

2020-12

FLUJO DEL GRUPO DE RENORMALIZACIÓN FUNCIONAL EN GRAVITACIÓN MASIVA

BINDER, MAXIMILIANO

<https://hdl.handle.net/11673/49879>

Repositorio Digital USM, UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARIA

DOCTORAL THESIS

**Flujo del Grupo de Renormalización
Funcional en Gravitación Masiva**

Author:
Maximiliano Binder

Supervisor:
Dr. Iván Schmidt

Tesis para optar al grado de Doctorado en Física

·
·
Facultad de Física

December 15, 2020

Contents

1	Introducción	1
1.1	Introducción	1
1.2	Programa	3
2	Asymptotic Safety	5
2.1	Weinberg Asymptotic Safety	5
2.2	Effective Average Action (EAA) y Ecuaciones del Grupo de Renormalización Funcional (FRGE)	6
2.2.1	Ecuación de Wetterich	7
3	Gravitación Masiva	9
3.1	Acción de Fierz-Pauli	9
3.2	Truco de Stuckelberg	10
3.3	Gravitación	12
3.3.1	Soluciones Esféricas	12
3.3.2	Relatividad General Masiva	13
3.3.3	GR como una Teoría de Campos Efectiva	14
3.4	Λ_3	14
3.4.1	Ghost y Screening Mechanism	15
3.4.2	Effective Theory Λ_5	16
3.4.3	Λ_3	16
4	FRG of MG	19
4.1	Gravitón masivo en EH	20
4.1.1	Lado Izquierdo : $\partial_t \Gamma_k$	21
4.1.2	$\Gamma^{(2)}$	22
4.1.3	$\Gamma^{(2)} + R_k$	23
4.1.4	$(\Gamma^{(2)} + R_k)^{-1} \partial_t R_k$	23
4.1.5	$Tr[W(-D^2)]$	23
4.2	Ecuaciones de Evolución y Diagramas de Flujo	29
4.2.1	Critical Exponents	31
4.3	Proper Vertices	31
4.3.1	Lado Izquierdo	34
4.3.2	Lado Derecho	34
4.3.3	$Tr[G_k \Gamma^{(3)} G_k \Gamma^{(3)} G_k]$	35
4.3.4	$Tr[G_k \Gamma^{(4)} G_k]$	35
4.3.5	Ecuaciones de Evolución	36
4.3.6	Puntos Fijos y Exponentes Críticos	41
5	Análisis y Conclusiones	43

A	EAA for Gravity	45
A.1	EAA para gravedad	45
B	Contribución de los Fadeev-Poppov ghost	51
C	Casos Especiales	53
C.1	Caso especial: optimized cutoff, $d=4$	53
C.2	Expansion en torno a R	53

Chapter 1

Introducción

1.1 Introducción

La teoría de la relatividad general es si duda una de las teorías más completas jamás construidas [1]. Logró con gran acierto explicar fenómenos que la teoría de la Gravitación de Newton, formulada alrededor de doscientos años antes, no podía explicar, como por ejemplo la precesión perihelio de mercurio. Además como consecuencia predijo fenómenos no observados antes, como la desviación de la luz por un objeto masivo, las ondas gravitacionales y la velocidad de propagación de la gravedad. Todo esto formulado desde un punto de vista geométrico y en el límite de bajas energías.

Sin embargo, al evolucionar los experimentos salieron a la luz nuevos hechos que esta teoría no puede explicar, como la expansión acelerada del universo y la velocidad de rotación de las galaxias. Todos estos fenómenos cosmológicos han intentado ser explicados por diversas modificaciones de la teoría de la relatividad formulada por Einstein.

Por otra parte, no existe una teoría cuántica de la gravedad. Si bien se puede construir desde el punto de vista de teoría cuántica de campos una teoría que cumpla con ser siempre atractiva y de largo alcance, teniendo como partícula mediadora al gravitón, de spin dos y masa nula, esta presenta divergencias en el sector UV [2]. Por este motivo, la relatividad general se puede considerar como una teoría efectiva con una escala de corte en la escala de Planck [3].

Estos dos puntos son el eje central de esta tesis. Por un lado, Massive Graviy es una modificación en el sector infrarrojo de la teoría e intenta explicar fenómenos macroscópicos, mientras que Asymptotic Safety, o la renormalización funcional, intentan explicar el sector UV o de distancias cortas.

Las teorías en las cuales se considera el gravitón como una partícula masiva han tenido cierto resurgimiento en el último tiempo debido a que algunos problemas de esta teoría han encontrado solución. Este es el caso de la discontinuidad $vDVZ$, la cual nos dice que las cantidades físicas no coinciden para los casos $m = 0$ y $m \rightarrow 0$. Con el truco de Stuckelberg se pudo dar solución y retomar el estudio de teorías de Massive Gravity, siempre considerando esta teoría como una teoría efectiva.

El caso de Asymptotic Safety tiene su origen en la vereda opuesta [4-6], es decir, en poder completar el rango UV de la teoría de la Relatividad General. Esta idea fue propuesta primero por Weinberg y considera que la Gravitación podría ser

renormalizable en un contexto no perturbativo y de esta manera ser una teoría fundamental bien definida en todo el espectro de energía. Esto podría ser conseguido a partir de dos requerimientos. Uno, que el número de constantes de acoplamiento "esenciales" (o sea, aquellas que no pueden ser expresadas en función de otras constantes) sea finito. Y dos, que las funciones beta para las constantes de acoplamiento dependientes de la escala se anulen en el límite de altas energías, es decir, que exista un punto fijo para las constantes de acoplamiento.

La idea de la "Effective Average Action" (EAA) y su ecuación de evolución (FRGE por Functional Renormalization Group Equations) propuesta por Wetterich [18] tiene como raíz el problema de la Block Spin action de Wilson y Kadanoff. Ya que al intentar explicar el comportamiento en distancias cortas (o altas energías) de una acción efectiva para bajas energías que explica algún modelo físico, se pierden simetrías macroscópicas como rotación y traslación. Gracias a las FRGE, la teoría podría completarse el sector UV a partir de la teoría efectiva conocida para bajas energías.

A fines de la década de los noventa Reuter implementaría este método para el caso de la relatividad general [5], específicamente para un lagrangiano de Einstein Hilbert con constante cosmológica. Este fue el primer avance exitoso en complementar matemáticamente la idea propuesta por Weinberg y a la fecha se ha implementado para diversas extensiones de teorías de gravitación [8-11] como torsión, R^2 , etc.... En todos estos trabajos, se demuestra el buen comportamiento de la Gravedad como una teoría "asimptotically safe".

Ahora bien, volviendo al tema de Massive Gravity, la versión más simple de una teoría de gravitación masiva viene dada por la acción de Fierz Pauli más un término de masa [15]. Esta teoría posee dos inconvenientes: la ruptura de la simetría bajo difeomorfismos y la discontinuidad vDVZ. El primero aparece como consecuencia de la inclusión del término de masa y el segundo, como dijimos, está relacionado con la discontinuidad que se produce al considerar las cantidades físicas medibles (como el ángulo de deflexión de la luz por un objeto masivo o el potencial de Newton) al considerar la teoría con $m = 0$ y tomar el límite $m \rightarrow 0$ [16].

Ambos problemas pudieron ser explicados por el mecanismo de Stuckelberg [12], el cual reincorpora la simetría bajo difeomorfismos y además deja en evidencia que al hacer la descomposición, el campo escalar se acopla a la traza del tensor de energía momentum, cosa que no sucede en QED si consideramos un fotón masivo ¹.

Si consideramos la teoría completa, es decir, con el escalar de curvatura R en lugar de sólo los términos lineales, existe un límite hasta el cual podemos considerar en la expansión, de manera que el escalar de la expansión produce una fuerza repulsiva que podría explicar la expansión acelerada del universo. Esta teoría, llamada Λ_3 , cumple con los requisitos de ser una teoría efectiva de massive gravity, por lo que el método de Renormalización Funcional puede darnos indicios de la física más allá de la escala de corte UV.

Esta es la gran motivación para realizar este trabajo: combinar una teoría efectiva de gravitación que podría explicar fenómenos macroscópicos que la teoría de

¹En la referencia [15] se encuentra explicado de manera muy pedagógica el mecanismo de Stuckelberg, discontinuidad vDVZ y la mayoría de los elementos de Massive Gravity utilizados en este trabajo

Einstein no predice, con el método de renormalización funcional, el cual nos puede indicar el buen comportamiento de esta teoría en la escala UV y así determinar si esta teoría cumple con ser "asymptotically safe" o no.

1.2 Programa

La estructura de este trabajo es:

En el capítulo siguiente veremos la construcción de la "Effective Average Action" (EAA) y su ecuación de evolución (FRGE por sus siglas en inglés, Functional Renormalization Group Equation), conocida también como "Wetterich equation".

Luego veremos con más detalle las motivaciones expresadas brevemente en esta introducción. En la primera sección veremos la parte de massive gravity, su construcción, discontinuidad vDVZ y el mecanismo de Stuckelberg además de una mención a la teoría no lineal Λ_3 . Si bien en este trabajo aun no la hemos utilizado es el foco a futuro y este trabajo sirve como un comienzo en esa dirección.

El capítulo cuatro constituye la parte principal de este trabajo. En la primera sección vemos la aplicación de la renormalización funcional para un lagrangiano de Einstein Hilbert con constante cosmológica más un término de masa. En esta parte el término de masa es un parámetro no dependiente de la escala de energía por motivos que detallaremos. Sin embargo, al ajustar este parametro se obtienen resultados que se ajustan a las medias experimentales como lo es la cota de la masa del gravitón en caso de ser distinta de cero [14].

En la sección siguiente utilizamos el método de los "Proper Vertex Expansion" sobre la ecuación de evolución [19], el cual nos permite tratar el término de masa como un parámetro dependiente de la escala de energía. Se obtienen las funciones beta y el punto fijo para esta teoría, sin embargo el valor de los "critical exponents" deja en evidencia algunas falencias de este método.

Finalmente un capítulo de conclusiones y análisis de nuestros resultados y trabajos futuros a considerar.

Chapter 2

Asymptotic Safety

Como dijimos en la introducción, la teoría de la relatividad general formulada por Einstein no es renormalizable en el contexto de la teoría cuántica de campos . Esta presenta divergencias en el límite UV.

De todos modos se puede considerar como una teoría efectiva hasta la escala de planck $\sim M_p$. La masa de Planck está relacionada con la cte. de gravitación mediante $G \sim \frac{1}{M_p^2}$.

Cuando renormalizamos la cte. de acoplamiento la hacemos dependiente de la escala $G \rightarrow G_k$. Usualmente esta dependencia va a depender de los "loops" en los diagramas de Feynman . En este punto diverge y es por esto que decimos que es no renormalizable [13].

Sin embargo, los resultados al aplicar las ecuaciones del grupo de renormalización funcional no muestran este comportamiento.

2.1 Weinberg Asymptotic Safety

Si bien ha sido generalizado e implementado en diversas teorías, la idea de Asymptotic Safety propuesta por Weinberg tiene su origen en intentar explicar la no-renormalizabilidad de la gravitación como una teoría cuántica de campos. La idea principal tiene que ver con el valor de las constantes de acoplamiento en cierta escala de energía μ .

Si consideramos las constantes renormalizadas $g_i(\mu)$, con dimensión de masa d_i y μ la escala de energía, las constantes adimensionales van a estar definidas por

$$\bar{g}_i(\mu) = \mu^{-d_i} g_i(\mu) \quad (2.1)$$

Cualquier reacción R, con dimensión de masa D, para una cantidad física medible va a tener la forma

$$R = \mu^D f\left(\frac{E}{\mu}, X, \bar{g}(\mu)\right) \quad (2.2)$$

donde X son variables físicas adimensionales y E es alguna energía característica del proceso.

Si la constante de acoplamiento tiene un comportamiento $\bar{g}_i(\mu) \rightarrow \infty$ para el límite $\mu \rightarrow \infty$, es de esperar que la cantidad R también diverja, aunque puede no ser el caso .

Sin embargo, se puede asegurar el "buen comportamiento" de R si, por el contrario, se cumple que en el límite $\mu \rightarrow \infty$ las constantes de acoplamiento adimensionales converjan a un punto fijo $\bar{g}_i(\mu) \rightarrow \bar{g}_i^*$. Esta es la primera condición para asegurar que una teoría cumpla con ser "asymptotically safe".

La información respecto al comportamiento de las constantes de acoplamiento según la escala de energía viene determinada por las funciones beta $\beta_i = \partial_k \bar{g}_i$. Entonces, esta primera condición se puede escribir como

$$\beta_i(\bar{g}^*) = 0 \quad (2.3)$$

De esta manera, la teoría va a estar bien definida en todo el rango de energía y pasa a ser una teoría "fundamental" (en lugar de una teoría "efectiva" válida hasta una cierta energía de corte).

La segunda condición, es que el número de constantes esenciales sea finito. Por constantes esenciales nos referimos a las constantes que no pueden ser redefinidas en términos de las otras constantes de la teoría (éstas últimas llamadas constantes "redundantes").

Con estas dos simples condiciones se podría asegurar el buen comportamiento de la teoría en todo el espectro de energía y la ausencia de divergencias en las constantes físicas medibles.

Se puede profundizar mucho en este tema respecto a su aspecto formal [5-7], en cuanto a que la hipersuperficie en la cual viven estas constantes debe ser finita y que estas constantes fluyen a un punto fijo en esta hipersuperficie, sin embargo, para la parte práctica de este estudio nos basta con tener en cuenta esas dos condiciones.

El método de renormalización funcional, propuesto inicialmente por Wetterich [18] e implementado luego por Reuter [5] para el caso de gravitación, ha demostrado que para diversas teorías de gravitación se cumplen las condiciones antes mencionadas, por lo que ésta cumpliría con ser "Asymptotically Safe" [8-11].

A continuación revisaremos las bases de este método para una teoría escalar, y luego realizamos la implementación para el caso de Einstein Hilbert con un término de masa

2.2 Effective Average Action (EAA) y Ecuaciones del Grupo de Renormalización Funcional (FRGE)

Comenzamos por la función de partición

$$Z[j] = \int D\phi e^{-S[\phi] + \int dx j\phi} \quad (2.4)$$

El primer truco es agregarle un término (llamado "cutoff action") del tipo

$$\Delta_k S[\phi] = \int d^d x \phi R_k \phi \quad (2.5)$$

a la acción original $S[\phi] \rightarrow S[\phi] + \Delta_k S[\phi]$.

La idea de este término es que sólo contribuye en el límite UV. Para esto, el "cutoff operator" R_k cumple con discriminar entre los momentos de altas y bajas energías ($p^2 \gg k^2$ y $p^2 \ll k^2$, respectivamente). Este va a depender de la forma de los campos ϕ , pero tiene una estructura de la forma $Z_k k^2 R_k^0(-D^2/k^2)$. El primer factor Z_k corresponde a una constante de acoplamiento dependiente de la escala k y $R_k^0(-D^2/k^2)$ se conoce como "cutoff function". Esta función contiene la información de la forma del cutoff. Es arbitraria salvo que debe cumplir con $R_k^0(0) = 1$ y $R_k^0(\infty) = 0$. Esta última condición se puede fortalecer imponiendo que en el límite de k yendo a cero se cumpla $\lim_{k \rightarrow 0} R_k^0 = 0$.

Ahora, tenemos una función de partición modificada donde hemos incluido la "cutoff action" y las constantes de acoplamiento son ahora dependientes de la escala

$$Z_k[j] = \int D\phi \exp^{-S - \Delta_k S + \int dx j\phi} \quad (2.6)$$

De esta manera, podemos construir la funcional generatriz de la manera usual

$$W_k[j] = \log Z_k[j] \quad (2.7)$$

cuya transformada de Legendre nos da la acción efectiva

$$\tilde{\Gamma}[\phi] = -W_k[j] + \int dx j\phi \quad (2.8)$$

Finalmente, sustraemos el término de cutoff y obtenemos la "Effective Average Action" (EAA)

$$\Gamma_k[\phi] = \tilde{\Gamma}_k[\phi] - \Delta_k S[\phi] \quad (2.9)$$

De esta manera, la EAA cumple con las siguientes propiedades que nos permiten considerarla válida

- $\lim_{k \rightarrow 0} \Gamma_k[\phi] = \Gamma[\phi]$
- $\lim_{k \rightarrow \infty} \Gamma_k[\phi] = S[\phi]$

Estas dos propiedades nos indican que la EAA está definida en todo el espectro de energía de manera continua. Además, se puede demostrar que los valores de expectación para operadores $\langle O \rangle$ son iguales si se calculan a partir de Z o Z_k debido al comportamiento impuesto para el cutoff R_k .

2.2.1 Ecuación de Wetterich

La parte fundamental es determinar cómo evolucionan las constantes de acoplamiento al depender de la escala de energía k . Para esto, primero definimos la derivada logarítmica con respecto a la escala de energía $\partial_t = \partial/\partial \ln k$. Entonces, si derivamos el funcional generatriz se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \Gamma_k &= \frac{\partial}{\partial t} (\tilde{\Gamma}_k[\phi] - \Delta_k S[\phi]) \\ &= -\frac{\partial}{\partial t} W_k - \text{Tr}\{\varphi\varphi\} \partial_t R_k \\ &= \text{Tr}\{\langle \phi\phi \rangle\} \partial_t R_k - \text{Tr}\{\varphi\varphi\} \partial_t R_k \end{aligned} \quad (2.10)$$

Donde la traza es una integral en el espacio y una suma sobre los campos.

Ahora, considerando $\langle \phi \rangle = \varphi$, utilizamos la relación

$$\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J \delta J} = \langle \phi \phi \rangle - \langle \phi \rangle \langle \phi \rangle \quad (2.11)$$

y obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ \frac{\delta^2 W[J]}{\delta J \delta J} \partial_t R_k \right\} \quad (2.12)$$

Finalmente, reemplazamos en la traza utilizando la relacion

$$\frac{\delta^2 W[J]}{\delta J \delta J} = \left(\frac{\delta^2 \tilde{\Gamma}_k[\phi]}{\delta \phi \delta \phi} \right)^{-1} = (\tilde{\Gamma}_k^{(2)})^{-1} \quad (2.13)$$

y obtenemos

$$\frac{\partial}{\partial t} \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ (\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1} \partial_t R_k \right\} \quad (2.14)$$

Esta ecuación es conocida como "Wetterich equation" y es la principal herramienta que utilizaremos para demostrar si alguna teoría cumple con el requisito de ser "asymptotically safe" a partir del comportamiento de las "running couplings" en función de la escala de energía. Si bien esta ecuación se ve bastante abstracta, ya que muestra el flujo de la EAA en el espacio de teorías, existen diversas maneras de extraer valiosa información respecto a las funciones beta de las constantes de acoplamiento, las cuales representan cantidades físicas reales.

La implementación se ha estudiado para diversos casos como ya mencionamos pero sólo veremos en detalle el caso de la gravitación ya que es el tema fundamental de esta tesis. Para otros ejemplos como campos escalares, teorías no abelianas, torsión, etc... existen numerosos artículos y publicaciones al respecto.

Además, y como veremos más adelante, se puede utilizar la derivada funcional de esta ecuación, la cual da como resultado otra ecuación de flujo cuyos resultados son consistentes con la ec. anterior.

Si llamamos al propagador modificado $G_k = [\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1}$ y $\Gamma_k^{(n)}$ es la derivada funcional n-sima $\frac{\delta^n}{\delta \phi \delta \phi \dots} \Gamma_k$ con respecto a φ , a primer y segundo orden tendremos

$$\partial_t \Gamma_k^{(1)} = \text{Tr} \left\{ G_k \Gamma_k^{(3)} G_k \partial_t R_k \right\} \quad (2.15)$$

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k^{(2)} &= \text{Tr} \left\{ G_k \Gamma_k^{(3)} G_k \Gamma_k^{(3)} G_k \partial_t R_k \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ G_k \Gamma_k^{(4)} G_k \partial_t R_k \right\} \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como veremos en detalle en el capítulo 4, el segundo resultado es importante para nuestro trabajo ya que nos permite definir la masa del gravitón como un parámetro dependiente de la escala y calcular la función beta de esta. De este modo se puede calcular el punto fijo no gaussiano de la teoría y los exponentes críticos de este sistema.

Chapter 3

Gravitación Masiva

Historicamente, la Relatividad General formulada por Einstein tuvo su origen en fundamentos geométricos para describir el comportamiento de la radiación y los objetos materiales en el espacio al ser afectados por un objeto masivo. Si comenzamos por la acción de Einstein Hilbert y redefinimos la métrica como fluctuaciones alrededor de la métrica de Minkowski $\eta_{\mu\nu}$, es decir, $g_{\mu\nu} \rightarrow \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ a segundo orden, se obtiene la acción de Fierz Pauli para una partícula de Spin 2 y sin masa.

3.1 Acción de Fierz-Pauli

$$S_{EH}(g \rightarrow \eta + h) \rightarrow S_{FP} \quad (3.1)$$

$$\int d^D x \sqrt{g \rightarrow \eta + h} (-R) \rightarrow \int d^D x -\frac{1}{2} \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\nu\lambda} \partial^\nu h^{\mu\lambda} + \frac{1}{2} \partial_\lambda h \partial^\lambda h$$

Que cumple con la simetría de gauge:

$$\delta h_{\mu\nu} = \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu \quad (3.2)$$

Sin embargo, la acción de Fierz-Pauli fue construida originalmente como la acción que representa una partícula con las características descritas en el párrafo anterior pero incluía un término de masa. O sea, en un espacio plano,

$$S_{FP} = \int d^D x -\frac{1}{2} \partial_\lambda h_{\mu\nu} \partial^\lambda h^{\mu\nu} + \partial_\mu h_{\nu\lambda} \partial^\nu h^{\mu\lambda} + \frac{1}{2} \partial_\lambda h \partial^\lambda h \quad (3.3)$$

$$-\frac{1}{2} m^2 (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2)$$

A partir de la ecuación de movimiento para h se puede llegar a

$$\begin{aligned} (\square - m^2) h_{\mu\nu} &= 0 \\ \partial^\mu h_{\mu\nu} &= 0 \\ h &= 0 \end{aligned} \quad (3.4)$$

y así identificar los cinco grados de libertad que corresponden a una partícula de spin 2 con masa m .

Ahora, si queremos obtener cantidades físicas a partir de esta acción, existe una inconsistencia entre considerar $m = 0$ en el lagrangiano y considerar $m \rightarrow 0$ en la cantidad en cuestión.

Por ejemplo, se puede obtener el potencial de interacción entre dos fuentes con masa M_1 y M_2 para los casos sin y con masa. Para el primero se obtiene

$$V_{(m=0)} = -\frac{GM_1M_2}{r} \quad (3.5)$$

Mientras que para el segundo

$$V_{(m)} = -\frac{4}{3}\frac{GM_1M_2}{r}e^{-mr} \quad (3.6)$$

por lo que aparece una discontinuidad en el límite $m \rightarrow 0$

Si consideramos redefinir la constante $G \rightarrow \frac{3}{4}G$ para hacer coincidir estas cantidades, aparece una diferencia al considerar la deflexión de la luz por un objeto masivo de masa M . En ambos casos el valor para el ángulo de deflexión α resulta

$$\alpha = \frac{4GM}{b} \quad (3.7)$$

con b el parámetro de impacto. Si redefinimos G esta cantidad se transforma en

$$\alpha = \frac{3GM}{b} \quad (3.8)$$

por lo que la discontinuidad persiste.

Además, si consideramos el caso de los propagadores para, $m = 0$ se obtiene

$$D_{\alpha\beta,\sigma\lambda} = \frac{-i}{p^2} \left[\frac{1}{2}(\eta_{\alpha\sigma}\eta_{\beta\lambda} + \eta_{\alpha\lambda}\eta_{\beta\sigma}) - \eta_{\alpha\beta}\eta_{\sigma\lambda} \right] \quad (3.9)$$

mientras que para el caso masivo tenemos

$$D_{\alpha\beta,\sigma\lambda} = \frac{-i}{p^2 + m^2} \left[\frac{1}{2}(\eta_{\alpha\sigma}\eta_{\beta\lambda} + \eta_{\alpha\lambda}\eta_{\beta\sigma}) - \frac{2}{3}\eta_{\alpha\beta}\eta_{\sigma\lambda} \right] \quad (3.10)$$

Esta discontinuidad en el límite de la masa $m \rightarrow 0$ y considerar la masa idénticamente cero $m = 0$ es la discontinuidad vDVZ y es uno de los principales inconvenientes que presentó esta teoría ya que se espera que las cantidades físicas medibles sean continuas en sus parámetros, cosa que no ocurre en este caso.

Este problema aparece debido a que la teoría masiva tiene cinco grados de libertad, mientras que la teoría sin masa propaga sólo dos. Como veremos a continuación, el mecanismo de Stuckelberg muestra las causas de estas diferencias de manera explícita, además de permitirnos restaurar la simetría que se rompe al incluir un término de masa.

3.2 Truco de Stuckelberg

Por simplicidad, podemos comenzar suponiendo una teoría vectorial para un fotón masivo acoplado a una corriente J^μ

$$S = \int d^Dx -\frac{1}{4}F_{\mu\nu}F^{\mu\nu} - \frac{1}{2}m^2A_\mu A^\mu + A_\mu J^\mu \quad (3.11)$$

En $D = 4$ hay tres grados de libertad para spin 1. El termino de masa rompe la "would be gauge invariance" $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$.

Acá el propagador va como $\frac{-i}{p^2+m^2}(\eta_{\mu\nu} + \frac{p_\mu p_\nu}{m^2})$ que es como $1/m^2$.

El truco de Stuckelberg redefine el campo original A_μ al introducir un nuevo campo escalar ϕ con

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \frac{\phi}{m} \quad (3.12)$$

y así para la acción obtenemos

$$S = \int d^D x - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} m^2 A_\mu A^\mu - m A_\mu \partial^\mu \phi - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + A_\mu J^\mu - \frac{1}{m} \phi \partial_\mu J^\mu \quad (3.13)$$

Las simetrías de gauge quedan $\delta A_\mu = \partial_\mu \Lambda$, $\delta \phi = -m\Lambda$,

En este caso, podemos tomar directamente el límite $m \rightarrow 0$ en el lagrangiano y al considerar la corriente conservada $\partial_\mu J^\mu \rightarrow 0$ obtenemos un fotón acoplado a la corriente J^μ y un escalar libre

$$S = \int d^D x - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi + A_\mu J^\mu \quad (3.14)$$

Esta acción propaga los mismos tres grados de libertad que la acción original, por lo que no se pierde información al considerar el límite de la masa yendo a cero.

Se puede tomar un gauge tipo Lorenz para obtener los propagadores $\frac{-i\eta_{\mu\nu}}{p^2+m^2}$ y $\frac{-i}{p^2+m^2}$ que para momentos grandes van como $1/p^2$, que es lo que debiera esperarse.

El Truco de Stuckelberg deja en evidencia que la simetría de gauge puede restaurarse utilizando variables redundantes, por lo que no tiene directa relación con las cantidades físicas a considerar sino que la parte esencial es no perder grados de libertad en el cálculo de dichas cantidades.

En el caso de Electromagnetismo no existe diferencia dado que es una teoría abeliana. Sin embargo para el caso de la gravedad si realizamos el mismo procedimiento comenzando por la acción de Fierz-Pauli más un termino de masa acoplado a un tensor de energía momentum $T^{\mu\nu}$, el mecanismo es un poco más extenso ya que primero se realiza una transformación para el tensor $h_{\mu\nu}$

$$h_{\mu\nu} \rightarrow h_{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu \quad (3.15)$$

y luego otra para el vector A_μ

$$A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \phi \quad (3.16)$$

y luego de tomar el límite $m \rightarrow 0$ más algunas transformaciones similares al caso anterior, se obtiene

$$S = \int d^D x \mathcal{L}_{m=0}(h) - \frac{1}{2} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} - 2 \frac{D-1}{D-2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$$

$$+\kappa h'_{\mu\nu} T^{\mu\nu} + \frac{2}{D-2} \kappa \phi T \quad (3.17)$$

Acá estan los cinco grados de libertad, dos en el "canonical massless graviton" $h_{\mu\nu}$, dos en el vector A_μ y uno en el escalar ϕ .

Esta última ecuación refleja explícitamente el por qué de la discontinuidad vDVZ. El campo escalar en este caso se acopla a la traza del tensor de energía momentum $T = T^\mu_\mu$, así que al hacer perder ese grado libertad haciendo la masa igual a cero en el lagrangiano, estamos despreciando esa parte de la interacción.

En el caso de la deflección de la luz, la traza del tensor de energía momentum es cero, por lo que el resultado es el mismo al considerar la masa igual a cero en el lagrangiano o en el ángulo de deflección.

Hasta acá hemos expuesto sólo el caso para la teoría lineal. Para el caso no lineal el procedimiento es análogo salvo algunas particularidades. En este caso aparecen interacciones y efectos que veremos a continuación

3.3 Gravitación

Comenzamos por la acción de Einstein Hilbert

$$S[g] = 2\kappa^2 Z_{Nk} \int d^d x \sqrt{g} (-R + 2\Lambda) \quad (3.18)$$

3.3.1 Soluciones Esféricas

Para un background plano ($\Lambda = 0$) la ecuación de movimiento resulta $R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 0$ y se supone una métrica esféricamente simétrica según el ansatz

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -B(r) dt^2 + C(r) [dr^2 + r^2 d\Omega^2] \quad (3.19)$$

Se puede demostrar que, para una masa puntual M en el origen, los términos de la expresión anterior toman la forma

$$\begin{aligned} B(r) - 1 &= -\frac{2GM}{r} \left(1 - \frac{GM}{r} + \dots \right) \\ C(r) - 1 &= \frac{2GM}{r} \left(1 + \frac{3GM}{4r} + \dots \right) \end{aligned} \quad (3.20)$$

Estas son una expansión en r_s/r donde

$$r_s = 2GM \sim \frac{M}{M_p^2} \quad (3.21)$$

corresponde al radio de Schwarzschild, el cual representa la distancia en la que son importantes los términos no lineales. A todo orden, se encuentra la solución de Schwarzschild en el gauge de Lorenz

$$\begin{aligned}
B(r) &= \frac{\left(1 - \frac{2r}{GM}\right)^2}{\left(1 + \frac{2r}{GM}\right)^2} \\
C(r) &= \left(1 + \frac{GM}{2r}\right)^4
\end{aligned} \tag{3.22}$$

En el caso de incluir un término de masa en el lagrangiano el resultado nuevamente no coincide en el límite de $m = 0$

3.3.2 Relatividad General Masiva

La acción va a ser la extensión más simple de Einstein Hilbert, que es incluir un término de masa tipo Fierz-Pauli con lo que queda

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1}{2\kappa^2} \int d^d x \left[\sqrt{\bar{g}}(-R) \right. \\
&\quad \left. - \sqrt{\bar{g}} \frac{1}{2} m^2 (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) \right]
\end{aligned} \tag{3.23}$$

donde los índices de $h^{\mu\nu}$ suben y bajan con la métrica del background \bar{g} . La ecuación de movimiento en este caso resulta

$$\sqrt{\bar{g}}(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2}R\bar{g}^{\mu\nu}) + \sqrt{\bar{g}} \frac{1}{2} m^2 (h^{\mu\nu} - \bar{g}^{\mu\nu} h) = 0 \tag{3.24}$$

Siguiendo el mismo análisis que para el caso anterior, se tiene en un background plano $\bar{g}_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -dt^2 + dr^2 + r^2 d\Omega^2$ y suponemos un ansatz para la métrica absoluta

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu = -B(r) dt^2 + C(r) dr^2 + A(r) r^2 d\Omega^2 \tag{3.25}$$

En este caso no se puede hacer $C(r) = A(r)$ ya que no hay invarianza bajo difeomorfismos. Igual que antes se expande cada término y se obtienen las series

$$\begin{aligned}
B(r) - 1 &= -\frac{8}{3} \frac{GM}{r} \left(1 - \frac{1}{6} \frac{GM}{m^4 r^5} + \dots\right) \\
C(r) - 1 &= -\frac{8}{3} \frac{GM}{m^2 r^3} \left(1 - 14 \frac{GM}{m^4 r^5} + \dots\right) \\
A(r) - 1 &= \frac{4}{3} \frac{GM}{4\pi m^2 r^3} \left(1 - 4 \frac{GM}{m^4 r^5} + \dots\right)
\end{aligned} \tag{3.26}$$

En este caso la expansión no es en torno a r_S si no que en torno al parámetro r_V/r , donde

$$r_V \equiv \left(\frac{GM}{m^4}\right)^{1/5} \tag{3.27}$$

corresponde al Radio de Vainshtein. Este radio diverge para $m \rightarrow 0$ por lo que no dice nada respecto al comportamiento no lineal de la teoría de massive gravity en el límite sin masa.

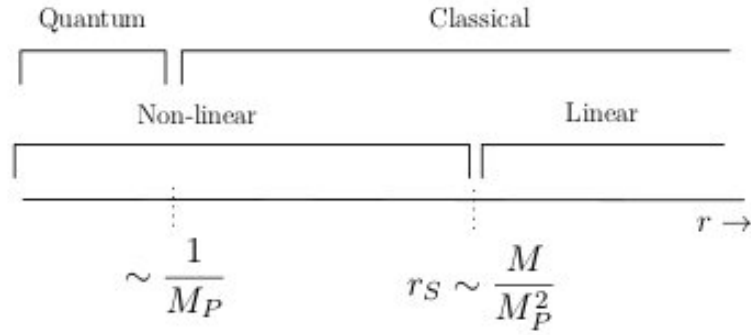


FIGURE 3.1: En la figura se ven los regímenes donde son validas las soluciones a una distancia r de una fuente de masa M en el origen [15]

Para poder estudiar más en detalle el comportamiento del caso masivo como una teoría efectiva se debe realizar el mecanismo de Stuckelberg para el caso no lineal.

3.3.3 GR como una Teoría de Campos Efectiva

Einstein Gravity en $D = 4$ no es renormalizable. Los coupling tienen dimensión de masa negativos. Sin embargo, puede ser tratada como una teoría efectiva hasta la escala de la masa de Planck M_p . Por análisis dimensional, la amplitud de scattering de $2 \rightarrow 2$ gravitones a una energía E tiene una amplitud que va como $\frac{E^2}{M_p^2}$ que viola unitariedad a una energía $E \sim M_p$.

En la figura (3.1) se ve que existen tres regímenes para las soluciones, uno donde las soluciones son lineales y clásicas, otro donde son no lineales y cuánticas, y el tercero que es un régimen intermedio donde el comportamiento es clásico y no lineal.

Para el caso de Massive Gravity se verá que los límites donde comienzan los términos no lineales y los efectos cuánticos no son independientes entre sí, como sucede en el caso usual.

3.4 Λ_3

Como se puede observar, construir una teoría de "Massive Gravity", no es trivial. A continuación haremos mención a algunos puntos importantes.

Al incluir un término de masa en el lagrangiano de EH se rompe la invariancia bajo difeomorfismo, la cual debemos restaurar utilizando el mecanismo de Stuckelberg. En este caso la transformación va a ser del tipo

$$H_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu A_\nu + \partial_\nu A_\mu + 2\partial_\mu \partial_\nu \phi + \partial_\mu A^\alpha \partial_\nu A_\alpha + \partial_\mu A^\alpha \partial_\nu \partial_\alpha \phi + \partial_\mu \partial^\alpha \phi \partial_\nu A_\alpha + \dots \quad (3.28)$$

por lo que aparecen muchos términos de interacción. A nivel lineal se reproducen los resultados para Fierz-Pauli siempre y cuando se normalicen los campos según

$$\hat{h} = \frac{1}{2} M_p h \quad , \quad \hat{A} = \frac{1}{2} m M_p A \quad , \quad \hat{\phi} = \frac{1}{2} m^2 M_p \phi \quad (3.29)$$

Entonces, los términos que aparezcan a partir del término de masa van a ser de la forma

$$\sim m^2 M_p h^{n_h} (\partial A)^{n_A} (\partial^2 \phi)^{n_\phi} \quad (3.30)$$

que en función de los campos normalizados resultan

$$\sim \Lambda_\lambda^{4-n_h-2n_A-3n_\phi} \hat{h}^{n_h} (\partial \hat{A})^{n_A} (\partial^2 \hat{\phi})^{n_\phi} \quad (3.31)$$

con

$$\Lambda_\lambda = (M_p m^{\lambda-1})^{1/\lambda}, \quad \lambda = \frac{n_h + 2n_A + 3n_\phi - 4}{n_h + n_A + n_\phi - 2} \quad (3.32)$$

Este valor Λ nos da la escala de corte hasta el cual los términos son significativos.

El término suprimido por la menor escala es el con un término escalar cúbico $n_\phi = 3, n_h = n_A = 0$. que es suprimido por la escala Λ_5 en el límite

$$m \rightarrow 0, \quad M_p \rightarrow \infty, \quad \Lambda_5 \text{ fijo} \quad (3.33)$$

Todos los términos van a cero excepto el escalar cúbico, la parte escalar de la acción va a ser

$$S_\phi = \int d^4x - 3(\partial \hat{\phi})^2 + \frac{2}{\Lambda_5^5} [(\partial^2 \hat{\phi})^3 - (\partial^2 \hat{\phi})(\partial_{\mu\nu} \hat{\phi})^2] + \frac{1}{M_p} \hat{\phi} T \quad (3.34)$$

El escalar se acopla a la traza T del tensor de energía momentum $T^{\mu\nu}$ y para una fuente puntual de masa M , a orden lineal se tiene

$$\hat{\phi} \sim \frac{M}{M_p} \frac{1}{r} \quad (3.35)$$

El término no lineal se suprime con respecto al término lineal por el factor

$$\frac{\partial^4 \hat{\phi}}{\Lambda_5^5} \sim \frac{M}{M_p} \frac{1}{\Lambda_5^5 r^5} \quad (3.36)$$

Cuando este factor es de orden uno, las no linealidades se hacen importantes y eso determina el radio de Vainshtein

$$1 \sim \frac{M}{M_p} \frac{1}{\Lambda_5^5 r_V^5} \implies r_V^5 \sim \left(\frac{M}{M_p} \right)^{1/5} \frac{1}{\Lambda_5} \sim \left(\frac{GM}{m^4} \right)^{1/5} \quad (3.37)$$

Entonces, cuando $r < r_V$ las no linealidades comienzan a ser importantes.

3.4.1 Ghost y Screening Mechanism

Al descomponer el escalar longitudinal $\hat{\phi} = \phi - \Psi$ se encuentra que el campo Ψ corresponde a un ghost (conocido como Boulware-Deser ghost) que tiene validez en el rango

$$r_{ghost} \sim \left(\frac{M}{M_p} \right)^{1/3} \frac{1}{\Lambda_5} \gg r_V \quad (3.38)$$

Para $r \ll r_V$ la fuerza tipo coulomb atractiva del escalar ϕ se cancela con la repulsiva del ghost Ψ

Para $r \gg r_V$, el campo ϕ se comporta como $1/r$ mientras que el ghost en esta región va como $\sim \left(\frac{M}{M_p}\right)^2 \frac{1}{\Lambda_5^{5/2} r^6}$ por lo que su contribución es despreciable con respecto a la contribución de ϕ .

Este efecto se conoce como "Vainshtein Screening Mechanism".

3.4.2 Effective Theory Λ_5

En este caso el radio en el cual los efectos cuánticos son relevantes viene dado por

$$r_Q \sim \left(\frac{M}{M_p}\right)^{1/3} \frac{1}{\Lambda_5} \quad (3.39)$$

Lo relevante en este caso es que $r_Q > r_V$, por lo que no hay un regimen intermedio con un comportamiento clásico y no lineal. Además, al fijar valores para el sistema solar $\Lambda_5^{-1} \sim 10^{11} km$ se obtiene $r_Q \sim 10^{24} km$ que es del orden del radio del universo, por lo que esta teoría no predice las observaciones en su rango de validez.

3.4.3 Λ_3

Para el caso de Λ_3 el análisis es similar al caso anterior pero se incluyen más terminos de interacción en el término de masa, de esta manera se eleva el cutoff de Λ_5 a Λ_3 . Para esto, en lugar de utilizar sólo el término cuadrático de masa, como se ha hecho hasta ahora, se incluyen términos de orden superior definiendo la acción como

$$S = \frac{1}{2\kappa^2} \int d^4x \left[\sqrt{g} R - \sqrt{g} \frac{1}{4} m^2 V(g, h) \right] \quad (3.40)$$

con

$$V(g, h) = V_1(g, h) + V_2(g, h) + V_3(g, h) + V_4(g, h) + V_5(g, h) + \dots \quad (3.41)$$

y

$$\begin{aligned} V_1(g, h) &= \langle h^2 \rangle - \langle h \rangle^2 \\ V_2(g, h) &= c_1 \langle h^3 \rangle + c_2 \langle h^2 \rangle \langle h \rangle + c_3 \langle h \rangle^3 \\ &\vdots \end{aligned} \quad (3.42)$$

En este caso, luego de realizar el mecanismo de Stuckelberg los términos de interacción de menor escala son

$$\sim \frac{\hat{h}(\partial\hat{\phi})^n}{M_p^{n+1} m^{2n+2}}, \quad \sim \frac{(\partial\hat{A})^2(\partial\hat{\phi})^n}{M_p^{n+2} m^{2n+4}} \quad (3.43)$$

que se suprimen por la escala $\Lambda_3 = (M_p m^2)^{1/3}$.

En este caso no hay ghosts y al realizar el mismo análisis que para el caso anterior se encuentran valores mucho más acordes con las observaciones. Además existe un régimen donde son importante las contribuciones no lineales y aún no son importantes los efectos cuánticos, como se ve en la figura (3.1). Ahora el “Decoupling limit” es

$$m \rightarrow 0, \quad M_p \rightarrow \infty, \quad \Lambda_3 \text{ fijo} \quad (3.44)$$

Acá el radio de Vainshtein viene dado por

$$r = r_V^{(3)} \sim \left(\frac{M}{M_p} \right)^{1/3} \frac{1}{\Lambda_3} \sim \left(\frac{GM}{m^2} \right)^{1/3} \quad (3.45)$$

que marca dónde comienzan a ser relevantes los términos no-lineales.

Además, como teoría efectiva, los efectos cuánticos comenzarían a ser relevantes en distancias menores a

$$r_q \sim \frac{1}{\Lambda_3} \quad (3.46)$$

que para el caso de la masa del sol es del orden $r_q \sim 1000km$.

El modo escalar es de vital importancia en esta teoría, ya que su contribución es relevante en regiones en las que el radio es mayor que el radio de Vainshtein r_V , de manera que en distancias del orden del sistema solar este no afecta y la gravitación está dominada por la acción de Einstein-Hilbert usual.

Esta teoría está en nuestro foco de trabajo a futuro y se encuentra con detalles en [15].

Chapter 4

FRG of MG

Este capítulo constituye la parte central de este trabajo. Aplicaremos las ecuaciones del grupo de renormalización funcional a la acción de Einstein Hilbert más un término de masa.

Al estudiar el comportamiento de las constantes de acoplamiento dependientes de la escala desde el punto de vista de la renormalización funcional podemos obtener resultados distintos de los que se obtienen con el método usual en QFT al considerar loops en los diagramas de Feynmann.

Junto con esto, podemos analizar desde otro punto de vista las consecuencias al considerar la masa estrictamente igual a cero y su diferencia con tomar el límite $m \rightarrow 0$.

Además, la energía de corte para la teoría Λ_3 depende de la masa que se le asigne al gravitón y de la constante de gravitación, por lo que las funciones beta de estas constantes van a estar directamente relacionadas con la energía de corte.

Este capítulo se divide en dos partes. En la primera parte aplicamos la ecuación de Wetterich directamente al lagrangiano y la evaluamos utilizando el método de la "Heat Kernel Expansion", al igual que el trabajo original de Reuter [5] para el caso de Einstein Hilbert usual.

Este método nos permite comparar nuestros resultados con los originales para el caso $m = 0$ y así ver si existen o no diferencias con el límite $m \rightarrow 0$ que no es trivial, como vimos en los capítulos anteriores.

Sin embargo, no nos permite obtener la función beta de la masa $\beta_m = \partial_t m_k$ ya que la ecuación de flujo está evaluada en el límite de bajas energías $h_{\mu\nu} = 0$, por lo que se pierde la información de la función beta del término de masa al ser cuadrático en los campos.

De todos modos se puede obtener valiosa información respecto a los diagramas de flujo, puntos fijos y exponentes críticos y su relación con el valor de la masa y vice versa.

En la segunda parte utilizamos derivadas funcionales de la ecuación de evolución, llamada "Proper Vertex Expansion" [19] de manera que podemos obtener explícitamente la función beta para la masa.

Como veremos, así podemos conseguir valores coherentes para los puntos fijos en los diagramas de flujo, pero el valor de los exponentes críticos deja en evidencia que estos resultados no pueden ser considerados como válidos.

4.1 Gravitón masivo en EH

Comenzamos por la ecuación de evolución

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ [\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1} \partial_t R_k \right\} \quad (4.1)$$

Ahora, nuestro funcional total Γ_k estará compuesto por la acción de Einstein Hilbert más un término de masa, una parte para fijar el gauge y otra de los campos fantasmas de Fadeev-Popov. Entonces, la ecuación de evolución que utilizamos está dada por

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[\bar{h}, \zeta, \bar{\zeta}; \bar{g}] &= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left(\Gamma_k^{(2)} + \hat{R}_k \right)_{\bar{h}\bar{h}}^{-1} \left(\partial_t R_k \right)_{\bar{h}\bar{h}} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr} \left[\left\{ \left(\Gamma_k^{(2)} + \hat{R}_k \right)_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}^{-1} - \left(\Gamma_k^{(2)} + \hat{R}_k \right)_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}}^{-1} \right\} \left(\partial_t R_k \right)_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}} \right] \end{aligned} \quad (4.2)$$

donde $\bar{\zeta}$ corresponden a los campos de Fadeev-Popov.

La traza en el espacio de volumen incluye una integración $\int d^d x \sqrt{\bar{g}(x)}$ que implica el elemento de volumen del background. Los detalles de cómo se obtiene esta ecuación se encuentran en los apéndice A y B.

Entonces, para la parte de Einstein Hilbert con masa vamos a tener

$$\Gamma_k[g, \bar{g}] = 2\kappa^2 Z_{Nk} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} (-R + 2\bar{\lambda}_k) + \int d^d x \sqrt{\bar{g}} - \frac{1}{2} m^2 (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) \quad (4.3)$$

Realizamos una expansión en torno a la métrica del background \bar{g} fija de manera que $g^{\mu\nu} \rightarrow \bar{g}^{\mu\nu} + h^{\mu\nu}$. El campo h es una fluctuación en torno a la métrica del background y es el campo a integrar en la integral funcional.

Trabajamos en un espacio maximalmente simétrico que cumple

$$\begin{aligned} \bar{R}_{\mu\nu\rho\sigma} &= \frac{1}{d(d-1)} (\bar{g}_{\mu\rho} \bar{g}_{\nu\sigma} - \bar{g}_{\nu\rho} \bar{g}_{\mu\sigma}) \bar{R} \\ \bar{R}_{\mu\nu} &= \frac{1}{d} \bar{g}_{\mu\nu} \bar{R} \end{aligned} \quad (4.4)$$

El primer paso es expandir en torno a la métrica del background para tener los términos cuadráticos en h y así obtener las derivadas funcionales para $\Gamma_k^{(2)}$

Para el determinante $\sqrt{-\bar{g}}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} &\rightarrow \sqrt{-g} - \frac{1}{2}\sqrt{-g}g_{\mu\nu}\delta g^{\mu\nu} \\ &\quad - \frac{1}{8}\sqrt{-g}\left[-g_{\alpha\beta}g_{\mu\nu} + \delta_{\mu\alpha}\delta_{\nu\beta} + \delta_{\nu\alpha}\delta_{\mu\beta}\right]\delta g^{\mu\nu}\delta g^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.5)$$

El procedimiento como viene ordenado en las siguientes sub-secciones es:

- Calculamos primero $\Gamma_k^{(2)} = \frac{\delta^2}{\delta h_{\mu\nu}\delta h_{\alpha\beta}}\Gamma_k$
- Incluimos el cutoff R_k de manera que sea consistente con la parte tensorial, vectorial y escalar para obtener $\Gamma_k^{(2)} + R_k$
- Luego determinamos $(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}$ realizando una expansión en torno al término de masa y la curvatura en el denominador del tipo $(1 + A(R + m))^{-1} \sim 1 - A(R + m)$
- Multiplicamos por $\partial_t R_k$ también según corresponda el carácter tensorial, etc... para tener $Tr[(\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}\partial_t R_k]$
- Dado que el gauge que utilizamos nos permite tener esta última expresión en la forma $Tr[W(D^{(2)})]$, podemos calcular esta traza utilizando la "Heat Kernel Expansion" y una transformación de mellin
- Comparamos los términos proporcionales a $\int \sqrt{\bar{g}}$ y $\int \sqrt{\bar{g}}R$ a ambos lados de la ecuación de evolución y obtenemos un sistema de ecuaciones en función de las funciones beta de las constantes de acoplamiento y las "threshold functions", estas últimas dependen del tipo de cutoff que escojamos.
- Finalmente, expresamos las constantes de manera adimensional y fijamos el cutoff R_k para obtener las funciones beta para las constantes adimensionales.
- Con éstas ya podemos realizar los diagramas de flujo, encontrar los puntos fijos y los exponentes críticos en función del valor de la masa

4.1.1 Lado Izquierdo : $\partial_t \Gamma_k$

Vamos a calcular primero el lado izquierdo de la ec. de flujo

$$\partial_t \Gamma_k = \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \left[\partial_t Z_{Nk} \left(-R - \frac{m^2}{2} (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) \right) + 2(\partial_t Z_{Nk} \lambda_k) \right] \quad (4.6)$$

En esta parte consideramos sólo los términos

$$\int d^d x \sqrt{\bar{g}} R (-) \partial_t Z_{Nk} \quad (4.7)$$

y

$$\int d^d x \sqrt{\bar{g}} 2(\partial_t Z_{Nk} \lambda_k) \quad (4.8)$$

ya que se toma el límite en $h \rightarrow 0$

Es por este motivo que la información respecto a $\partial_t m$ se pierde al utilizar este método. De todos modos, como veremos, se puede extraer valiosa información al

considerar la masa m sólo como un parámetro que podemos ajustar y así ver como cambian los diagramas de flujo, puntos fijos y exponentes críticos en función de este valor

4.1.2 $\Gamma^{(2)}$

Consideramos primero sólo los términos cuadráticos en h se obtiene Γ^{quad}

$$\Gamma^{quad}[\bar{h}; \bar{g}] = \kappa^2 Z_{Nk} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{h}_{\mu\nu} \left[-K^{\mu\nu}_{\rho\sigma} D^2 + U^{\mu\nu}_{\rho\sigma} \right] \bar{h}^{\rho\sigma} \quad (4.9)$$

donde $D^2 = D_\mu D^\mu$ se construye a integrando por partes y utilizando la relación entre las derivadas covariantes en un espacio curvo

$$[D_\mu, D_\nu] h^{\alpha\beta} = R^\alpha_{\lambda\mu\nu} h^{\lambda\beta} + R^\beta_{\lambda\mu\nu} h^{\alpha\lambda} \quad (4.10)$$

Con esto obtenemos

$$\begin{aligned} K^{\mu\nu}_{\rho\sigma} &= \frac{1}{4} \left[\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu + \delta_\rho^\nu \delta_\sigma^\mu - \bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}_{\rho\sigma} \right] \\ U^{\mu\nu}_{\rho\sigma} &= \frac{1}{4} \left[\delta_\rho^\mu \delta_\sigma^\nu + \delta_\rho^\nu \delta_\sigma^\mu - \bar{g}^{\mu\nu} \bar{g}_{\rho\sigma} \right] (\bar{R} - 2\bar{\lambda}_k) + \frac{1}{2} (\bar{g}^{\mu\nu} \bar{R}_{\rho\sigma} + \bar{R}^{\mu\nu} \bar{g}_{\rho\sigma}) \\ &\quad - \frac{1}{4} (\delta_\rho^\mu \bar{R}_\sigma^\nu + \delta_\rho^\nu \bar{R}_\sigma^\mu + \delta_\sigma^\mu \bar{R}_\rho^\nu + \delta_\sigma^\nu \bar{R}_\rho^\mu) - \frac{1}{2} (\bar{R}^\nu_{\rho\sigma} + \bar{R}^\nu_{\sigma\rho}) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Esta acción corresponde a la acción de Fierz-Pauli en un espacio curvo con la métrica del background en torno a la cual expandimos. Entonces, para introducir el término de masa podemos comenzar desde acá simplemente agregando el término de masa $-\frac{1}{2}m^2(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2)$, que lo podemos reescribir separando $h^{\mu\nu} = \hat{h}^{\mu\nu} + d^{-1}\Phi\bar{g}^{\mu\nu}$ donde \hat{h} tiene traza nula y $h^\mu_\mu = \Phi$ obtenemos

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}m^2(h_{\mu\nu}h^{\mu\nu} - h^2) &= -\frac{1}{2}m^2[(\hat{h}_{\mu\nu} + d^{-1}\Phi\bar{g}_{\mu\nu})(\hat{h}^{\mu\nu} + d^{-1}\Phi\bar{g}^{\mu\nu}) - h^2] \\ &= -\frac{1}{2}m^2[\hat{h}_{\mu\nu}\hat{h}^{\mu\nu} + d^{-1}\Phi\Phi - \Phi\Phi] \\ &= -\frac{1}{2}m^2[\hat{h}_{\mu\nu}\hat{h}^{\mu\nu} + \frac{1-d}{d}\Phi\Phi] \end{aligned} \quad (4.12)$$

Vamos a obtener

$$\begin{aligned} \Gamma^{quad}[\bar{h}; \bar{g}] &= \frac{1}{2}\kappa^2 Z_{Nk} \int d^d x \left\{ \hat{h}_{\mu\nu} \left[-D^2 - 2\lambda_k + C_T \bar{R} - \frac{m^2}{2} \right] h^{\mu\nu} \right. \\ &\quad \left. - \frac{d-2}{2d} \Phi \left[-D^2 - 2\lambda_k + C_S \bar{R} + C_m m^2 \right] \Phi \right\} \end{aligned} \quad (4.13)$$

con

$$C_S = \frac{d-4}{d}, \quad C_T = \frac{d(d-3)+4}{d(d-1)}, \quad C_m = -\frac{d-1}{d-2} \quad (4.14)$$

4.1.3 $\Gamma^{(2)} + R_k$

Para los cutt off R_k se hace $R_k^{grav \mu\nu\rho\sigma} = Z_k^{grav \mu\nu\rho\sigma} k^2 R(\frac{-D^2}{k^2})$ y el $Z_k^{grav \mu\nu\rho\sigma}$ se define como

$$Z_k^{grav \mu\nu\rho\sigma} = Z_{Nk} \left[(I - P_\Phi)^{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{d-2}{2} P_\Phi^{\mu\nu\rho\sigma} \right] \quad (4.15)$$

con $P_\Phi^{\mu\nu\rho\sigma} = d^{-1} g^{\mu\nu} g^{\rho\sigma}$, de esta forma entra directo en las expresiones de hh y $\Phi\Phi$.

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} (\Gamma^{(2)} + R_k)_{\hat{h}\hat{h}} &= Z_{Nk} \left[-D^2 - 2\lambda_k + C_T \bar{R} + k^2 R(\frac{-D^2}{k^2}) - \frac{m^2}{2} \right] \\ (\Gamma^{(2)} + R_k)_{\Phi\Phi} &= Z_{Nk} (-) \frac{d-2}{2d} \left[-D^2 - 2\lambda_k + C_S \bar{R} + k^2 R(\frac{-D^2}{k^2}) + C_m m^2 \right] \end{aligned}$$

El detalle para la contribución de los ghost se encuentra en el apéndice y se obtiene

$$(\Gamma^{(2)} + R_k^{gh})_{\bar{\xi}\bar{\xi}} = \left[-D^2 + C_V R + k^2 R(\frac{-D^2}{k^2}) \right] \quad (4.16)$$

con $C_V = -\frac{1}{d}$

4.1.4 $(\Gamma^{(2)} + R_k)^{-1} \partial_t R_k$

Ahora multiplicamos por $\partial_t R_k = \partial_t \left(Z_{Nk} k^2 R(\frac{-D^2}{k^2}) \right)$ con lo que obtenemos

$$\begin{aligned} (\Gamma^{(2)} + R_k)_{\hat{h}\hat{h}}^{-1} \partial_t R_k &= \left[(2 - \eta_N(k)) k^2 R(\frac{-D^2}{k^2}) + 2D^2 R'(\frac{-D^2}{k^2}) \right] \left[-D^2 - 2\lambda_k + C_T \bar{R} \right. \\ &\quad \left. + k^2 R(\frac{-D^2}{k^2}) - \frac{m^2}{2} \right]^{-1} \\ (\Gamma^{(2)} + R_k)_{\Phi\Phi}^{-1} \partial_t R_k &= \left[(2 - \eta_N(k)) k^2 R(\frac{-D^2}{k^2}) + 2D^2 R'(\frac{-D^2}{k^2}) \right] \left[-D^2 - 2\lambda_k + C_S \bar{R} \right. \\ &\quad \left. + k^2 R(\frac{-D^2}{k^2}) + C_m m^2 \right]^{-1} \end{aligned}$$

Con $\eta_N(k) = -\partial_t \ln Z_{Nk}$ que corresponde a la dimensión anómala del operador $\sqrt{g}R$.

4.1.5 $Tr[W(-D^2)]$

Para resolver estas trazas, consideramos la transformada de Fourier $\tilde{W}(s)$ de $W(-D^2)$ y tenemos

$$Tr[W(-D^2)] = \int ds \tilde{W}(s) Tr[e^{-isD^2}] \quad (4.17)$$

Ahora se puede utilizar la "Heat Kernel Expansion"

$$Tr[e^{-isD^2}] = \left(\frac{i}{4\pi s} \right)^{\frac{d}{2}} tr(I) \int d^d x \sqrt{g} \left[1 - \frac{1}{6} isR + O(R^2) \right] \quad (4.18)$$

La $tr(I)$ es la traza en el espacio donde actúa D^2 así que es 1 para el escalar Φ , "d" para el vector de los ghost y $\frac{1}{2}(d-1)(d+2)$ para el \hat{h} que es un tensor simétrico y de traza nula. Con esto tenemos

$$Tr[W(-D^2)] = \int ds \tilde{W}(s) \left(\frac{i}{4\pi s}\right)^{\frac{d}{2}} tr(I) \int d^d x \sqrt{g} \left[1 - \frac{1}{6} isR + O(R^2)\right] \quad (4.19)$$

Definiendo

$$Q_n \equiv \int ds (-is)^n \tilde{W}(s) \quad (4.20)$$

Podemos identificar

$$\begin{aligned} \int ds \tilde{W}(s) \left(\frac{i}{4\pi s}\right)^{\frac{d}{2}} \int d^d x \sqrt{g} &= (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \int ds \left(\frac{i}{s}\right)^{\frac{d}{2}} \tilde{W}(s) \int d^d x \sqrt{g} \quad (4.21) \\ &= (4\pi)^{-\frac{d}{2}} Q_{\frac{d}{2}} \int d^d x \sqrt{g} \\ &= (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \int ds (-is)^{\frac{d}{2}} \tilde{W}(s) \int d^d x \sqrt{g} \end{aligned}$$

Y de la misma forma

$$\int ds \tilde{W}(s) \left(\frac{i}{4\pi s}\right)^{\frac{d}{2}} \int d^d x \sqrt{g} (-\frac{1}{6} isR) = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{1}{6} Q_{\frac{d}{2}-1} \int d^d x \sqrt{g} R \quad (4.22)$$

Con lo que se obtiene

$$Tr[W(-D^2)] = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} tr(I) \left[Q_{\frac{d}{2}}[W] \int d^d x \sqrt{g} + \frac{1}{6} Q_{\frac{d}{2}-1}[W] \int d^d x \sqrt{g} R \right] \quad (4.23)$$

Los Q_n se pueden evaluar por una transformada de Mellin para $n > 0$

$$\begin{aligned} Q_n[0] &= 0 \quad (4.24) \\ Q_n[W] &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} W(z) \end{aligned}$$

Combinando estos resultados obtenemos la expresión para el lado izquierdo de la ecuación de flujo

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Tr \left\{ [\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1} \partial_k R_k \right\} &= \frac{1}{2} Tr \left[\left[(2 - \eta_N(k)) k^2 R \left(\frac{-D^2}{k^2}\right) + \frac{D^2}{2} R' \left(\frac{-D^2}{k^2}\right) \right] \right. \\ &\quad \left. \left[-D^2 - 2\lambda_k + k^2 R \left(\frac{-D^2}{k^2}\right) + (C_T \bar{R} - \frac{m^2}{2}) \right]^{-1} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} Tr \left[\left[(2 - \eta_N(k)) k^2 R \left(\frac{-D^2}{k^2}\right) + D^2 R' \left(\frac{-D^2}{k^2}\right) \right] \right] \end{aligned}$$

$$\left[-D^2 - 2\lambda_k + k^2 R \left(\frac{-D^2}{k^2} \right) + (C_S \bar{R} + C_m m^2) \right]^{-1} \quad (4.25)$$

Ahora tenemos que evaluar $\frac{1}{2} Tr$ de esos dos objetos. Cada una de estas expresiones es del tipo $N(A + C_i R + C_m m^2)^{-1}$ y se expande en torno a $(C_i R + C_m m^2)$ según $N(A + (C_i R + C_m m^2))^{-1} = NA^{-1}(1 + A^{-1}(C_i R + C_m m^2))^{-1} = NA^{-1} - NA^{-2}(C_i R + C_m m^2)$ con $i=V,S,T$.

Si llamamos

$$\begin{aligned} N &= \left[(2 - \eta_N(k)) k^2 R \left(\frac{-D^2}{k^2} \right) + D^2 R' \left(\frac{-D^2}{k^2} \right) \right] \\ A &= -D^2 - 2\lambda_k + k^2 R \left(\frac{-D^2}{k^2} \right) \end{aligned} \quad (4.26)$$

tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} Tr \left\{ [\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1} \partial_k R_k \right\} &= \frac{1}{2} Tr \left[N \left[A + (C_T \bar{R} - \frac{m^2}{2}) \right]^{-1} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} Tr \left[N \left[A + (C_S \bar{R} + C_m m^2) \right]^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} Tr \left[NA^{-1} \left[1 + A^{-1} (C_T \bar{R} - \frac{m^2}{2}) \right]^{-1} \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} Tr \left[NA^{-1} \left[1 + A^{-1} (C_S \bar{R} + C_m m^2) \right]^{-1} \right] \\ &= \frac{1}{2} Tr \left[NA^{-1} - NA^{-2} (C_T \bar{R} - \frac{m^2}{2}) \right] \\ &\quad + \frac{1}{2} Tr \left[NA^{-1} - NA^{-2} (C_S \bar{R} + C_m m^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} \left[Tr_T [NA^{-1}] - Tr_T [NA^{-2}] (C_T \bar{R} - \frac{m^2}{2}) \right. \\ &\quad \left. + Tr_S [NA^{-1}] - Tr_S [NA^{-2}] (C_S \bar{R} + C_m m^2) \right] \\ &= \frac{1}{2} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[(tr_T(I) + tr_S(I)) \left[Q_{\frac{d}{2}} [NA^{-1}] \int d^d x \sqrt{g} \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{1}{6} Q_{\frac{d}{2}-1} [NA^{-1}] \int d^d x \sqrt{g} R \right] \right. \\ &\quad \left. - \left[Q_{\frac{d}{2}} [NA^{-2}] \int d^d x \sqrt{g} + \frac{1}{6} Q_{\frac{d}{2}-1} [NA^{-2}] \int d^d x \sqrt{g} R \right] \right. \\ &\quad \left. \left[(C_T \bar{R} - \frac{m^2}{2}) tr_T(I) + (C_S \bar{R} + C_m m^2) tr_S(I) \right] \right] \quad (4.27) \end{aligned}$$

Ahora, comparamos los coeficientes de $\int d^d x \sqrt{g}$ y $\int d^d x \sqrt{g} R$ en ambos lados y obtenemos el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}
2(\partial_t Z_{Nk} \bar{\lambda}_k) &= \frac{1}{2\kappa^2} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[\left(tr_T(I) + tr_S(I) \right) Q_{\frac{d}{2}}[NA^{-1}] - 2tr_V(I) Q_{\frac{d}{2}}[N_0 A_0^{-1}] \right. \\
&\quad \left. - \left[\left(-\frac{m^2}{2} \right) tr_T(I) + (C_m m^2) tr_S(I) \right] Q_{\frac{d}{2}}[NA^{-2}] \right] \\
(-)\partial_t Z_{Nk} &= \frac{1}{2\kappa^2} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[\frac{1}{6} \left(tr_T(I) + tr_S(I) \right) Q_{\frac{d}{2}-1}[NA^{-1}] \right. \\
&\quad - Q_{\frac{d}{2}}[NA^{-2}] \left(C_T tr_T(I) + C_S tr_S(I) \right) \\
&\quad - \frac{tr_V(I)}{3} \left(Q_{\frac{d}{2}-1}[N_0 A_0^{-1}] - 6C_V Q_{\frac{d}{2}}[N_0 A_0^{-2}] \right) \\
&\quad \left. - \frac{1}{6} Q_{\frac{d}{2}-1}[NA^{-2}] \left(\frac{m^2}{2} tr_T(I) - C_m m^2 tr_S(I) \right) \right] \tag{4.28}
\end{aligned}$$

Utilizamos la Transformada de Mellin para Q_n

$$\begin{aligned}
Q_n[0] &= 0 \\
Q_n[W] &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} W(z)
\end{aligned} \tag{4.29}$$

Entonces lo que se hace es reemplazar $\frac{-D^2}{k^2} \rightarrow z$ en N/A y N/A^2

$$\begin{aligned}
Q_n[NA^{-1}] &= \frac{k^{2n}}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{(2 - \eta_N(k))R(z) - 2zR'(z)}{z - 2\frac{\bar{\lambda}_k}{k^2} + zR(z)} \\
Q_n[NA^{-2}] &= \frac{k^{2n-2}}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{(2 - \eta_N(k))R(z) - 2zR'(z)}{\left[z - 2\frac{\bar{\lambda}_k}{k^2} + zR(z) \right]^2}
\end{aligned} \tag{4.30}$$

Las ecuaciones de flujo anteriores las podemos escribir en función de las integrales \tilde{Q}_n^m y Q_n^m con

$$\begin{aligned}
\tilde{Q}_n^m(\bar{\lambda}_k/k^2) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{R(z)}{\left[z - 2\frac{\bar{\lambda}_k}{k^2} + R(z) \right]^m} \\
Q_n^m(\bar{\lambda}_k/k^2) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{R(z) - zR'(z)}{\left[z - 2\frac{\bar{\lambda}_k}{k^2} + R(z) \right]^m}
\end{aligned} \tag{4.31}$$

para $n = 1, 2$ y $m = 1, 2$ y así obtener las funciones beta y los diagramas de flujo. Para escribir las funciones beta y las ec. de flujo en función de estas variables, podemos escribir los $Q_n[NA^{-m}]$ como

$$Q_n[NA^{-1}] = k^{2n} \left\{ 2Q_n^1 - \eta_N(k) \tilde{Q}_n^1 \right\}$$

$$Q_n[NA^{-2}] = k^{2n-2} \left\{ 2Q_n^2 - \eta_N(k) \tilde{Q}_n^2 \right\} \quad (4.32)$$

Y con eso tenemos:

$$\begin{aligned} \partial_t(Z_{Nk} \bar{\lambda}_k) &= \frac{1}{16\kappa^2} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} k^d \left[d(d+1) \left\{ 2Q_{\frac{d}{2}}^1 - \eta_N(k) \tilde{Q}_{\frac{d}{2}}^1 \right\} - 8dQ_{\frac{d}{2}}^1(0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{k^2} \frac{(d-1)(d^2-2)}{(d-2)} \left\{ 2Q_{\frac{d}{2}}^2 - \eta_N(k) \tilde{Q}_{\frac{d}{2}}^2 \right\} \right] \\ \partial_t Z_{Nk} &= -\frac{1}{4\kappa^2} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} k^{d-2} \left[\frac{d}{12} (d+1) \left\{ 2Q_{\frac{d}{2}-1}^1 - \eta_N(k) \tilde{Q}_{\frac{d}{2}-1}^1 \right\} \right. \\ &\quad - \frac{d}{2} (d-1) \left\{ 2Q_{\frac{d}{2}}^2 - \eta_N(k) \tilde{Q}_{\frac{d}{2}}^2 \right\} - \frac{2}{3} dQ_{\frac{d}{2}-1}^1(0) - Q_{\frac{d}{2}}^2(0) \\ &\quad \left. - \frac{m^2}{k^2} \frac{d^2(d-1)}{24(d-2)} \left\{ 2Q_{\frac{d}{2}-1}^2 - \eta_N(k) \tilde{Q}_{\frac{d}{2}-1}^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.33)$$

Estas son las ecuaciones para las "dimensionfull" couplings Z_{Nk} y $\bar{\lambda}_k$ y nos interesan las ecuaciones para las "dimensionless" couplings:

$$\lambda_k \equiv k^{-2} \bar{\lambda}_k \quad , \quad g_k \equiv \bar{G} k^{d-2} Z_{Nk}^{-1} \quad (4.34)$$

Directamente al derivar obtenemos

$$\partial_t g_k = (d-2)g_k - \frac{g_k^2}{k^{d-2} \bar{G}} \partial_t Z_{Nk} \quad (4.35)$$

Para encontrar las ecuaciones de flujo, consideramos $\eta_N(k)$ independientemente. Para esto consideramos la ecuación de $\partial_t Z_{Nk}$ y la dividimos por $-Z_{Nk}$ al lado izquierdo y al lado derecho lo escribimos en función de g_k

$$\begin{aligned} \eta_N(k) &= \frac{g_k}{\bar{G} k^{d-2}} \frac{1}{4\kappa^2} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} k^{d-2} \left[\frac{d}{12} (d+1) \left\{ 2Q_{\frac{d}{2}-1}^1 - \eta_N(k) \tilde{Q}_{\frac{d}{2}-1}^1 \right\} \right. \\ &\quad - \frac{d}{2} (d-1) \left\{ 2Q_{\frac{d}{2}}^2 - \eta_N(k) \tilde{Q}_{\frac{d}{2}}^2 \right\} - \frac{2}{3} dQ_{\frac{d}{2}-1}^1(0) - Q_{\frac{d}{2}}^2(0) \\ &\quad \left. - \frac{m^2}{k^2} \frac{d^2(d-1)}{24(d-2)} \left\{ 2Q_{\frac{d}{2}-1}^2 - \eta_N(k) \tilde{Q}_{\frac{d}{2}-1}^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.36)$$

$$\begin{aligned} \eta_N(k) &= g_k 8\pi (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[\frac{d}{6} (d+1) Q_{\frac{d}{2}-1}^1 - d(d-1) Q_{\frac{d}{2}}^2 - \frac{2}{3} dQ_{\frac{d}{2}-1}^1(0) - Q_{\frac{d}{2}}^2(0) \right. \\ &\quad - \frac{m^2}{k^2} \frac{d^2(d-1)}{12(d-2)} Q_{\frac{d}{2}-1}^2 - \eta_N(k) \left\{ \frac{d}{12} (d+1) \tilde{Q}_{\frac{d}{2}-1}^1 \right. \\ &\quad \left. \left. - \frac{d}{2} (d-1) \tilde{Q}_{\frac{d}{2}}^2 - \frac{m^2}{k^2} \frac{d^2(d-1)}{24(d-2)} \tilde{Q}_{\frac{d}{2}-1}^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.37)$$

Con lo que se obtiene

$$\eta_N(k) = g_k 8\pi(4\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\frac{d}{6}(d+1)Q_{\frac{d}{2}-1}^1 - d(d-1)Q_{\frac{d}{2}}^2 - \frac{2}{3}dQ_{\frac{d}{2}-1}^1(0) - Q_{\frac{d}{2}}^2(0) - \frac{m^2}{k^2} \frac{d^2(d-1)}{12(d-2)}Q_{\frac{d}{2}-1}^2}{1 + g_k 8\pi(4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left\{ \frac{d}{12}(d+1)\tilde{Q}_{\frac{d}{2}-1}^1 - \frac{d}{2}(d-1)\tilde{Q}_{\frac{d}{2}}^2 - \frac{m^2}{k^2} \frac{d^2(d-1)}{24(d-2)}\tilde{Q}_{\frac{d}{2}-1}^2 \right\}}$$

Para la ecuación de g_k la obtenemos directo a partir de su definición

$$\begin{aligned} g_k &= \bar{G}k^{d-2}Z_{Nk}^{-1} \\ \partial_t g_k &= \bar{G}\partial_t(k^{d-2}Z_{Nk}^{-1}) \\ \partial_t g_k &= (d-2 + \eta_N(k))g_k \end{aligned} \quad (4.38)$$

Finalmente, la ec. de λ_k la obtenemos de

$$\begin{aligned} \partial_t \bar{\lambda}_k &= \bar{\lambda}_k \eta_N(k) + \frac{1}{Z_{Nk}} \partial_t(\bar{\lambda}_k Z_{Nk}) \\ \partial_t \lambda_k &= (\eta_N(k) - 2)\lambda_k + \frac{g_k}{\bar{G}k^d} \partial_t(\bar{\lambda}_k Z_{Nk}) \\ \partial_t \lambda_k &= (\eta_N(k) - 2)\lambda_k \\ &\quad + 2\pi g_k (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[d(d+1) \left\{ 2Q_{\frac{d}{2}}^1 - \eta_N(k)\tilde{Q}_{\frac{d}{2}}^1 \right\} - 8dQ_{\frac{d}{2}}^1(0) \right. \\ &\quad \left. + \frac{m^2}{k^2} \frac{(d-1)(d^2-2)}{(d-2)} \left\{ 2Q_{\frac{d}{2}}^2 - \eta_N(k)\tilde{Q}_{\frac{d}{2}}^2 \right\} \right] \end{aligned} \quad (4.39)$$

Con esto, tenemos el siguiente sistema de ec. de flujo

$$\begin{aligned} \partial_t g_k &= (d-2 + \eta_N(k))g_k \\ \partial_t \lambda_k &= (\eta_N(k) - 2)\lambda_k + 2\pi g_k (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[d(d+1) \left\{ 2Q_{\frac{d}{2}}^1 - \eta_N(k)\tilde{Q}_{\frac{d}{2}}^1 \right\} \right. \\ &\quad \left. - 8dQ_{\frac{d}{2}}^1(0) + \frac{m^2}{k^2} \frac{(d-1)(d^2-2)}{(d-2)} \left\{ 2Q_{\frac{d}{2}}^2 - \eta_N(k)\tilde{Q}_{\frac{d}{2}}^2 \right\} \right] \\ \eta_N(k) &= g_k 8\pi(4\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\frac{d}{6}(d+1)Q_{\frac{d}{2}-1}^1 - d(d-1)Q_{\frac{d}{2}}^2 - \frac{2}{3}dQ_{\frac{d}{2}-1}^1(0) - Q_{\frac{d}{2}}^2(0) - \frac{m^2}{k^2} \frac{d^2(d-1)}{12(d-2)}Q_{\frac{d}{2}-1}^2}{1 + g_k 8\pi(4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left\{ \frac{d}{12}(d+1)\tilde{Q}_{\frac{d}{2}-1}^1 - \frac{d}{2}(d-1)\tilde{Q}_{\frac{d}{2}}^2 - \frac{m^2}{k^2} \frac{d^2(d-1)}{24(d-2)}\tilde{Q}_{\frac{d}{2}-1}^2 \right\}} \end{aligned}$$

Estas ecuaciones en función de las "Threshold Functions" Q_n^m tienen la ventaja de que dependen sólo de la forma del cutoff R_k a escoger, por lo que podemos ver los diagramas de flujo y demases sólo evaluando estas funciones para los distintos cutoff.

4.2 Ecuaciones de Evolución y Diagramas de Flujo

Para obtener los diagramas de flujo, necesitamos especificar el cutoff $R(z)$ para poder evaluar las funciones $\tilde{Q}_n^m(w)$ y $Q_n^m(\bar{\lambda}_k/k^2)$. Tomamos el caso del "Sharp-cutoff"

$$R_k(p^2) = \lim_{\hat{R} \rightarrow \infty} \hat{R} \Theta(1 - \frac{p^2}{k^2}) \quad (4.40)$$

que cumple con los requerimientos mencionados en el capítulo 2.

En este caos, las "threshold functions" tienen un valor

$$\begin{aligned} Q_n^1(w) &= -\frac{\log(1+w)}{\Gamma(n)} + n\zeta(n+1) \\ Q_n^{m \neq 1}(w) &= -\frac{1}{(m-1)\Gamma(n)} \frac{1}{(1+w)^{m-1}} \\ \tilde{Q}_n^1(w) &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \\ \tilde{Q}_n^{m \neq 1}(w) &= 0 \end{aligned} \quad (4.41)$$

En este caso y en $d=4$, las ecuaciones de flujo resultan

$$\begin{aligned} \eta_N &= -\frac{2g_k}{6\pi + 5g_k} \left[\frac{18}{1-2\lambda_k} + 5\ln(1-2\lambda_k) - \zeta(2) + 6 + m\frac{3}{1-2\lambda_k} \right] \\ \partial_t g_k &= (d-2 + \eta_N(k))g_k \\ \partial_t \lambda_k &= -(2 - \eta_N)\lambda_k - \frac{g_k}{\pi} \left[5\ln(1-2\lambda_k) - 2\zeta(3) + \frac{5}{2}\eta_N - m\frac{21}{8} \left(-\frac{\eta_N}{2} - 2\ln(1-2\lambda_k) - 4\zeta(3) \right) \right] \end{aligned}$$

En la figura (4.1) se ven los gráficos en $d = 4$ y para $m = 0, 0.1, 0.5$ y 100 para ver como se deforma el diagrama de flujo a partir del caso $m = 0$, el cual coincide con el obtenido originalmente por Reuter en [5]. En el eje vertical va la coordenada g_k y en la horizontal λ_k . Como se puede apreciar, a crecer la masa la información del digrama deja de ser confiable.

Además hay que destacar que no aparece la discontinuidad vDVZ, ya que valor del punto fijo cambia de manera continua con el valor de la masa.

Para encontrar los puntos fijos, necesitamos $\beta_\lambda(\lambda_k, g_k) = \beta_g(\lambda_k, g_k) = 0$. Tenemos el primero que es trivial (gausiano) $g_k = \lambda_k = 0$. Para encontrar el no gausiano vemos el sistema de ecuaciones. Entonces de la ec. de β_g se deduce $2 + \eta_N = 0 \Rightarrow \eta_N = -2$. Con esto tenemos un sistema de dos ecuaciones

$$\begin{aligned} -2 &= -\frac{2g_k}{6\pi + 5g_k} \left[\frac{18}{1-2\lambda_k} + 5\ln(1-2\lambda_k) - \zeta(2) + 6 + m\frac{3}{1-2\lambda_k} \right] \\ 0 &= -4\lambda_k - \frac{g_k}{\pi} \left[5\ln(1-2\lambda_k) - 2\zeta(3) - 5 - m\frac{21}{8} \left(1 - 2\ln(1-2\lambda_k) - 4\zeta(3) \right) \right] \end{aligned}$$

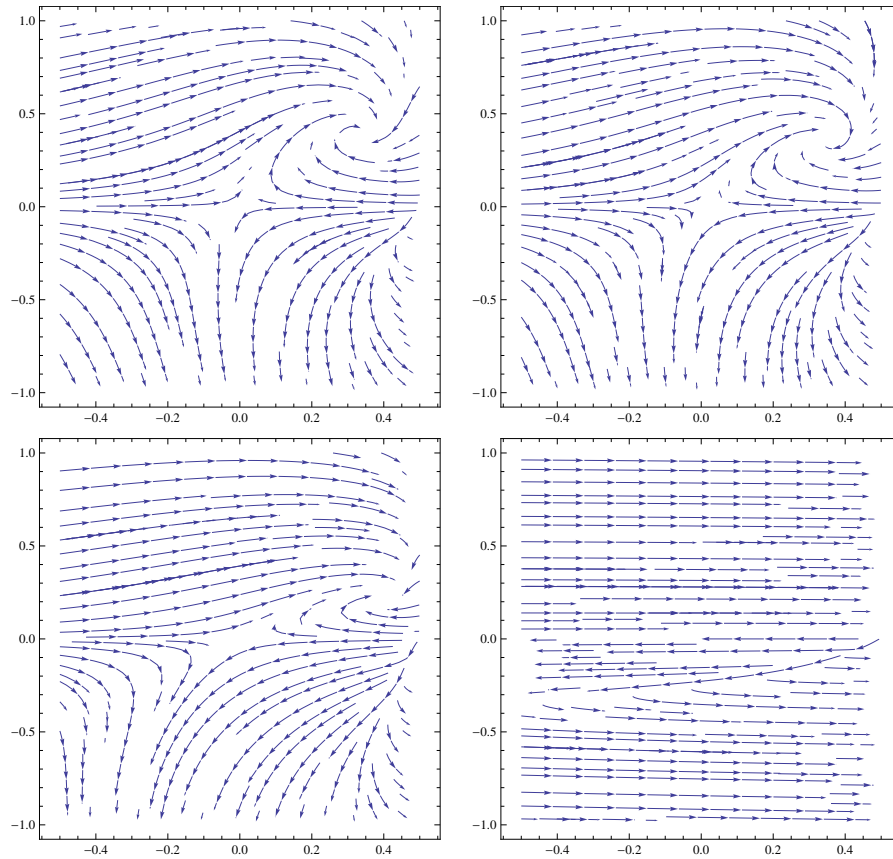


FIGURE 4.1: Diagramas de flujo para $m_k^2 = 0; 0.1; 0.5$ y $m = 100$ (abajo, derecha). Con λ_k (g_k) en el eje x (y). Para el caso $m = 0$ tenemos el punto fijo no gaussiano con coordenadas $\lambda_k = 0.3296$ and $g_k = 0.40266$. Se puede ver cómo se va deformando el diagrama original $m = 0$ a medida que crece la masa

Para $m = 0$ resulta

$$\begin{aligned} 1 &= \frac{g_k}{6\pi + 5g_k} \left[\frac{18}{1 - 2\lambda_k} + 5\ln(1 - 2\lambda_k) - \zeta(2) + 6 \right] \\ 0 &= -4\lambda_k - \frac{g_k}{\pi} \left[5\ln(1 - 2\lambda_k) - 2\zeta(3) - 5 \right] \end{aligned}$$

Este sistema de ecuaciones tiene solución numérica según mathematica en el punto $(0.329681, 0.402661)$ para el caso $m = 0$.

Podemos realizar una iteración en Mathematica para obtener el valor del punto fijo dependiendo del valor asignado a m . Podemos ver cómo varía esta coordenada del punto fijo en el lado derecho de la figura (4.2), donde comienza por el caso $m = 0$ y luego va cambiando de manera continua, pese a que en la iteración está graficado de manera discreta.

4.2.1 Critical Exponents

Para obtener los "critical exponents" seguimos el procedimiento usual. Es decir, consideramos la matriz de Jacobi \mathbf{B}

$$B(g_k, \lambda_k) = \begin{pmatrix} \frac{\partial \beta_{g_k}}{\partial g_k} & \frac{\partial \beta_{\lambda_k}}{\partial g_k} \\ \frac{\partial \beta_{g_k}}{\partial \lambda_k} & \frac{\partial \beta_{\lambda_k}}{\partial \lambda_k} \end{pmatrix} \quad (4.42)$$

Luego evaluamos esta matriz en el valor encontrado para los puntos fijos (g_k^*, λ_k^*) y calculamos sus autovalores θ_i .

Dado que el valor de los puntos fijos depende de el valor que le asignemos a la masa, nuevamente realizamos una iteración en matemática para encontrar el valor de los exponentes críticos para cada uno de estos valores.

La parte real de los "critical exponents" nos dirá si las trayectorias chocan contra el punto fijo no gaussiano, de manera que las trayectorias en el diagrama de flujo son finitas en el límite de altas energías $k \rightarrow \infty$

En nuestro caso encontramos un par de autovalores complejos conjugados $\theta_1 = \theta_2^*$. La parte real de estos se puede ver en el gráfico izquierdo de la figura (4.2).

El caso $m=0$ coincide con el encontrado en la literatura y vemos como varía en función de la masa. Este resultado es relevante ya que, además de corroborar el carácter del punto fijo, nos dice que la masa del gravitón debe ser pequeña, acorde con los resultados experimentales que le dan una cota de alrededor de los $\sim 10^{-23}$ eV.

4.3 Proper Vertices

Para poder encontrar la función beta de la masa $\partial_k m_k$ debemos "aislar" el término que lo contiene en Γ_k . Para esto, el método de los proper vertices consiste en considerar las derivadas funcionales con respecto a los campos en la ecuación de evolución

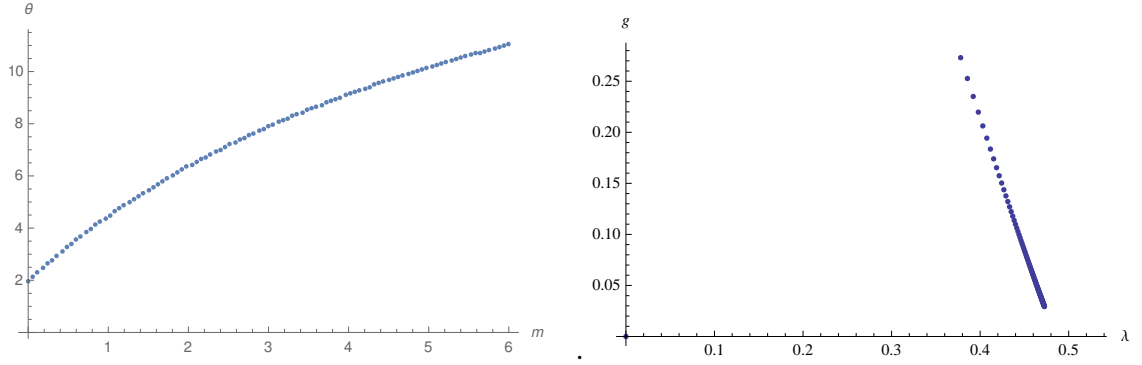


FIGURE 4.2: En la figura de la izquierda vemos como varía el valor de la parte real del exponente crítico en función de la masa. En el lado derecho tenemos como varía el valor de la coordenada del punto fijo al crecer la masa

$$\partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ [\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1} \partial_k R_k \right\} \quad (4.43)$$

Así, para nuestro caso la EAA es

$$\Gamma_k[h, \bar{g}] = \int d^d x \sqrt{\bar{g}} (-R + 2\lambda_k) - \frac{1}{2} Z_{hk} m_k^2 \int d^d x \sqrt{\bar{g}} (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) \quad (4.44)$$

El truco para encontrar el flujo de las constantes es tomar las derivadas funcionales con respecto a los campos en la ecuación de flujo. En nuestro caso, queremos determinar la función beta del término de masa $\partial_t m_k$. En el lado izquierdo de la ecuación de flujo (4.43) vamos a tener un término del tipo

$$\sim \partial_t (Z_{hk} m_k^2) \int \sqrt{\bar{g}} (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) \quad (4.45)$$

Como vemos, este va acompañado de términos cuadráticos en h , por lo que se toma la segunda derivada funcional $\frac{\delta^2}{\delta h \delta h}$ en ambos lados de la ec. de flujo y de esta manera el término anterior se transforma en

$$\sim \partial_t (Z_{hk} m_k^2) \int dx \sqrt{\bar{g}} \quad (4.46)$$

de manera que luego podemos incluirlo al comparar los términos proporcionales a $\int dx \sqrt{\bar{g}}$ al igual que en la sección anterior.

Entonces al tomar las derivadas funcionales, la ecuación de flujo resulta

$$\frac{\delta^2}{\delta h \delta h} \partial_t \Gamma_k = \frac{1}{2} \frac{\delta^2}{\delta h \delta h} \text{Tr} \left\{ [\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1} \partial_k R_k \right\} \quad (4.47)$$

que explícitamente es

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k^{(2)} &= \text{Tr} \left\{ G_k \Gamma_k^{(3)} G_k \Gamma_k^{(3)} G_k \partial_t R_k \right\} \\ &\quad - \frac{1}{2} \text{Tr} \left\{ G_k \Gamma_k^{(4)} G_k \partial_t R_k \right\} \end{aligned} \quad (4.48)$$

Donde $G_k = [\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1}$ es el propagador modificado y $\Gamma_k^{(n)}$ es la derivada funcional n-ésima $\frac{\delta^n}{\delta h \delta h \dots} \Gamma_k$ con respecto a h .

En este caso vamos a necesitar las expansiones hasta cuarto orden en los campos.

Entonces lo primero es encontrar $\Gamma^{(4)}$ y $\Gamma^{(3)}$ que van a ser los 3 y 4-vertices. Necesitamos los términos cúbicos y cuárticos en la acción $\sqrt{g}(R - 2\lambda_k)$ luego de expandir $g = \bar{g} + h$.

Para \sqrt{g} tenemos

$$\begin{aligned} \sqrt{-g} \rightarrow & \sqrt{-\bar{g}} - \sqrt{-\bar{g}} g_{\mu\nu} h^{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{2} \sqrt{-\bar{g}} \left[-g_{\alpha\beta} g_{\mu\nu} + \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} + \delta_{\nu\alpha} \delta_{\mu\beta} \right] h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} \end{aligned} \quad (4.49)$$

$$\begin{aligned} & + \frac{1}{3!} \sqrt{-\bar{g}} \left[-g_{\alpha\beta} g_{\lambda\sigma} g_{\mu\nu} + g_{\mu\nu} (\delta_{\lambda\alpha} \delta_{\sigma\beta} + \delta_{\sigma\alpha} \delta_{\lambda\beta}) \right. \\ & + g_{\alpha\beta} (\delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\sigma} + \delta_{\nu\sigma} \delta_{\mu\lambda}) \\ & \left. + g_{\lambda\sigma} (\delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} + \delta_{\nu\alpha} \delta_{\mu\beta}) \right] h^{\alpha\beta} h^{\lambda\sigma} h^{\mu\nu} \\ & - \frac{1}{4!} \sqrt{-\bar{g}} \left[-g_{\alpha\beta} g_{\lambda\sigma} g_{\mu\nu} g_{\gamma\delta} + g_{\mu\nu} g_{\gamma\delta} \hat{\delta}_{\lambda\sigma\alpha\beta} + g_{\alpha\beta} g_{\gamma\delta} \hat{\delta}_{\lambda\sigma\mu\nu} \right. \\ & + g_{\lambda\sigma} g_{\gamma\delta} \hat{\delta}_{\alpha\beta\mu\nu} + g_{\lambda\sigma} g_{\mu\nu} \hat{\delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} + g_{\lambda\sigma} g_{\alpha\beta} \hat{\delta}_{\mu\nu\gamma\delta} \\ & + g_{\mu\nu} g_{\alpha\beta} \hat{\delta}_{\lambda\sigma\gamma\delta} + \hat{\delta}_{\lambda\sigma\alpha\beta} \hat{\delta}_{\mu\nu\gamma\delta} \\ & \left. - \hat{\delta}_{\lambda\sigma\gamma\delta} \hat{\delta}_{\mu\nu\alpha\beta} - \hat{\delta}_{\lambda\sigma\mu\nu} \hat{\delta}_{\alpha\beta\gamma\delta} \right] h^{\alpha\beta} h^{\lambda\sigma} h^{\mu\nu} h^{\gamma\delta} \end{aligned} \quad (4.50)$$

donde $\hat{\delta}_{\mu\nu\alpha\beta} = \delta_{\mu\alpha} \delta_{\nu\beta} + \delta_{\nu\alpha} \delta_{\mu\beta}$

Para los términos cuárticos en $h^{\mu\nu}$ al expandir R tenemos

$$\begin{aligned} R^{(4)} = & \frac{1}{4} \left[2h^{\mu\alpha} h^{\lambda\beta} \partial_\lambda h_{\alpha\mu} \partial^\nu h_{\beta\nu} - h^{\mu\alpha} h^{\lambda\beta} \partial_\lambda h_{\alpha\mu} \partial_\beta h - h^{\mu\alpha} h^{\lambda\beta} \partial^\nu h_{\alpha\lambda} \partial_\nu h_{\beta\nu} \right. \\ & \left. - 2h^{\mu\alpha} h^{\lambda\beta} \partial_\lambda h_{\alpha}{}^\nu \partial_\mu h_{\beta\nu} + 2h^{\mu\alpha} h^{\lambda\beta} \partial_\lambda h_{\alpha}{}^\nu \partial_\beta h_{\mu\nu} \right] \end{aligned} \quad (4.51)$$

Los términos cúbicos son

$$\begin{aligned} R^{(3)} = & \frac{1}{4} \left[2h^{\mu\alpha} \partial_\lambda h_{\alpha\mu} \partial^\mu h^\lambda{}_\nu - h^{\mu\alpha} \partial_\lambda h_{\alpha\mu} \partial^\lambda h + 2h^{\lambda\beta} \partial^\nu h_{\beta\nu} \partial_\lambda h \right. \\ & - h^{\lambda\beta} \partial_\lambda h \partial_\beta h + 2h^{\mu\alpha} \partial_\mu h_{\lambda\nu} \partial_\alpha h^{\lambda\nu} \\ & \left. - 4h^{\mu\alpha} \partial_\lambda h_{\alpha\nu} \partial_\mu h^{\lambda\nu} \right] \end{aligned} \quad (4.52)$$

Ahora ordenamos los términos cúbicos al sumar los productos $\sqrt{\bar{g}} R^{(3)}$, $\sqrt{\bar{g}}^{(1)} R^{(2)}$, $\sqrt{\bar{g}}^{(2)} R^{(1)}$, $\sqrt{\bar{g}}^{(3)} R$. Los tres primeros dan términos del tipo $h^{\mu\nu} \partial_\alpha h^{\lambda\sigma} \partial_\beta h^{\gamma\delta} + h^{\mu\nu} h^{\lambda\sigma} \partial_\alpha \partial_\beta h^{\gamma\delta}$ y el último da un término $h^{\mu\nu} h^{\alpha\beta} h^{\lambda\sigma} R$ con distintas contracciones para los índices μ, ν, α, \dots etc. El procedimiento para los $h^{(4)}$ es similar pero considerando los productos $\sqrt{\bar{g}} R^{(4)} + \sqrt{\bar{g}}^{(1)} R^{(3)} + \dots$ etc... Se calculan las derivadas funcionales utilizando

$$\frac{\delta h^{\mu\nu}(x)}{\delta h^{\alpha\beta}(y)} = \frac{1}{2}(\delta^{\mu\alpha}\delta^{\nu\beta} + \delta^{\nu\alpha}\delta^{\mu\beta})\delta(x-y) \quad (4.53)$$

4.3.1 Lado Izquierdo

En el lado izquierdo de la ecuación de evolución vamos a tener $\partial_t \Gamma_k^{(2)}$, que ya lo tenemos de los cálculos anteriores y es

$$\Gamma_k^{(2)} = \frac{1}{2}\kappa^2 Z_{Nk} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} h_{\mu\nu} \left[-D^2 - 2\lambda_k + C_T \bar{R} \right] h^{\mu\nu} - \frac{m_k^2}{2} (h_{\mu\nu} h^{\mu\nu} - h^2) \quad (4.54)$$

Al tomar las derivadas queda $\frac{\delta^2}{\delta h^{\alpha\beta} \delta h^{\lambda\sigma}}$

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{(2)}{}_{\alpha\beta\lambda\sigma} &= \frac{1}{2}\kappa^2 Z_{Nk} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \left[-D^2 - 2\lambda_k + C_T \bar{R} \right] \frac{1}{2} (\delta_{\alpha\sigma} \delta_{\beta\lambda} + \delta_{\beta\sigma} \delta_{\alpha\lambda}) \\ &\quad - \frac{m_k^2}{2} \left(\frac{1}{2} (\delta_{\alpha\sigma} \delta_{\beta\lambda} + \delta_{\beta\sigma} \delta_{\alpha\lambda}) - \delta_{\alpha\beta} \delta_{\lambda\sigma} \right) \end{aligned} \quad (4.55)$$

Luego multiplicamos por $g^{\alpha\beta} g^{\lambda\sigma}$

$$\begin{aligned} \Gamma_k^{(2)}{}_{\alpha\beta\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\kappa^2 Z_{Nk} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \left[-D^2 - 2\lambda_k + C_T \bar{R} \right] d \\ &\quad - \frac{m_k^2}{2} (d - d^2) \end{aligned} \quad (4.56)$$

Donde d es la dimensión que luego hacemos $d = 4$. Finalmente se toma la derivada c/r a la escala de energía así que resulta

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k^{(2)}{}_{\alpha\beta\alpha\beta} &= \frac{1}{2}\kappa^2 \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \left[-(\partial_t Z_{Nk}) D^2 - 2\partial_t (Z_{Nk} \lambda_k) + \partial_t Z_{Nk} C_T \bar{R} \right] d \\ &\quad - \frac{\partial_t (Z_{Nk} m_k^2)}{2} (d - d^2) \end{aligned} \quad (4.57)$$

Los términos $\partial_t Z_{Nk}$ y $\partial_t (Z_{Nk} \lambda_k)$ son conocidos del cálculo anterior, por lo que luego de obtener el valor de las trazas en el lado izquierdo de la ecuación podemos reemplazarlos para luego despejar $\partial_t (Z_{Nk} m_k^2)$

4.3.2 Lado Derecho

Las expresiones dentro de las trazas sólo pueden ser obtenidas mediante algún programa computacional (en este caso usamos mathematica) ya que, primero, hay que expandir a orden tres y cuatro y además al tomar las derivadas funcionales cada término se multiplica exponencialmente.

Por este motivo exponemos sólo los resultados obtenidos para las expresiones dentro de las trazas.

El resto del cálculo sigue el mismo procedimiento que en el caso anterior.

4.3.3 $Tr \left[G_k \Gamma^{(3)} G_k \Gamma^{(3)} G_k \right]$

Para $Tr \left[G_k \Gamma^{(3)} G_k \Gamma^{(3)} G_k \right]$ obtenemos

$$Tr[G_k \Gamma^{(3)} G_k \Gamma^{(3)} G_k] = Tr \left[\frac{\left[43626(D^2)^2 + 6504(-R + 2\lambda_k)(D^2) + 272(-R + 2\lambda_k)^2 \right]}{\left[-D^2 - 2\lambda_k + k^2 R \left(\frac{-D^2}{k^2} \right) + C_R R + \frac{m_k^2}{2} \right]^3} \right] \quad (4.58)$$

con $G_k = (\Gamma_k^{(2)} + R_k)^{-1}$.

Como es del tipo $\frac{1}{[A+(R+m)]^3}$ se expande el denominador en torno al término de masa y la curvatura

$$\frac{1}{[A + (R + m)]^3} = [A + (R + m)]^{-3} = A^{-3} - 3A^{-4}(R + m) \quad (4.59)$$

entonces queda

$$\begin{aligned} Tr[G_k \Gamma^{(3)} G_k \Gamma^{(3)} G_k] &= Tr \left[\frac{\left[43626(D^2)^2 + 6504(-R + 2\lambda_k)(D^2) + 272(-R + 2\lambda_k)^2 \right]}{\left[-D^2 - 2\lambda_k + k^2 R \left(\frac{-D^2}{k^2} \right) + C_R R + \frac{m_k^2}{2} \right]^3} \right] \\ &= Tr \left[\frac{\left[43626(D^2)^2 + 6504(-R + 2\lambda_k)(D^2) + 272(-R + 2\lambda_k)^2 \right]}{\left[-D^2 - 2\lambda_k + k^2 R \left(\frac{-D^2}{k^2} \right) \right]^3} \right] \\ &\quad - 3Tr \left[\frac{\left[43626(D^2)^2 + 6504(-R + 2\lambda_k)(D^2) + 272(-R + 2\lambda_k)^2 \right]}{\left[-D^2 - 2\lambda_k + k^2 R \left(\frac{-D^2}{k^2} \right) \right]^4} \right. \\ &\quad \left. \left(C_R R + \frac{m_k^2}{2} \right) \right] \end{aligned} \quad (4.60)$$

Definimos ahora

$$\begin{aligned} A_1 &= 43626(D^2)^2 + 6504(-R + 2\lambda_k)(D^2) + 272(-R + 2\lambda_k)^2 \\ N_1 &= -D^2 - 2\lambda_k + k^2 R \left(\frac{-D^2}{k^2} \right) \end{aligned} \quad (4.61)$$

De manera que la traza resulta

$$Tr[G_k \Gamma^{(3)} G_k \Gamma^{(3)} G_k] = Tr \left[\frac{[A_1]}{[N_1]^3} \right] - 3 \left(C_R R + \frac{m_k^2}{2} \right) Tr \left[\frac{[A_1]}{[N_1]^4} \right] \quad (4.62)$$

4.3.4 $Tr \left[G_k \Gamma^{(4)} G_k \right]$

Para $Tr G_k \Gamma^{(4)} G_k$ se obtiene

$$\text{Tr}G_k\Gamma^{(4)}G_k = \text{Tr}\left[\frac{\left[-100(D^2) - 8(-R + 2\lambda_k)\right]}{\left[-D^2 - 2\lambda_k + k^2R\left(\frac{-D^2}{k^2}\right) + C_R R + \frac{m_k^2}{2}\right]^2}\right] \quad (4.63)$$

Al expandir el denominador en este caso se obtiene

$$\begin{aligned} \text{Tr}G_k\Gamma^{(4)}G_k &= \text{Tr}\left[\frac{\left[-100(D^2) - 8(-R + 2\lambda_k)\right]}{\left[-D^2 - 2\lambda_k + k^2R\left(\frac{-D^2}{k^2}\right) + C_R R + \frac{m_k^2}{2}\right]^2}\right] \\ &= \text{Tr}\left[\frac{\left[-100(D^2) - 8(-R + 2\lambda_k)\right]}{\left[-D^2 - 2\lambda_k + k^2R\left(\frac{-D^2}{k^2}\right)\right]^2}\right] \\ &\quad - 2\text{Tr}\left[\frac{\left[-100(D^2) - 8(-R + 2\lambda_k)\right]}{\left[-D^2 - 2\lambda_k + k^2R\left(\frac{-D^2}{k^2}\right)\right]^3}\left(C_R R + \frac{m_k^2}{2}\right)\right] \end{aligned} \quad (4.64)$$

y como antes definimos

$$\begin{aligned} A_2 &= -100(D^2) - 8(-R + 2\lambda_k) \\ N_2 &= -D^2 - 2\lambda_k + k^2R\left(\frac{-D^2}{k^2}\right) \end{aligned} \quad (4.65)$$

y así la traza queda

$$\text{Tr}G_k\Gamma^{(4)}G_k = \text{Tr}\left[\frac{[A_2]}{[N_2]^2}\right] - 2\left(C_R R + \frac{m_k^2}{2}\right)\text{Tr}\left[\frac{[A_2]}{[N_2]^3}\right] \quad (4.66)$$

4.3.5 Ecuaciones de Evolución

Ahora, sumamos los resultados anteriores y multiplicamos por $\partial_t R_k = \partial_t\left(Z_{Nk}k^2R\left(\frac{-D^2}{k^2}\right)\right) = (2 - \eta_N(k))k^2R\left(\frac{-D^2}{k^2}\right) + 2D^2R'\left(\frac{-D^2}{k^2}\right)$ para obtener

$$\text{Tr}[W(D^2/k^2)] = \text{Tr}\left\{G_k\Gamma_k^{(3)}G_k\Gamma_k^{(3)}G_k\partial_t R_k\right\} - \frac{1}{2}\text{Tr}\left\{G_k\Gamma_k^{(4)}G_k\partial_t R_k\right\} \quad (4.67)$$

Con los resultados anteriores tenemos para el lado derecho (L.D.) de la ecuación de flujo

$$L.D. = \text{Tr}\left[\frac{[A_1]\partial_t R_k}{[N_1]^3}\right] - 3\left(C_R R + \frac{m_k^2}{2}\right)\text{Tr}\left[\frac{[A_1]\partial_t R_k}{[N_1]^4}\right]$$

$$-\frac{1}{2}Tr \left[\frac{[A_2] \partial_t R_k}{[N_2]^2} \right] + (C_{RR} + \frac{m_k^2}{2}) Tr \left[\frac{[A_2] \partial_t R_k}{[N_2]^3} \right] \quad (4.68)$$

Donde además vamos a definir

$$W_j^i = \frac{[A_j] \partial_t R_k}{[N_j]^i} \quad (4.69)$$

que sirve en el siguiente paso.

Lo siguiente es encontrar la forma del polinomio $W(-D^2)$ en la traza de la ecuación anterior y luego hacer el reemplazo $\frac{-D^2}{k^2} \rightarrow z$.

Con esto se puede escribir

$$Tr[W(-D^2)] = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} tr(I) \left[Q_{\frac{d}{2}}[W] \int d^d x \sqrt{g} + \frac{1}{6} Q_{\frac{d}{2}-1}[W] \int d^d x \sqrt{g} R \right] \quad (4.70)$$

donde Los Q_n son

$$Q_n[W] = \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} W(z) \quad (4.71)$$

que son integrales ya conocidas dependiendo de la forma del cutoff R_k .

Entonces utilizando eq(4.70) para cada una de las trazas en (4.68) se tiene

$$\begin{aligned} L.D. &= Tr \left[W_1^3 \right] - 3(C_{RR} + \frac{m_k^2}{2}) Tr \left[W_1^4 \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} Tr \left[W_2^2 \right] + (C_{RR} + \frac{m_k^2}{2}) Tr \left[W_2^3 \right] \\ &= (4\pi)^{-\frac{d}{2}} tr(I) \left[Q_{\frac{d}{2}}[W_1^3] \int d^d x \sqrt{g} + \frac{1}{6} Q_{\frac{d}{2}-1}[W_1^3] \int d^d x \sqrt{g} R \right] \\ &\quad - 3(C_{RR} + \frac{m_k^2}{2}) (4\pi)^{-\frac{d}{2}} tr(I) \left[Q_{\frac{d}{2}}[W_1^4] \int d^d x \sqrt{g} + \frac{1}{6} Q_{\frac{d}{2}-1}[W_1^4] \int d^d x \sqrt{g} R \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} tr(I) \left[Q_{\frac{d}{2}}[W_2^2] \int d^d x \sqrt{g} + \frac{1}{6} Q_{\frac{d}{2}-1}[W_2^2] \int d^d x \sqrt{g} R \right] \\ &\quad + (C_{RR} \frac{m_k^2}{2}) (4\pi)^{-\frac{d}{2}} tr(I) \left[Q_{\frac{d}{2}}[W_2^3] \int d^d x \sqrt{g} + \frac{1}{6} Q_{\frac{d}{2}-1}[W_2^3] \int d^d x \sqrt{g} R \right] \quad (4.72) \end{aligned}$$

Como estamos buscando sólo la ecuación para el término de masa, no nos interesan los términos proporcionales al término de curvatura R, así que nos quedamos con

$$L.D. = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} tr(I) \left[Q_{\frac{d}{2}}[W_1^3] \int d^d x \sqrt{g} \right]$$

$$\begin{aligned}
& -3\left(\frac{m_k^2}{2}\right)(4\pi)^{-\frac{d}{2}}\text{tr}(I)\left[Q_{\frac{d}{2}}[W_1^4]\int d^d x\sqrt{g}\right] \\
& -\frac{1}{2}(4\pi)^{-\frac{d}{2}}\text{tr}(I)\left[Q_{\frac{d}{2}}[W_2^2]\int d^d x\sqrt{g}\right] \\
& +\frac{m_k^2}{2}(4\pi)^{-\frac{d}{2}}\text{tr}(I)\left[Q_{\frac{d}{2}}[W_2^3]\int d^d x\sqrt{g}\right]
\end{aligned} \tag{4.73}$$

En el lado derecho de la ecuación nos va a interesar los términos proporcionales a $\int d^d x\sqrt{g}$, por lo que se obtiene

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\kappa^2\left[-2\partial_t(Z_{Nk}\lambda_k) - \frac{\partial_t(Z_{Nk}m_k^2)}{2}(d-d^2)\right] &= 10(4\pi)^{-\frac{d}{2}}\left[Q_{\frac{d}{2}}[W_1^3] - 3\left(\frac{m_k^2}{2}\right)Q_{\frac{d}{2}}[W_1^4]\right. \\
& \left. - \frac{1}{2}Q_{\frac{d}{2}}[W_2^2] + \frac{m_k^2}{2}Q_{\frac{d}{2}}[W_2^3]\right]
\end{aligned} \tag{4.74}$$

Los términos $\partial_t Z_{Nk}$ y $\partial_t(Z_{Nk}\lambda_k)$ son conocidos del cálculo anterior y los podemos utilizar de manera consistente, como está explicado en [19].

Ahora hay que despejar los $Q_n[W_j^i]$ en función de las integrales

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_n^m(\bar{\lambda}_k/k^2) &= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty dz z^{n-1}\frac{R(z)}{[z - 2\frac{\bar{\lambda}_k}{k^2} + R(z)]^m} \\
\Phi_n^m(\bar{\lambda}_k/k^2) &= \frac{1}{\Gamma(n)}\int_0^\infty dz z^{n-1}\frac{R(z) - zR'(z)}{[z - 2\frac{\bar{\lambda}_k}{k^2} + R(z)]^m}
\end{aligned} \tag{4.75}$$

que son conocidas dependiendo del cut off $R(z)$ que se escoja

Así, la ecuación en función de las “threshold functions” Φ y $\tilde{\Phi}$ resulta

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}\kappa^2\left[-2\partial_t(Z_{Nk}\lambda_k) - \frac{\partial_t(Z_{Nk}m_k^2)}{2}(d-d^2)\right] &= 10(4\pi)^{-\frac{d}{2}}\left[4\bar{\lambda}_k^2 k^d\left(2\cdot 272\left[2\Phi_{d/2}^3 - \eta_N\tilde{\Phi}_{d/2}^3\right]\right.\right. \\
& \left.- 3\cdot 272\frac{\bar{m}_k^2}{2}\left[2\Phi_{d/2}^4 - \eta_N\tilde{\Phi}_{d/2}^4\right]\right) \\
& + k^d 8 * 2\bar{\lambda}_k\left(\left[2\Phi_{d/2}^2 - \eta_N\tilde{\Phi}_{d/2}^2\right]\right. \\
& \left. - \frac{\bar{m}_k^2}{2}\left[2\Phi_{d/2}^3 - \eta_N\tilde{\Phi}_{d/2}^3\right]\right)
\end{aligned}$$

Donde en el lado derecho de la ecuación $\bar{m}_k = m_k k^{-1}$ y $\bar{\lambda}_k = \lambda_k k^{-2}$ son las constantes adimensionales.

Con esta ecuación más las ya conocidas de la sección anterior

$$\partial_t(Z_{Nk}\lambda_k) = \frac{1}{16\kappa^2}(4\pi)^{-\frac{d}{2}}k^d\left[d(d+1)\left\{2\Phi_{\frac{d}{2}}^1 - \eta_N(k)\tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^1\right\} - 8d\Phi_{\frac{d}{2}}^1(0)\right]$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{m^2 (d-1)(d^2-2)}{k^2 (d-2)} \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}}^2 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^2 \right\} \Big] \\
\partial_t Z_{Nk} = & - \frac{1}{4\kappa^2} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} k^{d-2} \left[\frac{d}{12} (d+1) \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}-1}^1 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}-1}^1 \right\} \right. \\
& - \frac{d}{2} (d-1) \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}}^2 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^2 \right\} - \frac{2}{3} d\Phi_{\frac{d}{2}-1}^1(0) - \Phi_{\frac{d}{2}}^2(0) \\
& \left. - \frac{m^2 d^2 (d-1)}{k^2 24(d-2)} \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}-1}^2 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}-1}^2 \right\} \right] \quad (4.76)
\end{aligned}$$

podemos despejar la función beta $\partial_t m_k^2$.

$$\begin{aligned}
\partial_t m_k^2 = & - \frac{2}{Z_{Nk} (d-d^2)} \frac{2}{\kappa^2} 10(4\pi)^{-\frac{d}{2}} k^d \left[4\bar{\lambda}_k^2 \left(2 \cdot 272 \left[2\Phi_{d/2}^3 - \eta_N \tilde{\Phi}_{d/2}^3 \right] \right. \right. \\
& \left. \left. - 3 \cdot 272 \frac{\bar{m}_k^2}{2} \left[2\Phi_{d/2}^4 - \eta_N \tilde{\Phi}_{d/2}^4 \right] \right) \right. \\
& \left. + 8 * 2\bar{\lambda}_k \left(\left[2\Phi_{d/2}^2 - \eta_N \tilde{\Phi}_{d/2}^2 \right] - \frac{\bar{m}_k^2}{2} \left[2\Phi_{d/2}^3 - \eta_N \tilde{\Phi}_{d/2}^3 \right] \right) \right] \\
& - 2 \frac{2}{Z_{Nk} (d-d^2)} \partial_t (Z_{Nk} \lambda_k) - \frac{1}{2} \frac{2}{Z_{Nk}} m_k^2 \partial_t (Z_{Nk}) \quad (4.77)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\partial_t \bar{m}_k^2 = & - 2\bar{m}_k^2 - (d-d^2) 10(4\pi)^{-\frac{d}{2}} 4 * 32\pi g_k \left[4\bar{\lambda}_k^2 \left(2 \cdot 272 \left[2\Phi_{d/2}^3 - \eta_N \tilde{\Phi}_{d/2}^3 \right] \right. \right. \\
& \left. \left. - 3 \cdot 272 \frac{\bar{m}_k^2}{2} \left[2\Phi_{d/2}^4 - \eta_N \tilde{\Phi}_{d/2}^4 \right] \right) \right. \\
& \left. + 8 * 2\bar{\lambda}_k \left(\left[2\Phi_{d/2}^2 - \eta_N \tilde{\Phi}_{d/2}^2 \right] - \frac{\bar{m}_k^2}{2} \left[2\Phi_{d/2}^3 - \eta_N \tilde{\Phi}_{d/2}^3 \right] \right) \right] \\
& - 4(d-d^2) 2\pi g_k (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[d(d+1) \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}}^1 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^1 \right\} - 8d\Phi_{\frac{d}{2}}^1(0) \right. \\
& \left. + \bar{m}_k^2 \frac{(d-1)(d^2-2)}{(d-2)} \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}}^2 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^2 \right\} \right] \\
& + \bar{m}_k^2 g_k 8\pi (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[\frac{d}{12} (d+1) \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}-1}^1 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}-1}^1 \right\} \right. \\
& \left. - \frac{d}{2} (d-1) \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}}^2 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^2 \right\} - \frac{2}{3} d\Phi_{\frac{d}{2}-1}^1(0) - \Phi_{\frac{d}{2}}^2(0) \right. \\
& \left. - \bar{m}_k^2 \frac{d^2(d-1)}{24(d-2)} \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}-1}^2 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}-1}^2 \right\} \right] \quad (4.78)
\end{aligned}$$

y con $d = 4$

$$\begin{aligned}
\partial_t \bar{m}_k^2 = & -2\bar{m}_k^2 + 120(4\pi)^{-2} 4 * 32\pi g_k \left[4\bar{\lambda}_k^2 \left(2 \cdot 272 \left[2\Phi_2^3 - \eta_N \tilde{\Phi}_2^3 \right] \right. \right. \\
& - 3 \cdot 272 \frac{\bar{m}_k^2}{2} \left[2\Phi_2^4 - \eta_N \tilde{\Phi}_2^4 \right] \left. \right) \\
& + 8 * 2\bar{\lambda}_k \left(\left[2\Phi_2^2 - \eta_N \tilde{\Phi}_2^2 \right] - \frac{\bar{m}_k^2}{2} \left[2\Phi_2^3 - \eta_N \tilde{\Phi}_2^3 \right] \right) \left. \right] \\
& + 48 * 2\pi g_k (4\pi)^{-2} \left[20 \left\{ 2\Phi_2^1 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_2^1 \right\} - 8d\Phi_2^1(0) \right. \\
& + 21\bar{m}_k^2 \left\{ 2\Phi_2^2 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_2^2 \right\} \left. \right] \\
& + \bar{m}_k^2 g_k 8\pi (4\pi)^{-2} \left[\frac{5}{3} \left\{ 2\Phi_1^1 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_1^1 \right\} \right. \\
& - 6 \left\{ 2\Phi_2^2 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_2^2 \right\} - \frac{2}{3} d\Phi_1^1(0) - \Phi_2^2(0) \\
& \left. - \bar{m}_k^2 \left\{ 2\Phi_1^2 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_1^2 \right\} \right] \tag{4.79}
\end{aligned}$$

El resto de las ecuaciones para las constantes ya adimensionales son

$$\begin{aligned}
\partial_t g_k &= (d-2 + \eta_N(k)) g_k \\
\partial_t \lambda_k &= (\eta_N(k) - 2) \lambda_k \\
&+ 2\pi g_k (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[d(d+1) \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}}^1 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^1 \right\} - 8d\Phi_{\frac{d}{2}}^1(0) + \frac{m^2}{k^2} \frac{(d-1)(d^2-2)}{(d-2)} \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}}^2 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^2 \right\} \right]
\end{aligned}$$

con

$$\eta_N(k) = g_k 8\pi (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \frac{\frac{d}{6} (d+1) \Phi_{\frac{d}{2}-1}^1 - d(d-1) \Phi_{\frac{d}{2}}^2 - \frac{2}{3} d\Phi_{\frac{d}{2}-1}^1(0) - \Phi_{\frac{d}{2}}^2(0) - \frac{m^2}{k^2} \frac{d^2(d-1)}{12(d-2)} \Phi_{\frac{d}{2}-1}^2}{1 + g_k 8\pi (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left\{ \frac{d}{12} (d+1) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}-1}^1 - \frac{d}{2} (d-1) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^2 - \frac{m^2}{k^2} \frac{d^2(d-1)}{24(d-2)} \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}-1}^2 \right\}}$$

De esta manera y para el sharp cutoff obtenemos la función beta para la masa

$$\begin{aligned}
\partial_t m_k^2 = & -2m_k^2 + \frac{960g_k}{\pi} \left[\lambda_k^2 \left(\frac{544}{(1-2\lambda_k)^2} - \frac{272m_k^2}{(1-2\lambda_k)^3} \right) - \frac{m_k^2}{2(1-2\lambda_k)^2} + \frac{16}{1-2\lambda_k} \right] \\
& + \frac{8g_k}{\pi} \left[20 \left(4\zeta(3) - 2\log(1-2\lambda_k) + \frac{42m_k^2}{1-2\lambda_k} - 64\zeta(3) \right) \right. \\
& \left. - \frac{3g_k}{2(5g_k+6\pi)} \left(-\frac{2m_k^2}{1-2\lambda_k} - \frac{12}{1-2\lambda_k} + \frac{10}{3} \left(\frac{\pi^2}{6} - \log(1-2\lambda_k) \right) - \frac{4\pi^2}{9} - 4 \right) \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{g_k m_k^2}{2\pi} \left[\frac{5}{3} \left(\frac{\pi^2}{3} - 2 \log(1 - 2\lambda_k) - \frac{2m_k^2}{1 - 2\lambda_k} - \frac{12}{1 - 2\lambda_k} - \frac{4\pi^2}{9} - 1 \right. \right. \\
& \left. \left. - \frac{3g_k}{(5g_k + 6\pi)} \left(-\frac{2m_k^2}{1 - 2\lambda_k} - \frac{12}{1 - 2\lambda_k} + \frac{10}{3} \left(\frac{\pi^2}{6} - \log(1 - 2\lambda_k) \right) - \frac{4\pi^2}{9} - 4 \right) \right] \quad (4.81)
\end{aligned}$$

4.3.6 Puntos Fijos y Exponentes Críticos

Ahora tenemos un sistema de tres funciones beta para los tres couplings de la teoría.

Este sistema de ecuaciones nos da el punto fijo gaussiano habitual para $\lambda_k = g_k = m_k = 0$ y además obtenemos un punto fijo no gaussiano con las coordenadas $\lambda_k = 0.3981$, $g_k = 0.2192$ y $m_k = 0.4221$.

Estos valores son similares a los encontrados en la sección anterior anterior ($\lambda_k^* = 0,33$ y $g_k^* = 0,40$). Sin embargo, en este caso no podemos directamente hacer $m \rightarrow 0$ ya que el valor de m viene dado por la teoría.

Para los exponentes críticos el cálculo es similar salvo que se incluye en este caso la función beta de la masa y las derivadas con respecto a la masa en las funciones beta.

Los valores que encontramos en este caso son $\theta_1 = 342408$, $\theta_2 = 7.91$ y $\theta_3^* = 5.09$ para el punto fijo no gaussiano y $\theta_1 = \theta_2 = 2$ y $\theta_3 = -2$ para el punto fijo en el origen.

Los valores encontrados para el punto fijo no gaussiano dan cuenta de que estos resultados no pueden ser relevantes desde la física y los detalles de esto lo vemos en las conclusiones y análisis de los resultados.

Chapter 5

Análisis y Conclusiones

Hemos estudiado el grupo de renormalización funcional aplicado al caso de gravitación de Einstein-Hilbert más un término de masa.

En primera instancia estudiamos el caso en el cual la masa del gravitón es un parámetro no dependiente de la escala de energía y encontramos que el valor del punto fijo depende de manera continua del valor asignado a la masa.

En este caso vemos que no existe una discontinuidad en el límite $m \rightarrow 0$, de manera que la discontinuidad vDVZ no está presente en este caso, por lo que los valores dependientes de los couplings g_k y λ_k se reproducen de manera continua para $m = 0$ y $m \rightarrow 0$.

Esto se puede ver de manera explícita en la figura(4.1) al ver cómo se deforman de manera continua los diagramas de flujo al variar el valor de la masa.

Esto puede deberse de algún modo a que, al realizar la expansión alrededor del escalar de Ricci más la masa del gravitón $\sim R + c_m m_k^2$, la masa actúa como una corrección a la curvatura R , la cual se produce de manera continua.

La ausencia de la discontinuidad vDVZ aparece como un resultado relevante debido a que hasta ahora la única solución para esta discontinuidad viene dada por el mecanismo de Stuckelberg, y además a que la variación de los valores de las constantes de acoplamiento se produce de manera continua dependiendo del valor de la masa.

Al incluir un término de masa en la acción de Einstein-Hilbert estamos modificando la teoría en el sector infrarojo. Sin embargo, esto tiene consecuencias en el sector UV, específicamente en el punto fijo no gaussiano de la teoría. Por otro lado, el término de masa no produce cambios en el punto fijo gaussiano para $\lambda_k = g_k = 0$

Al considerar el término de masa independiente de la escala, los valores de los "critical exponents" varían también de manera continua al hacer variar la masa del gravitón. Estos se desvían de su valor esperado (~ 2) para $m = 0$ de manera continua. Este hecho es consistente con el valor esperado para el caso en que la masa del gravitón es no nula, ya que los experimentos fijan una cota superior para la masa del gravitón en el límite $\sim 10^{-23}$ eV (cinco ordenes de magnitud de diferencia comparado con la cota experimental para la masa del fotón $< 10^{-18}$ eV). De manera que nuestro procedimiento es consistente con estos resultados.

Además, vemos que al considerar la masa en un valor aproximado a $m = 0,422$, que es el valor encontrado para el punto fijo en el caso de la masa dependiente de la escala, los valores para los otros couplings son similares a los que se obtienen en este último caso, por lo que este hecho aparece como una demostración de que hay consistencia entre ambos cálculos.

Al considerar la masa como dependiente de la escala seguimos obteniendo un punto fijo no gaussiano y con valores similares al caso anterior, cumpliendo el requisito para considerar a esta teoría como "asymptotically safe". Sin embargo, los valores encontrados para los exponentes críticos indican serios problemas en la confiabilidad de estos resultados.

Estos valores demuestran que las teorías de massive gravity presentan amplias dificultades para poder obtener resultados relevantes para la física.

Una solución sería considerar términos no lineales para investigar los resultados. De hecho esto aparece dentro de nuestras motivaciones para escoger este tema de estudio, ya que la teoría Λ_3 considera estos términos no lineales.

Otra posibilidad en cuanto a los valores que se obtienen para los critical exponents puede deberse a que la teoría que consideramos no era manifiestamente invariante bajo difeomorfismos. Como vimos en el capítulo de massive gravity, esta invarianza puede restaurarse mediante el mecanismo de Stuckelberg y se aplica en la teoría de Λ_3 .

Esta teoría, como dijimos, tiene una escala de corte que depende de la masa del gravitón y de la constante de Gravitación, de manera que nuestro trabajo se puede extender en esa dirección considerando los resultados hasta acá obtenidos.

Appendix A

EAA for Gravity

A.1 EAA para gravedad

En este apéndice vemos con detalles la construcción de la "Effective Average Action" para el caso de la gravitación.

Comenzamos por una métrica $\gamma_{\mu\nu}$ (Riemanniana) de manera que la integral funcional $\int D\gamma_{\mu\nu} \exp\{-S[\gamma_{\mu\nu}] + \text{sourceterms}\}$ y la acción $S[\gamma_{\mu\nu}]$ (positiva definida) son invariantes bajo una transformación general de coordenadas

$$\delta\gamma_{\mu\nu} = L_v\gamma_{\mu\nu} \equiv v^\sigma \partial_\sigma \gamma_{\mu\nu} + \partial_\mu v^\sigma \gamma_{\sigma\nu} + \partial_\nu v^\sigma \gamma_{\mu\sigma} \quad (\text{A.1})$$

L_v representa la derivada de Lie. Utilizamos el formalismo de la background metric de manera que podemos descomponer $\gamma_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$. La métrica del background \bar{g} se mantiene indefinida.

La transformación de gauge entonces resulta

$$\begin{aligned} \delta h_{\mu\nu} &= L_v h_{\mu\nu} \\ \delta \bar{g}_{\mu\nu} &= L_v \bar{g}_{\mu\nu} \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

Se toma un gauge fixing a priori $F_\mu(h; \bar{g}) = 0$ y el truco de Faddeev Popov se aplica de manera directa. Se incluye un cut off infrarojo $\Delta_k S[h, C, \bar{C}; \bar{g}]$ y tenemos el funcional generatriz W_k para las funciones conectadas de Green

$$\begin{aligned} \exp\{W_k[t^{\mu\nu}, \sigma^\mu, \bar{\sigma}_\mu; \bar{g}_{\mu\nu}]\} &= \int Dh_{\mu\nu} DC^\mu D\bar{C}_\mu \exp\{-S[\bar{g} + h] - S_{gf}[h; \bar{g}] \\ &\quad - S_{gh}[h, C, \bar{C}; \bar{g}] - \Delta_k S[h, C, \bar{C}; \bar{g}] - S_{source}\} \end{aligned} \quad (\text{A.3})$$

con S_{gf}

$$S_{gf}[h, \bar{g}] = \frac{1}{2\alpha} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{g}^{\mu\nu} F_\mu F_\nu \quad (\text{A.4})$$

$$F_\mu[h; \bar{g}] = \sqrt{2\kappa} (\bar{D}^\nu h_{\mu\nu} - \bar{\omega} \bar{D}_\mu h^\nu_\nu) \quad (\text{A.5})$$

Donde \bar{D} va con los christoffel de la métrica del background. κ tiene dimensiones de masa y la podemos tomar $\kappa \equiv (32\pi\bar{G})^{-1/2}$ y \bar{G} un valor de referencia de la cte newton. Este gauge es de la forma más general y reproduce para el caso de la métrica plana la condición armónica $\frac{1}{2}\partial_\mu h^\nu_\nu = \partial_\nu h^\nu_\mu$.

Para los Faddeev Popov tenemos

$$\begin{aligned}
S_{gh}[h, C, \bar{C}; \bar{g}] &= -\kappa^{-1} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu \bar{g}^{\mu\nu} \frac{\partial F_\nu}{\partial h_{\alpha\beta}} L_C(\bar{g}_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) \\
&= -\kappa^{-1} \sqrt{2} \kappa \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu \bar{g}^{\mu\nu} \frac{\partial}{\partial h_{\alpha\beta}} (\bar{D}^\sigma h_{\nu\sigma} - \omega \bar{D}_\nu h^\lambda{}_\lambda) \\
&\quad [C^\phi \partial_\phi g_{\alpha\beta} + \partial_\alpha C^\phi g_{\phi\beta} + \partial_\beta C^\phi g_{\alpha\phi}] \tag{A.6}
\end{aligned}$$

con $\frac{\partial h_{\alpha\beta}}{\partial h_{\mu\nu}} = \frac{1}{2}(\delta_\alpha^\mu \delta_\beta^\nu + \delta_\alpha^\nu \delta_\beta^\mu)$ y las derivadas de Lie se pueden expresar en función de derivadas covariantes y $\bar{D}\bar{g} = 0$

$$\begin{aligned}
S_{gh}[h, C, \bar{C}; \bar{g}] &= -\sqrt{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu \bar{g}^{\mu\nu} \left[\frac{1}{2}(\delta_\sigma^\alpha \delta_\nu^\beta + \delta_\nu^\alpha \delta_\sigma^\beta) \bar{D}^\sigma - \right. \\
&\quad \left. \frac{1}{2}(\delta_\lambda^\alpha \delta_\gamma^\beta + \delta_\gamma^\alpha \delta_\lambda^\beta) \omega \bar{g}^{\lambda\gamma} \bar{D}_\nu \right] (D_\alpha C^\phi g_{\phi\beta} + D_\beta C^\phi g_{\alpha\phi}) \tag{A.7}
\end{aligned}$$

Para el primer término tenemos

$$\begin{aligned}
&\bar{g}^{\mu\nu} \frac{1}{2}(\delta_\sigma^\alpha \delta_\nu^\beta + \delta_\nu^\alpha \delta_\sigma^\beta) \bar{D}^\sigma (D_\alpha C^\phi g_{\phi\beta} + D_\beta C^\phi g_{\alpha\phi}) \\
&= \bar{g}^{\mu\nu} \frac{1}{2} [\bar{D}^\alpha D_\alpha C^\phi g_{\phi\nu} + \bar{D}^\sigma D_\nu C^\phi g_{\phi\sigma} \\
&\quad \bar{D}^\alpha D_\nu C^\phi g_{\alpha\phi} + \bar{D}^\sigma D_\sigma C^\phi g_{\nu\phi}] \\
&= \bar{D}^\alpha g_\phi^\mu D_\alpha C^\phi + \bar{D}^\sigma g_{\phi\sigma} D^\mu C^\phi \tag{A.8}
\end{aligned}$$

Y para el segundo

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{2} \omega \bar{g}^{\mu\nu} (\delta_\lambda^\alpha \delta_\gamma^\beta + \delta_\gamma^\alpha \delta_\lambda^\beta) \bar{g}^{\lambda\gamma} \bar{D}_\nu (D_\alpha C^\phi g_{\phi\beta} + D_\beta C^\phi g_{\alpha\phi}) \\
&= \frac{1}{2} \omega \bar{g}^{\mu\nu} \left[2\bar{g}^{\alpha\beta} \bar{D}_\nu D_\alpha C^\phi g_{\phi\beta} + 2\bar{g}^{\alpha\beta} \bar{D}_\nu D_\beta C^\phi g_{\phi\alpha} \right] \\
&= 2\omega \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{D}^\mu D_\alpha C^\phi g_{\phi\beta} \tag{A.9}
\end{aligned}$$

Con lo que obtenemos

$$\begin{aligned}
S_{gh}[h, C, \bar{C}; \bar{g}] &= -\sqrt{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu \left[\bar{D}^\alpha g_\phi^\mu D_\alpha C^\phi + \bar{D}^\sigma g_{\phi\sigma} D^\mu C^\phi - \right. \\
&\quad \left. 2\omega \bar{g}^{\alpha\beta} \bar{D}^\mu D_\alpha C^\phi g_{\phi\beta} \right] \tag{A.10}
\end{aligned}$$

Que se puede escribir como

$$S_{gh}[h, C, \bar{C}; \bar{g}] = -\sqrt{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu M[g, \bar{g}]^\mu{}_\nu C^\nu \tag{A.11}$$

Con el operador de Faddeev Popov

$$M[g, \bar{g}]^\mu{}_\nu = \bar{D}^\rho g_\nu^\mu D_\rho + \bar{D}^\rho g_{\rho\nu} D_\mu - 2\omega \bar{D}^\mu \bar{g}^{\rho\sigma} g_{\rho\nu} D_\sigma \tag{A.12}$$

La parte esencial es el IR cut off, que es de la forma

$$\Delta_k S = \frac{\kappa^2}{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} h_{\mu\nu} R_k^{grav}[\bar{g}]^{\mu\nu\rho\sigma} h_{\rho\sigma} + \sqrt{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu R_k^{gh}[\bar{g}] C^\mu \quad (\text{A.13})$$

Los R discriminan entre los momentos grandes y chicos, los con $p^2 \gg k^2$ se suprimen, los otros se integran sin problema. Estos se pueden escribir como $R_k[\bar{g}] = Z_k k^2 R^{(0)}(-\bar{D}^2/k^2)$ con los $R^{(0)}(0) = 1$ y $R^{(0)}(\infty) = 0$.

Hay opciones para fijar los R_k como $R^{(0)}(u) = u(\exp u - 1)^{-1}$ o el optimizado $R^{(0)}(u) = (1-u)\theta(1-u)$ con $u = p^2/k^2$. Los Z son distintos para los ghost y para los graviton cut off. De manera que se cumple que Z_k^{gh} es un numero mientras que Z_k^{grav} es un tensor a partir de \bar{g} .

Consideramos \bar{D}^2 en el $\Delta_k S$ debido a que así el $h_{\mu\nu}$ es cuadrático, así sólo hay segundas derivadas funcionales de Γ_k . Además es invariante frente a las transformaciones de gauge de background.

Volviendo al funcional generatriz W_k , hemos acoplado $h_{\mu\nu}, C^\mu, \bar{C}_\mu$ a las fuentes $t^{\mu\nu}, \bar{\sigma}_\mu, \sigma^\mu$ respectivamente, y tenemos para los valores de expectación

$$\begin{aligned} \bar{h}_{\mu\nu} &= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta t^{\mu\nu}} \\ \bar{\zeta}^\mu &= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}}} \frac{\delta W_k}{\delta \bar{\sigma}_\mu} \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

y lo mismo para $\bar{\xi}$ relacionado al valor de expectación de \bar{C} . La transformada de Legendre del funcional generatriz $W_k[t^{\mu\nu}, \sigma^\mu, \bar{\sigma}_\mu; \bar{g}_{\mu\nu}]$ resulta

$$\tilde{\Gamma}_k[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] = \int d^d x \sqrt{\bar{g}} (t^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} + \bar{\sigma}_\mu \bar{\zeta}^\mu + \sigma^\mu \bar{\xi}_\mu) - W_k[t, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] \quad (\text{A.15})$$

Ahora podemos escribir la effective average action

$$\Gamma_k[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] = \tilde{\Gamma}_k[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] - \Delta_k S[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] \quad (\text{A.16})$$

Que cumple con

$$\begin{aligned} \Gamma_{k \rightarrow \infty}[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] &= \tilde{\Gamma}_{k \rightarrow \infty}[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] \\ &= \int d^d x \sqrt{\bar{g}} (t^{\mu\nu} \bar{h}_{\mu\nu} + \bar{\sigma}_\mu \bar{\zeta}^\mu + \sigma^\mu \bar{\xi}_\mu) - W_{k \rightarrow \infty}[t, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] \\ &= \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Podemos definir el valor de expectacion cuantico de $\gamma_{\mu\nu}, g_{\mu\nu}(x) \equiv \bar{h}_{\mu\nu}(x) + \bar{g}_{\mu\nu}(x)$ para despejar $\bar{h}_{\mu\nu}$ en Γ_k . Lo bueno es que todo transforma como corresponde en Γ_k para transformaciones de coordenadas

$$\Gamma_k[\Phi + L_v \Phi] = \Gamma_k[\Phi] \quad (\text{A.18})$$

con $\Phi = \{g, \bar{\zeta}, \bar{\xi}, \bar{g}\}$. Esto es una consecuencia de

$$W_k[J + L_v J] = W_k[J] \quad (\text{A.19})$$

con $J = \{t^{\mu\nu}, \sigma^\mu, \bar{\sigma}_\mu; \bar{g}_{\mu\nu}\}$ Como los R mueren para $k \rightarrow 0$, se recupera la acción efectiva $\Gamma[g_{\mu\nu}]$ haciendo $g_{\mu\nu} = \bar{g}_{\mu\nu}$, o $\bar{h}_{\mu\nu} = 0$. Tomando la derivada de escala de $\exp[W_k]$ y reexpresando en función de Γ_k se obtiene

$$\begin{aligned}
\partial_t \Gamma_k[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] &= \partial_t \tilde{\Gamma}_k[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] - \partial_t \Delta_k S[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] \\
&= -\partial_t W_k[t, \sigma, \bar{\sigma}; \bar{g}] - \partial_t \Delta_k S[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] \\
&= -\frac{\int Dh_{\mu\nu} DC^\mu D\bar{C}_\mu \partial_t(-) \Delta_k S[h, C, \bar{C}; \bar{g}] \exp\{S_{tot}\}}{Z} - \partial_t \Delta_k S[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] \\
&= \frac{\int Dh_{\mu\nu} DC^\mu D\bar{C}_\mu \left[\frac{\kappa^2}{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} h_{\mu\nu} \partial_t R_k^{grav}[\bar{g}]^{\mu\nu\rho\sigma} h_{\rho\sigma} - \sqrt{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu \partial_t R_k^{gh}[\bar{g}] C^\mu \right]}{Z} \\
&\quad - \partial_t \Delta_k S[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] \\
&= \frac{1}{2} \frac{\kappa^2}{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} < h_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} > \partial_t R_k^{grav}[\bar{g}]^{\mu\nu\rho\sigma} - \sqrt{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} < \bar{C}_\mu C^\mu > \partial_t R_k^{gh} \\
&\quad - \partial_t \Delta_k S[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] \tag{A.20}
\end{aligned}$$

Utilizamos la relación

$$\begin{aligned}
G_{ij}(x, y) &= < \chi_i(x) \chi_j(y) > - < \chi_i(x) > < \chi_j(y) > \\
&= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)}} \frac{\delta^2 W_k}{\delta J^i(x) \delta J^j(y)} \tag{A.21}
\end{aligned}$$

Y obtenemos

$$< h_{\mu\nu} h_{\rho\sigma} > = G_{\bar{h}\bar{h}}(x, y) + \bar{h}_{\mu\nu}(x) \bar{h}_{\rho\sigma}(x) \tag{A.22}$$

y lo mismo para los ghost. Se eliminan los términos con $\bar{h}\bar{h}\partial_t R_k$ y los de los fantasmas con el $\partial_t \Delta_k S$ y obtenemos

$$\partial_t \Gamma_k[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] = \frac{\kappa^2}{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} G_{\bar{h}\bar{h}} \partial_t R_k^{grav}[\bar{g}]^{\mu\nu\rho\sigma} - \sqrt{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} G_{\bar{\zeta}\bar{\zeta}} \partial_t R_k^{gh} \tag{A.23}$$

y que G y $\tilde{\Gamma}$ son matrices inversas según

$$\int d^d y \sqrt{\bar{g}(y)} G_{ij}(x, y) \tilde{\Gamma}_k^{(2)jl}(y, z) = \delta_i^l \frac{\delta(x-z)}{\sqrt{\bar{g}(z)}} \tag{A.24}$$

entonces denotamos $G_{ij} = [\tilde{\Gamma}_{ij}^{(2)}]^{-1}$ con

$$\begin{aligned}
\tilde{\Gamma}_{ij}^{(2)}(x, y) &= \frac{1}{\sqrt{\bar{g}(x)\bar{g}(y)}} \frac{\delta^{(2)} \tilde{\Gamma}(x, y)}{\delta \chi_i(x) \delta \chi_j(y)} \\
&= \Gamma_{ij}^{(2)}(x, y) + \frac{\delta^{(2)} \Delta_k S(x, y)}{\delta \chi_i(x) \delta \chi_j(y)} \tag{A.25}
\end{aligned}$$

Redefiniendo $\frac{\kappa^2}{2} R_k^{grav} \rightarrow \hat{R}_k^{grav}$ y $\sqrt{2} R_k^{gh} \rightarrow \hat{R}_k^{gh}$ obtenemos

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] &= \frac{1}{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \left(\Gamma_k^{(2)} + \hat{R}_k^{grav} \right)_{\bar{h}\bar{h}}^{-1} \left(\partial_t \hat{R}_k^{grav} \right. \\ &\quad \left. - \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \left(\Gamma_k^{(2)} + \hat{R}_k \right)_{\bar{\xi}\bar{\xi}}^{-1} \partial_t \hat{R}_k^{gh} \right) \end{aligned} \quad (A.26)$$

Que finalmente lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} \partial_t \Gamma_k[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] &= \frac{1}{2} Tr \left[\left(\Gamma_k^{(2)} + \hat{R}_k \right)_{\bar{h}\bar{h}}^{-1} \left(\partial_t R_k \right)_{\bar{h}\bar{h}} \right] \\ &\quad - \frac{1}{2} Tr \left[\left\{ \left(\Gamma_k^{(2)} + \hat{R}_k \right)_{\bar{\xi}\bar{\xi}}^{-1} - \left(\Gamma_k^{(2)} + \hat{R}_k \right)_{\bar{\xi}\bar{\xi}}^{-1} \right\} \left(\partial_t R_k \right)_{\bar{\xi}\bar{\xi}} \right] \end{aligned} \quad (A.27)$$

La traza en el espacio de volumen incluye una integración $\int d^d x \sqrt{\bar{g}(x)}$ que implica el elemento de volumen del background. El R en el denominador y el ∂R en el numerador aseguran que las contribuciones dominantes vienen en una banda delgada alrededor del momento generalizado k. Los momentos grandes se suprimen exponencialmente. Además de las FRGE se debe cumplir

$$\Gamma_{k \rightarrow \infty}[\bar{h}, \bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] = S[\bar{g} + \bar{h}] + S_{gf}[\bar{h}; \bar{g}] + S_{gh}[\bar{\zeta}, \bar{\xi}; \bar{g}] \quad (A.28)$$

Intuitivamente, se puede ver este límite como una supresión de las fluctuaciones cuánticas por un término de masa infinita en la integral de camino. En este límite coincide Γ con S microscópico porque no hay que integrar fluctuaciones. El background gauge invariance ($\Gamma_k[\Phi + L_v \Phi] = \Gamma_k[\Phi]$) implica que si el funcional inicial no contiene términos no invariantes el flujo no los generará

Appendix B

Contribución de los Faddeev-Popov ghost

Para los ghost tenemos

$$S_{gh}[h, C, \bar{C}; \bar{g}] = -\sqrt{2} \int d^d x \sqrt{\bar{g}} \bar{C}_\mu M[\bar{g}, \bar{g}]^\mu_\nu C^\nu \quad (\text{B.1})$$

Con el operador de Faddeev Popov

$$M[\bar{g}, \bar{g}]^\mu_\nu = \bar{D}^\rho g^\mu_\nu D_\rho + \bar{D}^\rho g_{\rho\nu} D^\mu - 2\omega \bar{D}^\mu \bar{g}^{\rho\sigma} g_{\rho\nu} D_\sigma \quad (\text{B.2})$$

Que en el límite $\bar{g} = g$, lo podemos escribir como

$$\begin{aligned} M[g, g]^\mu_\nu &= D^\rho g^\mu_\nu D_\rho + D^\rho g_{\rho\nu} D^\mu - D^\mu g^{\rho\sigma} g_{\rho\nu} D_\sigma \\ &= g^{\rho\lambda} g^{\mu\beta} D_\lambda g_{\beta\nu} D_\rho + g^{\rho\alpha} g^{\mu\beta} D_\alpha g_{\rho\nu} D_\beta - g^{\lambda\mu} D_\lambda g^{\rho\sigma} g_{\rho\nu} D_\sigma \\ &= \delta^\mu_\nu D^2 + g^{\mu\beta} \delta^\alpha_\nu D_\alpha D_\beta - g^{\lambda\mu} \delta^\sigma_\nu D_\lambda D_\sigma \\ &= \delta^\mu_\nu D^2 + g^{\mu\beta} \delta^\alpha_\nu [D_\alpha, D_\beta] \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Reinsertando el término ζ^ν para realizar el cálculo de forma más explícita, podemos ver que el término con el conmutador resulta

$$\begin{aligned} g^{\mu\beta} \delta^\alpha_\nu [D_\alpha, D_\beta] \zeta^\nu &= g^{\mu\beta} \delta^\alpha_\nu [D_\alpha, D_\beta] \zeta^\nu \\ &= g^{\mu\beta} \delta^\alpha_\nu R^\nu_{\sigma\alpha\beta} \zeta^\sigma \\ &= g^{\mu\beta} R^\nu_{\sigma\nu\beta} \zeta^\sigma \\ &= g^{\mu\beta} R_{\nu\beta} \zeta^\nu \\ &= g^{\mu\beta} \frac{1}{d} g_{\nu\beta} R \zeta^\nu \\ &= \frac{1}{d} \delta^\mu_\nu R \zeta^\nu \end{aligned} \quad (\text{B.4})$$

con lo que obtenemos

$$M[g, g]^\mu_\nu = \delta^\mu_\nu \left[D^2 + \frac{1}{d} R \right] \quad (\text{B.5})$$

y con esto

$$\Gamma_{\bar{\zeta}\zeta}^{(2)} = \left[-D^2 + C_V R \right] \quad (\text{B.6})$$

con $C_V = -\frac{1}{d}$

Appendix C

Casos Especiales

C.1 Caso especial: optimized cutoff, d=4

En el caso $d = 4$ las ecuaciones resultan

$$\begin{aligned}\partial_t g_k &= (2 + \eta_N(k))g_k \\ \partial_t \lambda_k &= (\eta_N(k) - 2)\lambda_k \\ &\quad + 2\pi g_k (4\pi)^{-2} \left[20 \left\{ 2Q_2^1 - \eta_N(k) \tilde{Q}_2^1 \right\} - 32Q_2^1(0) + \frac{m^2}{k^2} 21 \left\{ 2Q_2^2 - \eta_N(k) \tilde{Q}_2^2 \right\} \right] \\ \eta_N(k) &= \frac{g_k 8\pi (4\pi)^{-2} \frac{10}{3} Q_1^1 - 12Q_2^2 - \frac{8}{3} Q_1^1(0) - Q_2^2(0) - 2 \frac{m^2}{k^2} Q_1^2}{1 + g_k 8\pi (4\pi)^{-2} \left\{ \frac{5}{3} \tilde{Q}_1^1 - 6\tilde{Q}_2^2 - \frac{m^2}{k^2} \tilde{Q}_1^2 \right\}}\end{aligned}$$

Consideramos el "optimized cutoff" $R(z) = (1-z)\theta(1-z)$ y así tenemos los valores

$$\begin{aligned}\tilde{Q}_n^m &= \frac{1}{\Gamma(n+1)} \frac{1}{(1-2\lambda_k)} \\ Q_n^m &= \frac{1}{\Gamma(n+2)} \frac{1}{(1-2\lambda_k)}\end{aligned}\tag{C.1}$$

Y con estos, las ecuaciones de flujo resultan

$$\begin{aligned}\eta_N(k) &= \frac{g_k}{2} \left[\frac{2 + 9(1-2\lambda_k) + 6M^2}{g_k(4 + 3M^2) - 6\pi(1-2\lambda_k)} \right] \\ \partial_t \lambda_k &= (\eta_N(k) - 2)\lambda_k - \frac{2}{3\pi} g_k + \frac{g_k}{8\pi} \frac{\left(\frac{10}{3} + \frac{7}{2} M^2 \right) (2 - 3\eta_N(k))}{1 - 2\lambda_k} \\ \partial_t g_k &= (2 + \eta_N(k))g_k\end{aligned}\tag{C.2}$$

En este caso los diagramas de flujo que obtuvimos no son confiables, por lo que realizamos mayor análisis sobre este caso.

C.2 Expansion en torno a R

Como vimos en el capítulo (4), para obtener las funciones beta realizamos una expansión en torno a $\sim (R + m)$. En este caso realizamos una expansión sólo en torno

a la curvatura R , de manera que el término de masa queda en el denominador.

Partimos desde

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Tr\left\{[\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1}\partial_k R_k\right\} &= \frac{1}{2}Tr\left[\left[(2 - \eta_N(k))k^2R\left(\frac{-D^2}{k^2}\right) + \frac{D^2}{2}R'\left(\frac{-D^2}{k^2}\right)\right]\right. \\ &\quad \left.*\left[-D^2 - 2\lambda_k + k^2R\left(\frac{-D^2}{k^2}\right) + (C_T\bar{R} - \frac{m^2}{2})\right]^{-1}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}Tr\left[\left[(2 - \eta_N(k))k^2R\left(\frac{-D^2}{k^2}\right) + D^2R'\left(\frac{-D^2}{k^2}\right)\right]\right. \\ &\quad \left.*\left[-D^2 - 2\lambda_k + k^2R\left(\frac{-D^2}{k^2}\right) + (C_S\bar{R} + C_m m^2)\right]^{-1}\right] \end{aligned} \quad (C.3)$$

Lo que hicimos fue evaluar $\frac{1}{2}Tr$ de esos dos objetos. Cada una de estas expresiones es del tipo $N(A + C_i R + C_m m^2)^{-1}$ y se expande en torno a $(C_i R + C_m m^2)$ segun $N(A + (C_i R + C_m m^2))^{-1} = NA^{-1}(1 + A^{-1}(C_i R + C_m m^2))^{-1} = NA^{-1} - NA^{-2}(C_i R + C_m m^2)$ con $i=V,S,T$.

Llamando

$$\begin{aligned} N &= \left[(2 - \eta_N(k))k^2R\left(\frac{-D^2}{k^2}\right) + D^2R'\left(\frac{-D^2}{k^2}\right)\right] \\ A &= -D^2 - 2\lambda_k + k^2R\left(\frac{-D^2}{k^2}\right) \end{aligned} \quad (C.4)$$

Ahora vamos a hacer las expansiones en torno a R , por lo que hay que hacer es que cada una de estas expresiones es del tipo $N(A + C_i R)^{-1}$ y se expande en torno a $C_i R$ segun $N(A + C_i R)^{-1} = NA^{-1}(1 + A^{-1}(C_i R))^{-1} = NA^{-1} - NA^{-2}C_i R$ con $i=V,S,T$.

Entonces en este caso llamamos

$$\begin{aligned} N &= \left[(2 - \eta_N(k))k^2R\left(\frac{-D^2}{k^2}\right) + D^2R'\left(\frac{-D^2}{k^2}\right)\right] \\ A &= -D^2 - 2\lambda_k + k^2R\left(\frac{-D^2}{k^2}\right) + C_m m^2 \end{aligned} \quad (C.5)$$

y usamos el sufijo $A_{S,T}$ y luego lo asociamos con el C_m que corresponde. Para T es $\frac{-m^2}{2}$ y para S es el C_m obtenido en el capítulo 4.

Entonces tenemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}Tr\left\{[\Gamma_k^{(2)} + R_k]^{-1}\partial_k R_k\right\} &= \frac{1}{2}Tr\left[N\left[A_T + (C_T\bar{R})\right]^{-1}\right] \\ &\quad + \frac{1}{2}Tr\left[N\left[A_S + (C_S\bar{R})\right]^{-1}\right] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[NA_T^{-1} \left[1 + A_T^{-1} (C_T \bar{R}) \right]^{-1} \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[NA_S^{-1} \left[1 + A_S^{-1} (C_S \bar{R}) \right]^{-1} \right] \\
&= \frac{1}{2} \text{Tr} \left[NA_T^{-1} - NA_T^{-2} (C_T \bar{R}) \right] \\
&\quad + \frac{1}{2} \text{Tr} \left[NA_S^{-1} - NA_S^{-2} (C_S \bar{R}) \right] \\
&= \frac{1}{2} \left[\text{Tr}_T [NA_T^{-1}] - \text{Tr}_T [NA_T^{-2}] (C_T \bar{R}) \right. \\
&\quad \left. + \text{Tr}_S [NA_S^{-1}] - \text{Tr}_S [NA_S^{-2}] (C_S \bar{R}) \right]
\end{aligned} \tag{C.6}$$

Ahora hay que aplicar la fórmula

$$\text{Tr}[W(-D^2)] = (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \text{tr}(I) \left[Q_{\frac{d}{2}}[W] \int d^d x \sqrt{g} + \frac{1}{6} Q_{\frac{d}{2}-1}[W] \int d^d x \sqrt{g} R \right] \tag{C.7}$$

y obtenemos

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2} \text{Tr} \{ \% \} &= \\
&\quad \frac{1}{2} \left[\text{Tr}_T [NA_T^{-1}] \right. \\
&\quad - \text{Tr}_T [NA_T^{-2}] (C_T \bar{R}) \\
&\quad + \text{Tr}_S [NA_S^{-1}] \\
&\quad \left. - \text{Tr}_S [NA_S^{-2}] (C_S \bar{R}) \right] \\
\frac{1}{2} \text{Tr} \{ \% \} &= \\
&\quad \frac{1}{2} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[\text{tr}(T) \left[Q_{\frac{d}{2}} [NA_T^{-1}] \int d^d x \sqrt{g} + \frac{1}{6} Q_{\frac{d}{2}-1} [NA_T^{-1}] \int d^d x \sqrt{g} R \right] \right. \\
&\quad - (\text{tr}(IT)) \left[Q_{\frac{d}{2}} [NA_T^{-2}] \int d^d x \sqrt{g} (C_T \bar{R}) \right] \\
&\quad + \text{tr}(IS) \left[Q_{\frac{d}{2}} [NA_S^{-1}] \int d^d x \sqrt{g} + \frac{1}{6} Q_{\frac{d}{2}-1} [NA_S^{-1}] \int d^d x \sqrt{g} R \right] \\
&\quad \left. - (\text{tr}(IS)) \left[Q_{\frac{d}{2}} [NA_S^{-1}] \int d^d x \sqrt{g} (C_S \bar{R}) \right] \right]
\end{aligned} \tag{C.8}$$

Comparamos los coeficientes de $\int \sqrt{g}$ y $\int \sqrt{g} R$ a ambos lados en la ec. de flujo y obtenemos

$$\begin{aligned}
2(\partial_t Z_{Nk} \bar{\lambda}_k) &= \frac{1}{2\kappa^2} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[\text{tr}(T) Q_{\frac{d}{2}} [NA_T^{-1}] \right. \\
&\quad \left. + \text{tr}(IS) Q_{\frac{d}{2}} [NA_S^{-1}] - 2\text{tr}_V(I) Q_{\frac{d}{2}} [N_0 A_0^{-1}] \right] \\
(-)\partial_t Z_{Nk} &= \frac{1}{2\kappa^2} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[\text{tr}(T) \frac{1}{6} Q_{\frac{d}{2}-1} [NA_T^{-1}] - (\text{tr}(IT) C_T [Q_{\frac{d}{2}} [NA_T^{-2}] \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} Q_{\frac{d}{2}-1} [NA_S^{-1}] - (\text{tr}(IS) C_S Q_{\frac{d}{2}} [NA_S^{-2}] \right. \\
&\quad \left. - \frac{\text{tr}_V(I)}{3} (Q_{\frac{d}{2}-1} [N_0 A_0^{-1}] - 6C_V Q_{\frac{d}{2}} [N_0 A_0^{-2}]) \right] \tag{C.9}
\end{aligned}$$

Para escribir las funciones beta y las ec. de flujo en función de estas variables, podemos escribir los $Q_n[NA^{-m}]$ como

$$\begin{aligned}
Q_n[NA^{-1}] &= k^{2n} \{ 2\Phi_n^1 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_n^1 \} \\
Q_n[NA^{-2}] &= k^{2n-2} \{ 2\Phi_n^2 - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_n^2 \}
\end{aligned} \tag{C.10}$$

con las "threshold functions"

$$\begin{aligned}
\tilde{\Phi}_n^m(\bar{\lambda}_k/k^2) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{R(z)}{[z - 2\frac{\bar{\lambda}_k}{k^2} + \alpha\frac{m^2}{k^2} + R(z)]^m} \\
\Phi_n^m(\bar{\lambda}_k/k^2) &= \frac{1}{\Gamma(n)} \int_0^\infty dz z^{n-1} \frac{R(z) - zR'(z)}{[z - 2\frac{\bar{\lambda}_k}{k^2} + \alpha\frac{m^2}{k^2} + R(z)]^m}
\end{aligned} \tag{C.11}$$

y el $\alpha\frac{m^2}{k^2}$ depende del que vaya en el A así que va a ser $\Phi(A_i)$.

$$\begin{aligned}
2(\partial_t Z_{Nk} \bar{\lambda}_k) &= \frac{1}{2\kappa^2} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[\text{tr}(T) k^d \{ 2\Phi_{\frac{d}{2}}^1(A_T) - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^1(A_T) \} \right. \\
&\quad \left. + \text{tr}(IS) k^d \{ 2\Phi_{\frac{d}{2}}^1(A_S) - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^1(A_S) \} \right. \\
&\quad \left. - 2\text{tr}_V(I) k^d \{ 2\Phi_{\frac{d}{2}}^1(A_0) \} \right] \\
(-)\partial_t Z_{Nk} &= \frac{1}{2\kappa^2} (4\pi)^{-\frac{d}{2}} \left[\frac{1}{6} \text{tr}(T) k^{d-2} \{ 2\Phi_{\frac{d}{2}-1}^1(A_T) - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}-1}^1(A_T) \} \right. \\
&\quad \left. - (\text{tr}(IT) C_T k^{d-2} \{ 2\Phi_{\frac{d}{2}}^2(A_T) - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^2(A_T) \} \right. \\
&\quad \left. + \frac{1}{6} \text{tr}(SI) k^{d-2} \{ 2\Phi_{\frac{d}{2}-1}^1(A_S) - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}-1}^1(A_S) \} \right. \\
&\quad \left. - (\text{tr}(IS) C_S k^{d-2} \{ 2\Phi_{\frac{d}{2}}^2(A_S) - \eta_N(k) \tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^2(A_S) \} \right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -\frac{\text{tr}_V(I)}{3}k^{d-2}\left\{2\Phi_{\frac{d}{2}-1}^1(A_0)\right\} \\
& +2C_Vk^{d-2}\left\{2\Phi_{\frac{d}{2}}^2(A_0)\right\} \Big] \tag{C.12}
\end{aligned}$$

Con los valores para trS, trT y trV queda

$$\begin{aligned}
\partial_t Z_{Nk} \bar{\lambda}_k &= \frac{1}{8\kappa^2}(4\pi)^{-\frac{d}{2}}k^d \left[\frac{(d-1)(d+2)}{2} \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}}^1(A_T) - \eta_N(k)\tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^1(A_T) \right\} \right. \\
& \left. + \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}}^1(A_S) - \eta_N(k)\tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^1(A_S) \right\} - 4d\Phi_{\frac{d}{2}}^1(A_0) \right] \\
\partial_t Z_{Nk} &= -\frac{1}{4\kappa^2}(4\pi)^{-\frac{d}{2}}k^{d-2} \left[\frac{1}{6} \frac{(d-1)(d+2)}{2} \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}-1}^1(A_T) - \eta_N(k)\tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}-1}^1(A_T) \right\} \right. \\
& - \frac{(d-1)(d+2)}{2} C_T \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}}^2(A_T) - \eta_N(k)\tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^2(A_T) \right\} \\
& + \frac{1}{6} \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}-1}^1(A_S) - \eta_N(k)\tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}-1}^1(A_S) \right\} \\
& - C_S \left\{ 2\Phi_{\frac{d}{2}}^2(A_S) - \eta_N(k)\tilde{\Phi}_{\frac{d}{2}}^2(A_S) \right\} \\
& \left. - \frac{2d}{3} \Phi_{\frac{d}{2}-1}^1(A_0) - 4\Phi_{\frac{d}{2}}^2(A_0) \right] \tag{C.13}
\end{aligned}$$

Estas son las ecuaciones para las "dimensionfull" couplings Z_{Nk} y $\bar{\lambda}_k$ y nos interesan las ecuaciones para las "dimensionless" couplings:

El cálculo es similar al que ya vimos en el capítulo (4). En d=4 tenemos las ec. de evolución para el sharp cutoff

$$\begin{aligned}
\eta_N(k) &= \frac{3g_k}{5g_k + 6\pi} \left[3 \left(\frac{\pi^2}{6} - \log \left(-2\lambda_k - \frac{M}{2} + 1 \right) \right) - \frac{12}{(-2\lambda_k - \frac{M}{2} + 1)} \right. \\
& \left. + \frac{1}{3} \left(\frac{\pi^2}{6} - \log \left(-2\lambda_k - \frac{3M}{2} + 1 \right) \right) - \frac{4\pi^2}{9} - 4 \right] \\
\partial_t \lambda_k &= (\eta - 2)l \\
& + \frac{g}{4\pi} \left[-\frac{\eta}{2} + 36\zeta(3) - 18 \log \left(-2l - \frac{M}{2} + 1 \right) - \frac{9\eta}{2} \right. \\
& \left. + 4\zeta(3) - 2 \log \left(-2l - \frac{3M}{2} + 1 \right) - 32\zeta(3) \right] \tag{C.14}
\end{aligned}$$

En este caso tampoco podemos confiar en los resultados, como se ve en la figura C.1. Esto debido a que el término de masa queda dentro del argumento del logaritmo por lo que se está restringido según la condición $-2l - \frac{3M}{2} + 1 > 0$

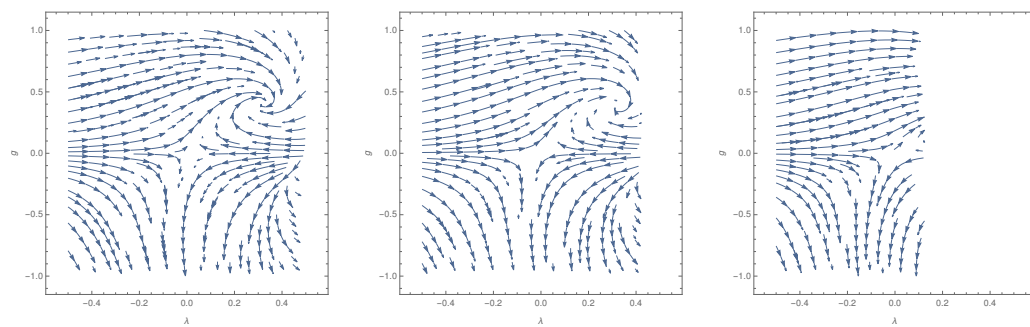


FIGURE C.1: Diagramas de flujo al expandir en torno a R en el denominador para $m_k^2 = 0, 0.1$ and 0.5 ($\lambda_k(g_k)$ en el eje x (η))

Bibliography

- [1] A. Einstein, “The foundation of the general theory of relativity”, *Annalen Phys.* 49 (1916) 769–822.
- [2] G. 't Hooft and M. J. G. Veltman, *Annales Poincaré Phys. Theor. A* 20 (1974) 69 .
- [3] J. F. Donoghue, “Introduction to the Effective Field Theory Description of Gravity”, arXiv:gr-qc/9512024.
- [4] S. Weinberg in *General Relativity, an Einstein Centenary Survey*, S.W. Hawking and W. Israel (Eds.), Cambridge University Press, 1979;
- [5] M. Reuter, *Phys. Rev. D* 57 (1998) 971, hep-th/9605030.
- [6] R. Percacci, in “Approaches to Quantum Gravity: Towards a New Understanding of Space, Time and Matter”, D. Oriti (Ed.), Cambridge University Press, Cambridge, 2009, arXiv:0709.3851.
- [7] M. Reuter, F. Saueressig, “Quantum Einstein Gravity”, arXiv:1202.2274 [hep-th].
- [8] M. Reuter, J.-E. Daum, “Renormalization Group Flow of the Holst Action”, *Phys.Lett. B* 710 (2012) 215-218
- [9] A. Codello and R. Percacci, “Fixed points of higher derivative gravity”, *Phys. Rev. Lett.* 97 (2006) 221301 [hep-th/0607128].
- [10] O. Lauscher and M. Reuter, “Flow equation of quantum Einstein gravity in a higher derivative truncation”, *Phys. Rev. D* 66, 025026 (2002).
- [11] R. Percacci and E. Sezgin, “One Loop Beta Functions in Topologically Massive Gravity”, *Class. Quant. Grav.* 27 (2010) 155009 [arXiv:1002.2640 [hep-th]].
- [12] E. C. G. Stueckelberg, *Helv. Phys. Acta* 30 (1957) 209.
- [13] S. Weinberg, “The Quantum theory of fields. Vol. 1: Foundations”, Cambridge, UK:Univ. Pr. (1995).
- [14] Supernova Search Team Collaboration, A. G. Riess et al., “Observational Evidence from Supernovae for an Accelerating Universe and a Cosmological Constant”, *Astron. J.* 116 (1998) 1009–1038, arXiv:astro-ph/9805201.
- [15] K. Hinterbichler, “Theoretical Aspects of Massive Gravity”, arXiv:1105.3735 [hep-th]
- [16] A. I. Vainshtein, “To the problem of nonvanishing gravitation mass”, *Phys. Lett. B* 39 (1972) 393–394.
- [17] M. Reuter and F. Saueressig, *Phys. Rev. D* 65 (2002) 065016, hep-th/0110054.

- [18] C. Wetterich, "Exact Evolution Equation for the Effective Potential", Phys. Lett. B 301 (1993) 90.
- [19] A. Codello, Phys. Rev. D 91 (2015) 6, 065032 [arXiv:1304.2059 [hep-th]]
- [20] N. Christiansen, B. Knorr, J. M. Pawłowski, and A. Rodigast, "Global Flows in Quantum Gravity", Phys.Rev. D93 (2016) no.4, 044036.