phys. Rev. D **94** (2016) no.3, 034027 [arXiv:1605.06830 [hep-ph]].
- [68] M. Beneke and M. Jamin, “ $\alpha_s$  and the  $\tau$  hadronic width: fixed-order, contour-improved and higher-order perturbation theory,” JHEP **09** (2008), 044 [arXiv:0806.3156 [hep-ph]].
- [69] M. Beneke, D. Boito and M. Jamin, “Perturbative expansion of  $\tau$  hadronic spectral function moments and  $\alpha_s$  extractions,” JHEP **01** (2013), 125 [arXiv:1210.8038 [hep-ph]].
- [70] D. Boito and F. Oliani, “Renormalons in integrated spectral function moments and  $\alpha_s$  extractions,” Phys. Rev. D **101** (2020) no.7, 074003 [arXiv:2002.12419 [hep-ph]].

- [71] M. A. Shifman, A. I. Vainshtein and V. I. Zakharov, “QCD and resonance physics. Theoretical foundations,” Nucl. Phys. B **147** (1979), 385-447.
- [72] A. Pich and A. Rodríguez-Sánchez, “Updated determination of  $\alpha_s(m_\tau^2)$  from tau decays,” Mod. Phys. Lett. A **31** (2016) no.30, 1630032 [arXiv:1606.07764 [hep-ph]].
- [73] A. Rodríguez Sánchez, “The strong coupling from ALEPH tau decays,” Nucl. Part. Phys. Proc. **287-288** (2017), 81-84.
- [74] D. Boito, O. Catà, M. Golterman, M. Jamin, K. Maltman, J. Osborne and S. Peris, “A new determination of  $\alpha_s$  from hadronic  $\tau$  decays,” Phys. Rev. D **84** (2011), 113006 [arXiv:1110.1127 [hep-ph]].
- [75] D. Boito, M. Golterman, M. Jamin, A. Mahdavi, K. Maltman, J. Osborne and S. Peris, “An Updated determination of  $\alpha_s$  from  $\tau$  decays,” Phys. Rev. D **85** (2012), 093015 [arXiv:1203.3146 [hep-ph]].
- [76] D. Boito, M. Golterman, K. Maltman, J. Osborne and S. Peris, “Strong coupling from the revised ALEPH data for hadronic  $\tau$  decays,” Phys. Rev. D **91** (2015) no.3, 034003 [arXiv:1410.3528 [hep-ph]].
- [77] D. Boito, M. Golterman, K. Maltman and S. Peris, “Strong coupling from hadronic  $\tau$  decays: A critical appraisal,” Phys. Rev. D **95** (2017) no.3, 034024 [arXiv:1611.03457 [hep-ph]].
- [78] A. V. Nesterenko, “Strong interactions in spacelike and timelike domains: dispersive approach,” Elsevier, Amsterdam, 2016, eBook ISBN: 9780128034484.
- [79] S. Eidelman, F. Jegerlehner, A. L. Kataev and O. Veretin, “Testing nonperturbative strong interaction effects via the Adler function,” Phys. Lett. B **454** (1999), 369-380 [arXiv:hep-ph/9812521 [hep-ph]].
- [80] A. V. Nesterenko, “Explicit form of the R-ratio of electron–positron annihilation into hadrons,” J. Phys. G **46** (2019) no.11, 115006 [arXiv:1902.06504 [hep-ph]]; “Recurrent form of the renormalization group relations for the higher-order hadronic vacuum polarization function perturbative expansion coefficients,” J. Phys. G **47** (2020) no.10, 105001 [arXiv:2004.00609 [hep-ph]].
- [81] T. Aoyama, N. Asmussen, M. Benayoun, J. Bijnens, T. Blum, M. Bruno, I. Caprini, C. M. Carloni Calame, M. Cè and G. Colangelo, *et al.* “The anomalous magnetic moment of the muon in the Standard Model,” Phys. Rept. **887** (2020), 1-166 [arXiv:2006.04822 [hep-ph]].
- [82] S. Borsanyi, Z. Fodor, J. N. Guenther, C. Hoelbling, S. D. Katz, L. Lellouch, T. Lippert, K. Miura, L. Parato and K. K. Szabo, *et al.* “Leading hadronic contribution to the muon magnetic moment from lattice QCD,” Nature **593** (2021) 51 [arXiv:2002.12347 [hep-lat]].
- [83] A. V. Nesterenko, “Hadronic vacuum polarization function within dispersive approach to QCD,” J. Phys. G **42** (2015), 085004 [arXiv:1411.2554 [hep-ph]]; “Timelike and spacelike kernel functions for the hadronic vacuum polarization contribution to the muon anomalous magnetic moment,” J. Phys. G **49** (2022), 055001 [arXiv:2112.05009 [hep-ph]].
- [84] G. Cvetič and R. Kögerler, “Infrared-suppressed QCD coupling and the hadronic contribution to muon  $g-2$ ,” J. Phys. G **47** (2020) no.10, 10LT01 [arXiv:2007.05584 [hep-ph]]; “Lattice-motivated QCD coupling and hadronic contribution to muon  $g-2$ ,” J. Phys. G **48** (2021) no.5, 055008 [arXiv:2009.13742 [hep-ph]].

- [85] M. Beneke, “Renormalons,” *Phys. Rept.* **317** (1999), 1 [hep-ph/9807443].
- [86] J. Bersini, A. Maiezza and J. C. Vasquez, “Resurgence of the renormalization group equation,” *Annals Phys.* **415** (2020), 168126 [arXiv:1910.14507 [hep-th]]; A. Maiezza and J. C. Vasquez, “Non-local Lagrangians from renormalons and analyzable functions,” *Annals Phys.* **407** (2019), 78-91 [arXiv:1902.05847 [hep-th]]; “Resurgence of the QCD Adler function,” *Phys. Lett. B* **817** (2021), 136338 [arXiv:2104.03095 [hep-ph]]; “The QCD Adler function and the muon  $g - 2$  anomaly from renormalons,” [arXiv:2111.06792 [hep-ph]].
- [87] E. Cavalcanti, “Renormalons beyond the Borel plane,” *Phys. Rev. D* **103** (2021) no.2, 025019 [arXiv:2011.11175 [hep-th]]; “On the permanence of renormalons in compactified spaces,” [arXiv:2011.04099 [hep-th]].
- [88] C. Ayala, X. Lobregat and A. Pineda, “Supersymptotic and hyperasymptotic approximation to the operator product expansion,” *Phys. Rev. D* **99** (2019) no.7, 074019 [arXiv:1902.07736 [hep-th]]; “Hyperasymptotic approximation to the top, bottom and charm pole mass,” *Phys. Rev. D* **101** (2020) no.3, 034002 [arXiv:1909.01370 [hep-ph]]; “Determination of  $\alpha(M_z)$  from an hyperasymptotic approximation to the energy of a static quark-antiquark pair,” *JHEP* **09** (2020), 016 [arXiv:2005.12301 [hep-ph]].
- [89] G. S. Bali, C. Bauer and A. Pineda, “Perturbative expansion of the plaquette to  $\mathcal{O}(\alpha^{35})$  in four-dimensional SU(3) gauge theory,” *Phys. Rev. D* **89** (2014), 054505 [arXiv:1401.7999 [hep-ph]]; C. Ayala, X. Lobregat and A. Pineda, “Hyperasymptotic approximation to the plaquette and determination of the gluon condensate,” *JHEP* **12** (2020), 093 [arXiv:2009.01285 [hep-ph]].
- [90] W. A. Bardeen, A. J. Buras, D. W. Duke and T. Muta, “Deep Inelastic Scattering beyond the leading order in asymptotically free gauge theories,” *Phys. Rev. D* **18** (1978), 3998
- [91] D. J. Broadhurst, “Large N expansion of QED: asymptotic photon propagator and contributions to the muon anomaly, for any number of loops,” *Z. Phys. C* **58** (1993), 339.
- [92] D. J. Broadhurst and A. L. Kataev, “Connections between deep inelastic and annihilation processes at next to next-to-leading order and beyond,” *Phys. Lett. B* **315** (1993), 179 [hep-ph/9308274].
- [93] K. G. Chetyrkin, V. P. Spiridonov and S. G. Gorishnii, “Wilson expansion for correlators of vector currents at the two loop level: dimension four operators,” *Phys. Lett.* **160B**, 149 (1985).
- [94] G. Grunberg, “Renormalization group improved perturbative QCD,” *Phys. Lett.* **95B**, 70 (1980) Erratum: [*Phys. Lett.* **110B**, 501 (1982)]; “Renormalization scheme independent QCD and QED: the method of Effective Charges,” *Phys. Rev. D* **29**, 2315 (1984).
- [95] A. L. Kataev and V. V. Starshenko, “Estimates of the higher order QCD corrections to  $R(s)$ ,  $R_\tau$  and deep inelastic scattering sum rules,” *Mod. Phys. Lett. A* **10**, 235 (1995) [hep-ph/9502348].
- [96] D. Boito, P. Masjuan and F. Oliani, “Higher-order QCD corrections to hadronic  $\tau$  decays from Padé approximants,” *JHEP* **1808**, 075 (2018) [arXiv:1807.01567 [hep-ph]].
- [97] I. O. Goriachuk, A. L. Kataev and V. S. Molokoedov, “The  $\overline{\text{MS}}$ -scheme  $\alpha_s^5$  QCD contributions to the Adler function and Bjorken polarized sum rule in the Crewther-type two-fold  $\beta$ -expanded representation,” *JHEP* **05** (2022), 028 [arXiv:2111.12060 [hep-ph]].

- [98] C. Ayala, G. Cvetič and D. Teca, “Extraction of  $\alpha_s$  using Borel-Laplace sum rules for tau decay data,” [arXiv:2202.13178 [hep-ph]], written for the Snowmass-2022 White Paper (The strong coupling constant: State of the art and the decade ahead), based on a presentation at: *alphas-2022: Workshop on precision measurements of the QCD coupling constant*, January 31 - February 4, 2022, ECT\* Trento, Italy.
- [99] C. Ayala, G. Cvetič, R. Kögerler and I. Kondrashuk, “Nearly perturbative lattice-motivated QCD coupling with zero IR limit,” *J. Phys. G* **45** (2018) no.3, 035001 [arXiv:1703.01321 [hep-ph]].
- [100] P. A. Baikov, K. G. Chetyrkin and J. H. Kühn, “Five-loop running of the QCD coupling constant,” *Phys. Rev. Lett.* **118** (2017) no. 8, 082002 [arXiv:1606.08659 [hep-ph]].
- [101] A. H. Hoang and C. Regner, “Borel representation of  $\tau$  hadronic spectral function moments in Contour-improved perturbation theory,” [arXiv:2008.00578 [hep-ph]]; “On the difference between FOPT and CIPT for hadronic tau decays,” *The European Physical Journal Special Topics* **230** (2021) no.12, 2625 [arXiv:2105.11222 [hep-ph]].
- [102] M. A. Benitez-Rathgeb, D. Boito, A. H. Hoang and M. Jamin, “Reconciling the FOPT and CIPT predictions for the hadronic tau decay rate,” [arXiv:2111.09614 [hep-ph]].
- [103] C. Contreras, G. Cvetič and O. Orellana, “pQCD running couplings finite and monotonic in the infrared: when do they reflect the holomorphic properties of spacelike observables?,” *J. Phys. Comm.* **5** (2021) no.1, 015019 [arXiv:2008.03818 [hep-ph]].
- [104] I. Caprini, “Conformal mapping of the Borel plane: going beyond perturbative QCD,” *Phys. Rev. D* **102** (2020) no.5, 054017 [arXiv:2006.16605 [hep-ph]].
- [105] M. Davier, A. Höcker, B. Malaescu, C. Z. Yuan and Z. Zhang, “Update of the ALEPH non-strange spectral functions from hadronic  $\tau$  decays,” *Eur. Phys. J. C* **74** (2014) no.3, 2803 [arXiv:1312.1501 [hep-ex]].
- [106] D. Boito, M. Golterman, K. Maltman, S. Peris, M. V. Rodrigues and W. Schaaf, “Strong coupling from an improved  $\tau$  vector isovector spectral function,” *Phys. Rev. D* **103** (2021) no.3, 034028 [arXiv:2012.10440 [hep-ph]].
- [107] Mathematica programs (compatible with the version 11.1): SumRMSbALEPHM2O61O6.m; this program calls the subroutines: AdlerFunction4lMiniMOMexact.m; MSbarRenMod5Ad4275.save (for  $d_4 = 275.$ ), MSbarRenMod5Ad4212.save (for  $d_4 = 211.81$ ), MSbarRenMod5Ad4338.save (for  $d_4 = 338.19$ ); aMSQ2complS\_almtauinput.m; expdataALEPH.m; SumRthMSbar.save; the program and the subroutines are available on www page <http://www.gcvtic.usm.cl/>