

2017

# UN COEFICIENTE DE CONCORDANCIA PARA DATOS ESPACIALES

PÉREZ OJEDA, JAVIER IGNACIO

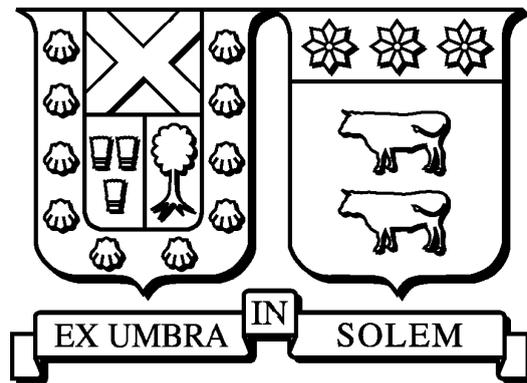
---

<http://hdl.handle.net/11673/22702>

*Repositorio Digital USM, UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA*

# UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA  
VALPARAÍSO-CHILE



---

## Un Coeficiente de Concordancia Para Datos Espaciales

---

Memoria presentada por:  
**Javier Ignacio Pérez Ojeda**

*Como requisito para optar al título profesional Ingeniero Civil  
Matemático, Mención Estadística Aplicada*

*Profesor Guía:*  
**Ronny Vallejos Arriagada**

Valparaíso, 2017



TÍTULO DE LA MEMORIA:

Un Coeficiente de Concordancia Para Datos Espaciales.

AUTOR: Javier Ignacio Pérez Ojeda.

TRABAJO DE MEMORIA, presentado como requisito parcial para optar al título profesional Ingeniero Civil Matemático de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN EVALUADORA:

Integrantes

Firma

Ronny Vallejos Arriagada

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

\_\_\_\_\_

Felipe Osorio

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

\_\_\_\_\_

Manuel Galea

Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile.

\_\_\_\_\_

Valparaíso, 21 de Noviembre de 2017.



# *Agradecimientos*

Un objetivo nunca se completa solo. La vida es una serie de momentos, de habitaciones, donde cada una cuenta con gente que le entrega sentido a la vida. Quiero darle gracias en primer lugar a mi familia, que siempre me ha acompañado y me ha apoyado en todas las decisiones que he tomado. Ustedes han sido la razón por la cual estoy aquí, me han dado todo el amor del mundo y me han dado las fuerzas para lograr mis metas.

Quiero agradecer a mis amigos, con los que he compartido momentos buenos y malos, que han estado para mí, incluso sin merecerlo. ‘Number’, ‘Arica’, y todos mis amigos matemáticos, con los que compartí tantos momentos. Vanessa, ‘Nacha’, ‘Mati’ y todos los amigos que conocí en la Universidad durante estos años. ‘Negro’, ‘Viejo’, ‘Pipe’, ‘Claudio’, por tantos abrazos de gol. ‘Cata’, y todos mis amigos de Osorno, que me conocen de antes y me han dado apoyo. A todos los que me acompañaron, ustedes saben quienes son, gracias.

Quiere agradecer al DMAT, auxiliares, funcionarios y profesores, que siempre fueron una ayuda, ya sea académica o personal. En especial, a mi profesor guía, Ronny, que me entregó esa pasión por aprender y que siempre estuvo dispuesto a ayudarme y apoyarme en todo sentido, dentro y, aún más, fuera de la sala de clases, sin cuestionamientos.

Quiero agradecer a todos los que componen Hematología del Hospital de Valdivia, que me cuidaron por 6 meses y me permitieron volver. Gracias a las doctoras, y en especial, muchas gracias Dani y Susy, por todo lo que hicieron por mí. Gracias además a Ailene y Oliva.

Por último quiero darle gracias a la vida, y gracias a Dios, que me dio una nueva oportunidad para lograr mis metas, que me dio la fuerza para superar los momentos complicados, y la fuerza para no rendirme. De parte de un *Romántico Viajero*, y en memoria de Chester Bennintong, Gracias Totales.

*Ir más allá del horizonte, do remonta la verdad.*



*A mi familia, todo lo que soy es gracias a ustedes, y todo lo que hago es para ustedes.*



# Índice general

Agradecimientos	v
Índice general	vii
Índice de figuras	ix
Índice de cuadros	x
Resumen	xi
<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Preliminares	4
1.1.1. Procesos Espaciales	4
1.1.2. Coeficiente de Correlación de Concordancia	5
1.1.3. Inferencia	8
1.2. Estructuras de Covarianza Bivariada	8
1.2.1. Estructuras de Covarianza Separables	9
1.2.2. Estructuras de Covarianza No-separables	10
1.2.3. Covarianza de Matérn Bivariada	10
1.2.4. Covarianza de Wendland-Gneiting Bivariada	12
1.2.4.1. Funciones de Wendland-Gneiting	12
1.2.4.2. Covarianza multivariada de Wendland-Gneiting	13
<b>2. Coeficiente de Concordancia Espacial</b>	<b>17</b>
2.1. Definición y Propiedades	17
2.2. Concordancia Para Covarianzas Específicas	19
2.3. Inferencia	25
2.3.1. Normalidad Asintótica	25
2.3.2. Cálculo de Varianza Asintótica	32
2.3.2.1. Estructura de Covarianza Separable	33
2.3.2.2. Estructura de Covarianza No-separable	33
<b>3. Simulaciones</b>	<b>35</b>
3.1. Matérn Bivariado	35
3.2. Wendland-Gneiting Bivariado	40
3.3. Error de ajuste de covarianza bivariada	44

---

<b>4. Aplicaciones</b>	<b>48</b>
4.1. Comparación de Imágenes . . . . .	48
4.1.1. Análisis de Datos . . . . .	50
4.1.2. Ajuste de Modelos . . . . .	50
4.1.3. Trabajo en sub-imágenes . . . . .	52
4.2. Indicadores de pobreza . . . . .	54
4.2.1. Datos . . . . .	54
4.2.2. Estimación Horvitz-Thompson . . . . .	54
4.2.3. Estimación en Áreas Pequeñas (SAE) . . . . .	55
4.2.4. Análisis Exploratorio de los Datos . . . . .	55
4.2.5. Análisis Espacial . . . . .	58
4.2.6. Ajuste de Modelos . . . . .	59
<b>5. Conclusiones y Trabajos Futuros</b>	<b>64</b>
<b>A. Anexos</b>	<b>69</b>
A.1. Verosimilitud CAR bivariado . . . . .	69
A.2. Tablas de Datos . . . . .	71
<b>Bibliografía</b>	<b>72</b>

# Índice de figuras

1.1. Casos en que fallan los coeficientes usuales . . . . .	2
2.1. Gráfica $\rho_c(\mathbf{h})$ para covarianza de Matérn . . . . .	21
2.2. Comparación coeficientes para covarianza de Matérn . . . . .	22
2.3. Gráfica $\rho_c(\mathbf{h})$ para covarianza de Wendland . . . . .	23
2.4. Comparación coeficientes para covarianza de Wendland-Gneiting . . . . .	24
3.1. Realización campo aleatorio con covarianza de Matérn bivariada . . . . .	36
3.2. Coeficiente de concordancia teórico y estimado para la covarianza de Matérn. . . . .	38
3.3. Coeficiente de concordancia teórico y estimado para la covarianza de Matérn. . . . .	39
3.4. Varianza de las estimaciones en una grilla de $10 \times 10$ y $30 \times 30$ , ambas en el cuadrado $[0, 10]^2$ . . . . .	40
3.5. Realización campo aleatorio con covarianza de Wendland-Gneiting bivariada. . . . .	41
3.6. Coeficiente de concordancia teórico y estimado para covarianza de Wendland-Gneiting. . . . .	43
3.7. Varianza de las estimaciones en el cuadrado $[-3/2, 3/2]^2$ para procesos de covarianza de Wendland. . . . .	44
3.8. Comparación coeficiente de concordancia teórico y estimado. . . . .	46
3.9. Comparación coeficiente de concordancia teórico y estimado. . . . .	47
4.1. Imágenes de Harvard Forest . . . . .	49
4.2. Imágenes a trabajar. . . . .	49
4.3. Coeficientes para el modelo escogido. . . . .	51
4.4. Coeficiente de concordancia global. . . . .	53
4.5. Concordancia entre estimación HT y estimación SAE. . . . .	56
4.6. Histogramas de la estimación HT y la estimación SAE. . . . .	57
4.7. Boxplot para la estimación HT y la estimación SAE. . . . .	58
4.8. Gráfico índices de pobreza . . . . .	59
4.9. Coeficientes para el modelo de Matérn. . . . .	63
4.10. Coeficientes para el modelo de Matérn. . . . .	63

# Índice de cuadros

1.1. Funciones de covarianza Wendland-Gneiting para distintos valores de $\kappa$ .	13
1.2. Caso especial para la covarianza de Wendland-Gneiting.	16
3.1. Parámetros teóricos y estimados para las simulaciones con covarianza de Matérn bivariada.	37
3.2. Parámetros teóricos y estimados para el modelo con covarianza de Wendland-Gneiting bivariada.	42
3.3. Parámetros estimados ajustando un modelo Wendland-Gneiting bivariado.	45
3.4. Parámetros estimados ajustando un modelo Wendland-Gneiting bivariado.	45
3.5. Parámetros estimados ajustando un modelo Matérn bivariado.	46
3.6. Parámetros estimados ajustando un modelo Matérn bivariado.	47
4.1. Parámetros teóricos y estimados para los modelos Matérn y Wendland-Gneiting.	51
4.2. Comparación de modelos.	51
4.3. Resumen de los datos de estimación HT y SAE.	56
4.4. Parámetros teóricos y estimados para los modelos Matérn.	61
4.5. Parámetros teóricos y estimados para el modelo Wendland-Gneiting.	61
4.6. Parámetros teóricos y estimados para el efecto <i>nugget</i> .	61
4.7. Comparación de modelos de covarianza ajustados mediante el índice AIC.	62

# Un Coeficiente de Concordancia Para Datos Espaciales.

por JAVIER PÉREZ OJEDA

## Resumen

El problema de medir la concordancia entre dos medidas para un instrumento fue abordado por [Lin \(1989\)](#), donde exhibe las deficiencias de los coeficientes de correlación existentes y propone el Coeficiente de Correlación de Concordancia, que mide la desviación de los datos sobre una línea de 45 grados desde el origen.

En este trabajo se propone un coeficiente de concordancia espacial,  $\rho_c(\mathbf{h})$ , extendiendo el trabajo de [Lin \(1989\)](#), para procesos espaciales débilmente estacionarios y de segundo orden. Consideramos un proceso espacial  $(Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$ ,  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$ , luego el coeficiente de concordancia espacial depende de la distancia  $\mathbf{h} = \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\|$  entre dos puntos  $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2 \in \mathbb{R}^2$ , de tal forma que el coeficiente sea una corrección de la correlación cruzada  $\rho_{12}(\mathbf{h})$ , es decir,  $\rho_c(\mathbf{h}) = C_{ab} \cdot \rho_{12}(\mathbf{h})$ , donde  $C_{ab}$  es una constante que depende de las medias y varianzas de  $Z_1(\mathbf{s})$  y  $Z_2(\mathbf{s})$ .

Se analiza el comportamiento del coeficiente de concordancia espacial  $\rho_c(\mathbf{h})$  para estructuras de covarianza bivariadas de Matérn y de Wendland-Gneiting, variando los distintos parámetros de estos modelos. Luego se propone una versión muestral  $\hat{\rho}_c(\mathbf{h})$  y se procede a hacer inferencia, probando la normalidad asintótica del coeficiente en el sentido de un dominio creciente, para los modelos de covarianza Matérn y Wendland-Gneiting bivariada, utilizando los resultados de [Mardia y Marshall \(1984\)](#) para probar la normalidad asintótica de las estructuras de covarianza, y luego el método delta para el coeficiente de concordancia espacial.

# Capítulo 1

## Introducción

Para hacer una validación de un proceso es importante analizar la reproducibilidad de medidas. Si contrastamos dos mediciones mediante un gráfico, nos gustaría que ambas mediciones concordaran, y para verlo de una forma simple, ubicamos las mediciones junto a una línea en 45 grados desde el origen, y vemos que tan apartados están de dicha línea.

Existen distintos métodos para medir correlación, como lo es el coeficiente de Pearson, pruebas t para igualdad de medias, o mínimos cuadrados para analizar la pendiente e intercepto. La Figura 1.1 muestra ejemplos donde fallan los coeficientes de Pearson y la prueba t. En la Figura 1.1 (a) podemos ver como el coeficiente de correlación de Pearson entrega una relación lineal, pero falla en detectar desviaciones de la línea de 45 grados desde el origen. En la Figura 1.1 (b) podemos ver que la prueba t que considera como hipótesis nula la igualdad de medias, falla en rechazarla. En la Figura 1.1 (c) se tiene una combinación de los dos casos anteriores.

Ante la incapacidad de detectar falta de concordancia de los coeficientes habituales, es que nace la necesidad de una herramienta que mida la concordancia, y es Lin (1989), quien propone un coeficiente de correlación de concordancia  $\rho_c$ , que compara las variables  $Z_1$  e  $Z_2$ , y le asocia un índice, siendo una corrección del coeficiente de correlación de Pearson  $\rho$ , de forma que el índice está dado por  $\rho_c = C_{ab} \cdot \rho$ , donde  $C_{ab}$  es una constante dada por  $2\sigma_1\sigma_2/(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2)$ , donde  $\mu_i$  y  $\sigma_i^2$  corresponden a la media y varianza de la variable  $Z_i$ .

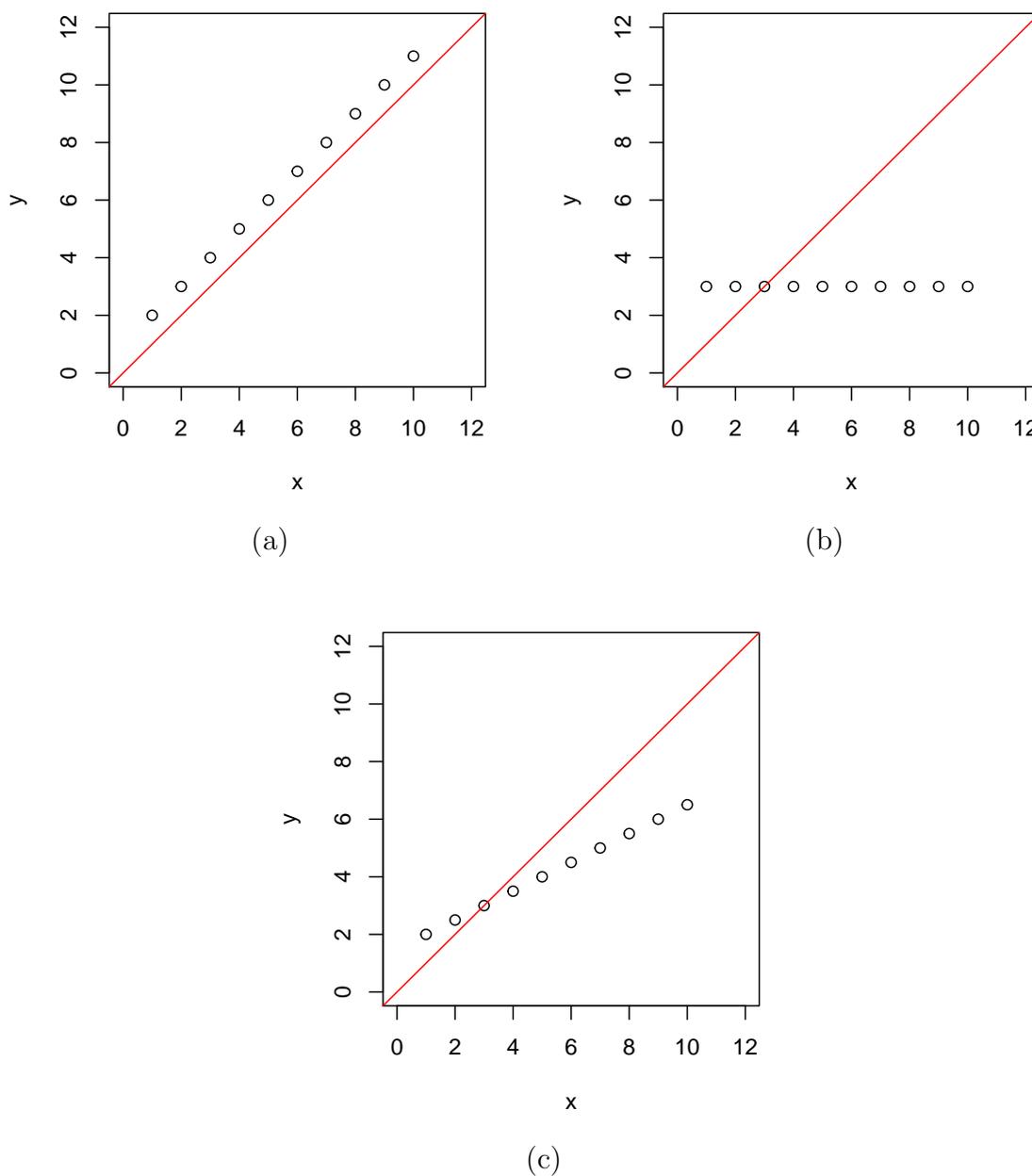


FIGURA 1.1: (a) No hay concordancia, pero la correlación de Pearson es igual a 1. (b) La prueba t falla en rechazar la hipótesis de medias iguales. (c) Combinación de los dos casos anteriores.

Extendiendo el trabajo de [Lin \(1989\)](#), [King et al. \(2007\)](#) proponen un coeficiente de concordancia matricial, considerando  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  dos vectores aleatorios con medias  $\mu_X$  y  $\mu_Y$  respectivamente, y una matriz de covarianza  $\Sigma$ . El coeficiente propuesto por [King](#)

et al. (2007) está dado por

$$\rho = 1 - \frac{\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^\top (\mathbf{X} - \mathbf{Y})]}{\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^\top (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) | \mathbf{X}, \mathbf{Y} \text{ indep.}]}$$

Sumado al trabajo de King et al. (2007), Hiriote y Chinchilli (2011) definen las siguientes matrices

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_D &= \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbf{Y})(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^\top], \\ \mathbf{V}_I &= \mathbb{E}_{\text{indep.}}[(\mathbf{X} - \mathbf{Y})(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^\top], \end{aligned}$$

y luego definen

$$\mathbf{M} = \mathbf{V}_I^{-1/2}(\mathbf{V}_I - \mathbf{V}_D)\mathbf{V}_I^{-1/2},$$

para proponer un nuevo coeficiente de concordancia matricial, dado por

$$\rho = 1 - \frac{g(\mathbf{I} - \mathbf{M})}{g(\mathbf{I})} = 1 - \frac{g(\mathbf{V}_I^{-1/2}\mathbf{V}_D\mathbf{V}_I^{-1/2})}{g(\mathbf{I})},$$

donde  $g(\mathbf{A}) = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2}$ , es la norma de Frobenius, y  $\lambda_i$  son los valores propios de la matriz simétrica  $\mathbf{A}$ .

Ahora, en el ámbito espacial, existe una componente que añade correlación entre procesos, que es la distancia entre las locaciones involucradas en ámbos procesos, y la estructura de covarianza de dichos procesos. Es por esto que se quiere proponer un coeficiente de concordancia, que tome en cuenta las estructuras espaciales de los procesos, y que sea una función de la distancia  $\mathbf{h}$  de las localizaciones, donde  $\mathbf{h} = \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\| \in \mathbb{R}^2$ .

El presente trabajo consta de la siguiente estructura: A continuación se presentan los preliminares, que muestran las definiciones básicas dado el contexto espacial, además de la forma de las estructuras a trabajar, considerando las condiciones necesarias para su buena definición. En el Capítulo 2 se propone un coeficiente de concordancia espacial,  $\rho_c(\mathbf{h})$ , que extiende la idea de Lin (1989), para procesos espaciales débilmente estacionarios de segundo orden, para una distancia  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$  fija. Se determina  $\rho_c(\mathbf{h})$  para estructuras de covarianza bivariadas de Matérn y de Wendland-Gneiting, para distintos valores de los parámetros de cada modelo. Luego se propone una versión muestral  $\hat{\rho}_c(\mathbf{h})$  y se procede a hacer inferencia, probando la normalidad asintótica del coeficiente, en sentido de dominio creciente, para los modelos de covarianza de Matérn bivariada, cuando el parámetro de suavidad  $\nu_{12} = 1/2$ , utilizando los resultados de

normalidad asintótica para el estimador máximo verosímil de [Bevilacqua et al. \(2015\)](#). Además, se prueba la normalidad asintótica para un caso especial de la covarianza de Wendland-Gneiting bivariada. Luego, utilizando el método delta multivariado, se prueba la normalidad asintótica del coeficiente de concordancia espacial, como función del estimador de máxima verosimilitud del modelo de covarianza. En el Capítulo 3 se realizan simulaciones usando el paquete *RandomFields* del software *R*, para estructuras de Matérn y Wendland-Gneiting, y luego se hace estimación de los parámetros vía máxima verosimilitud, observando el comportamiento de  $\widehat{\rho}_c(\mathbf{h})$ . En el Capítulo 4 se muestran dos aplicaciones. Se analizan dos imágenes, tomadas con dos instrumentos distintos, de un mismo paisaje. Luego, se consideran pares de mediciones de dos índices de pobreza en Chile, utilizando dos metodologías. Para ambas aplicaciones se ajustan modelos para analizar la concordancia entre las mediciones. Finalmente, en el Capítulo 5, se plantean las conclusiones del trabajo y además un trabajo futuro, que consiste en extender el coeficiente de concordancia espacial, para una estructura bivariada condicionalmente autoregresiva.

## 1.1. Preliminares

### 1.1.1. Procesos Espaciales

Sea  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$  un punto en el plano Euclideo que es indexado en un conjunto  $D \subset \mathbb{R}^2$ , y  $Z(\mathbf{s})$  una variable aleatoria que determina una potencial medición en el punto  $\mathbf{s}$ . Luego se genera el siguiente campo aleatorio  $\{Z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in D \subset \mathbb{R}^2\}$ , cuya realización se denota por  $z(\mathbf{s}) : \mathbf{s} \in D$ .

**Definición 1.1.** Un proceso espacial  $Z(\mathbf{s})$  se dice de segundo orden si para todo  $\mathbf{s} \in D$ ,  $\mathbb{E}[Z^2(\mathbf{s})] < \infty$ .

**Definición 1.2.** Un proceso espacial de segundo orden se dice débilmente estacionario si cumple las siguientes propiedades:

1.  $\mathbb{E}[Z(\mathbf{s})] = \mu, \quad \forall \mathbf{s} \in D$ .
2.  $\text{Cov}(Z(\mathbf{s}_1), Z(\mathbf{s}_2)) = C(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) = C(\mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 \in D$ .

**Definición 1.3.** Un proceso espacial de segundo orden se dice intrínsecamente estacionario si cumple las siguientes propiedades:

1.  $\mathbb{E}[Z(\mathbf{s})] = \mu, \quad \forall \mathbf{s} \in D.$
2.  $\mathbb{E}[Z(\mathbf{s}_1) - Z(\mathbf{s}_2)]^2 = 2\gamma(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) = 2\gamma(\mathbf{h}), \quad \forall \mathbf{h} = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 \in D.$

Si el proceso es intrínsecamente estacionario, entonces la cantidad  $2\gamma(\cdot)$  es denominada *variograma*, y  $\gamma(\cdot)$  es denominada *semivariograma*.

**Definición 1.4.** Un proceso espacial  $Z(\mathbf{s})$  tiene una estructura de covarianza isotrópica si

$$C(\mathbf{h}) = \varphi(\|\mathbf{h}\|), \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^d, \quad (1.1)$$

para alguna función continua  $\varphi : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ .

**Definición 1.5.** Sean dos procesos espaciales  $Z_1(\mathbf{s})$  y  $Z_2(\mathbf{s})$  con medias  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , y variogramas  $\gamma_1(\mathbf{h})$  y  $\gamma_2(\mathbf{h})$ , se define el variograma cruzado como

$$\gamma_{12}(\mathbf{h}) = \mathbb{E}[(Z_1(\mathbf{s}) - Z_1(\mathbf{s} + \mathbf{h})) (Z_2(\mathbf{s}) - Z_2(\mathbf{s} + \mathbf{h}))]. \quad (1.2)$$

**Definición 1.6.** Sean dos procesos espaciales  $Z_1(\mathbf{s})$  y  $Z_2(\mathbf{s})$ ,  $\mathbf{s} \in D \subset \mathbb{R}^2$ . Se define el coeficiente de codispersión como

$$\varrho_{12}(\mathbf{h}) := \frac{\gamma_{12}(\mathbf{h})}{\sqrt{\mathbb{E}[(Z_1(\mathbf{s}) - Z_1(\mathbf{s} + \mathbf{h}))^2] \mathbb{E}[(Z_2(\mathbf{s}) - Z_2(\mathbf{s} + \mathbf{h}))^2]}}, \quad \mathbf{s}, \mathbf{h} \in D. \quad (1.3)$$

### 1.1.2. Coeficiente de Correlación de Concordancia

Lin (1989) planteó un coeficiente de correlación de concordancia. Sean  $(Z_{i1}, Z_{i2})$ , con  $i = 1, \dots, n$ , pares de muestras independientes obtenidas de una población bivariada, con medias  $\mu_1$  y  $\mu_2$ , y matriz de covarianza

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_{12} \\ \sigma_{12} & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

El grado de concordancia entre  $Z_1$  e  $Z_2$  se puede caracterizar por la esperanza del cuadrado de la diferencia, es decir,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(Z_1 - Z_2)^2] &= (\mu_1 - \mu_2)^2 + (\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\sigma_{12}) \\ &= (\mu_1 - \mu_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2 - 2\sigma_{12} \\ &= (\mu_1 - \mu_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2(1 - \rho)\sigma_1\sigma_2, \end{aligned}$$

donde  $\rho = \frac{\sigma_{12}}{\sigma_1\sigma_2}$  es el coeficiente de correlación de Pearson. Esta expresión representa la esperanza al cuadrado de la desviación perpendicular de la línea de 45 grados, multiplicada por 2. Si cada par  $Z_1$  e  $Z_2$  están en perfecta concordancia, esta esperanza es cero.

**Definición 1.7.** Se define el coeficiente de concordancia como

$$\begin{aligned}\rho_c &= 1 - \frac{\mathbb{E}[(Z_1 - Z_2)^2]}{\mathbb{E}[(Z_1 - Z_2 | Z_1, Z_2 \text{ no correlacionados})^2]} \\ &= 1 - \frac{\mathbb{E}[(Z_1 - Z_2)^2]}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2} \\ &= \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2} \\ &= \rho \cdot C_{ab},\end{aligned}\tag{1.4}$$

donde  $\rho$  es el coeficiente de correlación de Pearson, y  $C_{ab} = ((a + 1/a + b^2)/2)^{-1}$ , con  $a = \sigma_1/\sigma_2$  y  $b = (\mu_1 - \mu_2)/\sqrt{\sigma_1\sigma_2}$ .

Notamos que  $0 \leq C_{ab} \leq 1$ , el cual se presenta como un factor de corrección que mide la desviación de los datos con respecto a la línea de 45 grados desde el origen. Si este factor  $C_{ab} = 1$ , entonces no existe desviación. Del mismo modo, mientras más lejos esté  $C_{ab}$  de 1, más grande es la desviación con respecto a la línea de 45 grados.

**Resultado 1.1.** *El coeficiente de concordancia definido en (1.4), tiene las siguientes propiedades:*

1.  $-1 \leq -|\rho| \leq \rho_c \leq |\rho| \leq 1$ .
2.  $\rho_c = 0$  si y solo si  $\rho = 0$ .
3.  $\rho_c = \rho$  si y solo si  $\sigma_1 = \sigma_2$  y  $\mu_1 = \mu_2$ .
4.  $\rho_c = \pm 1$  si y sólo si
  - a.  $(\mu_1 - \mu_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2(1 \mp \rho) = 0$  o equivalentemente
  - b.  $\rho = \pm 1$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2$  y  $\mu_1 = \mu_2$  o equivalentemente
  - c. Cada par está en concordancia perfecta (1) (e.g. 1,1;2,2;3,3;4,4;5,5), o concordancia inversa (-1) (e.g. 5,1;4,2;3,3;2,4;1,5).

*Demostración.*

1. Notamos que como  $0 < C_{ab} \leq 1$ , y  $|\rho| \leq 1$  luego se sigue trivialmente que  $-1 \leq -|\rho| \leq \rho_c \leq |\rho| \leq 1$ .
2. Si  $\rho_c = 0$ , luego como  $C_{ab} \neq 0$ , se tiene que  $\rho = 0$ . Del mismo modo, si  $\rho = 0$ , luego se tiene que  $\rho_c = \rho \cdot C_{ab} = 0 \cdot C_{ab} = 0$ .
3. Notamos que  $\rho_c = \rho$  si y sólo si  $C_{ab} = 1$ , desde aquí tenemos que  $C_{ab} = ((a + 1/a + b^2)/2)^{-1} = 1 \Rightarrow (a + 1/a + b^2) = 2 \Rightarrow (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 = 0$ , luego se tiene que  $\sigma_1 = \sigma_2$  y  $\mu_1 = \mu_2$ .  
Para el recíproco notamos que si  $\sigma_1 = \sigma_2$  y  $\mu_1 = \mu_2$ , luego  $C_{ab} = 1$ , lo cual completa la prueba.
4. Si  $\rho_c = 1$ , luego

$$\begin{aligned}
 \rho &= C_{ab}^{-1} \\
 \Leftrightarrow \rho &= \frac{1}{2} \left( \frac{\sigma_1}{\sigma_2} + \frac{\sigma_2}{\sigma_1} + \frac{(\mu_1 - \mu_2)^2}{\sigma_1 \sigma_2} \right) \\
 \Leftrightarrow \rho &= \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}{2\sigma_1 \sigma_2} \\
 \Leftrightarrow 2\rho\sigma_1\sigma_2 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 \\
 \Leftrightarrow 0 &= (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2(1 - \rho).
 \end{aligned}$$

Para el caso  $\rho_c = -1$  se hace de forma análoga.

Como  $0 \leq 1 \mp \rho \leq 2$ , luego si  $(\mu_1 - \mu_2)^2 + (\sigma_1 - \sigma_2)^2 + 2\sigma_1\sigma_2(1 \mp \rho) = 0$  se tiene que  $\mu_1 - \mu_2 = 0$ ,  $\sigma_1 - \sigma_2 = 0$  y  $1 \mp \rho = 0$ .

Si  $\sigma_1 = \sigma_2$  y  $\mu_1 = \mu_2$ , luego  $C_{ab} = 1$ , así  $\rho_c = \rho = \pm 1$ . Por lo tanto se tendrá concordancia perfecta (1) o inversa (-1) en cada par.

Si se tiene concordancia perfecta,  $\rho_c = 1$ , y si se tiene concordancia inversa  $\rho_c = -1$ , lo cual termina la prueba.  $\square$

Este coeficiente mide el grado en el cual cada par se desvía de la línea de 45 grados desde el origen. Se tienen medidas de exactitud  $C_{ab}$  y precisión  $\rho$ . Cualquier desvío desde esta línea implica que  $\rho_c < 1$ .

Consideramos  $n$  pares de muestras independientes, luego la versión muestral del coeficiente de correlación de concordancia, por reemplazo directo, está dada por

$$\widehat{\rho}_c = \frac{2S_{12}}{S_1^2 + S_2^2 + (\bar{Z}_1 - \bar{Z}_2)^2}, \quad (1.5)$$

donde

$$\bar{Z}_j = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Z_{ij}, \quad S_j^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_{ij} - \bar{Z}_j)^2, \quad j = 1, 2; \quad S_{12} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Z_{i1} - \bar{Z}_1)(Z_{i2} - \bar{Z}_2).$$

### 1.1.3. Inferencia

Sean  $(Z_{i1}, Z_{i2})$ ,  $i = 1, \dots, n$  pares de muestras provenientes de una distribución normal bivariada  $\mathcal{N}(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$ , y  $\hat{\rho}_c$  el coeficiente de concordancia muestral definido en (1.5). Usando la teoría de transformación de funciones de vectores asintóticamente normales, Lin (1989) mostró que  $\hat{\rho}_c$  es un estimador consistente de  $\rho_c$  y que tiene una distribución asintóticamente normal con media  $\rho_c$  y varianza

$$\sigma_{\hat{\rho}_c}^2 = \frac{1}{n-2} [(1-\rho^2)\rho_c^2(1-\rho_c^2)/\rho^2 + 2\rho_c^3(1-\rho_c)b^2/\rho - \rho_c^4 b^4/2\rho^2].$$

Consideramos ahora la transformación  $\hat{Z} = \tanh^{-1}(\hat{\rho}_c) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\hat{\rho}_c}{1-\hat{\rho}_c}$ . Lin (1989) también probó que  $\hat{Z}$  tiene una distribución asintótica normal con media  $Z = \frac{1}{2} \ln[(1+\rho_c)/(1-\rho_c)]$  y varianza

$$\sigma_{\hat{Z}}^2 = \frac{1}{n-2} \left[ \frac{(1-\rho^2)\rho_c^2}{(1-\rho_c^2)\rho^2} + \frac{2\rho_c^3(1-\rho_c)b^2}{\rho(1-\rho_c^2)^2} - \frac{\rho_c^4 b^4}{2\rho^2(1-\rho_c^2)^2} \right].$$

Usando las contrapartes muestrales en los parámetros de las dos varianzas anteriores, se puede construir intervalos de confianza o test de hipótesis aproximados para  $\hat{\rho}_c$ .

## 1.2. Estructuras de Covarianza Bivariada

Para el desarrollo del coeficiente de concordancia espacial, utilizaremos distintas estructuras de covarianza bivariadas. Consideremos un proceso espacial Gaussiano bivariado,  $(Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$ ,  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$ , débilmente estacionario, con media  $\boldsymbol{\mu} = (0, 0)^\top$  sin pérdida de generalidad. Se define como función de covarianza el mapeo  $\mathbf{C} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$  definido como

$$\mathbf{C}(\mathbf{h}) = [C_{ij}(\mathbf{h})]_{i,j=1}^2 = [\text{Cov}(Z_i(\mathbf{s}_1), Z_j(\mathbf{s}_2))]_{i,j=1}^2, \quad \mathbf{h} = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2 \in \mathbb{R}^2.$$

La función  $\mathbf{C}(\mathbf{h})$  es llamada función de covarianza bivariada.  $\mathcal{M}_{2 \times 2}$  representa el conjunto de matrices cuadradas, simétricas y definidas positivas. Las funciones  $C_{ii}(\mathbf{h})$ ,  $i, j = 1, 2$ , son las funciones de covarianza marginales de los campos aleatorios  $Z_i(\mathbf{s})$ ,  $i = 1, 2$ , mientras que  $C_{12}(\mathbf{h})$  es llamada función de covarianza bivariada cruzada entre  $Z_1(\mathbf{s})$  y  $Z_2(\mathbf{s})$ , según la distancia  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ .

Se define el mapeo  $\mathbf{R} : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathcal{M}_{2 \times 2}$  como

$$\mathbf{R}(\mathbf{h}) = [R_{ij}(\mathbf{h})]_{i,j=1}^2, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2,$$

$$R_{ij}(\mathbf{h}) = \frac{C_{ij}(\mathbf{h})}{\sqrt{C_{ii}(\mathbf{0})C_{jj}(\mathbf{0})}}.$$

El mapeo  $\mathbf{R}$  es llamado función de correlación bivariada, donde  $R_{ii}(\mathbf{h})$  corresponde a la función de correlación marginal de  $Z_{ii}(\mathbf{s})$ ,  $i = 1, 2$ ,  $R_{12}(\mathbf{h})$  corresponde a la función de correlación cruzada entre  $Z_1(\mathbf{s})$  y  $Z_2(\mathbf{s})$  y  $R_{12}(\mathbf{0})$  es la correlación marginal entre las dos componentes.

El mapeo  $\mathbf{C}$ , y por consiguiente  $\mathbf{R}$  debe ser definido positivo, es decir, dada una realización  $\mathbf{Z} = (Z(\mathbf{s}_1)^\top, \dots, Z(\mathbf{s}_n)^\top)^\top$ , la matriz de covarianza de dimensión  $(2n) \times (2n)$

$$\Sigma := \begin{pmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{0}) & \mathbf{C}(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) & \cdots & \mathbf{C}(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_1) & \mathbf{C}(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_2) & \cdots & \mathbf{C}(\mathbf{0}) \end{pmatrix},$$

es definida positiva.

En general asumiremos que  $\mathbf{C}$  viene de una familia paramétrica de covarianzas bivariadas de la forma  $\{\mathbf{C}(\cdot; \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p\}$ , donde  $\Theta$  corresponde a un espacio paramétrico arbitrario.

### 1.2.1. Estructuras de Covarianza Separables

Llamaremos una estructura de covarianza separables a las funciones de covarianza bivariadas paramétricas que se pueden expresar de la siguiente forma:

$$\mathbf{C}(\mathbf{h}, \boldsymbol{\theta}) = [\rho_{ij}\sigma_i\sigma_j R(\mathbf{h}, \psi)]_{i,j=1}^2, \quad \rho_{ii} = 1, |\rho_{12}| < 1, \quad (1.6)$$

donde  $R(\mathbf{h}, \psi)$  es un modelo de correlación paramétrico univariado,  $\sigma_i^2 > 0$ ,  $i = 1, 2$ , son las varianzas marginales,  $\rho_{12}$  es la correlación marginal entre  $Z_1(\mathbf{s})$  y  $Z_2(\mathbf{s})$  y  $\boldsymbol{\theta} = (\rho_{12}, \psi^\top, \sigma_1^2, \sigma_2^2)^\top$ .

### 1.2.2. Estructuras de Covarianza No-separables

Una generalización del caso anterior, consiste en la clase de funciones paramétricas llamada no-separable, la cual se puede expresar de la siguiente manera,

$$\mathbf{C}(\mathbf{h}, \boldsymbol{\theta}) = [\rho_{ij} \sigma_i \sigma_j R(\mathbf{h}, \psi_{ij})]_{i,j=1}^2, \quad \rho_{ii} = 1. \quad (1.7)$$

En esta generalización, se pueden expresar distintos comportamientos en el origen, de las dos componentes del campo aleatorio. En este caso,  $\boldsymbol{\theta} = (\rho_{12}, \psi_{11}^\top, \psi_{12}^\top, \psi_{22}^\top, \sigma_1^2, \sigma_2^2)^\top$ . En este modelo, la principal dificultad es poder encontrar las condiciones en los parámetros que permitan que el modelo sea una estructura de covarianza válida.

### 1.2.3. Covarianza de Matérn Bivariada

Consideramos la función de Matérn utilizada en estadística espacial, dada por

$$M(\mathbf{h}|\nu, a) = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} (a\|\mathbf{h}\|)^\nu K_\nu(a\|\mathbf{h}\|),$$

donde  $K_\nu$  es una función de Bessel modificada de segundo tipo,  $a > 0$  es un parámetro espacial de escala, cuyo inverso,  $1/a$ , se conoce como longitud o rango de correlación y  $\nu > 0$  es un parámetro de suavidad.

Cuando  $\nu = n + \frac{1}{2}$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ , la función de Matérn se reduce a

$$M\left(\mathbf{h} \left| n + \frac{1}{2}, a \right.\right) = \exp(-a\|\mathbf{h}\|) \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{(2n)!} \binom{n}{k} (2a\|\mathbf{h}\|)^{n-k}, \quad n = 0, 1, 2, \dots$$

**Definición 1.8. Modelo Full Bivariado** (Gneiting et al. (2010)). Sea un proceso espacial  $\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = (Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$ ,  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$ . Se asume que el proceso es normal bivariado y débilmente estacionario con vector de medias  $\mathbf{0}$  y matriz de covarianza dada por la función

$$\mathbf{C}(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} C_{11}(\mathbf{h}) & C_{12}(\mathbf{h}) \\ C_{21}(\mathbf{h}) & C_{22}(\mathbf{h}) \end{pmatrix},$$

donde  $C_{ii}(\mathbf{h}) = \mathbb{E}[Z_i(\mathbf{s} + \mathbf{h})Z_i(\mathbf{s})]$ ,  $i, j = 1, 2$ ; es una función de covarianza univariada, y  $C_{ij}(\mathbf{h}) = \mathbb{E}[Z_i(\mathbf{s} + \mathbf{h})Z_j(\mathbf{s})]$ ,  $i, j = 1, 2$ ; es una función de covarianza cruzada entre las componentes del proceso espacial,  $Z_1(\mathbf{s})$  y  $Z_2(\mathbf{s})$ .

El Modelo Full Bivariado tiene una covarianza dada por

$$\begin{aligned} C_{11}(\mathbf{h}) &= \sigma_1^2 M(\mathbf{h}|\nu_1, a_1), \\ C_{22}(\mathbf{h}) &= \sigma_2^2 M(\mathbf{h}|\nu_2, a_2), \\ C_{12}(\mathbf{h}) &= C_{21}(\mathbf{h}) = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 M(\mathbf{h}|\nu_{12}, a_{12}). \end{aligned}$$

Se presenta el siguiente teorema que da condiciones para la validez de este modelo.

**Teorema 1.9.** *El modelo Full Bivariado dado en la Definición 1.8 es válido si y solo si*

$$\rho_{12}^2 \leq \frac{\Gamma\left(\nu_1 + \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\nu_1)} \frac{\Gamma\left(\nu_2 + \frac{d}{2}\right)}{\Gamma(\nu_2)} \frac{\Gamma(\nu_{12})^2}{\Gamma\left(\nu_{12} + \frac{d}{2}\right)^2} \frac{a_1^{2\nu_1} a_2^{2\nu_2}}{a_{12}^{4\nu_{12}}} \inf_{t \geq 0} \frac{(a_{12}^2 + t^2)^{2\nu_{12} + d}}{(a_1^2 + t^2)^{\nu_1 + 1/2} (a_2^2 + t^2)^{\nu_2 + 1/2}}.$$

En particular, esto puede ser escrito como uno de los siguientes casos:

- (a) Si  $\nu_{12} < \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$  el modelo es válido si y solo si  $\rho_{12} = 0$ .
- (b) Si  $\nu_{12} = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$  y  $a_{12} \leq \min(a_1, a_2)$  el modelo es válido si y solo si

$$|\rho_{12}| \leq \left(\frac{a_{12}^2}{a_1 a_2}\right)^{d/2} \frac{\Gamma(\nu_1 + \frac{d}{2})^{1/2} \Gamma(\nu_2 + \frac{d}{2})^{1/2}}{\Gamma(\nu_1)^{1/2} \Gamma(\nu_2)^{1/2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2))}{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) + \frac{d}{2})}.$$

- (c) Si  $\nu_{12} = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$  y  $\min(a_1, a_2) < a_{12} < \max(a_1, a_2)$  el ínfimo se alcanza si  $t = 0$ , o en el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , o si

$$t^2 = \frac{(2\nu_2 + d)a_1^2 + a_{12}^2 + (2\nu_1 + d)a_2^2 + a_{12}^2 - 2(\nu_1 + \nu_2 + d)a_1^2 a_2^2}{(2\nu_1 + d)a_1^2 + (2\nu_2 + d)a_2^2 - 2(\nu_1 + \nu_2 + d)a_{12}^2}.$$

(d) Si  $\nu_{12} = \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$  y  $a_{12} \geq \max(a_1, a_2)$  el modelo es válido si y solo si

$$|\rho_{12}| \leq \left(\frac{a_1}{a_{12}}\right)^{\nu_1} \left(\frac{a_2}{a_{12}}\right)^{\nu_2} \frac{\Gamma(\nu_1 + \frac{d}{2})^{1/2} \Gamma(\nu_2 + \frac{d}{2})^{1/2}}{\Gamma(\nu_1)^{1/2} \Gamma(\nu_2)^{1/2}} \frac{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2))}{\Gamma(\frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2) + \frac{d}{2})}.$$

(e) Si  $\nu_{12} > \frac{1}{2}(\nu_1 + \nu_2)$  el ínfimo se obtiene si  $t = 0$ , o en el límite cuando  $t \rightarrow \infty$ , o si  $t^2 = u$ , donde  $u$  es una raíz positiva de

$$\begin{aligned} & \left(\nu_{12} - \frac{\nu_1 + \nu_2}{2}\right) u^2 \\ & + \left( \left(\nu_{12} - \frac{\nu_2}{2} + \frac{d}{4}\right) a_1^2 + \left(\nu_{12} - \frac{\nu_2}{2} + \frac{d}{4}\right) a_2^2 - \left(\frac{\nu_1 + \nu_2}{2} + \frac{d}{2}\right) a_{12}^2 \right) u \\ & + \left(\nu_{12} + \frac{d}{2}\right) a_1^2 a_2^2 - \left(\frac{\nu_2}{2} + \frac{d}{4}\right) a_1^2 a_{12}^2 - \left(\frac{\nu_1}{2} + \frac{d}{4}\right) a_2^2 a_{12}^2 = 0. \end{aligned}$$

*Demostración.* Se aplica el Teorema de Cramér (Yaglom 1987. p.315), en su versión de densidad espectral, que dice que el modelo de covarianza es válido si y solo si la matriz de densidad espectral es definida no negativa en casi todas las frecuencias espaciales. Aquí,  $p = 2$ , por lo tanto necesitamos que los determinantes respectivos sean no negativos. Es decir  $|f_{12}(t)|^2 \leq f_{11}(t)f_{22}(t)$ ,  $\forall t = \|\omega\| \geq 0$ , donde  $f_{ij}$  son las transformadas de Fourier de  $C_{ij}$ , lo cual da la cota para  $\rho_{12}$ .  $\square$

## 1.2.4. Covarianza de Wendland-Gneiting Bivariada

Se presenta una familia de funciones propuestas por [Wendland \(1995\)](#) en análisis numérico y luego por [Gneiting \(2002a\)](#) en geoestadística.

### 1.2.4.1. Funciones de Wendland-Gneiting

Consideramos la familia de funciones de [Askey \(1973\)](#),  $\mathcal{A}_\mu : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$ , definidas por

$$\mathcal{A}_\mu(r) = (1 - r)_+^\mu, \quad \mu > 0,$$

donde  $(\cdot)_+$  denota la parte positiva.

[Gneiting \(2002b\)](#) y [Zastavnyĭ \(2006\)](#) definen las funciones de Wendland-Gneiting  $\varphi_{\mu,\kappa}$ ,

para  $\kappa > 0$ , como

$$\varphi_{\mu,\kappa}(r) := \frac{1}{B(1+2\kappa,\mu)} \int_r^\infty (u^2 - r^2)^\kappa \mathcal{A}_{\mu-1}(u) du, \quad 0 \leq r \leq 1.$$

Gneiting (2002b) y Zastavnyĭ (2006) además definen  $\varphi_{\mu,0} := \mathcal{A}_\mu$ .

Finalmente, la función de covarianza Wendland-Gneiting univariada, con soporte compacto en  $\beta > 0$ , varianza  $\sigma^2$  y parámetro de suavizamiento  $\kappa \geq 0$ , estada dada por

$$\begin{aligned} \varphi_{\mu,\kappa,\beta,\sigma^2}(r) &:= \sigma^2 \varphi_{\mu,\kappa}(r/\beta), \quad 0 \leq r \leq \beta, \\ \varphi_{\mu,0,\beta,\sigma^2}(r) &:= \sigma^2 \mathcal{A}_\mu(r/\beta)(r), \quad 0 \leq r \leq \beta. \end{aligned}$$

En el Cuadro 1.1 podemos ver como luce la función  $\varphi_{\mu,\kappa}(r)$  para distintos valores de  $\kappa$ .

$\kappa$	$\varphi_{\mu,\kappa}(r)$
0	$(1-r)_+^\mu$
1	$(1-r)_+^{\mu+1}(1+r(\mu+1))$
2	$(1-r)_+^{\mu+2} \left( 1 + r(\mu+2) + r^2(\mu^2 + 4\mu + 3) \frac{1}{3} \right)$
3	$(1-r)_+^{\mu+3} \left( 1 + r(\mu+3) + r^2(2\mu^2 + 12\mu + 15) \frac{1}{5} + r^3(\mu^3 + 9\mu^2 + 23\mu + 15) \frac{1}{15} \right)$

CUADRO 1.1: Funciones de covarianza Wendland-Gneiting para distintos valores de  $\kappa$ .

#### 1.2.4.2. Covarianza multivariada de Wendland-Gneiting

Análogo al caso univariado, consideramos las funciones de Askey del tipo  $\psi_{v,0}(\mathbf{x}) := (1 - \|\mathbf{x}\|)_+^v$ ,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ ,  $v > 0$ . Daley et al. (2015) denotan por  $\Phi_d^m$  la clase de funciones radiales de la clase de matrices  $m \times m$  con valores reales. Para  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d$ , esta función tiene soporte compacto sobre la bola unitaria  $\mathbb{B}_1^d = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^d : \|\mathbf{x}\| \leq 1\}$ , y para  $d \in \mathbb{N}_+ = \{1, 2, \dots\}$ , la versión radial de  $\psi_{v,0}$  está en  $\Phi_d$  para  $v \geq \frac{1}{2}(d+1)$ . Daley et al. (2015) usan la notación  $\psi_{v,0}(t) = (1-t)_+^v =: \psi_v(t)$ , pero para  $t \in \mathbb{R}_+$ .

**Observación:** Se define  $\psi_0(\mathbf{x})$  la función indicatriz de la bola en  $\mathbb{R}^d$  de radio 1, o equivalentemente,  $(1-t)_+^0 = 1$  para  $t < 1$  y 0 para  $t \geq 1$ . De manera análoga, se define como  $\psi_0(\mathbf{x}/b)$  a la función indicatriz de la bola de radio  $b > 0$ .

Para cualquier  $f \in \Phi_d$  tal que  $\lim_{t \rightarrow \infty} \int_0^t u f(u) du$  es finito y no cero, [Matheron \(1962\)](#) definió el siguiente operador:

$$\tilde{I}f(t) = \frac{\int_t^\infty u f(u) du}{\int_0^\infty u f(u) du}, \quad t \in \mathbb{R}_+.$$

Notamos  $\tilde{I}^k \psi_v := \tilde{\psi}_{v,k}$ . [Gneiting \(2002a\)](#) probó que  $\tilde{\psi}_{v,k} \in \Phi_d$  si y sólo si  $v \geq \frac{1}{2}(d + 1) + k$ , y además mostró que  $\tilde{\psi}_{v,k}$  es  $2k$  veces diferenciable en cero y que tiene la forma  $\tilde{\psi}_{v,k}(t) = p_k(t, v)(1 - t)_+^{v+k}$ , donde  $p_k$  es un polinomio de grado a lo más  $k$  en ambos argumentos.

Sea  $g(\cdot; \alpha, \gamma, b, c) = ct^\alpha \psi_\gamma(t/b)$ , donde  $\alpha > 0$ ,  $\gamma \geq 0$ ,  $b > 0$  y  $c > 0$ . Tomando la definición de  $\psi_\gamma$  para  $\gamma = 0$ , se puede definir también para  $g$ . De manera similar,  $g_{ij}(\cdot) := g(\cdot; \alpha_{ij}, \gamma_{ij}, b_{ij}, c_{ij})$ .

Se define  $\mathbf{G}(t) = [g_{ij}(t)]_{i,j=1}^m$ . Se usa la función  $\mathbf{G}(\cdot)$  en conjunto con una función  $f \in \Phi_d$  tal que tenga soporte compacto en  $[0, a]$ , para  $a > 0$  finito, para definir los componentes  $\mathbf{C}_{ij}$  de la matriz  $\mathbf{C} := [\mathbf{C}_{ij}]_{i,j=1}^m$  como

$$\mathbf{C}_{ij}(\mathbf{x}) := \int_{\mathbb{R}_+} f\left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{t}\right) g_{ij}(t) dt = \begin{cases} \int_{\|\mathbf{x}\|/a}^{b_{ij}} f(\|\mathbf{x}\|/t) g_{ij}(t) dt, & \|\mathbf{x}\| \leq ab_{ij}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Luego

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}_+} f\left(\frac{\|\mathbf{x}\|}{t}\right) \mathbf{G}(t) dt \quad \mathbf{x} \in \mathbb{R}^d, \quad (1.8)$$

donde  $\mathbf{C}(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$  cuando  $\|\mathbf{x}\| \geq a \max_{i,j=1}^m b_{ij}$ .

Para  $k \geq 1$  la función de Wendland-Gneiting  $\tilde{I}^k \psi_v = \tilde{\psi}_{v,k}$  está dada por

$$\tilde{\psi}_{v,k}(t) = \int_t^1 \frac{u(u^2 - t^2)^{k-1} (1 - u)_+^v}{B(2k, v + 1)} du \quad 0 \leq t \leq 1. \quad (1.9)$$

[Zastavnyi y Trigub \(2002\)](#) entregan una expresión equivalente para  $v > 0$  dada por

$$\tilde{\psi}_{v,k}(t) = \int_t^1 \frac{(u^2 - t^2)^k (1 - u)^{v-1}}{B(2k + 1, v)} du. \quad (1.10)$$

Daley et al. (2015) dan las condiciones para  $\mathbf{C} \in \Phi_d^m$  dadas por

$$\begin{aligned} \mathbf{C}_{ij}(\mathbf{x}) &:= \int_{\mathbb{R}_+} \tilde{I}^k \psi_\nu \left( \frac{\|\mathbf{x}\|}{t} \right) g_{ij}(t; \alpha_{ij}, \gamma_{ij}, b_{ij}, c_{ij}) dt \\ &= \begin{cases} c_{ij} \int_{\|\mathbf{x}\|}^{b_{ij}} \tilde{I}^k \psi_\nu(\|\mathbf{x}\|/t) t^{\alpha_{ij}} \left( 1 - \frac{\|\mathbf{x}\|}{b_{ij}} \right)^{\gamma_{ij}} dt, & \|\mathbf{x}\| \leq ab_{ij}, \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases} \end{aligned}$$

Consideramos como covarianza de Wendland-Gneiting bivariada al modelo de forma

$$\mathbf{C}(\mathbf{x}) = [\rho_{ij} \sigma_{ii} \sigma_{jj} R_{ij}(\mathbf{x})]_{i,j=1}^m, \quad (1.11)$$

donde  $R_{ij}(\mathbf{x}) = c_{ij} b_{ij}^{\nu+2k+1} B(\nu + 2k + 1, \gamma_{ij} + 1) \tilde{\psi}_{\nu+\gamma_{ij}+1,k} \left( \frac{\|\mathbf{x}\|}{b_{ij}} \right)$ .

Para el caso de interés,  $m = 2$ , Daley et al. (2015) entregan la siguiente condición con respecto a  $\rho_{12}$ ,

$$|\rho_{12}| \leq \sqrt{\left( \frac{b_{12}^2}{b_{11} b_{22}} \right)^{\nu+2k+1} \frac{B^2(\nu + 2k + 1, \gamma_{12} + 1)}{B(\nu + 2k + 1, \gamma_{11} + 1) B(\nu + 2k + 1, \gamma_{22} + 1)}}.$$

En el caso donde  $\gamma_{ij} = 0$ , para todo  $i, j$ , la condición se simplifica a

$$|\rho_{12}| \leq \sqrt{\left( \frac{b_{12}^2}{b_{11} b_{22}} \right)^{\nu+2k+1}}.$$

Consideramos un caso especial de la ecuación (1.11),  $0 \leq \|\mathbf{x}\| =: h \rightarrow R(h)$ , donde

$$R(h) = p_k(h)(1 - h/b)_+^l, \quad (1.12)$$

con  $k = 0, 1, 2$ ,  $l = \nu + \gamma + 1$ ,  $\gamma \geq 0$  y  $b > 0$ .

La forma que toma la función se puede apreciar en el Cuadro 1.2.

$k$	$p_k(h)$
0	1
1	$1 + l\frac{h}{b}$
2	$1 + l\frac{h}{b} + \frac{1}{3}(l^2 - 1)\left(\frac{h}{b}\right)^2$

CUADRO 1.2: Caso especial para la covarianza de Wendland-Gneiting.

# Capítulo 2

## Coeficiente de Concordancia Espacial

### 2.1. Definición y Propiedades

**Definición 2.1.** Sea  $(Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$  un campo aleatorio bivariado débilmente estacionario y de segundo orden, con  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$ , vector de media  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^\top$  y estructura de covarianza dada por

$$\mathbf{C}(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} C_{11}(\mathbf{h}) & C_{12}(\mathbf{h}) \\ C_{21}(\mathbf{h}) & C_{22}(\mathbf{h}) \end{pmatrix},$$

$C_{ii}(\mathbf{h}) = \text{Cov}[Z_i(\mathbf{s}), Z_i(\mathbf{s} + \mathbf{h})]$ ,  $i, j = 1, 2$ .  $C_{12}(\mathbf{h}) = C_{21}(\mathbf{h}) = \text{Cov}[Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s} + \mathbf{h})]$ ,  $\forall \mathbf{s}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ .

Definimos el coeficiente de concordancia espacial para  $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$  fijo como

$$\begin{aligned} \rho_c(\mathbf{h}) &= 1 - \frac{\mathbb{E}[(Z_1(\mathbf{s}) - Z_2(\mathbf{s} + \mathbf{h}))^2]}{\mathbb{E}[(Z_1(\mathbf{s}) - Z_2(\mathbf{s} + \mathbf{h}) | Z_1, Z_2 \text{ no correlacionados})^2]} \\ &= 1 - \frac{\text{Var}[Z_1(\mathbf{s}) - Z_2(\mathbf{s} + \mathbf{h})]}{C_{11}(\mathbf{0}) + C_{22}(\mathbf{0}) + (\mu_1 - \mu_2)^2}. \end{aligned} \quad (2.1)$$

**Resultado 2.1.** El coeficiente de concordancia espacial definido en (2.1) se puede expresar como

$$\rho_c(\mathbf{h}) = \frac{2C_{12}(\mathbf{h})}{C_{11}(\mathbf{0}) + C_{22}(\mathbf{0}) + (\mu_1 - \mu_2)^2}. \quad (2.2)$$

**Resultado 2.2.** El coeficiente de concordancia espacial definido en (2.2) cumple las siguientes propiedades:

$$1. \quad \rho_c(\mathbf{h}) = \rho_{12}(\mathbf{h}) \cdot C_{ab}, \quad (2.3)$$

$$\text{donde } C_{ab} = ((a+1/a+b^2)/2)^{-1}, \text{ con } a = \left( \frac{C_{11}(\mathbf{0})}{C_{22}(\mathbf{0})} \right)^{1/2}, \quad b = \frac{\mu_1 - \mu_2}{(C_{11}(\mathbf{0})C_{22}(\mathbf{0}))^{1/4}},$$

$$\text{y } \rho_{12}(\mathbf{h}) = C_{12}(\mathbf{h}) / \sqrt{C_{11}(\mathbf{0})C_{22}(\mathbf{h})}.$$

$$2. \quad |\rho_c(\mathbf{h})| \leq 1.$$

$$3. \quad \rho_c(\mathbf{h}) = 0 \text{ si y solo si } \rho_{12}(\mathbf{h}) = 0.$$

$$4. \quad \text{Si } C_{11}(\mathbf{0}) = C_{22}(\mathbf{0}) \text{ y } \mu_1 = \mu_2, \text{ entonces } \rho_c(\mathbf{h}) = \rho_{12}(\mathbf{h}).$$

*Demostración.*

$$1. \quad \begin{aligned} \rho_c(\mathbf{h}) &= \frac{2C_{12}(\mathbf{h})}{C_{11}(\mathbf{0}) + C_{22}(\mathbf{0}) + (\mu_1 - \mu_2)^2} \\ &= \frac{C_{12}(\mathbf{h})}{\sqrt{C_{11}(\mathbf{0})C_{22}(\mathbf{0})}} \cdot \frac{2\sqrt{C_{11}(\mathbf{0})C_{22}(\mathbf{0})}}{C_{11}(\mathbf{0}) + C_{22}(\mathbf{0}) + (\mu_1 - \mu_2)^2} \\ &= \rho_{12}(\mathbf{h}) \cdot \frac{2\sqrt{C_{11}(\mathbf{0})C_{22}(\mathbf{0})}}{C_{11}(\mathbf{0}) + C_{22}(\mathbf{0}) + (\mu_1 - \mu_2)^2} \\ &= \rho_{12}(\mathbf{h}) \cdot C_{ab}. \end{aligned}$$

$$2. \quad |C_{12}(\mathbf{h})| \leq \sqrt{C_{11}(\mathbf{0})C_{22}(\mathbf{0})} \Rightarrow \frac{|C_{12}(\mathbf{h})|}{\sqrt{C_{11}(\mathbf{0})C_{22}(\mathbf{0})}} \leq 1.$$

Entonces  $-1 \leq \rho_{12}(\mathbf{h}) \leq 1$ . Además,  $\sqrt{C_{11}(\mathbf{0})C_{22}(\mathbf{0})} \geq 0$ ,  $C_{11}(\mathbf{0}), C_{22}(\mathbf{0}) \geq 0$  y  $(\mu_1 - \mu_2)^2 \geq 0$ . Así,  $0 < C_{ab} \leq 1$ , por lo tanto  $-1 \leq \rho_c(\mathbf{h}) \leq 1$ .

3. Supongamos que  $\rho_c(\mathbf{h}) = 0$ , luego como  $C_{ab} > 0$ , se tiene trivialmente que  $\rho_{12}(\mathbf{h}) = 0$ . Para el recíproco notamos que  $\rho_c(\mathbf{h}) = C_{ab}\rho_{12}(\mathbf{h}) = C_{ab} \cdot 0 = 0$ .

4. Como  $C_{11}(\mathbf{0}) = C_{22}(\mathbf{0})$  y  $\mu_1 = \mu_2$ , entonces  $a = 1$  y  $b = 0$ , así  $C_{ab} = ((a + 1/a + b^2)/2)^{-1} = ((1 + 1)/2)^{-1} = 1$ , entonces  $\rho_c(\mathbf{h}) = 1 \cdot \rho_{12}(\mathbf{h}) = \rho_{12}(\mathbf{h})$ .  $\square$

Si consideramos el campo aleatorio  $(Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$  intrínsecamente estacionario, cuyo variograma cruzado está dado por

$$\gamma_{12}(\mathbf{h}) = \mathbb{E}[(Z_1(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - Z_2(\mathbf{s}))(Z_2(\mathbf{s} + \mathbf{h}) - (Z_1(\mathbf{s}))],$$

por consiguiente el coeficiente de concordancia espacial puede ser escrito como

$$\rho_c(\mathbf{h}) = 1 - \frac{2\gamma_{12}(\mathbf{h})}{2\gamma_{12}(\mathbf{0}) + (\mu_1 - \mu_2)^2 + 2C_{12}(\mathbf{h})}.$$

Como se puede apreciar, no es posible expresar  $\rho_c(\mathbf{h})$  solo en función del variograma cruzado, por lo cual no aconsejamos usar esta caracterización del coeficiente.

En el Resultado 2.2, vemos que  $\rho_c(\mathbf{h})$  puede ser escrito como  $\rho_c(\mathbf{h}) = \rho_{12}(\mathbf{h}) \cdot C_{ab}$ , lo cual nos muestra que  $\rho_c(\mathbf{h})$  es una corrección del coeficiente de correlación cruzado, dada por la constante  $C_{ab} = ((a + 1/a + b^2)/2)^{-1}$ , donde  $a$  es un factor de escala, y  $b$  es un factor de localización relativo a la escala. Así, podemos ver que la estructura del coeficiente de concordancia de Lin (1989) se preserva para el coeficiente de concordancia espacial definido en (2.1).

## 2.2. Concordancia Para Covarianzas Específicas

En esta sección analizaremos el coeficiente de concordancia espacial  $\rho_c(\mathbf{h})$  definido en (2.2) para distintas estructuras de covarianza bivariada  $\mathbf{C}(\mathbf{h})$ .

Consideramos un proceso espacial Gaussiano  $(Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$  con media  $(\mu_1, \mu_2)^\top$  y funciones de covarianzas separables, definidas en (1.6), luego el coeficiente de concordancia espacial toma la siguiente forma:

$$\rho_c(\mathbf{h}) = \frac{2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2R(\mathbf{h}, \psi)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.4)$$

Del mismo modo, si consideramos proceso espacial Gaussiano  $(Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$  con media  $(\mu_1, \mu_2)^\top$  y funciones de covarianzas no-separables, definidas en (1.7), el coeficiente de concordancia espacial toma la siguiente forma:

$$\rho_c(\mathbf{h}) = \frac{2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2R(\mathbf{h}, \psi_{12})}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.5)$$

### Ejemplo 1. (Covarianza de Matérn Bivariada)

Consideremos un campo aleatorio Gaussiano  $(Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$  con vector de medias  $\mathbf{0}$ , tales que su matriz de covarianza es de la forma

$$\mathbf{C}(\mathbf{h}) = \begin{pmatrix} C_{11}(\mathbf{h}) & C_{12}(\mathbf{h}) \\ C_{21}(\mathbf{h}) & C_{22}(\mathbf{h}) \end{pmatrix}.$$

Las covarianzas están dadas por  $C_{11}(\mathbf{h}) = \sigma_1^2 M(\mathbf{h}|\nu_1, a_1)$ ,  $C_{22}(\mathbf{h}) = \sigma_2^2 M(\mathbf{h}|\nu_2, a_2)$  y  $C_{12}(\mathbf{h}) = C_{21}(\mathbf{h}) = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 M(\mathbf{h}|\nu_{12}, a_{12})$ , donde

$$M(\mathbf{h}|\nu, a) = \frac{2^{1-\nu}}{\Gamma(\nu)} (a\|\mathbf{h}\|)^\nu K_\nu(a\|\mathbf{h}\|).$$

Ahora, el coeficiente de concordancia espacial está dado por

$$\begin{aligned} \rho_c(\mathbf{h}) &= \frac{2C_{12}(\mathbf{h})}{C_{11}(\mathbf{0}) + C_{22}(\mathbf{0})} \\ &= \frac{2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 M(\mathbf{h}|\nu_{12}, a_{12})}{\sigma_1^2 M(\mathbf{0}|\nu_1, a_1) + \sigma_2^2 M(\mathbf{0}|\nu_2, a_2)} \\ &= \frac{2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 M(\mathbf{h}|\nu_{12}, a_{12})}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \\ &= \rho_{12} M(\mathbf{h}|\nu_{12}, a_{12}) \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Además,  $\rho_c(\mathbf{h}) = \rho_{12}(\mathbf{h}) \cdot C_{12}$ , donde  $C_{12} = \frac{2\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$ .

Si hacemos  $\nu_{12} = n + 1/2$ , con  $n \in \mathbb{Z}$ , tenemos que

$$M(\mathbf{h}|\nu_{12}, a_{12}) = M(\mathbf{h}|n + 1/2, a_{12}) = \exp(-a_{12}\|\mathbf{h}\|) \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{(2n)!} \binom{n}{k} (2a_{12}\|\mathbf{h}\|)^{n-k}.$$

Entonces el coeficiente toma la siguiente forma

$$\rho_c(\mathbf{h}) = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \exp(-a_{12}\|\mathbf{h}\|) \sum_{k=0}^n \frac{(n+k)!}{(2n)!} \binom{n}{k} (2a_{12}\|\mathbf{h}\|)^{n-k}.$$

Ahora, eligiendo  $n = 0$ , tenemos que  $\nu_{12} = 1/2$ , donde  $M(\mathbf{h}|1/2, a_{12}) = \exp(-a_{12}\|\mathbf{h}\|)$ .

El coeficiente está dado por:

$$\rho_c(\mathbf{h}) = \frac{2\sigma_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \exp(-a_{12}\|\mathbf{h}\|). \tag{2.7}$$

Para ilustrar lo anterior, vamos a considerar  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 2$ ,  $\sigma_{12} = 1.8$ ,  $a_{12} = 1/2$  y  $\nu_{12} = \{1/2, 3/2, 5/2\}$ . Luego para valores de  $\|\mathbf{h}\|$  entre 0 y 15, podemos ver en la Figura 2.1 cómo luce el coeficiente.

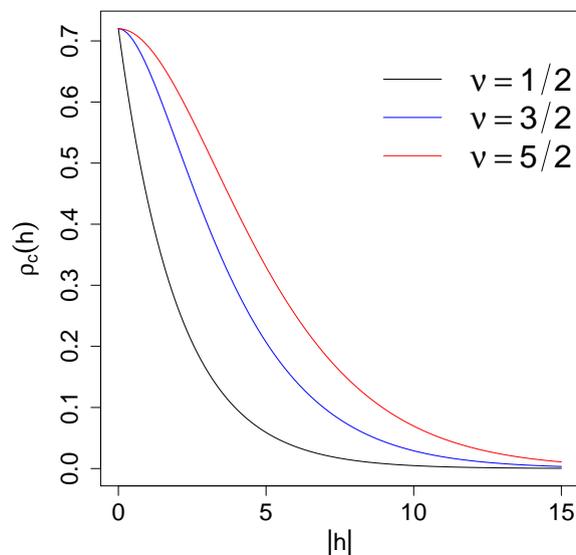


FIGURA 2.1: Gráfica del coeficiente de concordancia considerando una covarianza de Matérn para el campo aleatorio, para distintos valores de  $\nu$ .

Notamos que para valores más pequeños de  $\nu_{12}$ , se tienen valores más pequeños de  $\rho_c(\mathbf{h})$ , ya que la concordancia cae más rápido en ese caso. Ahora, para cada valor de  $\nu_{12}$ , procedemos a comparar como luce el valor de  $\rho_{12}$ ,  $\rho(\mathbf{h})$  y  $\rho_c(\mathbf{h})$ , lo cual se muestra en la Figura 2.2.

Notamos que  $\rho_c(\mathbf{h})$  al ser una corrección de  $\rho(\mathbf{h})$ , tiene un comportamiento similar, pero un valor máximo menor que  $\rho(\mathbf{h})$ , es decir, dada la diferencia entre los valores de  $\sigma_1$  y  $\sigma_2$ , la concordancia entre los procesos no puede ser igual a 1, por lo tanto se entrega información adicional para contrastar dos mediciones, y notar que a pesar de que su correlación cruzada sea alta, no necesariamente son concordantes.

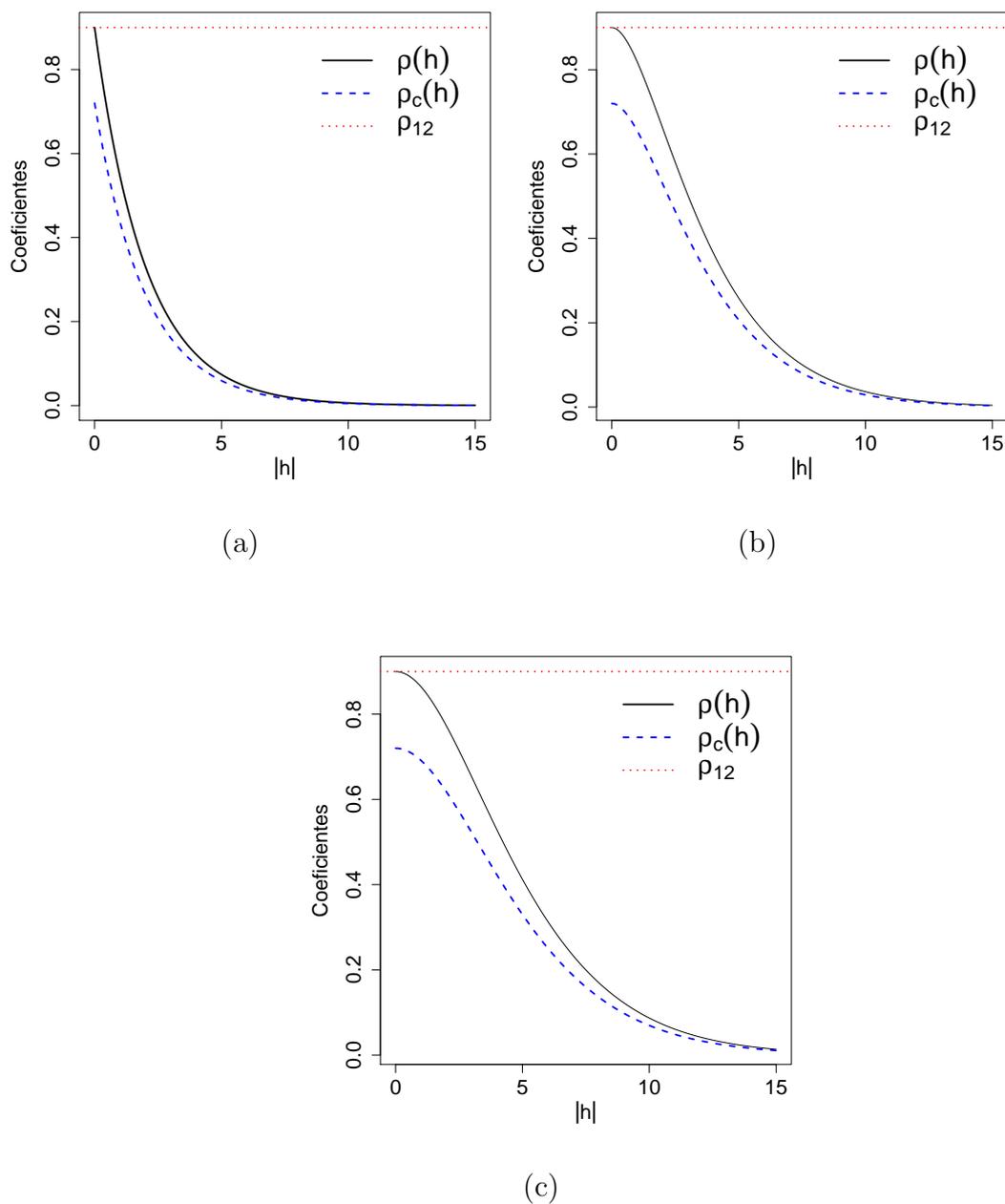


FIGURA 2.2: Comparación entre coeficientes para (a)  $\nu = 1/2$  , (b)  $\nu = 3/2$  y (c)  $\nu = 5/2$  .

### Ejemplo 2. (Covarianza de Wendland-Gneiting Bivariada)

Sea un campo aleatorio Gaussiano  $(Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$ , con vector de medias  $\mathbf{0}$  y con matriz de covarianza  $\mathbf{C}(\mathbf{h})$  de Wendland-Gneiting definida en (1.11), de la forma

$$\mathbf{C}(\mathbf{h}) = [\rho_{ij}\sigma_{ii}\sigma_{jj}R_{ij}(\mathbf{h})]_{i,j=1}^2.$$

El coeficiente de concordancia espacial está dado por

$$\rho_c(\mathbf{h}) = \frac{2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 R(\mathbf{h}, \psi_{12})}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2, \quad (2.8)$$

donde  $R(\mathbf{h}, \psi_{12}) = c_{ij} b_{ij}^{\nu+2k+1} B(\nu + 2k + 1, \gamma_{ij} + 1) \tilde{\psi}_{\nu+\gamma_{ij}+1, k} \left( \frac{\|\mathbf{h}\|}{b_{ij}} \right)$ .

En particular, considerando  $R_{ij}(\mathbf{h}) = p_k(\|\mathbf{h}\|)(1 - \|\mathbf{h}\|/b_{ij})_+^l$ , donde  $k = 2$ ,  $l = \nu + 1$  y  $b_{ij} > 0$ . El coeficiente de concordancia toma la forma

$$\rho_c(\mathbf{h}) = \frac{2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 (1 + l\|\mathbf{h}\|/b_{12}) (1 - \|\mathbf{h}\|/b_{12})_+^l}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + (\mu_1 - \mu_2)^2}. \quad (2.9)$$

En la Figura 2.3 podemos apreciar como luce el coeficiente para  $\kappa = 1$ ,  $\nu = 4$ ,  $\sigma_1 = 1$ ,  $\sigma_2 = 1.4$ ,  $\sigma_{12} = 1.19$  y  $b_{12} = \{0.35, 0.9, 1.4\}$ .

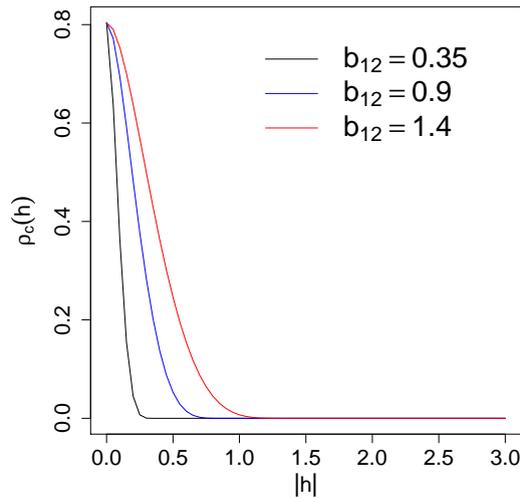


FIGURA 2.3: Gráfica del coeficiente de concordancia considerando una covarianza de Wendland para el campo aleatorio.

Como el coeficiente depende directamente del valor de  $b_{12}$ , se observa que la concordancia espacial está acotada por el valor de  $b_{12}$ , pero el coeficiente decae de igual manera a pesar de las variaciones de  $b_{12}$ . Ahora, procedemos a comparar como luce el valor de  $\rho_{12}$ ,  $\rho(\mathbf{h})$  y  $\rho_c(\mathbf{h})$ , lo cual se muestra en la Figura 2.4.

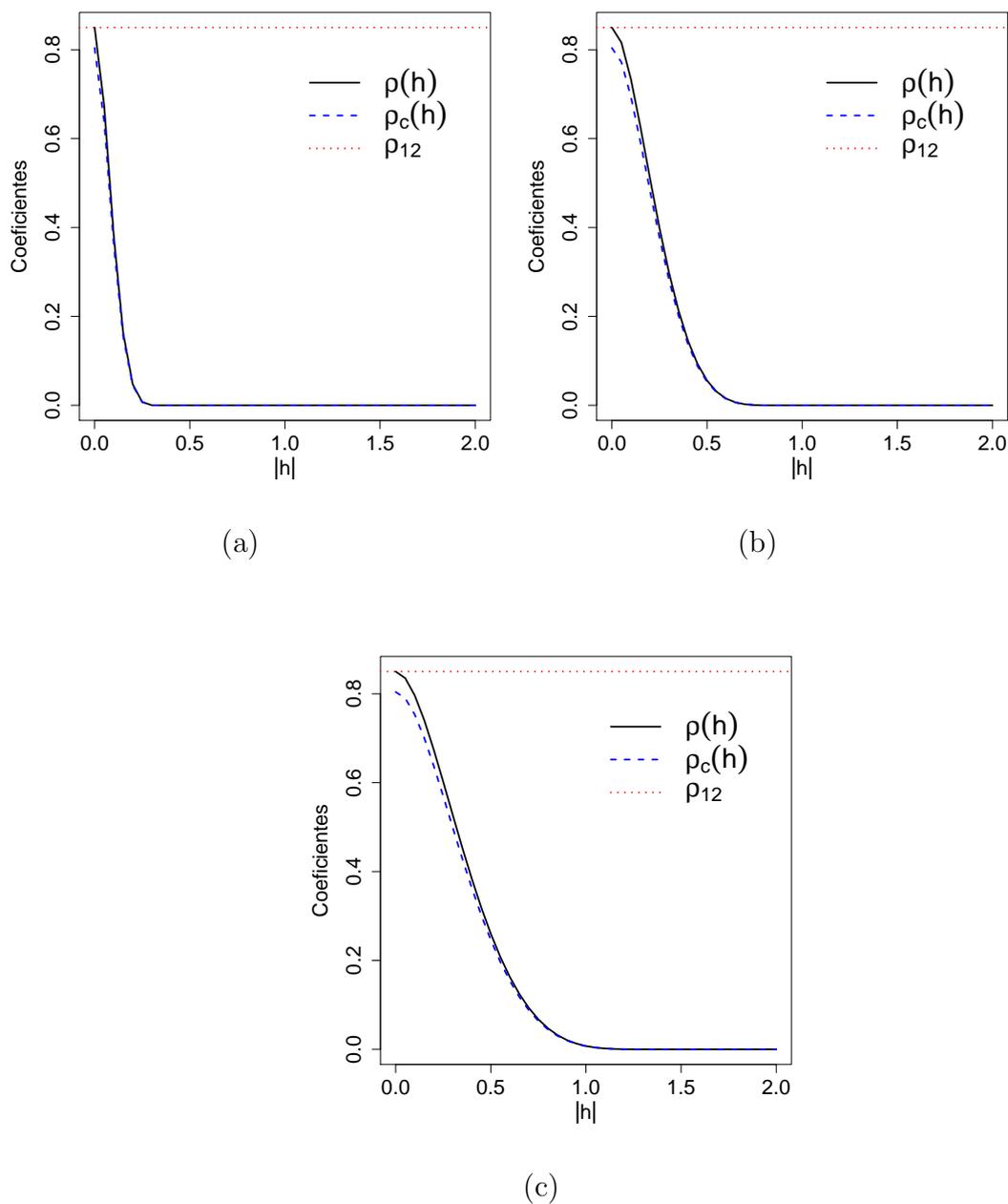


FIGURA 2.4: Comparación entre coeficientes para (a)  $b_{12} = 0.35$ , (b)  $b_{12} = 0.9$  y (c)  $b_{12} = 1.4$ .

Notamos nuevamente como el coeficiente de concordancia corrige la correlación cruzada, obteniendo valores más bajos debido a la diferencia entre las varianzas de los procesos.

## 2.3. Inferencia

Sea un proceso espacial Gaussiano  $(Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$  con media  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2)^\top$  y matriz de covarianza  $\mathbf{C}(\mathbf{h})$ ,  $\mathbf{s}, \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2$ . Consideramos el coeficiente de concordancia espacial  $\rho_c(\mathbf{h}) = \rho_{12}(\mathbf{h}) \cdot C_{ab}$ . Luego una estimación basada en el reemplazo directo es

$$\widehat{\rho}_c(\mathbf{h}) = \widehat{\rho}_{12}(\mathbf{h})\widehat{C}_{ab},$$

donde  $\widehat{C}_{ab} = ((\widehat{a} + 1/\widehat{a} + \widehat{b}^2)/2)^{-1}$ ,  $\widehat{a} = \left(\frac{\widehat{C}_{11}(\mathbf{0})}{\widehat{C}_{22}(\mathbf{0})}\right)^{1/2}$ ,  $\widehat{b} = \frac{\widehat{\mu}_1 - \widehat{\mu}_2}{(\widehat{C}_{11}(\mathbf{0})\widehat{C}_{22}(\mathbf{0}))^{1/4}}$ , donde  $\widehat{\mu}_1$ ,  $\widehat{\mu}_2$ ,  $\widehat{C}_{11}(\mathbf{0})$  y  $\widehat{C}_{22}(\mathbf{0})$  corresponden a estimaciones de  $\mu_1, \mu_2, C_{11}(\mathbf{0})$  y  $C_{22}(\mathbf{0})$ , respectivamente.

Consideramos un proceso espacial Gaussiano  $(Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$  con funciones de covarianzas separables, definidas en (1.6), luego una estimación del coeficiente de concordancia espacial está dada por el reemplazo directo

$$\widehat{\rho}_c(\mathbf{h}) = \frac{2\widehat{\rho}_{12}\widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2\mathbf{R}(\mathbf{h}, \widehat{\psi})}{\widehat{\sigma}_1^2 + \widehat{\sigma}_2^2 + (\widehat{\mu}_1 - \widehat{\mu}_2)^2}, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2. \quad (2.10)$$

Del mismo modo, considerando un proceso espacial  $(Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$  con funciones de covarianzas no-separables, definidas en (1.7), se puede estimar el coeficiente de concordancia espacial haciendo reemplazo directo

$$\widehat{\rho}_c(\mathbf{h}) = \frac{2\widehat{\rho}_{12}\widehat{\sigma}_1\widehat{\sigma}_2\mathbf{R}(\mathbf{h}, \widehat{\psi}_{12})}{\widehat{\sigma}_1^2 + \widehat{\sigma}_2^2 + (\widehat{\mu}_1 - \widehat{\mu}_2)^2}, \quad \mathbf{h} \in \mathbb{R}^2, \quad (2.11)$$

donde  $\widehat{\rho}_{12}, \widehat{\sigma}_1, \widehat{\sigma}_2, \widehat{\mu}_1, \widehat{\mu}_2$  y  $\widehat{\psi}_{12}$  corresponden a las estimaciones de dichos parámetros.

### 2.3.1. Normalidad Asintótica

Consideramos un proceso espacial Gaussiano dado por  $\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = (Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$ , con  $\mathbf{s} \in D$ . Consideramos además la función de covarianza bivariada dada por  $\mathbf{C}(\mathbf{h}) = [C_{ij}(\mathbf{h})]_{i,j=1}^2$ ,  $\mathbf{h} = \mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2$ . Se asume que  $\mathbf{C}$  viene de una familia paramétrica de covarianzas bivariadas  $\{\mathbf{C}(\cdot; \boldsymbol{\theta}), \boldsymbol{\theta} \in \Theta \subseteq \mathbb{R}^p\}$ , donde  $\Theta$  es un espacio paramétrico arbitrario.

Notamos como  $\Sigma(\boldsymbol{\theta})$  la matriz de covarianza dada por

$$\Sigma(\boldsymbol{\theta}) := \begin{pmatrix} \mathbf{C}(\mathbf{0}) & \mathbf{C}(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2) & \cdots & \mathbf{C}(\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \mathbf{C}(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_1) & \mathbf{C}(\mathbf{s}_n - \mathbf{s}_2) & \cdots & \mathbf{C}(\mathbf{0}) \end{pmatrix}.$$

Luego expresamos la log-verosimilitud del modelo como

$$l_n(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \log |\Sigma(\boldsymbol{\theta})| - \frac{1}{2} \mathbf{Z}^\top \Sigma(\boldsymbol{\theta})^{-1} \mathbf{Z}.$$

Así,  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n := \operatorname{argmax}_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} (l_n(\boldsymbol{\theta}))$  es el estimador máximo verosímil de  $\boldsymbol{\theta}$ .

Para probar la normalidad asintótica de  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$ , [Mardia y Marshall \(1984\)](#) propusieron condiciones para probar consistencia y normalidad asintótica de un estimador máximo verosímil. Bajo dichas condiciones,  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$  es consistente y asintóticamente normal, con matriz de covarianza igual al inverso de la matriz de información de Fisher, dada por la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_n(\boldsymbol{\theta}) = \left[ \frac{1}{2} \left( \Sigma(\boldsymbol{\theta})^{-1} \frac{d\Sigma(\boldsymbol{\theta})}{d\theta_i} \Sigma(\boldsymbol{\theta})^{-1} \frac{d\Sigma(\boldsymbol{\theta})}{d\theta_j} \right) \right]_{i,j=1}^p. \quad (2.12)$$

Así,  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n \xrightarrow{P} \boldsymbol{\theta}$ , y  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n \approx \mathcal{N}(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{F}_n(\boldsymbol{\theta})^{-1})$ , cuando  $n \rightarrow \infty$ .

A continuación se presenta el teorema propuesto por [Mardia y Marshall \(1984\)](#), para procesos espaciales Gaussianos.

Sean  $\lambda_1 \leq \dots \leq \lambda_{2n}$  los valores propios de  $\Sigma_n(\boldsymbol{\theta})$ , la matriz de covarianza del campo aleatorio bivariado, y denotando los valores propios de  $\frac{\partial \Sigma_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}$  y  $\frac{\partial^2 \Sigma_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i \partial \theta_j}$  como  $\lambda_k^i$  y  $\lambda_k^{ij}$ , para  $k = 1, \dots, 2n$  respectivamente, con  $|\lambda_1^i| \leq \dots \leq |\lambda_{2n}^i| \leq \dots \leq |\lambda_{2n}^{ij}|$  para  $i, j = 1, \dots, p$ .

**Teorema 2.2.** *Supongamos que cuando  $n \rightarrow \infty$*

1.  $\lim_{n \rightarrow \infty} \lambda_{2n} = C < \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_{2n}^m| = C_m < \infty$ ,  $\lim_{n \rightarrow \infty} |\lambda_{2n}^{ij}| = C_{ij} < \infty$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, p$ .
2.  $\left\| \frac{\partial \Sigma_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_m} \right\|^2 = O(n^{-1/2-\delta})$ , para algún  $\delta > 0$ ,  $m = 1, \dots, p$ .
3.  $\forall i, j = 1, \dots, mp$ ,  $a_{ij} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left\{ \frac{t_{ij}}{(t_{ii}t_{jj})^{1/2}} \right\}$  existe,  
 donde  $t_{ij} = \text{tr} \left( \Sigma_n(\boldsymbol{\theta})^{-1} \frac{\partial \Sigma_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \Sigma_n(\boldsymbol{\theta})^{-1} \frac{\partial \Sigma_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right)$  y  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^p$  es una matriz no singular.

Luego,  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n$  es un estimador consistente, y  $\widehat{\boldsymbol{\theta}}_n \approx N(\boldsymbol{\theta}, \mathbf{F}_n(\boldsymbol{\theta})^{-1})$ , donde  $\mathbf{F}_n(\boldsymbol{\theta})$  es la matriz de Información de Fisher definida en (2.12).

**Ejemplo 1. (Caso de Matérn Separable Exponencial)**

Si seguimos el modelo definido en (2.6), cuando usamos un proceso Gaussiano con covarianza de Matérn, para  $\nu_{12} = 1/2$ , el coeficiente de concordancia espacial es

$$\rho_c(\mathbf{h}) = \frac{2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \exp(-a_{12}\|\mathbf{h}\|).$$

Para este modelo, [Bevilacqua et al. \(2015\)](#) probaron que la matriz de covarianza bivariada  $C_{ij}(\mathbf{h}, \boldsymbol{\theta}) = \sigma_i\sigma_j\rho_{ij} \exp(-a_{12}\|\mathbf{h}\|)$ ,  $i, j = 1, 2$ , cumple las condiciones de Mardia y Mashall (1984), que implican la consistencia del estimador de máxima verosimilitud de  $\boldsymbol{\theta} = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho_{12}, a_{12})^\top$  y además que es asintóticamente normal, con varianza asintótica  $\mathbf{F}_n(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ , donde  $\mathbf{F}_n(\boldsymbol{\theta})$  es la matriz de información de Fisher. Se desea generalizar este resultado, ahora para

$$\rho_c(\mathbf{h}) = \frac{2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \exp(-a_{12}\|\mathbf{h}\|).$$

Para esto, utilizamos el método delta multivariado, y consideramos una función  $g(\boldsymbol{\theta})$ , tal que

$$g(\boldsymbol{\theta}) = g(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho_{12}, a_{12}) = \frac{2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \exp(-a_{12}\|\mathbf{h}\|).$$

Notamos que esta función es continuamente diferenciable, salvo en el caso donde  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ , el cual no es caso de nuestro interés.

Así, el método delta nos dice que

$$(\nabla g(\boldsymbol{\theta})^\top \mathbf{F}_n(\boldsymbol{\theta})^{-1} \nabla g(\boldsymbol{\theta}))^{-1/2} (g(\boldsymbol{\theta}_n) - g(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{D} \mathcal{N}(0, 1), \quad (2.13)$$

$$\text{donde } \nabla g(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_2 \rho_{12} (\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \exp(-a_{12} \|\mathbf{h}\|)}{\sigma_1 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} \\ \frac{\sigma_1 \rho_{12} (\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \exp(-a_{12} \|\mathbf{h}\|)}{\sigma_2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} \\ \frac{2\sigma_1 \sigma_2 \exp(-a_{12} \|\mathbf{h}\|)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \\ \frac{-2\|\mathbf{h}\| \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} \exp(-a_{12} \|\mathbf{h}\|)}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \end{pmatrix}.$$

Luego, la expresión completa está dada por

$$\begin{aligned} \nabla g(\boldsymbol{\theta})^\top \mathbf{F}_n(\boldsymbol{\theta})^{-1} \nabla g(\boldsymbol{\theta}) &= \frac{2\sigma_1^2 \sigma_2^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} \left[ \frac{\rho_{12}^2 (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2 nC} + \frac{2n}{C} + \frac{2\|\mathbf{h}\|^2 \rho_{12}^2 (\rho_{12}^2 - 1)^2}{nC} \right. \\ &\quad \left. + \frac{\rho_{12}^2 (\sigma_1^2 - \sigma_2^2)^2 ([\text{tr}(\mathbf{B})]^2 - 2\rho_{12}^2 C)}{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} \right] \exp(-2a_{12} \|\mathbf{h}\|), \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{B} = \left( \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial a_{12}} \right)$  y  $C = n \text{tr}(\mathbf{B}^2) - [\text{tr}(\mathbf{B})]^2$ .

### Ejemplo 2. (Caso de Wendland-Gneiting Separable)

Se presenta el siguiente Teorema.

**Teorema 2.3.** *Sea un campo aleatorio Gaussiano  $(Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$ , con vector de medias  $\mathbf{0}$  y con matriz de covarianza  $\mathbf{C}(\mathbf{h})$  de Wendland-Gneiting definida en (1.11), de la forma  $\mathbf{C}(\mathbf{h}) = [\rho_{ij} \sigma_{ii} \sigma_{jj} R_{ij}(\mathbf{h})]_{i,j=1}^2$ .*

El modelo de covarianza bivariada de Wendland-Gneiting dado por

$$\mathbf{C}(\mathbf{h}) = \left[ \rho_{ij} \sigma_{ii} \sigma_{jj} \left( 1 + (\nu + 1) \frac{\|\mathbf{h}\|}{b_{12}} \right) \left( 1 - \frac{\|\mathbf{h}\|}{b_{12}} \right)_+^{\nu+1} \right]_{i,j=1}^2,$$

para  $\nu > 0$  fijo, cumple las condiciones de Mardia y Marshall.

*Demostración.* Sea  $\nu$  fijo, tenemos

$$[C_{ij}(\mathbf{h}, \boldsymbol{\theta})]_{i,j=1}^2 = \left[ \rho_{ij} \sigma_{ii} \sigma_{jj} \left( 1 + (\nu + 1) \frac{\mathbf{h}}{b_{12}} \right) \left( 1 - \frac{\mathbf{h}}{b_{12}} \right)_+^{\nu+1} \right]_{i,j=1}^2.$$

Consideramos un escenario de dominio creciente, con puntos  $\mathbf{s}_1, \dots, \mathbf{s}_n$  ubicados en un rectángulo  $D_n \subset \Delta \mathbb{Z}^d$ , para  $0 < \Delta < L$ , y  $D_n \subset D_{n+1}$ ,  $\forall n$ .

Se define la matriz de distancias  $\mathbf{H}_n = [H_{lq}]_{l=q=1}^n$ , donde  $H_{lq} = \|\mathbf{s}_l - \mathbf{s}_q\|$ , y  $\|\cdot\|$  denota la norma Euclideana. La matriz de covarianza se puede escribir como

$$\boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ - & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \otimes \boldsymbol{\Gamma}_n,$$

$$\text{donde } \boldsymbol{\Gamma}_n = \left[ \left( 1 + \frac{(\nu+1)H_{lq}}{b_{12}} \right) \left( 1 - \frac{H_{lq}}{b_{12}} \right)_+^{\nu+1} \right]_{l=q=1}^n.$$

Derivando se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_1^2} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma_2\rho_{12}}{2\sigma_1} \\ - & 0 \end{pmatrix} \otimes \boldsymbol{\Gamma}_n, & \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_2^2} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sigma_1\rho_{12}}{2\sigma_2} \\ - & 1 \end{pmatrix} \otimes \boldsymbol{\Gamma}_n, \\ \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial b_{12}} &= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ - & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{S}_n, & \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \rho_{12}} &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1\sigma_2 \\ - & 0 \end{pmatrix} \otimes \boldsymbol{\Gamma}_n, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{S}_n$  está dada por

$$\mathbf{S}_n = \frac{\partial \boldsymbol{\Gamma}_n}{\partial b_{12}} = \left[ \frac{(\nu+1)H_{lq}}{b_{12}^2} \left( 1 - \frac{H_{lq}}{b_{12}} \right)_+^\nu \left( - \left( 1 - \frac{H_{lq}}{b_{12}} \right)_+ + \left( 1 + \frac{(\nu+1)H_{lq}}{b_{12}} \right) \right) \right]_{l=q=1}^n.$$

Para cualquier norma matricial, el radio espectral de  $\lambda_{\max}\{\mathbf{A}\}$  de una matriz  $\mathbf{A}$  de orden  $n \times n$  satisface  $\lambda_{\max}\{\mathbf{A}\} \leq \|\mathbf{A}\|$ . Luego, escogiendo la norma  $\|\cdot\|_\infty$ , tenemos

$$\begin{aligned} \lambda_{\max}\{\boldsymbol{\Gamma}_n\} &\leq \|\boldsymbol{\Gamma}_n\|_\infty = \max_l \sum_{q=1}^n \left| \left( 1 + \frac{(\nu+1)H_{lq}}{b_{12}} \right) \left( 1 - \frac{H_{lq}}{b_{12}} \right)_+^{\nu+1} \right| \\ &= \sup_{1 \leq l \leq n} \sum_{q=1}^n \left| \left( 1 + \frac{(\nu+1)H_{lq}}{b_{12}} \right) \left( 1 - \frac{H_{lq}}{b_{12}} \right)_+^{\nu+1} \right| \\ &< \sum_{s \in \Delta \mathbb{Z}^d} \left( 1 + \frac{(\nu+1)\|s\|}{b_{12}} \right) \left( 1 - \frac{\|s\|}{b_{12}} \right)_+^{\nu+1}. \end{aligned}$$

Notamos que

$$\int_{s \in \mathbb{R}^d} \left( 1 + \frac{(\nu+1)\|s\|}{b_{12}} \right) \left( 1 - \frac{\|s\|}{b_{12}} \right)_+^{\nu+1} ds < \infty,$$

por lo tanto  $\sup_n \lambda_{\max}\{\boldsymbol{\Gamma}_n\}$  es finito, luego  $\sup_n \lambda_{\max}\{\boldsymbol{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})\}$  es finito. Como  $\boldsymbol{\Gamma}_n$  es definida positiva,  $\lambda_i\{\boldsymbol{\Gamma}_n\} > 0$ ,  $i = 1, \dots, n$ . En particular  $\lambda_{\min}\{\boldsymbol{\Gamma}_n\} > 0$ , luego

$\inf_n \lambda_{\min}\{\mathbf{\Gamma}_n\} > 0$  e  $\inf_n \lambda_{\min}\{\mathbf{\Sigma}_n\} > 0$ . Más aún,

$$\sup_n \lambda_{\max} \left\{ \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_1^2} \right\} = \sup_n \lambda_{\max} \left[ \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma_2 \rho_{12}}{2\sigma_1} \\ - & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{\Gamma}_n \right] < \infty,$$

para  $\frac{\sigma_2 \rho_{12}}{2\sigma_1} < \infty$ .

Análogamente, se tiene que

$$\sup_n \lambda_{\max} \left\{ \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_2^2} \right\}, \sup_n \lambda_{\max} \left\{ \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \rho_{12}} \right\} < \infty.$$

Además,  $\lambda_{\max}\{\mathbf{S}_n\} \leq \|\mathbf{S}_n\|_{\infty} < \infty$ , dada la forma de polinomio en  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^d$  y el soporte compacto en  $b_{12}$ . Así, para  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} < \infty$ ,

$$\sup_n \lambda_{\max} \left\{ \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial b_{12}} \right\} < \infty.$$

Por lo tanto,

$$\sup_n \lambda_{\max} \left\{ \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_c} \right\} < \infty, \quad c = 1, 2, 3, 4.$$

Consideremos ahora las derivadas parciales de segundo orden:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_1^2 \partial \sigma_2^2} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\rho_{12}}{4\sigma_1 \sigma_2} \\ - & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{\Gamma}_n, & \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_1^2 \partial b_{12}} &= \begin{pmatrix} 1 & \frac{\sigma_2 \rho_{12}}{2\sigma_1} \\ - & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{S}_n, \\ \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_1^2 \partial \rho_{12}} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sigma_2}{2\sigma_1} \\ - & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{\Gamma}_n, & \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_1^4} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sigma_2 \rho_{12}}{4\sigma_1^3} \\ - & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{\Gamma}_n, \\ \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_2^2 \partial b_{12}} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sigma_1 \rho_{12}}{2\sigma_2} \\ - & 1 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{S}_n, & \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_2^2 \partial \rho_{12}} &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{\sigma_1}{2\sigma_2} \\ - & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{\Gamma}_n, \\ \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \sigma_2^4} &= \begin{pmatrix} 0 & -\frac{\sigma_1 \rho_{12}}{4\sigma_2^3} \\ - & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{\Gamma}_n, & \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial b_{12} \partial \rho_{12}} &= \begin{pmatrix} 0 & \sigma_1 \sigma_2 \\ - & 0 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{S}_n, \\ \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial b_{12}^2} &= \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1 \sigma_2 \rho_{12} \\ - & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \otimes \mathbf{S}\mathbf{S}_n, & \frac{\partial \mathbf{\Sigma}_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \rho_{12}^2} &= 0, \end{aligned}$$

donde  $\mathbf{S}\mathbf{S}_n = \frac{\partial}{\partial b_{12}} \mathbf{S}_n$ .

Considerando los resultados anteriores y que  $\sup_n \lambda_{\max}\{\mathbf{0}\} < \infty$ , notando el soporte compacto de  $\mathbf{S}\mathbf{S}_n$  en  $b_{12}$ , tenemos que  $\lambda_{\max}\{\mathbf{S}\mathbf{S}_n\} \leq \|\mathbf{S}\mathbf{S}_n\|_\infty < \infty$ . Así, para  $\sigma_1^2, \sigma_2^2, \sigma_1\sigma_2 < \infty$ ,

$$\sup_n \lambda_{\max} \left\{ \frac{\partial^2 \Sigma_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial b_{12}^2} \right\} < \infty.$$

Más aún,

$$\left\| \frac{\partial \Sigma_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right\|_\infty \leq \left\| \frac{\partial \Sigma_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right\| \leq \sqrt{n} \left\| \frac{\partial \Sigma_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right\|_\infty.$$

Así, las primeras dos condiciones de Mardia y Marshall se satisfacen.

Para la condición 3, se considera  $\mathbf{A} = [a_{ij}]_{i,j=1}^p$ , con  $a_{ij} = \left\{ \frac{t_{ij}}{(t_{mm}t_{nn})^{1/2}} \right\}$  y  $t_{ij} = \text{tr} \left\{ \Sigma_n(\boldsymbol{\theta})^{-1} \frac{\partial \Sigma_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \Sigma_n(\boldsymbol{\theta})^{-1} \frac{\partial \Sigma_n(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_j} \right\}$ ,  $\forall i, j = 1, \dots, p$  y se muestra que  $\mathbf{A}$  es una matriz no singular.

Tenemos

$$\mathbf{T} = [t_{ij}]_{i,j=1}^4 = \begin{pmatrix} \frac{n(\rho_{12}^2 - 2)}{4\sigma_1^4(\rho_{12}^2 - 1)} & \frac{n\rho_{12}^2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2(\rho_{12}^2 - 1)} & \frac{1}{2\sigma_1^2} \text{tr}\{\mathbf{A}_n\} & \frac{n\rho_{12}}{2\sigma_1^2(\rho_{12}^2 - 1)} \\ - & \frac{n(\rho_{12}^2 - 2)}{4\sigma_2^4(\rho_{12}^2 - 1)} & \frac{1}{2\sigma_2^2} \text{tr}\{\mathbf{A}_n\} & \frac{n\rho_{12}}{2\sigma_2^2(\rho_{12}^2 - 1)} \\ - & - & \text{tr}\{[\mathbf{A}_n]^2\} & \frac{\rho_{12}}{\rho_{12}^2 - 1} \text{tr}\{\mathbf{A}_n\} \\ - & - & - & \frac{n(\rho_{12}^2 + 1)}{(\rho_{12}^2 - 1)^2} \end{pmatrix},$$

con  $\mathbf{A}_n = \{\Gamma_n^{-1} \circ \mathbf{S}_n\}$ .

Luego,

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & \frac{\rho_{12}^2}{\rho_{12}^2 - 2} & \frac{\text{tr}(\mathbf{A}_n)}{\left( \frac{n(\rho_{12}^2 - 2)\text{tr}([\mathbf{A}_n]^2)}{\rho_{12}^2 - 1} \right)^{1/2}} & \frac{\rho_{12}}{\left( \frac{(\rho_{12}^2 - 2)(\rho_{12}^2 + 1)}{\rho_{12}^2 - 1} \right)^{1/2}} \\ - & 1 & \frac{\text{tr}(\mathbf{A}_n)}{\left( \frac{n(\rho_{12}^2 - 2)\text{tr}([\mathbf{A}_n]^2)}{\rho_{12}^2 - 1} \right)^{1/2}} & \frac{\rho_{12}}{\left( \frac{(\rho_{12}^2 - 2)(\rho_{12}^2 + 1)}{\rho_{12}^2 - 1} \right)^{1/2}} \\ - & - & 1 & \frac{-\rho_{12}\text{tr}(\mathbf{A}_n)}{(n\text{tr}([\mathbf{A}_n]^2)(\rho_{12}^2 + 1))^{1/2}} \\ - & - & - & 1 \end{pmatrix}.$$

Para dicha matriz  $\mathbf{A}$ , se extiende el resultado probado por [Bevilacqua et al. \(2015\)](#) y por lo tanto  $\mathbf{A}$  es definida positiva, así, por el Teorema 2.2 se tiene que el estimador de

máxima verosimilitud de  $\boldsymbol{\theta} = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho_{12}, b_{12})^\top$  es asintóticamente normal con varianza  $\mathbf{F}_n(\boldsymbol{\theta})^{-1}$ .  $\square$

Luego, fijando  $\nu > 0$ , tenemos que

$$\rho_c(\mathbf{h}) = \frac{2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \left(1 + (\nu + 1)\frac{\|\mathbf{h}\|}{b_{12}}\right) \left(1 - \frac{\|\mathbf{h}\|}{b_{12}}\right)_+^{\nu+1}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Utilizando el método delta multivariado, consideramos la función  $g(\boldsymbol{\theta})$  dada por

$$g(\boldsymbol{\theta}) = g(\sigma_1^2, \sigma_2^2, \rho_{12}, b_{12}) = \frac{2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2 \left(1 + (\nu + 1)\frac{\|\mathbf{h}\|}{b_{12}}\right) \left(1 - \frac{\|\mathbf{h}\|}{b_{12}}\right)_+^{\nu+1}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}.$$

Notamos que esta función es continuamente diferenciable, salvo en el caso donde  $\sigma_1 = \sigma_2 = 0$ , el cual no es caso de nuestro interés. Así, por el método delta

$$(\nabla g(\boldsymbol{\theta})^\top \mathbf{F}_n(\boldsymbol{\theta})^{-1} \nabla g(\boldsymbol{\theta}))^{-1/2} (g(\boldsymbol{\theta}_n) - g(\boldsymbol{\theta})) \xrightarrow{D} N(0, 1),$$

$$\text{donde } \nabla g(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_2\rho_{12}(\sigma_2^2 - \sigma_1^2) \left(1 + (\nu + 1)\frac{\|\mathbf{h}\|}{b_{12}}\right) \left(1 - \frac{\|\mathbf{h}\|}{b_{12}}\right)_+^{\nu+1}}{\sigma_1(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} \\ \frac{\sigma_1\rho_{12}(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) \left(1 + (\nu + 1)\frac{\|\mathbf{h}\|}{b_{12}}\right) \left(1 - \frac{\|\mathbf{h}\|}{b_{12}}\right)_+^{\nu+1}}{\sigma_2(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)^2} \\ \frac{2\sigma_1\sigma_2 \left(1 + (\nu + 1)\frac{\|\mathbf{h}\|}{b_{12}}\right) \left(1 - \frac{\|\mathbf{h}\|}{b_{12}}\right)_+^{\nu+1}}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \\ \frac{2\sigma_1\sigma_2\rho_{12}f(b_{12})}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \end{pmatrix},$$

$$f(b_{12}) = \left(-\frac{(\nu + 1)\|\mathbf{h}\|}{b_{12}^2}\right) \left(1 - \frac{\|\mathbf{h}\|}{b_{12}}\right)_+^{\nu+1} + \left(1 + \frac{(\nu + 1)\|\mathbf{h}\|}{b_{12}}\right) \left(1 - \frac{\|\mathbf{h}\|}{b_{12}}\right)_+^\nu \frac{(\nu + 1)\|\mathbf{h}\|}{b_{12}^2}.$$

### 2.3.2. Cálculo de Varianza Asintótica

Se presenta a continuación el cálculo de la matriz de Información de Fisher  $\mathbf{F}_n(\boldsymbol{\theta})$  para estructuras de covarianza separables y no-separables ( [Bevilacqua et al. \(2015\)](#)), necesario para el cálculo de la varianza asintótica de la estructura de covarianza bivariada y por lo tanto del coeficiente de concordancia espacial.

### 2.3.2.1. Estructura de Covarianza Separable

Tenemos que  $\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{R}$ , donde  $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \sigma_1\sigma_2\rho_{12} \\ - & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$  y  $\mathbf{R} = [R(\mathbf{h}, \psi)]_{i,j=1}^n$ .

Asumamos  $\psi$  un escalar. Luego  $\boldsymbol{\theta} = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \psi, \rho_{12})^\top$ . Así, tenemos

$$\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \mathbf{A}^{-1} \otimes \mathbf{R}^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sigma_1^2(1-\rho_{12}^2)} & -\frac{\rho_{12}}{\sigma_1\sigma_2(1-\rho_{12}^2)} \\ - & \frac{1}{\sigma_2^2(1-\rho_{12}^2)} \end{pmatrix} \otimes \mathbf{R}^{-1}.$$

Luego, [Bevilacqua et al. \(2015\)](#) probaron que la matriz de Información de Fisher  $\mathbf{F}_n(\boldsymbol{\theta})$  está dada por

$$\mathbf{F}_n(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{n(2-\rho_{12}^2)}{4\sigma_1^2(1-\rho_{12}^2)} & -\frac{n\rho_{12}^2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2(1-\rho_{12}^2)} & \frac{1}{2\sigma_1^2}\text{tr}(\mathbf{B}) & -\frac{n\rho_{12}}{2\sigma_1^2(1-\rho_{12}^2)} \\ - & \frac{n(2-\rho_{12}^2)}{4\sigma_2^2(1-\rho_{12}^2)} & \frac{1}{2\sigma_2^2}\text{tr}(\mathbf{B}) & -\frac{n\rho_{12}}{2\sigma_2^2(1-\rho_{12}^2)} \\ - & - & \text{tr}(\mathbf{B}^2) & -\frac{\rho_{12}}{1-\rho_{12}^2}\text{tr}(\mathbf{B}) \\ - & - & - & \frac{n(1+\rho_{12}^2)}{(1-\rho_{12}^2)^2} \end{pmatrix}.$$

Y luego

$$\mathbf{F}_n^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{\sigma_1^4(n\text{tr}(\mathbf{B}^2) - C)}{nC} & \frac{\sigma_1^2\sigma_2^2([\text{tr}(\mathbf{B})]^2 - 2\rho_{12}^2C)}{\sigma_2^4(n\text{tr}(\mathbf{B}^2) - C)} & -\frac{\sigma_1^2\text{tr}(\mathbf{B})}{C} & -\frac{\sigma_1^2\rho_{12}(\rho_{12}^2 - 1)}{\sigma_2^2\rho_{12}(\rho_{12}^2 - 1)} \\ - & \frac{nC}{\sigma_2^4(n\text{tr}(\mathbf{B}^2) - C)} & -\frac{\sigma_2^2\text{tr}(\mathbf{B})}{nC} & -\frac{\sigma_2^2\rho_{12}(\rho_{12}^2 - 1)}{n} \\ - & - & \frac{n}{C} & 0 \\ - & - & - & \frac{(\rho_{12}^2 - 1)^2}{n} \end{pmatrix},$$

donde  $\mathbf{B} = \left( \mathbf{R}^{-1} \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \psi} \right)$  y  $C = n\text{tr}(\mathbf{B}^2) - [\text{tr}(\mathbf{B})]^2$ .

### 2.3.2.2. Estructura de Covarianza No-separable

En este caso tenemos

$$\Sigma(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 R_{11} & \sigma_1\sigma_2\rho_{12}R_{12} \\ - & \sigma_2^2 R_{22} \end{pmatrix},$$

donde  $R_{ij} = [R(\mathbf{h}, \psi_{ij})]_{i=j=1}^n$ ,  $i, j = 1, 2$ ,  $R_{12} = R_{21}$ . Se asume  $\psi_{ij}$  como escalar para cada  $i, j$ . Luego el vector de parámetros está dado por  $\boldsymbol{\theta} = (\sigma_1^2, \sigma_2^2, \psi_{11}, \psi_{12}, \psi_{22}, \rho_{12})^\top$ .

Bevilacqua et al. (2015) probaron que la matriz de Información de Fisher  $\mathbf{F}_n(\boldsymbol{\theta})$  está dada por

$$\mathbf{F}_n(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{2\sigma_1^4}r & \frac{\rho_{12}^2}{4\sigma_1^2\sigma_2^2}g(\mathbf{E}, \mathbf{L}) & -\frac{1}{2\sigma_1^2}g(\mathbf{D}, \mathbf{Q}) & \frac{\rho_{12}^2}{2\sigma_1^2}g(\mathbf{H}, \mathbf{X}) & 0 & \frac{\rho_{12}}{2\sigma_1^2}g(\mathbf{E}, \mathbf{L}) \\ - & \frac{1}{2\sigma_2^4}r & 0 & \frac{\rho_{12}^2}{2\sigma_2^2}g(\mathbf{H}, \mathbf{X}) & -\frac{1}{2\sigma_2^2}g(\mathbf{J}, \mathbf{Z}) & \frac{\rho_{12}}{2\sigma_2^2}g(\mathbf{E}, \mathbf{L}) \\ - & - & \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{M}) & -\rho_{12}^2\text{tr}(\mathbf{n}) & \frac{\rho_{12}^2}{2}\text{tr}(\mathbf{P}) & -\rho_{12}\text{tr}(\mathbf{D}) \\ - & - & - & \rho_{12}^2f(\mathbf{T}, \mathbf{S}) & -\rho_{12}^2\text{tr}(\mathbf{V}) & \rho_{12}f(\mathbf{H}, \mathbf{X}) \\ - & - & - & - & \frac{1}{2}\text{tr}(\mathbf{Y}) & -\rho_{12}\text{tr}(\mathbf{J}) \\ - & - & - & - & - & f(\mathbf{E}, \mathbf{L}) \end{pmatrix},$$

donde

$$\begin{aligned} \mathbf{D} &= (A_1 R_{12})^2 R_{22}^{-1} \frac{\partial R_{11}}{\partial \psi_{11}}, & \mathbf{E} &= (A_2 R_{11}^{-1} R_{12}^2)^2, \\ \mathbf{G} &= (A_2 R_{22})^2, & \mathbf{H} &= (A_2 R_{11}^{-1} R_{12})^2 R_{12} \frac{\partial R_{12}}{\partial \psi_{12}}, \\ \mathbf{J} &= (A_2 R_{12})^2 R_{11}^{-1} \frac{\partial R_{22}}{\partial \psi_{22}}, & \mathbf{L} &= A_1 A_2 R_{12}^2, \\ \mathbf{M} &= \left( A_1 \frac{\partial R_{11}}{\partial \psi_{11}} \right)^2, & \mathbf{n} &= A_1 A_2 R_{12} R_{11}^{-1} \frac{\partial R_{11}}{\partial \psi_{11}} \frac{\partial R_{12}}{\partial \psi_{12}}, \\ \mathbf{P} &= (A_2 R_{12} R_{11}^{-1})^2 \frac{\partial R_{11}}{\partial \psi_{11}} \frac{\partial R_{22}}{\partial \psi_{22}}, & \mathbf{Q} &= A_1^2 R_{11} \frac{\partial R_{11}}{\partial \psi_{11}}, \\ \mathbf{S} &= A_1 A_2 \left( \frac{\partial R_{12}}{\partial \psi_{12}} \right)^2, & \mathbf{T} &= \left( A_2 R_{12} R_{11}^{-1} \frac{\partial R_{12}}{\partial \psi_{12}} \right)^2, \\ \mathbf{V} &= A_2^2 R_{12} R_{11}^{-1} \frac{\partial R_{12}}{\partial \psi_{12}} \frac{\partial R_{22}}{\partial \psi_{22}}, & \mathbf{X} &= A_1 A_2 R_{12} \frac{\partial R_{12}}{\partial \psi_{12}}, \\ \mathbf{Y} &= \left( A_2 \frac{\partial R_{22}}{\partial \psi_{22}} \right)^2, & \mathbf{Z} &= A_2^2 R_{22} \frac{\partial R_{22}}{\partial \psi_{22}}, \\ f(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \rho_{12}^2 \text{tr}(\mathbf{A}) + \text{tr}(\mathbf{B}), & g(\mathbf{A}, \mathbf{B}) &= \rho_{12}^2 \text{tr}(\mathbf{A}) - \text{tr}(\mathbf{B}), \\ r &= \text{tr}(\mathbf{G}) - \frac{3}{2} \rho_{12}^2 \text{tr}(\mathbf{L}) + \frac{1}{2} \rho_{12}^4 \text{tr}(\mathbf{E}). \end{aligned}$$

# Capítulo 3

## Simulaciones

Se presentan simulaciones de campos aleatorios bivariados, con estructuras de covarianza bivariada de Matérn y de Wendland-Gneiting. Mediante el uso del paquete *RandomFields*, se realizan simulaciones de campos aleatorios considerando distintos parámetros. Se muestra una imagen de los campos aleatorios según los parámetros escogidos. Se utilizan las funciones *RFsimulate* y *RFfit* para simular los campos aleatorios y estimar los parámetros vía máxima verosimilitud, respectivamente. Luego se procede a hacer una estimación del coeficiente de concordancia espacial para cada caso, haciendo una comparación entre el valor teórico y el simulado. Finalmente se presenta el comportamiento de la varianza asintótica para los casos donde se probó la normalidad asintótica del coeficiente de concordancia.

### 3.1. Matérn Bivariado

Consideramos un campo aleatorio Gaussiano bivariado  $(Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$  con media  $\mathbf{0}$  y matriz de covarianza de Matérn, siguiendo el modelo Full Bivariado dado en la Definición 1.8. Para las simulaciones se considera una grilla equiespaciada de  $10 \times 10$  puntos y una de  $30 \times 30$  puntos, ambas sobre el cuadrado  $[0, 10]^2$ .

Consideramos 4 simulaciones con distintos parámetros. Los 4 casos consisten en un modelo con igual varianza entre las componentes,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ . El primer caso consiste en un modelo con  $\rho_{12} = 0.5$ , parámetros de suavizamiento  $\nu_1 = 1.5$ ,  $\nu_2 = 0.5$ ,  $\nu_{12} = 1$ , y un parámetro de escala idéntico para los procesos,  $a_1 = a_{12} = a_2 = a = 1$ . El segundo caso consiste en un modelo con  $\rho_{12} = 0.85$ , parámetros de suavizamiento  $\nu_1 = 1.5$ ,

$\nu_2 = 0.5$  y  $\nu_{12} = 1$ . Se considera un parámetro de escala  $a_1 = a_{12} = a_2 = 1$ . El tercer caso consiste en un modelo con  $\rho_{12} = 0.96$ , parámetros de suavizamiento  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_{12} = \nu = 0.5$ . Se considera además, un parámetro de escala  $a_1 = a_{12} = a_2 = 1$ . El último caso consiste en un modelo con  $\rho_{12} = 0.5$ , parámetros de suavizamiento  $\nu_1 = 1.5$ ,  $\nu_2 = 0.5$  y  $\nu_{12} = 1$ . Se considera además, un parámetro de escala  $a_1 = 1$  para la primera componente,  $a_2 = 0.2$ , para la segunda componente, y  $a_{12} = 0.6$ .

Podemos apreciar en la Figura 3.1 la imagen de una corrida computacional en cada caso, en una grilla de  $30 \times 30$ .

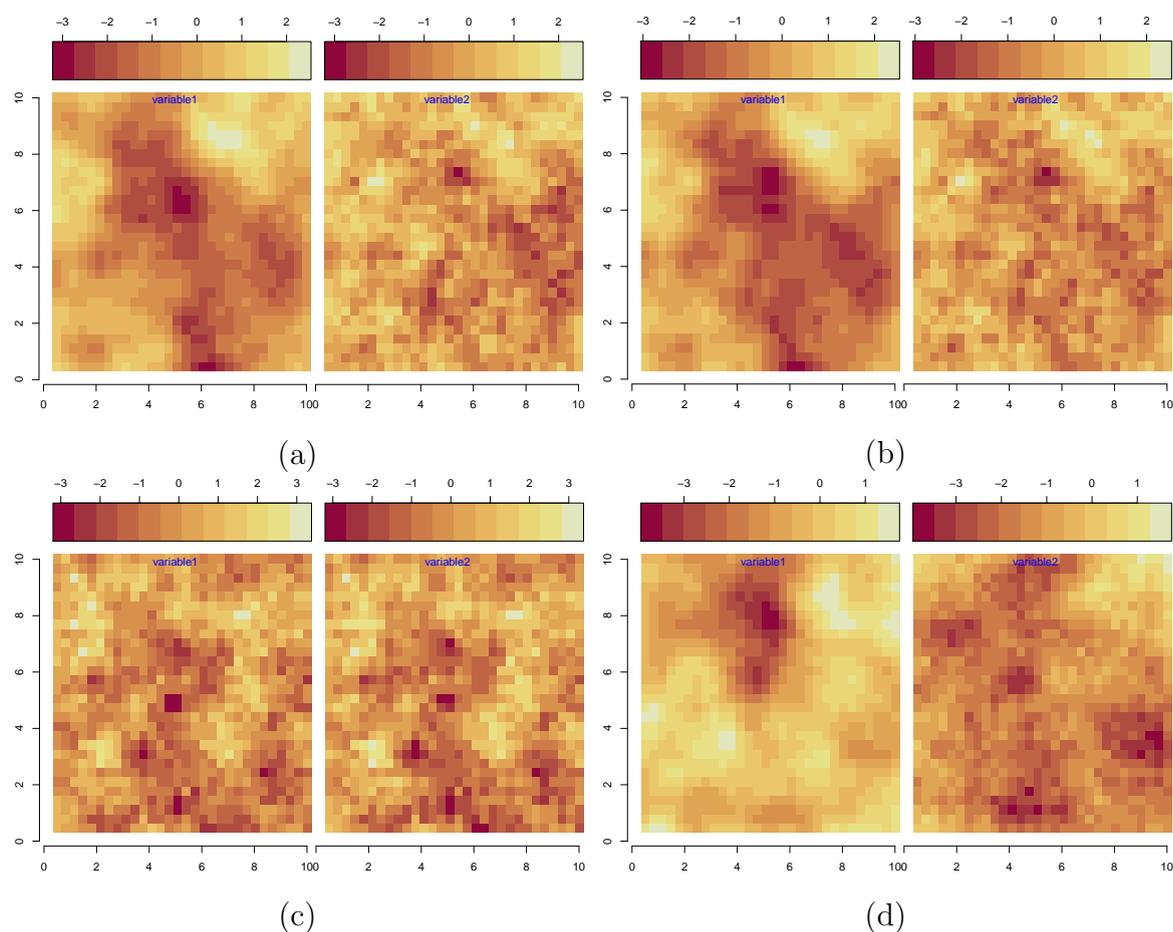


FIGURA 3.1: Realización campo aleatorio con covarianza Matérn bivariada con  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ . (a) muestra el caso con  $\rho_{12} = 0.5$ ,  $\nu_1 = 1.5$ ,  $\nu_2 = 0.5$  y  $\nu_{12} = 1$ ; (b) el caso con  $\rho_{12} = 0.85$ ,  $\nu_1 = 1.5$ ,  $\nu_2 = 0.5$  y  $\nu_{12} = 1$ , (c) el caso con  $\rho_{12} = 0.96$ ,  $\nu_1 = \nu_2 = \nu_{12} = 0.5$  y (d) el caso con  $\rho_{12} = 0.5$ ,  $\nu_1 = 1.5$ ,  $\nu_2 = 0.5$ ,  $\nu_{12} = 1$ ,  $a_1 = 1$ ,  $a_2 = 0.2$ ,  $a_{12} = 0.6$ .

Se hace una simulación con 500 corridas computacionales para cada caso y luego se estiman los parámetros vía máxima verosimilitud. Así, en el Cuadro 3.1 podemos ver una comparación entre los parámetros reales y los estimados.

<b>Caso 1</b>	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$\rho_{12} = 0.5$	$\nu_1 = 1.5$	$\nu_2 = 0.5$	$\nu_{12} = 1$	$a = 1$	-	-
10 × 10	0.9858 (0.0125)	0.9925 (0.0077)	0.4999 (0.0087)	1.4976 (0.0238)	0.4958 (0.0119)	1.0034 (0.0078)	1.0028 (0.0170)		
30 × 30	0.9770 (0.0106)	0.9930 (0.0052)	0.5007 (0.0039)	1.5018 (0.0029)	0.5022 (0.0018)	1.0021 (0.0017)	1.0113 (0.0056)		
<b>Caso 2</b>	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$\rho_{12} = 0.85$	$\nu_1 = 1.5$	$\nu_2 = 0.5$	$\nu_{12} = 1$	$a = 1$	-	-
10 × 10	0.9844 (0.0120)	0.9900 (0.0076)	0.8495 (0.0012)	1.5036 (0.0218)	0.5003 (0.0104)	1.0026 (0.0012)	1.0078 (0.0153)		
30 × 30	0.9785 (0.0092)	0.9927 (0.0048)	0.8502 (0.0003)	1.5028 (0.0024)	0.5015 (0.0015)	1.0021 (0.0001)	1.0118 (0.0043)		
<b>Caso 3</b>	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$\rho_{12} = 0.96$	$\nu_1 = 0.5$	$\nu_2 = 0.5$	$\nu_{12} = 0.5$	$a = 1$	-	-
10 × 10	0.9865 (0.0077)	0.9867 (0.0077)	0.9596 (0.0010)	0.5047 (0.0176)	0.5053 (0.0176)	0.5050 (0.0008)	1.0210 (0.0268)		
30 × 30	1.0081 (0.0060)	1.0118 (0.0061)	0.9600 (0.0004)	0.4999 (0.0021)	0.5013 (0.0021)	0.5006 (0.0001)	0.9912 (0.0083)		
<b>Caso 4</b>	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$\rho_{12} = 0.5$	$\nu_1 = 1.5$	$\nu_2 = 0.5$	$\nu_{12} = 1$	$a_1 = 1$	$a_2 = 0.2$	$a_{12} = 0.6$
10 × 10	0.9872 (0.0128)	0.9843 (0.0214)	0.4985 (0.0080)	1.5019 (0.0255)	0.4964 (0.0061)	1.0155 (0.0158)	1.0048 (0.0184)	0.2004 (0.1649)	0.6132 (0.0454)
30 × 30	0.9931 (0.0116)	0.9930 (0.0209)	0.4863 (0.0075)	1.5003 (0.0031)	0.4999 (0.0016)	1.0056 (0.0028)	1.0020 (0.0063)	0.2015 (0.1176)	0.6183 (0.0215)

CUADRO 3.1: Parámetros teóricos y estimados para las simulaciones con covarianza de Matérn bivariada.

Podemos apreciar que en general las estimaciones máximo verosímil de los parámetros involucrados en los modelos de covarianza de Matérn son muy similares a los valores teóricos, ya sea para la grilla de 10 × 10 o para la grilla de 30 × 30, y además se tienen errores estándar cercanos a 0.01 para todos los parámetros, con excepción del último caso, donde los parámetros de escala tienen errores estándar levemente mayores.

Se hace la estimación del coeficiente de concordancia espacial, como se aprecia en la Figura 3.2 para la grilla de 10 × 10, y en la Figura 3.3 para la grilla de 30 × 30, que está dado por

$$\rho_c(\mathbf{h}) = \frac{2\rho_{12}\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} M(\mathbf{h} \mid \nu_{12}, a_{12}),$$

observando que los valores estimados obtenidos son practicamente iguales a los valores teóricos, ya que se tienen errores cuadrático medios de  $1.5987 \cdot 10^{-11}$ ,  $1.7319 \cdot 10^{-8}$ ,  $7.0792 \cdot 10^{-9}$  y  $3.2711 \cdot 10^{-7}$  para cada caso respectivamente, para la grilla de 10 × 10, y de  $9.7553 \cdot 10^{-7}$ ,  $3.8118 \cdot 10^{-6}$ ,  $2.2266 \cdot 10^{-6}$  y  $6.9681 \cdot 10^{-5}$  respectivamente, para la grilla de 30 × 30.

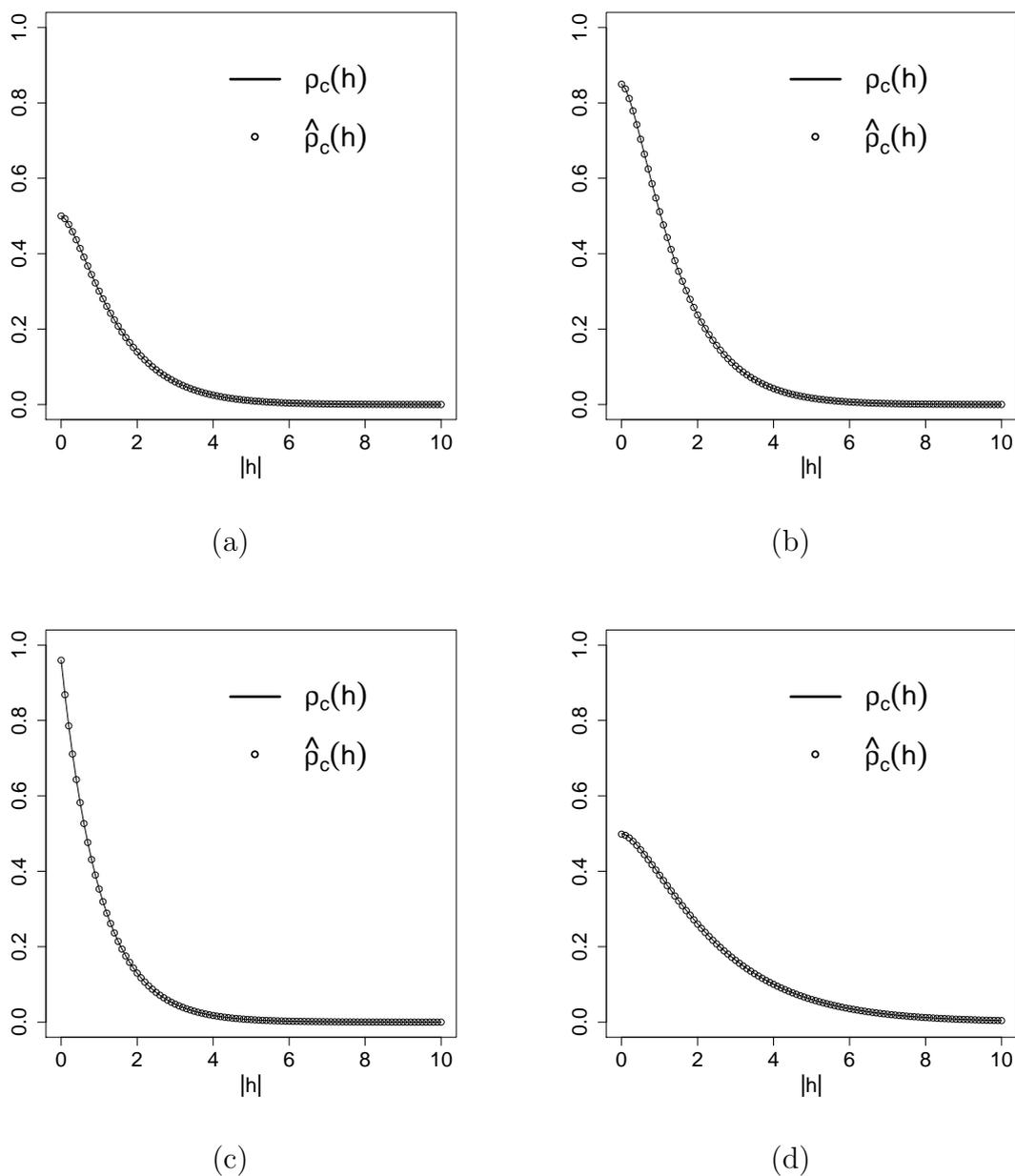
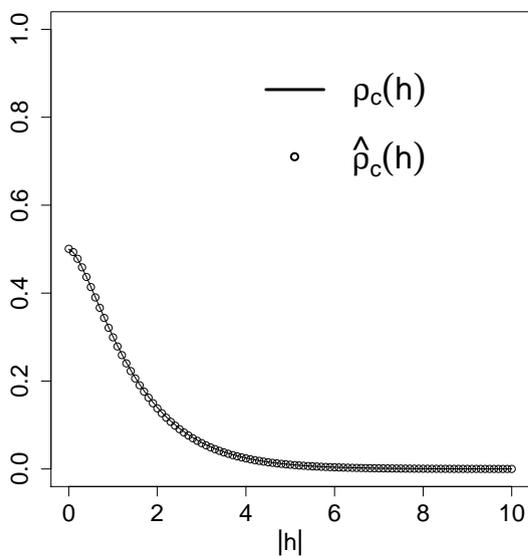
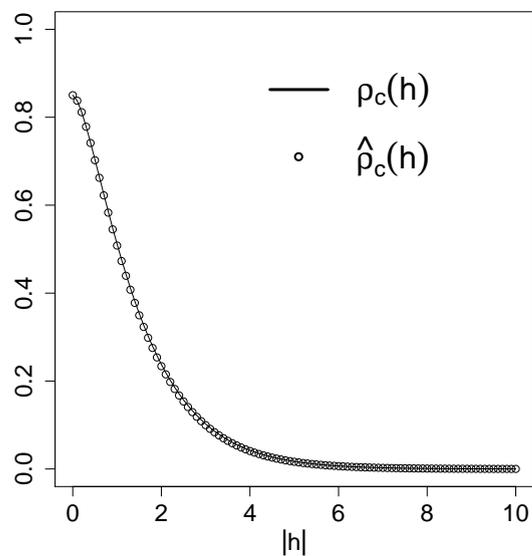


FIGURA 3.2: Coeficientes teóricos (en línea) y estimados (en círculos) para los distintos parámetros en una grilla de  $10 \times 10$  en el cuadrado  $[0, 10]^2$ .  
 (a) Caso 1 (b) Caso 2 (c) Caso 3 (d) Caso 4.

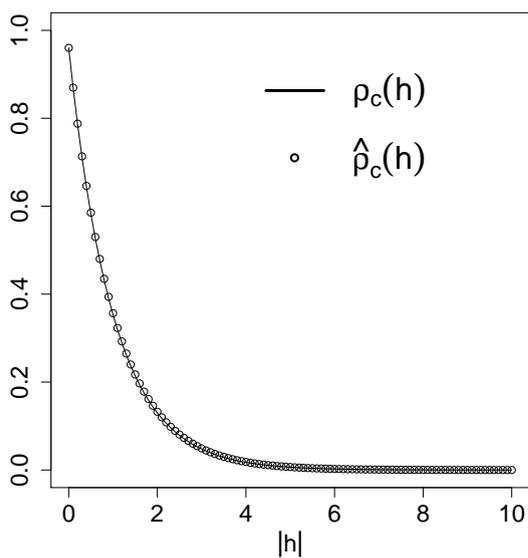
Para el tercer caso, donde  $\nu_{12} = 0.5$ , podemos calcular la varianza, como lo muestra la Figura 3.4, donde se observa el comportamiento decreciente que toma, donde el punto más alto es menor a 0.04, para la grilla con menos puntos, y bajo 0.02 para la grilla con más puntos, con lo cual apreciamos que para más puntos se tiene una varianza más pequeña.



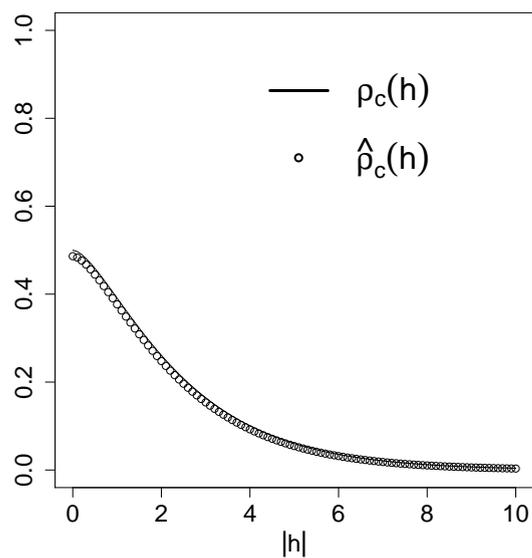
(a)



(b)



(c)



(d)

FIGURA 3.3: Coeficientes teóricos (en línea) y estimados (en círculos) para los distintos parámetros en una grilla de  $30 \times 30$  en el cuadrado  $[0, 10]^2$ .

(a) Caso 1 (b) Caso 2 (c) Caso 3 (d) Caso 4.

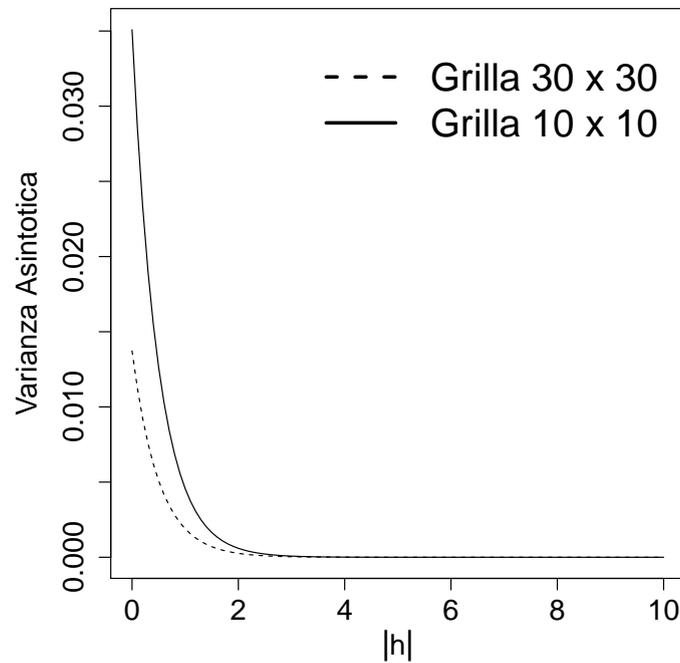


FIGURA 3.4: Varianza de las estimaciones en una grilla de  $10 \times 10$  y  $30 \times 30$ , ambas en el cuadrado  $[0, 10]^2$ .

## 3.2. Wendland-Gneiting Bivariado

Sea un campo aleatorio bivariado  $(Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$  con media  $\mathbf{0}$  y matriz de covarianza de Wendland-Gneiting, siguiendo el modelo bivariado definido en (1.11). Para las simulaciones se considera una grilla equiespaciada de  $20 \times 20$  puntos sobre el cuadrado  $[-3/2, 3/2]^2$ .

Consideramos 3 simulaciones, donde  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\nu = 4$  y  $k = 1$ . El primer caso consiste en un modelo con  $\rho_{12} = -0.15$  y parámetros de escala  $b_1 = 0.5$ ,  $b_2 = 0.4$  y  $b_{12} = 0.35$ . El segundo caso consiste en un modelo con  $\rho_{12} = 0.25$  y parámetros de escala  $b_1 = 1.2$ ,  $b_2 = 0.9$  y  $b_{12} = 1$ . El tercer caso consiste en un modelo con  $\rho_{12} = 0.3$  y parámetros de escala  $b_1 = 1.8$ ,  $b_2 = 1.4$  y  $b_{12} = 1.5$ . Podemos apreciar en la Figura 3.5 la imagen de una corrida computacional para cada caso.

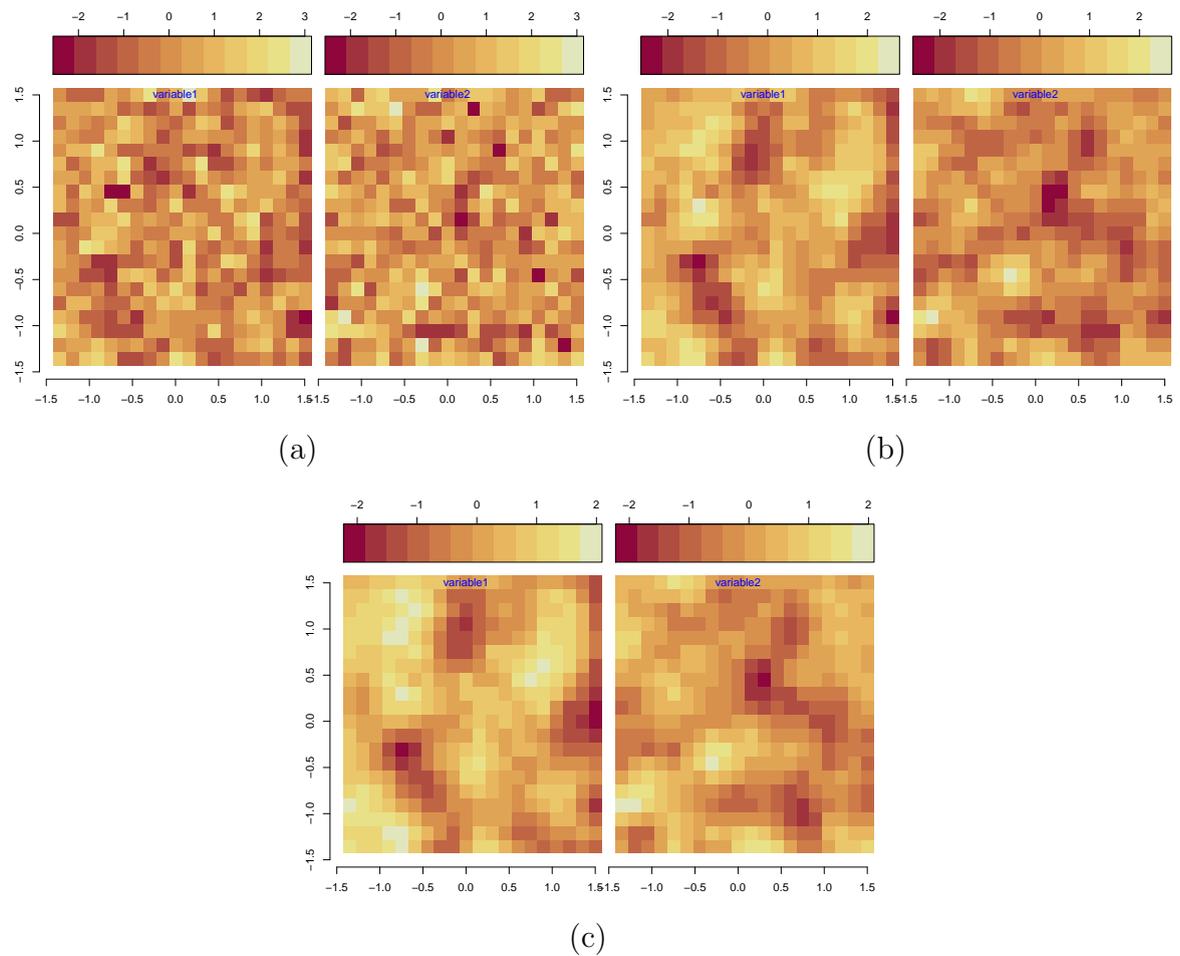


FIGURA 3.5: Realización campo aleatorio con covarianza de Wendland-Gneiting bivariada con  $\sigma_1 = \sigma_2 = 2$ ,  $\nu = 4$  y  $k = 1$ . (a) muestra el caso con  $\rho_{12} = -0.15, b_1 = 0.5$ ,  $b_2 = 0.4$  y  $b_{12} = 0.35$ ; (b) muestra el caso con  $\rho_{12} = 0.25, b_1 = 1.2$ ,  $b_2 = 0.9$  y  $b_{12} = 1$ ; (c) muestra el caso con  $\rho_{12} = 0.3$ ,  $b_1 = 1.8$ ,  $b_2 = 1.4$  y  $b_{12} = 1.5$ .

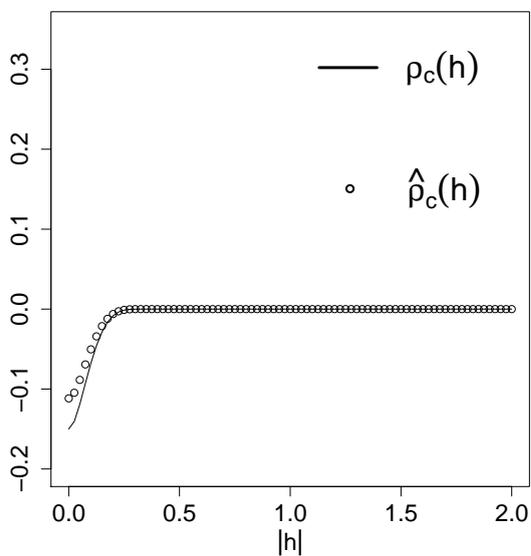
Se hace una simulación con 500 corridas computacionales y luego se estiman los parámetros vía máxima verosimilitud. Así, en el Cuadro 3.2 podemos ver una comparación entre los parámetros reales y los estimados, donde se aprecia que para las estimaciones de varianza y escala los valores obtenidos tienen un bajo error estándar y son muy cercanos al valor original. Para el parámetro  $\rho_{12}$  se obtienen resultados ligeramente más alejados del parámetro teórico.

<b>Caso 1</b>	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$\rho_{12} = -0.15$	$b_1 = 0.5$	$b_{12} = 0.35$	$b_2 = 0.4$
	1.00535 (0.00369)	1.00108 (0.00332)	-0.11702 (0.05511)	0.49947 (0.00114)	0.34960 (0.01364)	0.40018 (0.00115)
<b>Caso 2</b>	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$\rho_{12} = 0.25$	$b_1 = 1.2$	$b_{12} = 0.9$	$b_2 = 1$
	1.01364 (0.00765)	0.99532 (0.00642)	0.21100 (0.01784)	1.20442 (0.00350)	0.89448 (0.00547)	0.99942 (0.00260)
<b>Caso 3</b>	$\sigma_1^2 = 1$	$\sigma_2^2 = 1$	$\rho_{12} = 0.3$	$b_1 = 1.8$	$b_{12} = 1.4$	$b_2 = 1.5$
	0.99630 (0.01045)	1.00990 (0.00922)	0.25248 (0.01632)	1.79560 (0.00680)	1.40657 (0.00622)	1.50400 (0.00508)

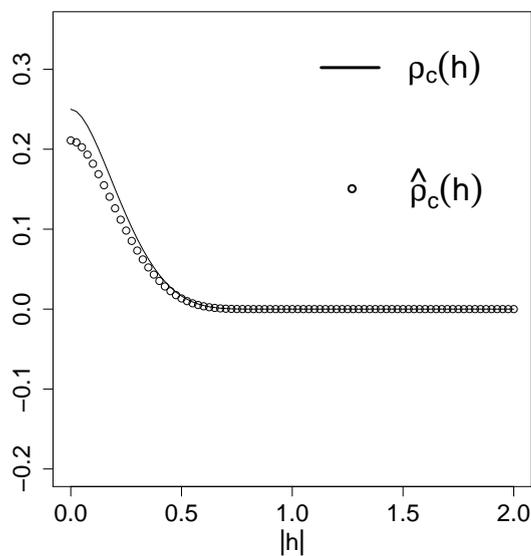
CUADRO 3.2: Parámetros teóricos y estimados para el modelo con covarianza de Wendland-Gneiting bivariada.

Se hace la estimación del coeficiente de concordancia espacial, como se aprecia en la Figura 3.6, observando un comportamiento similar del coeficiente estimado con el teórico, obteniendo errores cuadrático medios de  $3.9404 \cdot 10^{-5}$ ,  $9.7958 \cdot 10^{-5}$  y  $0.0002$ , para cada caso respectivamente. Sin embargo, observamos que los errores cuadráticos, si bien son pequeños, son mayores en orden de magnitud a los obtenidos para el caso de Matérn, lo cual se debe a la estimación del parámetro  $\rho_{12}$ , que se encuentra bajo el valor teórico, lo cual aumenta el error cuadrático medio.

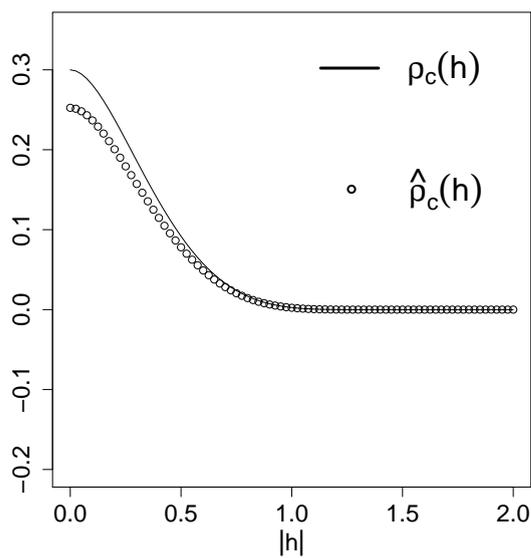
En la Figura 3.7 se hace el cálculo de la varianza asintótica para cada caso, en la cual notamos que son menores a  $0.006$ , para distancias mínimas, y decaen rápidamente a medida que  $\|\mathbf{h}\|$  aumenta.



(a)



(b)



(c)

FIGURA 3.6: Coeficientes teóricos (en líneas) y estimados (en círculos) para los distintos parámetros.

(a) Caso 1 (b) Caso 2 (c) Caso 3.

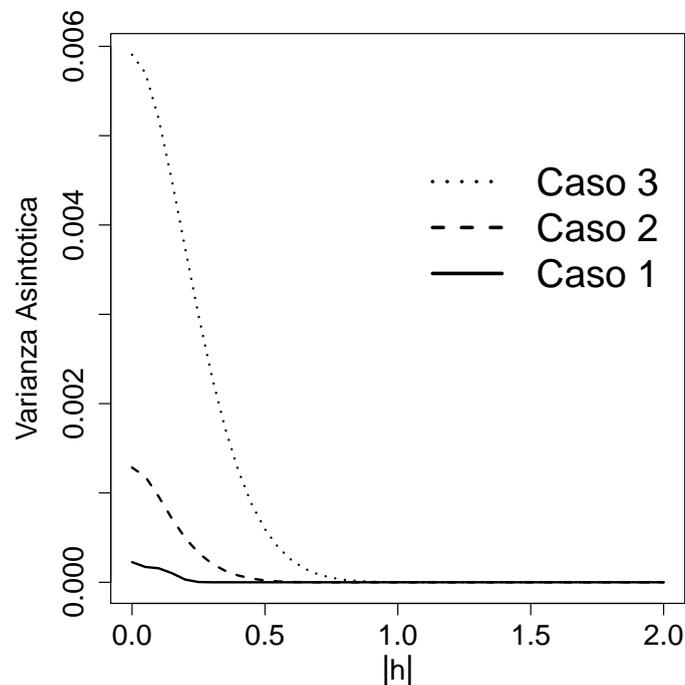


FIGURA 3.7: Varianza de las estimaciones en el cuadrado  $[-3/2, 3/2]^2$  para procesos de covarianza de Wendland.

### 3.3. Error de ajuste de covarianza bivariada

Se realizan 500 corridas computacionales de modelos Matérn y Wendland-Gneiting bivariados, en cuatro casos con distintos parámetros, para luego ajustar un modelo equivocado. A los modelos de Matérn se le ajustará un modelo de Wendland-Gneiting y viceversa y se analizará el impacto en el coeficiente de concordancia espacial.

#### Caso 1.

Se hace la simulación un proceso Matérn bivariado, en una grilla de  $10 \times 10$  en el cuadrado  $[0, 10]^2$ . Los parámetros del modelo están dados por  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\rho_{12} = 0.5$ ,  $\nu_1 = 1.5$ ,  $\nu_{12} = 1$ ,  $\nu_2 = 0.5$  e igual parámetro de escala  $a = 1$  para todas las componentes.

Se ajusta un modelo de Wendland-Gneiting bivariado obteniendo los valores mostrados en el Cuadro 3.3.

$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	$\rho_{12}$	$b_1$	$b_{12}$	$b_2$
0.94796 (0.01085)	0.96841 (0.00684)	$2.0299 \cdot 10^{-12}$ (0.12314)	6.42377 (0.03163)	0.33805 (0.00036)	3.37039 (0.01561)

CUADRO 3.3: Parámetros estimados ajustando un modelo Wendland-Gneiting bivariado.

Notamos que el ajuste entrega un valor de  $\rho_{12}$  muy cercano a 0, por lo tanto no se puede reproducir el coeficiente de concordancia espacial.

**Caso 2.**

Se hace la simulación un proceso Matérn bivariado, ahora en una grilla de  $10 \times 10$  en el cuadrado  $[-3/2, 3/2]^2$ . Los parámetros del modelo están dados por  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\rho_{12} = 0.5$ ,  $\nu_1 = 1.5$ ,  $\nu_{12} = 1$ ,  $\nu_2 = 0.5$  y  $a_1 = 1$ ,  $a_{12} = 0.6$ ,  $a_2 = 0.2$ .

Se ajusta un modelo de Wendland-Gneiting bivariado obteniendo los valores mostrados en el Cuadro 3.4.

$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	$\rho_{12}$	$b_1$	$b_{12}$	$b_2$
0.95437 (0.00336)	0.83280 (0.00266)	$1.47827 \cdot 10^{-11}$ (0.00865)	6.33720 (0.00894)	0.58809 (0.00012)	5.86338 (0.00763)

CUADRO 3.4: Parámetros estimados ajustando un modelo Wendland-Gneiting bivariado.

Notamos que el ajuste entrega un valor de  $\rho_{12}$  muy cercano a 0, por lo tanto no se puede reproducir el coeficiente de concordancia espacial.

**Caso 3.**

Se hace la simulación un proceso Wendland-Gneiting bivariado, en una grilla de  $10 \times 10$  en el cuadrado  $[-3/2, 3/2]^2$ . Los parámetros del modelo están dados por  $k = 1$ ,  $\nu = 4$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\rho_{12} = -0.15$ ,  $b_1 = 0.5$ ,  $b_{12} = 0.35$  y  $b_2 = 0.4$ .

Se ajusta un modelo Matérn bivariado obteniendo los valores mostrados en el Cuadro 3.5.

$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	$\rho_{12}$	$\nu_1$	$\nu_{12}$	$\nu_2$	$1/a_1$	$1/a_{12}$	$1/a_2$
0.99344	1.00107	-0.01505	0.1	1.040009	0.1	0.111111	0.11445	0.111111
(0.00628)	(0.00633)	(0.27361)	(Inf)	(2.23282)	(Inf)	(Inf)	(0.05948)	(Inf)

CUADRO 3.5: Parámetros estimados ajustando un modelo Matérn bivariado.

Ahora, en la Figura 3.8 podemos apreciar la comparación de ambos coeficientes de concordancia espacial, para el modelo teórico y el estimado.

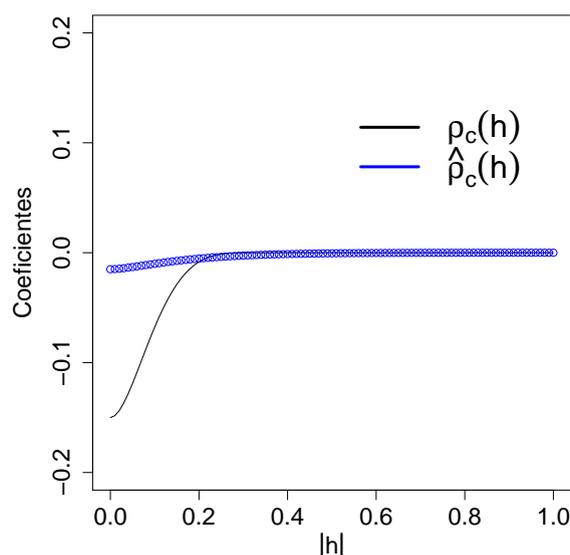


FIGURA 3.8: Comparación coeficiente de concordancia teórico y estimado.

Notamos que el comportamiento del coeficiente de concordancia espacial estimado, varía demasiado con respecto al teórico, debido a que en el ajuste, los valores de suavizamiento  $\nu_{ij}$  y de escala  $a_{ij}$  toman el borde de los valores permitidos, por lo cual el ajuste no es bueno, lo cual se refleja en el cálculo de  $\rho_{12}$ , cuyo cálculo interno depende de los valores de  $\nu_{ij}$  y  $a_{ij}$ , y por lo tanto no se obtiene un buen resultado.

#### Caso 4.

Se hace la simulación un proceso Wendland-Gneiting bivariado, en una grilla de  $10 \times 10$  en el cuadrado  $[-3/2, 3/2]^2$ . Los parámetros del modelo están dados por  $k = 1$ ,  $\nu = 4$ ,  $\sigma_1 = \sigma_2 = 1$ ,  $\rho_{12} = 0.3$ ,  $b_1 = 1.8$ ,  $b_{12} = 1.4$  y  $b_2 = 1.5$ .

Se ajusta un modelo Matérn bivariado obteniendo los valores mostrados en el Cuadro 3.6.

$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	$\rho_{12}$	$\nu_1$	$\nu_{12}$	$\nu_2$	$1/a_1$	$1/a_{12}$	$1/a_2$
1.00520 (0.01144)	1.00161 (0.00968)	0.29750 (0.00620)	2.32764 (0.05134)	2.87104 (0.09938)	3.597658 (0.11342)	0.18970 (0.00359)	0.11111 (0.00711)	0.13702 (0.00338)

CUADRO 3.6: Parámetros estimados ajustando un modelo Matérn bivariado.

Ahora, en la Figura 3.9 podemos apreciar la comparación de ambos coeficientes de concordancia espacial, para el modelo teórico y el estimado.

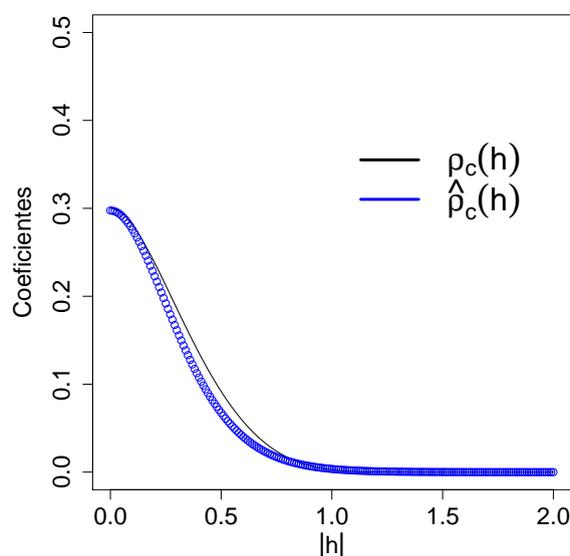


FIGURA 3.9: Comparación coeficiente de concordancia teórico y estimado.

Notamos que en este caso, solo el valor de  $a_{12}$  es cercano al borde teórico del modelo, por lo cual el ajuste si es adecuado, ya que los valores de escala iniciales son más grandes que en los otros casos, lo cual permite una mejor estimación.

Finalmente, podemos apreciar que para valores grandes en la escala del proceso de Wendland-Gneiting, el ajuste del coeficiente utilizando un modelo de Matérn bivariado, se ajusta de buena forma, ya que se puede estimar de mejor forma el coeficiente  $\rho_{12}$ , pero no así en el caso contrario, ya que el modelo de Wendland-Gneiting no estima bien los parámetros.

# Capítulo 4

## Aplicaciones

Se presentan dos aplicaciones para el coeficiente de concordancia espacial. En primera instancia, se comparan imágenes de una misma locación. Como segunda aplicación, se considera una medición de índice de pobreza en Chile mediante dos metodologías.

### 4.1. Comparación de Imágenes

Se considera un conjunto de imágenes obtenidas con una serie de cámaras digitales, de un mismo sector de las copas de árboles de un bosque en Harvard Forest, mayormente dominado por la especie Roble Rojo. Estas imágenes fueron tratadas por [Sonnentag et al. \(2012\)](#). En la Figura 4.1 se consideran 5 imágenes iniciales, de las cuales se elegirán 2 imágenes con dimensiones y ángulos similares.

Se consideran luego 2 imágenes, usando como criterio de elección la similaridad en ángulo y dimensión del paisaje, las cuales se muestran en la Figura 4.2.

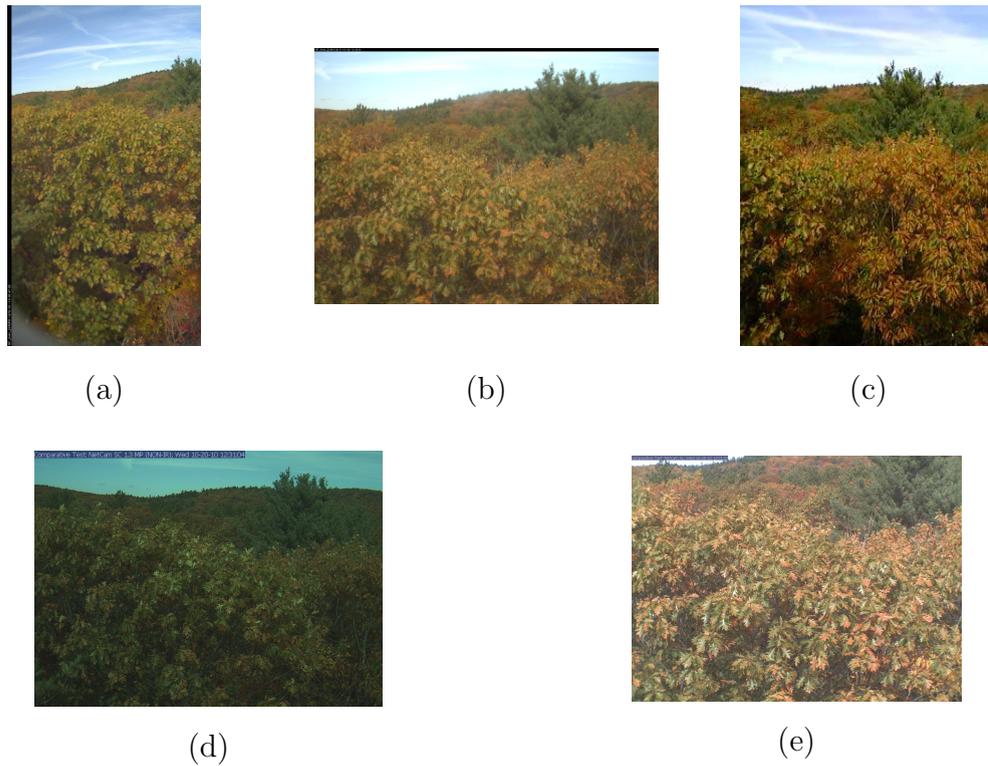


FIGURA 4.1: (a) Cámara indoor Axis 207MW, (b) Cámara outdoor Axis 223M, (c) Cámara indoor D-Link DCS-920, (d) Cámara outdoor StarDot NetCam SC 1.3MP, (e) Cámara outdoor StarDot NetCam XL 3MP. Imágenes tomadas cerca de mediodía (hora local) del día 20 de Octubre de 2010.



FIGURA 4.2: Imágenes a trabajar.

Para analizar la imagen se carga mediante el paquete *jpeg* del software *R*, y luego la imagen en color de 3 canales (RGB) se transforma a escala de grises y se reduce en dimensión.

### 4.1.1. Análisis de Datos

Se consideran las imágenes en escala de grises y reducidas. Sea  $X$  el vector con los píxeles de la primera imagen,  $Y$  el vector con los píxeles de la segunda imagen,  $\mu_x$  y  $\mu_y$  las medias de  $X$  e  $Y$  respectivamente y  $\rho_c$  el coeficiente de concordancia. Se tiene que  $\mu_x = 0.5026$  y  $\mu_y = 0.3902$ . Además, el coeficiente de correlación de concordancia toma un valor de  $\rho_c = 0.3177$ .

### 4.1.2. Ajuste de Modelos

Se considera un campo aleatorio Gaussiano  $\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = (Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$ , con  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$ , donde cada subíndice corresponde a la primera y segunda imagen respectivamente.

El primer modelo a ajustar es un modelo Matérn Full Bivariado, donde se consideran distintos parámetros de suavizamiento y escala. El modelo de covarianza bivariada está dada por

$$\begin{aligned} C_1(\mathbf{h}) &= \sigma_1^2 M(\mathbf{h}|\nu_1, a_1), \\ C_2(\mathbf{h}) &= \sigma_2^2 M(\mathbf{h}|\nu_2, a_2), \\ C_{12}(\mathbf{h}) &= C_{21}(\mathbf{h}) = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 M(\mathbf{h}|\nu_{12}, a_{12}). \end{aligned}$$

El segundo modelo es un modelo de Wendland-Gneiting bivariado, fijando los parámetros  $k = 1$ ,  $\gamma = 0$  y  $\nu = 4$ , por lo tanto el modelo está dado por

$$\begin{aligned} C_1(\mathbf{h}) &= \sigma_1^2 (1 + (\nu + 1)\|\mathbf{h}\|/b_1)(1 - \|\mathbf{h}\|/b_1)_+^{\nu+1}, \\ C_2(\mathbf{h}) &= \sigma_2^2 (1 + (\nu + 1)\|\mathbf{h}\|/b_2)(1 - \|\mathbf{h}\|/b_2)_+^{\nu+1}, \\ C_{12}(\mathbf{h}) &= C_{21}(\mathbf{h}) = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 (1 + (\nu + 1)\|\mathbf{h}\|/b_{12})(1 - \|\mathbf{h}\|/b_{12})_+^{\nu+1}. \end{aligned}$$

Luego, se procede a hacer el ajuste de los 2 modelos, mediante la función *RFfit* del paquete *RandomFields* del software *R*. En el Cuadro 4.1 se puede ver los valores de los parámetros de los modelos ajustados

Matern	$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	$\rho_{12}$	$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_{12}$	$1/a_1$	$1/a_2$	$1/a_{12}$
	0.04500 (0.00666)	0.09956 (0.03775)	-0.12533 (0.21465)	0.1 (0.01545)	0.29888 (0.02606)	0.99721 (2.00273)	162.2498 (65.97381)	162.2498 (95.79178)	5.64669 (2.95892)
W-G	$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	$\rho_{12}$	$b_1$	$b_2$	$b_{12}$			
	0.19209 (0.01555)	0.09956 (0.00867)	$-6.074 \cdot 10^{-12}$ (0.91367)	7.10709 (0.21888)	9.88381 (0.32200)	0.71213 (Inf)			

CUADRO 4.1: Parámetros teóricos y estimados para los modelos Matérn y Wendland-Gneiting.

El Cuadro 4.2 presenta la cantidad de parámetros, log-verosimilitud y AIC para los 2 modelos.

Modelo	Parámetros	Log-verosimilitud	AIC
Matérn	9	2485.998	-4953.996
Wendland-Gneiting	6	1555.085	-3098.169

CUADRO 4.2: Comparación de modelos.

Por lo tanto se utiliza el modelo de Matérn, y se procede a analizar el coeficiente de concordancia espacial para este modelo.

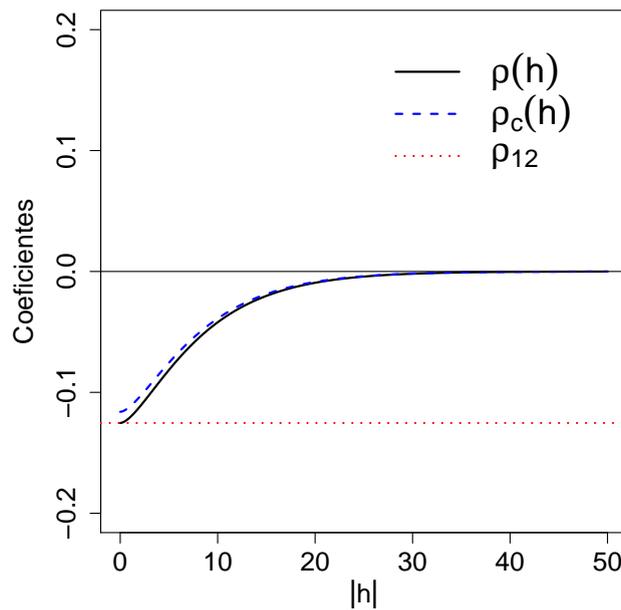


FIGURA 4.3: Coeficientes para el modelo escogido.

Podemos apreciar en la Figura 4.3 que para los valores ajustados de los parámetros, el coeficiente de concordancia espacial toma valores negativos y corrige la correlación espacial, tomando valores ligeramente más grandes para cada  $\mathbf{h}$ .

Observamos una correlación espacial y una concordancia espacial negativa, y que decae rápidamente a cero, en un valor de  $\|\mathbf{h}\|$  cercano a 30. Podemos interpretar este comportamiento a que las imágenes tienen una concordancia de valor pequeño en valor absoluto, y negativa. Se debe tener en cuenta que se hace una gran reducción de las imágenes originales, lo cual puede alterar los resultados, ya que los píxeles abarcan una gran cantidad de información de la imagen.

Para hacer un análisis mejor, se procede a hacer el análisis de las imágenes, ajustando modelos espaciales a sub-imágenes de las imágenes originales, considerando ventanas rectangulares pequeñas, y se calcula el coeficiente de concordancia espacial para cada ventana.

### 4.1.3. Trabajo en sub-imágenes

Redimensionamos las imágenes iniciales a una dimensión de  $185 \times 274$  píxeles, y trabajamos en 110 ventanas rectangulares, siendo 90 de ellas de  $19 \times 26$  puntos, y las restantes de  $14 \times 14$  puntos. Se ajustan modelos de Matérn bivariado para las 110 ventanas. El modelo de covarianza considerado es

$$\begin{aligned} C_1(\mathbf{h}) &= \sigma_1^2 M(\mathbf{h}|\nu_1, a_1), \\ C_2(\mathbf{h}) &= \sigma_2^2 M(\mathbf{h}|\nu_2, a_2), \\ C_{12}(\mathbf{h}) &= C_{21}(\mathbf{h}) = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 M(\mathbf{h}|\nu_{12}, a_{12}). \end{aligned}$$

Sea  $\rho_c^i(\mathbf{h})$  el coeficiente de concordancia espacial local para la ventana o sub-imagen  $i$ , y sean  $\sigma_{1i}, \sigma_{2i}, \rho_{12i}, \nu_{12i}, a_{12i}$  los parámetros de la ventana  $i$ -ésima. Luego

$$\rho_c^i(\mathbf{h}) = \frac{2\sigma_{1i}\sigma_{2i}}{\sigma_{1i}^2 + \sigma_{2i}^2} \rho_{12i} M(\mathbf{h}|\nu_{12i}, a_{12i}).$$

Definimos dos coeficientes de concordancia global. Primero, consideramos un promedio de los coeficientes locales, es decir, para las  $n$  ventanas, tenemos

$$\rho_1(\mathbf{h}) = \sum_{i=1}^n \frac{1}{n} \rho_c^i(\mathbf{h}).$$

Segundo, consideramos los valores promedio de los parámetros obtenidos,  $\bar{\sigma}_1, \bar{\sigma}_2, \bar{\rho}_{12}, \bar{\nu}_{12}, \bar{a}_{12}$ , y definimos el coeficiente de concordancia global como

$$\rho_2(\mathbf{h}) = \frac{2\bar{\sigma}_1\bar{\sigma}_2}{\bar{\sigma}_1^2 + \bar{\sigma}_2^2} \bar{\rho}_{12} M(\mathbf{h} | \bar{\nu}_{12}, \bar{a}_{12}).$$

Así, tenemos dos coeficientes que engloban la información local obtenida, donde ambos se basan en el promedio, de coeficientes y de parámetros respectivamente, notando que el primer coeficiente propuesto se ve más afectado por la diferencia de las varianzas estimadas. Podemos apreciar en la Figura 4.4 los dos coeficientes de concordancia global presentados, observando un comportamiento similar entre ambos, destacando que para el caso del coeficiente formado por los promedios,  $\rho_2(\mathbf{h})$ , se tiene valores más altos. Ambos coeficientes de concordancia toman valores positivos, bajo 0.6, siendo mayores que el  $\rho_c$  dado en el análisis no espacial, por lo cual no existe un grado de concordancia alto. En conclusión, si se quisiera elegir una de las dos imágenes, considerando variables como el costo asociado por los instrumentos, u otras, no pueden ser tratadas como concordantes, y no se pueden usar indistintamente, según el modelo ajustado.

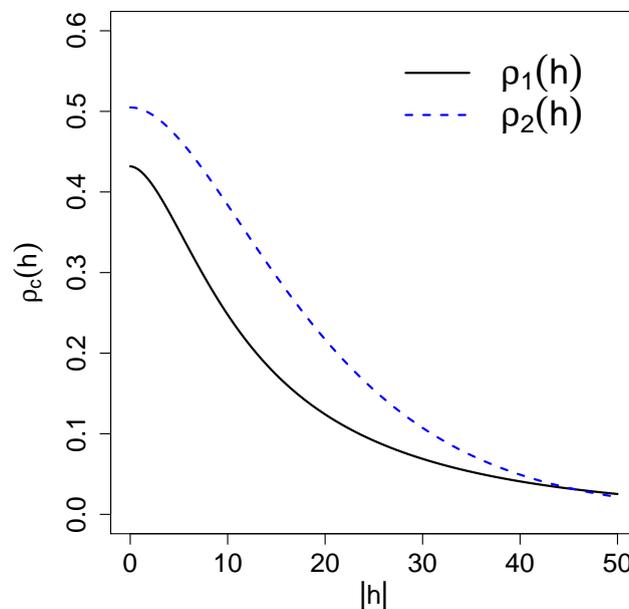


FIGURA 4.4: Coeficiente de concordancia global.

## 4.2. Indicadores de pobreza

### 4.2.1. Datos

Se condisera un conjunto de datos que consiste en dos mediciones de la pobreza por comunas, a lo largo de todo Chile. Se presenta una metodología antigua, dada por la estimación de Horvitz-Thompson (HT), y una metodología nueva, que considera la Estimación en Áreas Pequeñas (SAE). El conjunto de datos consiste en 334 mediciones, que corresponden a 334 comunas de Chile. Debido a la extensa región que compone el país, para el análisis espacial se utilizarán solo los datos de las 52 comunas de la región metropolitana de Chile.

### 4.2.2. Estimación Horvitz-Thompson

El estimador de Horvitz-Thompson es un método para estimar el total y la media de una población en una muestra estratificada. Sea una población finita  $U = \{1, \dots, N\}$ . Nuestra variable de interés  $y$  toma el valor  $y_k$ ,  $k \in U$ . Queremos estudiar una función de  $y_k$  dada por  $\theta = f(y_1, \dots, y_N)$ .

Una muestra aleatoria  $S$ , toma valor  $s \subset U$  con probabilidad  $p(s)$ . Se define además las variables indicadoras

$$I_k = \begin{cases} 1, & k \in S, \\ 0, & k \notin S. \end{cases}$$

La probabilidad de inclusión se define como  $\pi_k = \mathbb{E}[I_k] = \sum_{k \in s} p(s)$ .

Se quiere estimar el total población de la variable  $y$  dado por  $Y = \sum_{k \in U} y_k$  y la media poblacional de  $y$  dada por  $\mu = \sum_{k \in U} y_k / N$ .

El estimador de Horvitz-Thompson para el total de la población viene dado por

$$\hat{Y}_{HT} = \sum_{k \in S} \frac{y_k}{\pi_k}.$$

El estimador de Horvitz-Thompson para la media poblacional está dado por

$$\hat{\mu}_{HT} = N^{-1} \sum_{k \in S} \frac{y_k}{\pi_k}.$$

### 4.2.3. Estimación en Áreas Pequeñas (SAE)

La estimación de Áreas Pequeñas o SAE por su nombre en inglés (Small Area Estimation), son estimaciones que se realizan en una población en las cuales los métodos tradicionales de estimación, son inadecuados, ya que se obtienen grandes variabilidades. En el caso de la estimación SAE, permite mejorar la precisión en la estimación de pobreza en cada comuna del país, y se mejora la exactitud, es decir, la aproximación al valor real. La metodología usada por el Ministerio para la estimación de pobreza toma como modelo la desarrollada por el U.S. Census Bureau para estimar las cifras de pobreza, que sirven como base para la distribución de fondos públicos entre localidades. (Pratesi (2016)).

El método consiste en estimar la tasa de pobreza a nivel comunal ( $p_{sae}$ ) como un promedio ponderado entre la tasa de pobreza directa ( $p_{dir}$ ) y una tasa de pobreza sintética ( $p_{sin}$ ), dada por  $p_{sae} = (1 - B) \cdot p_{dir} + B \cdot p_{sin}$ , donde  $B = \frac{\text{Var}[p_{dir}]}{\text{Var}[p_{dir}] + \text{Var}[p_{sin}]}$ .

La tasa de pobreza directa ( $p_{dir}$ ) corresponde a las estimaciones de la incidencia de la pobreza a partir de los datos de la Encuesta Casen. La tasa de pobreza sintética ( $p_{sin}$ ) corresponde a una predicción lineal  $p_{sin} = \beta X$ . Donde  $X$  corresponde a información auxiliar proveniente de registros administrativos y datos censales asociados a cada comuna y los  $\beta$  se estiman a partir de un modelo de regresión lineal. Notamos que en esta estimación, existe una contribución de  $p_{dir}$ , que está relacionada con la precisión de dicha estimación ( $\text{Var}[p_{dir}]$ ).

### 4.2.4. Análisis Exploratorio de los Datos

El objetivo es medir la concordancia entre dichas metodologías, considerando los datos generados por dos procesos espaciales, entregándole una estructura espacial a los procesos. Podemos observar ambos datos, situados en un gráfico comparativo, sin considerar la componente espacial de los datos, como lo muestra la Figura 4.5. Se destaca una línea de 45 grados con respecto al origen, que indica concordancia perfecta.

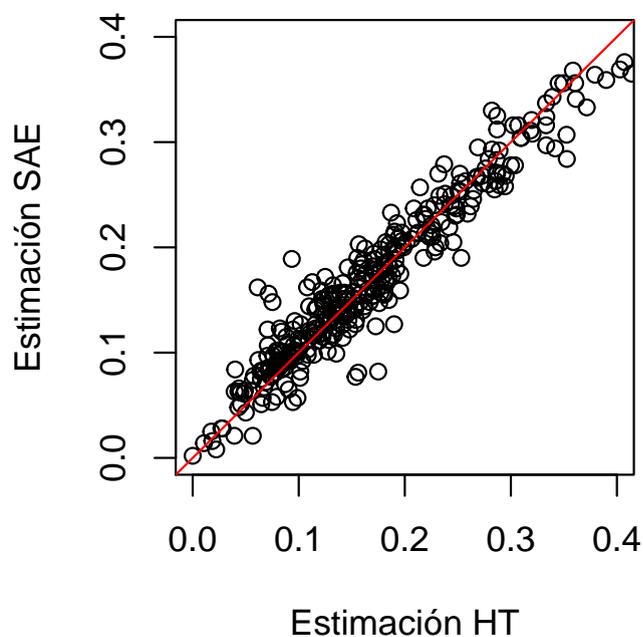


FIGURA 4.5: Concordancia entre estimación HT y estimación SAE.

Se puede observar que los datos se acercan a la línea de 45 grados desde el origen, por lo cual, en primera instancia, sin considerar una componente espacial de los datos, se puede apreciar una concordancia entre ambas metodologías. Para estos datos, se tiene un coeficiente de correlación de Pearson  $\rho = 0.9604$ . Por otro lado, utilizando la definición de concordancia dada en (1.5), tenemos que  $\rho_c = 0.9584$ .

El Cuadro 4.3 nos muestra un resumen de los datos.

Estimación HT					
Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
0.0000	0.1018	0.1559	0.1691	0.2246	0.4909
Estimación SAE					
Min.	1st Qu.	Median	Mean	3rd Qu.	Max.
0.0020	0.1122	0.1560	0.1702	0.2205	0.4450

CUADRO 4.3: Resumen de los datos de estimación HT y SAE.

En la Figura 4.6 podemos apreciar los histogramas para el total de comunas. Apreciamos que ambos histogramas siguen una estructura similar, observándose en la estimación HT una concentración un poco mayor entre los valores 0 y 0.2.

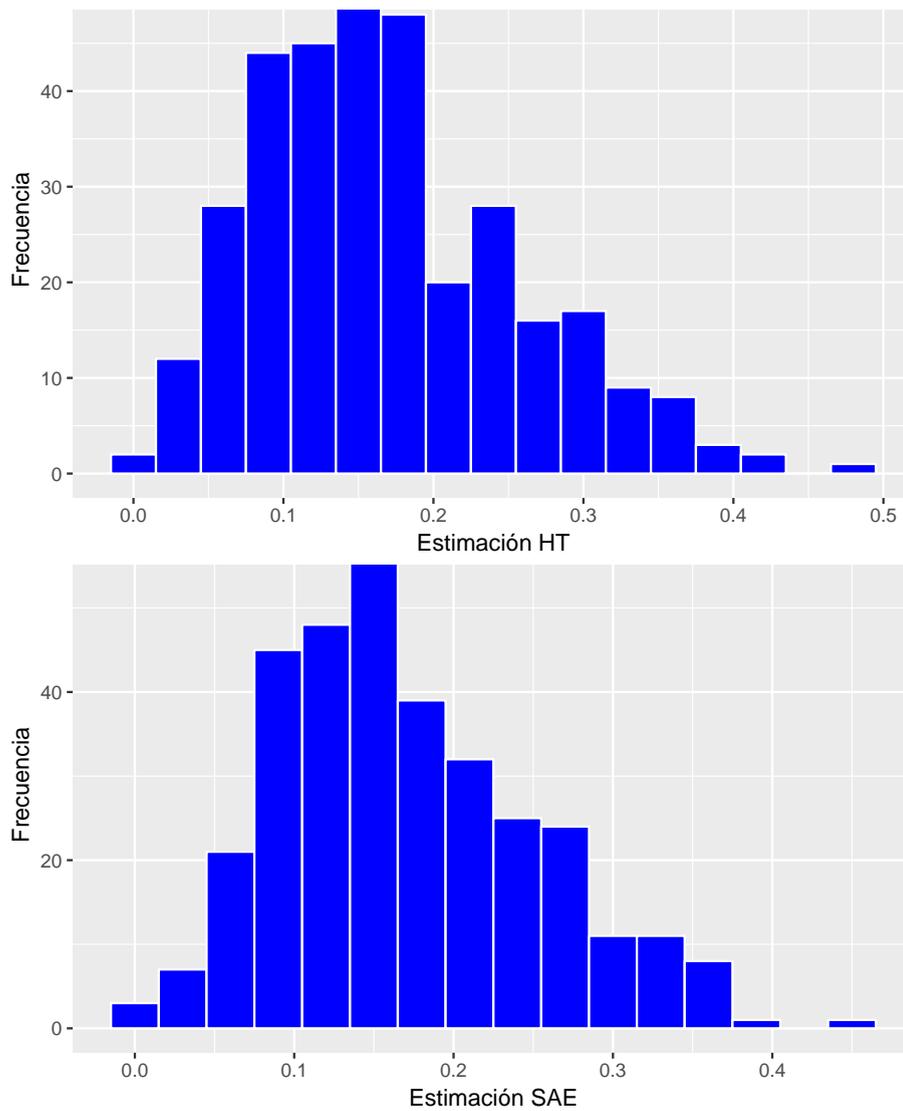


FIGURA 4.6: Histogramas de la estimación HT y la estimación SAE.

Además, la Figura 4.7 nos muestra un diagrama de *caja y bigote* de los datos.

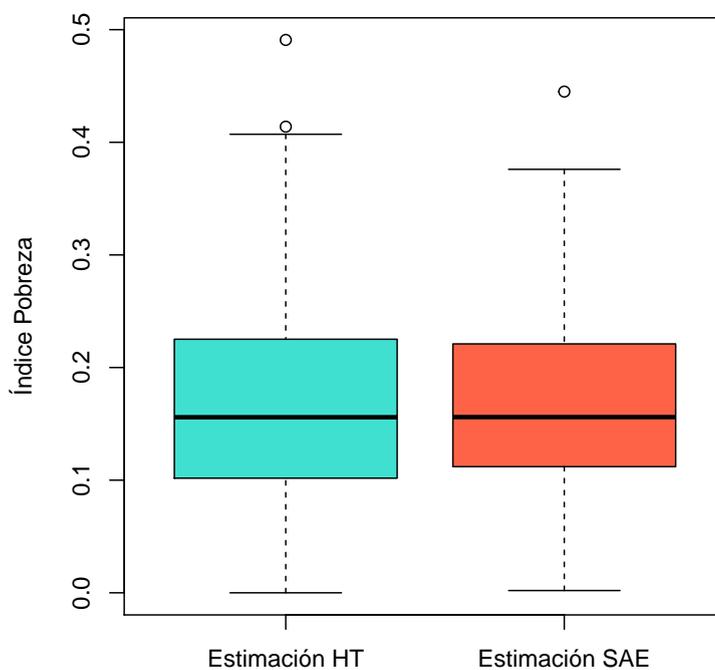


FIGURA 4.7: Boxplot para la estimación HT y la estimación SAE.

Podemos apreciar en la Figura 4.7, que para el índice utilizando la estimación SAE, se concentra más la información, pero ambas metodologías siguen una estructura similar.

### 4.2.5. Análisis Espacial

Se realiza análisis de los datos ajustando un modelo espacial. Para esto, nos restringimos a la región metropolitana, considerando las 52 comunas que la componen. Podemos observar los datos en la Figura 4.8 que muestra el índice de pobreza utilizando la metodología antigua (HT) y nueva (SAE), donde se observa un comportamiento similar entre ambas mediciones, con ligeras diferencias en los rangos de cada medición.

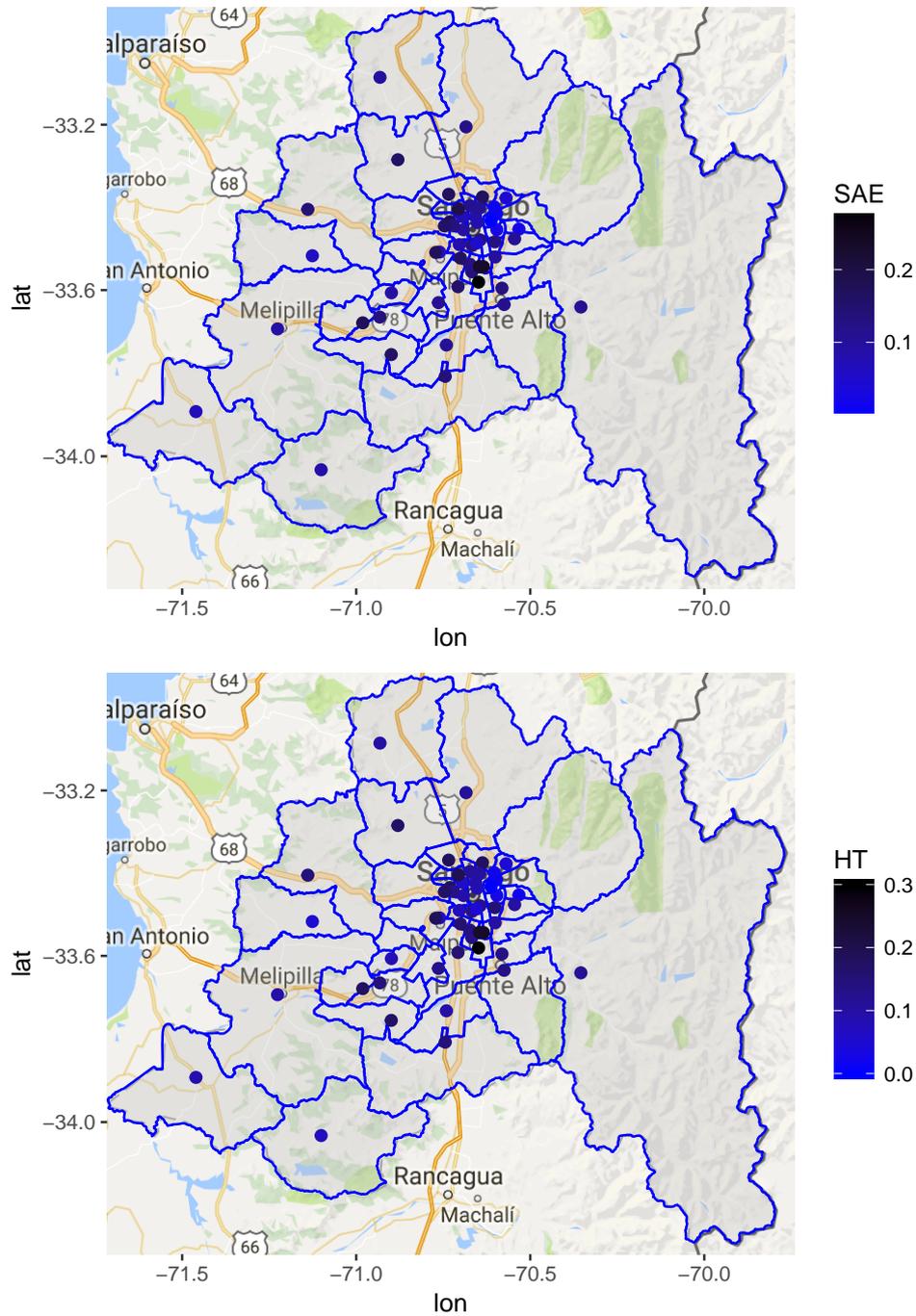


FIGURA 4.8: Índice pobreza estimación HT (arriba) y estimación SAE (abajo).

#### 4.2.6. Ajuste de Modelos

Se considera un campo aleatorio Gaussiano  $\mathbf{Z}(\mathbf{s}) = (Z_1(\mathbf{s}), Z_2(\mathbf{s}))^\top$ , con  $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^2$  y los subíndices corresponden a la estimación HT y SAE respectivamente.

En primera instancia, se asume un modelo Matérn bivariado donde el parámetro de suavizamiento entre las componentes, corresponde a  $\nu_{12} = (\nu_1 + \nu_2)/2$  y se fijan los parámetros de escala como  $a_1 = a_{12} = a_2 = a$ . Además, se considera un efecto de *nugget* para tomar en cuenta el error de medición. Así, el modelo está dado por

$$\begin{aligned} C_1(\mathbf{h}) &= \sigma_1^2 M(\mathbf{h}|\nu_1, a) + \tau_1^2 \cdot \mathbb{1}\{\mathbf{h} = \mathbf{0}\}, \\ C_2(\mathbf{h}) &= \sigma_2^2 M(\mathbf{h}|\nu_2, a) + \tau_2^2 \cdot \mathbb{1}\{\mathbf{h} = \mathbf{0}\}, \\ C_{12}(\mathbf{h}) &= C_{21}(\mathbf{h}) = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 M(\mathbf{h}|(\nu_1 + \nu_2)/2, a). \end{aligned}$$

Luego, se considera el modelo Matérn full bivariado, donde se consideran distintos parámetros de suavizamiento y escala. El modelo de covarianza bivariada está dada por

$$\begin{aligned} C_1(\mathbf{h}) &= \sigma_1^2 M(\mathbf{h}|\nu_1, a_1) + \tau_1^2 \cdot \mathbb{1}\{\mathbf{h} = \mathbf{0}\}, \\ C_2(\mathbf{h}) &= \sigma_2^2 M(\mathbf{h}|\nu_2, a_2) + \tau_2^2 \cdot \mathbb{1}\{\mathbf{h} = \mathbf{0}\}, \\ C_{12}(\mathbf{h}) &= C_{21}(\mathbf{h}) = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 M(\mathbf{h}|\nu_{12}, a_{12}). \end{aligned}$$

Finalmente, se considera un modelo de Wendland-Gneiting bivariado, fijando los parámetros  $k = 1$ ,  $\gamma = 0$  y  $\nu = 4$ , por lo tanto el modelo está dado por

$$\begin{aligned} C_1(\mathbf{h}) &= \sigma_1^2 (1 + (\nu + 1)\|\mathbf{h}\|/b_1)(1 - \|\mathbf{h}\|/b_1)_+^{\nu+1} + \tau_1^2 \cdot \mathbb{1}\{\mathbf{h} = \mathbf{0}\}, \\ C_2(\mathbf{h}) &= \sigma_2^2 (1 + (\nu + 1)\|\mathbf{h}\|/b_2)(1 - \|\mathbf{h}\|/b_2)_+^{\nu+1} + \tau_2^2 \cdot \mathbb{1}\{\mathbf{h} = \mathbf{0}\}, \\ C_{12}(\mathbf{h}) &= C_{21}(\mathbf{h}) = \rho_{12}\sigma_1\sigma_2 (1 + (\nu + 1)\|\mathbf{h}\|/b_{12})(1 - \|\mathbf{h}\|/b_{12})_+^{\nu+1}. \end{aligned}$$

Luego, se procede a hacer el ajuste de los 3 modelos, mediante la función *RFfit* del paquete *RandomFields* del software *R*, utilizando además la función *RFearth2dist* para transformar las coordenadas de longitud-latitud a distancias Euclidianas.

En el Cuadro 4.4 se muestran los parámetros obtenidos junto al error estándar de cada uno.

M-1	$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	$\rho_{12}$	$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_{12}$	$1/a$		
	0.00809 (0.00055)	0.00696 (0.00089)	0.98876 (0.00256)	0.11396 (0.02737)	0.12592 (0.02359)	0.11994 (0.00181)	370.2013 (34.41966)		
M-2	$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	$\rho_{12}$	$\nu_1$	$\nu_2$	$\nu_{12}$	$1/a_1$	$1/a_2$	$1/a_{12}$
	0.01297 (0.01729)	0.0097 (0.00435)	-0.00021 (Inf)	4.00 (13.9557)	0.1559 (0.05449)	3.74484 (Inf)	370.2013 (990.293)	370.2013 (521.394)	21.6852 (Inf)

CUADRO 4.4: Parámetros teóricos y estimados para los modelos Matérn.

Para el modelo Wendland-Gneiting, el Cuadro 4.5 muestra los parámetros obtenidos y los errores correspondientes.

$\sigma_1^2$	$\sigma_2^2$	$\rho_{12}$	$b_1$	$b_{12}$	$b_2$
0.00818 (0.00754)	0.00756 (0.00658)	$1.3366 \cdot 10^{-11}$ (1.26497)	368.6945 (300.4351)	331.4483 (0.05128)	33.24436 (215.7060)

CUADRO 4.5: Parámetros teóricos y estimados para el modelo Wendland-Gneiting.

Finalmente, se muestran los estimados para el efecto *nugget* de los tres modelos, en el cuadro 4.6

M-1	$\tau_1^2$	$\tau_2^2$
	0.000443 (0.004582)	0.00039 (0.00370)
M-2	$\tau_1^2$	$\tau_2^2$
	0.06270 (0.00620)	0.00039 (0.04739)
W-G	$\tau_1^2$	$\tau_2^2$
	0.06061 (0.00639)	0.05339 (0.00562)

CUADRO 4.6: Parámetros teóricos y estimados para el efecto *nugget*.

En los Cuadros anteriores observamos que para las estimaciones de las varianzas  $\sigma_1^2$  y  $\sigma_2^2$ , se obtienen valores similares en orden de magnitud para los 3 modelos ajustados. En los modelos con distinta escala (Matérn 2 y Wendland-Gneiting), se ajusta un valor muy cercano a 0 para  $\rho_{12}$  y además los valores de los errores estándar crecen considerablemente a diferencia del modelo con igual escala, donde los errores son

menores. Finalmente, para los valores del efecto *nugget*, observamos valores similares para los 3 modelos, con errores estándar pequeños.

Para la elección del modelo adecuado, consideramos el Criterio de Información de Akaike (AIC) ([Akaike \(1974\)](#)) dado por

$$\text{AIC} = -2\log(L) + 2k,$$

donde  $k$  es el número de parámetros del modelo y  $L$  corresponde al máximo valor de la verosimilitud.

El Cuadro 4.7 compara la cantidad de parámetros, log-verosimilitud y AIC para los 3 modelos.

Modelo	Parámetros	Log-verosimilitud	AIC
Matérn 1	9	251.6599	-485.3198
Matérn 2	11	145.2206	-268.4412
Wendland-Gneiting	8	141.2979	-266.5958

CUADRO 4.7: Comparación de modelos de covarianza ajustados mediante el índice AIC.

Así, considerando los valores del AIC, además de los errores estándar, se elige el primer modelo de Matérn, ya que cuenta con un valor menor de AIC y de errores estándar para los parámetros estimados. Luego, para este modelo se presenta en la Figura 4.9, el coeficiente de concordancia espacial para los datos. Se aprecia, en este caso, que el coeficiente de concordancia espacial y el de correlación cruzada son similares, lo cual es esperable, ya que los valores de las varianzas estimadas, son prácticamente iguales siendo diferenciados en el tercer decimal, por lo cual el coeficiente de concordancia actúa como corrección de la correlación cruzada, pero no es perceptible a simple vista, lo cual si se puede apreciar en la Figura 4.10.

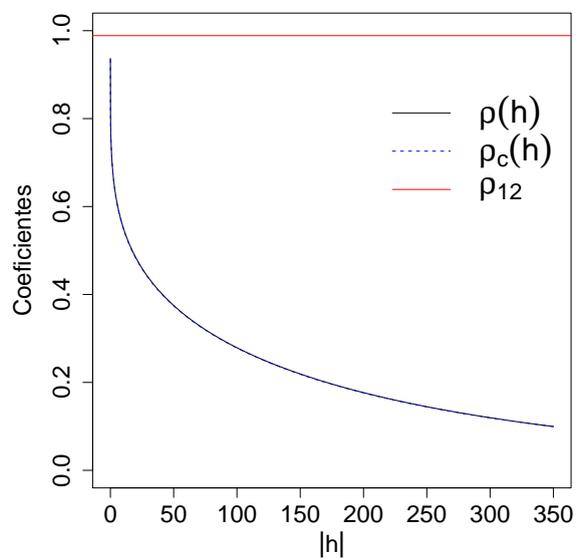


FIGURA 4.9: Coeficientes para el modelo de Matérn.

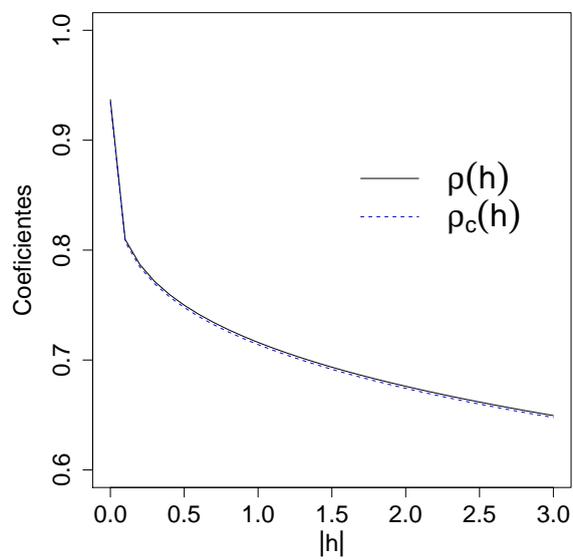


FIGURA 4.10: Coeficientes para el modelo de Matérn.

# Capítulo 5

## Conclusiones y Trabajos Futuros

En el presente trabajo se propuso un coeficiente de concordancia espacial  $\rho_c(\mathbf{h})$ , para procesos débilmente estacionarios, que depende de la distancia entre dos puntos en el espacio, es decir,  $\mathbf{h} = \|\mathbf{s}_1 - \mathbf{s}_2\| \in \mathbb{R}^2$ , y que decae a medida que aumenta dicha distancia. Así, siguiendo la idea propuesta por [Lin \(1989\)](#), el coeficiente de concordancia espacial se caracterizó como una constante multiplicada por la correlación cruzada entre dos procesos, por lo tanto si hay diferencia entre las varianzas y medias de los procesos, el coeficiente de concordancia espacial será menor al de correlación cruzada, ya que el factor de corrección se reduce a causa de la diferencia entre los parámetros asociados a cada proceso espacial.

El coeficiente de concordancia se puede caracterizar para procesos que cuentan con estructuras de covarianza bivariadas paramétricas, ya sean separables o no-separables. En particular, para las estructuras de covarianza bivariada de Matérn y de Wendland-Gneiting, se dió una caracterización para el coeficiente de concordancia espacial. Para los modelos de covarianza bivariada de Matérn Exponenciales que cuentan con el parámetro  $\nu_{12} = 1/2$ , utilizando el resultado de [Bevilacqua et al. \(2015\)](#) se probó la normalidad asintótica del coeficiente de concordancia, utilizando el método delta multivariado. Además, para el modelo de covarianza de Wendland-Gneiting presentado, se probó la normalidad asintótica para el estimador máximo verosímil, y luego se probó la normalidad asintótica del coeficiente de concordancia, nuevamente utilizando el método delta multivariado. Además, para ambos modelos se mostró como luce la varianza asintótica. Mediante corridas computacionales se pudo apreciar que el coeficiente de concordancia estimado  $\hat{\rho}_c(\mathbf{h})$ , mediante máxima verosimilitud, se comporta de buena forma con respecto al coeficiente de concordancia espacial teórico  $\rho_c(\mathbf{h})$ ,

donde se obtuvo un valor pequeño en los errores estándar para los parámetros, y de varianza para el coeficiente.

Se desea hacer una extensión del coeficiente de concordancia espacial para datos areales, específicamente para los modelos CAR bivariados estudiados por [Kim et al. \(2001\)](#). Consideramos un modelo que cuenta con dos conjuntos de datos extraídos de la misma región,  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2)$ , donde  $\mathbf{X}_1 = (X_{11}, \dots, X_{1n})^\top$  y  $\mathbf{X}_2 = (X_{21}, \dots, X_{2n})^\top$ . Sea  $\mathbf{C} = (\mathbf{C}_{ij})$  matriz de adyacencia de orden  $n \times n$ . Se tiene que  $\mathbf{C}_{ij} = 1$  si  $i$  y  $j$  comparten una región en común ( $i \sim j$ ), y  $\mathbf{C}_{ij} = 0$ , en otro caso ( $i \not\sim j$ ). Además,  $\mathbf{C}_{ii} = 0$ . Sea  $\mathbf{D}$  una matriz diagonal de orden  $n \times n$  definida por  $\mathbf{D} = \text{diag}(2d_1 + 1, \dots, 2d_n + 1)$ , con  $d_i = \sum_{j \sim i} \mathbf{C}_{ij}$ . [Kim et al. \(2001\)](#) define una función de densidad de probabilidad para  $X_{ki} | \mathbf{X}_{ki}$ , dada por

$$f(X_{ki} | \mathbf{X}_{ki}) = \left( \frac{2d_i + 1}{2\pi\delta_k} \right)^{1/2} \times \exp \left( -\frac{2d_i + 1}{2\delta_k} (X_{ki} - \mathbb{E}[X_{ki} | \mathbf{X}_{ki}])^2 \right), \quad (5.1)$$

con  $\delta_k > 0$ , y  $|\rho_i| < 1$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ . Además, [Kim et al. \(2001\)](#) presenta el siguiente teorema.

**Teorema 5.1.** *Dada la densidad condicional en (5.1), el vector  $\mathbf{X} = (\mathbf{X}_1^\top, \mathbf{X}_2^\top)^\top$  sigue una distribución normal multivariada con media  $\mathbf{0}$  y matriz de covarianza no singular  $\Sigma^{-1}$ , donde*

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta_1}(\mathbf{D} - \rho_1\mathbf{C}) & -\frac{1}{\sqrt{\delta_1\delta_2}}(\rho_0\mathbf{I} + \rho_3\mathbf{C}) \\ -\frac{1}{\sqrt{\delta_1\delta_2}}(\rho_0\mathbf{I} + \rho_3\mathbf{C}) & \frac{1}{\delta_2}(\mathbf{D} - \rho_2\mathbf{C}) \end{pmatrix},$$

con  $|\rho_i| < 1$ ,  $i = 0, 1, 2, 3$ .

Para denotar este modelo, escribiremos  $\mathbf{X} \sim 2fCAR(\rho_1, \rho_2, \rho_0, \rho_3, \delta_1, \delta_2)$ .

Presentamos 3 enfoques para la creación de un coeficiente de concordancia espacial para datos que siguen el modelo CAR bivariado. Para la construcción del coeficiente de concordancia espacial, consideramos los trabajos realizados por [King et al. \(2007\)](#) y [Hiriote y Chinchilli \(2011\)](#), los cuales hicieron una generalización de la concordancia de [Lin \(1989\)](#), para el caso de dos vectores, y se hace una generalización del coeficiente de [Lin \(1989\)](#), considerando los parámetros  $\rho_0$  y  $\rho_3$  del modelo.

Sea  $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})^\top$  un proceso CAR bivariado, con media  $\boldsymbol{\mu} = (\mu_x \mathbb{1}, \mu_y \mathbb{1})^\top$  y matriz de covarianza

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta_1}(\mathbf{D} - \rho_1 \mathbf{C}) & -\frac{1}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}}(\rho_0 \mathbf{I} + \rho_3 \mathbf{C}) \\ -\frac{1}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}}(\rho_0 \mathbf{I} + \rho_3 \mathbf{C}) & \frac{1}{\delta_2}(\mathbf{D} - \rho_2 \mathbf{C}) \end{pmatrix}^{-1}, \quad |\rho_i| < 1, \quad i = 1, 2, 3.$$

Notamos que los parámetros  $\rho_1$  y  $\rho_2$  entregan información acerca de la correlación de los procesos  $X_1$  y  $X_2$ , respectivamente, el parámetro  $\rho_3$  es el *nexo* entre ambos procesos, en distintos puntos, y el parámetro  $\rho_0$  es el *nexo* entre distintos procesos en la misma región.

Particionando la matriz  $\boldsymbol{\Sigma}^{-1} = \mathbf{B} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}$ , donde

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_{11} &= \frac{1}{\delta_1}(\mathbf{D} - \rho_1 \mathbf{C}), \\ \mathbf{A}_{12} &= -\frac{1}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}}(\rho_0 \mathbf{I} + \rho_3 \mathbf{C}), \\ \mathbf{A}_{22} &= \frac{1}{\delta_2}(\mathbf{D} - \rho_2 \mathbf{C}), \end{aligned}$$

podemos expresar su inversa como

$$\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{B}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}_{11} & \mathbf{A}_{12} \\ \mathbf{A}_{12} & \mathbf{A}_{22} \end{pmatrix}^{-1} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{C}_2^{-1} \\ -\mathbf{C}_2^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}_2^{-1} \end{pmatrix},$$

donde  $\mathbf{C}_1 = \mathbf{A}_{11} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{22}^{-1} \mathbf{A}_{12}$  y  $\mathbf{C}_2 = \mathbf{A}_{22} - \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12}$ .

Entonces, se tiene

$$\boldsymbol{\Sigma} = \begin{pmatrix} \mathbf{C}_1^{-1} & -\mathbf{A}_{11}^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{C}_2^{-1} \\ -\mathbf{C}_2^{-1} \mathbf{A}_{12} \mathbf{A}_{11}^{-1} & \mathbf{C}_2^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_X & \boldsymbol{\Sigma}_{XY} \\ \boldsymbol{\Sigma}_{YX} & \boldsymbol{\Sigma}_Y \end{pmatrix}.$$

El primer enfoque considera la definición dada por [King et al. \(2007\)](#), donde para  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  vectores aleatorios con medias  $\boldsymbol{\mu}_X$  y  $\boldsymbol{\mu}_Y$  respectivamente, y matriz de covarianza

$\Sigma$ , definen el coeficiente de concordancia entre  $\mathbf{X}$  e  $\mathbf{Y}$  como

$$\rho = 1 - \frac{\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^\top (\mathbf{X} - \mathbf{Y})]}{\mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^\top (\mathbf{X} - \mathbf{Y}) | \mathbf{X}, \mathbf{Y} \text{ indep.}]}, \quad (5.2)$$

$$= \frac{\text{tr}(\text{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) + \text{Cov}(\mathbf{Y}, \mathbf{X}))}{\text{tr}(\text{Var}(\mathbf{X}) + \text{Var}(\mathbf{Y})) + (\mathbb{E}(\mathbf{X}) - \mathbb{E}(\mathbf{Y}))^\top (\mathbb{E}(\mathbf{X}) - \mathbb{E}(\mathbf{Y}))}. \quad (5.3)$$

Entonces, se propone un coeficiente de concordancia para datos CAR bivariados de la forma

$$\rho_c = \frac{\text{tr}(\Sigma_{XY} + \Sigma_{YX})}{\text{tr}(\Sigma_X + \Sigma_Y) + (\boldsymbol{\mu}_X - \boldsymbol{\mu}_Y)^\top (\boldsymbol{\mu}_X - \boldsymbol{\mu}_Y)}$$

El segundo enfoque consiste en el trabajo de [Hiriote y Chinchilli \(2011\)](#), donde definen las siguientes matrices

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_D &= \mathbb{E}[(\mathbf{X} - \mathbf{Y})(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^\top] = \Sigma_X + \Sigma_Y - \Sigma_{XY} - \Sigma_{YX} + (\boldsymbol{\mu}_X - \boldsymbol{\mu}_Y)(\boldsymbol{\mu}_X - \boldsymbol{\mu}_Y)^\top, \\ \mathbf{V}_I &= \mathbb{E}_{\text{indep.}}[(\mathbf{X} - \mathbf{Y})(\mathbf{X} - \mathbf{Y})^\top] = \Sigma_X + \Sigma_Y + (\boldsymbol{\mu}_X - \boldsymbol{\mu}_Y)(\boldsymbol{\mu}_X - \boldsymbol{\mu}_Y)^\top. \end{aligned}$$

Luego, [Hiriote y Chinchilli \(2011\)](#) definen  $\mathbf{M} = \mathbf{V}_I^{-1/2}(\mathbf{V}_I - \mathbf{V}_D)\mathbf{V}_I^{-1/2} = \mathbf{I} - \mathbf{V}_I^{-1/2}\mathbf{V}_D\mathbf{V}_I^{-1/2}$ . Consideremos la norma de Frobenius  $g(\mathbf{A}) = \sqrt{\text{tr}(\mathbf{A}\mathbf{A})} = \sqrt{\sum_{i=1}^p \lambda_i^2}$ , donde  $\lambda_i$  son los valores propios de la matriz  $\mathbf{A}$ . Entonces [Hiriote y Chinchilli \(2011\)](#) definen el coeficiente de concordancia como

$$\rho = 1 - \frac{g(\mathbf{I} - \mathbf{M})}{g(\mathbf{I})} = 1 - \frac{g(\mathbf{V}_I^{-1/2}\mathbf{V}_D\mathbf{V}_I^{-1/2})}{g(\mathbf{I})}. \quad (5.4)$$

Para el tercer enfoque, hacemos una construcción basada en los parámetros  $\rho_0$  y  $\rho_3$  del modelo, siguiendo la idea de [Lin \(1989\)](#). Se considera un coeficiente de concordancia espacial para el modelo CAR bivariado dado por

$$\rho_c = \begin{cases} \rho_0 C_{ab}, & i = j, \\ \rho_3 C_{ab}, & i \neq j. \end{cases} \quad (5.5)$$

donde  $C_{ab} = ((a + 1/a + b^2)/2)^{-1}$ , con  $a = \left(\frac{\delta_1}{\delta_2}\right)^{1/2}$  y  $b = \frac{\mu_1 - \mu_2}{(\delta_1 \delta_2)^{1/4}}$ .

Con estos 3 enfoques se desea realizar un coeficiente que muestre la concordancia entre los datos, pero debido a la particular parametrización de los datos, que dependen de matrices fijas de vecinos,  $\mathbf{C}$  y  $\mathbf{D}$ , la extensión de los coeficientes dados no resulta tan natural. Logrando un coeficiente de concordancia espacial para datos areales, se

pueden analizar datos geográficos, como la aplicación presentada en el Capítulo 4 sobre índices de pobreza, que están distribuidos en las comunas de Chile, como así también otras aplicaciones de datos que dependan de las localidades cercanas.

Finalmente, se deja como trabajo futuro la posibilidad de caracterizar el coeficiente de concordancia espacial, para otros modelos de covarianza bivariada, no necesariamente paramétricos, y así analizar las propiedades del coeficiente de concordancia, y poder realizar más aplicaciones que necesiten de una herramienta para la comparación de mediciones o de instrumentos, que se aplican en la estadística espacial.

# Apéndice A

## Anexos

### A.1. Verosimilitud CAR bivariado

Consideramos un proceso CAR bivariado con media  $\boldsymbol{\mu} = \mathbf{0}$ , y matriz de covarianza

$$\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta_1}(\mathbf{D} - \rho_1\mathbf{C}) & -\frac{1}{\sqrt{\delta_1\delta_2}}(\rho_0\mathbf{I} + \rho_3\mathbf{C}) \\ -\frac{1}{\sqrt{\delta_1\delta_2}}(\rho_0\mathbf{I} + \rho_3\mathbf{C}) & \frac{1}{\delta_2}(\mathbf{D} - \rho_2\mathbf{C}) \end{pmatrix}^{-1},$$

donde  $\boldsymbol{\theta} = (\delta_1, \delta_2, \rho_0, \rho_1, \rho_2, \rho_3)^\top$ . Luego la log-verosimilitud está dada por

$$l(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{n}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \log |\boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})| - \frac{1}{2} \mathbf{Y}^\top \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{Y}.$$

Luego, notamos que la derivada de  $l(\boldsymbol{\theta})$  con respecto a la componente  $i$ -ésimo de  $\boldsymbol{\theta}$ ,  $\theta_i$ , está dada por

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = -\frac{1}{2} \text{tr} \left( \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \right) + \frac{1}{2} \text{tr} \left( \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \boldsymbol{\Sigma}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \boldsymbol{\Sigma}^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \mathbf{Y} \mathbf{Y}^\top \right).$$

Definiendo

$$\mathbf{B}(\boldsymbol{\theta}) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\delta_1}(\mathbf{D} - \rho_1\mathbf{C}) & -\frac{1}{\sqrt{\delta_1\delta_2}}(\rho_0\mathbf{I} + \rho_3\mathbf{C}) \\ -\frac{1}{\sqrt{\delta_1\delta_2}}(\rho_0\mathbf{I} + \rho_3\mathbf{C}) & \frac{1}{\delta_2}(\mathbf{D} - \rho_2\mathbf{C}) \end{pmatrix}.$$

Luego  $\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\theta}) \frac{\partial \Sigma(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \Sigma^{-1}(\boldsymbol{\theta}) = \frac{\partial \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i}$ . Así

$$\frac{\partial l(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} = -\frac{1}{2} \text{tr} \left( \frac{\partial \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \Sigma(\boldsymbol{\theta}) \right) + \frac{1}{2} \text{tr} \left( \frac{\partial \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_i} \mathbf{Y} \mathbf{Y}^\top \right).$$

Entonces

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\delta_1} \cdot \frac{1}{\delta_1} (\mathbf{D} - \rho_1 \mathbf{C}) & -\frac{1}{2\delta_1} \cdot -\frac{1}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}} (\rho_0 \mathbf{I} + \rho_3 \mathbf{C}) \\ -\frac{1}{2\delta_1} \cdot -\frac{1}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}} (\rho_0 \mathbf{I} + \rho_3 \mathbf{C}) & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\frac{1}{2\delta_2} \cdot -\frac{1}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}} (\rho_0 \mathbf{I} + \rho_3 \mathbf{C}) \\ -\frac{1}{2\delta_2} \cdot -\frac{1}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}} (\rho_0 \mathbf{I} + \rho_3 \mathbf{C}) & -\frac{1}{\delta_2} \cdot \frac{1}{\delta_2} (\mathbf{D} - \rho_2 \mathbf{C}) \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \rho_0} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\frac{1}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}} \mathbf{I} \\ -\frac{1}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}} \mathbf{I} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \rho_1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\delta_1} \mathbf{C} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \rho_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\frac{1}{\delta_2} \mathbf{C} \end{pmatrix},$$

$$\frac{\partial \mathbf{B}(\boldsymbol{\theta})}{\partial \rho_3} = \begin{pmatrix} \mathbf{0} & -\frac{1}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}} \mathbf{C} \\ -\frac{1}{\sqrt{\delta_1 \delta_2}} \mathbf{C} & \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

## A.2. Tablas de Datos

### Estimaciones de pobreza en las comunas de Santiago

COMUNA	X	Y	ESTIMACION	CASEN
COLINA	-33.2052165	-70.6844476	0.109963902	0.121
LAMPA	-33.2848575	-70.8803547	0.169567827	0.161
TIL TIL	-33.0851726	-70.9317116	0.09836478	0.1
PUENTE ALTO	-33.5952823	-70.5812046	0.136358066	0.131
PIRQUE	-33.6347712	-70.574976	0.13315071	0.117
SAN JOSE DE MAIPO	-33.6408077	-70.3545362	0.119070383	0.111
SAN BERNARDO	-33.5918081	-70.707546	0.156670971	0.155
BUIN	-33.732325	-70.7408834	0.095286642	0.107
CALERA DE TANGO	-33.6301918	-70.7637134	0.128456244	0.112
PAINE	-33.8077984	-70.7441737	0.145810611	0.137
MELIPILLA	-33.6935685	-71.226005	0.092021841	0.092
ALHUE	-34.0323106	-71.1007691	0.071834508	0.086
CURACAVI	-33.4049851	-71.1390254	0.147021284	0.138
MARIA PINTO	-33.5170454	-71.1259952	0.04838849	0.061
SAN PEDRO	-33.892608	-71.460418	0.087193116	0.07
SANTIAGO	-33.4369307	-70.6524331	0.073542503	0.078
CERRILLOS	-33.4902358	-70.7038796	0.073639916	0.085
CERRO NAVIA	-33.4349558	-70.7310245	0.180850908	0.182
CONCHALI	-33.3961834	-70.673182	0.113639642	0.116
EL BOSQUE	-33.5557585	-70.6679457	0.132456458	0.138
ESTACION CENTRAL	-33.4542512	-70.6918596	0.091818123	0.096
HUECHURABA	-33.3749448	-70.6371811	0.177851635	0.169
INDEPENDENCIA	-33.4223422	-70.6568629	0.086919206	0.086
LA CISTERNA	-33.5378288	-70.6731941	0.135216966	0.123
LA FLORIDA	-33.520073	-70.600686	0.097919164	0.097
LA GRANJA	-33.5436697	-70.6346497	0.259186862	0.232
LA PINTANA	-33.5808373	-70.648393	0.300060583	0.278
LA REINA	-33.4528302	-70.5324784	0.017523477	0.025
LAS CONDES	-33.4160714	-70.5969594	0.010668048	0.014
LO BARNECHEA	-33.3774234	-70.5693678	0.042981788	0.048
LO ESPEJO	-33.5227613	-70.7004869	0.156687457	0.165
LO PRADO	-33.4436384	-70.7208293	0.130302515	0.131
MACUL	-33.483436	-70.6015366	0.154036978	0.131
MAIPU	-33.5082408	-70.7604124	0.056326475	0.064
ÑUÑO A	-33.4541438	-70.595844	0.027103203	0.028
PEDRO AGUIRRE CERDA	-33.4922063	-70.6670205	0.128397151	0.128
PEÑALOEN	-33.4762344	-70.5448815	0.10085225	0.107
PROVIDENCIA	-33.4323548	-70.6124356	0	0.002
PUDAHUEL	-33.4450748	-70.7464244	0.170370744	0.161
QUILICURA	-33.3684807	-70.7342955	0.181868264	0.168
QUINTA NORMAL	-33.4226272	-70.6955835	0.064343496	0.075
RECOLETA	-33.4018985	-70.6455177	0.100902041	0.109
RENCA	-33.404508	-70.7063552	0.191202804	0.188
SAN JOAQUIN	-33.4788993	-70.6440031	0.134824257	0.131
SAN MIGUEL	-33.4864442	-70.6534486	0.045463774	0.051
SAN RAMON	-33.5431426	-70.6459526	0.247469422	0.23
VITACURA	-33.3986471	-70.6036054	0.018509182	0.016
TALAGANTE	-33.6651366	-70.9322401	0.146820155	0.131
EL MONTE	-33.6789567	-70.9812173	0.177243895	0.177
ISLA DE MAIPO	-33.7553965	-70.8993777	0.170765737	0.159
PADRE HURTADO	-33.5091473	-70.7712958	0.184896214	0.171
PEÑAFLOR	-33.606494	-70.898852	0.080274236	0.093

# Bibliografía

- Acosta, J. y Vallejos, R., 2017. Effective sample size for spatial regression models. *Submitted*.
- Akaike, H., 1974. A new look at the statistical model identification. *IEEE transactions on automatic control*, 19(6):716–723.
- Askey, R., 1973. Radial characteristics functions. Informe técnico, Wisconsin Univ Madison Mathematics Research center.
- Barnhart, H. X., Haber, M. y Song, J., 2002. Overall concordance correlation coefficient for evaluating agreement among multiple observers. *Biometrics*, 58(4):1020–1027.
- Barnhart, H. X., Haber, M. J. y Lin, L. I., 2007. An overview on assessing agreement with continuous measurements. *Journal of biopharmaceutical statistics*, 17(4):529–569.
- Besag, J., 1974. Spatial interaction and the statistical analysis of lattice systems. *J. Roy. Statist. Soc. Ser. B*, 36:192–236.
- Besag, J., York, J. y Mollié, A., 1991. Bayesian image restoration, with two applications in spatial statistics. *Ann. Inst. Statist. Math.*, 43(1):1–59.
- Bevilacqua, M., Faouzi, T., Furrer, R. y Porcu, E., 2016. Estimation and prediction using generalized wendland covariance functions under fixed domain asymptotics. *arXiv preprint arXiv:1607.06921*.
- Bevilacqua, M., Vallejos, R. y Velandia, D., 2015. Assessing the significance of the correlation between the components of a bivariate Gaussian random field. *Environmetrics*, 26(8):545–556.

- Daley, D. J., Porcu, E. y Bevilacqua, M., 2015. Classes of compactly supported covariance functions for multivariate random fields. *Stochastic environmental research and risk assessment*, 29(4):1249–1263.
- Gelfand, A. E. y Vounatsou, P., 2003. Proper multivariate conditional autoregressive models for spatial data analysis. *Biostatistics*, 4(1):11–15.
- Genton, M. G. y Kleiber, W., 2015. Cross-covariance functions for multivariate geostatistics. *Statist. Sci.*, 30(2):147–163.
- Gneiting, T., 2002a. Compactly supported correlation functions. *Journal of Multivariate Analysis*, 83(2):493–508.
- Gneiting, T., 2002b. Nonseparable, stationary covariance functions for space-time data. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 97(458):590–600.
- Gneiting, T., Kleiber, W. y Schlather, M., 2010. Matérn cross-covariance functions for multivariate random fields. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 105(491):1167–1177.
- Hiriote, S. y Chinchilli, V. M., 2011. Matrix-based concordance correlation coefficient for repeated measures. *Biometrics*, 67(3):1007–1016.
- Jin, X., Carlin, B. P. y Banerjee, S., 2005. Generalized hierarchical multivariate CAR models for areal data. *Biometrics*, 61(4):950–961.
- Kim, H., Sun, D. y Tsutakawa, R. K., 2001. A bivariate Bayes method for improving the estimates of mortality rates with a twofold conditional autoregressive model. *J. Amer. Statist. Assoc.*, 96(456):1506–1521.
- King, T. S., Chinchilli, V. M. y Carrasco, J. L., 2007. A repeated measures concordance correlation coefficient. *Statistics in medicine*, 26(16):3095–3113.
- Lin, L., 1989. A concordance correlation coefficient to evaluate reproducibility. *Biometrics*, 255–268.
- Mardia, K. V. y Marshall, R. J., 1984. Maximum likelihood estimation of models for residual covariance in spatial regression. *Biometrika*, 71(1):135–146.
- Matheron, G., 1962. *Traité de géostatistique appliquée. 1*, tomo 1. Editions Technip.
- Myers, D. E., 1991. Pseudo-cross variograms, positive-definiteness, and cokriging. *Math. Geol.*, 23(6):805–816.

- Papritz, A., Künsch, H. R. y Webster, R., 1993. On the pseudo cross-variogram. *Math. Geol.*, 25(8):1015–1026.
- Pratesi, M., 2016. *Analysis of poverty data by small area estimation*. John Wiley & Sons.
- Schlather, M., Malinowski, A., Menck, P. J., Oesting, M., Storkorb, K. et al., 2015. Analysis, simulation and prediction of multivariate random fields with package randomfields. *Journal of Statistical Software*, 63(8):1–25.
- Sonnentag, O., Hufkens, K., Teshera-Sterne, C., Young, A. M., Friedl, M., Braswell, B. H., Milliman, T., O’Keefe, J. y Richardson, A. D., 2012. Digital repeat photography for phenological research in forest ecosystems. *Agricultural and Forest Meteorology*, 152:159–177.
- Sun, D., Tsutakawa, R. y Speckman, P., 1999. Bayesian inference for car (1) models with noninformative priors. *Biometrika*, 86:341–350.
- Sun, D., Tsutakawa, R. K., Kim, H., He, Z. et al., 2000. Spatio-temporal interaction with disease mapping. *Statistics in Medicine*, 19(15):2015–2035.
- Waller, L. A., Carlin, B. P., Xia, H. y Gelfand, A. E., 1997. Hierarchical spatio-temporal mapping of disease rates. *Journal of the American Statistical association*, 92(438):607–617.
- Wendland, H., 1995. Piecewise polynomial, positive definite and compactly supported radial functions of minimal degree. *Adv. Comput. Math.*, 4(4):389–396.
- Zastavnyi, V. P. y Trigub, R. M., 2002. Positive-definite splines of special form. *Sbornik: Mathematics*, 193(12):1771.
- Zastavnyi, V. P., 2006. On some properties of the Buhmann functions. *Ukrain. Mat. Zh.*, 58(8):1045–1067.