

2017

ELEMENTOS FINITOS ADAPTATIVOS PARA PROBLEMAS DE CONTAMINACIÓN

ANDREWS ZARHI, KEVIN JAY

<http://hdl.handle.net/11673/23666>

Repositorio Digital USM, UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS
VALPARAÍSO - CHILE



**ELEMENTOS FINITOS ADAPTATIVOS PARA
PROBLEMAS DE CONTAMINACIÓN**

KEVIN JAY ANDREWS ZARHI

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

PROFESOR GUÍAS : ALEJANDRO ALLENDES,
GILBERTO CAMPAÑA.
ANDRES FUENTES.

Agosto, 2017.

REFERENCIAS

1. Introducción	3
2. Marco funcional	6
3. Método de elementos finitos	10
3.1. Formulación débil del problema	10
3.2. Formulación de Galerkin	14
3.3. Convergencia del método	20
4. Un código de elementos finitos en MatLab	23
4.1. Un ejemplo numérico	29
5. Un método de elementos finitos estabilizado	31
5.1. Convergencia del método estabilizado	34
5.2. Ejemplos numéricos	39
6. Análisis de error a posteriori	42
6.1. Análisis de confiabilidad	42
7. Un código de elementos finitos en MatLab	49
7.1. Un ejemplo numérico	55
8. Carga puntual: Delta de Dirac	58
9. Conclusiones	63
Referencias	64

1. INTRODUCCIÓN

Queremos estudiar la siguiente ecuación diferencial parcial de segundo orden, usualmente llamada de advección–reacción–difusión:

Hallar u tal que,

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x}) &= f(\mathbf{x}) \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

donde se tiene que:

- Ω es un dominio en \mathbb{R}^2 , con frontera $\partial\Omega$;
- $\varepsilon > 0$ es el parámetro de difusión.
- el operador diferencial Laplaciano Δ está dado por:

$$\Delta u(x, y) = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2};$$

- $\mathbf{b}(\mathbf{x}) = (b_1(\mathbf{x}), b_2(\mathbf{x}))$ es un campo vectorial lo suficientemente suave, llamado el campo de advección;
- el operador diferencial divergencia ∇ está dado por:

$$\nabla u(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y} \right);$$

El problema (1.1), modela distintos fenómenos físicos de transporte, donde la variable u corresponde a la cantidad transferida al medio Ω , por ejemplo contaminante, temperatura, etc (ver [17, 13, 18, 5]). En particular nos interesa el fenómeno de transporte de contaminantes, cuando el dominio Ω es una porción de alguna región de Chile.

Claramente, como no se tiene una solución analítica para dicho problema, es que es fundamental el recurrir a esquemas numéricos que puedan aproximar dicha solución. Ahora, dentro de la gran variedad de esquemas numéricos [4, 14], es que nos basaremos en el Método de Elementos Finitos, ya que éste es preferido en la comunidad ingenieril dada su gran robustez y desarrollo matemático [7, 9, 6, 10].

El Método de Elementos Finitos, es un esquema numérico que sirve para aproximar la solución de una ecuación diferencial parcial u ordinaria, cuya solución vive en un espacio de dimensión infinita, por una que viva en un espacio de dimensión finita. En general, la teoría de Elementos Finitos, se basa en el estudio de formulaciones débiles, para ecuaciones diferenciales (ver [11]), las cuales son discretizadas y que requieren de la resolución de sistemas de ecuaciones lineales de gran tamaño. Dentro de las bases del esquema de elementos finitos, es necesario construir mallas sobre el dominio en cuestión, para después aproximar mediante

INTRODUCCIÓN.

espacios polinomiales, contruidos en base a dicha partición del dominio físico (ver Figura 1).

Basado en lo anterior, es que nuestro principal objetivo corresponde a:

- Estudiar distintos métodos de elementos finitos adecuados para una apropiada aproximación de la solución de (1.1);
- Implementar computacionalmente dichos esquemas para distintos escenarios, en dos dimensiones;
- Considerar en dichas implementaciones, aplicaciones con geometrias que simulen rios, lagos, etc.

Claramente, hasta la fecha existen una gran variedad de métodos de elementos finitos para resolver dicho problema (ver [17]). Ahora, dentro de la gran gama de métodos, es que solamente vamos a considerar, los que usualmente se denominan métodos de elementos finitos estabilizados, los cuales son diseñados de tal manera que se obtenga una buena solución a bajo costo computacional. Ahora, dichos métodos se complementarán con métodos de adaptividad, los cuales permiten mejorar la rapidez de convergencia de dichos métodos (ver [2]). Entonces, como segundo objetivo consideraremos:

- Estudiar métodos de elementos finitos adaptativos de bajo orden;
- Implementar distintos esquemas adaptativos considerando métodos de elementos finitos adaptivos estabilizados.

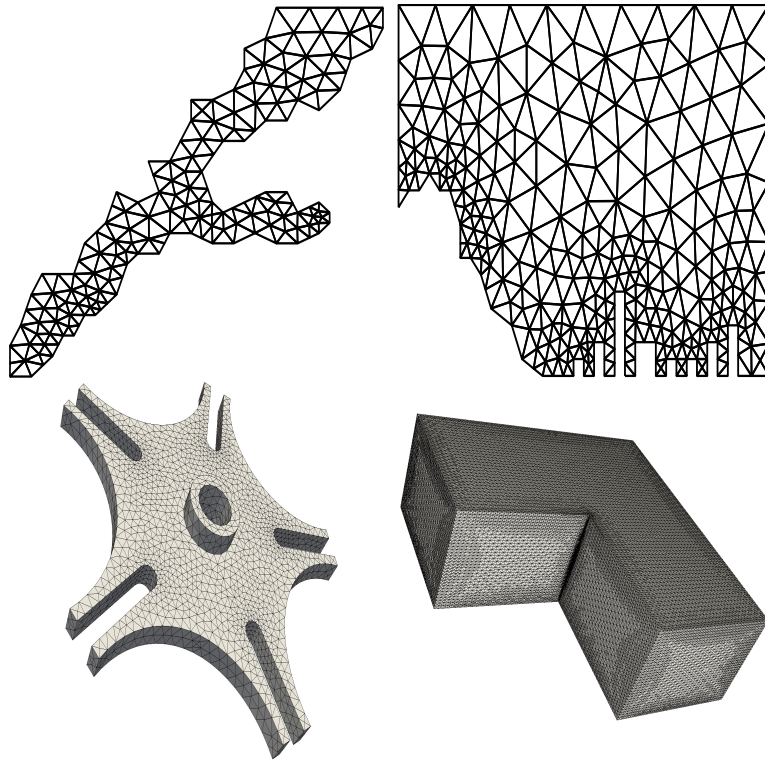


FIGURA 1. Partición de dominios en dos y tres dimensiones, basados en particiones usando elementos triangulares y tetrahédricos.

2. MARCO FUNCIONAL

En esta sección, nos concentraremos en mostrar el marco funcional matemático, en el cual nos basaremos para plantear resultados de existencia de soluciones, unicidad de soluciones, convergencia de los métodos de elementos finitos y el planteo del análisis de error a posteriori el cual permite realizar procesos adaptivos. Las propiedades de los espacios de funciones que se presentan a continuación en conjunto con distintos resultados que son válidos en estos espacios se pueden encontrar con más detalle en [8].

Primero, recordemos que un espacio de Hilbert, corresponde a un espacio vectorial, el cual es completo, es decir, toda sucesión de Cauchy converge a un elemento del espacio, y en donde el producto interno induce una norma.

Ahora, introducimos el siguiente espacio de Hilbert, de funciones de cuadrado integrable en un dominio Ω que es un subconjunto cerrado y acotado de \mathbb{R}^d , con frontera $\partial\Omega$:

$$L^2(\Omega) := \left\{ v(\mathbf{x}) : \int_{\Omega} v^2(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} < \infty \right\}, \quad (2.1)$$

en el cual, se puede introducir el siguiente producto interno

$$(v, w)_{L^2(\Omega)} := \int_{\Omega} v(\mathbf{x}) w(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \quad (2.2)$$

el cual claramente induce la siguiente norma

$$\|t\|_{L^2(\Omega)} := (t, t)_{L^2(\Omega)}^{1/2} = \left(\int_{\Omega} t^2 \, d\mathbf{x} \right)^{1/2}. \quad (2.3)$$

Entonces, se tiene que el espacio anterior con la norma mencionada $(L^2(\Omega), \|\cdot\|_{L^2(\Omega)})$ es un espacio de Hilbert. Dentro del análisis de elementos finitos es que es necesario introducir el siguiente espacio, definido sobre un dominio $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, con frontera $\partial\Omega$, llamado espacio de Sobolev:

$$H^1(\Omega) := \left\{ v(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \, \forall \, i = 1, \dots, d \right\}. \quad (2.4)$$

El espacio anterior es un espacio de Hilbert con norma inducida

$$\|v\|_{H^1(\Omega)} := \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}. \quad (2.5)$$

De igual forma, podemos definir el espacio de Sobolev

$$H^2(\Omega) := \left\{ v(\mathbf{x}) \in L^2(\Omega) : \frac{\partial v}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), \, \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \in L^2(\Omega), \, \forall \, i, j = 1, \dots, d \right\}, \quad (2.6)$$

con norma

$$\|v\|_{H^2(\Omega)} = \left(\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial v}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}.$$

También se introduce el siguiente subespacio de $H^1(\Omega)$, el cual incorpora condiciones de frontera sobre las funciones, que es

$$H_0^1(\Omega) := \left\{ v(\mathbf{x}) \in H^1(\Omega) : v|_{\partial\Omega} = 0 \right\}, \quad (2.7)$$

donde $v|_{\partial\Omega}$ corresponde a la restricción de v a la frontera de Ω .

Dentro de todo el análisis de elementos finitos es que ocuparemos reiteradamente, lo que se conoce como integración por partes, que corresponde a una serie de corolarios que se obtienen a partir del conocido teorema de Gauss, el cual dice que para cualquier dominio Ω lo suficientemente suave y con vector normal unitario \mathbf{n} (ver Figura 2), luego dado cualquier campo vectorial \mathbf{G} , lo suficientemente suave, se cumple que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{G} \, d\mathbf{x} = \int_{\partial\Omega} \mathbf{G} \cdot \mathbf{n} \, ds. \quad (2.8)$$

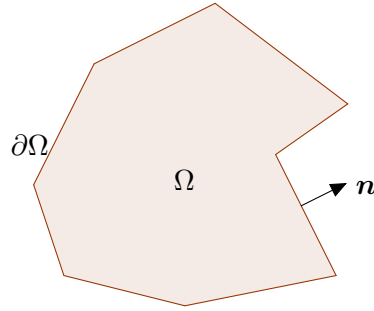


FIGURA 2. Dominio Ω , con frontera $\partial\Omega$ y vector normal unitario \mathbf{n} .

Con respecto al resultado anterior, es que se pueden deducir una serie de resultados con respecto a integración. Lo primero es considerar el siguiente campo vectorial,

$$\mathbf{G} = \left(0, \dots, \underbrace{u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})}_{i\text{-ésima}}, \dots, 0 \right)$$

que contiene puros ceros, menos en su i -ésima entrada, la cual contiene la multiplicación de dos funciones lo suficientemente suaves u y v . Luego, si el vector normal está dado por $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_d)$, luego aplicando el teorema de Gauss, es decir, reemplazando dicha elección en (2.8), se tiene que

$$\int_{\Omega} \frac{\partial u}{\partial x_i} v \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} u \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} u v n_i \, ds. \quad (2.9)$$

Ahora, si consideramos que la función u es talque $u = \frac{\partial w}{\partial x_i}$, donde la función $w(\mathbf{x})$ es de igual forma lo suficientemente suave, luego reemplazando dicha elección en (2.9), se tiene que se cumple

$$\int_{\Omega} \frac{\partial^2 w}{\partial x_i} v \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} \frac{\partial v}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial w}{\partial x_i} n_i v \, ds. \quad (2.10)$$

Finalmente, notando que dicha elección fue arbitraria, luego variando la i -ésima entrada y sumando sobre todos los índices, es que se puede concluir que para funciones lo suficientemente suaves, se cumple que

$$\int_{\Omega} \Delta u v \, d\mathbf{x} = - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla v \, d\mathbf{x} + \int_{\partial\Omega} \nabla u \cdot \mathbf{n} v \, ds. \quad (2.11)$$

Ahora recordaremos una serie de desigualdades que serán útiles dentro de todo el análisis de elementos finitos junto con el análisis de error a posteriori. La primera es la conocida desigualdad de Cauchy–Schwarz, que dice que si dos funciones $f, g \in L^2(\Omega)$, luego se cumple que

$$\int_{\Omega} fg \, d\mathbf{x} \leq \|f\|_{L^2(\Omega)} \|g\|_{L^2(\Omega)}. \quad (2.12)$$

Una generalización del resultado anterior, es la conocida desigualdad de Hölder, que dice que si $f \in L^p(\Omega)$ y $g \in L^q(\Omega)$, donde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, luego se cumple que

$$\int_{\Omega} fg \, d\mathbf{x} \leq \|f\|_{L^p(\Omega)} \|g\|_{L^q(\Omega)}, \quad (2.13)$$

donde el espacio $L^t(\Omega)$, para un natural t , se define como

$$L^t(\Omega) := \left\{ v : \int_{\Omega} v^t \, d\mathbf{x} < \infty \right\},$$

y para el caso cuando $t = \infty$, el espacio se define como

$$L^\infty(\Omega) := \left\{ v : \|v\|_{L^\infty(\Omega)} < \infty \right\},$$

donde

$$\|v\|_{L^\infty(\Omega)} = \inf \{ M \geq 0 : |v(\mathbf{x})| \leq M \text{ en } \Omega \}.$$

Finalmente, una generalización del resultado anterior es que si una serie de funciones f_1, f_2, \dots, f_k para las cuales se cumple que

$$f_i \in L^{p_i}, \quad 1 \leq i \leq k \quad \text{con} \quad \frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} + \dots + \frac{1}{p_k} \leq 1,$$

luego

$$\left(\int_{\Omega} (f_1 \cdots f_k)^p \, d\mathbf{x} \right)^{1/p} \leq \|f_1\|_{L^{p_1}(\Omega)} \|f_2\|_{L^{p_2}(\Omega)} \cdots \|f_k\|_{L^{p_k}(\Omega)}. \quad (2.14)$$

La última desigualdad que será útil dentro de nuestro análisis es la desigualdad de Poincaré, que dice que

$$\|v\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathfrak{C}_{P,\Omega} \|\nabla v\|_{L^2(\Omega)} \quad \forall v \in H_0^1(\Omega). \quad (2.15)$$

donde la constante $\mathfrak{C}_{P,\Omega}$ solamente depende del dominio. Por último, recordaremos un conocido resultado del análisis funcional que nos entregará existencia y unicidad tanto para el problema débil como también para la aproximación de elementos finitos (ver [12, Capítulo 1]).

Teorema 1 (Lax-Milgram). *Sea $(V, \|\cdot\|_V)$ un espacio de Hilbert, $\mathcal{B} : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ una forma bilineal continua y coerciva, y $\mathcal{F} : V \rightarrow \mathbb{R}$ un funcional lineal y continuo. Luego, existe solución única para el problema:*

Hallar $\mathbf{u} \in V$ tal que cumpla con

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{F}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Cada requerimiento del teorema anterior, será especificado en lo que sigue de las secciones y demostrado cuando se requiera.

3. MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS

En esta sección, aplicaremos la teoría de elementos finitos a nuestra ecuación (1.1), para lo cual nos basaremos en la teoría expuesta en [7].

3.1. Formulación débil del problema. El primer paso para el planteo de un esquema de elementos finitos, corresponde a obtener la formulación débil asociada a la ecuación diferencial parcial (1.1). El tratamiento usual es como sigue. Consideramos primero cualquier función lo suficientemente suave $v(\mathbf{x})$, la cual multiplicará toda la ecuación diferencial, es decir,

$$-\epsilon \Delta u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) + \mathbf{b} \cdot \nabla u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) = f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}).$$

Ahora, integramos la ecuación anterior en todo el dominio, es decir,

$$\int_{\Omega} (-\epsilon \Delta u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) + \mathbf{b} \cdot \nabla u(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x})v(\mathbf{x})) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} f(\mathbf{x})v(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}.$$

Usando la integración por partes (2.11), podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\int_{\Omega} (\epsilon \nabla u \cdot \nabla v + \mathbf{b} \cdot \nabla uv + uv) \, d\mathbf{x} - \int_{\partial\Omega} (\nabla u \cdot \mathbf{n})v \, ds = \int_{\Omega} fv \, d\mathbf{x}.$$

Como nuestro problema contempla condiciones del tipo Dirichlet en la frontera, es decir, $u = 0$ en $\partial\Omega$, luego la derivada normal que aparece de forma natural, pero que no es dato dentro de nuestro problema, es que tenemos que eliminarla de la ecuación anterior. Entonces, a la función arbitraria v le pediremos que se anule en la frontera del dominio, luego con dicho requerimiento es que podemos reescribir la ecuación anterior como

$$\int_{\Omega} (\epsilon \nabla u \cdot \nabla v + \mathbf{b} \cdot \nabla uv + uv) \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} fv \, d\mathbf{x}.$$

La ecuación anterior es la conocida formulación débil del problema diferencial ya que transformamos los requerimientos de continuidad a requerimientos de integrabilidad. Ahora, basados en la Sección 2, es que podemos reescribir finalmente nuestro problema como sigue:

Encontrar $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que

$$\mathcal{B}(u, v) = \mathcal{F}(v), \quad \text{para toda } v \in H_0^1(\Omega), \quad (3.1)$$

donde

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(u, v) &:= \int_{\Omega} (\epsilon \nabla u \cdot \nabla v + \mathbf{b} \cdot \nabla uv + uv) \, d\mathbf{x}, \\ \mathcal{F}(v) &:= \int_{\Omega} fv \, d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Para poder demostrar existencia y unicidad de una solución para el problema anterior es que necesitamos demostrar todos los requerimientos presentados en el

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

Teorema (1), para el cual consideraremos que $V = H_0^1(\Omega)$ dotado con la siguiente norma:

$$\|\mathbf{v}\|_\Omega := \left(\varepsilon \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} + \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \right)^{1/2} \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega). \quad (3.3)$$

Continuidad de \mathcal{B} : En la Definición 1.2 en [12], se tiene que la continuidad de la forma \mathcal{B} corresponde a demostrar que, dado un espacio de Hilbert V con norma $\|\cdot\|_V$, se cumple la siguiente desigualdad

$$|\mathcal{B}(\mathbf{w}, \mathbf{v})| \leq \mathbf{C}_{up} \|\mathbf{w}\|_V \|\mathbf{v}\|_V \quad \forall \mathbf{w}, \mathbf{v} \in V.$$

Ahora, tomando cualquier par de funciones $\mathbf{w}, \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$, luego por definición, tanto las funciones como sus derivadas viven en el espacio $L^2(\Omega)$, entonces podemos hacer uso de la desigualdad de Cauchy–Schwarz (2.12), de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int_\Omega \varepsilon \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^d \varepsilon \int_\Omega \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} \\ &\leq \sum_{i=1}^d \sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Ahora, podemos utilizar la desigualdad de Hölder (2.14), con parámetros $p_1 = \infty$, $p_2 = p_3 = 2$, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \int_\Omega \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^d \int_\Omega b_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &\leq \sum_{i=1}^d \frac{\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}}{\sqrt{\varepsilon}} \sqrt{\varepsilon} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \end{aligned}$$

Por último, nuevamente podemos hacer uso de (2.12) como

$$\int_\Omega \mathbf{u} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \leq \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}.$$

Ahora, sumando todas las desigualdades anteriores, permite concluir que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\epsilon \nabla \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} \mathbf{v} + \mathbf{u} \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\
 &= \epsilon \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \, d\mathbf{x} + \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} b_i \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{u} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\
 &\leq \sum_{i=1}^d \sqrt{\epsilon} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\epsilon} \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^d \frac{\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}}{\sqrt{\epsilon}} \sqrt{\epsilon} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\quad + \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \sum_{i=1}^d \sqrt{\epsilon} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \sqrt{\epsilon} \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} + \max_{i=1, \dots, d} \frac{\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}}{\sqrt{\epsilon}} \sum_{i=1}^d \sqrt{\epsilon} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\quad + \|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \\
 &\leq \max \left\{ 1, \max_{i=1, \dots, d} \frac{\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}}{\sqrt{\epsilon}} \right\} \\
 &\quad \left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^d \sqrt{\epsilon} \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \left(\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} + \sum_{i=1}^d \sqrt{\epsilon} \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)} \right) \\
 &\leq (d+1) \max \left\{ 1, \max_{i=1, \dots, d} \frac{\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}}{\sqrt{\epsilon}} \right\} \\
 &\quad \left(\|\mathbf{u}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^d \epsilon \left\| \frac{\partial \mathbf{u}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \left(\|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{i=1}^d \epsilon \left\| \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\
 &= (d+1) \max \left\{ 1, \max_{i=1, \dots, d} \frac{\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}}{\sqrt{\epsilon}} \right\} \|\mathbf{u}\|_{\Omega} \|\mathbf{v}\|_{\Omega},
 \end{aligned}$$

donde en la última desigualdad usamos el hecho que $\left(\sum_{i=1}^{d+1} a_i \right)^2 \leq (d+1) \sum_{i=1}^d a_i^2$. Luego, la continuidad se obtiene tomando la constante \mathbf{C}_{up} como

$$\mathbf{C}_{up} := (d+1) \max \left\{ 1, \max_{i=1, \dots, d} \frac{\|b_i\|_{L^\infty(\Omega)}}{\sqrt{\epsilon}} \right\}.$$

Coercividad de \mathcal{B} : De la Definición 1.3 en [12], se tiene que la continuidad de la forma \mathcal{B} corresponde a demostrar que, dado un espacio de Hilbert $(V, \|\cdot\|_V)$, se cumple la siguiente desigualdad

$$\mathcal{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \mathbf{C}_{lw} \|\mathbf{v}\|_V^2 \quad \forall \mathbf{v} \in V.$$

Ahora, con respecto a nuestro problema se tiene que

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\varepsilon \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v} \, \mathbf{v} + \mathbf{v} \, \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_i} \right)^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v} \, \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{v}^2 \, d\mathbf{x}\end{aligned}$$

Usando la integración por partes de (2.9) para cualquier función $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$, se tiene que

$$\begin{aligned}\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v} \, \mathbf{v} \, d\mathbf{x} &= \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} b_i \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^d \left(- \int_{\Omega} \mathbf{v} \frac{\partial}{\partial x_i} (b_i \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} + \underbrace{\int_{\partial\Omega} \mathbf{v}^2 b_i n_i \, ds}_{=0} \right) \\ &= \sum_{i=1}^d - \int_{\Omega} \mathbf{v} \left(\frac{\partial b_i}{\partial x_i} \mathbf{v} + b_i \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_i} \right) d\mathbf{x} \\ &= - \int_{\Omega} \mathbf{v}^2 \operatorname{div}(\mathbf{b}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v} \, \mathbf{v} \, d\mathbf{x},\end{aligned}$$

lo cual permite concluir que

$$\int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v} \, \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = -\frac{1}{2} \int_{\Omega} \mathbf{v}^2 \operatorname{div}(\mathbf{b}) \, d\mathbf{x}.$$

La igualdad anterior, se puede insertar en la propiedad de coercividad, y permite reescribirla como

$$\begin{aligned}\mathcal{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) &= \int_{\Omega} (\varepsilon \nabla \mathbf{v} \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v} \, \mathbf{v} + \mathbf{v} \, \mathbf{v}) \, d\mathbf{x} \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_i} \right)^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v} \, \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \mathbf{v}^2 \, d\mathbf{x} \\ &= \varepsilon \sum_{i=1}^d \int_{\Omega} \left(\frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial x_i} \right)^2 d\mathbf{x} + \int_{\Omega} \left(1 - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{b}) \right) \mathbf{v}^2 \, d\mathbf{x}.\end{aligned}$$

Ahora, haciendo el siguiente supuesto clásico (ver Capítulo 2 en [10]), de que

$$1 - \frac{1}{2} \operatorname{div}(\mathbf{b}) \geq \mathbf{C}_b > 0, \quad (3.4)$$

entonces, usando el análisis anterior y (2.5), podemos concluir que

$$\mathcal{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \geq \min\{1, \mathbf{C}_b\} \left(\varepsilon \|\nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) = \min\{1, \mathbf{C}_b\} \|\mathbf{v}\|^2. \quad (3.5)$$

Luego, la coercividad se obtiene tomando

$$C_{lw} = \min\{1, C_b\}.$$

Continuidad del funcional \mathcal{F} : Por último, de la Proposición 2.2.3. en [4], basta demostrar que el funcional lineal es continuo, para lo cual basta con demostrar que

$$\mathcal{F}(v) \leq C\|v\|_V \quad \forall v \in V.$$

Ahora, en nuestro caso, se tiene que

$$\mathcal{F}(v) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} \, d\mathbf{x},$$

luego usando el hecho que $\mathbf{f} \in L^2(\Omega)$, $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$, la desigualdad (2.12) y la definición de la norma (3.3), se sigue que

$$\mathcal{F}(v) = \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)} \leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}\|_{\Omega}.$$

Entonces, gracias al Teorema 1 se puede concluir la existencia y unicidad de una solución débil para nuestro problema.

3.2. Formulación de Galerkin. El problema débil de la sección anterior aún se encuentra puesto en el espacio de funciones $H_0^1(\Omega)$, el cual es un espacio de dimensión infinita. Ahora, para poder aproximar dicho problema, es que se utilizaremos el llamado esquema de Galerkin. Para dicho efecto, primero consideraremos una partición regular del dominio Ω , en una partición finita \mathcal{T} , compuesta por de elementos triangulares T , para la cual se cumple que

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{\text{Ne}} T_i,$$

en donde, Ne es el número total de elementos y todos ellos, son conjuntos cerrados con interior $\text{Int}(T_i)$ no vacío, y además se cumple que $\text{Int}(T_i) \cap \text{Int}(T_j) = \emptyset$, cuando $i \neq j$ (ver Figura 3, para un ejemplo de partición para un dominio dado).

Basados en la partición anterior es que ahora se introduce el siguiente espacio polinomial, usualmente llamado como espacio de elementos finitos Lagrangeano:

$$\mathbb{V}(\mathcal{T}) := \left\{ v \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) : v|_T \in \mathbb{P}_1(T), \forall T \in \mathcal{T}, v|_{\partial\Omega} = 0 \right\},$$

donde $\mathcal{C}(\overline{\Omega})$ corresponde al espacio de funciones continuas hasta el borde del dominio, $\mathbb{P}_1(T)$ corresponde al espacio de polinomios de grado menor o igual a uno definido sobre cada elemento T de la partición \mathcal{T} , y $v|_T$ corresponde a la restricción de la función v al elemento (triángulo T), es decir, $\mathbb{V}(\mathcal{T})$ corresponde a un espacio vectorial de todas las funciones polinomiales continuas a trozos. Un ejemplo de

$$\bar{\Omega} = \bigcup_{i=1}^{10} T_i,$$

$$\mathcal{V}(\mathcal{T}) = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{10}.$$

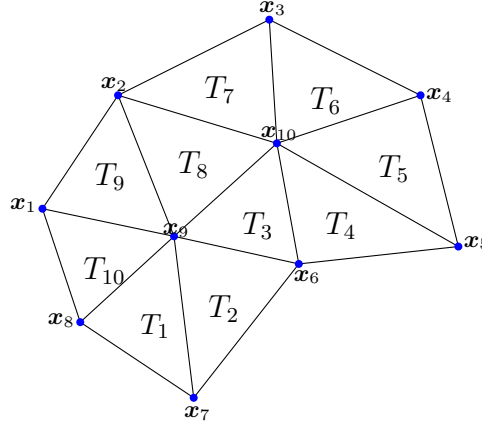


FIGURA 3. Dominio Ω , con una partición $\mathcal{T} = \bigcup_{i=1}^{10} T_i$ basada en triángulos T_i , y con un conjunto de vértices $\mathcal{V}(\mathcal{T}) = \{\mathbf{x}_i\}_{i=1}^{10}$.

una función que viva es un espacio de elementos finitos como el descrito, se muestra en la Figura 4.

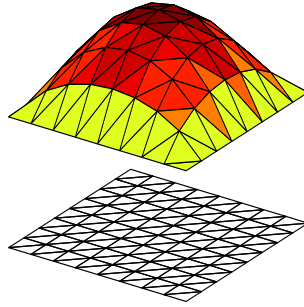


FIGURA 4. Prototipo de función de elementos finitos Lagrangeana, que corresponde a una función continua a trozos y que en cada elemento triangular es un polinomio de grado uno.

Ahora, como el espacio de elementos finitos $\mathbb{V}(\mathcal{T})$ es un espacio vectorial, podemos encontrar una base. Para poder definir una base adecuada para dicho espacio, es que consideraremos la siguiente función polinomial de grado uno $\lambda_i(\mathbf{x})$, la cual se asocia a cada vértice de la partición $\mathbf{x}_i \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$ y que cumple con

$$\lambda_i(\mathbf{x}_j) = \begin{cases} 1 & \text{si } \mathbf{x}_j = \mathbf{x}_i, \\ 0 & \text{otro caso.} \end{cases}$$

La función anterior es una función que vale uno en el nodo asociado y decae de forma lineal a todos los nodos vecinos (ver Figura 5).

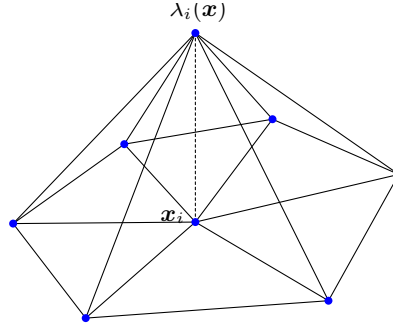


FIGURA 5. Función de base Lagrangeana $\lambda_i(\mathbf{x})$, asociada al nodo $\mathbf{x}_i \in \mathcal{V}(\mathcal{T})$.

Ahora, dadas dichas funciones y tomando como $N_v = \#\mathcal{V}(\mathcal{T})$ es que se tiene que

$$\mathbb{V}(\mathcal{T}) = \text{span}\{\lambda_1, \dots, \lambda_{N_v}\},$$

es decir, cualquier función que viva en $\mathbb{V}(\mathcal{T})$, puede ser escrita en términos de una combinación lineal con respecto a los elementos de la base, es decir, si $v \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$, luego

$$v(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_v} \alpha_i \lambda_i(\mathbf{x}), \quad \text{donde } \alpha_i \in \mathbb{R}, \quad i = 1, \dots, N_v.$$

Claramente, de lo anterior se tiene que la dimensión del espacio vectorial es

$$\dim(\mathbb{V}(\mathcal{T})) = \#(\mathcal{V}(\mathcal{T})) = N_v.$$

Ahora que se tiene un espacio de elementos finitos es que utilizamos la idea de aproximaciones de Galerkin, es decir, vamos a aproximar la solución \mathbf{u} de nuestro problema débil (3.1), mediante un elemento $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$, de la forma

$$H_0^1(\Omega) \ni \mathbf{u}(\mathbf{x}) \approx \mathbf{u}_{\mathcal{T}}(\mathbf{x}) = \sum_{i=1}^{N_v} \alpha_i \lambda_i(\mathbf{x}) \in \mathbb{V}(\mathcal{T}).$$

Luego el esquema de Galerkin corresponde a poner el problema débil, pero ahora en un espacio de dimensión finita, es decir, aproximaremos nuestro problema como sigue:

Encontrar $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$ tal que

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \mathcal{F}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}), \quad \text{para toda } \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}), \quad (3.6)$$

donde \mathcal{B} y \mathcal{F} están dadas en (3.2).

Notemos que hasta ahora, solamente cambiamos a un espacio discreto el cual sigue siendo un espacio de Hilbert dotado de la misma norma anterior, es que todas

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

las propiedades de la forma bilineal y el funcional lineal siguen siendo válidas, lo que se traduce en que se tiene existencia y unicidad de una solución discreta $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ para (3.6) usando los resultados de la sección anterior.

Ahora, nos centraremos en reescribir el problema anterior de una forma más adecuada. Primero, usaremos la definición de la forma bilineal y el hecho que la función de aproximación se puede escribir como una combinación lineal de los elementos de la base de $\mathbb{V}(\mathcal{T})$, es decir;

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) &= \mathcal{B}\left(\sum_{i=1}^{\mathbf{Nv}} \alpha_i \lambda_i, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\right) \\ &= \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \left(\sum_{i=1}^{\mathbf{Nv}} \alpha_i \lambda_i\right) \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \nabla \left(\sum_{i=1}^{\mathbf{Nv}} \alpha_i \lambda_i\right) + \sum_{i=1}^{\mathbf{Nv}} \alpha_i \lambda_i \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{\mathbf{Nv}} \alpha_i \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \lambda_i \cdot \nabla \mathbf{v} + \mathbf{b} \cdot \nabla \lambda_i \mathbf{v} + \lambda_i \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{i=1}^{\mathbf{Nv}} \alpha_i \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \lambda_i \cdot \nabla \mathbf{v} + (\mathbf{b} \cdot \nabla \lambda_i + \lambda_i) \mathbf{v} \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

Notemos ahora que el problema (3.6), se tiene que cumplir para cada $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$, que es equivalente a pedir que se cumpla para cada elemento de la base que genera al espacio $\mathbb{V}(\mathcal{T})$, es decir, utilizando la reescritura anterior, tenemos que se tiene que cumplir el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum_{i=1}^{\mathbf{Nv}} \alpha_i \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \lambda_i \cdot \nabla \lambda_1 + (\mathbf{b} \cdot \nabla \lambda_i + \lambda_i) \lambda_1 \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \lambda_1 \, d\mathbf{x}, \\ \sum_{i=1}^{\mathbf{Nv}} \alpha_i \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \lambda_i \cdot \nabla \lambda_2 + (\mathbf{b} \cdot \nabla \lambda_i + \lambda_i) \lambda_2 \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \lambda_2 \, d\mathbf{x}, \\ \vdots \\ \sum_{i=1}^{\mathbf{Nv}} \alpha_i \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \lambda_i \cdot \nabla \lambda_{\mathbf{Nv}} + (\mathbf{b} \cdot \nabla \lambda_i + \lambda_i) \lambda_{\mathbf{Nv}} \, d\mathbf{x} = \int_{\Omega} \mathbf{f} \lambda_{\mathbf{Nv}} \, d\mathbf{x}. \end{array} \right. \quad (3.7)$$

Entonces, definiendo una matriz \mathbf{B} de tamaño $\mathbf{Nv} \times \mathbf{Nv}$, la cual tiene como entradas

$$(\mathbf{B})_{ij} = \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \lambda_j \cdot \nabla \lambda_i + (\mathbf{b} \cdot \nabla \lambda_j + \lambda_j) \lambda_i \, d\mathbf{x}, \quad \forall i, j = 1, \dots, \mathbf{Nv}, \quad (3.8)$$

y de igual forma definiendo los vectores $\boldsymbol{\alpha}$ y \mathbf{f} , de tamaño $\mathbf{Nv} \times 1$, como

$$\boldsymbol{\alpha} = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_{\mathbf{Nv}} \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad \mathbf{f} = \begin{bmatrix} \int_{\Omega} \mathbf{f} \lambda_1 \, d\mathbf{x} \\ \vdots \\ \int_{\Omega} \mathbf{f} \lambda_{\mathbf{Nv}} \, d\mathbf{x} \end{bmatrix}, \quad (3.9)$$

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

se puede concluir que el problema (3.6), es equivalente a resolver el siguiente problema matricial:

Encontrar $\alpha_1, \dots, \alpha_{N_v}$ tal que

$$\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f}. \quad (3.10)$$

Notemos que, de la propiedad de coercividad de la forma \mathcal{B} , se tiene que para cualquier elemento

$$\mathbb{V}(\mathcal{T}) \ni \mathbf{v}_{\mathcal{T}} = \sum_{i=1}^{N_v} \tilde{\alpha}_i \lambda_i(\mathbf{x}),$$

se cumple que, definiendo como $\tilde{\boldsymbol{\alpha}} = (\tilde{\alpha}_1, \dots, \tilde{\alpha}_{N_v})$,

$$0 < \mathbf{C}_{lw} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega}^2 \leq \mathcal{B}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \tilde{\boldsymbol{\alpha}} \mathbf{B} \tilde{\boldsymbol{\alpha}}^T,$$

es decir, lo anterior nos dice que la matriz de elementos finitos es semidefinida positiva, que es equivalente a decir que *es invertible (su determinante es positivo), y su inversa es definida positiva*.

Para poder resolver el problema lineal anterior, tenemos que ensamblar la matriz \mathbf{B} y el vector del lado derecho del sistema \mathbf{f} , usando (3.8) y (3.9), respectivamente. Ahora, para efectuar dicho cálculo es que nos basaremos en el siguiente simple hecho que para todo $i, j = 1, \dots, N_v$ se cumple que

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} \varepsilon \nabla \lambda_j \cdot \nabla \lambda_i + (\mathbf{b} \cdot \nabla \lambda_j + \lambda_j) \lambda_i \, d\mathbf{x} \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \varepsilon \nabla \lambda_{j|T} \cdot \nabla \lambda_{i|T} + (\mathbf{b} \cdot \nabla \lambda_{j|T} + \lambda_{j|T}) \lambda_{i|T} \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

donde la integral en todo el dominio se transformó en una suma de integrales por todos los elementos de la partición \mathcal{T} . Luego, podemos hacer un cálculo local por cada elemento T . Para ésto, utilizaremos formulas para las tres funciones de base asociadas a cada vértice de un elemento (ver Figura (6)). Ahora, basados en la

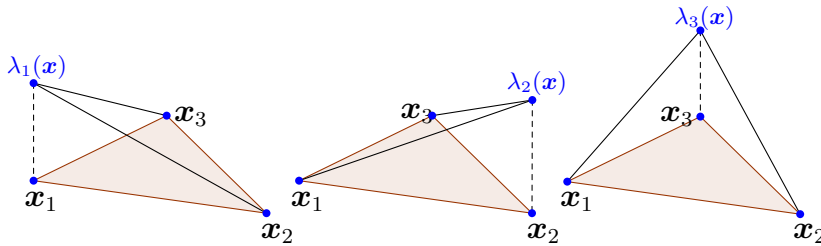


FIGURA 6. Prototipo de elemento triangular T , compuesto por sus tres vértices \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 y \mathbf{x}_3 , con sus respectivas tres funciones de base asociadas a cada vértice $\lambda_1(\mathbf{x})$, $\lambda_2(\mathbf{x})$ y $\lambda_3(\mathbf{x})$.

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

Figura 7, que da un ordenamiento usual anti horario de elementos finitos, se tiene que cada función de base restringida al elemento T , está dada por

$$\lambda_i(x, y)|_T = 1 - \frac{(x - x_i, y - y_i) \cdot \mathbf{n}_i}{2|T|} \quad \text{para todo } i = 1, 2, 3,$$

donde $|T|$ denota el área del triángulo $T \in \mathcal{T}$. Claramente, para el cálculo de la primera integral es necesario tener los gradientes de dichas funciones, el cual, usando la expresión anterior, es claramente

$$\nabla \lambda_i(x, y)|_T = -\frac{1}{2|T|} \mathbf{n}_i \quad \text{para todo } i = 1, 2, 3.$$

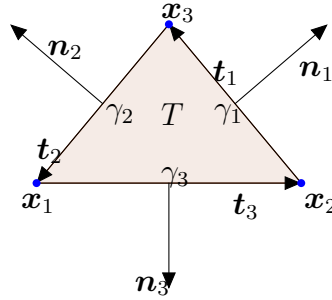


FIGURA 7. Prototipo de elemento triangular T , compuesto por: sus tres vértices \mathbf{x}_1 , \mathbf{x}_2 y \mathbf{x}_3 ; tres lados γ_1 , γ_2 y γ_3 , opuestos a sus respectivos vértices; vectores tangentes $\mathbf{t}_1 = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2$, $\mathbf{t}_2 = \mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2$ y $\mathbf{t}_3 = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$; y tres vectores normales \mathbf{n}_1 , \mathbf{n}_2 y \mathbf{n}_3 que se obtiene al rotar los tangentes en noventa grados en sentido horario.

Finalmente, asumiendo que el campo convectivo $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^d$, podemos usar una formula de integración que es exacta para polinomios de grado dos en triángulos, que corresponde a una extensión de la conocida regla de Simpson en una dimensión

$$\int_T \mathbf{p}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} = \frac{|T|}{3} \sum_{i=1}^3 \mathbf{p}(\mathbf{x}_{M_i}) \quad \forall \mathbf{p}(\mathbf{x}) \in \mathbb{P}_2(T),$$

donde \mathbf{x}_{M_i} corresponde al punto medio del lado γ_i , para $i = 1, 2, 3$ y $\mathbb{P}_2(T)$ es el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a dos. Finalmente, usando el hecho que cada función de base es lineal y en cada uno de sus nodos asociados vale uno, luego $\lambda_i(\mathbf{x}_{M_j}) = 1/2$ cuando $i, j = 1, 2, 3$ y $i \neq j$, y vale cero en caso contrario, lo que permite concluir que para todo $T \in \mathcal{T}$,

$$\int_T \varepsilon \nabla \lambda_{j|T} \cdot \nabla \lambda_{i|T} + (\mathbf{b} \cdot \nabla \lambda_{j|T} + \lambda_{j|T}) \lambda_{i|T} \, d\mathbf{x} = \begin{cases} \varepsilon \frac{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{n}_i}{4|K|} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_j}{6} + \frac{|K|}{6} & \text{si } i = j, \\ \varepsilon \frac{\mathbf{n}_j \cdot \mathbf{n}_i}{4|K|} - \frac{\mathbf{b} \cdot \mathbf{n}_j}{6} + \frac{|K|}{12} & \text{si } i \neq j. \end{cases} \quad (3.11)$$

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

Finalmente tenemos que calcular el lado derecho, el cual puede ser calculado con la ayuda de alguna cuadratura Gaussiana, de la forma

$$\int_T \mathbf{f}(\mathbf{x}) \lambda_i(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \approx \sum_{i=1}^{N_G} \omega_i \mathbf{f}(\mathbf{x}_i) \lambda_i(\mathbf{x}_i),$$

donde ω_i y \mathbf{x}_i para $i = 1, \dots, N_G$, son pesos y puntos de integración de Gauss, respectivamente (ver Sección 8.1 en [10]).

3.3. Convergencia del método. Para obtener un resultado de convergencia, necesitamos medir el error en alguna norma, entre la diferencia entre \mathbf{u} que resuelve

$$\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega) : \quad \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{F}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \quad (3.12)$$

y su aproximación discreta de elementos finitos $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ que resuelve

$$\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}) : \quad \mathcal{B}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \mathcal{F}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}). \quad (3.13)$$

Como $\mathbb{V}(\mathcal{T}) \subset H_0^1(\Omega)$, podemos tomar en (3.12) la función $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathcal{T}}$, y después podemos restar (3.12) de (3.13), para así obtener, usando la bilinealidad de la forma \mathcal{B} ,

$$\mathcal{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - \mathcal{B}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \mathcal{F}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}) - \mathcal{F}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = 0,$$

y como la función discreta es cualquiera, entonces se obtiene lo que usualmente se denomina como ortogonalidad de Galerkin:

$$\mathcal{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}). \quad (3.14)$$

Para medir error, ya que nos encontramos en un marco funcional, es que se tendrá que medir el error en la norma que se definió en (3.3), es decir, queremos medir el error en

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega}.$$

Recordemos ahora, un resultado que se utilizó para la demostración de existencia y unicidad, que correspondía a la propiedad de coercividad de la forma \mathcal{B} :

$$\mathcal{C}_{lw} \|\mathbf{v}\|_{\Omega}^2 \leq \mathcal{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \quad (3.15)$$

y de igual forma se utilizó lo que se denominó como continuidad de la forma, es decir,

$$\mathcal{B}(\mathbf{v}, \mathbf{w}) \leq \mathcal{C}_{up} \|\mathbf{v}\|_{\Omega} \|\mathbf{w}\|_{\Omega} \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in H_0^1(\Omega). \quad (3.16)$$

Ahora, tenemos los ingredientes para obtener un primer resultado de convergencia, denominado como Lema de Cea. Primero, tomamos $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ en (3.15) y hacemos uso de la ortogonalidad de Galerkin dos veces con cualquier función $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$

como sigue

$$\begin{aligned}
 \mathcal{C}_{lw} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{\Omega}^2 &\leq \mathcal{B}(u - u_{\mathcal{T}}, u - u_{\mathcal{T}}) \quad [\text{Coercividad}] \\
 &= \mathcal{B}(u - u_{\mathcal{T}}, u) - \underbrace{\mathcal{B}(u - u_{\mathcal{T}}, u_{\mathcal{T}})}_{=0} \quad [\text{Ortogonalidad}] \\
 &= \mathcal{B}(u - u_{\mathcal{T}}, u) - \underbrace{\mathcal{B}(u - u_{\mathcal{T}}, v_{\mathcal{T}})}_{=0} \quad [\text{Ortogonalidad}] \\
 &= \mathcal{B}(u - u_{\mathcal{T}}, u - v_{\mathcal{T}}) \\
 &\leq \mathcal{C}_{up} \|u - u_{\mathcal{T}}\|_{\Omega} \|u - v_{\mathcal{T}}\|_{\Omega}, \quad [\text{Continuidad}]
 \end{aligned}$$

lo que permite concluir un primer resultado de cuasi mejor aproximabilidad

$$\|u - u_{\mathcal{T}}\|_{\Omega} \leq \frac{\mathcal{C}_{up}}{\mathcal{C}_{lw}} \inf_{v_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})} \|u - v_{\mathcal{T}}\|_{\Omega}. \quad (3.17)$$

Ahora, para poder obtener el resultado final de convergencia, es que usaremos el siguiente resultado de interpolación (ver ecuación (1.102) en [10]).

Teorema. Dado un dominio lo suficientemente suave Ω y una partición regular \mathcal{T} del dominio, luego existe un operador de interpolación $I_L : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}(\mathcal{T})$ tal que

$$\|v - I_L(v)\|_{L^2(\Omega)} + h \|\nabla(v - I_L(v))\|_{L^2(\Omega)} \leq \mathcal{C}_L h^2 |v|_{H^2(\Omega)} \quad \forall v \in H^2(\Omega), \quad (3.18)$$

donde el espacio $H^2(\Omega)$ está definido en (2.6), y la seminorma es

$$|v|_{H^2(\Omega)} := \left(\sum_{i=1}^d \left\| \frac{\partial^2 v}{\partial x_i \partial x_j} \right\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2},$$

y definiendo, basados en la Figura 7, el diámetro de cada elemento $T \in \mathcal{T}$, como

$$h_T = \max_{i \in \{1,2,3\}} \{|\gamma_i|\}, \quad (3.19)$$

luego el largo característico de la partición \mathcal{T} se define como

$$h := \max_{T \in \mathcal{T}} \{h_T\}. \quad (3.20)$$

MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS.

Finalmente, tomando como $v_{\mathcal{T}} = I_L(\mathbf{u})$ en (3.17), y usando el Teorema anterior, podemos concluir que

$$\begin{aligned}\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega} &\leq \frac{\mathcal{C}_{up}}{\mathcal{C}_{lw}} \inf_{\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})} \|\mathbf{u} - \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega} \\ &\leq \frac{\mathcal{C}_{up}}{\mathcal{C}_{lw}} \|\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u})\|_{\Omega} \\ &= \frac{\mathcal{C}_{up}}{\mathcal{C}_{lw}} \left(\varepsilon \|\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\nabla(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u}))\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &\leq \frac{\mathcal{C}_{up}}{\mathcal{C}_{lw}} \left(\varepsilon \mathcal{C}_L^2 h^4 |v|_{H^2(\Omega)}^2 + \mathcal{C}_L^2 h^2 |v|_{H^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2} \\ &= \frac{\mathcal{C}_{up}}{\mathcal{C}_{lw}} \mathcal{C}_L h |v|_{H^2(\Omega)} (\varepsilon h^2 + 1)^{1/2}.\end{aligned}$$

Entonces, se tiene el siguiente resultado. Para un dominio lo suficientemente suave para el cual la solución débil $\mathbf{u} \in H^2(\Omega)$, luego su aproximación de elementos finitos satisface la siguiente relación de convergencia:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega} \leq \mathcal{C}_{con} h. \quad (3.21)$$

Notemos que el resultado anterior nos dice que si hacemos el largo característico de la partición cada vez más pequeño, la solución de elementos finitos converge con orden lineal a la solución del problema débil.

UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS EN MATLAB.

4. UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS EN MATLAB

Ahora, presentaremos un código de elementos finitos realizado en MatLab, para aproximar la solución del problema (3.1), mediante el esquema de Galerkin (3.6).

```
1 % save malla p e t g
2 % resolucio n de  $-\epsilon \Delta u + A \nabla u + \kappa u = f$ 
3
4 clear all; clc; close all; load malla
5
6 Niterations=4;
7 data=sparse(Niterations,2);
8
9 epsilon=1; kappa=0; A=[0 0]; PG=73;
10 [w, points, phisP1]=baricentricas(PG);
11
12 for interation=1:Niterations
13     %% DATOS DE LA MALLA
14     coordinate=p';
15     elements=[t(1,:) ', t(2,:) ', t(3,:) '];
16     e=e';
17     dirichlet=[e(:,1), e(:,2)];
18     dirichlet=unique(dirichlet);
19     area=sparse(size(elements,1),1);
20     Nv=size(coordinate,1);
21     Nt=size(elements,1);
22     area=sparse(Nt,1);
23     N=sparse(Nt,6);
24     for j=1:Nt
25         area(j,1)=0.5*det([1 1 1; coordinate(elements(j,1),:); coordinate(elements(j,2),:); coordinate(elements(j,3),:)]');
26         Tg=[(coordinate(elements(j,3),:)-coordinate(elements(j,2),:)), (coordinate(elements(j,1),:)-coordinate(elements(j,3),:)), ...
27             (coordinate(elements(j,2),:)-coordinate(elements(j,1),:))];
28         N(j,:)= [Tg(2), -Tg(1), Tg(4), -Tg(3), Tg(6), -Tg(5)];
29     end
30
31     %% ENSAMBLE DE LA MATRIZ B Y LADO DERECHO F
32     B=sparse(Nv,Nv);
33     F=sparse(Nv,1);
34     for j=1:Nt
35         cc=[elements(j,1); elements(j,2); elements(j,3)];
36
37         N1=[N(j,1), N(j,2)]; N2=[N(j,3), N(j,4)]; N3=[N(j,5), N(j,6)];
38
39         locD=1/(4*area(j,1))*[N1*N1', N1*N2', N1*N3';
40                               N2*N1', N2*N2', N2*N3';
41                               N3*N1', N3*N2', N3*N3'];
42         locC=(-1/6)*[ A*N1', A*N2', A*N3';
43                     A*N1', A*N2', A*N3';
44                     A*N1', A*N2', A*N3' ];
45         locR=(area(j,1)/12)*[2,1,1;
46                               1,2,1;
47                               1,1,2];
```


UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS EN MATLAB.

```
48     B(cc,cc)=B(cc,cc) + epsilon*locD + locC + kapa*locR;
49     F(cc,1)=F(cc,1)+localphi([coordinate(elements(j,1),:);coordinate(elements
    (j,2),:);coordinate(elements(j,3),:)] , area(j,1),phisP1,w,points,PG,epsilon ,
    kapa,A);
50 end
51
52 %% CONDICIONES DE FRONTERA U=0 EN EL BORDE DEL DOMINIO
53 for j=1:size(dirichlet,1)
54     B(dirichlet(j,1),:)=sparse(Nv,1);
55     B(:,dirichlet(j,1))=sparse(1,Nv);
56     B(dirichlet(j,1),dirichlet(j,1))=1;
57     F(dirichlet(j,1),1)=0;
58 end
59
60 %% RESOLUCION DEL SISTEMA LINEAL
61 uh=B\F;
62 %% CALCULO DEL ERROR
63 seminorm=0;    norm=0;
64 for j=1:Nt
65     dataK=[coordinate(elements(j,1),:)' ,coordinate(elements(j,2),:)' ,
    coordinate(elements(j,3),:)' ]';
66     uhK=[uh(elements(j,1),1),uh(elements(j,2),1),uh(elements(j,3),1)];
67
68     [errorKseui]=localsemiL2UP1(dataK',area(j,1),[N(j,1),N(j,2)], [N(j,3),N(j
    ,4)], [N(j,5),N(j,6)],uhK,w,points,PG,epsilon,kapa);
69     seminorm=seminorm+errorKseui;
70
71     [errorK]=localL2UP1(dataK',area(j,1),uhK,w,points,PG,phisP1,epsilon,kapa);
72     norm=norm+errorK;
73 end
74 data(iteration,:)= [Nv,sqrt(epsilon*seminorm+norm)];
75
76 %% REFINEMENT
77 [p,e,t]=refinemesh(g,p,e',t,'regular');
78 end
```

LISTING 1. Código principal de elementos finitos

En el código principal se hacen llamados a distintas funciones las cuales detallamos a continuación:

UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS EN MATLAB.

```
1 function [w, points , phisP1]=baricentricas (PG)
2
3 % 73 Gauss points
4
5 w=0.5*[0.032906331388919 0.010330731891272 0.010330731891272 0.010330731891272
        0.022387247263016 0.022387247263016 0.022387247263016 0.030266125869468
        0.030266125869468 0.030266125869468 0.030490967802198 0.030490967802198
        0.030490967802198 0.024159212741641 0.024159212741641 0.024159212741641
        0.016050803586801 0.016050803586801 0.016050803586801 0.008084580261784
        0.008084580261784 0.008084580261784 0.002079362027485 0.002079362027485
        0.002079362027485 0.003884876904981 0.003884876904981 0.003884876904981
        0.003884876904981 0.003884876904981 0.003884876904981 0.025574160612022
        0.025574160612022 0.025574160612022 0.025574160612022 0.025574160612022
        0.008880903573338 0.008880903573338 0.008880903573338 0.008880903573338
        0.008880903573338 0.008880903573338 0.008880903573338 0.016124546761731
        0.016124546761731 0.016124546761731 0.016124546761731 0.016124546761731
        0.016124546761731 0.002491941817491 0.002491941817491 0.002491941817491
        0.002491941817491 0.002491941817491 0.002491941817491 0.018242840118951
        0.018242840118951 0.018242840118951 0.018242840118951 0.018242840118951
        0.018242840118951 0.010258563736199 0.010258563736199 0.010258563736199
        0.010258563736199 0.010258563736199 0.010258563736199 0.003799928855302
        0.003799928855302 0.003799928855302 0.003799928855302 0.003799928855302
        0.003799928855302];
6 points=sparse (3,PG) ;
7 points (1,:)=[0.333333333333333 0.020780025853987 0.489609987073006
        0.489609987073006 0.090926214604215 0.454536892697893 0.454536892697893
        0.197166638701138 0.401416680649431 0.401416680649431 0.488896691193805
        0.255551654403098 0.255551654403098 0.645844115695741 0.177077942152130
        0.177077942152130 0.779877893544096 0.110061053227952 0.110061053227952
        0.888942751496321 0.055528624251840 0.055528624251840 0.974756272445543
        0.012621863777229 0.012621863777229 0.003611417848412 0.003611417848412
        0.395754787356943 0.395754787356943 0.600633794794645 0.600633794794645
        0.134466754530780 0.134466754530780 0.307929983880436 0.307929983880436
        0.557603261588784 0.557603261588784 0.014446025776115 0.014446025776115
        0.264566948406520 0.264566948406520 0.720987025817365 0.720987025817365
        0.046933578838178 0.046933578838178 0.358539352205951 0.358539352205951
        0.594527068955871 0.594527068955871 0.002861120350567 0.002861120350567
        0.157807405968595 0.157807405968595 0.839331473680839 0.839331473680839
        0.223861424097916 0.223861424097916 0.075050596975911 0.075050596975911
        0.701087978926173 0.701087978926173 0.034647074816760 0.034647074816760
        0.142421601113383 0.142421601113383 0.822931324069857 0.822931324069857
        0.010161119296278 0.010161119296278 0.065494628082938 0.065494628082938
        0.924344252620784 0.924344252620784];
```

UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS EN MATLAB.

```

8 points(2,:)=[0.33333333333333 0.489609987073006 0.020780025853987
0.489609987073006 0.454536892697893 0.090926214604215 0.454536892697893
0.401416680649431 0.197166638701138 0.401416680649431 0.255551654403098
0.488896691193805 0.255551654403098 0.177077942152130 0.645844115695741
0.177077942152130 0.110061053227952 0.779877893544096 0.110061053227952
0.055528624251840 0.888942751496321 0.055528624251840 0.012621863777229
0.974756272445543 0.012621863777229 0.395754787356943 0.600633794794645
0.600633794794645 0.003611417848412 0.003611417848412 0.395754787356943
0.307929983880436 0.557603261588784 0.557603261588784 0.134466754530780
0.134466754530780 0.307929983880436 0.264566948406520 0.720987025817365
0.720987025817365 0.014446025776115 0.014446025776115 0.264566948406520
0.358539352205951 0.594527068955871 0.594527068955871 0.046933578838178
0.046933578838178 0.358539352205951 0.157807405968595 0.839331473680839
0.839331473680839 0.002861120350567 0.002861120350567 0.157807405968595
0.075050596975911 0.701087978926173 0.701087978926173 0.223861424097916
0.223861424097916 0.075050596975911 0.142421601113383 0.822931324069857
0.822931324069857 0.034647074816760 0.034647074816760 0.142421601113383
0.065494628082938 0.924344252620784 0.924344252620784 0.010161119296278
0.010161119296278 0.065494628082938];
9 points(3,:)=[0.33333333333333 0.489609987073006 0.489609987073006
0.020780025853987 0.454536892697893 0.454536892697893 0.090926214604215
0.401416680649431 0.401416680649431 0.197166638701138 0.255551654403098
0.255551654403098 0.488896691193805 0.177077942152130 0.177077942152130
0.645844115695741 0.110061053227952 0.110061053227952 0.779877893544096
0.055528624251840 0.055528624251840 0.888942751496321 0.012621863777229
0.012621863777229 0.974756272445543 0.600633794794645 0.395754787356943
0.003611417848412 0.600633794794645 0.395754787356943 0.003611417848412
0.557603261588784 0.307929983880436 0.134466754530780 0.557603261588784
0.307929983880436 0.134466754530780 0.720987025817365 0.264566948406520
0.014446025776115 0.720987025817365 0.264566948406520 0.014446025776115
0.594527068955871 0.358539352205951 0.046933578838178 0.594527068955871
0.358539352205951 0.046933578838178 0.839331473680839 0.157807405968595
0.002861120350567 0.839331473680839 0.157807405968595 0.002861120350567
0.701087978926173 0.075050596975911 0.223861424097916 0.701087978926173
0.075050596975911 0.223861424097916 0.822931324069857 0.142421601113383
0.034647074816760 0.822931324069857 0.142421601113383 0.034647074816760
0.924344252620784 0.065494628082938 0.010161119296278 0.924344252620784
0.065494628082938 0.010161119296278];
10
11
12%% Calculo de las funciones de base en el elemento de referencia:
13 x1=0; y1=0;
14 x2=1; y2=0;
15 x3=0; y3=1;
16 for j=1:PG
17     eta1(1,j)=1-(x1*points(1,j)+x2*points(2,j)+x3*points(3,j))-(y1*points(1,j)+y2*
points(2,j)+y3*points(3,j));
18     eta2(1,j)=x1*points(1,j)+x2*points(2,j)+x3*points(3,j);
19     eta3(1,j)=y1*points(1,j)+y2*points(2,j)+y3*points(3,j);
20 end
21 phisP1=[eta1; eta2; eta3];

```

LISTING 2. Llamado de la función baricentricas.

UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS EN MATLAB.

```
1 function valor=localfphi ( vertices , areak , phis , w , points , PG , nu , kapa , A )
2
3 %coord 3 vertices de c/triangulo:
4 x1=vertices (1,1) ; y1=vertices (1,2) ;
5 x2=vertices (2,1) ; y2=vertices (2,2) ;
6 x3=vertices (3,1) ; y3=vertices (3,2) ;
7 FP2=sparse (PG,PG) ;
8     for j=1:PG
9         % transformacion :
10            xtr=x1*points (1,j)+x2*points (2,j)+x3*points (3,j) ;
11            ytr=y1*points (1,j)+y2*points (2,j)+y3*points (3,j) ;
12            FP2(j,j)=ff ([ xtr , ytr ] , nu , kapa , A ) ;
13     end
14 valor=2*areak*(phis*FP2)*w' ;
```

LISTING 3. Llamado de la función localfphi.

```
1 function volumeforce = ff (X, epsilon , kapa , A)
2 x=X(1) ; y=X(2) ;
3 a1=A(1) ; a2=A(2) ;
4 volumeforce=epsilon*(- 2*x^2 + 2*x - 2*y^2 + 2*y) + a2*x*(2*y - 1)*(x - 1) + a1*y
    *(2*x - 1)*(y - 1) + kapa*x*y*(x - 1)*(y - 1) ;
```

LISTING 4. Llamado de la función .

```
1 function [errorKseui]=localsemiL2UP1 ( vertices , areak , N1,N2,N3,uh,w , points , PG,nu ,
    kapa )
2
3 x1=vertices (1,1) ; y1=vertices (1,2) ;
4 x2=vertices (2,1) ; y2=vertices (2,2) ;
5 x3=vertices (3,1) ; y3=vertices (3,2) ;
6 wifix=0;
7     for j=1:PG
8         % transformacion :
9            xtr=x1*points (1,j)+x2*points (2,j)+x3*points (3,j) ;
10            ytr=y1*points (1,j)+y2*points (2,j)+y3*points (3,j) ;
11
12            DxU=uh*(-1/(2*areak)) * [N1(1,1) ; N2(1,1) ; N3(1,1) ] ;    DyU=uh*(-1/(2*areak)) * [
                N1(1,2) ; N2(1,2) ; N3(1,2) ] ;
13            wifix=wifix+w(1,j)*( (DxU-getdxu ([ xtr , ytr ] , nu , kapa))^2 + (DyU-getdyu ([
                xtr , ytr ] , nu , kapa))^2 ) ;
14     end
15 errorKseui=2*areak*(wifix) ;
```

LISTING 5. Llamado de la función .

```
1 function valor=getdxu (X, nu , kapa)
2
3 x=X(1) ; y=X(2) ;
4 valor=x*y*(y - 1) + y*(x - 1)*(y - 1) ;
```

LISTING 6. Llamado de la función getdxu.

UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS EN MATLAB.

```
1 function valor=getdyu(X,nu,kapa)
2
3 x=X(1); y=X(2);
4 valor=x*y*(x - 1) + x*(x - 1)*(y - 1);
```

LISTING 7. Llamado de la función getdyu.

UN EJEMPLO NUMÉRICO.

4.1. **Un ejemplo numérico.** Para validar numéricamente nuestro código es que vamos a utilizar una solución exacta para nuestro problema.

Ejemplo: consideraremos que el dominio de nuestro problema es el cuadrado unitario $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ y se tiene la siguiente solución analítica

$$u(x, y) = xy(1 - x)(1 - y).$$

Ahora, dada dicha solución es que podemos calcular el lado derecho de la ecuación usando la ecuación (1.1), para lo cual usaremos los siguientes datos:

- $\varepsilon = 1$, $\kappa = 1$ y $\mathbf{b} = (1, 0)$.

Por último, hacemos notar que para el cálculo del lado derecho utilizamos una regla de cuadratura con 73 puntos de Gauss y que se cumple la siguiente relación entre el largo característico de la partición y el número total de vértices

$$h \approx \frac{1}{Nv^{1/2}}.$$

En la Figura 8 se muestran una serie de soluciones de elementos finitos para el problema en distintas mallas y en la Figura 9, se muestra la tasa de convergencia a medida que refinamos el largo característico de la malla, en la cual se puede apreciar la convergencia lineal óptima del método.

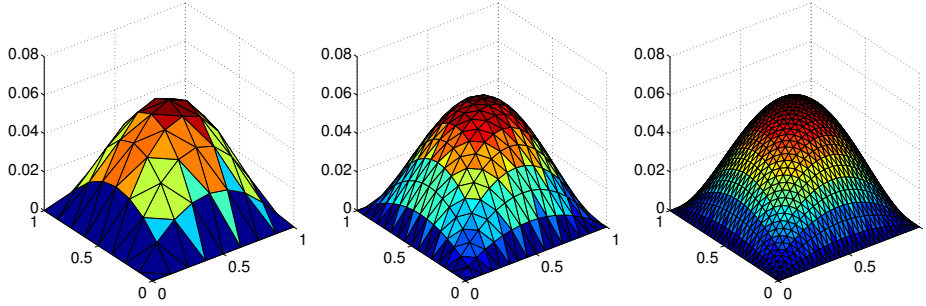


FIGURA 8. Ejemplo: Solución de elementos finitos u_T para distintas particiones: con 512 elementos (izquierda), con 512 elementos (centro) y 2048 elementos (derecha).

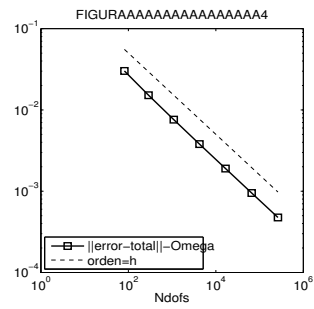


FIGURA 9. Ejemplo: Convergencia del método de elementos finitos estabilizado, donde la convergencia lineal corresponde a $h = \frac{1}{N_v^{1/2}}$.

5. UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADO

Los métodos de elementos finitos estabilizados nacen de la necesidad de entregar una mayor robustez del esquema clásico de Galerkin, en casos en donde esté presente el comportamiento denominado de capa límite, que corresponde a soluciones en las cuales existen fuertes cambios de gradiente en la solución, que justamente es un caso habitual en modelación de contaminantes.

Los elementos finitos estabilizados ya tienen una larga data de teoría de aproximación y propiedades relacionadas, en donde la idea fundamental es aumentar el esquema clásico de Galerkin, discutido en la sección anterior, mediante términos que dependan de la partición del dominio. Uno de los esquemas más clásicos y utilizados en la ingeniería, corresponden a métodos que agregan términos residuales a la formulación en conjunto con los llamados parámetros de estabilización (ver [17]).

Para ser más concretos consideraremos el siguiente esquema de elementos finitos estabilizados del tipo residual:

Encontrar $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$ tal que

$$\mathcal{B}_h(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \mathcal{F}_h(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}), \quad \text{para toda } \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}), \quad (5.1)$$

donde las nuevas formas están dadas por

$$\begin{aligned} \mathcal{B}_h(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) &= \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \int_T (-\varepsilon \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \mathbf{u}_{\mathcal{T}})(\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) d\mathbf{x} \\ \mathcal{F}_h(\mathbf{v}) &= \mathcal{F}(\mathbf{v}) + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \int_T (\mathbf{f})(\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) d\mathbf{x}, \end{aligned} \quad (5.2)$$

donde el parámetro de estabilización $\delta_T > 0$.

Asumiendo que la solución \mathbf{u} de (3.1), es regular, en el sentido que

$$-\varepsilon \Delta \mathbf{u} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u} + \mathbf{u} = \mathbf{f} \quad \text{en } L^2(T), \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

luego, claramente se cumplirá que

$$\mathcal{B}_h(\mathbf{u}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \mathcal{F}_h(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}), \quad (5.3)$$

lo que permite concluir la siguiente propiedad de ortogonalidad, con respecto a la solución $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ de (5.1),

$$\mathcal{B}_h(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = 0 \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}). \quad (5.4)$$

Ahora, para estudiar las propiedades de esta nueva solución es que utilizaremos la nueva norma

$$\|\mathbf{v}\|_{\Omega, St} = \left(\|\mathbf{v}\|_{\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right)^{1/2}, \quad (5.5)$$

donde $\|\cdot\|_{\Omega}$ está definida en (3.3).

UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADO.

Para obtener existencia y unicidad de esta nueva solución en el espacio de Hilbert $(\mathbb{V}(\mathcal{T}), \|\mathbf{v}\|_{\Omega, St})$, es que tenemos que demostrar nuevamente las propiedades expuestas en el Teorema 1, es decir, tenemos que demostrar continuidad y coercividad de la forma \mathcal{B}_h y continuidad del funcional lineal \mathcal{F}_h , pero ahora usando la norma $\|\mathbf{v}\|_{\Omega, St}$.

Continuidad de \mathcal{B}_h : para obtener la continuidad de la forma estabilizada, recordemos que tenemos que demostrar que $\mathcal{B}_h(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \leq C \|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega, St} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega}$ para toda $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$. Ahora, para dicho efecto, haciendo uso de (5.2), $\Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} = 0$ ya que $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ es lineal, en conjunto con la desigualdad de Cauchy–Schwarz, se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{B}_h(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \\
 &= \mathcal{B}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \int_T (-\varepsilon \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \mathbf{u}_{\mathcal{T}})(\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) d\mathbf{x} \\
 &\leq \mathbf{C}_{up} \|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega} + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T^{1/2} \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)} \delta_T^{1/2} \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)} \\
 &\quad + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T^{1/2} \|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)} \delta_T^{1/2} \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)} \\
 &\leq \mathbf{C}_{up} \|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega} + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \\
 &\quad + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq (\mathbf{C}_{up} + 1) \|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega, St} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega, St} + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega, St}.
 \end{aligned}$$

Ahora, asumiendo que los parámetros de estabilización satisfacen que

$$\max_{T \in \mathcal{T}} \{\delta_T\} \leq \mathbf{C}_{\delta},$$

donde la constante \mathbf{C}_{δ} no depende de la partición ni ninguna variable asociada al problema, entonces podemos concluir que

$$\mathcal{B}_h(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \leq \max\{\mathbf{C}_{up} + 1, \mathbf{C}_{\delta}\} \|\mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega, St} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega, St}.$$

Coercividad de \mathcal{B}_h : para cualquier elemento $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$, usando (3.5) y el hecho

que $\Delta \mathbf{v}_{\mathcal{T}} = 0$ ya que $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{P}_1(\mathcal{T})$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_h(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) &= \mathcal{B}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \int_T (-\varepsilon \Delta \mathbf{v}_{\mathcal{T}} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}} + \mathbf{v}_{\mathcal{T}})(\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) d\mathbf{x} \\
 &= \mathcal{B}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 + \delta_T \int_T (\mathbf{v}_{\mathcal{T}})(\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) d\mathbf{x} \\
 &\geq \mathbf{C}_{lw} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \int_T (\mathbf{v}_{\mathcal{T}})(\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) d\mathbf{x} \\
 &\geq \mathbf{C}_{lw} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 - \left| \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \int_T (\mathbf{v}_{\mathcal{T}})(\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) d\mathbf{x} \right|.
 \end{aligned}$$

Ahora, usando la desigualdad $ab \leq \frac{1}{2}(a^2 + b^2)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \left| \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \int_T (\mathbf{v}_{\mathcal{T}})(\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) d\mathbf{x} \right| &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{\delta_T}{2} \int_T (\mathbf{v}_{\mathcal{T}}^2 + (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}})^2) d\mathbf{x} \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{\delta_T}{2} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 + \frac{\delta_T}{2} \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2,
 \end{aligned}$$

la cual si se multiplica por menos, se tiene que

$$- \left| \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \int_T (\mathbf{v}_{\mathcal{T}})(\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) d\mathbf{x} \right| \geq \sum_{T \in \mathcal{T}} -\frac{\delta_T}{2} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 - \frac{\delta_T}{2} \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2,$$

desigualdad que se puede insertar en la desigualdad de coercividad, para así concluir que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}_h(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) &\geq \mathbf{C}_{lw} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} -\frac{\delta_T}{2} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 - \frac{\delta_T}{2} \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 \\
 &= \mathbf{C}_{lw} \left(\varepsilon \|\nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)}^2 \right) - \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{\delta_T}{2} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{\delta_T}{2} \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 \\
 &= \mathbf{C}_{lw} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \varepsilon \|\nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 + \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\mathcal{T})}^2 \right) - \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{\delta_T}{2} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{\delta_T}{2} \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \mathbf{C}_{lw} \varepsilon \|\nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\mathbf{C}_{lw} - \frac{\delta_T}{2} \right) \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{\delta_T}{2} \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2.
 \end{aligned}$$

Asumiendo que, para todo elemento $T \in \mathcal{T}$, se cumple que

$$\mathbf{C}_{lw} - \frac{\delta_T}{2} = \min\{1, \mathbf{C}_b\} - \frac{\delta_T}{2} \geq \mathbf{C}_{st} > 0, \tag{5.6}$$

entonces, se tiene que

$$\begin{aligned}
 & \mathcal{B}_h(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \\
 & \geq \min\{\mathcal{C}_{lw}, \mathcal{C}_{st}, 1/2\} \left(\|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 \right) \\
 & = \mathcal{C}_{lw, St} \|\mathbf{v}\|_{\Omega, St}^2.
 \end{aligned}$$

Continuidad de \mathcal{F}_h : usando (5.2), $\max_{T \in \mathcal{T}} \{\delta_T\} \leq \mathcal{C}_{\delta}$ y la desigualdad de Cauchy–Schwarz, se tiene que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{F}_h(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}) &= \mathcal{F}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \int_T (\mathbf{f})(\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \, d\mathbf{x} \\
 &\leq \|\mathbf{f}\|_{L^2(\Omega)} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega} + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \|\mathbf{f}\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \|\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \\
 &\leq \mathcal{C} \|\mathbf{v}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega}.
 \end{aligned}$$

Entonces, como tenemos todas las propiedades del Teorema de Lax-Milgram, tenemos existencia y unicidad de una solución discreta.

5.1. Convergencia del método estabilizado. Para obtener un resultado de convergencia del método estabilizado, primero recordamos el siguiente resultado de interpolación local (ver Remark 1.105 en [10]):

Teorema. Existe un operador de interpolación $I_L : H_0^1(T) \rightarrow \mathbb{P}_1(T)$ tal que

$$\|\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u})\|_{L^2(T)} + h_T \|\nabla(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u}))\|_{L^2(T)} + h_T^2 \|\Delta(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u}))\|_{L^2(T)} \leq \mathcal{C}_{L,T} h_T^2 |\mathbf{u}|_{H^2(T)}, \quad (5.7)$$

para todo elemento $T \in \mathcal{T}$.

Ahora, se quiere obtener una tasa de convergencia para el error $\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega, St}$, en la cual, haciendo uso de una desigualdad triangular con $I_L(\mathbf{u})$, se tiene que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega, St} \leq \|\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u})\|_{\Omega, St} + \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega, St} := I + II. \quad (5.8)$$

Cota para I: La idea consiste en poder demostrar que el error satisface que

$$\|\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u})\|_{\Omega, St} \leq Ch.$$

UN MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS ESTABILIZADO.

Para esto, notemos que haciendo uso del Teorema anterior, se puede concluir que

$$\begin{aligned}
& \| \mathbf{u} - I_L(\mathbf{u}) \|_{\Omega, St}^2 \\
&= \varepsilon \| \nabla(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u})) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \| \mathbf{u} - I_L(\mathbf{u}) \|_{L^2(\Omega)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \| \mathbf{b} \cdot \nabla(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u})) \|_{L^2(T)}^2 \\
&= \sum_{T \in \mathcal{T}} \varepsilon \| \nabla(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u})) \|_{L^2(T)}^2 + \| \mathbf{u} - I_L(\mathbf{u}) \|_{L^2(T)}^2 + \delta_T \| \mathbf{b} \cdot \nabla(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u})) \|_{L^2(T)}^2 \\
&\leq \sum_{T \in \mathcal{T}} \varepsilon \mathbf{C}_{L,T}^2 h_T^2 | \mathbf{u} |_{H^2(T)}^2 + \mathbf{C}_{L,T}^2 h_T^4 | \mathbf{u} |_{H^2(T)}^2 + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \| \mathbf{b} \cdot \nabla(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u})) \|_{L^2(T)}^2.
\end{aligned}$$

Para el último término anterior, haciendo uso del hecho que $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$ y que $\mathbf{b} = (b_1, b_2)$, se tiene que

$$\begin{aligned}
\| \mathbf{b} \cdot \nabla(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u})) \|_{L^2(T)}^2 &= \int_T (\mathbf{b} \cdot \nabla(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u}))) (\mathbf{b} \cdot \nabla(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u}))) \, d\mathbf{x} \\
&= \int_T (b_1 \partial_x(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u})) + b_2 \partial_y(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u})))^2 \, d\mathbf{x} \\
&\leq 2 \int_T (b_1^2 \partial_x(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u}))^2 + b_2^2 \partial_y(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u}))^2) \, d\mathbf{x} \\
&\leq 2 \| \mathbf{b} \|_{L^\infty(T)}^2 \int_T (\partial_x(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u}))^2 + \partial_y(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u}))^2) \, d\mathbf{x} \\
&= 2 \| \mathbf{b} \|_{L^\infty(T)}^2 \| \nabla(\mathbf{u} - I_L(\mathbf{u})) \|_{L^2(T)}^2,
\end{aligned}$$

la cual en conjunto con el resultado de interpolación local, permite concluir finalmente que

$$\begin{aligned}
& \| \mathbf{u} - I_L(\mathbf{u}) \|_{\Omega, St}^2 \\
&\leq \sum_{T \in \mathcal{T}} \varepsilon \mathbf{C}_{L,T}^2 h_T^2 | \mathbf{u} |_{H^2(T)}^2 + \mathbf{C}_{L,T}^2 h_T^4 | \mathbf{u} |_{H^2(T)}^2 + 2\delta_T \| \mathbf{b} \|_{L^\infty(T)}^2 \varepsilon \mathbf{C}_{L,T}^2 h_T^2 | \mathbf{u} |_{H^2(T)}^2 \\
&\leq Ch^2 | \mathbf{u} |_{H^2(\Omega)}^2.
\end{aligned} \tag{5.9}$$

Cota para II: La idea consiste en poder demostrar que el error satisface que

$$\| I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \|_{\Omega, St} \leq Ch.$$

Ahora, haciendo uso de la propiedad de coercividad anterior tomando $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ junto con (5.3) y (5.4), se tiene que

$$\mathbf{C}_{lw, St} \| I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \|_{\Omega, St}^2 \leq \mathcal{B}_h(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) = \mathcal{B}_h(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}, I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}).$$

Haciendo uso de la desigualdad de Cauchy–Schwarz, primero estimaremos el primer término de la forma estabilizada, es decir,

$$\begin{aligned} & \varepsilon \int_{\Omega} \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}) \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})) \, d\mathbf{x} \\ & \leq \varepsilon^{1/2} \|\nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)} \varepsilon^{1/2} \|\nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})\|_{L^2(\Omega)} \\ & \leq \varepsilon^{1/2} \|\nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u})\|_{L^2(\Omega)} \|\nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})\|_{\Omega, St}. \end{aligned}$$

la cual en conjunto con el resultado de interpolación local, permite concluir que

$$\varepsilon \int_{\Omega} \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}) \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})) \, d\mathbf{x} \leq \varepsilon^{1/2} \mathbf{C}_{L,T} h_T |\mathbf{u}|_{H^2(\mathcal{T})} \|\nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})\|_{\Omega, St}.$$

Ahora, acotaremos el segundo y tercer término, es decir,

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}) + I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u})(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})) \, d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}))(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})) \, d\mathbf{x} + \int_{\Omega} (I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u})(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})) \, d\mathbf{x} \\ & = - \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}))(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} \nabla \cdot \mathbf{b} (I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u})(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})) \, d\mathbf{x} \\ & \quad + \underbrace{\int_{\partial\Omega} (I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u})(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) \mathbf{b} \cdot \mathbf{n} \, ds}_{=0} + \int_{\Omega} (I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u})(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})) \, d\mathbf{x} \\ & = \int_{\Omega} [(1 - \nabla \cdot \mathbf{b})(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u})](I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})) \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u})(\mathbf{b} \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})) \, d\mathbf{x} \\ & = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T [(1 - \nabla \cdot \mathbf{b})(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u})](I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})) \, d\mathbf{x} \\ & \quad - \int_T (I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u})(\mathbf{b} \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})) \, d\mathbf{x} \end{aligned}$$

Ahora, en cada elemento de la partición podemos usar la desigualdad de Cauchy–Schwarz, para acotar de la siguiente manera

$$\begin{aligned} & \int_T [(1 - \nabla \cdot \mathbf{b})(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u})](I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})) \, d\mathbf{x} - \int_T (I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u})(\mathbf{b} \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})) \, d\mathbf{x} \\ & \leq C \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\|_{L^2(T)} \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)} \\ & \quad + \frac{1}{\delta_T} \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\|_{L^2(T)} \delta_T \|\mathbf{b} \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})\|_{L^2(T)}, \end{aligned}$$

desigualdad que puede ser utilizada en las igualdades anteriores y que permite concluir, nuevamente usando la desigualdad de Cauchy–Schwarz y la definición de

la norma (5.5) y (5.7), que

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} (\mathbf{b} \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}) + I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u})(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) \, d\mathbf{x} \\
 & \leq C \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\|_{L^2(T)} \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(T)} \right. \\
 & \quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\delta_T}} \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\|_{L^2(T)} \sqrt{\delta_T} \|\mathbf{b} \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})\|_{L^2(T)} \right) \\
 & \leq C \left(\left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{L^2(\Omega)} \right. \\
 & \quad \left. + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{1}{\delta_T} \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \|\mathbf{b} \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \right) \\
 & \leq C \left(\left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{1}{\delta_T} \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\|_{L^2(T)}^2 \right)^{1/2} \right) \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega, St} \\
 & \leq C \left(\left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \mathbf{c}_{L,T}^2 h_T^4 |\mathbf{u}|_{H^2(T)}^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \frac{1}{\delta_T} \mathbf{c}_{L,T}^2 h_T^4 |\mathbf{u}|_{H^2(T)}^2 \right)^{1/2} \right) \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega, St} \\
 & \leq 2C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \mathbf{c}_{L,T}^2 h_T^4 \left(1 + \frac{1}{\delta_T} \right) |\mathbf{u}|_{H^2(T)}^2 \right)^{1/2} \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega, St}.
 \end{aligned}$$

De la misma forma, podemos acotar el último término

$$\begin{aligned}
 & \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \int_T (-\varepsilon \Delta(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}) + \mathbf{b} \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}) + (\mathbf{u}) - \mathbf{u})(\mathbf{b} \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})) \, d\mathbf{x} \\
 & = \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T^{1/2} \left(\varepsilon \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\|_{L^2(T)} + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(T)} \|\nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u})\|_{L^2(T)} \right. \\
 & \quad \left. + \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}\|_{L^2(T)} \right) \delta_T^{1/2} \|\mathbf{b} \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})\|_{L^2(T)} \\
 & = \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T^{1/2} \mathbf{c}_{L,T} \left(\varepsilon + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(T)} h_T + h_T^2 \right) |\mathbf{u}|_{H^2(T)} \delta_T^{1/2} \|\mathbf{b} \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})\|_{L^2(T)} \\
 & \leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\delta_T^{1/2} \mathbf{c}_{L,T} \left(\varepsilon + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(T)} h_T + h_T^2 \right) \right)^2 |\mathbf{u}|_{H^2(T)}^2 \right)^{1/2} \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega, St}.
 \end{aligned}$$

Asumiendo ahora que

$$\varepsilon \delta_T \leq C h_T^2 \quad \forall T \in \mathcal{T},$$

luego,

$$\begin{aligned}
 \delta_T^{1/2} \mathbf{C}_{L,T} \left(\varepsilon + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(T)} h_T + h_T^2 \right) &\leq C \mathbf{C}_{L,T} \left(\sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon \delta_T} + \delta_T^{1/2} h_T + \delta_T^{1/2} h_T^2 \right) \\
 &\leq C \mathbf{C}_{L,T} \left(\sqrt{\varepsilon} \sqrt{\varepsilon \delta_T} + 2\delta_T^{1/2} h_T \right) \\
 &\leq 2C \mathbf{C}_{L,T} \left(\sqrt{\varepsilon} + \delta_T^{1/2} \right) h_T
 \end{aligned}$$

lo cual insertándola en el acotamiento del último término permite concluir que

$$\begin{aligned}
 &\sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \int_T (-\varepsilon \Delta(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}) + \mathbf{b} \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}) + (\mathbf{u}) - \mathbf{u})) (\mathbf{b} \cdot \nabla(I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}})) \, d\mathbf{x} \\
 &\leq \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\delta_T^{1/2} \mathbf{C}_{L,T} \left(\varepsilon + \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(T)} h_T + h_T^2 \right) \right)^2 |\mathbf{u}|_{H^2(T)}^2 \right) \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega, St} \\
 &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} (\varepsilon + \delta_T) h_T^2 |\mathbf{u}|_{H^2(T)}^2 \right)^{1/2} \|I_L(\mathbf{u}) - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega, St}
 \end{aligned}$$

Finalmente, bajo todos los supuestos anteriores y juntando todos los resultados anteriores con (5.8), (5.9) y (5.10), se puede concluir que

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega, St} \leq Ch |\mathbf{u}|_{H^2(\Omega)}. \quad (5.10)$$

En la práctica, notemos que se tiene que hacer una elección del parámetro de estabilización, para el cual, una elección usual es, dado

$$Pe_T = \frac{\|\mathbf{b}\|_{L^\infty(T)} h_T}{2\varepsilon},$$

luego se define el parámetro de estabilización, para todo elemento $T \in \mathcal{T}$, como

$$\delta_T = \begin{cases} \frac{h_T}{2\|\mathbf{b}\|_{L^\infty(T)}} & \text{si } Pe_T > 1, \\ \frac{h_T^2}{12\varepsilon} & \text{si } Pe_T \leq 1. \end{cases} \quad (5.11)$$

EJEMPLOS NUMÉRICOS.

5.2. Ejemplos numéricos. Para validar numéricamente nuestro código es que vamos a utilizar dos soluciones exactas para nuestro problema. Las dos soluciones exactas son de tal forma que se puedan apreciar el fenómeno de fuertes cambios en los gradientes de las funciones, es decir, el comportamiento de capa límite, tanto cerca de la frontera como en el interior.

Ejemplo 1: consideraremos que el dominio de nuestro problema es el cuadrado unitario $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ y se tiene la siguiente solución analítica

$$u(x, y) = xy(1 - x)(1 - y)\text{tg}^{-1}((x - 0.5)/\varepsilon),$$

en donde, para el cálculo del lado derecho usamos que $\varepsilon = 10^{-3}$ y $\mathbf{b} = (1, 1)$. Este problema contiene una capa límite dentro del dominio a lo largo de la recta $x = 0.5$.

Ejemplo 2: consideraremos que el dominio de nuestro problema es el cuadrado unitario $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ y se tiene la siguiente solución analítica

$$u(x, y) = y(1 - y) \left(x - \frac{e^{-(1-x)/\varepsilon} - e^{-1/\varepsilon}}{1 - e^{-1/\varepsilon}} \right).$$

en donde, para el cálculo del lado derecho usamos que $\varepsilon = 2 \times 10^{-3}$ y $\mathbf{b} = (1, 1)$. Este problema contiene una capa límite cerca de la frontera del dominio cuando $x = 1$.

Por último, recordemos que para el cálculo del lado derecho utilizamos una regla de cuadratura con 73 puntos de Gauss y que se cumple la siguiente relación entre el largo característico de la partición y el número total de vértices

$$h \approx \frac{1}{Nv^{1/2}}.$$

En las Figuras 10 y 12 se muestran una serie de soluciones de elementos finitos, sin y con estabilización, para los dos problema en distintas mallas, en las cuales se puede apreciar claramente que la solución de elementos finitos estabilizada aproxima de mejor forma y sin oscilaciones las soluciones, tanto de capa límite interior como de frontera. En las Figuras 11 y 13, se muestra la tasa de convergencia a medida de refinamos el largo característico de la malla, en la cual se puede apreciar la convergencia lineal óptima de cada método, pero siendo siempre mejor la aproximación de elementos finitos estabilizada.

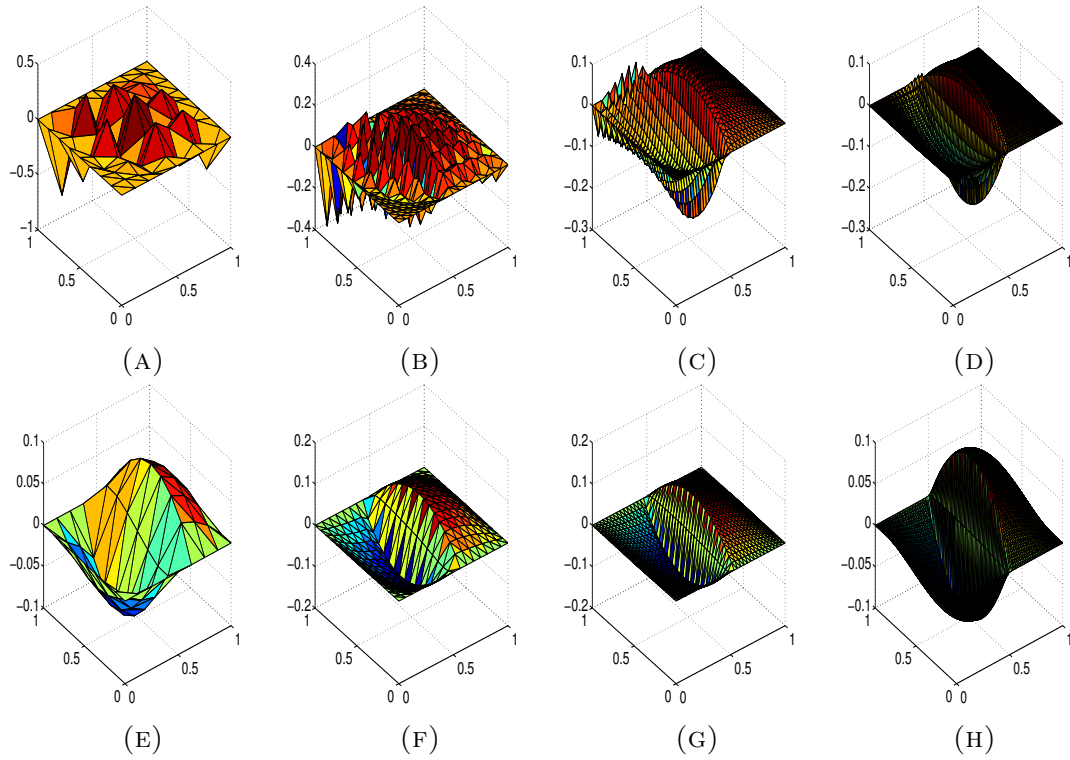


FIGURA 10. Ejemplo 1: Solución de elementos finitos sin estabilizar (a–d) y solución estabilizada (e–h), para distintas particiones: con 128 elementos (a y e), 512 elementos (b y f), 2048 elementos (c y g) y 8192 elementos (d y h).

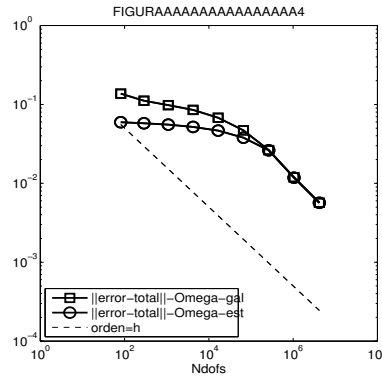


FIGURA 11. Ejemplo 1: Convergencia del método de elementos finitos tanto del método de Galerkin ($u_{\mathcal{T},G}$) y del esquema estabilizado ($u_{\mathcal{T},St}$), donde la convergencia lineal corresponde a $h = \frac{1}{Nv^{1/2}}$.

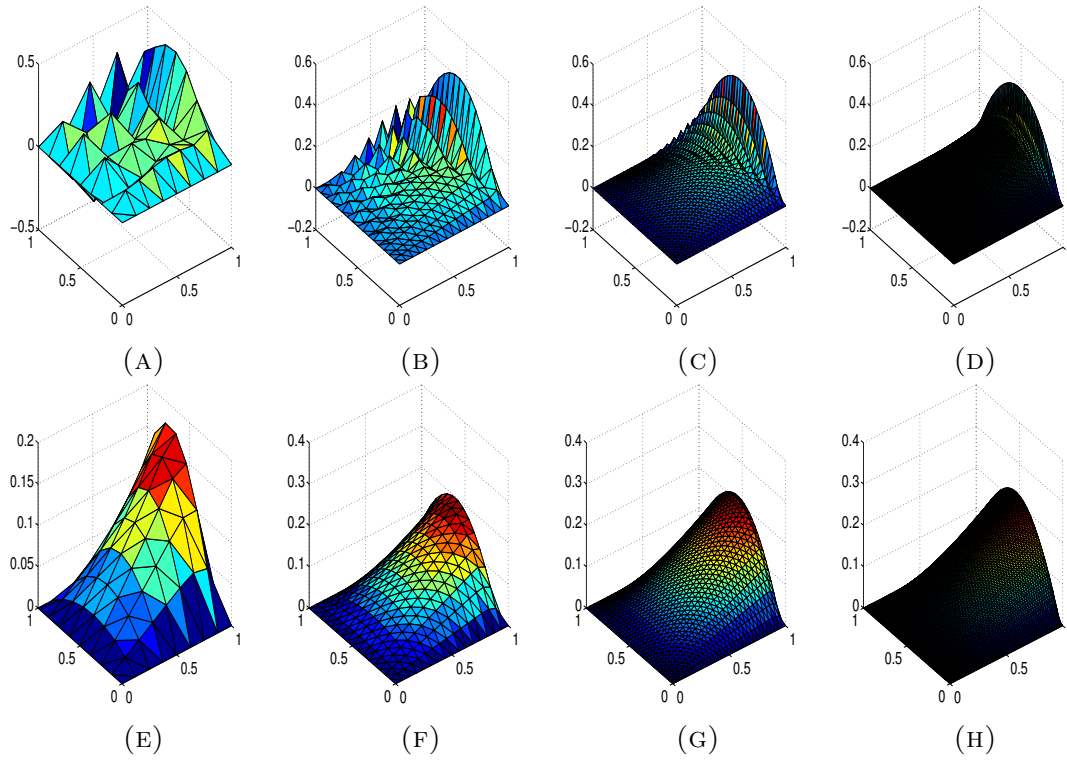


FIGURA 12. Ejemplo 2: Solución de elementos finitos sin estabilizar (a–d) y solución estabilizada (e–h), para distintas particiones: con 128 elementos (a y e), 512 elementos (b y f), 2048 elementos (c y g) y 8192 elementos (d y h).

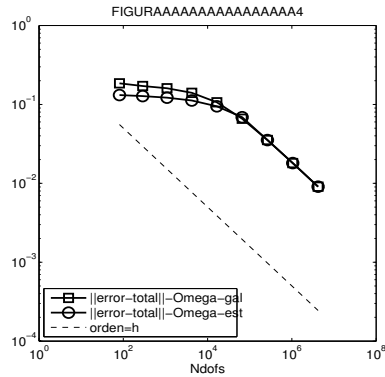


FIGURA 13. Ejemplo 2: Convergencia del método de elementos finitos tanto del método de Galerkin ($u_{\mathcal{T},G}$) y del esquema estabilizado ($u_{\mathcal{T},St}$), donde la convergencia lineal corresponde a $h = \frac{1}{N_v^{1/2}}$.

6. ANÁLISIS DE ERROR A POSTERIORI

En esta sección nos concentraremos en exponer la idea principal del análisis de error a posteriori, para métodos de elementos finitos, técnica que permite realizar procesos adaptativos. El siguiente análisis se puede encontrar en [2], para métodos de elementos finitos estándar de Galerkin y aquí presentamos su respectiva extensión a métodos de elementos finitos estabilizados.

La idea principal del análisis de error a posteriori es encontrar una función η , la cual usualmente se denomina estimador de error, el cual solamente puede depender de la solución de elementos finitos y los datos de la ecuación, es decir,

$$\eta = \eta(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}; \mathbf{v}).$$

Ahora, después de construir dicha función la idea es poder establecer una cuasi-equivalencia con el error, es decir, primero requerimos que la siguiente condición de *confiabilidad* se cumpla

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega} \leq \eta, \quad (6.1)$$

donde \mathbf{u} y $\mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ son la solución de (3.1) y (3.6) ó (5.1), respectivamente. Ahora, la construcción del estimador del error, tiene que cumplir además con la siguiente descomposición la cual permite escribir dicho estimador en términos de función η_T , para todo elemento $T \in \mathcal{T}$, la cual usualmente se denomina como indicadora de error, de tal manera que

$$\eta = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}; \mathbf{v})^2 \right)^{1/2}.$$

6.1. Análisis de confiabilidad. Para construir dicha función, primero recordamos que $\mathbf{u} \in H_0^1(\Omega)$ es solución de

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) = \mathcal{F}(\mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega), \quad (6.2)$$

y ahora asumiremos que la solución $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$, es solución del siguiente esquema de Galerkin general

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) + \mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}; \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \mathcal{F}(\mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}), \quad (6.3)$$

donde $\mathcal{S}(\cdot; \cdot)$ es un término estabilizante, el cual puede ser cero para así poder cubrir el caso Galerkin usual al mismo tiempo, es decir,

$$\mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}; \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \begin{cases} 0 & \text{Galerkin,} \\ \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \int_T (-\varepsilon \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \mathbf{f})(\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) d\mathbf{x} & \text{Galerkin-Estabilizado.} \end{cases} \quad (6.4)$$

Para construir el estimador usual, es que se tiene que estudiar la ecuación que satisface el error con respecto a la forma bilineal, es decir, para cualquier función

$\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$, se cumple que

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}) &= \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) - \mathcal{B}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}) \\
 &= \mathcal{F}(\mathbf{v}) - \mathcal{B}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}) \\
 &= \int_{\Omega} \mathbf{f} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_{\Omega} (\varepsilon \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla \mathbf{v} + (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \mathbf{u}_{\mathcal{T}})(\mathbf{v})) \, d\mathbf{x} \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T \mathbf{f} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} - \int_T (\varepsilon \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}} + (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \mathbf{u}_{\mathcal{T}})(\mathbf{v})) \, d\mathbf{x}.
 \end{aligned}$$

Ahora, podemos integrar por partes el término con derivadas de la siguiente manera

$$\int_T \varepsilon \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \cdot \nabla \mathbf{v} \, d\mathbf{x} = - \int_T \varepsilon \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \sum_{\gamma \in \partial T} \int_{\gamma} \varepsilon (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}|T} \cdot \mathbf{n}_{\gamma}^T) \mathbf{v} \, ds,$$

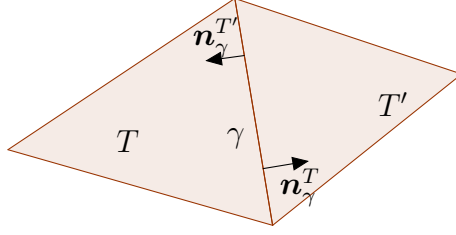
donde ∂T corresponde a la frontera del elemento T y \mathbf{n}_{γ}^T corresponde a la normal unitaria al lado γ de frontera del elemento (ver Figura 14). Lo anterior permite reescribir la ecuación del error de la siguiente forma

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}) &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T (\mathbf{f} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\gamma \in \partial T} \int_{\gamma} \varepsilon (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}|T} \cdot \mathbf{n}_{\gamma}^T) \mathbf{v} \, ds \right)
 \end{aligned}$$

Ahora, si definimos que \mathcal{E}_I corresponde al conjunto de todos los lados interiores de la partición, para la cual se tiene que cada lado $\gamma \in \mathcal{E}_I$, comparte dos elementos T y T' (ver Figura 14), luego podemos reescribir la ecuación del error como

$$\begin{aligned}
 \mathcal{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}) &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T (\mathbf{f} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right. \\
 &\quad \left. + \sum_{\gamma \in \mathcal{E}_I} \int_{\gamma} \varepsilon (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}|T} \cdot \mathbf{n}_{\gamma}^T + \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}|T'} \cdot \mathbf{n}_{\gamma}^{T'}) \mathbf{v} \, ds \right) \\
 &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\int_T (\mathbf{f} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) \mathbf{v} \, d\mathbf{x} \right. \\
 &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \partial T} \int_{\gamma} \varepsilon (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}|T} \cdot \mathbf{n}_{\gamma}^T + \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}|T'} \cdot \mathbf{n}_{\gamma}^{T'}) \mathbf{v} \, ds \right) \quad (6.5)
 \end{aligned}$$

Ahora, para continuar con el análisis de error, recordamos el siguiente resultado de interpolación (ver Lema 3.2 en [19]).


 FIGURA 14. Lado interior $\gamma \in \mathcal{E}_I$, que comparte los elementos T y T' .

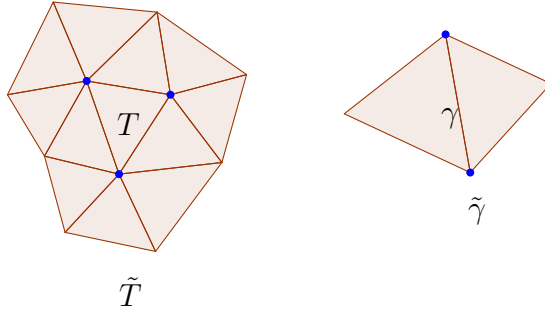
Teorema. Existe un operador de interpolación $I_C : L^2(\Omega) \rightarrow \mathbb{V}(\mathcal{T})$ tal que para todo elemento de la partición $T \in \mathcal{T}$ y todo elemento $\mathbf{v} \in L^2(\Omega)$, se cumple que

$$\begin{cases} \|\mathbf{v} - I_C(\mathbf{v})\|_{L^2(T)} \leq C\alpha_T \|\mathbf{v}\|_{\tilde{T}}, \\ \|\mathbf{v} - I_C(\mathbf{v})\|_{L^2(\gamma)} \leq C\varepsilon^{-1/4} \alpha_T^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\gamma}}, \\ \|I_C(\mathbf{v})\|_T \leq \|\mathbf{v}\|_{\tilde{T}}, \end{cases} \quad (6.6)$$

donde

$$\alpha_\chi := \min \left\{ \frac{h_\chi}{\sqrt{\varepsilon}}, 1 \right\},$$

y \tilde{T} y $\tilde{\gamma}$ corresponden a patches del elemento y lado, respectivamente (ver Figura 15).


 FIGURA 15. Patches de un element T (izquierda) y lado γ (izquierda), en la partición \mathcal{T} .

Definiendo ahora

$$\begin{cases} R_T := \mathbf{f} + \varepsilon \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}} & \forall T \in \mathcal{T}, \\ \llbracket J_\gamma \rrbracket := \varepsilon (\nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}|T} \cdot \mathbf{n}_\gamma^T + \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}|T'} \cdot \mathbf{n}_\gamma^{T'}) & \forall \gamma \in \mathcal{E}_I, \gamma = \partial T \cap \partial T', \end{cases} \quad (6.7)$$

podemos escribir la ecuación del error como

$$\mathcal{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}) = \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T R_T \mathbf{v} \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \partial T} \int_{\gamma} \llbracket J_{\gamma} \rrbracket \mathbf{v} \, ds. \quad (6.8)$$

Ahora, tomando $\mathbf{v} = \mathbf{v}_{\mathcal{T}}$ en (6.2), para después ser restada con (6.3), se tiene que

$$\mathcal{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}; \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) \quad \forall \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}). \quad (6.9)$$

Ahora, tomando como $\mathbf{v}_{\mathcal{T}} = I_C(\mathbf{v})$ en (6.9), podemos concluir que

$$\begin{aligned} \mathcal{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}) &= \mathcal{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v} - I_C(\mathbf{v})) + \mathcal{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, I_C(\mathbf{v})) \\ &= \mathcal{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v} - I_C(\mathbf{v})) - \mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}; I_C(\mathbf{v})) \\ &:= \mathbf{I} + \mathbf{II}. \end{aligned}$$

Ahora, para poder construir un estimador de error, para la parte \mathbf{I} , tomamos $\mathbf{v} = \mathbf{v} - I_C(\mathbf{v})$ en (6.8), la cual en conjunto con (6.6) y desigualdades de Cauchy–Schwarz, se tiene que

$$\begin{aligned} \mathbf{I} &= \mathcal{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v} - I_C(\mathbf{v})) \\ &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \int_T R_T (\mathbf{v} - I_C(\mathbf{v})) \, d\mathbf{x} + \frac{1}{2} \sum_{\gamma \in \partial T} \int_{\gamma} \llbracket J_{\gamma} \rrbracket (\mathbf{v} - I_C(\mathbf{v})) \, ds \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}} \|R_T\|_{L^2(T)} \|\mathbf{v} - I_C(\mathbf{v})\|_{L^2(T)} + \sum_{\gamma \in \partial T} \|\llbracket J_{\gamma} \rrbracket\|_{L^2(\gamma)} \|\mathbf{v} - I_C(\mathbf{v})\|_{L^2(\gamma)} \\ &\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}} \alpha_T \|R_T\|_{L^2(T)} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{T}} + \sum_{\gamma \in \partial T} \varepsilon^{-1/4} \alpha_{\gamma}^{1/2} \|\llbracket J_{\gamma} \rrbracket\|_{L^2(\gamma)} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{\gamma}} \\ &\leq C \sum_{T \in \mathcal{T}} \alpha_T \|R_T\|_{L^2(T)} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{T}} + \sum_{\gamma \in \partial T} \varepsilon^{-1/4} \alpha_{\gamma}^{1/2} \|\llbracket J_{\gamma} \rrbracket\|_{L^2(\gamma)} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{T}} \\ &= C \sum_{T \in \mathcal{T}} \left(\alpha_T \|R_T\|_{L^2(T)} + \sum_{\gamma \in \partial T} \varepsilon^{-1/4} \alpha_{\gamma}^{1/2} \|\llbracket J_{\gamma} \rrbracket\|_{L^2(\gamma)} \right) \|\mathbf{v}\|_{\tilde{T}} \\ &\leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \alpha_T^2 \|R_T\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{\gamma \in \partial T} \varepsilon^{-1/2} \alpha_{\gamma} \|\llbracket J_{\gamma} \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{\Omega}, \end{aligned}$$

luego, definiendo

$$\eta_T^2 := \alpha_T^2 \|R_T\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{\gamma \in \partial T} \varepsilon^{-1/2} \alpha_{\gamma} \|\llbracket J_{\gamma} \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2, \quad (6.10)$$

entonces,

$$\mathbf{I} \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{\Omega}.$$

ANÁLISIS DE ERROR A POSTERIORI.

Para el segundo término restante, tenemos que para cualquier $\mathbf{v} \neq 0$, se tiene que

$$\| \cdot \| = \mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}; I_C(\mathbf{v})) = \frac{\mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}; I_C(\mathbf{v}))}{\|\mathbf{v}\|_{\Omega}} \|\mathbf{v}\|_{\Omega} \leq \left(\sup_{0 \neq \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)} \frac{\mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}; I_C(\mathbf{v}))}{\|\mathbf{v}\|_{\Omega}} \right) \|\mathbf{v}\|_{\Omega}.$$

Agrupando las estimaciones anteriores, se tiene que para toda $\mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)$

$$\mathcal{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}) \leq C \left(\left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2 \right)^{1/2} + \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)} \frac{\mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}; I_C(\mathbf{v}))}{\|\mathbf{v}\|_{\Omega}} \right) \|\mathbf{v}\|. \quad (6.11)$$

Ahora, recordemos que la forma bilineal cumple con la propiedad de coercividad, que dice que

$$C_{lw} \|\mathbf{v}\|_{\Omega}^2 \leq \mathcal{B}(\mathbf{v}, \mathbf{v}) \quad \forall \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega).$$

Entonces, tomando como $\mathbf{v} = \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}$ en (6.11) y usando la propiedad de coercividad, permite concluir que

$$\begin{aligned} C_{lw} \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega}^2 &\leq \mathcal{B}(\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}) \\ &\leq C \left(\left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2 \right)^{1/2} + \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)} \frac{\mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}; I_C(\mathbf{v}))}{\|\mathbf{v}\|_{\Omega}} \right) \|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|, \end{aligned} \quad (6.12)$$

luego

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{\Omega} \leq C \left(\left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2 \right)^{1/2} + \sup_{0 \neq \mathbf{v} \in H_0^1(\Omega)} \frac{\mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}; I_C(\mathbf{v}))}{\|\mathbf{v}\|_{\Omega}} \right). \quad (6.13)$$

$$\begin{aligned} \mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}; I_C(\mathbf{v})) &= \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \int_T (-\varepsilon \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \mathbf{u}_{\mathcal{T}} - \mathbf{f})(\mathbf{b} \cdot \nabla I_C(\mathbf{v})) \, d\mathbf{x} \\ &= - \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \int_T (R_T)(\mathbf{b} \cdot \nabla I_C(\mathbf{v})) \, d\mathbf{x} \\ &\leq \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \|R_T\|_{L^2(T)} \|\mathbf{b} \cdot \nabla I_C(\mathbf{v})\|_{L^2(T)}. \end{aligned}$$

Ahora, notando que

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b} \cdot \nabla I_C(\mathbf{v})\|_{L^2(T)}^2 &= \int_T (\mathbf{b} \cdot \nabla I_C(\mathbf{v}))^2 \, d\mathbf{x} \leq 2 \int_T (b_1^2 \partial_x I_C(\mathbf{v})^2 + b_2^2 \partial_y I_C(\mathbf{v})^2) \, d\mathbf{x} \\ &\leq 2 \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(T)}^2 \|\nabla I_C(\mathbf{v})\|_{L^2(T)}^2 \\ &= 2 \frac{\|\mathbf{b}\|_{L^\infty(T)}^2}{\varepsilon} \varepsilon \|\nabla I_C(\mathbf{v})\|_{L^2(T)}^2 \\ &\leq 2 \frac{\|\mathbf{b}\|_{L^\infty(T)}^2}{\varepsilon} \|I_C(\mathbf{v})\|_T^2, \end{aligned}$$

ANÁLISIS DE ERROR A POSTERIORI.

y de igual forma, usando el hecho que para cualquier función $\xi \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$, se cumple que $\|\nabla \xi\|_{L^2(T)} \leq Ch_T^{-1} \|\xi\|_{L^2(T)}$, luego

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b} \cdot \nabla I_C(\mathbf{v})\|_{L^2(T)}^2 &= \int_T (\mathbf{b} \cdot \nabla I_C(\mathbf{v}))^2 d\mathbf{x} \leq 2 \int_T (b_1^2 \partial_x I_C(\mathbf{v})^2 + b_2^2 \partial_y I_C(\mathbf{v})^2) d\mathbf{x} \\ &\leq 2 \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(T)}^2 \|\nabla I_C(\mathbf{v})\|_{L^2(T)}^2 \\ &\leq C \frac{\|\mathbf{b}\|_{L^\infty(T)}^2}{h_T^2} \|I_C(\mathbf{v})\|_{L^2(T)}^2 \\ &\leq C \frac{\|\mathbf{b}\|_{L^\infty(T)}^2}{h_T^2} \|\mathbf{v}\|_T^2, \end{aligned}$$

entonces,

$$\|\mathbf{b} \cdot \nabla I_C(\mathbf{v})\|_{L^2(T)}^2 \leq C \|\mathbf{b}\|_{L^\infty(T)}^2 \min \left\{ \frac{1}{\varepsilon}, \frac{1}{h_T^2} \right\} \|\mathbf{v}\|_T^2$$

lo que permite concluir que

$$\mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}; I_C(\mathbf{v})) \leq \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \frac{\|\mathbf{b}\|_{L^\infty(T)}}{h_T} \alpha_T \|R_K\|_{L^2(T)} \|\mathbf{v}\|_{\tilde{T}}$$

Por último, haciendo uso de (5.11), luego es simple concluir que

$$\delta_T \frac{\|\mathbf{b}\|_{L^\infty(T)}}{h_T} \leq \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si } Pe_T > 1, \\ \frac{1}{6} & \text{si } Pe_T \leq 1, \end{cases} \quad (6.14)$$

luego

$$\mathcal{S}(\mathbf{f}, \mathbf{u}_{\mathcal{T}}; I_C(\mathbf{v})) \leq C \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2 \right)^{1/2} \|\mathbf{v}\|_{\Omega}.$$

Agrupando todas las cotas anteriores, se puede concluir que el error satisface la siguiente cota de estimación a posteriori

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\| \leq \eta$$

donde el estimador de error η , se puede escribir en términos de indicadores de error como

$$\eta = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2 \right)^{1/2}$$

donde cada indicadora de error está dada por

$$\eta_T^2 := \alpha_T^2 \|R_T\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{\gamma \in \partial T} \varepsilon^{-1/2} \alpha_\gamma \|\llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2,$$

donde el término residual R_K y los saltos de los flujos discretos $\llbracket J_\gamma \rrbracket$ están definidos en (6.7).

ANÁLISIS DE ERROR A POSTERIORI.

Ahora que tenemos un estimador de error a la mano, es que nace la idea de poder hacer refinación adaptativa, la cual se resume en

Algoritmo adaptativo:

Input: Malla inicial \mathcal{T}_0 , fuerza externa \mathbf{f} , constante de difusión ε y campo convectivo \mathbf{b} .

Set: $i = 0$.

Adaptive loop:

- 1:** En la malla \mathcal{T}_i resolver el esquema de Galerkin
- $\mathbf{B}\boldsymbol{\alpha} = \mathbf{f}$.
 - 2:** Por cada elemento $T \in \mathcal{T}_i$ calcular el indicador de error
- $\eta_T^2 := \alpha_T^2 \|R_T\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{\gamma \in \partial T} \varepsilon^{-1/2} \alpha_\gamma \|\llbracket J_\gamma \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2$.
 - 3:** Marcamos un elemento T para refinamiento si:
- $\eta_T^2 > 0.5 \max_{T' \in \mathcal{T}} \eta_{T'}^2$.
 - 4:** Basados en el paso **3**, construir una malla nueva usando *longest edge bisection*.
Set $i \leftarrow i + 1$, y volver al paso **1**.
-

Las propiedades de convergencia del algoritmo anterior se pueden encontrar en [15].

7. UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS EN MATLAB

Ahora, presentaremos un código de elementos finitos realizado en MatLab, para aproximar la solución del problema (3.1), mediante el esquema de Galerkin adaptivo.

```

1 clear all;clc;close all;load malla
2
3 Niterations=20;
4 dataplot=sparse(Niterations,3);
5
6 nu=0.05;
7 kapa=1;
8 A=[1 1];
9
10 exam=1;PG=73;
11 [w, points,phisP1]=baricentricas(PG);
12
13 for interacciones=1:Niterations
14     %% mesh data
15     interacciones
16     [nodes2element,nodes2edge,edge2element,vecK,elementedges]=edge([t(1,:) ',t(2,:) ',t(3,:) '],size(p,2));
17     elementedges(:,1)=[];
18     [elements,coordinate,dirichlet,marcaD]=mallap2([t(1,:) ',t(2,:) ',t(3,:) '],p',edge2element);
19
20     %% assembly of the matrix
21     Nv=size(coordinate,1);
22     Nt=size(elements,1);
23     area=sparse(Nt,1);
24     hmax=sparse(Nt,1);
25     largosT=sparse(Nt,3);
26     N=sparse(Nt,6);
27     for j=1:Nt
28         area(j,1)=0.5*det([1 1 1; [coordinate(elements(j,1),:);coordinate(elements(j,2),:);coordinate(elements(j,3),:)] ']);
29         Tg=[(coordinate(elements(j,3),:)-coordinate(elements(j,2),:)),(coordinate(elements(j,1),:)-coordinate(elements(j,3),:)),(coordinate(elements(j,2),:)-coordinate(elements(j,1),:))];
30         N(j,:)=[Tg(2),-Tg(1),Tg(4),-Tg(3),Tg(6),-Tg(5)];
31         largosT(j,:)=[norm(coordinate(elements(j,3),:)-coordinate(elements(j,2),:)),norm(coordinate(elements(j,1),:)-coordinate(elements(j,3),:)),norm(coordinate(elements(j,2),:)-coordinate(elements(j,1),:))];
32         hmax(j,1)=max([(coordinate(elements(j,3),:)-coordinate(elements(j,2),:)),(coordinate(elements(j,1),:)-coordinate(elements(j,3),:)),(coordinate(elements(j,2),:)-coordinate(elements(j,1),:))]);
33     end
34
35     B=sparse(Nv,Nv);
36     Lder=sparse(Nv,1);
37
38     for j=1:Nt
39         cc=[elements(j,1);elements(j,2);elements(j,3)];

```

UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS EN MATLAB.

```

40     areak=area(j,1);
41     N1=[N(j,1),N(j,2)];N2=[N(j,3),N(j,4)];N3=[N(j,5),N(j,6)];
42
43     locD=1/(4*areak)*[ N1*N1', N1*N2', N1*N3';...
44                       N2*N1', N2*N2', N2*N3';...
45                       N3*N1', N3*N2', N3*N3' ];
46
47     locC=(-1/6)*[A*N1', A*N2', A*N3';
48                 A*N1', A*N2', A*N3';
49                 A*N1', A*N2', A*N3' ];
50
51     locR=(areak/12)*[ 2, 1, 1;
52                     1, 2, 1;
53                     1, 1, 2];
54
55     B(cc,cc)=B(cc,cc)+ nu*locD + locC + kapa*locR;
56
57     Lder(cc,1)=Lder(cc,1)+localphi([coordinate(elements(j,1),:);coordinate(
elements(j,2),:);coordinate(elements(j,3),:)],area(j,1),phisP1,w,points,PG,
exam,nu,kapa);
58 end
59
60
61 %% "Dirichlet condition"
62 for i=1:size(dirichlet,1)
63     B(dirichlet(i,1),:)=sparse(1,size(coordinate,1));
64     B(dirichlet(i,1),:)=sparse(size(coordinate,1),1);
65     B(dirichlet(i,1),dirichlet(i,1))=1;
66     Lder(dirichlet(i,1),1)=0;
67 end
68
69 uhP1=B\Lder;
70
71 %% estimator
72
73 % jumps in normal derivative
74 jumps=sparse(Nt,3);
75 for i=1:Nt
76     uh1=uhP1(elements(i,1),1); uh2=uhP1(elements(i,2),1); uh3=uhP1(elements(i
,3),1);
77     nabla_uh=(-1/(2*area(i,1)))*(uh1*[N(i,1),N(i,2)]+uh2*[N(i,3),N(i,4)]+uh3*[
N(i,5),N(i,6)]);
78
79     vec_l1=vecK(i,1); vec_l2=vecK(i,2); vec_l3=vecK(i,3);
80
81     if vec_l1>0
82         uh1_v1=uhP1(elements(vec_l1,1),1); uh2_v1=uhP1(elements(vec_l1,2),1);
uh3_v1=uhP1(elements(vec_l1,3),1);
83         nabla_uh_v1=(-1/(2*area(vec_l1,1)))*(uh1_v1*[N(vec_l1,1),N(vec_l1,2)]+
uh2_v1*[N(vec_l1,3),N(vec_l1,4)]+uh3_v1*[N(vec_l1,5),N(vec_l1,6)]);
84
85         jumps(i,1) = nu*(nabla_uh - nabla_uh_v1)*[N(i,1);N(i,2)]/norm([N(i,1),
N(i,2)]);

```

UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS EN MATLAB.

```
86     end
87
88     if vec_l2>0
89         uh1_v2=uhP1(elements(vec_l2,1),1); uh2_v2=uhP1(elements(vec_l2,2),1);
90         uh3_v2=uhP1(elements(vec_l2,3),1);
91         nabla_uh_v2=(-1/(2*area(vec_l2,1)))*(uh1_v2*[N(vec_l2,1),N(vec_l2,2)]+
92         uh2_v2*[N(vec_l2,3),N(vec_l2,4)]+uh3_v2*[N(vec_l2,5),N(vec_l2,6)]);
93
94         jumps(i,2) = nu*(nabla_uh - nabla_uh_v2)*[N(i,3);N(i,4)]/norm([N(i,3),
95         N(i,4)]);
96     end
97
98     if vec_l3>0
99         uh1_v3=uhP1(elements(vec_l3,1),1); uh2_v3=uhP1(elements(vec_l3,2),1);
100        uh3_v3=uhP1(elements(vec_l3,3),1);
101        nabla_uh_v3=(-1/(2*area(vec_l3,1)))*(uh1_v3*[N(vec_l3,1),N(vec_l3,2)]+
102        uh2_v3*[N(vec_l3,3),N(vec_l3,4)]+uh3_v3*[N(vec_l3,5),N(vec_l3,6)]);
103
104        jumps(i,3) = nu*(nabla_uh - nabla_uh_v3)*[N(i,5);N(i,6)]/norm([N(i,5),
105        N(i,6)]);
106    end
107end
108
109%% residual estimator
110estimadorR=sparse(Nt,1);
111
112for i=1:Nt
113    data=[coordinate(elements(i,1),:)',coordinate(elements(i,2),:)',coordinate
114    (elements(i,3),:)''];
115    uhK=[uhP1(elements(i,1),1),uhP1(elements(i,2),1),uhP1(elements(i,3),1)];
116
117    alphaK=min([hmax(j,1)/sqrt(nu),1]);
118
119    [residuoK]=noramresiduoK(data',area(i,1),uhK,w,phisP1,points,PG,exam,nu,
120    kapa,[N(i,1),N(i,2)], [N(i,3),N(i,4)], [N(i,5),N(i,6)]);
121
122    estimadorR(i,1)=estimadorR(i,1)+(alphaK*alphaK)*residuoK;
123
124    if vecK(i,1)>0
125        estimadorR(i,1)=estimadorR(i,1)+(alphaK/sqrt(nu))*largosT(i,1)*(jumps(
126        i,1)^2);
127    end
128    if vecK(i,2)>0
129        estimadorR(i,1)=estimadorR(i,1)+(alphaK/sqrt(nu))*largosT(i,2)*(jumps(
130        i,2)^2);
131    end
132    if vecK(i,3)>0
133        estimadorR(i,1)=estimadorR(i,1)+(alphaK/sqrt(nu))*largosT(i,3)*(jumps(
134        i,3)^2);
135    end
136end
137end
```

UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS EN MATLAB.

```
128
129 %% errors
130 seminorma=0;
131 norma=0;
132 for j=1:Nt
133     data=[coordinate(elements(j,1),:)', coordinate(elements(j,2),:)', coordinate
134           (elements(j,3),:)' ]';
135     uhK=[uhP1(elements(j,1),1),uhP1(elements(j,2),1),uhP1(elements(j,3),1)];
136     [errorKseui]=localsemiL2U(data', area(j,1), [N(j,1),N(j,2)], [N(j,3),N(j,4)
137           ], [N(j,5),N(j,6)], uhK,w, points ,PG,exam,nu,kapa);
138     seminorma=seminorma+errorKseui;
139     [errorKu]=localnormaL2U(data', area(j,1), uhK,w, phisP1, points ,PG,exam,nu,
140           kapa);
141     norma=norma+errorKu;
142 end
143 H1_norm=sqrt(nu*seminorma+norma);
144
145 %% refinement
146
147 % adaptive
148 refinaK=sparse(Nt,1);
149 etamax=max(estimadorR);
150 for j=1:Nt
151     if estimadorR(j,1)>=0.5*etamax
152         refinaK(j,1)=j;
153     end
154 end
155 datosrefinar=find(refinaK(:,1)>0);
156 refinaK=refinaK(datosrefinar,:);
157 [p,e,t]=refinemesh(g,p,e,t,refinaK,'longest');
158
159 dataplot(interacciones,:)=[Nv,H1_norm,sqrt(sum(estimadorR))];
160 end
```

LISTING 8. Código principal de elementos finitos adaptivo

```
1 function [nodes2element,nodes2edge,edge2element,vecK,elementedges]=edge(element,
2     nnodep1);
3 %% to enumerate number of edges
4 nodes2element=sparse(nnodep1,nnodep1);
5 for j=1:size(element,1)
6     nodes2element(element(j,:),element(j,[2 3 1]))=...
7     nodes2element(element(j,:),element(j,[2 3 1]))+j*eye(3,3);
8 end
9 B=nodes2element+nodes2element';
10 [i,j]=find(triu(B));
11 nodes2edge=sparse(i,j,1:size(i,1),nnodep1,nnodep1);
12 nodes2edge=nodes2edge+nodes2edge';
13 %noedges=size(i,1);
14 % to generate element of edge
15 edge2element=zeros(size(i,1),4);
```

UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS EN MATLAB.

```
15 for m = 1:size(element,1)
16     for k = 1:3
17         p = nodes2edge(element(m,k),element(m,rem(k,3)+1)); % update on 13/2/3
18         if edge2element(p,1)==0
19             edge2element(p,:)=[element(m,k) element(m,rem(k,3)+1) nodes2element(element
20                 (m,k),element(m,rem(k,3)+1)) ...
21                 nodes2element(element(m,rem(k,3)+1),element(m,k))];
22         end
23     end
24 end
25 vecK=sparse(size(element,1),3);
26 for j=1:size(element,1)
27     vecK(j,:)=[nodes2element(element(j,3),element(j,2)),nodes2element(element(j,1)
28         ,element(j,3)),nodes2element(element(j,2),element(j,1))];
29 end
29 elementedges=sparse(size(element,1),4);
30 for y=1:size(element,1)
31     elementedges(y,:)=[y,nodes2edge(element(y,2),element(y,3)),nodes2edge(element(
32         y,3),element(y,1)),nodes2edge(element(y,1),element(y,2))];
33 end
```

LISTING 9. Llamado de la función edge

```
1 function [elementn,coordinaten,dirichlet,marcaD]=mallap2(element,coordinate,
2     edge2element2)
3 elementn=element;
4 coordinaten=[coordinate,sparse(size(coordinate,1),1)];
5
6 for j=1:size(edge2element2,1)
7     if edge2element2(j,4)==0
8         coordinaten(edge2element2(j,1),3)=edge2element2(j,1);
9         coordinaten(edge2element2(j,2),3)=edge2element2(j,2);
10    end
11 end
12 newd=find(coordinaten(:,3)>0);
13 dirichlet=coordinaten(newd,3);
14 marcaD=coordinaten(:,3);
15 coordinaten(:,3)=[];
```

LISTING 10. Llamado de la función mallap2

```
1 function [errorKu]=noramresiduoK(vertices,areak,u,h,w,P1,points,PG,exam,nu,kapa,N1,
2     N2,N3)
3 %coord 3 vertices de c/triangulo:
4 x1=vertices(1,1); y1=vertices(1,2);
5 x2=vertices(2,1); y2=vertices(2,2);
6 x3=vertices(3,1); y3=vertices(3,2);
7
8 wifix=0;
9
10 for j=1:PG
```

UN CÓDIGO DE ELEMENTOS FINITOS EN MATLAB.

```
11 % transformacion:
12 xtr=x1*points(1,j)+x2*points(2,j)+x3*points(3,j);
13 ytr=y1*points(1,j)+y2*points(2,j)+y3*points(3,j);
14
15 U1h=uh*P1(:,j);
16
17 DxU1=uh*(-1/(2*areak))*[N1(1,1);N2(1,1);N3(1,1)]; DyU1=uh*(-1/(2*areak))
   * [N1(1,2);N2(1,2);N3(1,2)];
18
19 wifix=wifix+w(1,j)*((ff([xtr,ytr],exam,nu,kapa)-(a1([xtr,ytr],exam,nu,
   kapa)*DxU1+a2([xtr,ytr],exam,nu,kapa)*DyU1)-kapa*U1h)^2);
20 end
21
22 errorKu=2*areak*(wifix);
```

LISTING 11. Llamado de la función noramresiduoK

```
1 function volumeforce = a1(t,exam,nu,kapa)
2 x=t(1);
3 y=t(2);
4
5 % example 1
6 if exam==1
7     volumeforce=1;
8 end
9
10 if exam==2
11     volumeforce=1;
12 end
```

LISTING 12. Llamado de la función a1

```
1 function volumeforce = a2(t,exam,nu,kapa)
2 x=t(1);
3 y=t(2);
4
5 % example 1
6 if exam==1
7     volumeforce=1;
8 end
9
10 if exam==2
11     volumeforce=1;
12 end
```

LISTING 13. Llamado de la función a2

UN EJEMPLO NUMÉRICO.

7.1. Un ejemplo numérico. Para validar numéricamente nuestro código es que vamos a utilizar una solución exacta para nuestro problema.

Ejemplo: consideraremos que el dominio de nuestro problema es el cuadrado unitario $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$ y se tiene la siguiente solución analítica

$$u(x, y) = xy(1 - x)(1 - y)\text{tg}^{-1}((x - 0.5)/\varepsilon),$$

en donde, para el cálculo del lado derecho usamos que $\varepsilon = 10^{-3}$ y $\mathbf{b} = (1, 1)$. Este problema contiene una capa límite dentro del dominio a lo largo de la recta $x = 0.5$.

Por último, recordamos que para el cálculo del lado derecho y la parte de la norma del estimador residual R_K utilizamos una regla de cuadratura con 73 puntos de Gauss y que se cumple la siguiente relación entre el largo característico de la partición y el número total de vértices

$$h \approx \frac{1}{Nv^{1/2}}.$$

En las Figuras 16 y 19 se muestran una serie de soluciones de elementos finitos sin y con estabilización, respectivamente, para el problema en distintas mallas y en las Figuras 18 y (19), se muestran las tasas de convergencia a medida que se refina de forma adaptativa, en la cual se puede apreciar la convergencia lineal óptima de los métodos.

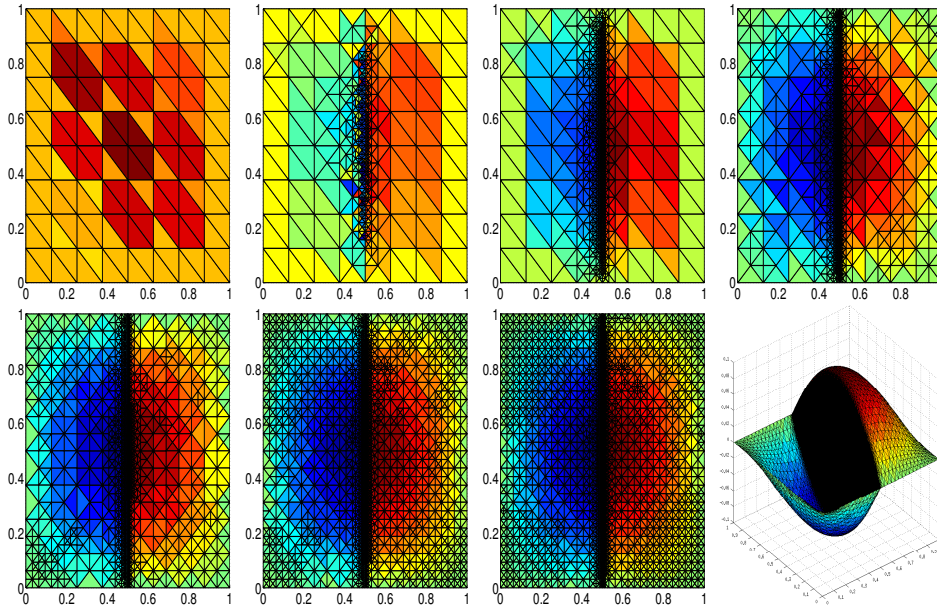


FIGURA 16. Ejemplo 1: Solución de elementos finitos u_h para distintos pasos adaptativos.

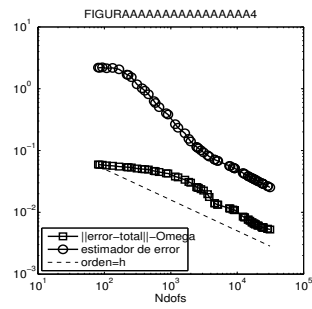


FIGURA 19. Ejemplo: Tasa de convergencia para el método de elementos finitos estabilizado adaptativo.

8. CARGA PUNTUAL: DELTA DE DIRAC

Las secciones anteriores se ocuparon de la modelación de contaminantes cuando existe una carga externa en el sistema la cual actúa sobre todo el dominio, es decir, consideramos $f \in L^2(\Omega)$. Ahora, consideraremos el caso cuando la carga del sistema es modelada mediante un Delta de Dirac en algún sector del dominio, es decir, nos interesa encontrar una aproximación de elementos finitos para el siguiente problema

Hallar u tal que,

$$\begin{cases} -\varepsilon \Delta u(\mathbf{x}) + \mathbf{b}(\mathbf{x}) \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + u(\mathbf{x}) &= \delta_{\mathbf{x}_0} \text{ para todo } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u(\mathbf{x}) &= 0 \text{ para todo } \mathbf{x} \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (8.1)$$

donde $\mathbf{x}_0 \in \Omega$, es el punto donde la fuente actúa.

Dado este problema, recordemos que necesitamos establecer una formulación débil para después aproximar mediante un esquema de Galerkin, ya sea estabilizado o no. En [1], un detallado estudio de la existencia y unicidad de la siguiente formulación débil de (8.1), se plantea en términos de espacios de Sobolev, pero que ahora contienen un peso en la norma, el cual tiene una serie de propiedades, como por ejemplo que permite seguir trabajando en un contexto Hilbertiano. La formulación débil del problema es:

Encontrar $u \in H_0^1(\omega, \Omega)$ tal que

$$\mathcal{B}(u, v) = \langle \delta_{\mathbf{x}_0}, v \rangle, \quad \text{para toda } v \in H_0^1(\omega^{-1}, \Omega), \quad (8.2)$$

donde

$$\mathcal{B}(u, v) := \int_{\Omega} (\varepsilon \nabla u \cdot \nabla v + \mathbf{b} \cdot \nabla uv + uv) \, d\mathbf{x}. \quad (8.3)$$

y el espacio $H_0^1(\omega, \Omega)$ corresponde al de todas las funciones v medibles, para las cuales

$$\|v\|_{H^1(\omega, \Omega)} = \left(\int_{\Omega} (\varepsilon \nabla v \cdot \nabla v + v^2) \omega \, d\mathbf{x} \right)^{1/2} < \infty,$$

y el peso está dado por

$$\omega = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|^{2\alpha}, \quad \alpha \in (0, 1).$$

Para realizar una aproximación de elementos finitos, en la cita anterior se plantea que el mismo esquema clásico propuesto en las secciones anteriores se puede utilizar y se pueden plantear tasas de convergencia (ver también [16]), es decir, nuestro esquema de Galerkin es:

Encontrar $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$ tal que

$$\mathcal{B}(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \mathbf{v}_{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_0), \quad \text{para toda } \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}). \quad (8.4)$$

De igual forma, los autores proponen un estimador de error a posteriori, para el cual su confiabilidad se lee como sigue:

$$\|\mathbf{u} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}}\|_{H^1(\omega, \Omega)} \leq \eta$$

donde el estimador de error η , se puede escribir en términos de indicadores de error como

$$\eta = \left(\sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2 \right)^{1/2}$$

donde cada indicadora de error, tomando como

$$D_T := \max_{\mathbf{x} \in T} |\mathbf{x} - \mathbf{x}_0|,$$

está dada por

$$\eta_T^2 := D_T^{2\alpha} \left(\alpha_T^2 \|R_T\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{\gamma \in \partial T} \varepsilon^{-1/2} \alpha_{\gamma} \|\llbracket J_{\gamma} \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 \right),$$

si $\mathbf{x}_0 \notin T$, y en caso contrario

$$\eta_T^2 := D_T^{2\alpha} \left(\alpha_T^2 \|R_T\|_{L^2(T)}^2 + \sum_{\gamma \in \partial T} \varepsilon^{-1/2} \alpha_{\gamma} \|\llbracket J_{\gamma} \rrbracket\|_{L^2(\gamma)}^2 \right) + h_T^{2\alpha},$$

donde el término residual R_T es ahora

$$R_T = \varepsilon \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}|T} - \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}|T} - \mathbf{u}_{\mathcal{T}|T},$$

y los saltos de los flujos discretos $\llbracket J_{\gamma} \rrbracket$ están definidos en (6.7).

En [3], los autores presentan un esquema de elementos finitos estabilizado, para el mismo problema, pero que es analizado desde un punto de vista funcional distinto, que corresponde a:

Encontrar $\mathbf{u}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T})$ tal que

$$\mathcal{B}_h(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \mathbf{v}_{\mathcal{T}}(\mathbf{x}_0) + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T (\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}})(\mathbf{x}_0), \quad \text{para toda } \mathbf{v}_{\mathcal{T}} \in \mathbb{V}(\mathcal{T}), \quad (8.5)$$

donde

$$\mathcal{B}_h(\mathbf{u}_{\mathcal{T}}, \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) = \mathcal{B}(\mathbf{u}, \mathbf{v}) + \sum_{T \in \mathcal{T}} \delta_T \int_T (-\varepsilon \Delta \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{u}_{\mathcal{T}} + \mathbf{u}_{\mathcal{T}})(\mathbf{b} \cdot \nabla \mathbf{v}_{\mathcal{T}}) d\mathbf{x}, \quad (8.6)$$

y el parámetro de estabilización $\delta_T > 0$.

Como de las secciones anteriores se pudo concluir que el mismo estimador de error, puede ser ocupado tanto para el esquema de Galerkin simple como el estabilizado, es que procederemos a usar el estimador anterior, para el esquema de Galerkin estabilizado.

Para validar lo anterior, es que consideraremos el siguiente problema de contaminación, en donde la ecuación es la siguiente:

Hallar u tal que,

$$\begin{cases} -0.02\Delta u + [2 \sin(5x)] \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + 0.1u &= \delta_{(0.16,0.5)} \text{ para todo } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u &= 0 \text{ para todo } \mathbf{x} \in \partial\Omega_D, \\ \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} &= 0 \text{ para todo } \mathbf{x} \in \partial\Omega_N, \end{cases} \quad (8.7)$$

donde el dominio $\Omega = (0, 3) \times (0, 1)$, la frontera Neumann corresponde al conjunto $\partial\Omega_N = \{\mathbf{x} \in \partial\Omega : x = 3\}$ y la frontera Dirichlet es $\partial\Omega = \partial\Omega \setminus \partial\Omega_N$, como se muestran en la Figura 20.

En la Figura 21, se muestran una serie de mallas adaptadas basadas en el algoritmo de adaptatividad y el estimador de error anterior, en donde se nota claramente que el proceso adaptivo se concentra en la fuente puntual y que sigue de buena forma la transmisión hacia al dominio, siguiendo el campo de velocidades del medio el cual tiene una tendencia senoidal. Por último, en la Figura 24, se muestra una solución de elementos finitos para el problema con carga puntual en la última malla adaptada obtenida.

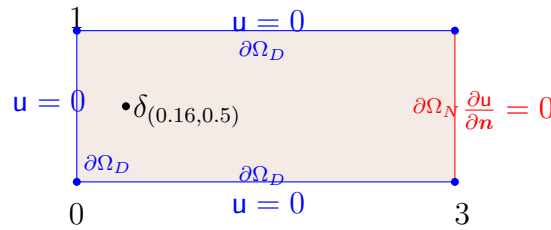


FIGURA 20. Dominio $\Omega = (0, 3) \times (0, 1)$, para el problema (8.7), de contaminación con fuente Delta de Dirac.

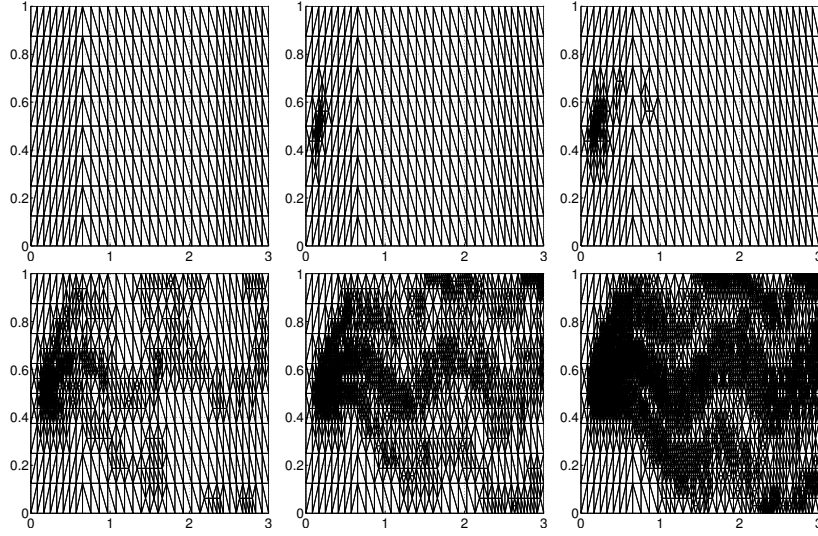


FIGURA 21. Mallas adaptadas para el problema con fuente puntual.

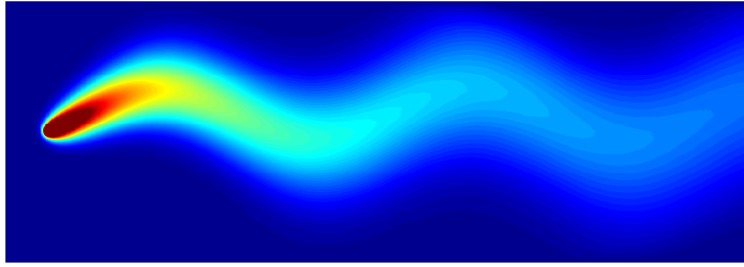


FIGURA 22. Solución de elementos finitos estabilizados para el problema con fuente puntual en una malla adaptada con 13285 elementos.

Por último, consideraremos un problema en donde la región en cuestión tenga una forma de río, en la cual se consideran las condiciones de borde mostradas en la Figura 23 y el problema a resolver corresponde a:

Hallar u tal que,

$$\begin{cases} -10^{-3}\Delta u + [1 \ y] \cdot \nabla u(\mathbf{x}) + u &= \delta_{(0.4,0.3)} \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \Omega, \\ u &= 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \partial\Omega_D, \\ \frac{\partial u}{\partial n} &= 0 \quad \text{para todo } \mathbf{x} \in \partial\Omega_N, \end{cases} \quad (8.8)$$

En la Figura 24 se muestra una malla refinada en base al algoritmo de adaptividad y una solución de elementos finitos, para lo cual claramente se ve que la adaptación sigue el como la contaminación se propagó en todo el río.

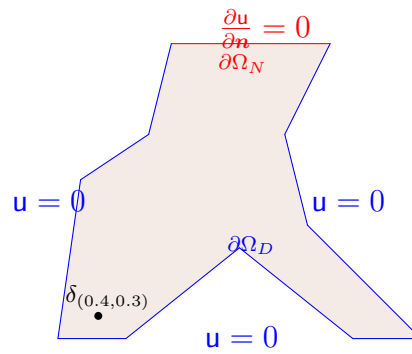


FIGURA 23. Domino Ω , para el problema (8.8), de contaminación con fuente Delta de Dirac.

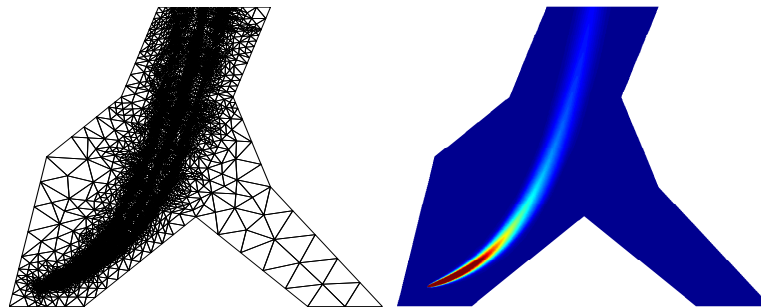


FIGURA 24. Solución de elementos finitos estabilizados para el problema con fuente puntual en una malla adaptada con 13285 elementos.

9. CONCLUSIONES

En este trabajo se presentaron una serie de esquemas de elementos finitos los cuales se usaron para aproximar la solución a problemas asociados con contaminación, en dominios con distintas geometrias. Dentro de los esquemas consideramos, los cuales fueron el esquema clásico de Galerkin en conjunto con un esquema estabilizado, se realizó un estudio de convergencia de los métodos de forma general. De igual forma se realizó un estudio basado en el análisis de error a posteriori, el cual permite construir algoritmos de adaptividad, los cuales permiten obtener mejores soluciones en presencia de cambios bruscos en las soluciones, que es usual en problemas de contaminación. Entonces, en base a todo el trabajo anterior, es que podemos concluir que:

- El Método de Elementos Finitos es un sólido método numérico para aproximar las soluciones a ecuaciones diferenciales;
- Dentro de la gran gama de métodos, los esquemas de elementos finitos estabilizados, entregan una mayor robustez en presencia de problemas que contengan capas límites;
- El análisis de error a posteriori permite construir estimadores de error, los cuales pueden ser utilizados para hacer algoritmos adaptivos, los cuales permiten obtener soluciones aún más robustas a bajo costo computacional;
- La combinación de los métodos estabilizados en conjunto con la adaptividad, entregan una buena aproximación a problemas tan complicados, como los que consideran actuaciones sobre medios de forma puntual.

REFERENCIAS

- [1] Juan Pablo Agnelli, Eduardo M Garau, and Pedro Morin. A posteriori error estimates for elliptic problems with dirac measure terms in weighted spaces. *ESAIM: Mathematical Modelling and Numerical Analysis*, 48(6):1557–1581, 2014.
- [2] M. Ainsworth and J. T. Oden. *A posteriori error estimation in finite element analysis*. Pure and Applied Mathematics (New York). Wiley-Interscience, New York, 2000.
- [3] Rodolfo Araya, Edwin Behrens, and Rodolfo Rodríguez. An adaptive stabilized finite element scheme for a water quality model. *Computer methods in applied mechanics and engineering*, 196(29):2800–2812, 2007.
- [4] Kendall Atkinson and Weimin Han. *Theoretical numerical analysis*, volume 39 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, Dordrecht, third edition, 2009. A functional analysis framework.
- [5] Ted Bennett. *Transport by advection and diffusion*. Wiley Global Education, 2012.
- [6] Daniele Boffi, Franco Brezzi, and Michel Fortin. *Mixed finite element methods and applications*, volume 44 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer, Heidelberg, 2013.
- [7] Susanne C. Brenner and L. Ridgway Scott. *The mathematical theory of finite element methods*, volume 15 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer, New York, third edition, 2008.
- [8] Haim Brezis. *Functional analysis, Sobolev spaces and partial differential equations*. Universitext. Springer, New York, 2011.
- [9] Philippe G. Ciarlet. *The finite element method for elliptic problems*, volume 40 of *Classics in Applied Mathematics*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2002. Reprint of the 1978 original [North-Holland, Amsterdam; MR0520174 (58 #25001)].
- [10] A. Ern and J.-L. Guermond. *Theory and practice of finite elements*, volume 159 of *Applied Mathematical Sciences*. Springer-Verlag, New York, 2004.
- [11] L. C. Evans. *Partial Differential Equations: Second Edition*. Graduate Studies in Mathematics.
- [12] Gabriel N Gatica. A simple introduction to the mixed finite element method. *Theory and Applications, Springer-Verlag, Berlin*, 2014.
- [13] Willem Hundsdorfer and Jan G Verwer. *Numerical solution of time-dependent advection-diffusion-reaction equations*, volume 33. Springer Science & Business Media, 2013.
- [14] Stig Larsson and Vidar Thomée. *Partial differential equations with numerical methods*, volume 45 of *Texts in Applied Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, 2003.
- [15] Pedro Morin, Ricardo H. Nochetto, and Kunibert G. Siebert. Convergence of adaptive finite element methods. *SIAM Rev.*, 44(4):631–658 (2003), 2002. Revised reprint of “Data oscillation and convergence of adaptive FEM” [*SIAM J. Numer. Anal.* **38** (2000), no. 2, 466–488 (electronic); MR1770058 (2001g:65157)].
- [16] Ricardo H Nochetto, Enrique Otárola, and Abner J Salgado. Piecewise polynomial interpolation in muckenhoupt weighted sobolev spaces and applications. *Numerische Mathematik*, 132(1):85–130, 2016.
- [17] H.-G. Roos, M. Stynes, and L. Tobiska. *Robust numerical methods for singularly perturbed differential equations*, volume 24 of *Springer Series in Computational Mathematics*. Springer-Verlag, Berlin, second edition, 2008. Convection-diffusion-reaction and flow problems.
- [18] Eleuterio F Toro. *Riemann solvers and numerical methods for fluid dynamics: a practical introduction*. Springer Science & Business Media, 2013.

REFERENCIAS.

- [19] R. Verfürth. A posteriori error estimators for convection-diffusion equations. *Numer. Math.*, 80(4):641–663, 1998.