

2016

# DINÁMICA DE UN MODELO DE DEPREDACIÓN DEL TIPO LESLIE EULER CON DOBLE EFECTO ALLEN EN LAS PRESAS

MARTINEZ JERALDO, NICOLE DE LOURDES

---

<http://hdl.handle.net/11673/13924>

*Repositorio Digital USM, UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA*

# UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
VALPARAÍSO-CHILE



---

## Dinámica de un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con doble efecto Allee en las presas

---

Tesis presentada por:

**Nicole De Lourdes Martínez-Jeraldo**

*Como requisito parcial*

*para optar al grado de magíster en ciencias mención matemática*

*Profesor Guía:*

**Pablo Aguirre Olea**

Septiembre, 2016



UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
VALPARAÍSO-CHILE



---

# Dinámica de un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con doble efecto Allee en las presas

---

Tesis presentada por:

**Nicole De Lourdes Martínez-Jeraldo**

*Como requisito parcial*

*para optar al grado de Magister en Ciencias mención Matemática*

*Examinadores:*

*Profesor Guía:*

Pablo Aguirre Olea

Salomón Alarcón Araneda

Iván Szántó Narea

Gonzalo Robledo Veloso

Septiembre, 2016

Material de referencia, su uso no involucra responsabilidad del autor o de la Institución.



TÍTULO DE LA TESIS:

Dinámica de un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con doble efecto Allee en las presas.

AUTOR: Nicole De Lourdes Martínez-Jeraldo.

TRABAJO DE TESIS, presentado como requisito parcial para optar al grado de Magíster en Ciencias mención Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN EVALUADORA:

Integrantes

Firma

Pablo Aguirre Olea

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

\_\_\_\_\_

Salomón Alarcón Araneda

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

\_\_\_\_\_

Iván Szántó Narea

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

\_\_\_\_\_

Gonzalo Robledo Veloso

Universidad de Chile, Chile.

\_\_\_\_\_

Valparaíso, Septiembre 2016.



# *Agradecimientos*

Primero quiero agradecer a mi familia por su continuo e incondicional apoyo. A mi Yeguo por siempre apoyarme y soportarme en mis momentos de estrés.

También agradecer a mi profesor de pregrado, Eduardo González-Olivares, quien me inició en esta gran área y siempre me apoyó e incentivó a seguir investigando. A mi profesor guía, Pablo Aguirre, quien me entregó los conocimientos y herramientas que me ayudaron a concluir esta tesis, y por siempre estar dispuesto a ayudarme.

Finalmente, agradecer a la Dirección General de Investigación, Innovación y Postgrado DGIP, al Programa de Incentivo a la Iniciación Científica PIIP de la DGIP, al Proyecto Fondecyt 11150306 y al grupo de Análisis y Modelamiento matemático Valparaíso AM2V, quienes me dieron la ayuda financiera para poder realizar este trabajo de investigación.

*Valparaíso, Septiembre 2016.*

내 가족과 남자 친구에 전용.... 감사합니다.



# Índice general

Agradecimientos	v
Índice general	vii
Índice de figuras	ix
Resumen	xi
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Nociones sobre teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias</b>	<b>3</b>
2.1. Introducción a la teoría cualitativa de E.D.Os . . . . .	3
2.1.1. Ecuaciones diferenciales y campos de vectores . . . . .	3
2.1.2. Conjuntos invariantes . . . . .	8
2.1.3. Equivalencia entre campo de vectores . . . . .	9
2.1.4. Clasificación topológica de los puntos de equilibrio hiperbólicos . . . . .	10
2.1.4.1. Equilibrios hiperbólicos en campos de vectores . . . . .	10
2.1.5. Aplicación de retorno de Poincaré y estabilidad de ciclos . . . . .	14
2.1.6. Teoría de la Variedad central . . . . .	16
2.1.7. Blowing-up en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	18
2.1.7.1. Blowing-up direccional . . . . .	18
2.2. Bifurcaciones de campos de vectores . . . . .	19
2.2.1. Bifurcaciones y diagramas de bifurcación . . . . .	19
2.2.2. Bifurcaciones locales de equilibrios . . . . .	22
2.2.3. Bifurcación Silla-nodo . . . . .	22
2.2.4. Bifurcación de Hopf . . . . .	24
2.2.5. Bifurcación de órbitas homoclínicas . . . . .	26
2.2.6. Bifurcación Bogdanov-Takens . . . . .	29
<b>3. Dinámica de Poblaciones</b>	<b>32</b>
3.1. Modelos de Crecimiento Continuo . . . . .	32
3.2. Efecto Allee . . . . .	34

3.3. Modelos para la interacción de poblaciones . . . . .	37
3.3.1. Sistemas de Lotka-Volterra . . . . .	38
3.3.2. Modelos depredador-presa realistas . . . . .	39
3.3.3. Modelos de tipo Gause . . . . .	41
3.3.4. Modelos de tipo Leslie-Gower . . . . .	42
<b>4. Dinámica de un modelo depredador-presa considerando doble efecto Allee en las presas</b>	<b>43</b>
4.1. El Modelo . . . . .	43
4.2. Equivalencia Topológica . . . . .	44
4.3. Estabilidad de puntos de equilibrio . . . . .	46
4.3.1. Puntos de equilibrio en ausencia de depredadores . . . . .	46
4.3.1.1. Estabilidad de los puntos de equilibrio en ausencia de depredadores . . . . .	47
4.3.2. Puntos de Equilibrio Interiores . . . . .	58
4.3.2.1. Estabilidad de los puntos de equilibrio en $Int(\bar{\Omega})$ . . . . .	59
4.4. Acotamiento de soluciones . . . . .	69
4.5. Análisis de Bifurcaciones en el plano $(M, B)$ . . . . .	75
<b>5. Conclusiones</b>	<b>80</b>
<b>A. Teoremas de la teoría de bifurcaciones</b>	<b>83</b>
A.1. Bifurcación Silla-nodo . . . . .	83
A.2. Bifurcación de Hopf . . . . .	84
A.3. Bifurcación de órbitas homoclinicas planares . . . . .	85
A.4. Bifurcación Bogdanov-Takens . . . . .	89
A.4.1. Derivación a una forma normal . . . . .	89
<b>B. Análisis numérico de bifurcaciones</b>	<b>92</b>
B.1. Localización de equilibrios y su estabilidad . . . . .	92
B.2. Localización de ciclos límite . . . . .	94
B.3. Análisis de bifurcación a un parámetro . . . . .	96
B.3.1. Continuación de equilibrios y ciclos . . . . .	97
B.3.2. Detección y localización de bifurcaciones de codimensión uno . . . . .	99
B.4. Análisis de bifurcación de equilibrios a dos parámetros . . . . .	100
B.4.1. Continuación de bifurcaciones de codimensión uno de puntos de equilibrios . . . . .	101
B.4.2. Continuación de órbitas homoclinicas de codimensión uno . . . . .	102
B.5. Estrategia de continuación . . . . .	104
<b>Bibliografía</b>	<b>106</b>

# Índice de figuras

2.1. Órbitas de un campo de vectores. . . . .	6
2.2. Órbita periódica. . . . .	7
2.3. Equivalencia topológica de sistemas dinámicos. . . . .	9
2.4. Clasificación de puntos de equilibrios hiperbólicos. . . . .	12
2.5. Aplicación de retorno de Poincaré. . . . .	14
2.6. Bifurcación de Pitchfork. . . . .	21
2.7. Bifurcación silla-nodo. . . . .	22
2.8. Diagrama de bifurcación silla-nodo. . . . .	22
2.9. Retrato de fase bifurcación silla-nodo en $\mathbb{R}^2$ . . . . .	24
2.10. Bifurcación de Hopf supercrítica. . . . .	25
2.11. Bifurcación de Hopf subcrítica. . . . .	26
2.12. Órbitas homoclínica y heteroclínica en el plano. . . . .	27
2.13. Órbita homoclínica $\Gamma_0$ a un equilibrio silla-nodo. . . . .	27
2.14. Bifurcación homoclínica en el plano. . . . .	28
2.15. Bifurcación homoclínica en el plano. . . . .	29
2.16. Diagrama de bifurcación Bogdanov-Takens. . . . .	30
3.1. Crecimiento de población tipo logístico. . . . .	33
3.2. Forma cualitativa de las soluciones de la ecuación (3.4). . . . .	35
3.3. Tasa de crecimiento per cápita de la población en función del tamaño de la población $x$ o la densidad para la dependencia de la densidad negativa, efecto Allee débil y efecto Allee fuerte. . . . .	35
3.4. Ejemplos de respuesta funcional $xR(x)$ de los depredadores a la densidad de presa. . . . .	39
4.1. Regiones naturaleza $(0, 0)$ . . . . .	50
4.2. Retratos de fase locales cerca del equilibrio $(0, 0)$ . . . . .	51
4.3. Retrato de fase del campo (4.7) en el plano $r, p$ para las regiones $I, II$ y $III$ . . . . .	53
4.4. Retrato de fase del campo (4.12) en el plano $r, p$ para las regiones $I, II$ y $III$ . . . . .	55
4.5. Retrato de fase del campo (4.7) con $M = 0$ , en el plano $(r, p)$ para los conjuntos $IV$ y $V$ . . . . .	58
4.6. Retrato de fase del sistema (4.44) cerca del origen, que representa el infinito en (4.2) cuando $v \rightarrow \infty$ . . . . .	73
4.7. Acotamiento de soluciones. . . . .	75

---

4.8. Diagrama de Bifurcación y retratos de fase para distintos valores de parámetros. . . . .	76
4.9. Bosquejos topológicos de los retratos de fase para distintos valores de parámetros. . . . .	77
4.10. Bosquejo que ilustra el fenómeno de excitabilidad del sistema (4.2). . .	79
A.1. Función de división en el caso planar ( $n = 2$ ). . . . .	86
A.2. Bifurcación homoclínica en el plano ( $\sigma < 0$ ). . . . .	87
A.3. Bifurcación homoclínica en el plano ( $\sigma > 0$ ). . . . .	88
A.4. Ciclo y período del ciclo cerca a una bifurcación homoclínica. . . . .	89
B.1. Curva de equilibrio. . . . .	97

# Dinámica de un modelo de depredación del tipo Leslie-Gower con doble efecto Allee en las presas

por NICOLE MARTÍNEZ-JERALDO

## Resumen

En este trabajo se analiza un modelo depredador-presa del tipo Leslie-Gower considerando que las presas están afectadas por dos tipos de efecto Allee, el cual está descrito por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias que dependen de parámetros ecológicos.

Se establecerán las propiedades dinámicas del sistema. Se probará la existencia de tres puntos de equilibrio sobre los ejes: un equilibrio silla, un equilibrio repulsor o silla dependiendo de los parámetros, y se probará que el origen es un equilibrio no hiperbólico pero posee ciertos sectores en donde el equilibrio es atractor, repulsor o silla. Veremos que pueden existir de cero a dos puntos de equilibrios al interior del primer cuadrante, los cuales tienen las siguientes estabilidades: en el caso de tener dos equilibrios, uno de ellos será silla y la estabilidad del segundo dependerá de los valores de los parámetros; y en el caso de tener un equilibrio este podrá ser atractor o repulsor dependiendo de los parámetros. También veremos que existen curvas separatrices y conexiones homoclínicas. Se probará la existencia de una bifurcación Silla-nodo y una bifurcación de Hopf, y mediante un análisis de bifurcación utilizando paquetes de integración y continuación numérica, se probará la existencia de una bifurcación Bogdanov-Takens, la cual actúa como organizadora de la dinámica al interior del primer cuadrante.

Para obtener estos resultados, entregamos las nociones y los resultados necesarios de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales y bifurcación de campos de vectores. También se darán algunas nociones sobre dinámica de poblaciones, las cuales nos permitirán analizar nuestro modelo.

# Capítulo 1

## Introducción

En esta tesis estudiamos un modelo de depredación, que expresa la interacción entre dos especies una de las cuales sirve de alimento de la otra. En estos modelos el número de individuos de cada población no solo depende de la razón de crecimiento o decrecimiento natural, sino también de los encuentros entre ellos. La interacción depredador-presa será descrita por medio de un sistema de ecuaciones diferenciales autónomas, en nuestro caso de orden dos, del tipo Leslie-Gower [34, 44] en el cual la población de presas está afectada por un doble efecto Allee [12, 31, 42].

Este tipo de sistemas ha sido durante mucho tiempo un tema importante en la ecología matemática [17, 35, 36]. La característica fundamental de los modelos del tipo Leslie-Gower es que la ecuación que describe el crecimiento de los depredadores es del tipo logístico [44], donde la capacidad de soporte (environmental carrying capacity) de los depredadores es una función de la cantidad de presas disponibles, a diferencia de los modelos de tipo Gause [20]. Se asume que los depredadores son especialistas.

Además se considera que la respuesta funcional de los depredadores es lineal [44], pero se pueden incorporar otras diferentes, de acuerdo a la clasificación propuesta por C. S. Holling [34], como ha sido en los modelos estudiados en [1, 2, 23, 25].

Realizamos un estudio de la dinámica del modelo con herramientas principalmente de la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias. Por medio de equivalencias topológicas y cambios de parámetros apropiados, formaremos un campo de vectores polinomial extendido, topológicamente equivalente al modelo inicial, sobre el cual realizaremos el análisis. Probaremos que las soluciones del modelo están acotadas. Observaremos que el origen resulta ser un equilibrio no hiperbólico por lo que

utilizaremos métodos de desingularización para estudiar la dinámica local cerca de este punto. Mostraremos que bajo ciertas condiciones de los parámetros el sistema pasa por bifurcaciones Silla-Nodo y Hopf, y mediante programas computacionales obtendremos que también pasa por una bifurcación Bogdanov-Takens.

La tesis está estructurada de la siguiente manera: en el capítulo 2 se entregarán algunas nociones sobre la teoría cualitativa de E.D.Os y sobre la teoría de bifurcaciones, lo cual nos serán útiles al momento de analizar nuestro modelo. En el capítulo 3 se mostrarán las herramientas de la dinámica de poblaciones necesarias para entender la formulación del modelo. Se definen modelos de poblaciones de crecimiento continuo, tipos de respuestas funcionales, el efecto Allee y finalmente modelos para la interacción de dos especies de poblaciones, como los modelos del tipo Leslie-Gower. En el capítulo 4 se mostrará el estudio de nuestro modelo haciendo uso de los conocimientos y herramientas expuestos en los dos capítulos previos. Se establecerán las propiedades dinámicas del sistema, se probará la existencia de tres puntos de equilibrio sobre los ejes: un equilibrio silla, un repulsor o silla dependiendo de los parámetros, y se probará que el origen es un equilibrio no hiperbólico pero posee ciertos sectores en donde el equilibrio es atractor, repulsor o silla. Veremos que pueden existir de cero a dos puntos de equilibrios al interior del primer cuadrante, los cuales tienen las siguientes estabilidades: en el caso de tener dos equilibrios, uno de ellos será silla y la estabilidad del segundo dependerá de los valores de los parámetros; y en el caso de tener un equilibrio este podrá ser atractor o repulsor dependiendo de los parámetros. También veremos que existen curvas separatrices y conexiones homoclínicas. Se realizará un análisis de bifurcación con la ayuda de paquetes de integración y continuación numérica, obteniendo la existencia de una bifurcación Silla-nodo, una bifurcación de Hopf y una bifurcación Bogdanov-Takens. Luego, en el capítulo 5, se presenta un resumen y discusión sobre los resultados principales de esta tesis y también se proponen posibles futuras investigaciones adicionales. Finalmente, en los apéndices A y B, se darán detalles técnicos adicionales que complementarán a los mostrados en el capítulo 2.

# Capítulo 2

## Nociones sobre teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias

En este capítulo se entregarán algunas nociones sobre la teoría cualitativa de E.D.Os, definiciones, notaciones, etc, que nos serán útiles al momento de analizar nuestro modelo en el capítulo 4. Luego hablaremos brevemente sobre la teoría de bifurcaciones.

### 2.1. Introducción a la teoría cualitativa de E.D.Os

#### 2.1.1. Ecuaciones diferenciales y campos de vectores

Consideremos la evolución temporal de una cantidad vectorial  $(x_1(t), x_2(t), \dots, x_n(t)) \in \mathbb{R}^n$  en términos de las velocidades  $\dot{x}_i = \frac{dx_i}{dt}$  en la forma de un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\dot{x}_i = f_i(x_1, x_2, \dots, x_n), \quad i = 1, 2, \dots, n,$$

o en la forma vectorial equivalente

$$\dot{x} = f(x), \tag{2.1}$$

donde se asume que la función vectorial  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es lo suficientemente diferenciable (suave). La función en el lado derecho de (2.1) se denomina como un *campo de vectores*, ya que asigna un vector

$$f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ f_n(x) \end{pmatrix}$$

a cada punto  $x \in \mathbb{R}^n$ . Aquí cada  $f_i : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  es una función componente del vector  $f(x)$ , las cuales representan la variación espacial de  $f(x)$  en la dirección del vector unitario  $e_i = \partial/\partial x_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ .

**Ejemplo 2.1.** *Uno de los primeros modelos de ecosistemas fue el sistema de dos ecuaciones diferenciales no lineales propuesto por Volterra [48]*

$$\begin{cases} \dot{N}_1 = \alpha N_1 - \beta N_1 N_2, \\ \dot{N}_2 = -\gamma N_2 + \delta N_1 N_2. \end{cases} \quad (2.2)$$

*Aquí  $N_1$  y  $N_2$  son los números de presas y depredadores, respectivamente, en una comunidad ecológica,  $\alpha$  es la tasa de crecimiento de la presa,  $\gamma$  es la mortalidad del depredador, mientras que  $\beta$  y  $\delta$  describen la eficiencia de consumo de la presa de los depredadores.*

Algunos tipos de ecuaciones diferenciales se pueden resolver analíticamente (en términos de funciones elementales). Sin embargo, en la mayoría de los casos esto no es posible. De todas formas, bajo ciertas condiciones podemos asegurar existencia y unicidad de soluciones.

**Teorema 2.1.** *(Existencia, unicidad, y la dependencia suave)*

*Considere un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias*

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

donde  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  es suave en una región abierta  $U \subset \mathbb{R}^n$ . Entonces hay una única función  $x = x(t, x_0)$ ,  $x : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , que es suave en  $(t, x)$ , y satisface, para cada  $x_0 \in U$ , las siguientes condiciones:

$$(i) \quad x(0, x_0) = x_0;$$

$$(ii) \quad \text{hay un intervalo } J = (-\delta_1, \delta_2),$$

donde  $\delta_{1,2} = \delta_{1,2}(x_0) > 0$ , tal que, para todo  $t \in J$ ,

$$y(t) = x(t, x_0) \in U,$$

y

$$\dot{y}(t) = f(y(t)).$$

*Demostración.* La demostración se basa en construir una sucesión, llamada iteraciones de Picard [29, 38], cuyo límite es la solución del sistema. La existencia y unicidad de este límite viene dada por el teorema del punto fijo de Banach. Para más detalle ver [3, 41].  $\square$

El grado de suavidad de  $x(t, x_0)$  con respecto a  $x_0$  en el teorema 2.1 es el mismo que el de  $f$  como una función de  $x$ . La función  $x = x(t, x_0)$ , considerada como una función del tiempo  $t$ , se denomina una solución que parte de  $x_0$ . Esta función define, para cada  $x_0 \in U$ , dos objetos: una curva solución

$$Cr(x_0) = \{(t, x) : x = x(t, x_0), t \in J\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

y una órbita, la cual es la proyección de  $Cr(x_0)$  en el espacio de estado,

$$O(x_0) = \{x : x = x(t, x_0), t \in J\} \subset \mathbb{R}^n.$$

Ambas curvas son parametrizadas por el tiempo  $t$  y orientadas por la dirección de avance del tiempo. El vector  $f(x_0) \neq 0$  es tangente a la órbita  $O(x_0)$  en  $x_0$ . El

teorema de existencia y unicidad dice que hay una *única* órbita que pasa a través de un punto  $x_0 \in U$ . Las órbitas también se denominan como trayectorias. Notar que si  $y_0 = \varphi^{t_0}(x_0)$  para algún  $t_0$ , los conjuntos  $O(x_0)$  y  $O(y_0)$  coinciden (ver figura 2.1), debido a la unicidad de soluciones.

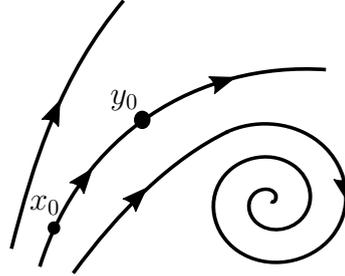


FIGURA 2.1: Órbitas de campo de vectores.

Ahora podemos definir un operador de evolución  $\varphi^t : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ , el cual está dado por la fórmula

$$\varphi^t(x_0) = x(t, x_0), \tag{2.3}$$

que asigna a  $x_0$  un punto de la órbita a través de  $x_0$  que se pasa  $t$  unidades de tiempo después. El operador de evolución satisface:

1.  $\varphi^0(x_0) = x_0$ . (Es decir, si el tiempo no avanza, no hay evolución de la cantidad  $x$ ).
2.  $\varphi^t(\Phi^s(x_0)) = \varphi^{t+s}(x_0)$ . (La evolución en el tiempo es determinística y sólo depende del dato inicial  $x_0$ ).

Debido a esto se dice que el operador  $\varphi^t$  define un sistema dinámico [4, 29].

El operador de evolución describe el flujo del campo de vectores en la forma de una familia  $\{\varphi_{x_0}(t)\}_{x_0 \in \mathbb{R}^n}$ , donde usamos la notación  $\varphi_{x_0}(t) = \varphi^t(x_0)$  para recalcar la dependencia de  $\varphi$  como función del tiempo  $t$  desde una condición inicial  $x_0 \in \mathbb{R}^n$ . Luego este flujo satisface la EDO (2.1), es decir,

$$\frac{d\varphi}{dt}(t) = f(\varphi(t)), \quad \forall t \in T. \tag{2.4}$$

**Definición 2.2.** Un punto  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  se llama punto de equilibrio de (2.1) si  $f(x_0) = 0$ .

Esta definición nos dice que  $\dot{x}|_{x_0} = 0$ , o sea que la tasa de crecimiento es nula en el punto  $x_0$ . Por lo tanto, los equilibrios representan el modo más simple de comportamiento del sistema. En particular, si  $x_0$  es un equilibrio, entonces  $\varphi^t(x_0) = x_0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ .

Otro tipo relativamente simple de órbita es un *ciclo* u *órbita periódica*.

**Definición 2.3.** Un ciclo u órbita periódica es una órbita  $L_0$ , tal que cada punto  $x_0 \in L_0$  satisface  $\varphi^{t+T_0}(x_0) = \varphi^t(x_0)$  para algún  $T_0 > 0$ , para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

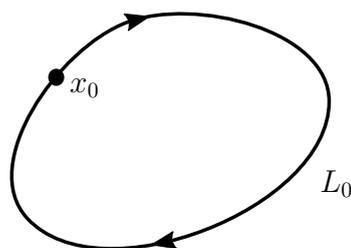


FIGURA 2.2: Órbita periódica de un campo de vectores.

El  $T_0$  mínimo con esta propiedad se llama el *período* del ciclo  $L_0$ . Si un sistema comienza su evolución en un punto  $x_0$  en el ciclo  $L_0$ , volverá exactamente a este punto después de cada  $T_0$  unidades de tiempo. En este caso decimos que el sistema presenta *oscilaciones periódicas* (ver figura 2.2).

**Definición 2.4.** Un ciclo límite  $L_0$  de un campo de vectores es una órbita periódica aislada, es decir, existe una vecindad de  $L_0$  en donde la única órbita periódica en esa vecindad es  $L_0$ .

Es imposible dibujar todas las órbitas de un sistema dinámico. Sin embargo, en la práctica, sólo una familia de órbitas claves son necesarias para representar la dinámica. Uno de los conceptos claves para lograr esto es el retrato de fase.

**Definición 2.5.** El retrato de fase de un sistema dinámico es una partición del espacio de estados en órbitas.

El retrato de fase contiene una gran cantidad de información sobre el comportamiento de un sistema dinámico. Al observar el retrato de fase, podemos determinar el número y tipos de *estados asintóticos* al cual el sistema tiende a medida que  $t \rightarrow +\infty$  (y a medida que  $t \rightarrow -\infty$  si el sistema es invertible).

### 2.1.2. Conjuntos invariantes

Para clasificar los elementos de un retrato de fase – en particular, los posibles estados asintóticos del sistema – la siguiente definición es útil.

**Definición 2.6.** Un conjunto invariante de un flujo  $\varphi^t$  asociado a (2.1) es un subconjunto  $S \subset \mathbb{R}^n$ , tal que  $x_0 \in S$  implica  $\varphi^t(x_0) \in S$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ .

La definición anterior significa que  $\varphi^t(S) \subseteq S$  para todo  $t \in \mathbb{R}$ . Un conjunto invariante  $S$  consiste en órbitas del sistema dinámico. Cualquier órbita individual  $O(x_0)$  es un conjunto invariante. Siempre podemos restringir el operador de evolución  $\varphi^t$  del sistema a su conjunto invariante  $S$  y considerar un flujo  $\psi^t : S \rightarrow S$ , que sea el operador inducido por  $\varphi^t$  en  $S$ , esto es,  $\psi^t = \varphi^t|_S$ . Con el afán de simplificar la notación, vamos a utilizar el símbolo  $\varphi^t$  para la restricción, en lugar de  $\psi^t$ , toda vez que no se preste a confusión.

Para representar un estado asintótico observable de un sistema dinámico, un conjunto invariante  $S_0$  debe ser estable; en otras palabras, debe “atraer” órbitas cercanas. Supongamos que tenemos un flujo  $\varphi^t$  asociado a (2.1) en  $\mathbb{R}^n$ . Sea  $S_0$  un conjunto cerrado invariante.

**Definición 2.7.** Un conjunto invariante  $S_0$  se dice asintóticamente estable o atractor si existe una vecindad  $U_0 \supset S_0$  tal que

$$\varphi^t(x) \rightarrow S_0, \quad \forall x \in U_0 \quad \text{a medida que } t \rightarrow +\infty.$$

Con el fin de conocer de donde “proviene” las órbitas que tienden a un punto de equilibrio atractor damos la siguiente definición:

**Definición 2.8.** Dado un punto de equilibrio atractor  $x_0$ , definimos su cuenca de atracción como el conjunto de condiciones iniciales  $x^0$  tal que  $x^0(t) \rightarrow x_0$  a medida que  $t \rightarrow \infty$ .

*Observación 2.9.* Un punto de equilibrio  $x_0$  que es estable para  $t \rightarrow -\infty$  es llamado repulsor.

### 2.1.3. Equivalencia entre campo de vectores

Nos gustaría estudiar las características generales (cualitativas) del comportamiento de los campos vectoriales, en particular, para clasificar los posibles tipos de estos y comparar el comportamiento de los diferentes campos de vectores. La comparación de los sistemas se basa en una *relación de equivalencia*, lo que nos permite definir clases de objetos equivalentes y estudiar las transiciones entre estas clases. Por lo tanto, tenemos que especificar cuándo se definen dos campos de vectores como “cualitativamente similares” o equivalentes. Tal definición debe cumplir algunos criterios generales intuitivos. Por ejemplo, es natural esperar que dos campos equivalentes tengan el mismo número de equilibrios y ciclos con el mismo tipo de estabilidad. La “posición relativa” de estos conjuntos invariantes y la forma de sus regiones de atracción también deben ser similares para los sistemas equivalentes. En otras palabras, consideramos dos campos vectoriales como equivalentes si sus retratos de fase son “cualitativamente similares”, es decir, si un retrato puede ser obtenido de otro por medio de una transformación continua (ver figura 2.3).

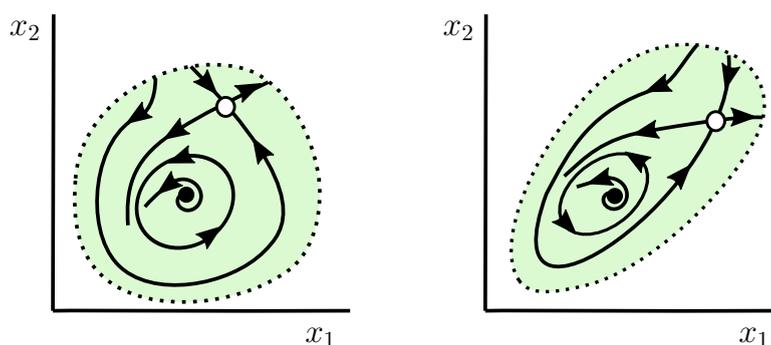


FIGURA 2.3: Equivalencia topológica.

**Definición 2.10.** Un campo de vectores  $\dot{x} = f(x)$  se llama topológicamente equivalente a un campo de vectores  $\dot{y} = g(y)$  si hay un homeomorfismo  $h : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$  que envía órbitas del campo  $f$  en órbitas del campo  $g$ , preservando la dirección del tiempo, es decir, la orientación de las órbitas.

*Observación 2.11.* Si el homeomorfismo  $h$  de la definición 2.10 sólo satisface las propiedades anteriores en una vecindad  $U$  de un equilibrio  $x_0$  decimos que  $f$  y  $g$  son localmente topológicamente equivalentes en  $U$ .

En el caso en que  $h$  sea un difeomorfismo, los sistemas se llaman suavemente equivalentes (o difeomorfos). Si el grado de suavidad de  $h$  es de interés, se escribe:  $C^k$ -equivalente o  $C^k$ -difeomorfo.

De lo anterior, dos sistemas difeomorfos son prácticamente idénticos y se pueden ver como el mismo sistema escrito utilizando diferentes coordenadas.

Supongamos que  $\mu = \mu(x) > 0$  es una función escalar positiva suave y que los lados derechos de

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (2.5)$$

y

$$\dot{y} = g(y), \quad y \in \mathbb{R}^n, \quad (2.6)$$

se relacionan por  $f(x) = \mu(x)g(x)$  para todo  $x \in \mathbb{R}^n$ . Entonces los sistemas (2.5) y (2.6) son topológicamente equivalentes, ya que sus órbitas son idénticas y es la velocidad del movimiento que los hace diferentes (la relación de las velocidades en un punto  $x$  es exactamente  $\mu(x)$ ). Por lo tanto, el homeomorfismo  $h$  en la definición 2.10 es el operador identidad  $h(x) = x$ . En otras palabras, los sistemas se distinguen solamente por la parametrización del tiempo a lo largo de las órbitas.

## 2.1.4. Clasificación topológica de los puntos de equilibrio hiperbólicos

### 2.1.4.1. Equilibrios hiperbólicos en campos de vectores

Sea  $x_0 = 0$  un equilibrio de (2.1) y sea  $Df(x_0)$  la matriz Jacobiana de  $f$  evaluada en  $x_0$ , es decir

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}.$$

Sean  $n_-$ ,  $n_0$ , y  $n_+$  los números de valores propios de  $Df(x_0)$  (contando multiplicidades) con parte real negativa, cero, y positiva, respectivamente.

**Definición 2.12.** Un equilibrio se llama hiperbólico si  $n_0 = 0$ , es decir, si no hay valores propios en el eje imaginario. Un equilibrio hiperbólico se llama

- (i) repulsor si  $n_+ = n$  y  $n_- = 0$ ,
- (ii) atractor si  $n_+ = 0$  y  $n_- = n$ ,
- (iii) silla hiperbólica si  $n_- \cdot n_+ \neq 0$ .

Las propiedades de estabilidad de un equilibrio hiperbólico  $x_0$  de un sistema dinámico no-lineal están determinadas por la linealización del campo vectorial  $f$  alrededor de  $x_0$ , según el siguiente teorema:

**Teorema 2.13. (Hartman-Grobman)** *Si el campo de vectores (2.1) tiene un equilibrio hiperbólico  $x_0$ , entonces existe una vecindad  $U$  de  $x_0$  tal que (2.1) en  $U$  es localmente topológicamente equivalente al sistema linealizado*

$$\dot{x} = Df(x_0)x \tag{2.7}$$

en una vecindad  $V$  del origen.

*Demostración.* Se basa en construir una función que nos permita definir un homeomorfismo apropiado entre los flujos de los dos sistemas (el original y su linealización), para así finalmente probar que estos son equivalentes. Para mayor detalle ver [37].

□

En otras palabras, el teorema de Hartman-Grobman nos dice que la dinámica de cualquier campo de vectores no-lineal es equivalente a la dinámica de su linealización localmente cerca de un equilibrio hiperbólico.

Sean  $n_- = s$ ,  $n_0 = c$ , y  $n_+ = u$  nombrados anteriormente. Entonces  $\mathbb{R}^n$  se puede representar como la suma directa de los subespacios de la siguiente manera

$$\mathbb{R}^n = E^s \oplus E^u \oplus E^c,$$

donde  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$  son los espacios propios que corresponden a los valores propios con partes reales negativas, positivas y cero, y son referidos como subespacios estable,

inestable, y central, respectivamente. Las soluciones de (2.7) con condiciones iniciales contenidas en  $E^s$ ,  $E^u$  o  $E^c$  deben permanecer en aquel subespacio particular para todo tiempo  $t$ . Es decir,  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$  son subespacios invariantes.

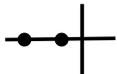
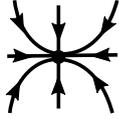
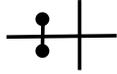
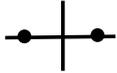
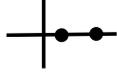
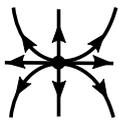
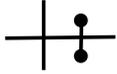
$(n_+, n_-)$	Valores Propios	Retrato de Fase	Estabilidad
(0, 2)		 Nodo	Estable
		 Foco	
(1, 1)		 Silla	Inestable
(2, 0)		 Nodo	Inestable
		 Foco	

FIGURA 2.4: Clasificación topológica de puntos de equilibrios hiperbólicos en el plano.

**Ejemplo 2.2. (Equilibrios hiperbólicos de sistemas planares)**

Considere un sistema bidimensional

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, x_2)^T \in \mathbb{R}^2, \tag{2.8}$$

con  $f$  suave. Supongamos que  $x = 0$  es un equilibrio,  $f(0) = 0$ , y sea

$$A = \left. \frac{df(x)}{dx} \right|_{x=0}$$

su matriz Jacobiana. La matriz  $A$  tiene dos valores propios  $\lambda_1, \lambda_2$ , los cuales son las raíces de la ecuación característica

$$\lambda^2 - \sigma\lambda + \Delta = 0,$$

donde  $\sigma = \text{tr}A$ ,  $\Delta = \det A$ .

La figura 2.4 muestra resultados clásicos bien conocidos [29], que se desprenden de un análisis de los valores propios de  $A$ . Hay tres clases topológicas de equilibrios hiperbólicos en el plano: nodos (focos) estables, sillas, y nodos (focos) inestables.

Para un equilibrio hiperbólico introduciremos los siguientes conjuntos invariantes:

**Definición 2.14.** Sea  $x_0$  un punto de equilibrio hiperbólico del campo de vectores (2.1). Definimos las variedades estable e inestable locales de  $x_0$  como:

$$W_{loc}^s(x_0) = \{x \in U : \varphi^t(x) \rightarrow x_0, \text{ cuando } t \rightarrow +\infty \text{ y } \varphi^t(x_0) \in U, \forall t \geq 0\},$$

$$W_{loc}^u(x_0) = \{x \in U : \varphi^t(x) \rightarrow x_0, \text{ cuando } t \rightarrow -\infty \text{ y } \varphi^t(x_0) \in U, \forall t \leq 0\},$$

donde  $U \subset \mathbb{R}^n$  es una vecindad de  $x_0$ .

Esta definición nos entrega los conjuntos de condiciones iniciales que se encuentran en una vecindad  $U$  del equilibrio  $x_0$ , las cuales a medida que avanza el tiempo positivo (o sea  $t \rightarrow +\infty$  en el caso  $W_{loc}^s(x_0)$ ), o en tiempo negativo (o sea  $t \rightarrow -\infty$  en el caso  $W_{loc}^u(x_0)$ ), van a parar al equilibrio  $x_0$ .

El teorema de la variedad estable [29, 38] nos dice que  $W_{loc}^s$  y  $W_{loc}^u$  siempre existen y son únicos, son conjuntos invariantes y poseen el mismo grado de diferenciabilidad de  $f$ . El mismo teorema también nos dice que  $W_{loc}^s(x_0)$  y  $W_{loc}^u(x_0)$  son tangentes a  $E^s$  y  $E^u$ , respectivamente, en  $x_0$  y poseen dimensiones  $s$  y  $u$ , respectivamente.

Las variedades invariantes locales poseen análogos globales obtenidos al permitir que los puntos en  $W_{loc}^s(x_0)$  fluyan hacia atrás en el tiempo y aquellos en  $W_{loc}^u(x_0)$  fluyan hacia adelante:

$$\begin{aligned} W^s(x_0) &= \bigcup_{t \leq 0} \varphi^t(W_{loc}^s(x_0)) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi^t(x) \rightarrow x_0, \text{ cuando } t \rightarrow +\infty\}, \\ W^u(x_0) &= \bigcup_{t \geq 0} \varphi^t(W_{loc}^u(x_0)) \\ &= \{x \in \mathbb{R}^n : \varphi^t(x) \rightarrow x_0, \text{ cuando } t \rightarrow -\infty\}. \end{aligned}$$

- Observación 2.15.* ■ El teorema 2.1 de la existencia y unicidad de soluciones para un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias implica que dos variedades estables (respectivamente inestables) de dos puntos de equilibrio distintos no se pueden intersectar. Por el mismo argumento, una variedad estable (respectivamente inestable) no se puede intersectar a sí misma.
- En el caso particular de un campo vectorial en  $\mathbb{R}^2$ , puntos atractores hiperbólicos tienen variedades estables de dos dimensiones y sus variedades inestables son de dimensión cero. Para los equilibrios hiperbólicos repulsores la situación se invierte. Los puntos sillas hiperbólicos tienen variedades estables e inestables de una sola dimensión, a veces llamadas separatrices.
  - La intersección de variedades estables con inestables sí puede ocurrir a lo largo de órbitas homoclínicas y heteroclínicas. Daremos más detalles sobre órbitas homoclínicas y heteroclínicas en la sección 2.2.5.

### 2.1.5. Aplicación de retorno de Poincaré y estabilidad de ciclos

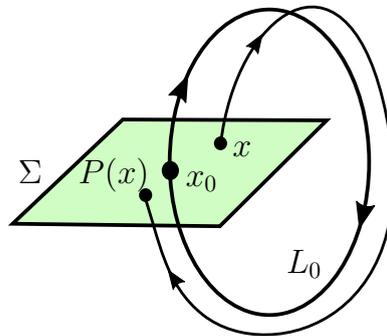


FIGURA 2.5: Aplicación de retorno de Poincaré asociado a un ciclo.

Considere un flujo  $\varphi^t$  definido por el campo de vectores (2.1), con  $f \in C^k$ ,  $k \geq 1$ . Supongamos que (2.1) tiene una órbita periódica  $L_0$ . Sea  $x_0 \in L_0$  e introduzcamos una sección transversal  $\Sigma$  al ciclo en el punto  $x_0$  (ver figura 2.5). La sección transversal  $\Sigma$  es una hipersuperficie suave de dimensión  $n - 1$ , intersectando a  $L_0$  en un ángulo distinto de cero. Como la dimensión de  $\Sigma$  es una menos que la dimensión del espacio de estados, se dice que la hipersuperficie  $\Sigma$  es de “codimensión” uno, es decir,  $\text{codim } \Sigma = 1$ . Sin pérdida de generalidad, supongamos que  $\Sigma$  está definido cerca del punto  $x_0$  por el conjunto de nivel cero de una función escalar suave  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $g(x_0) = 0$ ,

$$\Sigma = \{x \in \mathbb{R}^n : g(x) = 0\} = g^{-1}(0).$$

Consideremos ahora las órbitas de (2.1) cerca del ciclo  $L_0$ . El ciclo en sí es una órbita que comienza en un punto en  $\Sigma$  y vuelve a  $\Sigma$  en el mismo punto ( $x_0 \in \Sigma$ ). Por la dependencia suave de las órbitas con respecto a sus condiciones iniciales (teorema 2.1), una órbita comenzando en un punto  $x \in \Sigma$  suficientemente cerca de  $x_0$ , también vuelve a  $\Sigma$  en algún punto  $\tilde{x} \in \Sigma$  cerca de  $x_0$ . Además, las órbitas cercanas también intersectan  $\Sigma$  transversalmente. Por lo tanto, definimos un mapeo  $P : \Sigma \rightarrow \Sigma$ ,

$$x \mapsto P(x) = \tilde{x},$$

llamado la aplicación de retorno de Poincaré asociada al ciclo  $L_0$ .

El mapeo de Poincaré  $P$ , definido localmente, es tan suave como el lado derecho de (2.1), y es invertible cerca de  $x_0$ . La invertibilidad se desprende de la invertibilidad del flujo definido por (2.1). El mapeo inverso  $P^{-1} : \Sigma \rightarrow \Sigma$  se puede construir mediante la extensión de las órbitas que cruzan  $\Sigma$  hacia atrás en el tiempo hasta llegar a su intersección anterior con la sección transversal. El punto de intersección  $x_0$  es un punto fijo del mapeo de Poincaré:  $P(x_0) = x_0$ .

Se puede demostrar que la estabilidad del ciclo  $L_0$  es equivalente a la estabilidad del punto fijo  $x_0$  del mapeo de Poincaré  $P$  [29].

Sea  $DP(x_0)$  la matriz Jacobiana de  $P$  (de tamaño  $(n-1) \times (n-1)$ ) evaluada en  $x_0$ . Los valores propios  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$  de  $DP(x_0)$  son llamados multiplicadores del punto fijo. Notemos que no hay multiplicadores nulos, debido a la invertibilidad de  $P$ . Sean  $n_-, n_0$ , y  $n_+$  el número de multiplicadores de  $x_0$  situados en el interior, sobre y fuera del círculo unitario  $\{\mu \in \mathbb{C} : |\mu| = 1\}$ , respectivamente.

El punto fijo  $x_0$  se llama hiperbólico si  $n_0 = 0$ , es decir, si no hay multiplicadores en el círculo unitario. El punto fijo  $x_0$  hiperbólico se dice

- (i) repulsor si  $n_+ = n - 1$  y  $n_- = 0$ ,
- (ii) atractor si  $n_+ = 0$  y  $n_- = n - 1$ ,
- (iii) silla hiperbólica si  $n_- \cdot n_+ \neq 0$ .

Luego, por lo tanto, el ciclo  $L_0$  es estable si todos los valores propios (multiplicadores)  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$  de la matriz Jacobiana de  $P$ ,

$$A = \left. \frac{dP}{d\xi} \right|_{\xi=0},$$

se encuentran dentro del círculo unitario  $|\mu| = 1$ .

Se puede demostrar que los multiplicadores  $\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_{n-1}$  de la matriz Jacobiana  $A$  del mapeo de Poincaré  $P$  asociado con un ciclo  $L_0$  son independientes de la elección punto  $x_0$  en  $L_0$ , la sección transversal  $\Sigma$ , y las coordenadas locales en él [29].

### 2.1.6. Teoría de la Variedad central

La teoría de la variedad central puede ser usualmente utilizada para simplificar el estudio de equilibrios no-hiperbólicos. La motivación de esta teoría es estudiar qué ocurre cerca de un punto de equilibrio de un campo de vectores, en donde su matriz Jacobiana asociada tiene un valor propio nulo, ya que, en este caso no podemos aplicar el teorema de Hartman-Grobman 2.13.

Como se mencionó anteriormente, para el sistema lineal (2.7) hay subespacios invariantes  $E^s$ ,  $E^u$  y  $E^c$ . Estos subespacios corresponden a los espacios propios generados por los vectores propios, que a su vez corresponden a los valores propios con parte real negativa, positiva, y cero, respectivamente.

Para simplificar el análisis podemos suponer que  $E^u = \{0\}$ , entonces nos encontramos con que cualquier órbita del sistema decaerá exponencialmente a  $E^c$  a medida que  $t \rightarrow +\infty$ . Así, para los sistemas no lineales, si estamos interesados en el comportamiento a largo plazo, sólo tenemos que estudiar los sistemas restringidos a  $E^c$ . Esa es una de las razones principales para introducir el concepto de variedad central. Consideremos ahora el sistema

$$\begin{cases} \dot{x} = Ax + f(x, y), \\ \dot{y} = By + g(x, y), \end{cases} \quad (2.9)$$

en donde  $(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$ ,  $A, B$  son matrices constantes tales que todos los valores propios de  $A$  tienen parte real cero y todos los de  $B$  tienen parte real negativa.  $f$  y  $g$  son  $C^r$  ( $r \geq 2$ ) funciones vectoriales con

$$\begin{aligned} f(0, 0) &= 0, & Df(0, 0) &= 0, \\ g(0, 0) &= 0, & Dg(0, 0) &= 0. \end{aligned} \tag{2.10}$$

Esto implica que el origen  $(0, 0) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s$  es un equilibrio no-hiperbólico del sistema (2.9).

**Definición 2.16.** Una variedad invariante local es llamada una variedad central local del origen para (2.9) si se puede representar por

$$W_{loc}^c(0) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^c \times \mathbb{R}^s : y = h(x), |x| < \delta, h(0) = 0, Dh(0) = 0\},$$

para  $\delta > 0$  pequeño, donde  $h : \mathbb{R}^c \rightarrow \mathbb{R}^s$  es una función de clase  $C^k$ , donde  $|\cdot|$  es la norma en  $\mathbb{R}^c$ .

*Observación 2.17.* (i) El hecho de que  $h(0) = 0$  y  $Dh(0) = 0$  nos garantiza que la variedad central  $W^c(0)$  es tangente al espacio propio central  $E^c$  en el origen.

(ii) Debido a su invarianza, el conjunto  $W_{loc}^c(0)$  puede ser extendido al resto del espacio de fase como la variedad central global  $W^c(0)$  al permitir que cualquier punto inicial en  $W_{loc}^c(0)$  evolucione de acuerdo al flujo para todo tiempo  $t$  [8].

El Teorema de la variedad central [10, 26, 27, 29] asegura la existencia de una variedad central local invariante  $c$ -dimensional  $W_{loc}^c(0)$ , que es tangente en 0 al al espacio lineal  $E^c(0)$  asociado al valor propio 0. El conjunto  $W_{loc}^c(0)$  es una  $C^{(r-1)}$ -variedad, con tal que  $r < \infty$ . El comportamiento asintótico de las órbitas que convergen a 0 está dominado por la menor tasa de convergencia, la cual está asociada al valor propio cero. Por lo tanto, entre las órbitas que convergen a 0, casi todas ellas se acercan al equilibrio tangente a  $W^c(0)$ . Las excepciones son aquellas trayectorias que convergen a 0 a tasas exponenciales dadas por  $Re(\lambda_1), \dots, Re(\lambda_s) < 0$ , donde  $\lambda_1, \dots, \lambda_s$  son los valores propios asociados a  $E^s$ . Este conjunto de órbitas especiales forman una única  $C^r$ -variedad invariante  $s$ -dimensional (tangente a  $E^s(0)$  en 0), referido como la variedad estable de 0 como en el caso hiperbólico, por lo tanto, denotada igualmente por  $W^s(0)$  [26, 27]. A diferencia de  $W^s(0)$ , la variedad central  $W^c(0)$  puede no estar únicamente definida. Sin embargo, la serie de Taylor en 0, de cualesquiera dos variedades

centrales, coinciden en todos los órdenes (finitos); esto es, cualesquiera dos variedades centrales de 0 están arbitrariamente cerca una de la otra, cerca de 0, y difieren sólo por algunos términos trascendentales. Además, si hay más de una variedad central, todas las posibles restricciones del flujo  $\varphi^t$  a  $W^c(0)$  son suavemente localmente equivalentes [10, 26, 29].

### 2.1.7. Blowing-up en $\mathbb{R}^2$

Si nos encontramos con un campo de vectores  $X$  cuya linealización en un punto de equilibrio  $x_0$  es hiperbólica, podemos utilizar el Teorema de Hartman-Grobman para determinar su tipo topológico. Si  $DX(x_0)$  tiene algún valor propio (no todos) con parte real nula, se dice que el campo es parcialmente hiperbólico en  $x_0$ , y podemos utilizar el Teorema de la Variedad Central. Sin embargo, puede ocurrir la situación en donde todos los valores propios tienen parte real cero. Para este último caso tenemos la técnica del *blowing-up*, la cual involucra cambios de coordenadas que expanden (“Blow-up”) un punto de equilibrio no-hiperbólico en una curva en la cual existen equilibrios. El tipo topológico de cada uno de estos equilibrios puede ser determinado utilizando el teorema de Hartman-Grobman en el caso de ser hiperbólicos. Los cambios de coordenadas utilizados son singulares en el punto de equilibrio  $x_0$ , ya que la transformación envía una curva en un punto. En todo otro punto, sin embargo, las transformaciones actúan como difeomorfismos. Mostraremos el blow-up direccional, el cual es el que utilizaremos en el análisis de nuestro modelo en el capítulo 4.

#### 2.1.7.1. Blowing-up direccional

Consideremos el campo de vectores

$$\begin{cases} \dot{x} = X_1(x, y), \\ \dot{y} = X_2(x, y); \end{cases} \quad (2.11)$$

con  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ , y el cambio de coordenadas  $(u, v) \rightarrow (x, y)$  dado por el operador  $\Psi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que

$$\Psi(u, v) = (u, uv) = (x, y). \quad (2.12)$$

Lo que hace este cambio de coordenadas es “abrir” el origen  $(x, y) = (0, 0)$  al eje vertical  $\{u = 0\}$ . Restringiéndonos a  $u > 0$ ,  $\Psi$  nos da un difeomorfismo en el semiespacio  $x > 0$ . El cambio de coordenadas dado en (2.12) es llamado *blowing-up en la dirección x (o blow-up horizontal)*, ya que conduce a información sobre la singularidad en el eje  $x$  positivo y no entrega información sobre comportamientos tangenciales al eje vertical por el origen.

En las coordenadas  $(u, v)$ , el sistema cartesiano (2.11) se convierte en

$$\begin{aligned} \dot{u} &= \tilde{X}_1(u, v) = X_1(u, uv) \\ \dot{v} &= \tilde{X}_2(u, v) = \frac{1}{u}[X_2(u, uv) - vX_1(u, uv)]. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Al expandir (2.13) aparece el factor  $|u|^k$ , el cual se puede eliminar mediante un reescalamiento del tiempo del campo, dado por  $t \rightarrow t/|u|^k$ .

Se puede derivar una transformación similar para proporcionar un blow-up en la dirección  $y$ . El cambio de coordenadas es dado por el operador  $\bar{\Psi} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ , tal que

$$\bar{\Psi}(u, v) = (uv, v) = (x, y), \quad (2.14)$$

y el campo de vectores transformado es dado por

$$\begin{cases} \bar{X}_1(u, v) &= \frac{1}{v}[X_1(uv, v) - uX_2(uv, v)], \\ \bar{X}_2(u, v) &= X_2(uv, v). \end{cases} \quad (2.15)$$

Otro tipo de blow-up conocido es el polar, el cual se puede considerar como “abrir” el origen del plano al círculo  $r = 0$ , para más detalle ver [4].

## 2.2. Bifurcaciones de campos de vectores

### 2.2.1. Bifurcaciones y diagramas de bifurcación

Consideremos un campo vectorial que depende de parámetros como

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad (2.16)$$

donde  $x \in \mathbb{R}^n$  y  $\alpha \in \mathbb{R}^m$  representan variables de fase y parámetros, respectivamente. Considere el retrato de fase del sistema (si es necesario, uno puede considerar el retrato de fase en una región dependiente de un parámetro  $U_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ ). Si permitimos que los parámetros varíen, entonces podemos esperar que el retrato de fase también varíe. Hay dos posibilidades: o el sistema permanece topológicamente equivalente al original, o bien su topología cambia.

**Definición 2.18.** La aparición de un retrato de fase topológicamente no equivalente bajo variación de parámetros se llama una bifurcación.

Así, una bifurcación es un cambio del tipo topológico del sistema cuando sus parámetros pasan a través de un valor de bifurcación.

**Definición 2.19.** Un diagrama de bifurcación del sistema dinámico es una partición de su espacio de parámetros inducido por una equivalencia topológica, junto con los retratos de fase representativos de cada clase de esta partición.

Notemos que el diagrama de bifurcación depende, en general, en la región de espacio de fase considerado.

*Observación 2.20.* Si un sistema dinámico tiene un espacio de fase de una o dos dimensiones y depende de un solo parámetro, su diagrama de bifurcación puede ser visualizado como el producto directo de los espacios de fase y de parámetros,  $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}$  con los retratos de fase representados por “rebanadas” de dimensión  $k = 1$  (o 2 respectivamente), para valores fijos de  $\alpha$ .

Consideremos, por ejemplo, un sistema escalar

$$\dot{x} = \alpha x - x^3, \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}.$$

Su diagrama de bifurcación se muestra en la figura 2.6. Este sistema tiene un equilibrio  $x_0 = 0$  para todo  $\alpha$ . Este equilibrio es estable para  $\alpha < 0$  e inestable para  $\alpha > 0$  ( $\alpha$  es el valor propio de este equilibrio). Para  $\alpha > 0$ , hay dos equilibrios adicionales ramificándose desde el origen (es decir,  $x_{1,2} = \pm\sqrt{\alpha}$ ) que son estables. Esta bifurcación es a menudo llamada bifurcación de Pitchfork o tridente, la razón de este nombre queda inmediatamente clara si uno observa el diagrama de bifurcación del sistema presentado en el plano  $(\alpha, x)$ . Notemos que el sistema que muestra la bifurcación tridente es invariante bajo la transformación  $x \mapsto -x$ .

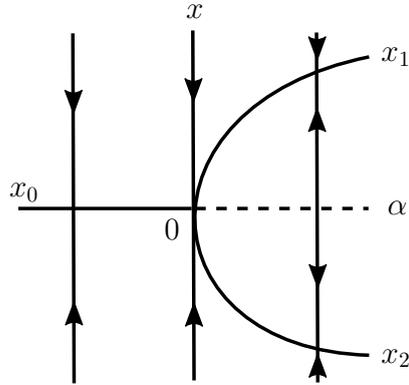


FIGURA 2.6: Bifurcación de Pitchfork.

En los casos más simples, el retrato paramétrico está compuesto por un número finito de regiones abiertas en el espacio de parámetros  $\mathbb{R}^m$ . Dentro de cada región abierta el retrato de fase es topológicamente equivalente. Estas regiones están separadas por *fronteras de bifurcación* o *conjuntos de bifurcación*, que son subvariedades suaves en  $\mathbb{R}^m$  (es decir, curvas, superficies). Los conjuntos de bifurcación se pueden intersectar, o encontrar. Estas intersecciones subdividen los límites en subregiones, y así sucesivamente. Un conjunto de bifurcación se define mediante la especificación de un objeto de fase (equilibrio, ciclo, etc.) y algunas *condiciones de bifurcación* que determinan el tipo de su bifurcación.

Diremos que la codimensión de una bifurcación en el sistema (2.16) es el número de condiciones independientes que determinan la bifurcación. Análogamente, corresponde al número mínimo de parámetros necesarios para describir todos los posibles retratos de fase no equivalentes cerca de esta bifurcación.

En lo que sigue, diremos que una *Forma normal topológica* de (2.16) es un sistema

$$\dot{\xi} = g(\xi, \beta), \quad \xi \in \mathbb{R}^n, \quad \beta \in \mathbb{R}^k, \quad k < m, \quad (2.17)$$

topológicamente equivalente a (2.16), en donde solo permanecen explícitamente los términos relevantes para explicar una bifurcación. Un tratamiento más riguroso de la teoría de formas normales puede ser revisado en [4, 26, 29].

### 2.2.2. Bifurcaciones locales de equilibrios

### 2.2.3. Bifurcación Silla-nodo

Consideremos el siguiente campo vectorial unidimensional dependiente de un parámetro:

$$\dot{x} = \alpha + x^2 \equiv f(x, \alpha), \tag{2.18}$$

el cual es una de las posibles formas normales de una bifurcación silla-nodo.

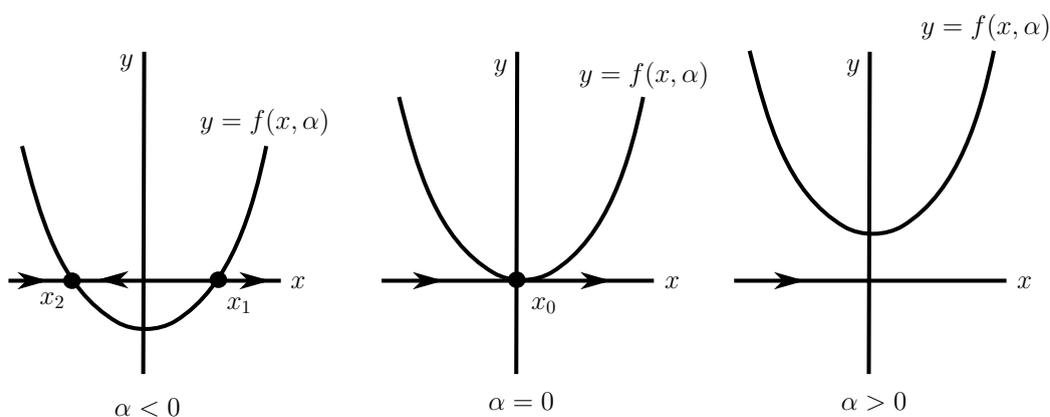


FIGURA 2.7: Bifurcación silla-nodo.

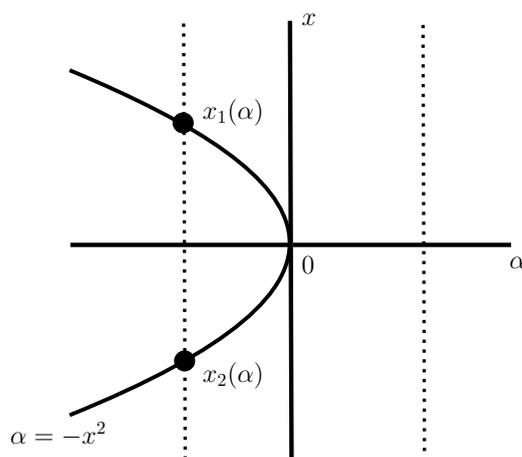


FIGURA 2.8: Bifurcación silla-nodo en el espacio de fase-parámetros.

En  $\alpha = 0$ , este sistema tiene un equilibrio no hiperbólico  $x_0 = 0$  con  $\lambda = f_x(0, 0) = 0$ . El comportamiento del sistema para todos los demás valores de  $\alpha$  también es evidente

(ver figura 2.7). Para  $\alpha < 0$  existen dos equilibrios en el sistema:  $x_{1,2}(\alpha) = \pm\sqrt{-\alpha}$ , donde el de la izquierda es estable, mientras que el de la derecha es inestable. Para  $\alpha > 0$  no existen equilibrios en el sistema. A medida que  $\alpha$  cruza el cero desde valores negativos a valores positivos, los dos equilibrios (estable e inestable) “colisionan”, formando en  $\alpha = 0$  un equilibrio con  $\lambda = 0$ , y luego desaparece. Esta es una bifurcación silla-nodo. El término “colisión” es apropiado, ya que la velocidad de aproximación ( $\frac{d}{d\alpha}x_{1,2}(\alpha)$ ) de los equilibrios tiende a infinito a medida que  $\alpha \rightarrow 0$ . Hay otra manera de presentar esta bifurcación: trazando un diagrama de bifurcación en el producto directo de los espacios de fase y de parámetros (simplemente, el plano  $(\alpha, x)$ ). La ecuación  $f(x, \alpha) = 0$  define una variedad de equilibrio, la cual es simplemente la parábola  $\alpha = -x^2$  (ver figura 2.8). Al fijar algún  $\alpha$ , podemos determinar fácilmente el número de equilibrios en el sistema para este valor del parámetro. La proyección de la variedad de equilibrio en el eje de parámetros tiene una singularidad del tipo silla en  $(\alpha, x) = (0, 0)$ .

*Observación 2.21.* El sistema  $\dot{x} = \alpha - x^2$  se puede considerar de la misma manera. El análisis revela que aparecen dos equilibrios para  $\alpha > 0$ .

En dimensiones mayores tenemos que esta bifurcación ocurre prácticamente de la misma manera. Como el modelo que presentaremos en el capítulo 4 es bidimensional veamos qué ocurre en  $\mathbb{R}^2$ :

Un campo  $\dot{\mathbf{x}} = f(\mathbf{x}, \alpha)$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^2$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}$ , que en  $\alpha^* = 0$  tiene un equilibrio  $x_0 = (0, 0)$  con valores propios  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 < 0$  tal que pasa por una bifurcación silla nodo es localmente topológicamente equivalente a la forma normal

$$\begin{cases} \dot{u} &= \alpha + \sigma u^2 \\ \dot{v} &= -v, \end{cases}$$

con  $\sigma = \pm 1$ . Por ejemplo, se obtiene el diagrama de bifurcación mostrado en la figura (2.9) para  $\sigma = 1$ . En él vemos que un equilibrio silla y un equilibrio atractor que existen para  $\alpha < 0$  colisionan en  $\alpha = 0$  y desaparecen para  $\alpha > 0$ .

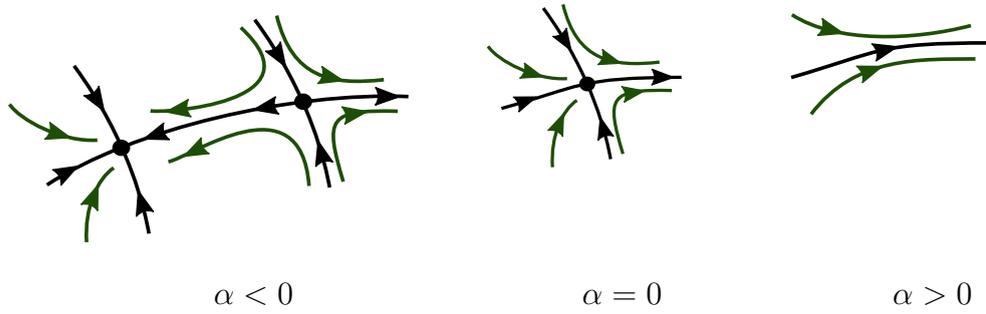


FIGURA 2.9: Retrato de fase bifurcación silla-nodo en  $\mathbb{R}^2$  para  $\sigma = 1$ .

### 2.2.4. Bifurcación de Hopf

Las posibles formas normales para una bifurcación de Hopf son:

$$\begin{pmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + s(x_1^2 + x_2^2) \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}, \quad (2.19)$$

con  $s = \pm 1$ . En el caso  $s = -1$ , consideremos el siguiente campo de vectores en  $\mathbb{R}^2$ :

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 - x_1(x_1^2 + x_2^2); \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha_2 x_2 - x_2(x_1^2 + x_2^2); \end{cases} \quad (2.20)$$

donde  $\alpha \in \mathbb{R}$ . Este campo tiene el punto de equilibrio  $(x_1, x_2) = (0, 0)$  para todo  $\alpha$ , con matriz Jacobiana

$$A = \begin{pmatrix} \alpha & -1 \\ 1 & \alpha \end{pmatrix},$$

teniendo valores propios  $\lambda_{1,2} = \alpha \pm i \in \mathbb{C}$ . Es claro que sí  $\alpha = 0$  entonces el equilibrio  $(0, 0)$  no es hiperbólico. Ahora realicemos un cambio de variables complejo dado por  $z = x_1 + ix_2$ , obteniendo que esta nueva variable satisface

$$\dot{z} = \alpha(x_1 + ix_2) + i(x_1 + ix_2) - (x_1 + ix_2)(x_1^2 + x_2^2),$$

y podemos por lo tanto escribir el sistema (2.20) en la siguiente forma compleja:

$$\dot{z} = \dot{x}_1 + i\dot{x}_2 = (\alpha + i)z - z|z|^2. \tag{2.21}$$

Finalmente, usando la representación  $z = \rho e^{i\varphi}$ , obtenemos  $\dot{z} = \rho e^{i\varphi}(\alpha + i - \rho^2)$ , lo cual nos entrega la forma polar del campo (2.20):

$$\begin{cases} \dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2); & \rho > 0 \\ \dot{\varphi} = 1; & 0 \leq \varphi < 2\pi. \end{cases} \tag{2.22}$$

Las bifurcaciones del retrato de fase del sistema (2.22) a medida que  $\alpha$  pasa a través de cero pueden ser fácilmente analizados utilizando la forma polar, ya que las ecuaciones para  $\rho$  y  $\varphi$  en (2.22) están desacopladas. La primera ecuación (que debe ser considerada solamente para  $\rho \geq 0$ ) tiene el punto de equilibrio  $\rho = 0$  para todos los valores de  $\alpha$ . El equilibrio es linealmente estable si  $\alpha < 0$ ; que se mantiene estable en  $\alpha = 0$ , pero de forma no lineal; para  $\alpha > 0$  el equilibrio se vuelve linealmente inestable. Además, existe un punto de equilibrio estable adicional  $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$  para  $\alpha > 0$ . La segunda ecuación describe una rotación con velocidad constante. Por lo tanto, por superposición de los movimientos definidos por las dos ecuaciones de (2.22), obtenemos el retrato de fase de la figura 2.10 para el sistema bidimensional original (2.20). El sistema siempre tiene un equilibrio en el origen. Este equilibrio es un foco estable para  $\alpha < 0$  y un foco inestable para  $\alpha > 0$ . En el valor de parámetro crítico  $\alpha = 0$  el equilibrio es estable no hiperbólico y topológicamente equivalente al foco. Este equilibrio está rodeado, para  $\alpha > 0$ , por una órbita cerrada aislada (ciclo límite) que es única y estable. El ciclo es un círculo de radio  $\rho_0(\alpha) = \sqrt{\alpha}$ . Decimos que ha ocurrido una bifurcación de Hopf supercrítica.

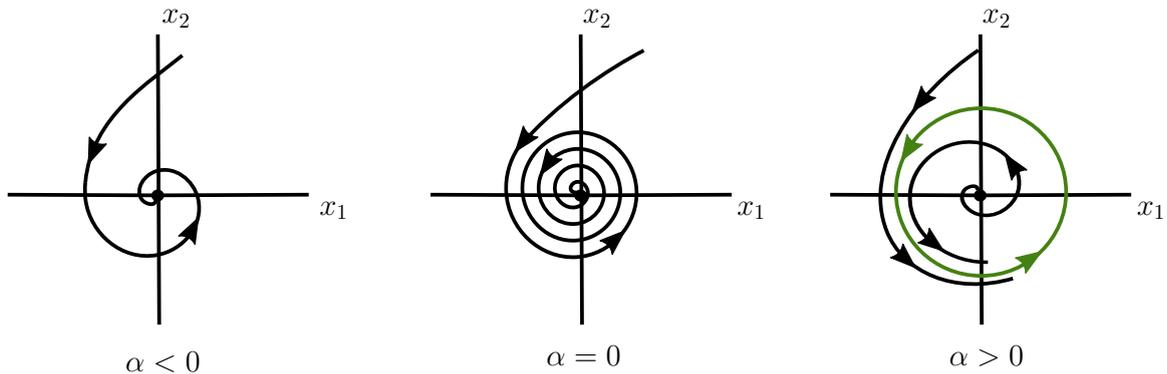


FIGURA 2.10: Retrato de fase para la bifurcación de Hopf supercrítica.

Un campo que tiene los términos no lineales de la ecuación (2.20) con signo opuesto,

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = \alpha x_1 - x_2 + x_1(x_1^2 + x_2^2); \\ \dot{x}_2 = x_1 + \alpha x_2 + x_2(x_1^2 + x_2^2); \end{cases} \quad (2.23)$$

posee la siguiente forma compleja:

$$\dot{z} = (\alpha + i)z + z|z|^2,$$

y puede ser analizado de la misma forma. El sistema (2.23) pasa por una bifurcación de Hopf en  $\alpha = 0$ , pero contrario al campo (2.20), existe un ciclo límite inestable para  $\alpha < 0$ , el cual desaparece cuando  $\alpha$  cruza el origen desde valores negativos a positivos. El equilibrio en el origen tiene la misma estabilidad para  $\alpha \neq 0$  como en el campo (2.20): es estable para  $\alpha < 0$  e inestable para  $\alpha > 0$ . Su estabilidad en el valor de parámetro crítico es opuesta a la de (2.20): es inestable no hiperbólico en  $\alpha = 0$  (ver figura 2.11). En este caso se dice que es una bifurcación de Hopf subcrítica.

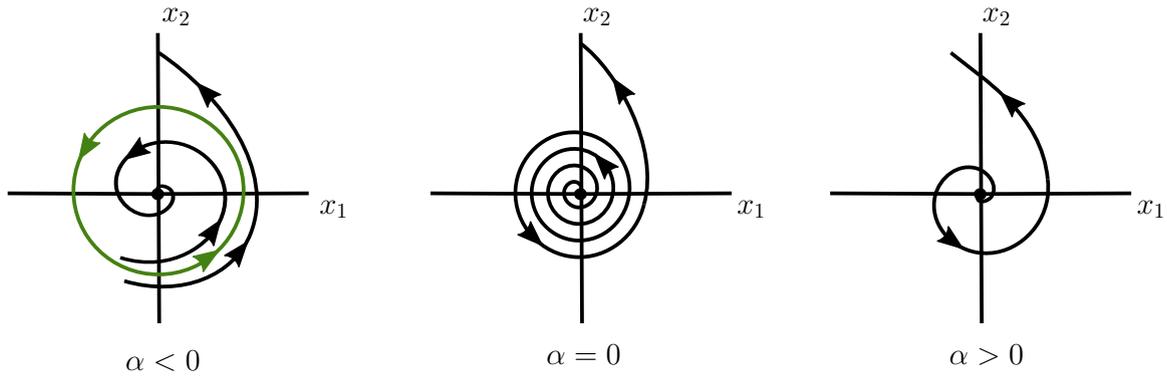


FIGURA 2.11: Retrato de fase para la bifurcación de Hopf subcrítica.

*Observación 2.22.* En ambos casos (supercrítica y subcrítica) la bifurcación de Hopf involucra una pérdida de estabilidad local del equilibrio en  $\alpha = 0$  a medida que  $\alpha$  crece.

### 2.2.5. Bifurcación de órbitas homoclínicas

Considere un flujo  $\varphi^t$  definido por un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias

$$\dot{x} = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n, \quad (2.24)$$

donde  $f$  es suave. Sean  $x_0$ ,  $x_{(1)}$ , y  $x_{(2)}$  equilibrios del sistema.

**Definición 2.23.** Una órbita  $\Gamma_0$  comenzando en un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  se llama homoclínica al punto de equilibrio  $x_0$  del sistema (2.24) si  $\varphi^t(x) \rightarrow x_0$  cuando  $t \rightarrow \pm\infty$ .

**Definición 2.24.** Una órbita  $\Gamma_0$  comenzando en un punto  $x \in \mathbb{R}^n$  se llama heteroclínica a los puntos de equilibrio  $x_{(1)}$  y  $x_{(2)}$  del sistema (2.24) si  $\varphi^t(x) \rightarrow x_{(1)}$  cuando  $t \rightarrow -\infty$  y  $\varphi^t(x) \rightarrow x_{(2)}$  cuando  $t \rightarrow +\infty$ .

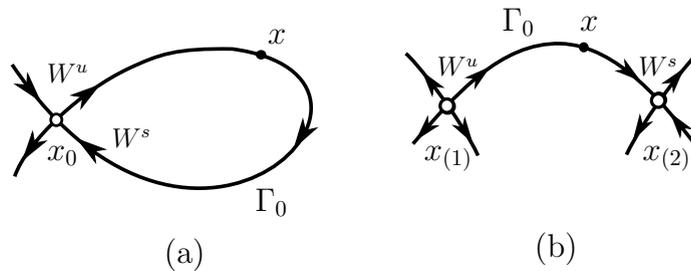


FIGURA 2.12: (a) Órbita homoclínica en el plano, (b) órbita heteroclínica en el plano.

La figura 2.12 muestra ejemplos de órbitas homoclínica y heteroclínica a puntos sillas en  $\mathbb{R}^2$  en los paneles (a) y (b) respectivamente.

Está claro que una órbita homoclínica  $\Gamma_0$  al equilibrio  $x_0$  pertenece a la intersección de sus variedades inestables y estables:  $\Gamma_0 \subset W^u(x_0) \cap W^s(x_0)$ . Similarmente, una órbita heteroclínica  $\Gamma_0$  a los equilibrios  $x_{(1)}$  y  $x_{(2)}$  satisface  $\Gamma_0 \subset W^u(x_{(1)}) \cap W^s(x_{(2)})$ .

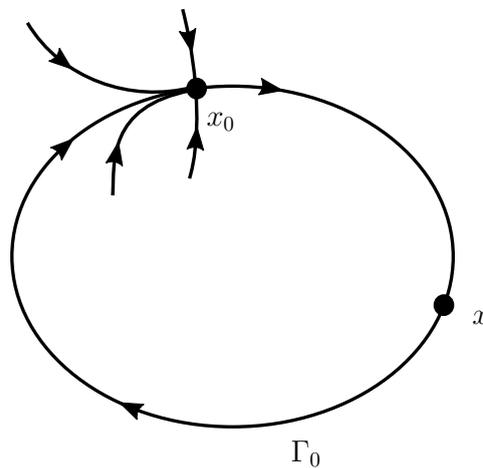


FIGURA 2.13: Órbita homoclínica  $\Gamma_0$  a un equilibrio silla-nodo.

Debe tenerse en cuenta que las definiciones anteriores no requieren que los equilibrios sean hiperbólicos. La figura 2.13 muestra, por ejemplo, una órbita homoclínica a un punto silla-nodo con un valor propio  $\lambda_1 = 0$  y  $\lambda_2 < 0$ .

Dado que una conexión homoclínica o heteroclínica es la intersección de variedades estable e inestable, por el teorema de unicidad de soluciones (teorema 2.1), estas intersecciones de variedades ocurren de manera no transversal. Por lo tanto, cualquier perturbación del sistema provocará que esta intersección se rompa. Luego, las órbitas homoclínicas son estructuralmente inestables.

Para efecto de esta tesis, consideremos un sistema planar

$$\dot{x} = f(x, \beta), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (2.25)$$

tal que para  $\beta = 0$  tiene una órbita homoclínica a una silla  $x_0$ . Lo que ocurre en esta bifurcación es el rompimiento de la órbita homoclínica  $\Gamma_0$  “hacia arriba” o “hacia abajo”, formando un ciclo límite  $L_\beta$ , como se muestra en las figuras 2.14 y 2.15. Veremos esta bifurcación con más detalle en el apéndice A.3.

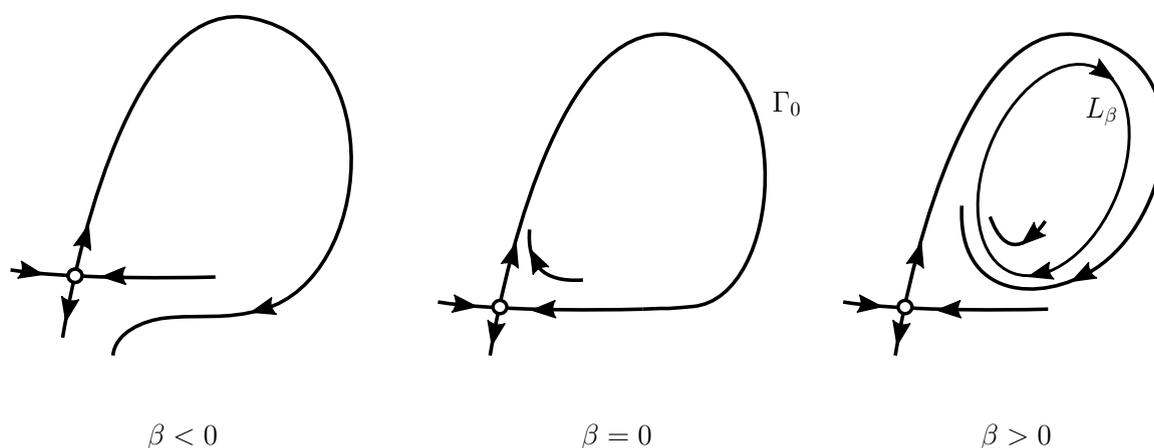


FIGURA 2.14: Bifurcación homoclínica en el plano. La conexión existe para  $\beta = 0$ . Para  $\beta > 0$  aparece un ciclo  $L_\beta$  estable.

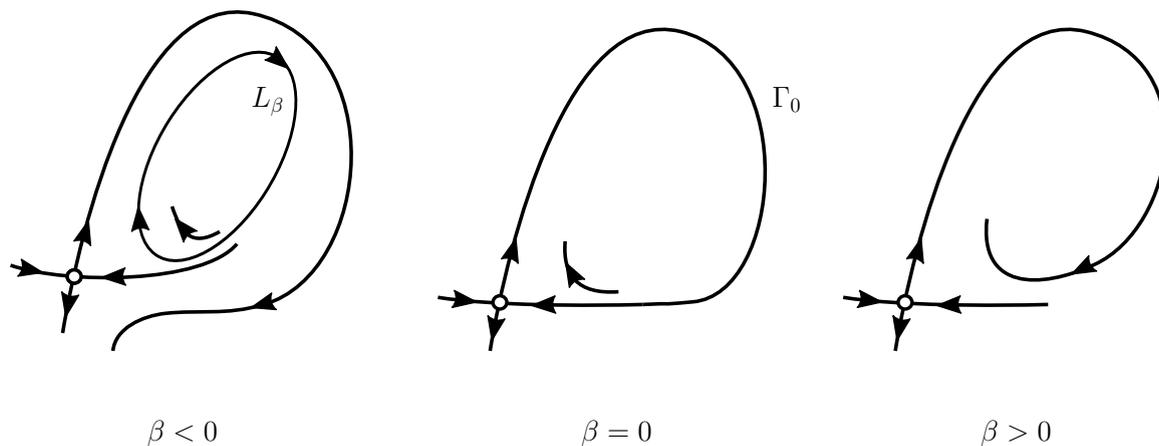


FIGURA 2.15: Bifurcación homoclínica en el plano. La conexión existe para  $\beta = 0$ . Para  $\beta < 0$  aparece un ciclo  $L_\beta$  inestable.

### 2.2.6. Bifurcación Bogdanov-Takens

Una de las posibles formas normales de una bifurcación Bogdanov-Takens es [14, 29]

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 = \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 = \beta_1 + \beta_2 \xi_1 + \xi_1^2 + s \xi_1 \xi_2, \end{cases} \quad (2.26)$$

donde  $s = \pm 1$ . Tomemos  $s = -1$  y consideremos el sistema:

$$\begin{cases} \dot{\eta}_1 = \eta_2, \\ \dot{\eta}_2 = \beta_1 + \beta_2 \eta_1 + \eta_1^2 - \eta_1 \eta_2. \end{cases} \quad (2.27)$$

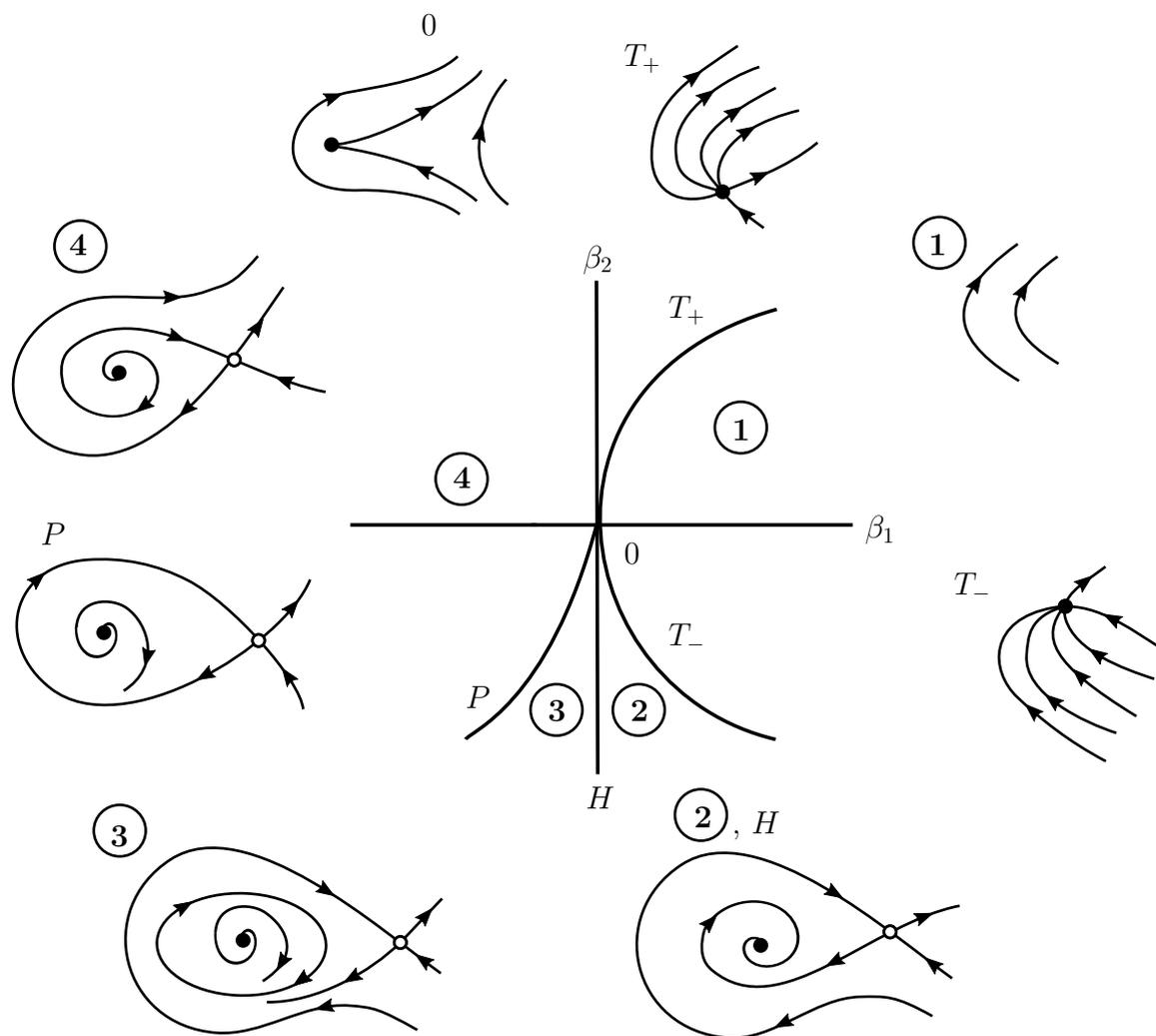


FIGURA 2.16: Diagrama de bifurcación Bogdanov-Takens.

El diagrama de bifurcación del sistema (2.27) se presenta en la figura 2.16. En él vemos que existen distintas curvas de bifurcación: una curva de bifurcación silla-nodo, la cual se divide en dos ramas  $T_-$  y  $T_+$  correspondientes a  $\beta_2 < 0$  y  $\beta_2 > 0$ , respectivamente. También hay una curva de bifurcación de Hopf supercrítica representada por  $H$ , y finalmente una curva de bifurcación homoclínica representada por  $P$ . Estas curvas de bifurcación dividen al plano  $(\beta_1, \beta_2)$  en cuatro regiones distintas. En la región **1** vemos que no hay puntos de equilibrios, luego, en la región **2** vemos que hay dos puntos de equilibrios, un equilibrio estable y un equilibrio silla. En la región **3** aparece un punto de equilibrio silla y un ciclo límite estable rodeando a un equilibrio inestable. Finalmente, en la región **4** vemos que tenemos un equilibrio inestable y un equilibrio silla.

---

El caso  $s = +1$  puede ser tratado de manera similar. Ya que se puede reducir al estudiado mediante la sustitución  $t \mapsto -t$ ,  $\eta_2 \mapsto -\eta_2$ , el retrato paramétrico permanece como estaba, pero el ciclo se convierte en inestable cerca del punto Bogdanov-Takens.

# Capítulo 3

## Dinámica de Poblaciones

En este capítulo se mostrarán herramientas sobre la dinámica de poblaciones. Se definen modelos de poblaciones de crecimiento continuo, el efecto Allee y finalmente modelos para la interacción de dos especies.

### 3.1. Modelos de Crecimiento Continuo

Sea  $x(t)$  el tamaño de una población en el tiempo  $t$ . Entonces la tasa de cambio

$$\frac{dx}{dt} = \text{nacimientos-muertes+migración}, \quad (3.1)$$

puede interpretarse como una ecuación de conservación de la población. Los términos en el lado derecho de (3.1) dependen del fenómeno específico que se está modelando. En la mayoría de los modelos, típicamente no se considera migración o desplazamiento espacial de la población, y los términos de natalidad y mortalidad son proporcionales a  $x$ . Es decir,

$$\frac{dx}{dt} = bx - dx,$$

con lo cual al resolver esta EDO obtenemos:  $x(t) = x_0 e^{(b-d)t}$ , donde  $b$ ,  $d$  son constantes positivas y la población inicial  $x(0) = x_0$ . Así, si  $b > d$  la población crece exponencialmente, pero si  $b < d$  se extingue. Este enfoque, debido a Malthus [33],

actualmente se considera poco realista, pues en la realidad no hay poblaciones que crezcan indefinidamente.

Por lo tanto, en el largo plazo, por supuesto, debe haber algún ajuste a tal crecimiento exponencial. Verhulst ([45, 46]) propuso que debiese operar un mecanismo de auto-limitación cuando una población se vuelve demasiado grande. El sugirió un modelo de la forma:

$$\frac{dx}{dt} = rx\left(1 - \frac{x}{K}\right), \quad (3.2)$$

donde  $r$  y  $K$  son constantes positivas. En este modelo, la tasa de natalidad per cápita es  $r(1 - \frac{x}{K})$ ; es decir, que es dependiente de  $x$ . La constante  $K$  es la *capacidad de carga del medio ambiente*, que normalmente se determina por los recursos disponibles para la supervivencia de la especie.

Hay dos estados estacionarios o estados de equilibrio de (3.2),  $x = 0$  y  $x = K$ , es decir, donde  $dx/dt = 0$ .  $x = 0$  es inestable ya que la linealización sobre él da  $dx/dt \approx rx$ , y así  $x$  crece exponencialmente desde cualquier valor inicial pequeño. El otro equilibrio  $x = K$  es estable: la linealización sobre él da  $d(x - K)/dt \approx -r(x - K)$  y entonces  $x \rightarrow K$  cuando  $t \rightarrow \infty$ . La capacidad de carga  $K$  determina el tamaño de la población del estado estacionario estable, mientras que  $r$  es la tasa de crecimiento intrínseco de la población y nos da una medida en la cual la población alcanza el tamaño estacionario  $x = K$ . Decimos que esta dinámica obtenida en (3.2) representa un *crecimiento logístico*.

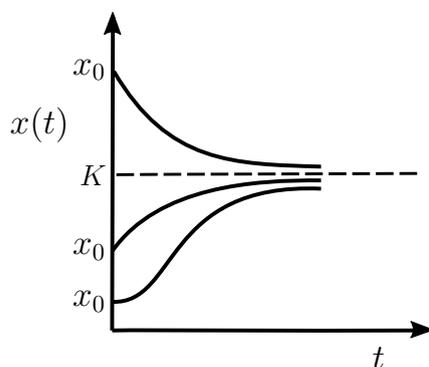


FIGURA 3.1: Crecimiento de población tipo logístico. Notar la diferencia cualitativa para los dos casos  $x_0 < K/2$  y  $K > x_0 > K/2$ .

Si  $x(0) = x_0 \neq 0$ , la solución de (3.2) es

$$x(t) = \frac{x_0 K e^{rt}}{[K + x_0(e^{rt} - 1)]} \rightarrow K \text{ cuando } t \rightarrow \infty, \quad (3.3)$$

y se ilustra en la figura 3.1. A partir de (3.2), si  $x_0 < K$ , la función  $x(t)$  simplemente aumenta monótonamente a  $K$  mientras que si  $x_0 > K$ , la solución  $x(t)$  disminuye monótonamente a  $K$ . En el primer caso hay una diferencia cualitativa dependiendo de si  $x_0 > K/2$  o  $x_0 < K/2$ . Si  $x_0 > K/2$  la solución es cóncava hacia abajo. En cambio, si  $x_0 < K/2$ , la solución posee un punto de inflexión lo que hace que la gráfica cambie de concavidad, en este caso pasa de ser cóncava hacia arriba a ser cóncava hacia abajo.

## 3.2. Efecto Allee

Para explicar la noción de efecto Allee primero consideramos el siguiente ejemplo que ilustra matemáticamente este fenómeno:

**Ejemplo 3.1.** *Efecto Allee en un modelo con crecimiento logístico.*

Consideremos una variante del modelo logístico que incorpore un nuevo factor ( $x - m$ ) dada por:

$$\frac{dx}{dt} = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m)x \quad (3.4)$$

donde  $r$  es el potencial biótico o tasa de crecimiento de la población,  $K$  es la capacidad de carga ambiental. Notemos que, la ecuación (3.4) posee tres puntos de equilibrio: en  $x = 0$ ,  $x = m$  y  $x = K$  (ver figura 3.2), esto hace que si  $x_0 > m$  la población crece monótonamente convergiendo a  $x = K$ , en cambio, si  $x_0 < m$  la población se va a la extinción.

Entonces, el parámetro  $m$  es el mínimo de población viable y representa el nivel de umbral por debajo del cual  $dx/dt < 0$ . El parámetro  $m$  define un umbral que determina la extinción o sobrevivencia de la especie

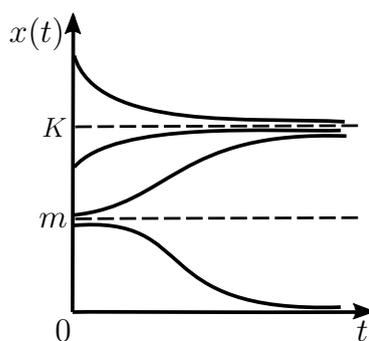


FIGURA 3.2: Forma cualitativa de las soluciones de la ecuación (3.4), en el caso  $m > 0$ .

Consideramos que el factor  $m(x) = (x - m)$  induce una disminución de la tasa de crecimiento a bajas densidades. Este fenómeno se conoce como efecto Allee.

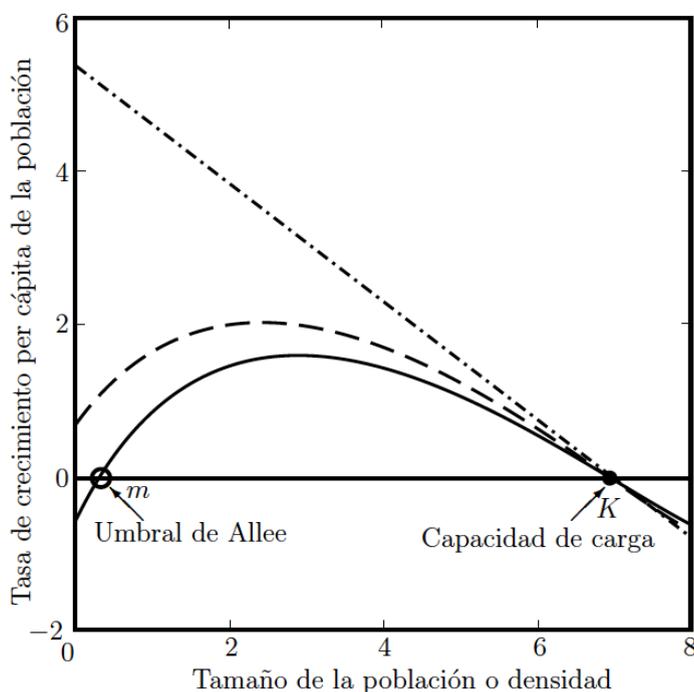


FIGURA 3.3: La tasa de crecimiento per cápita de la población en función del tamaño de la población o la densidad para la dependencia de la densidad negativa (puntos y rayas), efecto Allee débil (línea discontinua) y efecto Allee fuerte (línea sólida).

El efecto Allee se clasifica como fuerte o débil (figura 3.3). Un efecto Allee fuerte resulta en un umbral crítico de población (o umbral de Allee), por debajo del cual la población se va a la extinción, como el del ejemplo 3.1. En (3.4) si  $m > 0$  se tiene efecto Allee fuerte. Por otro lado, la disminución del fitness total (capacidad de un

individuo de reproducirse con cierto genotipo) debido a un efecto Allee débil todavía asegura una tasa de crecimiento per cápita positiva, pero reducida, de poblaciones pequeñas o dispersas. En (3.4) se tiene efecto Allee débil si  $m = 0$ .

Muchos ejemplos del efecto Allee han sido descritos para bajas densidades de población, pero este efecto, puede influir también en un amplio rango de densidades. Las poblaciones pueden exhibir efecto Allee debido a un amplio rango de fenómenos tales como [5, 12]

- Dificultad para encontrar parejas: Es más difícil encontrar a una pareja (compatible y receptiva) a un bajo tamaño o densidad de la población .
- Facilitación de la reproducción: Los individuos tienen menos probabilidades de reproducirse si no perciben a otros con quien reproducirse. Esta situación es más probable de ocurrir en poblaciones pequeñas.
- Comportamiento anti-depredador cooperativo: Los grupos de presas son menos vigilantes y/o menos eficientes en defensa cooperativa cuando la población es pequeña. Por ejemplo: escapar en grupos pequeños es menos eficaz para huir de un depredador.
- Otros perjuicios de un agrupamiento colectivo: a bajas densidades el agrupamiento colectivo es menos eficaz, la termo-regulación social y la resistencia a bajas temperaturas se vuelve menos eficiente.
- Endogamia: Aumento de la tasa de autofecundación y/o el número de apareamientos entre parientes cercanos en poblaciones pequeñas.

Investigación ecológica reciente ha sugerido que dos o más efectos Allee pueden generar mecanismos que actúan simultáneamente en una misma población; la influencia combinada de algunos de estos fenómenos se ha llamado *efecto Allee múltiple* (ver [5]).

Por ejemplo, veamos el siguiente modelo que presenta doble efecto Allee

$$G(x) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) \left(1 - \frac{m+b}{x+b}\right), \quad (3.5)$$

el cual es equivalente a

$$G(x) = \frac{r}{x+b} \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m), \quad (3.6)$$

en donde  $m$  y  $K$  tienen el mismo significado ecológico nombrado anteriormente para el modelo (3.4) y  $b$  es un parámetro que afecta a la forma general de la curva de crecimiento per cápita de la presa en (3.6). La dinámica del modelo (3.6) se aproxima al crecimiento logístico para  $x$  grande, pero si  $x$  es pequeño, los parámetros  $m$  y  $b$  influyen en su dinámica. Tenemos que si  $m > 0$

$$\lim_{x \rightarrow 0} G(x) = -\infty,$$

lo que impone altas tasas de extinción en pequeñas poblaciones. Para mayor detalle ver [7].

Esta forma de efecto Allee será la utilizada en el modelo a estudiar en el capítulo 4.

### 3.3. Modelos para la interacción de poblaciones

Cuando interactúan especies, la dinámica de población de cada especie se ve afectada. En general, existe toda una red de especies que interactúan, a veces llamado una cadena trófica, lo que hace a las comunidades estructuralmente complejas. Aquí consideramos los sistemas que implican dos especies.

Hay tres tipos principales de interacción [17, 35]

- (i) Si la tasa de crecimiento de una población decrece y la tasa de crecimiento de la otra aumenta las poblaciones están en una situación *depredador-presa*. Típicamente, la especie depredadora se alimenta de la especie presa.
- (ii) Si la tasa de crecimiento de ambas poblaciones decrece entonces tenemos *competencia* de las especies.
- (iii) Si la tasa de crecimiento de cada población aumenta entonces se llama *mutualismo o simbiosis*.

En esta tesis nos concentraremos en interacciones del tipo depredador-presa.

### 3.3.1. Sistemas de Lotka-Volterra

Volterra [47] propuso primero un modelo simple para la depredación de una especie por otra, para explicar los niveles de oscilación de ciertas capturas de pescado en el mar Adriático. Si  $x(t)$  es la población de presas e  $y(t)$  la del depredador en el tiempo  $t$  entonces el modelo de Volterra es

$$\dot{x} = ax - bxy, \quad (3.7)$$

$$\dot{y} = cxy - dy, \quad (3.8)$$

donde  $a$ ,  $b$ ,  $c$  y  $d$  son constantes positivas.

Los supuestos del modelo son:

- (i) La presa en ausencia de cualquier depredación crece ilimitadamente de una forma Malthusiana; este es el término  $ax$  en (3.7).
- (ii) El efecto de la depredación es reducir la tasa de crecimiento per cápita de la presa por un término proporcional a las poblaciones de presas y depredadores; este es el término  $-bxy$ .
- (iii) En la ausencia de presas para el sustento la tasa de muerte del depredador resulta en un decaimiento exponencial, es decir, el término  $-dy$  en (3.8).
- (iv) La contribución de la presa a la tasa de crecimiento de los depredadores es  $cxy$ ; es decir, es proporcional a las presas disponibles, así como con el tamaño de la población de depredadores.

Los términos  $xy$  pueden ser considerados como representantes de la conversión de la energía de una fuente a otra:  $bxy$  se toma de la presa y  $cxy$  procede a los depredadores. Este modelo tiene serios inconvenientes, el más importante de ellos es que las soluciones del modelo no persisten bajo pequeñas perturbaciones de parámetros. No obstante, ha sido de gran valor en el planteamiento de preguntas de gran relevancia y es un lugar de partida para los modelos más realistas.

El modelo (3.7) y (3.8) se conoce como el *modelo de Lotka-Volterra* ya que las mismas ecuaciones también se derivaron por Lotka [32] a partir de una reacción química hipotética la cual él dijo que podría presentar un comportamiento periódico en las concentraciones químicas.

### 3.3.2. Modelos depredador-presa realistas

Una de las consecuencias poco realistas en los modelos de Lotka-Volterra, (3.7) y (3.8), es que el crecimiento de la presa no está acotado en ausencia de depredación. Para ser más realistas las tasas de crecimiento deberían depender tanto de las densidades de las presas y depredadores como en la ecuación

$$\begin{cases} \dot{x} &= xF(x, y), \\ \dot{y} &= yG(x, y), \end{cases} \quad (3.9)$$

donde las formas explícitas de  $F$  y  $G$  dependen del tipo de interacción y de la especie.

Un modelo del tipo (3.9) se dice que es del tipo Kolmogorov en donde su principal característica es que los ejes son invariantes [19, 21].

Como un primer paso razonable que podríamos esperar es que la presa debería satisfacer un crecimiento logístico en ausencia de depredadores, o tener algunas dinámicas de crecimiento similar, es decir, que tenga alguna capacidad de carga máxima. Así, por ejemplo, una ecuación de población de presas más realista podría tener la forma

$$\dot{x} = xF(x, y), \quad (3.10)$$

con  $F(x, y) = r \left(1 - \frac{x}{K}\right) - yR(x)$ , donde  $R(x)$  es un término de depredación y  $K$  es la capacidad de carga constante para la presa cuando  $y \equiv 0$ .

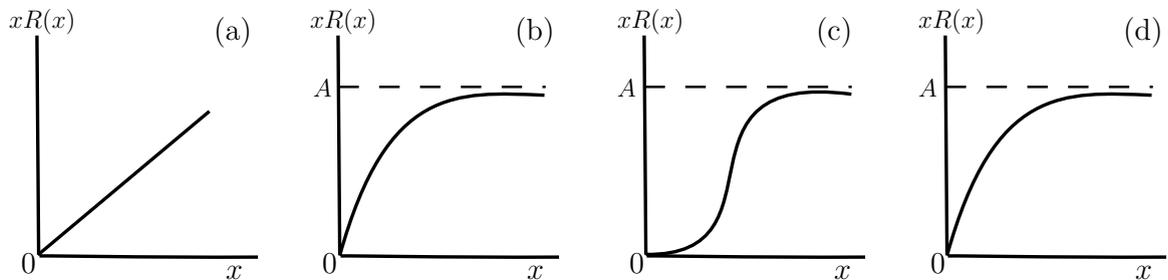


FIGURA 3.4: Ejemplos de respuesta funcional  $xR(x)$  de los depredadores a la densidad de presa. (a)  $R(x) = A$ , el tipo no saturado de Lotka-Volterra. (b)  $R(x) = A/(x + B)$ . (c)  $R(x) = Ax/(x^2 + B^2)$ . (d)  $R(x) = A[1 - e^{-ax}]/x$ .

El término de depredación,  $R(x)$  se conoce como la *respuesta funcional* del depredador al cambio en la densidad de la presa. En algunos casos muestra un efecto de

saturación. En lugar de una respuesta lineal de los depredadores en la forma  $bx y$  (ver figura 3.4 (a)), como en el modelo de Lotka-Volterra (3.7), tomamos  $y x R(x)$  donde  $x R(x)$  se satura para  $x$  grande, esto es,  $x R(x)$  se aproxima a su valor de saturación. Algunos ejemplos son

$$R(x) = \frac{A}{x + B}, \quad R(x) = \frac{Ax}{x^2 + B^2}, \quad R(x) = \frac{A[1 - e^{-Bx}]}{x}, \quad (3.11)$$

donde  $A$  y  $B$  son constantes positivas; éstos se ilustran en las figuras 3.4 (b)-(d). Los ejemplos en las figuras 3.4 (b) y (c) son aproximadamente lineal en  $x$  para bajas densidades. La saturación para  $x$  grande es un reflejo de la limitada capacidad de los depredadores, o la perseverancia, cuando la presa es abundante.

La ecuación de la población de depredadores, la segunda de (3.9), también debería ser más realista que simplemente tener  $G(x, y) = -d + cx$  como en el modelo de Lotka-Volterra (3.8). Las posibles formas para  $G(x, y)$  son:

$$G(x, y) = k \left( 1 - \frac{y}{nx} \right), \quad G(x, y) = -d + eR(x), \quad (3.12)$$

donde  $k$ ,  $n$ ,  $d$  y  $e$  son constantes positivas y  $R(x)$  tiene alguna de las formas en (3.11). La primera ecuación de (3.12) dice que la especie  $y$  crece de manera logística, pero su capacidad de carga es directamente proporcional a la densidad de la presa, esto es,  $K_y = nx$ . Mientras que la segunda ecuación nos dice que la contribución de la presa a la tasa de crecimiento de los depredadores es proporcional a algún  $R(x)$  de (3.11), así como con el tamaño de la población de depredadores.

Los modelos establecidos por las ecuaciones (3.9) - (3.12) son sólo ejemplos de los muchos que se han propuesto y estudiado. Todos ellos son más realistas que el modelo clásico de Lotka Volterra, en el sentido de que los posibles comportamientos matemáticos tienen asociados una interpretación más acorde con lo observado en la naturaleza.

En las siguientes dos subsecciones veremos dos formas de modelar la población de dos especies.

### 3.3.3. Modelos de tipo Gause

El siguiente modelo depredador-presa fue propuesto por Gause [20] como una alternativa más flexible para el modelo depredador-presa estructuralmente inestable de Lotka-Volterra:

$$\begin{cases} \dot{x} = xF(x, y), \\ \dot{y} = yG(x, y), \end{cases} \quad (3.13)$$

con  $F(x, y) = g(x) - \frac{y}{x}R(x)$  y  $G(x, y) = (-d + q(x))$ . Donde  $d > 0$  es la tasa de mortalidad del depredador  $y$  en la ausencia de presas  $x$ ;  $g(x)$ ,  $R(x)$ ,  $q(x)$  son funciones  $C^1$  que satisfacen las siguientes restricciones:

- Existe  $K > 0$  (capacidad de carga de la presa), tal que  $g(x) > 0$  si  $0 < x < K$ ,  $g(K) = 0$ , y  $g(x) < 0$  si  $x > K$ . Por lo tanto,  $g(x)$  es la tasa de crecimiento per cápita de la presa si no hay depredador.
- $R(x)$  es la respuesta funcional del depredador, que describe el número de presas muertas por un depredador,  $R(0) = 0$  y  $R(x) > 0$  para  $x$  positivos; además, es razonable tener  $R(x) \rightarrow A$  si  $x \rightarrow \infty$ .
- $q(x)$  da la eficacia del consumo de presas por los depredadores,  $q(0) = 0$ ,  $q(x) > 0$ ,  $q'(x) > 0$  si  $x > 0$ .

De la primera parte de (3.13) vemos que el crecimiento de la presa se ve reforzado por su propia presencia de una manera análoga al crecimiento de una sola especie y disminuye por una cantidad proporcional al número de depredadores presentes multiplicado por la respuesta de los depredadores a la presa.

La segunda parte de (3.13) describe ahora el crecimiento de la población de depredadores. En ausencia de las presas la población de depredadores disminuye. El crecimiento se ve reforzado por la presencia de las presas en una cantidad proporcional al número de presas. En ocasiones  $q(x) = \lambda R(x)$ , lo que nos dice que la conversión de presas en nuevos depredadores es proporcional a la tasa de captura o respuesta funcional del depredador.

### 3.3.4. Modelos de tipo Leslie-Gower

Leslie [30] propuso un modelo diferente al modelo de Lotka- Volterra, descrito por un sistema bidimensional de ecuaciones diferenciales no lineales de la forma:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xF(x, y), \\ \frac{dy}{dt} = yG(x, y), \end{cases}$$

donde  $F(x, y) = \left(1 - \frac{x}{K}\right) - qy$  y  $G(x, y) = s \left(1 - \frac{y}{nx}\right)$ . La formulación Leslie-Gower se basa en la suposición de que la reducción en una población de depredadores tiene una relación recíproca con la disponibilidad per cápita de su alimento preferido. Las principales características de este modelo son: la función de crecimiento tanto de las presas como la de los depredadores, es de tipo logístico, la respuesta funcional es lineal, es decir,  $xR(x) = qx$  y la capacidad de carga de los depredadores es proporcional al tamaño poblacional de las presas, es decir,  $K_y = nx$ , como en (3.12).

Algunas características del modelo anterior se han modificado obteniendo así los modelos del tipo Leslie-Gower, los cuales se caracterizan porque la ecuación de crecimiento del depredador es de tipo logístico y la capacidad de carga del medio ambiente  $K$  es una función de la cantidad de presas disponibles. En forma general se describen por un sistema de ecuaciones diferenciales no lineales, autónomas del tipo Kolmogorov:

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} = xg(x) - R(x)y \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{K_y}\right) y \end{cases}$$

donde  $xg(x)$  representa la función de crecimiento de las presas,  $R(x)$  es la respuesta funcional de los depredadores que puede ser uno de los tipos en (3.11);  $K_y$ , que es la capacidad de soporte del medio ambiente de los depredadores, se considera en general una función de las presas disponibles; es decir,  $K_y = k(x)$ . Notemos que el enfoque de modelación Leslie-Gower para el crecimiento de los depredadores contrasta con los modelos del tipo Gause visto en la sección 3.3.3. En efecto, en los modelos tipo Gause la conversión de masa depredador-presa debido a la depredación sigue un tipo de ley de conservación [20, 22, 24]. El modelo que veremos en el capítulo 4 es del tipo Leslie-Gower.

# Capítulo 4

## Dinámica de un modelo depredador-presa considerando doble efecto Allee en las presas

En este capítulo se obtienen resultados de la dinámica de un modelo depredador-presa del tipo Leslie-Gower considerando doble efecto Allee en las presas aplicando los conceptos desarrollados en los capítulos anteriores.

### 4.1. El Modelo

El modelo es descrito por el siguiente sistema bidimensional de ecuaciones diferenciales no lineales autónomo del tipo Kolmogorov

$$X_\mu : \begin{cases} \frac{dx}{dt} = \left(\frac{r}{x+b}\right) \left(1 - \frac{x}{K}\right) (x - m) - qy) x; \\ \frac{dy}{dt} = s \left(1 - \frac{y}{nx}\right) y; \end{cases} \quad (4.1)$$

donde  $x = x(t)$  e  $y = y(t)$  son los tamaños poblacionales de las presas y los depredadores, respectivamente, para  $t \geq 0$ , y donde  $\mu = (r, K, q, s, n, b, m) \in E = \mathbb{R}_+^6 \times ]-K, K[$  es un vector de parámetros. Los parámetros tienen los siguientes significados ecológicos:

$r$	Tasa de crecimiento intrínseco de la presa.
$s$	Tasa de crecimiento intrínseco del depredador.
$K$	Capacidad de soporte del medio ambiente de las presas.
$m$	Parámetro del efecto Allee (similar a ecuación (3.4)).
$b$	Parámetro auxiliar que afecta a la forma general de la curva de crecimiento per cápita de la presa (como en (3.6)).
$q$	Tasa máxima de consumo per cápita de los depredadores, es decir, es el número máximo de presas que pueden ser comidas por un depredador en cada unidad de tiempo.
$n$	Medida de la calidad del alimento que proveen las presas para la conversión en nacimientos de nuevos depredadores.

## 4.2. Equivalencia Topológica

Notemos que el sistema (4.1) o campo vectorial  $X_\mu$  no está definido en el eje  $x = 0$ , y su dominio es el conjunto

$$\Omega = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x > 0, y \geq 0\}.$$

Por esto y para simplificar los cálculos se realizará un cambio de variables y un reescalamiento del tiempo descrito en el siguiente lema.

**Lema 4.1.** *El sistema (4.1) es topológicamente equivalente al sistema*

$$\Gamma_\eta : \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = ((1-u)(u-M) - Qv(u+B))u^2, \\ \frac{dv}{d\tau} = S(u-v)(u+B)v, \end{cases} \quad (4.2)$$

en  $\Omega$ , donde  $\eta = (Q, S, B, M) \in D := \mathbb{R}^3 \times ]-1, 1[$ , con  $Q = \frac{qnK}{r}$ ,  $S = \frac{s}{r}$ ,  $M = \frac{m}{K}$  y  $B = \frac{b}{K}$ . Además,  $\Gamma_\eta$  puede extenderse en forma continua a  $\bar{\Omega} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u \geq 0, v \geq 0\}$ .

*Demostración.* Primero construimos la siguiente transformación:

$$\varphi : \Omega \times \mathbb{R} \longrightarrow \Omega \times \mathbb{R},$$

tal que

$$\varphi(u, v, \tau) = \left( Ku, nKv, \frac{u(Ku + b)}{rK} \tau \right) = (x, y, t).$$

Se tiene:

$$\det D\varphi(u, v, \tau) = \det \begin{pmatrix} K & 0 & 0 \\ 0 & nK & 0 \\ \frac{2uK+b}{rK} \tau & 0 & \frac{u(Ku+b)}{rK} \end{pmatrix} = \frac{nK}{r} (u(Ku + b)) > 0,$$

lo cual nos dice que  $\varphi$  es un difeomorfismo que preserva la orientación del tiempo.

El sistema  $X_\mu$  bajo la transformación  $\varphi$  nos da:

$$U_\mu : \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \frac{u(Ku+b)}{rK} \left( \left( \frac{rK}{Ku+b} (1-u) \left( u - \frac{m}{K} \right) - qnKv \right) u \right); \\ \frac{dv}{dt} = \frac{u(Ku+b)}{rK} s \left( \frac{u-v}{u} \right) v. \end{cases}$$

Finalmente la transformación de parámetros

$$\psi : E \longrightarrow E,$$

tal que

$$\psi(r, K, q, s, n, b, m) = \left( r, K, \frac{qnK}{r}, \frac{s}{r}, n, \frac{b}{K}, \frac{m}{K} \right),$$

satisface

$$\begin{aligned} \det D\psi &= \det \begin{pmatrix} 1 & 0 & -\frac{qnK}{r^2} & -\frac{s}{r^2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{qn}{r} & 0 & 0 & -\frac{b}{K^2} & -\frac{m}{K^2} \\ 0 & 0 & \frac{nK}{r} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{r} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{qK}{r} & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{K} \end{pmatrix} \\ &= \frac{n}{Kr^2} > 0. \end{aligned}$$

Esto nos dice que  $\psi$  es un difeomorfismo y así obtenemos el sistema (4.2) el cual es topológicamente equivalente a (4.1) en  $\Omega$ . Además, el sistema (4.2) está bien definido en  $u = 0$  y por lo tanto se puede extender en forma continua a

$$\bar{\Omega} = \{(u, v) \in \mathbb{R}^2 | u \geq 0, v \geq 0\}. \quad \square$$

### 4.3. Estabilidad de puntos de equilibrio

Primero, notemos que el único equilibrio en ausencia de presas es el origen  $(0, 0)$ . En efecto, tomando la igualdad  $\dot{v} = \frac{dv}{d\tau} = 0$  y considerando que  $\dot{u}|_{u=0} = \frac{du}{d\tau} \Big|_{u=0} \equiv 0$ , obtenemos la ecuación  $-SBv^2 = 0$ , la cual tiene como única raíz a  $v = 0$ . Así, el origen  $(0, 0)$  es el único equilibrio en ausencia de presas.

#### 4.3.1. Puntos de equilibrio en ausencia de depredadores

Los puntos de equilibrio en ausencia de depredadores se obtienen considerando  $v = 0$  en el sistema (4.2) igualando cada ecuación del sistema a cero.

En este sistema los puntos de equilibrio son:

- El punto  $(0, 0)$
- Sobre el eje  $u$ :

$$(M, 0); (1, 0),$$

los cuales se obtienen de la siguiente manera:

Primero consideremos la primera ecuación del sistema (4.2)

$\frac{du}{d\tau} = ((1 - u)(u - M) - Qv(u + B))u^2$ . Esta se debe igualar a cero, obteniendo

$$((1 - u)(u - M) - Qv(u + B))u^2 = 0.$$

Notemos que  $\dot{v}|_{v=0} \equiv 0$ , luego obtenemos que

$$(1 - u)(u - M)u^2 = 0. \quad (4.3)$$

Luego las raíces de (4.3) son

$$u = 1 \vee u = M \vee u = 0.$$

Por lo tanto, los puntos de equilibrio en ausencia de depredadores obtenidos por medio de la ecuación (4.3) son  $(1, 0)$ ;  $(M, 0)$  y  $(0, 0)$ .

#### 4.3.1.1. Estabilidad de los puntos de equilibrio en ausencia de depredadores

Para obtener la estabilidad local de los puntos de equilibrio debemos obtener la matriz Jacobiana del sistema (4.2) la cual es:

$$D\Gamma_{\eta}(u, v) = \begin{pmatrix} d_{11} & -Qu^2(u + B) \\ Sv(2u + B - v) & S(u^2 + Bu - 2uv - 2Bv) \end{pmatrix}, \quad (4.4)$$

en donde  $d_{11} = -4u^3 + (3M + 3 - 3Qv)u^2 - (2M + 2QBv)u$ .

**Lema 4.2.** *En el sistema (4.2), el equilibrio  $(1, 0)$  es un punto silla.*

*Demostración.* La matriz Jacobiana evaluada en el punto  $(1, 0)$  es

$$D\Gamma_{\eta}(1, 0) = \begin{pmatrix} M - 1 & -Q(1 + B) \\ 0 & S(1 + B) \end{pmatrix},$$

con determinante

$$\det D\Gamma_\eta(1, 0) = S(M - 1)(1 + B).$$

Notemos que como  $M \in ]-1, 1[$  tenemos que  $M - 1 < 0$  para todos los valores de  $M$ . Así tenemos que

$$\det D\Gamma_\eta(1, 0) = S(M - 1)(1 + B) < 0.$$

Por lo tanto  $D\Gamma_\eta(1, 0)$  tiene un valor propio positivo y uno negativo. Así, por el teorema de Hartman-Grobman 2.13 el punto de equilibrio  $(1, 0)$  es un punto silla.  $\square$

**Lema 4.3.** *En el sistema (4.2), el punto de equilibrio  $(M, 0)$  es*

1. *Punto silla si  $-1 < M < 0$  y  $M + B > 0$ ;*

2. *Repulsor si*

a)  *$-1 < M < 0$  y  $M + B < 0$  o*

b)  *$0 < M < 1$ .*

*Demostración.* La matriz Jacobiana evaluada en el punto  $(M, 0)$  es

$$D\Gamma_\eta(M, 0) = \begin{pmatrix} M^2(1 - M) & M^2Q(B + M) \\ 0 & SM(M + B) \end{pmatrix},$$

con determinante

$$\det D\Gamma_\eta(M, 0) = SM^3(1 - M)(M + B)$$

y traza

$$\begin{aligned} \text{Tr}D\Gamma_\eta(M, 0) &= M^2(1 - M) + SM(M + B) \\ &= M(M(1 - M) + S(M + B)). \end{aligned}$$

Primero notemos que  $1 - M > 0$  ya que  $M \in ]-1, 1[$ . Ahora analicemos los posibles casos. Si  $-1 < M < 0$  tenemos que

- Si  $M + B > 0$  entonces

$$\det D\Gamma_\eta(M, 0) < 0,$$

o sea, la matriz  $D\Gamma_\eta(M, 0)$  tiene un valor propio negativo y uno positivo, así el punto  $(M, 0)$  es silla por teorema de Hartman-Grobman.

- Si  $M + B < 0$  tenemos que

$$\det D\Gamma_\eta(M, 0) > 0$$

y la traza

$$Tr D\Gamma_\eta(M, 0) > 0,$$

ya que  $M(1 - M) + S(M + B) < 0$ .

Entonces  $D\Gamma_\eta(M, 0)$  posee ambos valores propios a la derecha del eje imaginario en el plano complejo, así el punto  $(M, 0)$  es repulsor.

Si  $0 < M < 1$  tenemos

$$\det D\Gamma_\eta(M, 0) > 0$$

y traza

$$Tr D\Gamma_\eta(M, 0) > 0$$

Así, por los mismos argumentos que en el caso anterior, el punto  $(M, 0)$  es repulsor.

□

Para estudiar la estabilidad del origen  $(0, 0)$ , definamos los siguientes conjuntos en el espacio de parámetros  $D = \mathbb{R}^3 \times ]-1, 1[$ :

$$I = \{\eta \in D / M > 0 \wedge M + SB > 0\}, \quad II = \{\eta \in D / M < 0 \wedge M + SB > 0\},$$

$$III = \{\eta \in D / M < 0 \wedge M + SB < 0\}, \quad V = \{\eta \in D / M = 0 \wedge 1 - BQ \leq 0\},$$

$$IV = \{\eta \in D / M = 0 \wedge 1 - BQ > 0\},$$

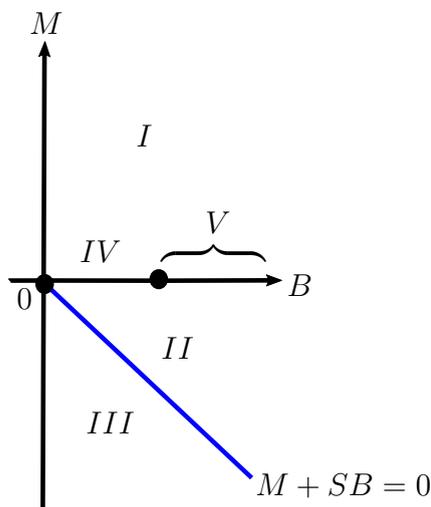


FIGURA 4.1: Regiones naturaleza  $(0,0)$ .

La Figura 4.1 muestra la proyección de los conjuntos  $I - V$  en el plano  $(B, M)$ . Notemos que  $I$ ,  $II$  y  $III$  son regiones abiertas,  $IV$  es segmento abierto de recta y  $V$  es segmento de recta cerrado y acotado por la izquierda.

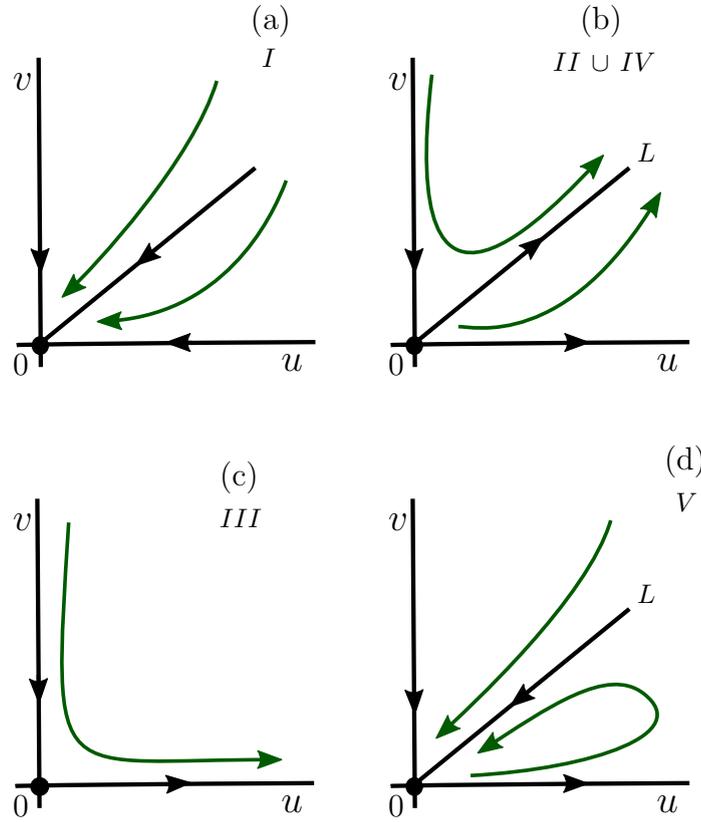


FIGURA 4.2: Retratos de fase locales cerca del equilibrio  $(0,0)$ . En (a),  $\eta \in I$ ; en (b),  $\eta \in II \cup IV$ ; en (c),  $\eta \in III$ ; y en (d),  $\eta \in V$ .

**Lema 4.4.** Para el equilibrio  $(0,0)$  del sistema (4.2) se cumple:

1. Si  $\eta \in I$  el retrato de fase local es como en la figura 4.2 (a).
2. Si  $\eta \in II \cup IV$  el retrato de fase local es como en la figura 4.2 (b).
3. Si  $\eta \in III$  el retrato de fase local es como en la figura 4.2 (c).
4. Si  $\eta \in V$  el retrato de fase local es como en la figura 4.2 (d).

*Demostración.* La matriz Jacobiana evaluada en el punto  $(0,0)$  es

$$D\Gamma_{\eta}(0,0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Entonces el equilibrio es no-hiperbólico. Para desingularizar el origen ocupamos el método del Blowing Up visto en la sección 2.1.7.

En primer lugar realizamos un Blowing Up direccional horizontal mediante el siguiente cambio de coordenadas

$$u = r, \quad v = rp. \quad (4.5)$$

Luego el sistema nos queda

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = -r^2(M - r - Mr + r^2 + Qr^2p + BQrp); \\ \frac{dp}{d\tau} = rp(M - r + SB - Mr + Sr + r^2 + Qr^2p - SBp - Srp + BQrp). \end{cases} \quad (4.6)$$

Para simplificar el sistema (4.6), hacemos un reescalamiento del tiempo dado por  $T = r\tau > 0$ , obteniendo el sistema

$$\widehat{F}_\eta : \begin{cases} \frac{dr}{dT} = -r(M - r - Mr + r^2 + Qr^2p + BQrp); \\ \frac{dp}{dT} = p(M - r + SB - Mr + Sr + r^2 + Qr^2p - SBp - Srp + BQrp); \end{cases} \quad (4.7)$$

el cual es topológicamente equivalente al sistema (4.2) si  $r > 0$  (en el caso  $r < 0$  debemos considerar  $T < 0$ ).

Notemos que  $(0, 0)$  en el sistema (4.2) es llevado al eje  $r = 0$  mediante el cambio de coordenadas (4.5).

Los equilibrios del sistema (4.7) en  $r = 0$  son

$$(0, 0) \quad \text{y} \quad \left(0, \frac{M + SB}{SB}\right).$$

La matriz Jacobiana del sistema (4.7) es

$$D\widehat{F}_\eta(r, p) = \begin{pmatrix} -M + 2r + 2Mr - 3r^2 - 3Qr^2p - 2BQrp & -Qr^3 - BQr^2 \\ -p - Mp + Sp + 2rp + 2Qrp^2 - Sp^2 + BQp^2 & a_{22} \end{pmatrix} \quad (4.8)$$

con  $a_{22} = M - r + SB - Mr + Sr + r^2 + 2Qr^2p - 2SBp - 2Srp + 2BQrp$ .

Al evaluar  $D\widehat{F}_\eta(r, p)$  en los equilibrios obtenemos

$$D\widehat{F}_\eta(0, 0) = \begin{pmatrix} -M & 0 \\ 0 & M + SB \end{pmatrix} \quad (4.9)$$

y

$$D\widehat{F}_\eta\left(0, \frac{SB + M}{SB}\right) = \begin{pmatrix} -M & 0 \\ e_{21} & -(M + SB) \end{pmatrix} \quad (4.10)$$

respectivamente, donde

$$e_{21} = -\frac{1}{S^2 + B^2}(M + SB)(S(B + M - B^2Q + BM) - BMQ).$$

Si  $M \neq 0$  tenemos tres distintos casos de naturaleza del punto  $(0, 0)$ , los cuales se muestran en la figura 4.3. Si  $\eta \in I$  es fácil ver que  $(0, 0)$  es una silla hiperbólica y que  $(0, \frac{SB+M}{SB})$  es atractor de (4.7), como en la figura 4.3 (a). Si  $\eta \in II$  vemos que  $(0, 0)$  es repulsor y que  $(0, \frac{SB+M}{SB})$  es una silla hiperbólica de (4.7), como en la figura 4.3 (b). Finalmente, si  $\eta \in III$  tenemos que  $(0, 0)$  es una silla hiperbólica y que  $(0, \frac{SB+M}{SB})$  no se encuentra en el primer cuadrante del plano  $(r, p)$ , como en la figura 4.3 (c).

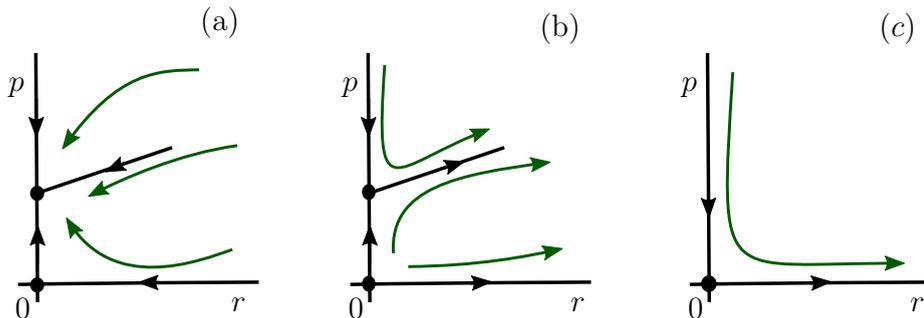


FIGURA 4.3: Retrato de fase del campo (4.7) en el plano  $r, p$  para las regiones  $I$ ,  $II$  y  $III$  en los paneles (a), (b) y (c) respectivamente.

Ahora realicemos un Blowing Up vertical al sistema (4.2) mediante el siguiente cambio  $u = rp$ ,  $v = p$ . Luego el sistema nos queda

$$\begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = rp(pr^2 - p^2r^3 + BS - Mr + Mpr^2 - Spr^2 - Qp^2r^2 - BSr + Spr - BQpr); \\ \frac{dp}{d\tau} = Sp^2(B + rp)(r - 1). \end{cases} \quad (4.11)$$

Haciendo un reescalamiento del tiempo dado por  $T = p\tau$  obtenemos un sistema topológicamente equivalente al sistema (4.2) en  $p > 0$  (si  $p < 0$  se considera  $T < 0$ ) dado por:

$$\bar{F}_\eta : \begin{cases} \frac{dr}{dT} = r(pr^2 - p^2r^3 + BS - Mr + Mpr^2 - Spr^2 - Qp^2r^2 - BSr + Spr - BQpr); \\ \frac{dp}{dT} = Sp(B + rp)(r - 1). \end{cases} \quad (4.12)$$

Notemos que en este caso el origen en el sistema (4.2) es llevado al eje  $p = 0$ .

Los equilibrios del sistema (4.12) en  $p = 0$  son

$$(0, 0) \quad \text{y} \quad \left( \frac{SB}{M + SB}, 0 \right).$$

La matriz Jacobiana del sistema (4.12) es

$$D\bar{F}_\eta(r, p) = \begin{pmatrix} a_{11} & Mr^3 + Sr^2 - Sr^3 - 2pr^4 + r^3 - BQr^2 - 2Qpr^3 \\ Sp(B - p + 2pr) & S(B + 2pr)(r - 1) \end{pmatrix},$$

con  $a_{11} = 3pr^2 - 4p^2r^3 + BS - 2Mr + 3Mpr^2 - 3Spr^2 - 3Qp^2r^2 - 2BSr + 2Spr - 2BQpr$ .

Al evaluar  $D\bar{F}_\eta(r, p)$  en los equilibrios tenemos

$$D\bar{F}_\eta(0, 0) = \begin{pmatrix} BS & 0 \\ 0 & -BS \end{pmatrix} \quad (4.13)$$

y

$$D\bar{F}_\eta \left( \frac{SB}{M+SB}, 0 \right) = \begin{pmatrix} -SB & \frac{S^2B^2}{(M+SB)^3}(SB+SM-SB^2Q-MBQ+SBM) \\ 0 & -\frac{MSB}{M+SB} \end{pmatrix}, \quad (4.14)$$

respectivamente.

Si  $M \neq 0$ , se tienen tres distintos casos de naturaleza del punto  $(0, 0)$ . Similarmente al razonamiento hecho para el blow-up horizontal se obtienen los retratos de fase de la figura 4.4.

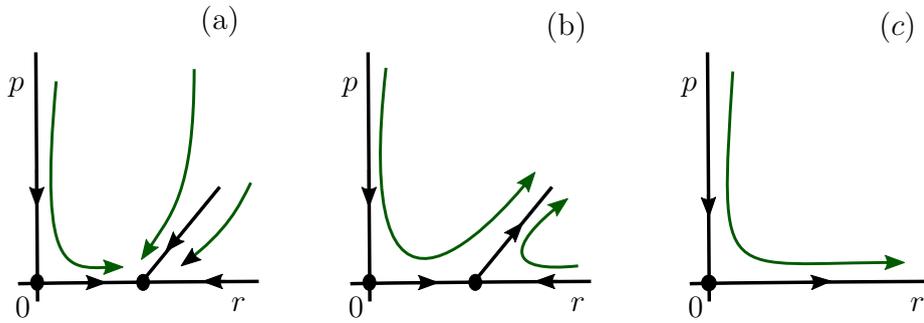


FIGURA 4.4: Retrato de fase del campo (4.12) en el plano  $r, p$  para las regiones  $I$ ,  $II$  y  $III$  en los paneles (a), (b) y (c) respectivamente.

Vemos que en los tres paneles, (a), (b) y (c) de la figura 4.4 el origen es punto silla. Entonces al hacer un blow-down a los sistemas (4.6) y (4.12), se obtienen los retratos de fase en las regiones  $I$ ,  $II$  y  $III$ .

El caso  $M = 0$  es un poco más delicado y requiere más cuidado. En el caso del blow-up horizontal (4.7), supongamos que  $M = 0$ , luego tenemos que los equilibrios en  $r = 0$  son

$$(0, 0) \quad \text{y} \quad (0, 1).$$

Evaluemos la matriz Jacobiana del sistema (4.7) en los equilibrios

$$D\hat{F}_\eta(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & SB \end{pmatrix} \quad (4.15)$$

y

$$D\widehat{F}_\eta(0,1) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ BQ - 1 & -SB \end{pmatrix}. \quad (4.16)$$

Notemos que ambas matrices (4.15) y (4.16) poseen un valor propio cero.

En ambos casos debemos estudiar la variedad central asociada al valor propio 0 de la matriz Jacobiana de cada equilibrio; ver sección 2.1.6.

Primero veamos el equilibrio  $(0,0)$ , el cual tiene los valores propios  $\lambda_1 = 0$ ,  $\lambda_2 = SB > 0$ .

Notemos que el vector propio asociado al valor propio 0 es  $\{(1,0)\}$ , así el espacio propio  $E^c(0,0)$  asociado es el eje  $r$  de (4.7), es decir  $E^c(0,0) = \{(r,p) : p = 0\}$ . Como el eje  $r$  es invariante tenemos que  $W^c(0,0) = \{(r,p) : p = 0\}$  corresponde a una variedad central asociada al valor propio 0 de  $(0,0)$ .

Luego tenemos que el sistema (4.7) restringido a  $W^c(0,0)$  es

$$\dot{r} = r^2 - r^3.$$

Vemos que si tomamos valores suficientemente pequeños de  $r$  tenemos

$$\dot{r} = r^2 - r^3 > 0.$$

Así tenemos que el equilibrio  $(0,0)$  es repulsor, pues  $\lambda_2 = SB > 0$ .

Ahora veamos la variedad central  $W^c(0,1)$  asociada al valor propio 0 del equilibrio  $(0,1)$ . Primero vemos que el vector propio asociado es  $\left\{ \left( \frac{SB}{BQ-1}, 1 \right) \right\}$ , luego la pendiente del espacio propio  $E^c(1,0)$  es  $\frac{BQ-1}{SB}$ .

Supongamos que  $W^c(0,1) = \{(r,p) : p = h(r), |r| < \delta\}$  donde:

$$h(r) = 1 + \frac{BQ-1}{SB}r + ar^2 + O(r^3), \quad (4.17)$$

y  $a$  es una constante por determinar.

Como  $W^c(0, 1)$  es invariante bajo (4.7), entonces la función  $h(r)$  debe satisfacer

$$h'(r)P(r, h(r)) - Q(r, h(r)) = 0, \quad (4.18)$$

en donde  $P$  y  $Q$  corresponden a las componentes horizontal y vertical respectivamente, del sistema (4.7) con  $M = 0$ .

Por lo tanto, al sustituir (4.17) en (4.18) se obtiene:

$$a = \frac{1}{S^2 B^2} (S + 2B^2 Q^2 - 3BQ + SB + 1).$$

Así tenemos que

$$h(r) = 1 + \frac{BQ - 1}{SB} r + \left( \frac{1}{S^2 B^2} (S + 2B^2 Q^2 - 3BQ + SB + 1) \right) r^2 + O(r^3). \quad (4.19)$$

Luego por el teorema de la variedad central (ver [14, 26, 29]) tenemos que el flujo restringido a  $W^c(0, 1)$  es

$$\begin{aligned} \dot{r} = & (1 - BQ)r^2 + \left(-Q - \frac{Q}{S}(BQ - 1) - 1\right) r^3 \\ & + \left(-\frac{Q}{BS^2}(2B^2 Q^2 - 3BQ + BS + BQS + 1)\right) r^4 + O(r^5). \end{aligned} \quad (4.20)$$

Vemos que tenemos dos casos distintos dependiendo del signo de  $(1 - BQ)$ , los cuales se ilustran en la figura 4.5. En el panel (a) consideramos  $1 - BQ > 0$  obteniendo que  $(0, 1)$  es un punto silla. Por el contrario, si  $1 - BQ < 0$  como en el panel (b), el punto  $(0, 1)$  es atractor.

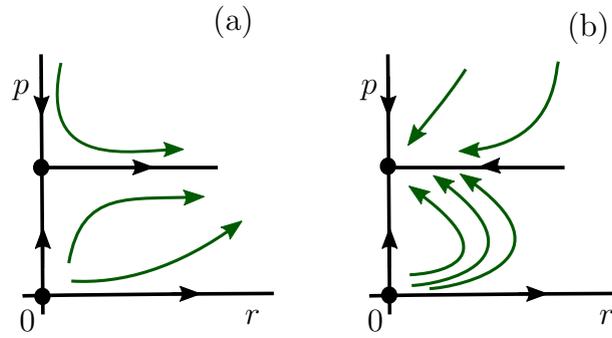


FIGURA 4.5: Retrato de fase del campo (4.7) con  $M = 0$ , en el plano  $(r, p)$  para los conjuntos  $IV$  y  $V$  en los paneles (a) y (b) respectivamente.

Finalmente mediante un blow-down en (4.7), se obtienen los retratos de fase correspondientes a  $IV$  y  $V$ .  $\square$

### 4.3.2. Puntos de Equilibrio Interiores

Los puntos de equilibrios de (4.2) en  $Int(\bar{\Omega}) := \{(u, v) / u > 0, v > 0\}$  se ubican sobre la diagonal  $u = v$  y por lo tanto son de la forma  $(u, u)$ , donde la coordenada  $u$  satisface la ecuación de las isoclinas:

$$(Q + 1)u^2 - (M + 1 - BQ)u + M = 0. \quad (4.21)$$

Luego, según la naturaleza de las raíces de la ecuación (4.21) tenemos el siguiente lema sobre la cantidad de puntos de equilibrio de (4.2) en  $Int(\bar{\Omega})$ :

**Lema 4.5.** Sea  $\Delta : D \rightarrow \mathbb{R}$ , con  $D = \mathbb{R}^3 \times ]-1, 1[$  el espacio de parámetros, tal que  $\Delta(\eta) = (M + 1 - BQ)^2 - 4(Q + 1)M$ , y sea  $\Phi : D \rightarrow \mathbb{R}$  tal que  $\Phi(\eta) = 1 + M - BQ$ . Entonces:

1. Si  $\eta \in \Delta^{-1}(0, \infty) \cap \Phi^{-1}(0, \infty)$ , el sistema (4.2) tiene dos equilibrios en  $Int(\bar{\Omega})$ .
2. Si  $\eta \in [\Delta^{-1}(0) \cap \Phi^{-1}(0, \infty)] \cup [\Delta^{-1}(0, \infty) \cap \{M < 0\}]$ , entonces el sistema (4.2) tiene un equilibrio en  $Int(\bar{\Omega})$ .
3.  $\eta \in \Phi^{-1}(-\infty, 0] \cup [\Delta^{-1}(-\infty, 0) \cap \Phi^{-1}(0, \infty)]$ , el sistema (4.2) no tiene equilibrios en  $Int(\bar{\Omega})$ .

*Demostración.* Analizando el discriminante de (4.21) y por la regla de signos de Descartes obtenemos lo pedido.  $\square$

*Observación 4.6.* En el caso en donde hay 2 puntos de equilibrios positivos distintos para (4.2), obtenemos las raíces de (4.21) de la forma:

$$u_1 = \frac{(M + 1 - BQ) - \sqrt{(M + 1 - BQ)^2 - 4(Q + 1)M}}{2(Q + 1)} \quad (4.22)$$

y

$$u_2 = \frac{(M + 1 - BQ) + \sqrt{(M + 1 - BQ)^2 - 4(Q + 1)M}}{2(Q + 1)}. \quad (4.23)$$

En este caso tenemos dos puntos de equilibrio con coordenadas  $(u_1, u_1)$  y  $(u_2, u_2)$ .

*Observación 4.7.* Si (4.2) tiene solo un equilibrio en  $Int(\bar{\Omega})$ , al resolver la ecuación (4.21) obtenemos el punto  $(u^*, u^*)$  con

$$u^* = \frac{(M + 1 - BQ)}{2(Q + 1)}, \quad (4.24)$$

si  $\eta \in [\Delta^{-1}(0) \cap \Phi^{-1}(0, \infty)]$ ; y el equilibrio  $(u^{**}, u^{**})$ , con

$$u^{**} = \frac{(M + 1 - BQ) + \sqrt{(M + 1 - BQ)^2 - 4(Q + 1)M}}{2(Q + 1)}, \quad (4.25)$$

si  $\eta \in [\Delta^{-1}(0, \infty) \cap \{M < 0\}]$ .

#### 4.3.2.1. Estabilidad de los puntos de equilibrio en $Int(\bar{\Omega})$

La matriz Jacobiana de (4.2) evaluada en un punto  $(u, u)$  toma la forma:

$$D\Gamma_\eta(u, u) = \begin{pmatrix} a_{11} & -Qu^2(B + u) \\ Su(B + u) & -S(u^2 + Bu) \end{pmatrix}$$

con

$$a_{11} = (-4 - 3Q)u^3 + (3M + 3 - 2BQ)u^2 - 2Mu.$$

Su determinante es

$$\det D\Gamma_\eta(u, u) = Su^2(B + u)F(u),$$

donde

$$F(u) = 4Pu^2 - 3Cu + 2M \quad (4.26)$$

con

$$C = 1 + M - BQ, \quad P = Q + 1 > 0, \quad W^2 = C^2 - 4PM. \quad (4.27)$$

Veamos los distintos casos posibles dependiendo de la cantidad de puntos de equilibrio en  $\text{Int}(\Omega)$ .

### **Dos puntos de equilibrio en $\text{Int}(\Omega)$**

Las condiciones en el lema 4.5 para que hayan dos puntos de equilibrio equivalen a  $C > 0$  y  $W^2 > 0$ .

Reemplazando las expresiones (4.27) en las coordenadas (4.22) y (4.23) de los puntos de equilibrio obtenemos, respectivamente:

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{1}{2P}(C - W), \\ u_2 &= \frac{1}{2P}(C + W). \end{aligned}$$

**Lema 4.8.** *Si  $\eta \in \Delta^{-1}(0, \infty) \cap \Phi^{-1}(0, \infty)$ , el punto de equilibrio  $(u_1, u_1)$  de (4.2) es un punto silla.*

*Demostración.* Primero determinamos el signo del determinante de la matriz Jacobiana de (4.2) evaluada en el punto  $(u_1, u_1)$ .

Reemplazando  $u_1$  en (4.26) y luego de un trabajo algebraico tenemos

$$\begin{aligned}
 F(u_1) &= -\frac{1}{2P}(CW - 2W^2 - 4MP + C^2) \\
 &= -\frac{1}{2P}(CW - 2(C^2 - 4PM) - 4MP + C^2) \\
 &= -\frac{1}{2P}(CW - C^2 + 4PM) \\
 &= -\frac{1}{2P}(CW - W^2) = -u_1W < 0.
 \end{aligned} \tag{4.28}$$

Por lo tanto  $\det D\Gamma_\eta(u_1, u_1) = -Su_1^3(B + u_1)W < 0$ , así el punto  $(u_1, u_1)$  es punto silla.  $\square$

Sea  $R : \bar{\Omega} \rightarrow \mathbb{R}$  tal que

$$R(u) = 2M - 3u + 3Qu^2 + SB - 3Mu + Su + 4u^2 + 2BQu. \tag{4.29}$$

Entonces, la traza de la matriz Jacobiana de (4.2) de un punto  $(u, u)$  tiene la forma

$$\text{Tr}(D\Gamma_\eta(u, u)) = -uR(u).$$

**Teorema 4.9.** Si  $\eta \in \Delta^{-1}(0, \infty) \cap \Phi^{-1}(0, \infty)$ , el punto de equilibrio  $(u_2, u_2)$  de (4.2) es:

1. Repulsor si  $R(u_2) < 0$ ,
2. Atractor si  $R(u_2) > 0$ ,
3. Foco débil si  $R(u_2) = 0$ .

*Demostración.* Consideremos el punto  $(u_2, u_2)$  con  $u_2 = \frac{1}{2P}(C + W)$ . Evaluando  $F(u)$  en  $u_2$  y luego de un cálculo directo tenemos

$$\begin{aligned}
 F(u_2) &= \frac{1}{2P}(-C^2 + CW + 2W^2 + 2MP) = \frac{1}{2P}(C + W)W \\
 &= u_2W > 0.
 \end{aligned} \tag{4.30}$$

Así  $\det D\Gamma_\eta(u_2, u_2) = Su_2^3(B + u_2)W > 0$ , por lo que la estabilidad del punto  $(u_2, u_2)$  depende de  $\text{Tr}(D\Gamma_\eta(u_2, u_2))$ , o sea depende del signo de

$$R(u_2) = \frac{1}{4P^2}(2CW + W^2 - 3C^2P + 8MP^2 + 3PW^2 + C^2 + 2PSW + 4BP^2S + 2CPS - 2BPQW - 2BCPQ).$$

Luego evaluando el signo de  $R(u_2)$  y viendo los diferentes casos, por el teorema de Hartman-Grobman obtenemos el resultado pedido.  $\square$

En el teorema anterior observamos que  $Tr(u_2)$  cambia de signo, lo que evidencia que el sistema pasa por una bifurcación de Hopf. Por esto, para simplificar el cálculo realizamos una reparametrización. Sea el nuevo parámetro  $a \neq 1$  una raíz de la ecuación de las isoclinas (4.21), es decir:

$$(Q + 1)a^2 - (M + 1 - BQ)a + M = 0. \quad (4.31)$$

Entonces por teorema de la función implícita, la ecuación (4.31) define implícitamente la función

$$M = M(a) = \frac{a(BQ - 1) + a^2(Q + 1)}{a - 1}.$$

Sustituyendo la expresión para  $M(a)$  en el sistema (4.2) obtenemos:

$$\bar{Y}_\nu : \begin{cases} \frac{du}{d\tau} = \left( (1 - u) \left( u - \left( \frac{a(BQ-1) + a^2(Q+1)}{a-1} \right) \right) - Qv(u + B) \right) u^2, \\ \frac{dv}{d\tau} = S(u - v)(u + B)v, \end{cases} \quad (4.32)$$

con  $\nu = (a, B, S, Q)$ . El sistema (4.32) es topológicamente equivalente a (4.2). La ventaja del sistema (4.32) es que ahora la coordenada  $a > 0$  del equilibrio interior  $(a, a)$  pasa a ser un parámetro independiente explícito de (4.32). A continuación, daremos condiciones para que el sistema (4.32) pase por una bifurcación de Hopf en el equilibrio con coordenadas  $(a, a)$ . Para ello ahora consideramos la función  $R(u)$  en (4.29) como función de los parámetros  $\nu = (a, B, Q, S)$  obteniendo  $R : \mathbb{R}_+^4 \setminus \{a = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ , con

$$R(\nu) = -\frac{1}{a-1} (Qa^2 - a - Sa^2 + BS + Sa + 2a^2 - a^3 + BQa^2 - B Sa).$$

Ahora, definamos la siguiente función en los parámetros  $\nu = (a, B, Q, S) : L_1 : \mathbb{R}_+^4 \setminus \{a = 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned}
 L_1(\nu) = & - \left( (N_4) \left( \frac{-1}{((N_4)^2(N_5)^2(-N_1)^2)} 2a^2(2a+B)(N_1)(2a^3+2B-a^2(3+B(-3+Q) \right. \right. \\
 & + Q) - a(-1+2B^2Q+B(5+2Q)))(-N_2) - \frac{1}{((N_4)^2(N_5))} a(-a^3(4+3Q) \\
 & + B(-3+2BQ) + a(-2+B^2Q+8B(1+Q)) + a^2(6+5Q-B(5+3Q))) \\
 & \left( \frac{2a(2-2BQ-5a(1+Q)+3a^2(1+Q))(1-2a+a^2-BQa-Qa)}{\sqrt{N_2}} - \frac{2a^2N_1\sqrt{N_2}}{(N_5)N_1} \right. \\
 & \left. + \frac{2a(2+3a^2-a(5+2(1+B)Q))\sqrt{N_2}}{N_1} \right) - \frac{1}{(N_4)^2 2a^2 \sqrt{(N_3)}} (-3+4a-3a^2+4aQ \\
 & - 3a^2Q+2BQ-3a^2(2+Q) + a(8+(5+B)Q) + \frac{aN_1}{N_5} + \frac{a(N_1)(-N_2)}{(N_5)(-N_1)^2} + \\
 & \left. \left. \frac{3(1+3a^2-a(4+Q+BQ))(-N_2)}{(-N_1)^2} \right) \right) \left( \frac{1}{16a^2\sqrt{N_3}} \right), \tag{4.33}
 \end{aligned}$$

donde

$$N_1 = 1 + a^2 - 2a - aQ - aBQ,$$

$$\begin{aligned}
 N_2 = & -1 - a^4 + BQ - BQa - BQa^2 + BQa^3 - 2a^2(3 + BQ^2 + Q^2) \\
 & + a^3(4 + BQ^2 + Q^2) - a(-4 + BQ^2 + B^2Q^2) + 3Qa - 7Qa^2 \\
 & + 5Qa^3 - Qa^4,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_3 = & -1 + BQ - a^4(1 + Q) + a^3(1 + Q)(4 + Q + BQ) - a^2 \\
 & (6 + (7 + B)Q + 2(1 + B)Q^2) - a(-4 + (-3 + B)Q \\
 & + B(1 + B)Q^2),
 \end{aligned}$$

$$N_4 = a - 1,$$

$$N_5 = a + B.$$

**Teorema 4.10.** *Sea  $\nu = (a, B, Q, S) \in R^{-1}(0) \cap \{L_1^{-1}(-\infty, 0) \cup L_1^{-1}(0, \infty)\}$ . Entonces el sistema (4.32) pasa por una bifurcación de Hopf en  $(a, a)$ .*

*Demostración.* Debemos probar que las hipótesis del teorema de bifurcación de Hopf se satisfacen. Primero notemos que  $\nu \in R^{-1}(0)$  implica que  $Tr(D\bar{Y}_\nu(a, a)) = 0$ , obteniendo así que los valores propios son imaginarios puros.

Por otro lado debemos ver que  $Tr(D\bar{Y}_\nu(a, a))$  cambia de signo cuando  $R(\nu) = 0$ . Esto lo obtenemos del hecho que

$$\frac{\partial Tr(D\bar{Y}_\nu(a, a))}{\partial S} = \frac{\partial}{\partial S}(-aR(\nu)) = -a(B + a) \neq 0, \quad \forall \nu \in \mathbb{R}_+^4 \setminus \{a = 1\}.$$

A continuación, seguimos la estrategia del teorema A.2 en el apéndice A. Veremos que la primera cantidad de Lyapunov tiene el mismo signo que  $L_1(\nu)$ , cuando  $R(\nu) = 0$ .

Primero traslademos el equilibrio  $(a, a)$  del sistema (4.32) al origen mediante el cambio

$$r = u - a \quad p = v - a,$$

obteniendo el sistema

$$\widehat{Y}_\nu : \begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = \frac{1}{a-1}(a+r)^2(2ar - ar^2 - a^2r - r + r^2 - Qa^2p + BQp \\ \quad + Qap + Qar + Qpr - BQap + BQar - Qapr), \\ \frac{dp}{d\tau} = -S(p-r)(a+p)(B+a+r). \end{cases} \quad (4.34)$$

La matriz Jacobiana del sistema (4.34) evaluada en el origen es

$$D\widehat{Y}_\nu(0, 0) = \begin{pmatrix} \frac{a}{a-1}(Qa^2 - a + 2a^2 - a^3 + BQa^2) & -Qa^2(B+a) \\ Sa(B+a) & -Sa(B+a) \end{pmatrix}. \quad (4.35)$$

Sabemos que la traza de esta matriz se anula cuando  $R(\nu) = 0$ ; en efecto

$$\begin{aligned}
 \text{Tr}(D\widehat{Y}_\nu(0,0)) &= \frac{a}{a-1}(Qa^2 - a + 2a^2 - a^3 + BQa^2) - Sa(B+a) \\
 &= \frac{a}{a-1}(-a + Qa^2 - Sa^2 + BS + Sa + 2a^2 - a^3 + BQa^2 - B Sa) \\
 &= -a \left( -\frac{1}{a-1}(-a + Qa^2 - Sa^2 + BS + Sa + 2a^2 - a^3 + BQa^2 - B Sa) \right) \\
 &= -aR(\nu).
 \end{aligned}$$

Si  $\nu \in \mathbb{R}_+^4 \setminus \{a = 1\}$ , la ecuación  $R(\nu) = 0$  define implícitamente la función

$$S = \frac{Qa^2 - a + 2a^2 - a^3 + BQa^2}{(a-1)(B+a)}, \quad (4.36)$$

para  $a \neq 1$ .

Reemplazando (4.36) en (4.35) tenemos

$$D\widehat{Y}_\nu(0,0) = \begin{pmatrix} \frac{a}{a-1}(Qa^2 - a + 2a^2 - a^3 + BQa^2) & -Qa^2(B+a) \\ \frac{a^2}{a-1}(2a + Qa - a^2 + BQa - 1) & -\frac{a^2}{a-1}(2a + Qa - a^2 + BQa - 1) \end{pmatrix}. \quad (4.37)$$

Sean  $v_1, v_2$  los valores propios generalizados de (4.37) y sea  $[v_1 v_2]$  la matriz con columnas  $v_1$  y  $v_2$ . El cambio de coordenadas  $\begin{pmatrix} r \\ p \end{pmatrix} \mapsto [v_1 v_2] \begin{pmatrix} r \\ p \end{pmatrix}$  permite dejar el sistema (4.34) con  $R(\nu) = 0$  en la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{r} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -w \\ w & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r \\ p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}, \quad (4.38)$$

donde

$$w = -\frac{a^2}{a-1} \sqrt{(-2a - Qa + a^2 - BQa + 1)(2a - Qa^2 + BQ + 2Qa - a^2 - 1)} \quad (4.39)$$

y

$$\begin{aligned}
 P = & -\frac{r}{a-1}(-4ar^2 - 5a^2r + ar^3 + 3a^3r + 3a^2r^2 + 2ar + r^2 - r^3 - 3Qa^2p \\
 & + 3Qa^3p - Qar^2 - 2Qa^2r - Qpr^2 + 2BQa^2p - BQar^2 - 2BQa^2r \\
 & + Qapr^2 + 3Qa^2pr - 2BQap - BQpr - 3Qapr + BQapr), \tag{4.40}
 \end{aligned}$$

$$Q = a(p-r)(Bp + ap + ar + pr) \frac{-2a - Qa + a^2 - BQa + 1}{(a-1)(B+a)}.$$

El sistema (4.38) nos permite utilizar la fórmula (A.6) para el cálculo directo de la primera cantidad de Lyapunov, y obtenemos la expresión (4.33) la cual, por hipótesis, es no nula. De esta forma se satisfacen las condiciones del teorema de bifurcación de Hopf A.2 obteniendo el resultado requerido.

□

### Un punto de equilibrio en $Int(\Omega)$

Consideremos  $1 + M - BQ > 0$  y  $\Delta = C^2 - 4PM = 0$ . Recordemos del lema 4.5 que estas son las condiciones necesarias para tener un único punto de equilibrio interior  $(u^*, u^*)$ , donde  $u^* = \frac{(M+1-BQ)}{2(Q+1)}$ .

**Teorema 4.11.** *La condición*

$$\Delta(M, B, Q) = C^2 - 4PM = (1 + M - BQ)^2 - 4(Q + 1)M = 0$$

define una curva de bifurcación silla-nodo en el plano  $(M, B)$ . En tal caso el punto  $(u^*, u^*)$  posee:

1. una variedad inestable unidimensional si

$$S > \frac{6CP - 8MP^2 - 3C^2Q - 4C^2 + 6CMP - 4BCPQ}{2P(C + 2BP)},$$

2. una variedad estable unidimensional si

$$S < \frac{6CP - 8MP^2 - 3C^2Q - 4C^2 + 6CMP - 4BCPQ}{2P(C + 2BP)}.$$

*Demostración.* Para mayor facilidad de análisis, si sustituimos las expresiones (4.27) en la coordenada  $u^*$  en (4.24) se obtiene

$$u^* = \frac{C}{2P}.$$

El determinante de la matriz Jacobiana  $D\Gamma_\eta$  evaluada en el punto  $(u^*, u^*)$  es

$$\begin{aligned} \det D\Gamma_\eta(u^*, u^*) &= \frac{1}{16} \frac{C^2}{P^5} S(C + 2BP)(2C^2Q + 4MP^2 - 3CP + \\ &\quad + 2C^2 - 3CMP + 3BCPQ). \end{aligned}$$

Por hipótesis tenemos que  $W^2 = C^2 - 4PM = 0$ . De esto y después de un trabajo algebraico tenemos

$$\det D\Gamma_\eta(u^*, u^*) = -\frac{1}{16} \frac{C^2}{P^4} S(C + 2BP)(C^2 - 4MP) = 0.$$

Así  $\det D\Gamma_\eta(u^*, u^*) = 0$ , entonces uno de los valores propios de  $D\Gamma_\eta(u^*, u^*)$ , digamos  $\lambda_1$ , es cero, lo cual es condición necesaria básica para una bifurcación Silla-nodo (ver sección 2.2.3 y sección A.1 en apéndice A). También obtenemos que se satisface la condición de genericidad, en efecto

$$\frac{\partial \Delta}{\partial B} = -2Q(1 + M - BQ) < 0.$$

Luego,  $\det D\Gamma_\eta(u^*, u^*)$  está cambiando de signo en  $\Delta = 0$ .

Además sabemos que :

- Si  $\Delta > 0$  el sistema (4.2) tiene dos puntos de equilibrio positivos.
- Si  $\Delta = 0$  el sistema (4.2) tiene un punto de equilibrio positivo.
- Si  $\Delta < 0$  el sistema (4.2) no tiene puntos de equilibrio positivos.

Luego de lo anterior tenemos que a medida que el punto  $(M, B)$  cruza la curva  $SN = \{(M, B) : (1 + M - BQ)^2 - 4(Q + 1)M = 0\}$ , aparecen o desaparecen dos

puntos de equilibrio en  $Int(\bar{\Omega}) = \{(u, v)/u > 0, v > 0\}$ , dependiendo del sentido de movimiento de los parámetros.

La traza de la matriz Jacobiana  $D\Gamma_\eta$  evaluada en el punto  $(u^*, u^*)$  es

$$\begin{aligned} TrD\Gamma_\eta(u^*, u^*) &= -\frac{1}{8}\frac{C}{P^3}(3C^2Q + 8MP^2 - 6CP + 4C^2 \\ &\quad + 4BP^2S - 6CMP + 2CPS + 4BCPQ). \end{aligned}$$

Dado que  $2P(C + 2BP) \neq 0$ , tenemos que la ecuación

$$\begin{aligned} TrD\Gamma_\eta(u^*, u^*) &= -\frac{1}{8}\frac{C}{P^3}(3C^2Q + 8MP^2 - 6CP + 4C^2 \\ &\quad + 4BP^2S - 6CMP + 2CPS + 4BCPQ) = 0 \end{aligned}$$

define implícitamente la función

$$S^*(B, M, Q) = \frac{6CP - 8MP^2 - 3C^2Q - 4C^2 + 6CMP - 4BCPQ}{2P(C + 2BP)}. \quad (4.41)$$

Sabemos que

- Si  $S > S^*(B, M, Q)$ , entonces  $TrD\Gamma_\eta(u^*, u^*) > 0$  obteniendo así que el segundo valor propio  $\lambda_2 > 0$ . Luego,  $(u^*, u^*)$  posee una variedad inestable unidimensional,
- Si  $S < S^*(B, M, Q)$ , entonces  $TrD\Gamma_\eta(u^*, u^*) < 0$  obteniendo así que el segundo valor propio  $\lambda_2 < 0$ . Luego,  $(u^*, u^*)$  posee una variedad estable unidimensional.

Estas condiciones aseguran que la bifurcación silla-nodo ocurre de forma genérica.  $\square$

*Observación 4.12.* De la demostración anterior, notemos que a lo largo de la curva  $SN$  puede ocurrir

$$S = \frac{6CP - 8MP^2 - 3C^2Q - 4C^2 + 6CMP - 4BCPQ}{2P(C + 2BP)},$$

lo cual sucede cuando la traza de la matriz Jacobiana  $D\Gamma_\eta$  del sistema evaluada en el equilibrio  $(u^*, u^*)$  se anula, por lo cual se produce una Bifurcación Bogdanov-Takens; ver sección 2.2.6 y sección A.4 en apéndice A.

## 4.4. Acotamiento de soluciones

**Teorema 4.13.** *Las soluciones del sistema (4.2) son acotadas.*

*Demostración.* Usaremos la compactificación de Poincaré [11, 38]. Primero veremos el comportamiento del sistema a medida que  $v \rightarrow \infty$ . Definimos las coordenadas

$$X = \frac{u}{v}, \quad Y = \frac{1}{v}. \quad (4.42)$$

Luego el sistema (4.2) queda

$$\begin{cases} \frac{dX}{d\tau} = -\frac{X}{Y^3} (QX^2 - X^2Y + X^3 - BSY^2 + MXY^2 - MX^2Y \\ \quad + SX^2Y - SXY + BSXY^2 + BQXY), \\ \frac{dY}{d\tau} = -\frac{S}{Y} (X + BY) (X - 1). \end{cases} \quad (4.43)$$

Realizando un reescalamiento del tiempo  $T = \frac{1}{Y^3}\tau$  tenemos que el sistema (4.43) puede extenderse en forma continua al eje  $Y = 0$  en el sistema

$$\widehat{\Gamma}_\eta : \begin{cases} \frac{dX}{dT} = -X (QX^2 - X^2Y + X^3 - BSY^2 + MXY^2 - MX^2Y \\ \quad + SX^2Y - SXY + BSXY^2 + BQXY), \\ \frac{dY}{dT} = -SY^2 (X + BY) (X - 1). \end{cases} \quad (4.44)$$

Los equilibrios del sistema (4.44) en  $Y = 0$  son

$$(0, 0) \quad \text{y} \quad (-Q, 0).$$

La matriz Jacobiana del sistema (4.44) es

$$D\widehat{\Gamma}_\eta(X, Y) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ -2SXY^2 - BSY^3 + SY^2 & -2SX^2Y - 3BSXY^2 + 2SXY + 3BSY^2 \end{pmatrix} \quad (4.45)$$

con

$$\begin{aligned} a_{11} &= 3X^2Y - 3QX^2 - 4X^3 + 3MX^2Y + 2SXY - 3SX^2Y \\ &\quad - 2MXY^2 - 2BQXY + BSY^2 - 2BSXY^2, \\ a_{12} &= Y + MX^3 + SX^2 - SX^3 - 2MX^2Y - BQX^2 + 2BSXY - 2BSX^2Y. \end{aligned}$$

Luego, la matriz Jacobiana  $D\widehat{\Gamma}_\eta$  evaluada en el punto  $(0, 0)$  es

$$D\widehat{\Gamma}_\eta(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ahora para desingularizar el origen aplicamos el método de blowing-up. Primero realizamos un blowing-up horizontal haciendo  $X = r$ ,  $Y = r^2p$ , y un reescalamiento del tiempo  $\tau = r^2T$  obteniendo el sistema

$$\widehat{F}_\eta : \begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = -r(Q + r - Sp - pr - BSp^2 + Mp^2r + BQp - Mpr + Spr + BSp^2r), \\ \frac{dp}{d\tau} = p(Q + r - rp + Mp^2r + BQp - Mpr). \end{cases} \quad (4.46)$$

Los equilibrios del sistema (4.46) en  $r = 0$  son

$$(0, 0) \quad \text{y} \quad \left(0, -\frac{1}{B}\right).$$

La matriz Jacobiana del sistema (4.46) es

$$D\widehat{F}_\eta(r, p) = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} \\ -p^2 + p - Mp^2 + Mp^3 & Q - 2pr + r + 2BQp - 2Mpr + 3Mp^2r \end{pmatrix} \quad (4.47)$$

con

$$c_{11} = 2pr - Q - 2r + 2Mpr - 2Spr - 2Mp^2r + Sp + BSp^2 - 2BSp^2r - BQp,$$

$$c_{12} = r^2 + Mr^2 - Sr^2 - 2Mpr^2 + Sr + 2BSpr - 2BSp^2 - BQr.$$

Al evaluar (4.47) en los equilibrios  $(0, 0)$  y  $(0, -\frac{1}{B})$  obtenemos

$$D\hat{F}_\eta(0, 0) = \begin{pmatrix} -Q & 0 \\ 0 & Q \end{pmatrix}, \quad (4.48)$$

y

$$D\hat{F}_\eta(0, -\frac{1}{B}) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{1}{B^3}(B+1)(B+M) & -Q \end{pmatrix} \quad (4.49)$$

respectivamente.

Como la matriz (4.47) evaluada en el equilibrio  $(0, -\frac{1}{B})$  tiene un valor propio 0 debemos buscar la variedad central  $W^c(0, -\frac{1}{B})$  la cual es tangente al espacio propio de este valor propio. Notemos que el vector propio de  $\lambda = 0$  asociado a  $(0, -\frac{1}{B})$  es

$$\left\{ \left( 1, \frac{(B+1)(B+M)}{B^3Q} \right) \right\}.$$

Luego la pendiente del espacio propio  $E^c(0, -\frac{1}{B})$  es

$$m_1 = -\frac{(B+1)(B+M)}{B^3Q},$$

así tenemos la recta  $p = -\frac{1}{B} + m_1r + O(r^2)$  en el sistema (4.46). Luego al devolvemos al sistema (4.44) mediante el método del Blow-down obtenemos la recta  $Y = -\frac{1}{B}X + m_1X^2 + O(X^3)$ , por lo tanto la separatriz que nos entrega el equilibrio  $(0, -\frac{1}{B})$  tiene pendiente negativa en el sistema original por lo que la variedad central  $W^c(0, 0)$  del 0 no estará en el primer cuadrante y no formará una separatriz para el acotamiento.

Ahora realicemos un blow-up vertical en (4.44) mediante el siguiente cambio  $X = rp$ ,  $Y = p$  y reescalamiento del tiempo  $\tau = p^2T$  obteniendo el sistema

$$\bar{F}_\eta : \begin{cases} \frac{dr}{d\tau} = -r^2 (pr^2 + BQ + Mp + Qr - pr - Mpr), \\ \frac{dp}{d\tau} = -Sp(pr - 1)(B + r). \end{cases} \quad (4.50)$$

Los equilibrios del sistema (4.50) en  $p = 0$  son

$$(0, 0) \quad \text{y} \quad (-B, 0).$$

La matriz Jacobiana del sistema (4.50) es

$$D\bar{F}_\eta(r, p) = \begin{pmatrix} d_{11} & r^3 - r^4 - Mr^2 + Mr^3 \\ -2Sp^2r - BSp^2 + Sp & -2Spr^2 - 2BSpr + Sr + BS \end{pmatrix}, \quad (4.51)$$

donde

$$d_{11} = 3pr^2 - 3Qr^2 - 4pr^3 - 2BQr - 2Mpr + 3Mpr^2.$$

Al evaluar la matriz (4.51) en el equilibrio  $(0, 0)$  obtenemos

$$D\bar{F}_\eta(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & BS \end{pmatrix}. \quad (4.52)$$

El vector propio asociado al valor propio  $\lambda_1 = 0$  de (4.52) es  $\{(1, 0)\}$ , o sea genera la recta  $\{p = 0\}$ , la cual es invariante. Así tenemos que  $W^c(0, 0) = \{(r, p) : p = 0\}$ . Luego

$$\left. \frac{dr}{d\tau} \right|_{p=0} = -Q(r^3 + Br^2) < 0.$$

Obteniendo así que el equilibrio  $(0, 0)$  es silla, pues  $BS > 0$ .

Por otro lado la matriz Jacobiana (4.51) evaluada en el equilibrio  $(-B, 0)$  es

$$D\bar{F}_\eta(-B, 0) = \begin{pmatrix} -B^2Q & -B^2M - B^3M - B^3 - B^4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.53)$$

Debemos buscar la variedad central  $W^c(-B, 0)$ . Notemos que el vector propio de  $\lambda_1 = 0$  es

$$\left\{ \left( -\frac{(B+1)(B+M)}{Q}, 1 \right) \right\},$$

luego la pendiente del espacio propio  $E^c(-B, 0)$  es

$$m_2 = -\frac{(B+1)(B+M)}{Q},$$

así tenemos la recta invariante  $r = -B + m_2p + O(p^2)$  en el sistema (4.50), entonces tenemos  $W^c(-B, 0) = \{(r, p) : r = -B + m_2p + O(p^2)\}$ . Luego, al devolvemos al sistema (4.44) obtenemos la separatriz  $X = -BY + m_2Y^2 + O(Y^3)$ . Vemos que la separatriz que nos entrega el equilibrio  $(-B, 0)$  tiene pendiente negativa en el sistema original por lo que  $W^c(-B, 0)$  no estará en el primer cuadrante y no formará una separatriz para el acotamiento.

Luego obtenemos el retrato mostrado en la figura 4.6 correspondiente a ambos Blow down anteriores. Por lo tanto, el origen  $(0, 0)$  en las coordenadas  $(X, Y)$  se comporta como un punto silla.

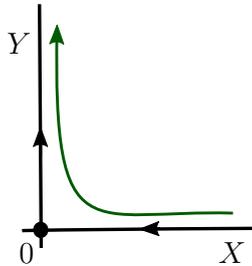


FIGURA 4.6: Retrato de fase del sistema (4.44) cerca del origen, que representa el infinito en (4.2) cuando  $v \rightarrow \infty$ .

Ahora debemos analizar el sistema para  $u \rightarrow \infty$ , para eso realizamos la compactificación de Poincaré

$$X = \frac{1}{u} \quad Y = \frac{v}{u}, \quad (4.54)$$

y el reescalamiento del tiempo  $T = \frac{1}{X^3}\tau$ .

Luego el sistema (4.2) queda

$$\widehat{\Gamma}_\eta : \begin{cases} \frac{dX}{dT} = X(MX^2 - X - MX + QY + BQXY + 1), \\ \frac{dY}{dT} = Y(MX^2 - X - MX + QY + SX + BSX^2 - SXY - BSX^2Y + BQXY + 1). \end{cases} \quad (4.55)$$

El equilibrio del sistema (4.55) en el primer cuadrante cuando  $X = 0$  es  $(0, 0)$ .

La matriz Jacobiana del sistema es

$$D\widehat{\Gamma}_\eta(X, Y) = \begin{pmatrix} 1 - 2MX + 3MX^2 - 2X + QY + 2BQXY & QX + BQX^2 \\ e_{21} & e_{22} \end{pmatrix}, \quad (4.56)$$

con

$$e_{11} = 3X^2Y - 4X^3Y - 4MX^3Y + 5MX^4Y + 4SX^3Y + 3QX^2Y^2 - 4SX^3Y^2 + 5BSX^4Y + 4BQX^3Y^2 - 5BSX^4Y^2,$$

$$e_{22} = X^3 - X^4 - MX^4 + MX^5 + SX^4 + 2QX^3Y - 2SX^4Y + BSX^5 + 2BQX^4Y - 2BSX^5Y.$$

La matriz Jacobiana del sistema (4.55) evaluada en el punto  $(0, 0)$  es

$$D\widehat{\Gamma}_\eta(0, 0) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (4.57)$$

Debemos ver la variedad central del valor propio  $\lambda_1 = 0$  de (4.57). El vector propio asociado al valor propio  $\lambda_1 = 0$  es  $\{(0, 1)\}$ , o sea el eje  $Y$ , el cual es invariante por lo que es una variedad central del origen. Luego

$$\left. \frac{dY}{dT} \right|_{X=0} = Y(QY + 1) > 0.$$

Obtenemos que el equilibrio  $(0, 0)$  es repulsor.

Obtenemos así, el retrato mostrado en la figura 4.7 en una vecindad del infinito dado por las compactificaciones (4.42) y (4.54).

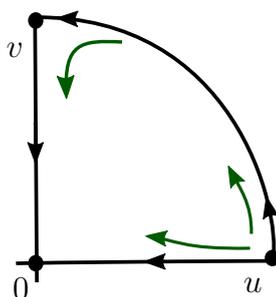


FIGURA 4.7: Ninguna órbita del sistema (4.2) va al infinito para  $t \rightarrow \infty$ .

Vemos en la figura 4.7 que ninguna trayectoria del sistema (4.2) se va a infinito, por lo tanto todas las soluciones son acotadas.  $\square$

## 4.5. Análisis de Bifurcaciones en el plano $(M, B)$

Para complementar los resultados de estabilidad local del sistema (4.2) obtenidos anteriormente realizamos un análisis de bifurcación en los parámetros  $B$  y  $M$ , manteniendo  $Q = 0.6$  y  $S = 0.15$  fijos. El diagrama de bifurcación es obtenido en el programa Matcont [13, 15] y los retratos de fase son realizados en el programa Pplane [39].

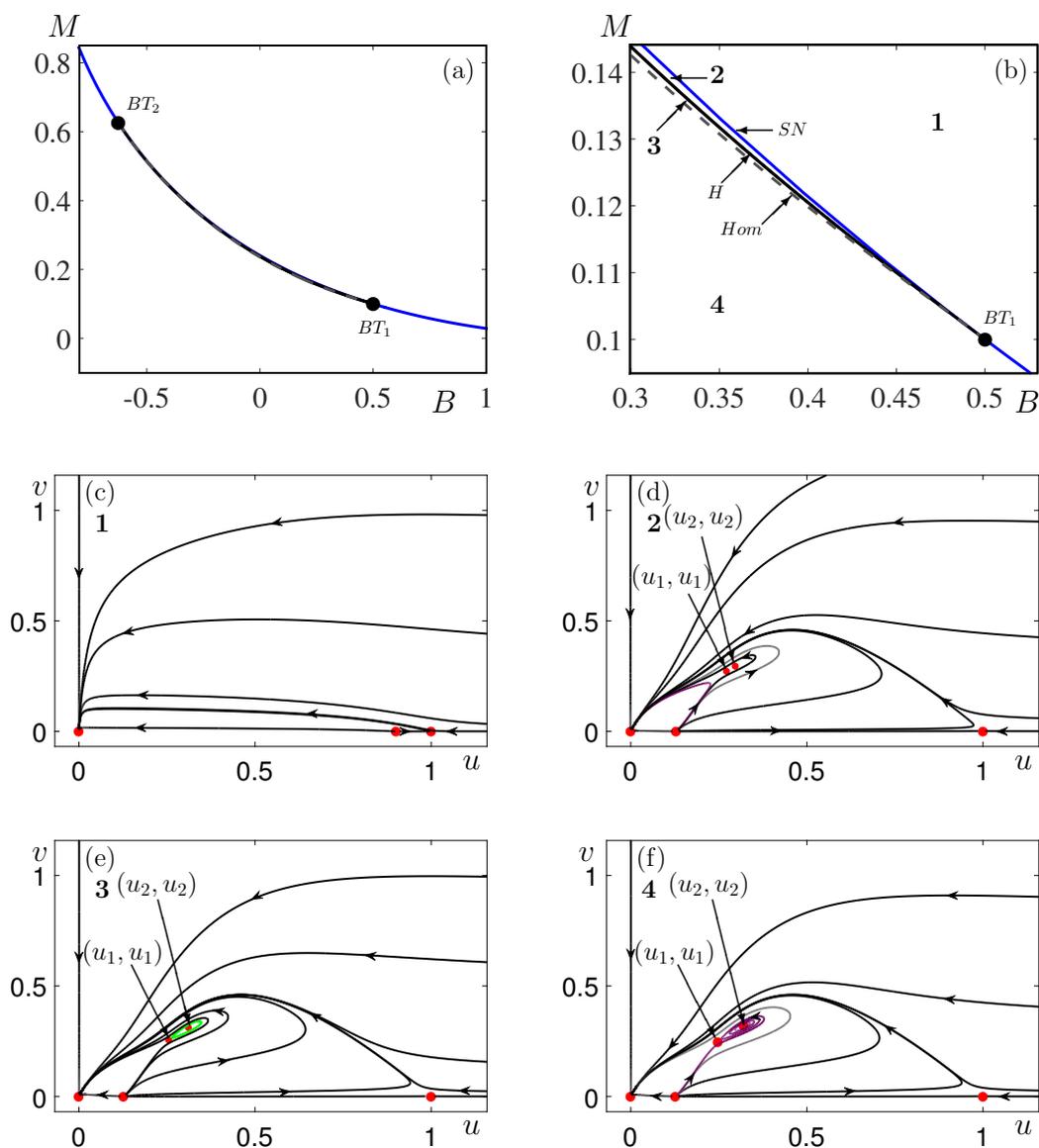


FIGURA 4.8: (a) – (b) Diagrama de Bifurcación. Retrato de fase regiones (c) = **1** con  $M = 0.9$  y  $B = 0.2$ , (d) = **2** con  $M = 0.1285$  y  $B = 0.368$ , (e) = **3** con  $M = 0.127$  y  $B = 0.368$  y (f) = **4** con  $M = 0.126$  y  $B = 0.367$ .

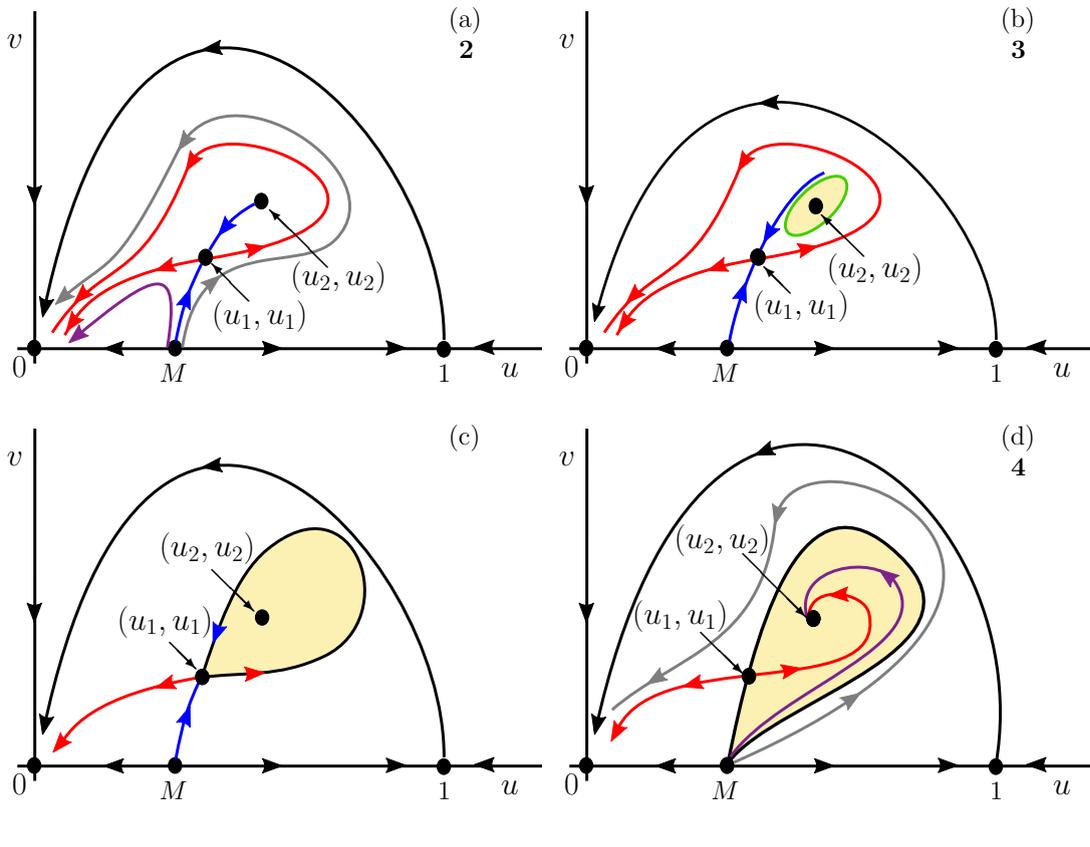


FIGURA 4.9: Bosquejos topológicos de los retratos de fase en las regiones **2** (panel (a)), **3** (panel (b)), **4** (panel (d)) y cuando  $(M, B) \in Hom$  (panel (c)).

En los paneles (a) y (b) de la figura 4.8 tenemos un diagrama de bifurcación del sistema (4.2). En el panel (a) de la figura 4.8 vemos que hay dos puntos Bogdanov-Takens etiquetados como  $BT_1$  y  $BT_2$ , respectivamente. Notemos que el punto  $BT_2$  existe para valores negativos del parámetro  $B$  por lo que no es de nuestro interés. En el panel (b), podemos ver un acercamiento al punto  $BT_1$ , observamos tres curvas de bifurcación distintas: una curva de bifurcación silla-nodo etiquetada como  $SN$ , otra de bifurcación Hopf etiquetada como  $H$  y una última de bifurcación homoclínica etiquetada como  $Hom$ ; estas curvas dividen el plano en cuatro regiones distintas mostradas en 4.8(b), etiquetadas como **1**, **2**, **3**, y **4**, respectivamente.

Los paneles (c), (d), (e) y (f) muestran los retratos de fase obtenidos numéricamente de la dinámica que se encuentra en las regiones **1**, **2**, **3**, y **4**, respectivamente. Para un mejor entendimiento de los retratos de fase, en la figura 4.9 observamos bosquejos de lo que ocurre en las distintas regiones señaladas en la figura 4.8. En los paneles (a), (b) y (d) están bosquejadas las regiones **2**, **3**, y **4** respectivamente. En el panel (c) vemos lo que ocurre cuando estamos sobre la curva de bifurcación  $Hom$ .

Realicemos un recorrido por el diagrama 4.8(b) variando  $(B, M)$  en sentido anti-horario comenzando en la región **1**. En la región **1** nos encontramos en el caso del retrato de fase mostrado en el panel 4.8(c), en donde el sistema no tiene puntos de equilibrios en el interior del primer cuadrante. Observando la figura vemos que todas las trayectorias del sistema van al equilibrio  $(0, 0)$ .

Cuando el punto  $(B, M)$  entra a la región **2** a través de la curva de bifurcación Silla-nodo, se tienen dos equilibrios al interior del primer cuadrante como observamos en los retratos 4.8(d) y 4.9(a), un equilibrio  $(u_1, u_1)$  silla y un equilibrio  $(u_2, u_2)$  el cual es repulsor. Vemos que todas las trayectorias se van al equilibrio  $(0, 0)$  a excepción de las dos ramas de la variedad estable del equilibrio  $(u_1, u_1)$ . Notemos que hay dos tipos de curvas que se aproximan al origen las cuales se muestran en el panel (a) de la figura 4.10: unas órbitas se aproximan rápidamente al origen (representadas por la curva de color morado), mientras que otras realizan una excursión y luego van al origen  $(0, 0)$  (representadas por la curva de color gris).

Siguiendo con el recorrido, cuando  $(B, M)$  entra a la región **3** a través de la curva de bifurcación de Hopf, como podemos observar en las figuras 4.8(e) y 4.9(b), el equilibrio  $(u_2, u_2)$  se convierte en estable y un ciclo límite inestable aparece. Vemos que el ciclo límite es la frontera de la cuenca de atracción del equilibrio  $(u_2, u_2)$ . Las trayectorias en la región encerrada por el ciclo límite tienden al equilibrio  $(u_2, u_2)$  y las que están por fuera del ciclo límite se aproximan al equilibrio  $(0, 0)$ .

Finalmente a medida que  $(B, M)$  se acerca a la curva homoclínica, el ciclo se acerca al punto silla  $(u_1, u_1)$ , creciendo su período. En el límite, cuando  $(B, M) \in Hom$ , se tiene una órbita homoclínica conectando el punto silla  $(u_1, u_1)$ , como en el panel (c) de la figura 4.9. Esta órbita homoclínica es la frontera de la cuenca de atracción del equilibrio  $(u_2, u_2)$ . Luego, cuando el punto  $(B, M)$  cruza a la región **4**, esta curva homoclínica se rompe obteniendo el retrato en las figuras 4.8(f) y 4.9(d). Notemos que en la región **4**, la variedad estable del equilibrio  $(u_1, u_1)$  es la separatriz, donde las órbitas a un lado de ésta son atraídas por el punto  $(u_2, u_2)$  y la que están al lado opuesto se van al origen. Todo esto se ve en el panel (b) de la figura 4.10, las órbitas que son atraídas al punto  $(u_2, u_2)$  están representadas por la curva de color morado y las que se van al origen están representadas por la curva de color gris.

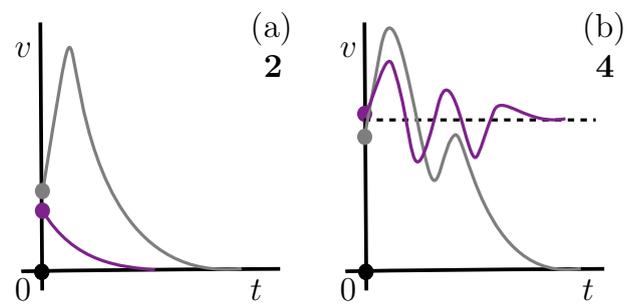


FIGURA 4.10: Bosquejo que ilustra el fenómeno de excitabilidad del sistema (4.2) y el rol de la variedad estable como separatriz en los casos (a) y (b).

# Capítulo 5

## Conclusiones

El objetivo de esta tesis fue analizar un modelo de depredación bidimensional del tipo Leslie-Gower dado por (4.1). En el capítulo 2 se entregaron herramientas matemáticas necesarias como conceptos, definiciones y teoremas importantes sobre la teoría cualitativa de ecuaciones diferenciales ordinarias y teoría de bifurcaciones, para el estudio del modelo (4.1). En el capítulo 3 se expuso sobre las nociones básicas de la teoría de dinámica de poblaciones. Se definieron los principales conceptos que nos permitieron abordar nuestro modelo (4.1), el cual fue posteriormente estudiado en el capítulo 4.

Para el estudio del modelo (4.1) en el capítulo 4, asumimos que la respuesta funcional es lineal y que la población de presas,  $x = x(t)$ , está afectada por dos efectos Allee los cuales se vieron representado en el sistema por los parámetros  $m$  y  $b$ . El análisis fue realizado en el campo de vectores (4.2), topológicamente equivalente al modelo inicial extendido a todo el primer cuadrante, el cual fue obtenido mediante una reparametrización y un cambio de tiempo, por lo que todos los resultados obtenidos en función de este campo son aplicables al sistema original. Durante el trabajo mostramos que los parámetros más relevantes del sistema (4.1) son  $m$ ,  $b$ , los cuales son los parámetros de efecto Allee, y  $K$ , que es el parámetro que representa la capacidad de soporte del medio ambiente de las presas.

Probamos la existencia y estabilidad local de puntos de equilibrio en ausencia de depredador. Uno de estos puntos de equilibrio ocurre cuando la población de la presa es igual a  $K$  en el sistema (4.1), y es siempre punto silla. Existe otro equilibrio, el cual es repulsor, cuando el efecto Allee es de tipo fuerte y  $0 < \frac{m}{K} < 1$ . Esto quiere

decir que este equilibrio existe cuando la capacidad de carga es mayor que el valor del parámetro Allee  $m$ .

También el origen,  $(u, v) = (0, 0)$ , es un equilibrio del sistema, el cual resulta ser no hiperbólico por lo que el estudio de su estabilidad local fue realizado mediante técnicas de desingularización, en este caso el método del blowing-up. Se probó en el lema 4.4 que la estabilidad del origen depende de  $\frac{m}{K} + \frac{s}{r} \frac{b}{K}$ . A bajas densidades de población habrá extinción de ambas poblaciones por causa del doble efecto Allee, en cualquiera de los siguientes casos:

- (i) si  $m > 0$  y  $m > \left(\frac{s}{r}\right) b > 0$ ; es decir, cuando ocurre efecto Allee fuerte y cuando el parámetro de efecto Allee es mayor que la razón entre la tasa de crecimiento intrínseco del depredador y de la presa respectivamente;
- (ii) si  $m = 0$  y  $\frac{r}{b} \leq qn$ ; es decir, cuando ocurre efecto Allee débil y cuando la razón entre la tasa de crecimiento intrínseco de la presa y el parámetro de doble efecto Allee es menor o igual que el producto entre la tasa máxima de consumo per cápita de los depredadores y la medida de la calidad de alimento que proveen las presas para la conversión en nacimientos de nuevos depredadores.

En el lema 4.5 probamos que pueden existir dos, uno o ningún punto interior en el primer cuadrante, obteniendo una condición para que ocurra una bifurcación Silla-Nodo, lo cual fue probado en el teorema 4.11. También, en el teorema 4.10 encontramos condiciones para la ocurrencia de una bifurcación de Hopf.

En la sección 4.5 se hizo un análisis de bifurcación del sistema mostrado en los paneles (a) y (b) de la figura 4.8. En particular, para ciertos valores de los parámetros el sistema pasa por una bifurcación Bogdanov-Takens. El punto Bogdanov-Takens puede ser considerado como un centro organizador de la dinámica al interior del primer cuadrante, pues en torno a él aparecen curvas de bifurcación Hopf, Homoclínica y Silla-Nodo, las cuales separan al plano  $(B, M)$  en 4 regiones abiertas. En los retratos de fase observamos que en las regiones **1** y **2** las poblaciones se van a la extinción, a diferencia de la región **3**, en donde el ciclo límite generado alrededor del equilibrio  $(u_2, u_2)$  actúa como separatriz: las soluciones por fuera del ciclo límite se van al origen, lo que significa la extinción de las especies, y los que están por dentro de este van hacia el equilibrio logrando la coexistencia de las especies. Igualmente, en la región **4** la variedad estable del equilibrio  $(u_1, u_1)$  forma una separatriz, en donde las órbitas que están a su derecha tienden al origen, indicando la extinción de ambas especies, y las

órbitas que están a su izquierda tienden al equilibrio  $(u_2, u_2)$ , indicando la coexistencia de las especies.

Cabe señalar que entre las preguntas abiertas de este proyecto queda determinar la cantidad máxima de ciclos límites que podrían coexistir; al igual que determinar qué otro tipo de bifurcaciones puede sufrir el sistema para otra elección de parámetros  $Q$  y  $S$ . Una pregunta interesante sería qué ocurre con el sistema si se incluye una tercera especie, o si se cambia la respuesta funcional. También se podría considerar una variación del sistema, como sería considerar difusión espacial, es decir, ambas especies varían tanto en el tiempo como en el espacio. Este último enfoque consideraría sistemas de ecuaciones diferenciales parciales [17, 35, 36].

# Apéndice A

## Teoremas de la teoría de bifurcaciones

### A.1. Bifurcación Silla-nodo

Para la bifurcación silla-nodo tenemos el siguiente teorema:

**Teorema A.1. *Bifurcación silla-nodo***

*Sea*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}, \alpha \in \mathbb{R}. \quad (\text{A.1})$$

*Supongamos que se satisfacen las siguientes condiciones:*

*(B.1)  $f(x_0, \alpha^*) = 0$  (equilibrio en  $x = x_0$  para  $\alpha = \alpha^*$ ),*

*(B.2)  $\lambda = f_x(x_0, \alpha^*) = 0$  (valor propio cero en  $x_0$  para  $\alpha = \alpha^*$ ),*

*(G)  $f_{xx}(x_0, \alpha^*) \neq 0$  (término de segundo orden de  $f$  no se anula en el equilibrio para  $\alpha = \alpha^*$ ),*

*(T)  $f_\alpha(x_0, \alpha^*) \neq 0$  (velocidad positiva no nula en  $\alpha$ ),*

*Entonces hay coordenadas invertibles y cambios de parámetros transformando el sistema en*

$$\dot{y} = \beta \pm y^2. \quad (\text{A.2})$$

*Demostración.* La idea principal de la demostración es la siguiente: mediante cambios invertibles y suaves de las coordenadas y de parámetros, transformar el sistema (A.1) en la forma (A.2) hasta, e incluyendo los términos de segundo orden. Ver detalles en [26, 29]  $\square$

## A.2. Bifurcación de Hopf

Para la bifurcación de Hopf tenemos el siguiente teorema:

**Teorema A.2.** (*Bifurcación de Hopf*) *Supongamos que tenemos un campo bidimensional*

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.3})$$

*con  $f$  suave, que tenga para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño un equilibrio en  $x_0 = 0$ , con valores propios  $\lambda_{1,2}(\alpha) = \mu(\alpha) \pm i\omega(\alpha)$ , con  $\mu(0) = 0$  y  $\omega(0) > 0$ .*

*Supongamos que las siguientes condiciones se satisfacen*

(G)  $l_1(0) \neq 0$ , donde  $l_1$  se definirá más adelante,

(T)  $\frac{d\mu}{d\alpha}(0) \neq 0$ .

*Entonces, el campo (A.3) es localmente topológicamente equivalente a la forma normal*

$$\begin{pmatrix} \dot{y}_1 \\ \dot{y}_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta & -1 \\ 1 & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \pm (y_1^2 + y_2^2) \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}. \quad (\text{A.4})$$

*Observación A.3.* 1. La cantidad  $l_1$  se llama la primera cantidad de Lyapunov.

En un campo vectorial bidimensional de la forma

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega \\ \omega & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}, \quad (\text{A.5})$$

con  $P(0) = Q(0) = 0$ ,  $DP(0) = 0$  y  $DQ(0) = 0$ , se puede probar [26, 29] que

$$l_1 = \frac{1}{16}[P_{xxx} + P_{xyy} + Q_{xxy} + Q_{yyy}] + \frac{1}{16\omega}[P_{xy}(P_{xx} + P_{yy}) - Q_{xy}(Q_{xx} + Q_{yy}) - P_{xx}Q_{xx} + P_{yy}Q_{yy}], \quad (\text{A.6})$$

donde las derivadas están evaluadas en  $(x, y, \alpha) = (0, 0, 0)$ .

2. El signo de  $l_1(0)$  determina el tipo de bifurcación de Hopf:

- Si  $l_1(0) < 0$  entonces ocurre una bifurcación de Hopf supercrítica (aparece un ciclo límite estable),
- si  $l_1(0) > 0$  entonces ocurre una bifurcación de Hopf subcrítica (aparece un ciclo límite inestable).

### A.3. Bifurcación de órbitas homoclinicas planares

Considere un sistema planar

$$\dot{x} = f(x, \beta), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \beta \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.7})$$

tal que para  $\beta = 0$  tiene una órbita homoclinica a una silla  $x_0$ , como se muestra en la parte central de la figura A.1. Introduzcamos una sección transversal unidimensional local  $\Sigma$  a la variedad estable  $W^s(x_0)$  cerca de la silla, como se muestra en la figura. Seleccionemos una coordenada  $\xi$  a lo largo de  $\Sigma$  tal que el punto de la intersección con la variedad estable corresponde a  $\xi = 0$ . Esta construcción puede llevarse a cabo para todos los sistemas con  $|\beta| \approx 0$ . Para tales sistemas, sin embargo, la variedad inestable  $W^u$  genéricamente no regresa a la silla. La figura A.1 ilustra las dos posibilidades: Las variedades se separan ya sea “hacia abajo” o “hacia arriba”. Denotemos por  $\xi^u$  el  $\xi$ -valor de la intersección de  $W^u$  con  $\Sigma$ .

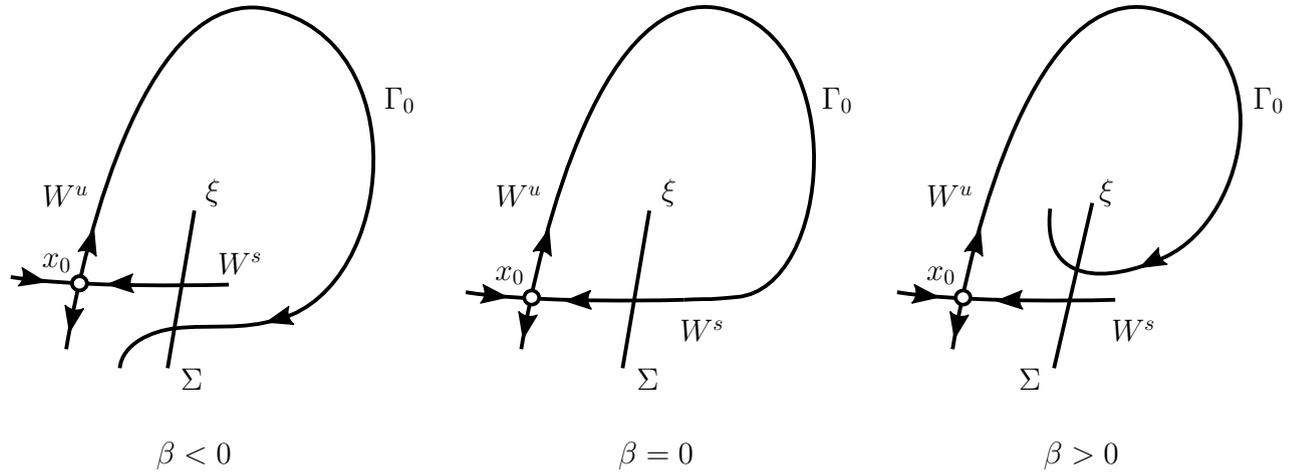


FIGURA A.1: Función de división en el caso planar ( $n = 2$ ).

**Definición A.4.** El escalar  $\beta = \xi^u$  se llama una función de separación.

En realidad, la función de separación es un funcional definido en los sistemas originales y perturbados. Se convierte en una función suave de parámetros para un sistema dependiente de parámetros. La ecuación

$$\beta = 0$$

es una condición de bifurcación para la bifurcación homoclínica en  $\mathbb{R}^2$ . Por lo tanto, la bifurcación homoclínica en este caso tiene codimensión uno.

En el caso planar, la bifurcación homoclínica está completamente caracterizada por el siguiente teorema.

**Teorema A.5. (Andronov y Leontovich [1939])**

Considere un sistema bidimensional

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\text{A.8})$$

con  $f$  suave, que tiene en  $\alpha = 0$  un punto de equilibrio silla  $x_0 = 0$  con valores propios  $\lambda_1(0) < 0 < \lambda_2(0)$  y una órbita homoclínica  $\Gamma_0$ . Asuma que las siguientes condiciones de genericidad se cumplen:

(H.1)  $\sigma_0 = \lambda_1(0) + \lambda_2(0) \neq 0$ ;

(H.2)  $\beta'(0) \neq 0$ , donde  $\beta(\alpha)$  es la función de división previamente definida.

Entonces, para todo  $|\alpha|$  suficientemente pequeño, existe una vecindad  $U_0$  de  $\Gamma_0 \cup x_0$  en la que un único ciclo límite  $L_\beta$  se bifurca desde  $\Gamma_0$ . Más aún, el ciclo es estable y existe para  $\beta > 0$  si  $\sigma_0 < 0$ , y es inestable y existe para  $\beta < 0$  si  $\sigma_0 > 0$ .

*Demostración.* La idea principal de la demostración consiste en introducir dos secciones transversales locales cerca del punto de equilibrio silla,  $\Sigma$  y  $\Pi$ , las cuales son transversales a las variedades estable e inestable, respectivamente. Entonces es posible definir un mapeo de Poincaré  $P$  en una sección media  $\Sigma^+$ ,

$$P : \Sigma^+ \rightarrow \Sigma,$$

como una superposición de un mapeo cerca del punto silla  $\Delta : \Sigma^+ \rightarrow \Pi$  y un mapeo  $Q : \Pi \rightarrow \Sigma$  cerca de la parte global de la órbita homoclínica:

$$P = Q \circ \Delta.$$

Por último, tenemos que tener en cuenta la correspondencia usual entre los ciclos límite de (A.8) y puntos fijos de  $P$ . Ver detalles en [29].  $\square$

La siguiente definición es bastante útil.

**Definición A.6.** El número real  $\sigma = \lambda_1 + \lambda_2$  es llamada la cantidad silla.

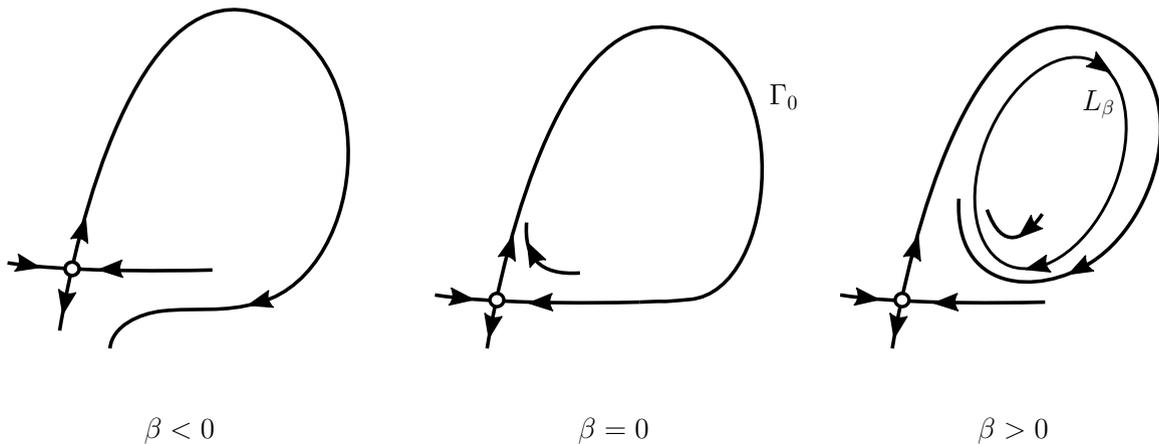
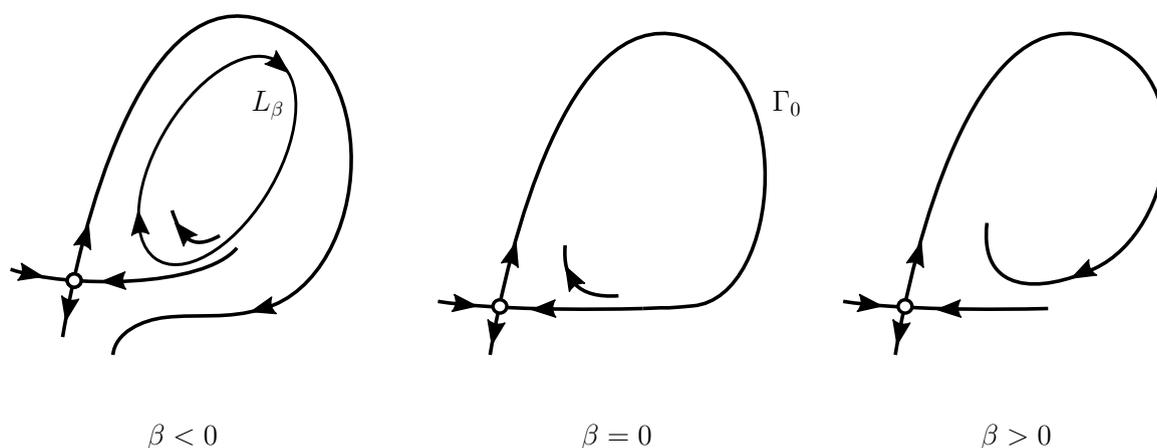


FIGURA A.2: Bifurcación homoclínica en el plano ( $\sigma < 0$ ).


 FIGURA A.3: Bifurcación homoclínica en el plano ( $\sigma > 0$ ).

Las figuras A.2 y A.3 ilustran el teorema anterior. Si  $\alpha = 0$ , el sistema tiene una órbita homoclínica al origen. Existe un punto de equilibrio silla cerca del origen para todo  $|\alpha| \neq 0$  suficientemente pequeño, mientras que la órbita homoclínica desaparece, dividiéndose “hacia arriba” o “hacia abajo”. De acuerdo a la condición (H.2), la función de división  $\beta = \beta(\alpha)$  puede ser considerada como un nuevo parámetro.

Si la cantidad silla satisface  $\sigma < 0$ , la órbita homoclínica en  $\beta = 0$  es estable desde el interior, y el teorema da la existencia de un único ciclo límite estable  $L_\beta \subset U_0$  para  $\beta > 0$ . Para  $\beta < 0$  no hay órbitas periódicas en  $U_0$ . Si la cantidad silla satisface  $\sigma > 0$ , la órbita homoclínica en  $\beta = 0$  es inestable desde el interior, y el teorema da la existencia de un único ciclo límite inestable  $L_\beta \subset U_0$  para  $\beta < 0$ . Para  $\beta > 0$  no hay órbitas periódicas en  $U_0$ . Por lo tanto, el signo de  $\sigma$  determina la dirección de bifurcación y la estabilidad del ciclo límite que aparece. Como es habitual, el término “dirección” tiene un significado convencional y se relaciona con nuestra definición de la función de división.

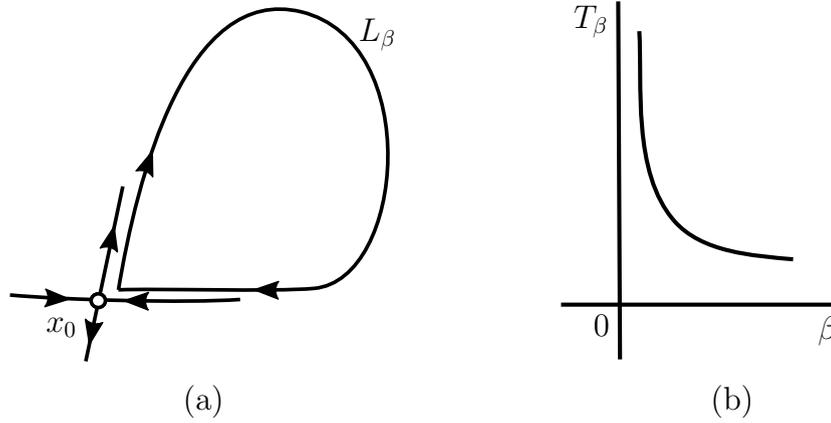


FIGURA A.4: (a) Ciclo cerca a una bifurcación homoclínica. (b) Período del ciclo cerca a una bifurcación homoclínica.

A medida que  $|\beta| \rightarrow 0$ , el ciclo pasa más y más cerca a la silla y se vuelve cada vez más “angular” (ver figura A.4 (a)). Su periodo  $T_\beta$  tiende a infinito a medida que  $\beta$  se aproxima a cero, ya que un punto de fase moviéndose a lo largo del ciclo gasta más y más tiempo cerca del equilibrio (ver figura A.4 (b)).

## A.4. Bifurcación Bogdanov-Takens

### A.4.1. Derivación a una forma normal

Consideremos un campo de vectores planar

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2, \quad (\text{A.9})$$

donde  $f$  es suficientemente suave. Asumamos que el origen  $x = 0$  de (A.9) es un equilibrio con dos valores propios cero  $\lambda_{1,2} = 0$  en  $\alpha = 0$ , y tal que la matriz Jacobiana  $D_x f(0, 0)$  es nilpotente y diferente de la matriz nula. La ecuación (A.9) puede ser escrita en  $\alpha = 0$  en la forma

$$\dot{x} = D_x f(0, 0)x + F(x), \quad (\text{A.10})$$

donde  $F(x)$  contiene todos los términos cuadráticos y de orden superior  $O(\|x\|^2)$ .

La matriz  $D_x f(0, 0)$  tiene un único vector propio linealmente independiente  $v_1$  que corresponde al valor propio repetido 0. Además, uno puede encontrar un vector propio generalizado  $v_2$  como una solución de la ecuación  $D_x f(0, 0)v_2 = v_1$ .

Sea  $P = [v_1, v_2]$  sea la matriz cuyas columnas son los vectores (linealmente independientes)  $v_1$  y  $v_2$ . Por lo tanto, el cambio de coordenadas

$$y = P^{-1}x \quad (\text{A.11})$$

mapea el campo de vectores  $f$  a un sistema  $C^\infty$ -conjugado definido como

$$g = P^{-1} \circ f \circ P. \quad (\text{A.12})$$

En particular, en  $\alpha = 0$ , el sistema (A.10) toma la forma

$$\dot{y} = D_y g(0, 0)y + (P^{-1} \circ F \circ P)(y), \quad (\text{A.13})$$

donde  $D_y g(0, 0) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ .

Expandiendo (A.12) en series de Taylor con respecto a  $y = (y_1, y_2)$  alrededor de  $(y_1, y_2) = (0, 0)$ , obtenemos

$$\begin{aligned} \dot{y}_1 &= y_2 + a_{00}(\alpha) + a_{10}(\alpha)y_1 + a_{01}(\alpha)y_2 + \frac{1}{2}a_{20}(\alpha)y_1^2 + a_{11}(\alpha)y_1y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}a_{02}(\alpha)y_2^2 + O(\|y\|^3), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \dot{y}_2 &= b_{00}(\alpha) + b_{10}(\alpha)y_1 + b_{01}(\alpha)y_2 + \frac{1}{2}b_{20}(\alpha)y_1^2 + b_{11}(\alpha)y_1y_2 \\ &\quad + \frac{1}{2}b_{02}(\alpha)y_2^2 + O(\|y\|^3), \end{aligned}$$

donde los coeficientes  $a_{ij}(\alpha)$  y  $b_{ij}(\alpha)$  son funciones suaves que se pueden encontrar a partir de (A.9), (A.11) y (A.12). En particular, en  $\alpha = 0$ , a partir de (A.10) y (A.13), tenemos  $a_{00}(0) = a_{10}(0) = a_{01}(0) = b_{00}(0) = b_{10}(0) = b_{01}(0) = 0$ .

En este escenario, se puede demostrar el siguiente resultado para la forma normal de la bifurcación Bogdanov-Takens:

**Teorema A.7.** *Supongamos que el sistema planar (A.9) tiene, en  $\alpha = 0$ , un equilibrio en el origen  $x = 0$  con dos valores propios cero  $\lambda_{1,2}(0) = 0$ . Supongamos que las siguientes condiciones de genericidad se satisfacen:*

(BT.0) *La matriz Jacobiana  $D_x f(0, 0)$  no es la matriz nula;*

(BT.1)  $a_{20}(0) + b_{11}(0) \neq 0$ ;

(BT.2)  $b_{20}(0) \neq 0$ ;

(BT.3) *El mapeo*

$$(x, \alpha) \mapsto (f(x, \alpha), \operatorname{tr} D_x f(x, \alpha), \det D_x f(x, \alpha))$$

*es regular en el punto  $(x, \alpha) = (0, 0) \in \mathbb{R}^4$ .*

*Entonces, existe un cambio suave invertible de parámetros, tal que el campo de vectores  $f$ , en una vecindad suficientemente pequeña de  $(x, \alpha) = (0, 0)$ , es topológicamente equivalente a una de las siguientes formas normales:*

$$\begin{cases} \dot{\xi}_1 &= \xi_2, \\ \dot{\xi}_2 &= \beta_1 + \beta_2 \xi_1 + \xi_1^2 + s \xi_1 \xi_2, \end{cases} \quad (\text{A.14})$$

donde  $s = b_{20}(a_{20}(0) + b_{11}(0)) = \pm 1$ .

*Demostración.* Mediante cambios de coordenadas, reescalamiento del tiempo y reduciendo el sistema a un oscilador no lineal se obtiene lo pedido. Ver los detalles en [29].  $\square$

La construcción de la forma normal (A.14) fue desarrollada primero por Bogdanov [6]. Una forma normal equivalente se introdujo simultáneamente por Takens en [43].

*Observación A.8.* La bifurcación Bogdanov-Takens da lugar a una bifurcación de ciclo límite, es decir, la aparición de la órbita homoclínica, para valores de los parámetros cercanos a  $(\beta_1, \beta_2) = (0, 0)$ . Por lo tanto, se puede demostrar analíticamente (mediante la verificación de las condiciones de bifurcación y las condiciones genericidad (BT.1) - (BT.3)) la existencia de esta bifurcación global en el sistema. Una vez más, éste es uno de los pocos métodos habituales para detectar bifurcaciones homoclínicas analíticamente.

# Apéndice B

## Análisis numérico de bifurcaciones

Dado un sistema de ecuaciones diferenciales ordinarias autónomas en función de parámetros, nuestro objetivo final es obtener el diagrama de bifurcación. Sin embargo, en muchos casos, esta tarea conlleva complicados y tediosos cálculos, los cuales pueden ser muy difíciles de interpretar. En esta sección vamos a describir algunas de las técnicas básicas utilizadas en el análisis numérico de campos vectoriales. Nos centramos en los algoritmos que son más específicos para el análisis de bifurcación, específicamente aquellos para la localización de los equilibrios y su continuación con respecto a los parámetros, y para la detección, análisis, y la continuación de las bifurcaciones.

### B.1. Localización de equilibrios y su estabilidad

Para construir el diagrama de bifurcación, el primer paso consiste en hallar un punto de equilibrio para un valor fijo de parámetros.

Consideremos un sistema a tiempo continuo sin parámetros o con todos los parámetros fijos en algunos valores:

$$\dot{x} = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (\text{B.1})$$

donde  $f$  es suficientemente suave.

El análisis de sistema (B.1) comienza determinando sus equilibrios, o sea, las soluciones del sistema algebraico

$$f(x) = 0, \quad x \in \mathbb{R}^n. \quad (\text{B.2})$$

Una solución de (B.2) podría ser conocida analíticamente ya que el sistema es algebraico con componentes polinomiales (solo si  $f$  es polinomial) de bajo orden. En este caso, podemos aplicar resultados algebraicos para determinar el número de soluciones y (a veces) encontrarlas de forma explícita. Sin embargo, a veces sistemas de polinomios de orden relativamente bajo no tienen soluciones simples explícitas. Por lo tanto, en estos casos los métodos numéricos son útiles.

Si el sistema (B.1) tiene un equilibrio asintóticamente estable  $x = x_0$ , entonces podemos encontrarlo con una precisión deseada mediante la integración numérica de (B.1) comenzando en un punto  $x$  dentro de la cuenca de atracción de  $x_0$ , obteniendo

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \|\varphi^t(x) - x_0\| = 0.$$

La norma que consideraremos será  $\|x\|^2 = \langle x, x \rangle = x^T x$ , donde  $T$  significa transpuesta. Si el equilibrio  $x_0$  es repulsor, se puede invertir el tiempo y repetir el procedimiento, donde la convergencia a  $x_0$  sería hacia atrás en el tiempo ( $t \rightarrow -\infty$ ).

En general, para un equilibrio que no es atractor ni repulsor, el problema de la ubicación sólo puede resolverse siempre que la posición de  $x_0$  sea conocida. El *método de Newton* es un procedimiento estándar que genera una secuencia de puntos  $\{x_{(i)}\}_{i=0}^{\infty}$  que converge, bajo condiciones muy generales, al equilibrio. El método de Newton es un procedimiento para localizar ceros de una función y sus propiedades se pueden hallar en [29].

## Estabilidad

Después de que se encuentra un equilibrio  $x_0$  con la exactitud deseada, la siguiente tarea consiste en analizar el retrato de fases en la zona, en particular, para determinar si  $x_0$  es estable o inestable.

En el caso hiperbólico, la estabilidad de  $x_0$  se determina por sus valores propios, es decir, las raíces del *polinomio característico*

$$p(\lambda) = \det(A - \lambda I_n),$$

donde  $A = Df(x_0)$ . En la mayoría de los métodos numéricos para valores propios este polinomio no se construye de manera explícita. En lugar de ello, ciertas transformaciones [28] se utilizan para llevar a la matriz  $A$  a su forma diagonal o forma de Jordan. De esta forma los valores propios son fácilmente extraíbles (ver por ejemplo [9, 40]). Entonces, el número de los valores propios en el lado izquierdo (derecho) del semiplano da la dimensión de la variedad estable (inestable) de  $x_0$ . La ausencia de valores propios con  $Re \lambda \geq 0$  significa estabilidad. En realidad, para determinar la estabilidad, no necesitamos calcular los valores propios. Hay métodos para comprobar la estabilidad mediante el cálculo de los determinantes de ciertas matrices, cuyos elementos están contruidos a partir de los de la matriz  $A$  o en términos de los coeficientes de  $p(\lambda)$  mediante reglas simples. Para los detalles técnicos sobre estos métodos auxiliares referimos al lector interesado a [29].

## B.2. Localización de ciclos límite

Encontrar ciclos límite de (B.1) es un problema más complicado que la localización de sus equilibrios. No hay una manera regular para resolver este problema en general. Si el sistema posee un ciclo estable  $L_0$ , podemos tratar de encontrarlo mediante integración numérica (simulación). Si el punto inicial para la integración pertenece a la cuenca de atracción de  $L_0$ , la órbita calculada convergerá a  $L_0$  en tiempo positivo. Sin embargo, tal enfoque no podrá localizar un ciclo silla, incluso si invertimos el tiempo.

Para un ciclo general, podríamos plantear el problema a nivel *local*, asumiendo que la posición del ciclo es aproximadamente conocida y luego tratando de localizarlo con más precisión. Tal ajuste surge naturalmente si el sistema depende de los parámetros. Entonces, podríamos conocer un ciclo en ciertos valores de parámetros y desear su “continuación” con respecto a algún parámetro haciendo pequeños pasos. En este proceso de continuación, un ciclo hiperbólico variará de forma continua, y su posición en el valor de parámetro “anterior” proporciona una buena aproximación del ciclo en el valor de parámetro “siguiente”.

El periodo del ciclo,  $T_0$ , es generalmente desconocido. Es conveniente formular el problema de la localización del ciclo como un *problema de valores en la frontera* (BVP)

periódico en un intervalo fijo. Específicamente, consideremos  $T_0$  como un parámetro e introduzcamos el sistema

$$\frac{du}{d\tau} = T_0 f(u), \quad (\text{B.3})$$

que difiere de (B.1) por el factor de escalamiento del tiempo  $T_0$ , y donde el nuevo tiempo se llama  $\tau$ . Una solución  $u(\tau)$  de (B.3) con algún  $T_0$  fijo que satisface las *condiciones de contorno periódicas*

$$u(0) = u(1) \quad (\text{B.4})$$

corresponde a una solución  $T_0$ -periódica de (B.1). Sin embargo, la condición (B.4) no define la solución periódica de forma única. De hecho, cualquier desplazamiento del tiempo de una solución del BVP periódico (B.3), (B.4) es otra solución. Por lo tanto, una *condición de fase* adicional tiene que ser añadida al problema (B.3), (B.4) con el fin de “seleccionar” una solución entre todas las correspondientes al ciclo:

$$\Psi[u] = 0, \quad (\text{B.5})$$

donde  $\Psi[u]$  es un *funcional* escalar definido en las soluciones periódicas. Hay varias formas de configurar una condición de fase (B.5).

Por ejemplo, la condición

$$\Psi[u] = g(u(0)) = 0, \quad (\text{B.6})$$

donde  $g(x)$  es alguna función escalar suave, selecciona una solución que pasa en  $\tau = 0$  a través de un punto en la superficie

$$\Sigma_0 = \{u \in \mathbb{R}^n : g(u) = 0\}.$$

Si  $v(\tau)$  es una función vectorial suave con período uno, entonces

$$\Psi[u] = \langle u(0) - v(0), \dot{v}(0) \rangle = 0 \quad (\text{B.7})$$

especifica una solución  $u(\tau)$  pasando en  $\tau = 0$  a través del hiperplano ortogonal a la curva cerrada  $\{u : u = v(\tau), \tau \in [0, 1]\}$  en  $\tau = 0$ . Se asume que se conoce la solución de “referencia”  $v$ . Si continuamos un ciclo límite con respecto a algún parámetro,  $v(\tau)$  se puede ver como una solución correspondiente al ciclo límite en los valores de los parámetros “anteriores”.

Sin embargo, la condición de fase más fiable es proporcionada por

$$\Psi[u] = \int_0^1 \langle u(\tau), \dot{v}(\tau) \rangle d\tau = 0, \quad (\text{B.8})$$

donde  $v(\tau)$  es la solución de referencia de período uno. La condición (B.8) se llama la *condición de fase integral*. Es una condición necesaria para un mínimo local de la distancia

$$\rho(\sigma) = \int_0^1 \|u(\tau + \sigma) - v(\tau)\|^2 d\tau$$

entre  $u$  y  $v$  con respecto a posibles desplazamientos de tiempo  $\sigma$ .

Para resolver el BVP periódico (B.3) - (B.5), independientemente de la condición de fase que se elija, tenemos que reducirlo a un problema de dimensión finita. Hay varios métodos para tal *discretización*, como

- Shooting y shooting múltiple,
- diferencias finitas,
- colocación ortogonal.

Se pueden encontrar los detalles de estos métodos en [29].

### B.3. Análisis de bifurcación a un parámetro

Una vez localizadas las coordenadas de un equilibrio  $x_0$ , queremos hallar la dependencia de  $x_0 = x_0(\alpha)$  con respecto a un parámetro  $\alpha$ . Consideremos un sistema a tiempo continuo que depende de un parámetro:

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \alpha \in \mathbb{R}, \quad (\text{B.9})$$

donde  $f$  es una función suave de  $(x, \alpha)$ . El análisis de bifurcación del sistema significa la construcción de su diagrama de bifurcación de un parámetro, en particular, estudiando la dependencia de puntos de equilibrio y ciclos límites respecto al parámetro, así como la localización y el análisis de sus bifurcaciones.

### B.3.1. Continuación de equilibrios y ciclos

Los puntos de equilibrio de (B.9) satisfacen

$$f(x, \alpha) = 0, \quad (\text{B.10})$$

esto es, un sistema de  $n$  ecuaciones escalares en  $\mathbb{R}^{n+1}$  en las coordenadas  $(x, \alpha)$ . Genéricamente, (B.10) define una variedad (curva) suave unidimensional  $M$  en  $\mathbb{R}^{n+1}$ . El cálculo de esta curva de equilibrio nos da la dependencia de un equilibrio de (B.9) con respecto al parámetro  $\alpha$  (ver figura B.1).

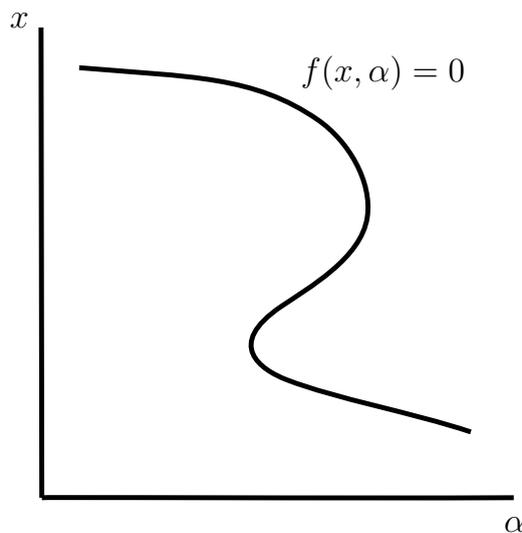


FIGURA B.1: Curva de equilibrio.

El problema de calcular la curva  $M$  es un caso específico del problema general de continuación (de dimensión finita), que consiste en encontrar una curva en  $\mathbb{R}^{n+1}$  definida por  $n$  ecuaciones:

$$F(y) = 0, \quad F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n. \quad (\text{B.11})$$

Por el teorema de la función implícita, el sistema (B.11) define localmente una curva suave  $M$  que pasa a través de un punto  $y_0$  que satisface (B.11), siempre que el rango de la matriz  $J = F_y(y_0)$  sea  $n$ .

La solución numérica del problema de continuación (B.11) significa el cálculo de una secuencia de puntos  $y_1, y_2, y_3, \dots$ , aproximando la curva  $M$  con una precisión deseada. Asumimos que conocemos un punto inicial  $y_0$ , que está lo suficientemente cerca de  $M$  (o pertenece a  $M$ ), del cual la secuencia  $\{y_n\}$  se puede generar en una de las dos direcciones posibles. En la práctica  $y_0$  es el punto de equilibrio “inicial” hallado en la primera sección anterior.

La mayoría de los algoritmos de continuación utilizados en el análisis de bifurcación implementan métodos de predicción-corrección e incluyen tres pasos básicos que se realizan reiteradamente:

- (i) predicción del siguiente punto;
- (ii) corrección;
- (iii) control del tamaño del paso (para mayor detalle ver [29]).

El tamaño de pasos mencionado anteriormente es el tamaño de la cada partición del dominio. En general, la curva de equilibrios (B.10) puede tener puntos de ramificación.

**Definición B.1.** Un punto  $y_*$  se llama un punto de ramificación para el problema de continuación

$$F(y) = 0, \quad F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n, \quad (\text{B.12})$$

si  $F(y_*) = 0$  y hay al menos dos curvas suaves diferentes que satisfacen (B.12) y que pasan a través de  $y_*$ .

*Observación B.2.* La continuación de ciclos límite en sistemas de un solo parámetro también se reduce a un problema de continuación (B.11) mediante la realización de una discretización del problema de valores en la frontera periódico para la continuación del ciclo:

$$\begin{cases} \dot{u}(\tau) - Tf(u(\tau), \alpha) = 0, \\ u(1) - u(0) = 0, \\ \int_0^1 \langle u(\tau), \dot{u}_0(\tau) \rangle d\tau = 0, \end{cases}$$

donde la última ecuación es la condición de fase integral con una solución de referencia  $u_0(\tau)$ . El sistema de dimensión finita resultante tendrá la forma

$$\mathcal{F}(\xi, \alpha) = 0, \quad \mathcal{F} : \mathbb{R}^{N+1} \rightarrow \mathbb{R}^N,$$

donde  $\xi \in \mathbb{R}^N$  contiene los datos de discretización correspondientes a  $u(\cdot)$  y el período del ciclo  $T$ , mientras que  $\alpha \in \mathbb{R}$  es un parámetro libre del sistema. Por ejemplo,  $\xi \in \mathbb{R}^N$  puede estar compuesto de los coeficientes de interpolación  $\{u^{j,i}\}$  que aparece en la colocación ortogonal y  $T$ . Este problema de continuación define una curva en el producto directo del  $\xi$ -espacio y el eje de parámetros. La solución de referencia periódica  $u_0$  involucrada en la condición de fase se toma generalmente de manera que sea una solución correspondiente al ciclo obtenido en una etapa anterior a lo largo de la curva.

### B.3.2. Detección y localización de bifurcaciones de codimensión uno

En los campos vectoriales, hay dos bifurcaciones genéricas de codimensión 1 que pueden ser detectadas a lo largo de la curva de equilibrio: las bifurcaciones silla-nodo y Hopf.

La idea principal es definir algunas funciones escalares suaves que tengan ceros regulares en los puntos de bifurcación. Tales funciones se llaman *funciones test* o *funciones de bifurcación*. Se dice que un punto de bifurcación es detectado entre dos puntos sucesivos  $y_k$  y  $y_{k+1}$  en la curva

$$F(y) = 0, \quad F : \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}^n,$$

si una cierta función test apropiada  $\psi = \psi(y)$  tiene signos opuestos en estos puntos, es decir,

$$\psi(y_k)\psi(y_{k+1}) < 0. \quad (\text{B.13})$$

Entonces se puede tratar de localizar un punto en donde  $\psi$  se anula con mayor precisión en la misma manera que un punto regular, es decir, mediante la aplicación del método de Newton al sistema extendido

$$\begin{cases} F(y) = 0, \\ \psi(y) = 0, \end{cases} \quad (\text{B.14})$$

con punto inicial  $y_{(0)} = y_k$ . Para aplicar el método de Newton, la función test  $\psi$  tiene que estar definida y ser diferenciable en una vecindad de la curva de equilibrio.

## B.4. Análisis de bifurcación de equilibrios a dos parámetros

Consideremos un campo de vectores suave en función a dos parámetros:

$$\dot{x} = f(x, \alpha), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad \alpha \in \mathbb{R}^2. \quad (\text{B.15})$$

Dejemos que los parámetros  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  varíen simultáneamente para realizar un seguimiento de una curva de bifurcación de codimensión uno. Luego, los siguientes eventos pueden ocurrir al equilibrio no-hiperbólico monitoreado en algunos valores de los parámetros:

- (i) valores propios adicionales pueden acercarse al eje imaginario, cambiando así la dimensión de la variedad central  $W^c$ ;
- (ii) algunas de las condiciones de genericidad para la bifurcación de codimensión uno pueden ser violadas.

Para valores de parámetros cercanos podemos esperar la aparición de nuevos retratos de fase del sistema, lo que implica que se ha producido una bifurcación de codimensión dos.

El objetivo del análisis del campo ahora es la construcción de su diagrama de bifurcación a dos parámetros. El diagrama puede incluir genéricamente curvas correspondientes a bifurcaciones de codimensión uno de equilibrios, ciclos límite, y órbitas homoclínicas. En puntos aislados en estas curvas, podrían ocurrir bifurcaciones de codimensión dos; tales puntos son puntos comunes para dos (o más) curvas diferentes de codimensión uno. Por lo tanto, el problema es continuar curvas de bifurcación de codimensión uno para detectar, localizar, y analizar singularidades de codimensión dos en ellas; y luego cambiar de ramas de bifurcación en estos puntos.

### **B.4.1. Continuación de bifurcaciones de codimensión uno de puntos de equilibrios**

Si el sistema (B.15) tiene, en  $\alpha = \alpha^0$ , un equilibrio  $x_0$  que presenta una bifurcación de codimensión uno, entonces, de forma genérica, hay una curva de bifurcación  $\mathcal{B}$  en el plano  $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2)$  a lo largo del cual el campo tiene un equilibrio que demuestra la bifurcación correspondiente. La curva  $\mathcal{B}$  se puede calcular como una proyección al plano  $\alpha$  de una cierta curva  $\Gamma$ , definida en un espacio de dimensión mayor. Por lo tanto, tenemos que especificar un problema de continuación para  $\Gamma$ , es decir, definir funciones que determinan la curva en este espacio. Tenemos dos formas para realizar este problema, los cuales están detallados en [29]:

#### **1. Sistemas mínimamente aumentados**

En este enfoque, simplemente agregamos la función test relevante a la ecuación del equilibrio, obteniendo así un sistema de  $n + 1$  ecuaciones en un espacio de dimensión  $(n + 2)$  con coordenadas  $(x, \alpha)$ .

#### **2. Sistemas aumentados estándar**

Si se permite ampliar la dimensión del problema de continuación por más de una dimensión, se pueden proponer varios sistemas definitorios para calcular las curvas de bifurcación de codimensión uno.

Las funciones test específicas para cada bifurcación se pueden hallar en la literatura [29], y típicamente vienen implementadas en muchos paquetes computacionales como por ejemplo: MATCONT [13, 15], AUTO [16], pplane [39], XPP [18], etc.

*Observación B.3.* Al igual que en el caso de puntos de equilibrios, podemos continuar bifurcaciones de ciclos al extender el sistema agregándole funciones test apropiadas [29].

### B.4.2. Continuación de órbitas homoclínicas de codimensión uno

Veremos la continuación de órbitas homoclínicas a un equilibrio hiperbólico o un equilibrio no-hiperbólico con un valor propio simple cero. La presencia de tal órbita  $\Gamma_0$  es un fenómeno de codimensión uno: En un sistema a dos parámetros genéricos (B.15) existe a lo largo de una curva en el plano  $(\alpha_1, \alpha_2)$ . El problema entonces es continuar esta curva, con la condición de que un punto inicial en ella se conoce junto con la solución homoclínica correspondiente.

Supongamos que en  $\alpha_0$ , el sistema (B.15) tiene un equilibrio hiperbólico  $x_0$ . Denotamos la matriz jacobiana  $f_x(x, \alpha)$  por  $A(x, \alpha)$ . Asumamos, por lo tanto, que  $A(x_0, \alpha_0)$  tiene  $n_+$  valores propios inestables  $\lambda_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_+$  y  $n_-$  valores propios estables  $\mu_i$ ,  $i = 1, 2, \dots, n_-$ , tal que  $n_- + n_+ = n$  y

$$Re \mu_{n_-} \leq \dots \leq Re \mu_2 \leq Re \mu_1 < 0 < Re \lambda_1 \leq Re \lambda_2 \leq \dots \leq Re \lambda_{n_+}.$$

Una solución homoclínica  $x(t)$  de (B.15) satisface la condición

$$x(t) \rightarrow x_0 \quad \text{a medida que} \quad t \rightarrow \pm\infty, \quad (\text{B.16})$$

donde  $x_0$  es un punto de equilibrio,

$$f(x_0, \alpha) = 0. \quad (\text{B.17})$$

Notemos que las condiciones (B.16) y (B.17) no especifican la solución homoclínica por completo. En efecto, un desplazamiento de tiempo de una solución de (B.15),

(B.16), y (B.17) es todavía una solución homoclínica. Por lo tanto, se requiere una condición para fijar la fase, similar a la situación para ciclos límite. En cuanto a los ciclos, la siguiente condición de *fase integral* se puede utilizar

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \langle x(t) - x^0(t), \dot{x}^0(t) \rangle dt = 0, \quad (\text{B.18})$$

donde  $x^0(t)$  es una solución de referencia que se asume conocida. La ecuación (B.18) es una condición necesaria para un mínimo local de la distancia  $L_2$  entre  $x$  y  $x^0$  sobre desplazamientos de tiempo. Como es usual, en el entorno de continuación,  $x^0$  es la solución homoclínica obtenida en el punto previamente encontrado en la curva.

El problema (B.15), (B.16) - (B.18) definido en un intervalo de tiempo infinito tiene que ser aproximado por truncamiento a un intervalo finito, digamos  $[-T, T]$ , y la especificación de las condiciones de contorno adecuadas. Por ejemplo, podemos colocar la solución en los dos puntos finales en los espacios propios estables e inestables de  $A(x_0, \alpha)$  que proporcionan aproximaciones lineales a  $W^{s,u}(x_0)$  [29]. Esto se puede lograr a través de la sustitución de (B.16) por las condiciones de contorno de proyección:

$$L_s(x_0, \alpha)(x(-T) - x_0) = 0, \quad L_u(x_0, \alpha)(x(T) - x_0) = 0. \quad (\text{B.19})$$

Aquí,  $L_s(x_0, \alpha)$  es una matriz de orden  $(n_- \times n)$  cuyas filas forman una base para el espacio característico estable de  $A^T(x_0, \alpha)$ . En consecuencia,  $L_u(x_0, \alpha)$  es una matriz de orden  $(n_+ \times n)$ , tal que sus filas forman una base para el espacio característico inestable de  $A^T(x_0, \alpha)$ .

Finalmente, se debe truncar la condición de fase (B.18) al intervalo  $[-T, T]$ ,

$$\int_{-T}^{+T} \langle x(t) - x^0(t), \dot{x}^0(t) \rangle dt = 0. \quad (\text{B.20})$$

Juntando las ecuaciones anteriores obtenemos el problema de valores en la frontera para la continuación homoclínica:

$$\left\{ \begin{array}{l} f(x_0, \alpha) = 0, \\ \dot{x}(t) - f(x(t), \alpha) = 0, \\ L_s(x_0, \alpha)(x(-T) - x_0) = 0, \\ L_u(x_0, \alpha)(x(T) - x_0) = 0, \\ \int_{-T}^T \langle x(t) - x^0(t), \dot{x}^0(t) \rangle dt - 1 = 0. \end{array} \right. \quad (\text{B.21})$$

La existencia de una órbita homoclínica regular en (B.15) implica la existencia de una solución al problema de valores en la frontera truncado (B.21). Además, a medida que  $T \rightarrow \infty$ , la solución de (B.21) converge a la solución homoclínica restringida a un intervalo finito apropiado. La tasa de convergencia es exponencial tanto para los valores de los parámetros y soluciones.

El sistema resultante define una curva en un espacio de dimensión finita en que puede ser continuada por la técnica estándar; la proyección de la curva en el plano  $(\alpha_1, \alpha_2)$  da una aproximación a la curva de bifurcación homoclínica.

Existen otras posibilidades para el inicio de la continuación, incluyendo el cambio a la curva homoclínica en una bifurcación Bogdanov-Takens.

## B.5. Estrategia de continuación

El análisis de un campo de vectores dado requiere una estrategia clara. Tal estrategia es proporcionada por la teoría de bifurcación. Formalmente, mientras se realiza el análisis, siempre continuamos ciertas curvas en algunos espacios y monitoreamos varias funciones test para detectar y localizar puntos especiales en estas curvas.

El análisis teórico de las bifurcaciones sugiere que podemos esperar que ocurran bifurcaciones de mayor codimensión a lo largo de la curva trazada y Esto también sugerirá cuáles funciones test tienen que ser monitoreadas para detectar y localizar estos puntos. La teoría también predice que curvas de bifurcación de la misma codimensión se originan en un punto detectado. Después de haber localizado un punto especial, se puede cambiar a una de estas curvas que nacen o se puede “activar” un parámetro más para seguir, si es posible, el punto situado en más parámetros. Por supuesto, se puede también simplemente seguir la rama original, más allá del punto especial.

El análisis de cualquier sistema por lo general comienza con la localización de al menos un equilibrio en algunos valores de los parámetros fijos. Luego, se “activa” uno de los parámetros del sistema y se continúa el equilibrio obtenido con respecto a este parámetro. Durante la continuación, algunos puntos LP (puntos de bifurcación silla-nodo) o Hopf pueden ser detectados. De forma genérica, estos puntos son no-degenerados. Por lo tanto, un ciclo límite se bifurca desde el punto Hopf en la dirección determinada por el signo del primer coeficiente de Lyapunov. La continuación del ciclo se puede inicializar desde el punto de Hopf, y sus posibles bifurcaciones de codimensión uno detectadas y localizadas como un parámetro es variada.

Al liberar el segundo parámetro y usando uno de los sistemas aumentados, podemos calcular curvas de bifurcación en el plano definido por estos dos parámetros activos. A menudo, puntos de codimensión dos conectan originalmente puntos disjuntos de codimensión uno. Por ejemplo, dos puntos LP que se encuentran en el análisis de un parámetro pueden pertenecer a la misma curva de bifurcación silla-nodo pasando a través de un punto cúspide (punto silla-nodo degenerado) a medida que dos parámetros varían. Por lo tanto, las bifurcaciones de orden superior desempeñan el papel de los “centros de organización” para diagramas de bifurcación cercanos. Este papel es aún más importante ya que las curvas de bifurcación de ciclo límite de codimensión uno pueden tener su origen en puntos de codimensión dos. Un ejemplo simple es la curva de bifurcación homoclínica-silla que emana de un punto Bogdanov-Takens genérico. Su continuación se puede iniciar desde este punto.

La continuación de bifurcaciones de ciclos límite de codimensión uno suele revelar sus propios puntos de bifurcación de codimensión dos. La superposición de los conjuntos de bifurcación obtenidos para los equilibrios, ciclos y órbitas homoclínicas proporciona cierto conocimiento sobre el diagrama de bifurcación del sistema y podría dar algunas ideas sobre otras bifurcaciones en el que estén involucrados conjuntos invariantes más complejos.

# Bibliografía

- [1] P. Aguirre, E. González-Olivares, and E. Sáez. Three limit cycles in a Leslie-Gower predator-prey model with additive Allee effect. *SIAM J. Applied Mathematics*, 69:1244–1262, 2009.
- [2] P. Aguirre, E. González-Olivares, and E. Sáez. Two limit cycles in a Leslie-Gower predator-prey model with additive Allee effect. *Nonlinear Analysis: Real World Applications*, 10:1401–1416, 2009.
- [3] V. I. Arnold. *Ordinary Differential Equations*. Springer-Verlag, 1992.
- [4] D. K. Arrowsmith and C. M. Place. *An Introduction to Dynamical Systems*. Cambridge University Press, 1990.
- [5] L. Berec, E. Angulo, and F. Courchamp. Multiple Allee effects and population management. *Trends in Ecology and Evolution*, 22:185–191, 2007.
- [6] R. Bogdanov. Versal deformations of a singular point of a vector field on the plane in the case of zero eigenvalues. *Functional Analysis and Its Applications*, 9:144 – 145, 1975.
- [7] D. Boukal and L. Berec. Single-species models of the Allee effect: Extinction boundaries, sex ratios and mate encounters. *Journal of Theoretical Biology*, 218: 375–394, 2002.
- [8] A. Bressan. A tutorial on the centre manifold theorem. *Hyperbolic Systems of Balance Laws*, P. Marcati Ed., *Lecture Notes in Math. 1911* Springer, Berlin, page 327–344, 2007.
- [9] R. Burdern and J. D. Faires. *Numerical Analysis*. Cengage Learning, 9th edition, 2010.
- [10] J. Carr. *Applications of Center Manifold Theory*. Springer-Verlag, 1981.

- 
- [11] C. Chicone. *Ordinary Differential Equations with Applications*. Springer, 2nd edition, 2006.
- [12] F. Courchamp, L. Berec, and J. Gascoigne. *Allee effects in Ecology and Conservation*. Oxford University Press, 2008.
- [13] A. Dhooge, W. Govaerts, and Y. Kuznetsov. Matcont: A matlab package for numerical bifurcation analysis of odes. *ACM SIGSAM*, 38:21–22, 2004.
- [14] L. Dingjun, W. Xian, Z. Deming, and H. Maoan. *Bifurcation Theory and Methods of Dynamical Systems*. Advances Series in Dynamical Systems Vol. 15, World Scientific, 1997.
- [15] E. Doedel. Lecture notes on numerical analysis of nonlinear equations. In *Numerical Continuation Methods for Dynamical Systems*. Springer Netherlands, 2007.
- [16] E. J. Doedel, A. R. Champneys, F. Dercole, T. Fairgrieve, Y. Kuznetsov, B. E. Oldeman, R. C. Paffenroth, B. Sandstede, X. J. Wang, and C. H. Zhang. *AUTO-07P: Continuation and Bifurcation Software for Ordinary Differential Equations*. Department of Computer Science, Concordia University, Montreal, Canada, 2010.
- [17] L. Edelstein-Keshet. *Mathematical Models in Biology*. SIAM, 2005.
- [18] B. Ermentrout. *Simulating, Analyzing, and Animating Dynamical Systems: A Guide to Xppaut for Researchers and Students*. Society for Industrial and Applied Mathematics, 2002.
- [19] H. I. Freedman. *Deterministic mathematical model in Population Ecology*. Marcel Dekker, 1980.
- [20] G. F. Gause. *The Struggle for Existence*. Dover Publications, INC., 2003.
- [21] B.-S. Goh. *Management and analysis of Biological Populations*. Elsevier Scientific Publishing Company, 1980.
- [22] E. González-Olivares and A. Rojas-Palma. Limit cycles in a gause-type predator-prey model with sigmoid functional response and weak Allee effect on prey. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, 35:963–975, 2012.
- [23] E. González-Olivares, J. Mena-Lorca, A. Rojas-Palma, and J. Flores. Dynamical complexities in the leslie-gower predator-prey model as consequences of the Allee effect on prey. *Applied Mathematical Modelling*, 35:366–381, 2011.

- [24] E. González-Olivares, B. González-Yañez, J. Mena-Lorca, and J. Flores. Uniqueness of limit cycles and multiple attractors in a gause-type predator-prey model with non-monotonic functional response and Allee effect on prey. *Mathematical Biosciences and Engineering*, 10:345–367, 2013.
- [25] E. González-Olivares, P. Tintinago-Ruiz, and A. Rojas-Palma. A leslie-gower type predator-prey model with sigmoid funcional response. *International Journal of Computer Mathematics*, 92:1895–1909, 2015.
- [26] J. Guckenheimer and P. Holmes. *Nonlinear Oscillations, Dynamical Systems, and Bifurcations of Vector Fields*. Springer, 1983.
- [27] Y. Ilyashenko and W. Li. *Nonlocal Bifurcations*. American Mathematical Society, 1999.
- [28] G. Kreisselmeier. On the determination of the jordan form of a matrix. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 18:686 – 687, 1973.
- [29] Y. Kuznetsov. *Elements of Applied Bifurcation Theory*. Applied Mathematical Sciences, Springer, 2004.
- [30] P. Leslie. On the use of matrices in certain population mathematics. *Biometrika*, 33:183–212, 1945.
- [31] M. Liermann and R. Hilborn. Depensation: evidence, models and implications. *Fish and Fisheries 2*, pages 33–58, 2001.
- [32] A. Lotka. Undamped oscillations derived from the law of mass action. *Journal of the American Chemical Society*, 42:1595–1599, 1920.
- [33] T. Malthus. *An essay on the Principle of Population*. J. Johnson, 1798.
- [34] R. M. May. *Stability and complexity in model ecosystems*. Princeton University Press, 2nd edition, 2001.
- [35] J. Murray. *Mathematical Biology: I. An Introduction*. Springer, 3rd edition, 2002.
- [36] J. Murray. *Mathematical Biology: II. Spatial Models and Biomedical Applications*. Springer, 3rd edition, 2003.
- [37] J. Palis and W. de Melo. *Geometric theory of dynamical systems: an introduction*. Springer-Verlag, 1982.

- 
- [38] L. Perko. *Differential Equations and Dynamical Systems*. Springer, 3rd edition, 2006.
- [39] J. Polking. *Ordinary Differential Equations Using MATLAB*. Pearson, 3rd edition, 2003.
- [40] A. Quarteroni, R. Sacco, and F. Saleri. *Numerical Mathematics*. Springer-Verlag, 2000.
- [41] J. Sotomayor. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Projecto Euclides IMPA,CNPq., 1979.
- [42] P. A. Stephens, W. J. Sutherland, and R. P. Freckleton. What is the Allee effect? *Oikos*, 87:185–190, 1999.
- [43] F. Takens. Singularities of vector fields. *Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math*, 43:47–100, 1974.
- [44] P. Turchin. Complex population dynamics, a theoretical/empirical sythesis. *Monographs in Populations Biology*, 35:89–118, 2003.
- [45] P. Verhulst. Notice sur la loi que la population suit dans son accroissement. *Correspondance mathématique et physique*, 10:113–121, 1838.
- [46] P. Verhulst. Recherches mathématiques sur la loi d’accroissement de la population. *Nouveau Mémoires de l’Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Bruxelles*, 18:3–38, 1845.
- [47] V. Volterra. Variazioni e fluttuazioni del numero d’individui in specie animali conviventi. *Memoria della Reale Accademia Nazionale dei Lincei*, 2:31–113, 1926.
- [48] V. Volterra. *Lecònse sur la Théorie Mathématique de la Lutte pour la Vie*. Gauthier-Villars, 1931.