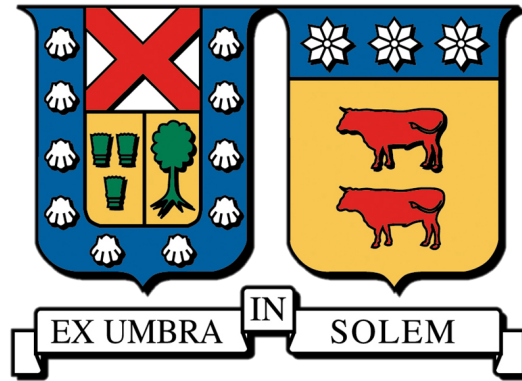


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA



**ANÁLISIS DE LA CARGA DINÁMICA EN BOYAS DE ANCLAJE
PARA ESTABILIZACIÓN DE BUQUES CISTERNA
EN EL PUERTO DE VENTANAS**

JUAN IGNACIO SEPÚLVEDA NUÑEZ

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

PROFESOR GUÍA: DR. ING. ALEJANDRO PACHECO SANJUÁN

PROFESOR CO-REFERENTE: DIPL. ING. UDO RHEINSCHMIDT

Abril - 2024

Resumen

Bahía Quintero es una localidad que ha sufrido diversas diseminaciones de petróleo en los últimos años causando graves impactos ambientales; por otro lado, a la hora de realizar diseños de terminales multiboyas se suele sobredimensionar los sistemas por desconocimiento acerca de las cargas dinámicas que pueden experimentar los cuerpos. Se han publicado estudios donde se modelan cuerpos flotantes bajo alguna condición de oleaje específica, sin embargo, la literatura existente sobre este tema es limitada en algunos aspectos, como por ejemplo, modelos en el que se considere una mayor cantidad de cuerpos o teniendo en cuenta la influencia del viento y oleaje simultáneamente. Es por esto que el presente trabajo tiene como objetivo estudiar las fuerzas que puede soportar un sistema de boyas de estabilización para buques cisternas en bahía Quintero considerando los efectos del oleaje y el viento, además de evaluar los cambios de orientación y desplazamientos a lo largo del tiempo que pueden tener los cuerpos. Para esto se utilizó dinámica tridimensional de cuerpos rígidos interconectados, además de usar una Teoría de Oleaje Regular y un modelo de Ráfaga de Viento.

Para la investigación se tuvo en cuenta las circunstancias más complejas que pueden ocurrir en la bahía, donde se abarcaron un total de seis casos posibles, examinando diversas alturas de oleaje y velocidades de viento. Se creó un código en MATLAB para poder resolver las ecuaciones de movimiento y calcular las fuerzas soportadas en los puntos de amarre entre el buque, las boyas y los cables; para poder validar los resultados, se compararon las magnitudes de fuerza y desplazamientos de los cuerpos flotantes con una investigación previa donde se estudió el comportamiento de una boya sujeta mediante cables de anclaje que tenían propiedades similares a las empleadas en la memoria, obteniendo ordenes de magnitud coherentes.

Los resultados dieron conocimiento de que gran parte de los movimientos de oscilación y desplazamiento están relacionados con la velocidad del viento, siendo un factor predominante comparado con la altura del oleaje, mientras que las cargas dinámicas estuvieron en un rango de 0 a 100 [kN], no obstante, existieron picos de fuerzas superiores que pueden ser un riesgo de falla en algunos nodos de conexión, principalmente en los cables de anclaje de las boyas, con factores de seguridad cercanos a 1 [-]. Se hizo un contraste entre un buque sujeto exclusivamente por un ancla y un buque sujeto por un par de boyas estabilizadoras bajo las mismas condiciones, acreditando

que se mejora la estabilidad del buque en un 37,5% al usar las boyas y, a su vez, permitió disminuir levemente los desplazamientos en los ejes X e Y con la configuración propuesta en el trabajo. La memoria permitió conocer la conducta del buque cisterna y las boyas, ayudando a tomar una mejor decisión al momento de diseñar un terminal multiboyas y la disposición adecuada que deben tener las boyas de estabilización, para minimizar los desplazamientos y rotaciones de un buque.

Agradecimientos

Agradecer en primer lugar a mi familia, quienes me apoyaron a lo largo esta travesía universitaria y que a pesar de encontrarnos a miles de kilómetros siempre me hicieron sentir cerca. A mi mamá, quien siempre me entrego todo lo que tenía a su alcance para que yo pudiera cumplir mis sueños y nunca dudo de mí, tus palabras de aliento tan especiales (tú me entiendes) siempre me sacaron una sonrisa incluso en mis peores días, eres a la persona que más admiro en el mundo mundial, te amo con todo mi corazón. A mi tía Caty, mi segunda mamá, me regaloneaste con tantas cosas ricas, gracias a ti mis tardes de estudio siempre fueron endulzadas, me iré redondo de la universidad, pero muy feliz, gracias por quererme como un hijo y estar para mí todos estos años. A mi tío Cristian, gracias por entregarme las herramientas necesarias para poder estudiar y ayudarme a salir adelante, para mí es un ejemplo a seguir, espero que en los próximos años que vengan podamos tener hartos viajes más y seguir tomando sol como los buenos magallánicos que somos. Agradecer a todos mis amigos que conocí en la carrera, con ustedes las risas nunca faltaron, son tremendas personas y, como no, excelentes profesionales; a mi Maru, con quien lo dimos todo y por fin nuestras maratones de estudio están teniendo sus frutos. A mis grandes amigos y roomies con quienes compartí por 6 años, pensión Latorre y San Luis, los quiero mucho, obviamente agradecer a Nico, mi roomie de todos estos años, muchas gracias por todo y por ser mi alarma. Una mención especial para "los cabros", cuantas noches de estudio, fiestas, penas y, sobretodo, panzadas de risas que tuvimos, sin duda que fueron fundamentales para pasar todos estos años. A Camila, gracias por creer en mí y entregar tu amor como ninguna persona, espero que podamos empezar pronto todo lo que hemos soñado, te amo mucho. A mis amigos de Punta Arenas que me esperan cada vez que vuelvo a mis tierras, los aprecio mucho, especialmente a Basti, Cami, Papu y Puki que también vinieron a la V, espero que sigamos acumulando grandes recuerdos y más aventuras. A los profesores de la comisión; al profesor Alejandro Pacheco por apoyarme en este largo trabajo, sin duda fue una experiencia muy gratificante, fue genial poder aprender cosas nuevas y, particularmente, en un área que me encanta, además, dar las gracias por la buena disposición que tuvo para enseñarme y por los consejos que me brindó. Finalmente, agradecer a los profesores Udo Rheinschmidt, Jaime Espinoza, Patricio Catalán y Francisco Peña por su apoyo con material de estudio y guiarme en un inicio.

Tabla de Contenidos

1	Introducción	2
2	Objetivos y Alcances	4
2.1	Objetivo General	4
2.2	Objetivos Específicos	4
2.3	Alcance	5
3	Marco Teórico	6
3.1	Normativa	6
3.2	Obras de Atraque, Amarre y Fondeo	7
3.2.1	Terminales de Boyas	7
3.2.2	Cables de Amarre	9
3.2.3	Líneas de anclaje	11
3.3	Olas	12
3.4	Viento	17
3.5	Mecánica de Cuerpo Rígido	20
3.5.1	Sistema de Referencia	20
3.5.2	Matriz de Rotación	21
3.5.3	Desplazamiento General	24
3.5.4	Coordenadas Generalizadas	24
3.5.5	Restricciones de Movimiento	25
3.5.6	Dinámica Lagrangiana	27
3.5.7	Ecuaciones de Movimiento en Sistemas de Cuerpos Rígidos	28
3.5.8	Sistema Diferencial - Algebraico	33
4	Metodología	36
4.1	Modelo Multiboyas Propuesto	36
4.1.1	Modelo oceánico	37

4.1.2	Modelo del viento	42
4.1.3	Cables de fondeo	44
4.1.4	Boyas	48
4.1.5	Cables de amarre	55
4.1.6	Buque Cisterna	60
4.2	Código Elaborado	68
4.3	Layout del Terminal Multiboyas	74
5	Simulaciones y resultados	76
5.1	Casos de estudio	76
5.2	Resultados	78
5.2.1	Buque sin boyas estabilizadoras	78
5.2.2	Buque con boyas estabilizadoras	82
6	Conclusiones y Recomendaciones	92

Lista de Tablas

4.1	Parámetros del estado del océano	40
4.2	Distintos escenarios de Altura de oleaje	40
4.3	Clasificación de la zona según la longitud de onda y profundidad	40
4.4	Parámetros del estado del viento para 3 casos posibles	44
4.5	Propiedades de líneas de anclaje	47
4.6	Propiedades de boya esférica	49
4.7	Propiedades de cables de amarre	55
4.8	Propiedades del Buque Cisterna	60
4.9	Ejemplo de los datos a configurar para un cable de fondeo	69
4.10	Ejemplo de los datos a configurar para una boya	69
5.1	Parámetros a utilizar en cada simulación	76
5.2	Factores de Seguridad más bajos obtenidos	82

Lista de Figuras

3.1	Monoboya ubicada en Tarragona, España (Ministerio de Obras Públicas, 2013a) . . .	8
3.2	Fuerza transversal vs fuerza longitudinal por acción del viento (Ministerio de Obras Públicas, 2013b)	10
3.3	Líneas de anclaje disponibles (Almazán et al., 2001)	11
3.4	Clasificación según la profundidad relativa (Ministerio de Obras Públicas, 2013a) . .	12
3.5	Mapa conceptual de Teorías de Oleaje (Elaboración Propia)	13
3.6	Características de onda lineal de Airy (Elaboración Propia)	14
3.7	Características de la teoría de oleaje de Airy (Ministerio de Obras Públicas, 2013a)	16
3.8	Componentes de la velocidad del viento para pequeñas escalas de tiempo (Amaya et al., 2007)	18
3.9	Sistemas de referencia inercial y local (Shabana, 2005)	21
3.10	Rotación alrededor de eje l (Elaboración Propia)	22
3.11	Representación vectorial de ubicación punto P (Shabana, 2005)	24
3.12	Distintas coordenadas generalizadas para un mismo mecanismo de 3 barras (Nikraves, 2019)	25
3.13	Representación de junta esférica (Shabana, 2010)	26
3.14	Representación de junta prismática (Shabana, 2010)	27
3.15	Fuerza F^i aplicada sobre un cuerpo i (Shabana, 2010)	31
3.16	Fuerzas Resorte-Amortiguador-Actuador sobre cuerpo i (Shabana, 2010)	31
4.1	Modelo discretizado de cables (Zhu and Yoo, 2016)	37
4.2	Serie de Tiempo de la Altura Significativa (J. et al., 2016)	37
4.3	Distribución Estacional de Extremos (J. et al., 2016)	38
4.4	Dirección predominante, Periodo de Oleaje medio y Periodos de retorno de eventos (J. et al., 2016)	38
4.5	Ubicación del Terminal Multiboyas. Se indica, además, la dirección de propagación del oleaje (Elaboración Propia)	39

4.6	Distribución de viento en Quintero, representado en Rosa de los Vientos (Meteoblue, 2023b)	43
4.7	Distribución de viento en Punta Arenas, representado en Rosa de los Vientos (Meteoblue, 2023a)	43
4.8	Representación general de un elemento (Elaboración Propia)	45
4.9	Modelo de una boya esférica (Zhu and Yoo, 2016)	48
4.10	Representación del cálculo del volumen sumergido (Zhu and Yoo, 2016)	50
4.11	Conexión superior entre boya y cable de amarre (Elaboración Propia)	53
4.12	Modelo para cable de amarre (Elaboración Propia)	56
4.13	Amarra entre buque - boya (Elaboración Propia)	58
4.14	Partes del cilindro robusto (Elaboración Propia)	60
4.15	Modelo del Buque Cisterna (Elaboración Propia)	63
4.16	Volumen hundido del buque (Elaboración Propia)	64
4.17	Diagrama de flujo del código elaborado (Elaboración Propia)	68
4.18	Ejemplo de formulación de ecuaciones de restricción en el código (Elaboración Propia)	70
4.19	Ejemplo de unificación de variables en el código (Elaboración Propia)	71
4.20	Verificación de vector de restricciones C (Elaboración Propia)	72
4.21	Ejemplo de orden del vector solución obtenido por GMRES (Elaboración Propia)	73
4.22	Cálculo de las Coordenadas Generalizadas para el siguiente instante (Elaboración Propia)	73
4.23	Vista de planta del Terminal multiboyas. Cotas en milímetros (Elaboración Propia)	74
4.24	Vista de elevación del Terminal multiboyas. Cotas en milímetros (Elaboración Propia)	75
5.1	Ángulos de orientación (Elaboración Propia)	77
5.2	Influencia de las condiciones climáticas en las fuerzas resultantes (Elaboración Propia)	79
5.3	Posición en diferentes instantes de tiempo (Elaboración Propia)	80
5.4	Rotación del buque a lo largo del tiempo (Elaboración propia)	80
5.5	Desplazamientos del buque a lo largo del tiempo (Elaboración propia)	81
5.6	Distribución de fuerzas para Simulaciones 1 y 2 (Elaboración propia)	83
5.7	Distribución de fuerzas para Simulaciones 3 y 4 (Elaboración propia)	84
5.8	Distribución de fuerzas para Simulaciones 5 y 6 (Elaboración propia)	84
5.9	Estado del viento y océano a lo largo del tiempo (Elaboración propia)	87
5.10	Comportamiento de las fuerzas nodales a lo largo del tiempo (Elaboración Propia)	88
5.11	Factores de Seguridad para cada cable del sistema (Elaboración Propia)	88
5.12	Rotación de cuerpos a lo largo del tiempo (Elaboración propia)	89
5.13	Desplazamientos de cuerpos a lo largo del tiempo (Elaboración propia)	90
5.14	Posición del sistema en diferentes instantes de tiempo (Elaboración Propia)	91

Nomenclatura

Símbolo	Definición
A	Matriz de Rotación
C	Vector de restricciones
C_q	Matriz jacobiana del vector de restricciones C
d	Profundidad marina
$\bar{G}$	Matriz de relación Parámetros de Euler del sistema de referencia local
g	Aceleración de gravedad
H	Altura del oleaje
I	Matriz de Inercia
k	Número de onda
L	Longitud de onda
M	Matriz de Masa
Q	Vector de fuerza generalizada
Q_c	Vector de segundas derivadas
Q_e	Vector de fuerza generalizada
Q_v	Vector de velocidad cuadrático
q	Vector de coordenadas generalizadas
$\ddot{q}$	Vector de aceleración de coordenadas generalizadas
R	Vector de posición inercial del sistema de referencia local
T	Periodo del oleaje
$\bar{u}$	Vector de posición local
$V_{tw}(10)$	Velocidad del viento a 10 metros de altura
$V_{tw}(Z)$	Velocidad del viento a Z metros de altura
$\bar{w}$	Vector de velocidad angular del sistema de referencia local
w^x	Frecuencia angular de la onda en la dirección X
X, Y, Z	Ejes de un sistema de referencia inercial
$\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$	Ejes de un sistema de referencia local
δ	Altura relativa de ola

ϵ	Pendiente de ola
η	Elevación del oleaje
θ	Vector de Parámetros de Euler
$\dot{\theta}$	Vector de velocidad de Parámetros de Euler
$\ddot{\theta}$	Vector de aceleración de Parámetros de Euler
λ	Multiplicador de Lagrange
μ	Profundidad relativa

Capítulo 1

Introducción

Actualmente en Chile, la zona de Quintero-Puchuncaví es considerada como zona de sacrificio, lo cual corresponde a un sector poblado cuya calidad de vida ha sido afectada a lo largo de los años por la contaminación ambiental producto del parque industrial ubicado en la localidad ([Vivanco Font, 2022](#)). El año 2014 ocurrió uno de los mayores derrames de petróleo en la zona, con un total de 38.700 litros vertidos en el mar que afectaron la biodiversidad y el ecosistema, además de generar pérdidas millonarias para los pescadores de la zona y, sobretodo, afectando a los pobladores; a partir de este año ocurrieron otros 3 derrames de petróleo más. Puerto Ventanas S.A. (PVSA) es una de las tantas empresas que se ubica en la bahía de Quintero y se caracteriza por su manejo de graneles líquidos y sólidos; lamentablemente, el año 2021 se diseminaron alrededor de 200 litros de petróleo por parte de esta, debido a una fisura en la línea de transferencia.

Es por esto que la motivación del presente trabajo es proponer un sistema multiboyas para poder estabilizar los buques cisterna y de esta forma realizar los procesos de carga y descarga de los hidrocarburos de manera segura, teniendo en cuenta la variación del océano y el viento local, como también buscar una alternativa diferente a la que existe hoy en día. Una estrategia para poder modelar el terminal multiboyas es representarlo como un sistema multicuerpo, es decir, modelarlo como un sistema mecánico de cuerpos, ya sean rígidos o flexibles, conectados entre sí mediante diversas uniones. Todo este conjunto forma un sistema físico cuya dinámica puede ser descrita mediante ecuaciones diferenciales y algebraicas; dicho esto, una de las principales complejidades de este trabajo radica en la modelización de los cables de amarre y de anclaje del terminal.

En el trabajo de [Zhu and Yoo](#) se planteó un sistema de cables flexibles que anclaban una boya esférica al lecho marino con la intención de estudiar las cargas dinámicas soportadas en los cables y la boya, como también estudiar el movimiento de esta. Lo relevante del artículo es, primero, la manera de calcular el volumen sumergido de la boya y el área de proyección para el cálculo de las fuerzas hidrodinámicas; otra característica a destacar es la modelación de los cables flexibles, ya que estos fueron discretizados espacialmente permitiendo analizar las fuerzas de tensión en

diferentes nodos de los cables a lo largo del tiempo. Tomando como base dicha investigación, el sistema multiboyas que se analizará estará compuesto por cables de anclaje, cables de amarre y boyas esféricas, los cuales estarán unidos a un cuerpo cilíndrico robusto que representará a un buque cisterna, permitiendo así evaluar las cargas dinámicas presentadas en los diferentes puntos de amarre teniendo en cuenta las condiciones climáticas de la bahía de Quintero, ubicación del PVSA. Es por esto que las interrogantes que se buscan responder van desde saber ¿Cuál es el comportamiento de las cargas dinámicas para condiciones climáticas extremas y cuánto es el valor máximo que pueden alcanzar estas fuerzas? ¿Cuál es la configuración más adecuada para el terminal multiboyas? ¿Cuánto puede llegar a oscilar y desplazarse un buque cisterna?

El trabajo se encuentra dividido en 6 capítulos: primero se presenta una breve revisión bibliográfica acerca de la normativa y obras marítimas elementales, dando énfasis en los elementos que se usarán, asimismo, se mostrarán los conceptos claves de la dinámica de sistemas multicuerpo y también acerca de los modelos de oleaje y viento actuales. Luego, un capítulo estará dedicado fundamentalmente a explicar la metodología de análisis, fuerzas involucradas y cómo estas se relacionan con cada elemento del sistema para, posteriormente, presentar los resultados obtenidos en la simulación computacional. Finalmente, dichos resultados serán comentados y se sacarán las conclusiones pertinentes de estas.

Capítulo 2

Objetivos y Alcances

2.1 Objetivo General

El objetivo de este estudio es utilizar dinámica tridimensional de cuerpos rígidos basados en los parámetros de Euler para analizar las cargas dinámicas que soportan boyas de anclaje en un sistema similar al utilizado en el puerto de Ventanas, bahía de Quintero, considerando la variación temporal de las cargas debidas al cambio en el oleaje y las cargas de viento.

2.2 Objetivos Específicos

Los siguientes son los objetivos específicos contemplados en el trabajo:

- Recopilar la normativa marítima vigente y las alternativas de diseño existentes en el mercado para sistemas de boyas.
- Resolver las ecuaciones de movimiento para cuerdas atadas entre un cuerpo flotante y el lecho marino empleando los parámetros de Euler para describir el movimiento rotacional en cada uno de los eslabones.
- Generar un código en MATLAB que permita resolver las ecuaciones de movimiento que describen el comportamiento de un buque cisterna atado a seis boyas mediante cables flexibles.
- Realizar un análisis de sensibilidad respecto a la configuración del sistema de boyas y la influencia de la dirección/amplitud de propagación de las olas en la carga máxima que soportan las líneas de cuerdas.

2.3 Alcance

Los alcances de este trabajo de memoria son los siguientes:

- Con respecto a las geometrías de los cuerpos flotantes, el estudio se enfoca en boyas de tipo esféricas, mientras que el buque será representado con una geometría cilíndrica.
- Para este estudio se modelará las olas utilizando Teoría de Oleaje Regular, considerando una profundidad de 22 [m].
- Las condiciones del oleaje y viento local a utilizar serán la de casos extremos, es decir, condiciones climáticas extremas de la bahía Quintero.
- No se tendrá en consideración las corrientes marinas de la localidad ni la componente inercial de fuerza del océano, predominando la fuerza de arrastre.
- La elaboración del código y las simulaciones computacionales serán en el software de programación MATLAB, donde es importante resaltar que dichas simulaciones se ubican en una escala temporal del orden de segundos.

Capítulo 3

Marco Teórico

3.1 Normativa

Existe una amplia gama de pautas y sugerencias relacionadas con el diseño de obras portuarias a nivel mundial que son adaptadas según el lugar de construcción. A menudo, el consultor es quien elige qué estándar usar y para esto tiene en cuenta las condiciones meteorológicas, geográficas, oceanográficas, entre otras. Las normativas más reconocidas en el ámbito mundial son:

- Coastal Engineering Manual (Estados Unidos)
- Recommendations of the Committee for Waterfront Structures, Harbours and Waterways (Alemania)
- Technical Standards and Commentaries for Port and Harbour Facilities in Japan (Japón)
- Recomendaciones de Obras Marítimas y Portuarias, ROM (España)

En Chile, la Dirección de Obras Portuarias (DOP), el organismo técnico dependiente del Ministerio de Obras Públicas (MOP), es responsable de ofrecer servicios de infraestructura portuaria, costera y marítima que son indispensables para la población. Actualmente, consta de un documento denominado “Guía de Diseño, Construcción, Operación y Conservación de Obras Marítimas y Costeras” que tiene como fin entregar directrices que sirvan de guía tanto para los diseñadores como los constructores, para así asegurar la funcionalidad de las obras costeras y marítimas, no obstante, este documento no tiene carácter normativo; además, cabe destacar que dicha guía se basa en las normativas mencionadas anteriormente, entre otras. Esta guía está dividida en 5 volúmenes:

- Libro 1:
 - 1° Volumen “Introducción”
 - 2° Volumen “Diseño, parte 1”
- Libro 2:
 - 2° Volumen “Diseño, parte 2”
- Libro 3:
 - 3° Volumen “Construcción”
- Libro 4:
 - 4° Volumen “Operación”
 - 5° Volumen “Anexos”

Para efectos de este trabajo, se usó mayormente el primer y segundo libro para tener una referencia respecto al diseño y consideraciones de factores externos.

3.2 Obras de Atraque, Amarre y Fondeo

En la tipología de obras portuarias se pueden encontrar diversas estructuras que son importantes, una de estas son las Obras de Atraque, Amarre y Fondeo ([Ministerio de Obras Públicas, 2013a](#)), cuya función es garantizar que las embarcaciones permanezcan estables para una mayor seguridad y así se puedan realizar todas las operaciones portuarias que correspondan, que para efectos de este estudio, es la carga y descarga de graneles líquidos y sólidos. En los siguientes apartados se profundizará sobre los elementos utilizados en este trabajo.

3.2.1 Terminales de Boyas

Este tipo de infraestructura se puede clasificar en dos: Monoboyas y Sistema Multiboyas.

Monoboyas

Como su propio nombre lo indica, son estructuras compuestas por una sola boya que se encuentra sujeta al lecho marino y son utilizadas para amarrar las embarcaciones. Una particularidad de estas boyas es que permiten que la nave pueda ejecutar giros alrededor de esta. En el mercado se pueden encontrar 5 clases de monoboyas:

- Tipo CALM (Catenary Anchor Leg Mooring)
- Tipo SALM (Single Anchor Leg Mooring)
- Tipo VALM (Vertical Anchor Leg Mooring)
- Tipo SPMT (Single Point Mooring Tower)
- Tipo SBS (Single Buoy Storage)

La monoboya tipo CALM es una de las más utilizadas, consta de 2 a 4 cadenas que forman catenarias y estas están ancladas a diferentes puntos de amarre. En contraste, los restantes tipos de monoboyas se diferencian solo por la configuración espacial en que están ubicados los cables o, que en vez de usar cadenas se emplean estructuras rígidas.



Figura 3.1: Monoboya ubicada en Tarragona, España ([Ministerio de Obras Públicas, 2013a](#))

Multiboyas

Los sistemas multiboyas, a diferencia de un sistema monoboya, está compuesto por varias boyas que se encargan de amarrar la flota con el objetivo de restringir los movimientos; son aplicados en instalaciones para carga y descarga de graneles líquidos. No existe como tal una clasificación de multiboyas, ya que esta dependerá de las condiciones del sitio y la maniobrabilidad requerida, sin embargo, existen 2 configuraciones básicas que se pueden presentar:

- Caso 1, orientación fija con una boya a proa y una a popa.
- Caso 2, orientación fija con dos boyas a proa y a popa, con y sin amarres laterales.

Como es de esperarse, la cantidad de boyas de anclaje necesarias va a estar sujeta a las condiciones climáticas de la zona en particular, por ende, es necesario realizar un análisis dinámico de la configuración que se quiera proponer y ver el comportamiento de las cargas a lo largo del tiempo para ver si el número de boyas propuesto es aceptable.

Ya sea un diseño de terminal Monoboya o Multiboyas, en ambos casos se deben contemplar 3 aspectos para un diseño: consideraciones generales (topobatimetría, área de maniobra), consideraciones de diseño (factores ambientales, diferentes tipos de operación), y cargas de diseño (peso propio y boyante, cargas ambientales).

3.2.2 Cables de Amarre

Los cables de amarre son un elemento fundamental para asegurar un buque a un terminal, ya que son quienes sirven de amarre y además deben tener una disposición eficiente para otorgar seguridad. Es por esto que se deben tener en cuenta qué fuerzas serán aplicadas en la nave y las boyas, donde se destacan las siguientes:

- Viento
- Corriente
- Mareas
- Oleaje de los buques que pasan
- Ondas de oleaje
- Hielo
- Cambios de calado

La consideración de cada una de estas cargas dependerá de la localización del proyecto, sin embargo, las fuerzas de viento, oleaje y corriente son usualmente consideradas en cualquier trabajo. Un modelo de amarras eficiente es aquel que tiene los cables de amarre orientados en la misma dirección de las cargas externas, es decir, si las corrientes marinas estuvieran en la dirección longitudinal del buque, los cables deberían estar alineados entre la popa y proa, no obstante, esto es muy complejo en la práctica debido a que las cargas externas varían su dirección a lo largo del tiempo y da lugar a cargas transversales y longitudinales, por lo tanto, se terminan diseñando

terminales con puntos de amarre alrededor de todo el buque ([Ministerio de Obras Públicas, 2013b](#)). Las fuerzas transversales son mucho más considerables que las fuerzas longitudinales en una flota, debido a que el área de proyección longitudinal es mayor que el área de proyección transversal cuando actúan fuerzas de arrastre, ya sean de viento u oleaje, como se puede ver en la Figura 3.2.

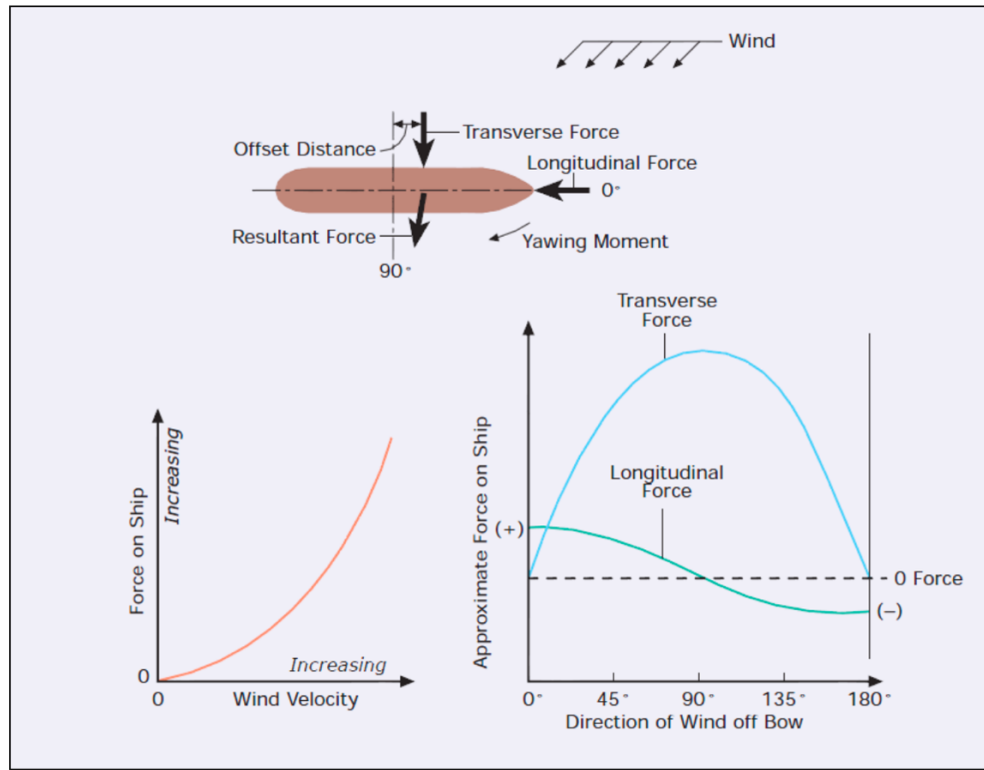


Figura 3.2: Fuerza transversal vs fuerza longitudinal por acción del viento ([Ministerio de Obras Públicas, 2013b](#))

Un aspecto importante de los cables de amarre son su propiedad de elasticidad (capacidad de estirarse bajo carga), ya que una alta elasticidad implica una mayor absorción para las cargas dinámicas del sistema, lo cual es una característica deseable, aun así, también conlleva a un mayor movimiento del buque. Existe una variedad de cables de amarre, los cuales generalmente están hechos de polipropileno, polietileno, poliéster, nylon, HMPE y polymix.

3.2.3 Líneas de anclaje

Para finalizar, el último elemento faltante corresponde a las líneas de fondeo que sujetan las boyas con el lecho marino. En el mercado se encuentran 2 tipos de líneas, estas son las cadenas y cables; con respecto a las cadenas suelen haber simples y compuestas, estas son ideales para la abrasión excesiva. En paralelo, los cables son clasificados en ligeros y pesados, donde los ligeros son idénticos a los mencionados en la sección anterior, destacando el uso de cables de poliéster y polipropileno que tienen pesos propios despreciables, son indiferentes a la corrosión y su manipulación es más sencilla y segura, sin embargo, el mayor inconveniente es su alto coste ([Almazán et al., 2001](#)); por otro lado, están los cables pesados como, por ejemplo, los cables metálicos que están hechos por alambres de acero enrollados y torcidos alrededor de un eje común como se puede ver en la Figura 3.3(b), cabe destacar que existe una relación inversamente proporcional entre el diámetro del cable y su elasticidad, por lo que a mayor diámetro, menor es la elasticidad del cable. Se caracterizan por ser fáciles de montar en terreno, ofrecen una buena prestación, son de bajo costo, son resistentes a mordeduras de peces que se encuentren en la localidad, y por último, si bien pueden estar sometidos a corrosión, se suelen utilizar camisas ya sea de polietileno o poliuretano para evitar dicho daño.

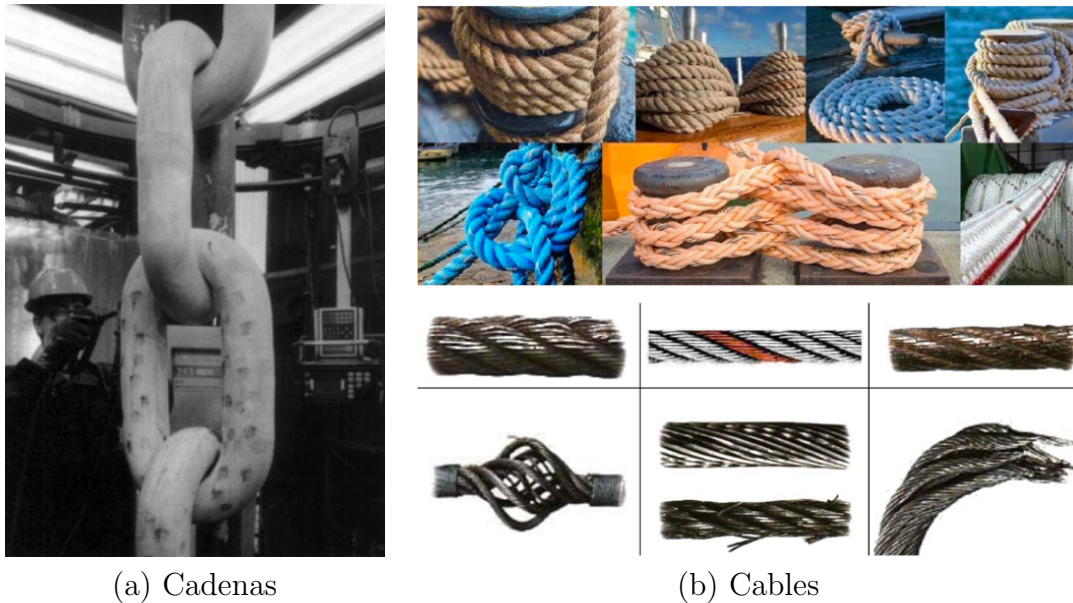


Figura 3.3: Líneas de anclaje disponibles ([Almazán et al., 2001](#))

3.3 Olas

Si hay algo que es indiscutible es la variabilidad que existe en el océano. Antes de saber qué son las olas que se ven desde cualquier costa, hay que comprender el por qué se forman estos movimientos en el océano. Sobre la atmósfera del planeta Tierra incide una radiación proveniente del sol, los cuales generan algunas áreas de alta y de baja presión debido a las diferentes temperaturas en el planeta, lo que conlleva a movimientos de masa de aire conocidos como viento. Debido a la fricción que hay entre el viento y la área superficial del océano se generan ondas; es por esto que se dice que el viento transmite energía al fluido y el oleaje a lo largo del tiempo consume parte de esta energía, compuesta por energía potencial y cinética. Existen dos movimientos que se pueden distinguir en las olas, uno es un movimiento circular y el otro es un movimiento de traslación del movimiento ondulatorio, lo cual hace que la ola tome una dirección y velocidad característica, asimismo, es importante nombrar que las partículas oscilan de manera vertical ([Carmen et al., 2000](#)). Una forma de clasificar las olas es de acuerdo a su profundidad relativa, una relación dada por el cociente entre la profundidad del océano y la longitud de onda (d/L). Dicho esto, se puede encontrar tres tipos de oleajes:

- (a) Oleaje en Aguas Profundas
- (b) Oleaje en Aguas Intermedias
- (c) Oleaje en Aguas Someras

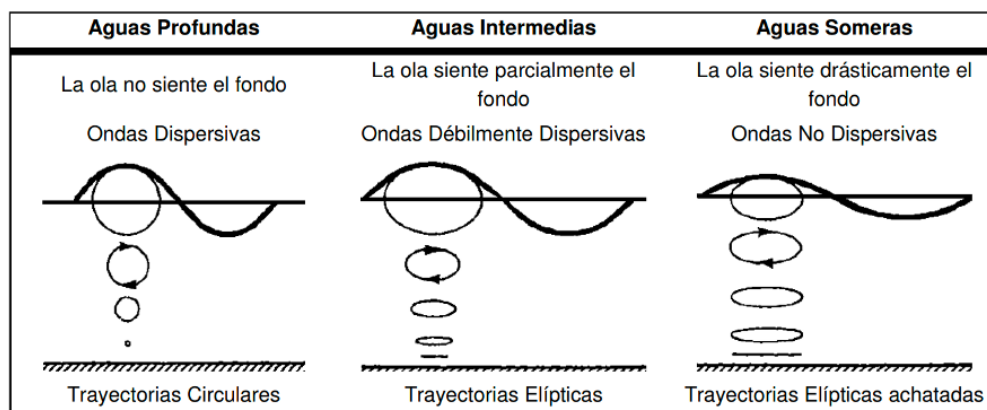


Figura 3.4: Clasificación según la profundidad relativa ([Ministerio de Obras Públicas, 2013a](#))

Como bien se muestra en la Figura 3.4, cuando la profundidad del océano es mucho mayor comparado con la longitud de onda, las trayectorias formadas son circulares, sin embargo, a medida que el oleaje se acerca a la costa se dice que “siente el fondo” y las trayectorias se tornan elípticas que se pueden llegar a achatar hasta llegar a formar una línea recta. En la literatura existe una

amplia gama de teorías que permiten modelar el océano, en la Figura 3.5 se observan que existen 2 ramas, una correspondiente al oleaje regular y otra a un oleaje irregular. No se entrará en detalles para cada teoría, sin embargo, se explicará la teoría de oleaje regular más sencilla y utilizada a lo largo de la historia.

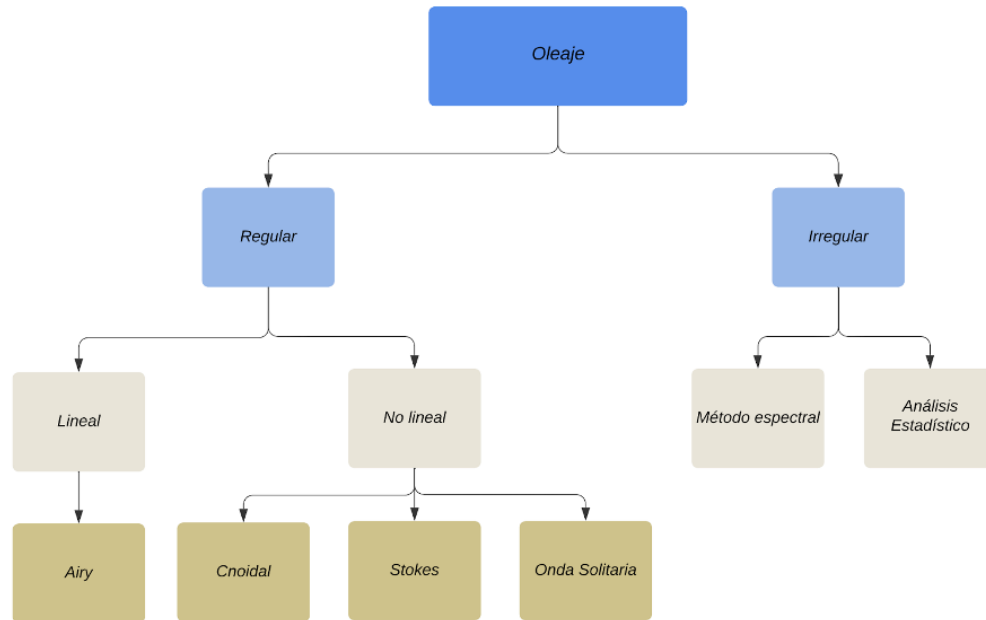


Figura 3.5: Mapa conceptual de Teorías de Oleaje (Elaboración Propia)

Teoría de Oleaje Regular

Para un observador que se sitúe en cualquier parte de la costa podrá ver que el mar tiene ondulaciones en diferentes direcciones, alturas y periodos. Sin embargo, la teoría de oleaje regular simplifica este comportamiento y se reduce a describir a una onda unidireccional predominante.

Teoría Lineal de Airy

En la Figura 3.6 se puede observar los parámetros que definen una ola, destacando 4 fundamentales: Altura (H), Profundidad (d), Periodo (T) y Longitud de onda (L).

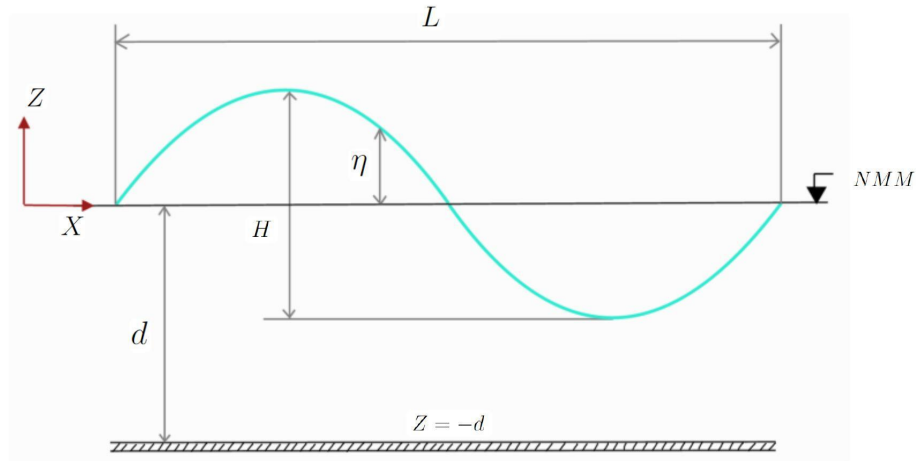


Figura 3.6: Características de onda lineal de Airy (Elaboración Propia)

La onda se propaga unidireccionalmente, por lo que la elevación de la onda η está definida de la siguiente manera:

$$\eta(x, t) = \frac{H}{2} \cos \left(\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right) \quad (3.1)$$

donde la variable x representa la componente espacial y t la variable temporal. A continuación se definen algunos conceptos claves:

- **Cresta:** es la mayor amplitud que puede alcanzar la superficie del mar sobre el NMM.
- **Valle:** zona de menor amplitud que puede alcanzar la superficie del mar.
- **Altura (H):** corresponde a la distancia entre el valle y la cresta.
- **Longitud de onda (L):** es la distancia entre dos crestas sucesivas.
- **Periodo (T):** equivale al tiempo que tarda para la formación de dos crestas en un mismo punto.
- **Frecuencia (f):** número de crestas que pasan por un punto cada segundo.
- **Velocidad (c):** también conocida como celeridad, es la velocidad de propagación de la onda.
- **Elevación de la onda (η):** corresponde al desplazamiento vertical de la ola.
- **Profundidad (d):** distancia entre el fondo marino y el NMM.

Para efectos de la teoría lineal, se considera que la altura de la cresta es igual a la del valle, esto implica que la altura de la ola equivale a dos veces la amplitud de la misma. Adicionalmente, existen tres parámetros adimensionales que son habituales para caracterizar el oleaje ([Ministerio de Obras Públicas, 2013a](#)):

- (a) Pendiente de la ola

$$\epsilon = \frac{H}{L}$$

- (b) Altura relativa de onda

$$\delta = \frac{H}{d}$$

- (c) Profundidad relativa

$$\mu = \frac{d}{L}$$

Es importante resaltar que existe una relación directa entre la pendiente de la ola ϵ y la forma que esta adopta; si la pendiente toma un valor menor a $1/50$, se tiene una forma sinusoidal, mientras que si este valor es mayor, tendrá una forma trocoidal ([Calisto, 2016](#)). Por lo tanto, en los casos que el perfil de la ola adopta un perfil sinusoidal es posible aplicar la Teoría Lineal de Airy o también conocida como teoría de amplitud pequeña, que se conoce por su fácil aplicación y porque entrega aproximaciones razonables. Los supuestos que considera esta teoría son los siguientes:

- (a) El fluido es homogéneo e incompresible (densidad constante).
- (b) La tensión superficial es despreciable.
- (c) El efecto Coriolis puede ser despreciado.
- (d) La presión en la superficie libre es uniforme y constante.
- (e) El fluido es ideal o no viscoso.
- (f) El fluido es irrotacional.
- (g) El fondo es horizontal, impermeable, de límite fijo, lo cual implica que la velocidad vertical en el fondo es cero.
- (h) La amplitud de la ola es pequeña y su forma no varía en el tiempo y el espacio.

(i) Las olas son planas (fenómeno bi-dimensional).

A continuación, en la Figura 3.7 se observa una tabla que contiene las formulaciones necesarias para la teoría lineal; hay que diferenciar que se disponen de tres columnas, donde cada una tiene las ecuaciones pertinentes según la profundidad relativa μ .

Relative Depth	Shallow Water $\frac{d}{L} < \frac{1}{25}$	Transitional Water $\frac{1}{25} < \frac{d}{L} < \frac{1}{2}$	Deep Water $\frac{d}{L} < \frac{1}{2}$
1. Wave profile	Same As >	$\eta = \frac{H}{2} \cos \left[\frac{2\pi x}{L} - \frac{2\pi t}{T} \right] = \frac{H}{2} \cos \theta$	< Same As
2. Wave celerity	$C = \frac{L}{T} = \sqrt{gd}$	$C = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi} \tanh \left(\frac{2\pi d}{L} \right)$	$C = C_0 = \frac{L}{T} = \frac{gT}{2\pi}$
3. Wavelength	$L = T\sqrt{gd} = CT$	$L = \frac{gT^2}{2\pi} \tanh \left(\frac{2\pi d}{L} \right)$	$L = L_0 = \frac{gT^2}{2\pi} = C_0 T$
4. Group velocity	$C_g = C = \sqrt{gd}$	$C_g = nC = \frac{1}{2} \left[1 + \frac{4\pi d/L}{\sinh(4\pi d/L)} \right] C$	$C_g = \frac{1}{2} C = \frac{gT}{4\pi}$
5. Water particle velocity			
(a) Horizontal	$u = \frac{H}{2} \sqrt{\frac{g}{d}} \cos \theta$	$u = \frac{H}{2} \frac{gT}{L} \frac{\cosh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)} \cos \theta$	$u = \frac{\pi H}{T} e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)} \cos \theta$
(b) Vertical	$w = \frac{H\pi}{T} \left(1 + \frac{z}{d} \right) \sin \theta$	$w = \frac{H}{2} \frac{gT}{L} \frac{\sinh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)} \sin \theta$	$w = \frac{\pi H}{T} e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)} \sin \theta$
6. Water particle accelerations			
(a) Horizontal	$a_x = \frac{H\pi}{T} \sqrt{\frac{g}{d}} \sin \theta$	$a_x = \frac{g\pi H}{L} \frac{\cosh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)} \sin \theta$	$a_x = 2H \left(\frac{\pi}{T} \right)^2 e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)} \sin \theta$
(b) Vertical	$a_z = -2H \left(\frac{\pi}{T} \right)^2 \left(1 + \frac{z}{d} \right) \cos \theta$	$a_z = -\frac{g\pi H}{L} \frac{\sinh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)} \cos \theta$	$a_z = -2H \left(\frac{\pi}{T} \right)^2 e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)} \cos \theta$
7. Water particle displacements			
(a) Horizontal	$\xi = -\frac{HT}{4\pi} \sqrt{\frac{g}{d}} \sin \theta$	$\xi = -\frac{H}{2} \frac{\cosh[2\pi(z+d)/L]}{\sinh(2\pi d/L)} \sin \theta$	$\xi = -\frac{H}{2} e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)} \sin \theta$
(b) Vertical	$\zeta = \frac{H}{2} \left(1 + \frac{z}{d} \right) \cos \theta$	$\zeta = \frac{H}{2} \frac{\sinh[2\pi(z+d)/L]}{\sinh(2\pi d/L)} \cos \theta$	$\zeta = \frac{H}{2} e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)} \cos \theta$
8. Subsurface pressure	$p = \rho g(\eta - z)$	$p = \rho g\eta \frac{\cosh[2\pi(z+d)/L]}{\cosh(2\pi d/L)} - \rho g z$	$p = \rho g\eta e^{\left(\frac{2\pi z}{L}\right)} - \rho g z$

Figura 3.7: Características de la teoría de oleaje de Airy (Ministerio de Obras Públicas, 2013a)

3.4 Viento

El viento, al igual que el océano y otros fenómenos de la naturaleza, corresponde a un proceso estocástico, por lo que caracterizarlo no es tarea sencilla. Es por esto, que una práctica común es tomar valores de la velocidad media y, a su vez, una dirección media del viento a una altura estándar de 10 metros sobre el nivel del mar. Existen varias maneras para estimar la velocidad del viento a una elevación diferente; por ejemplo, una forma adecuada de relacionar la velocidad del viento a una determinada altura z puede ser descrita como ([Journée and Massie, 2001](#))

$$\frac{V_{tw}(z)}{V_{tw}(10)} = \left(\frac{z}{10}\right)^{0.11} \quad (3.2)$$

En donde:

- $V_{tw}(z)$: Velocidad real del viento a z metros de altura sobre la superficie del agua.
- $V_{tw}(10)$: Velocidad real del viento a 10 metros de altura sobre la superficie del agua.

La acción del viento afecta tanto de manera directa como indirecta en las estructuras; el flujo de este alrededor de los cuerpos genera una fuerza de arrastre, por lo que se debe tener en cuenta la velocidad de los vientos locales en la zona de interés. Por otro lado, el viento esta directamente relacionado con la generación de olas y corrientes que también afectan a los cuerpos, como fue estudiado en la sección anterior.

Para poder obtener la velocidad del viento a lo largo del tiempo en alguna zona en particular del país, existe la aplicación Explorador Eólico¹ del Ministerio de Energía en Chile, cuya función es entregar estadísticas generales del comportamiento de la velocidad del viento a diferentes alturas, ya sea diarias, mensuales o anuales, lo cual permite obtener series de tiempo para distintos periodos. Por otro lado, existen formas numéricas como, por ejemplo, los modelos estocásticos que permiten estimar la velocidad del viento. En un trabajo realizado por [Amaya et al.](#) se realizaron 3 simulaciones considerando los siguientes modelos: viento de velocidad constante, series de tiempo y un modelo estocástico. Con respecto a este último mencionado, lo clasificaron en "Modelo para pequeñas escalas de tiempo" y "Modelo para grandes escalas de tiempo", no obstante, dada la escala temporal de las simulaciones que se realizarán en este trabajo, se presentarán las componentes generales para pequeñas escalas de tiempo.

En simulaciones numéricas del viento, es frecuente asumir que la velocidad está compuesta de 4 componentes:

¹El enlace del Explorador Eólico es: <https://eolico.minenergia.cl/inicio>

- v_{wa} : Velocidad promedio.
- $v_{wr}(t)$: Componente de rampa, que representa el incremento continuo de la velocidad del viento.
- $v_{wg}(t)$: Componente que representa una ráfaga de viento.
- $v_{wt}(t)$: Componente que representa la turbulencia.

Realizando la combinación lineal entre estas componentes, es posible obtener la velocidad total del viento:

$$v_w(t) = v_{wa} + v_{wr}(t) + v_{wg}(t) + v_{wt}(t) \quad (3.3)$$

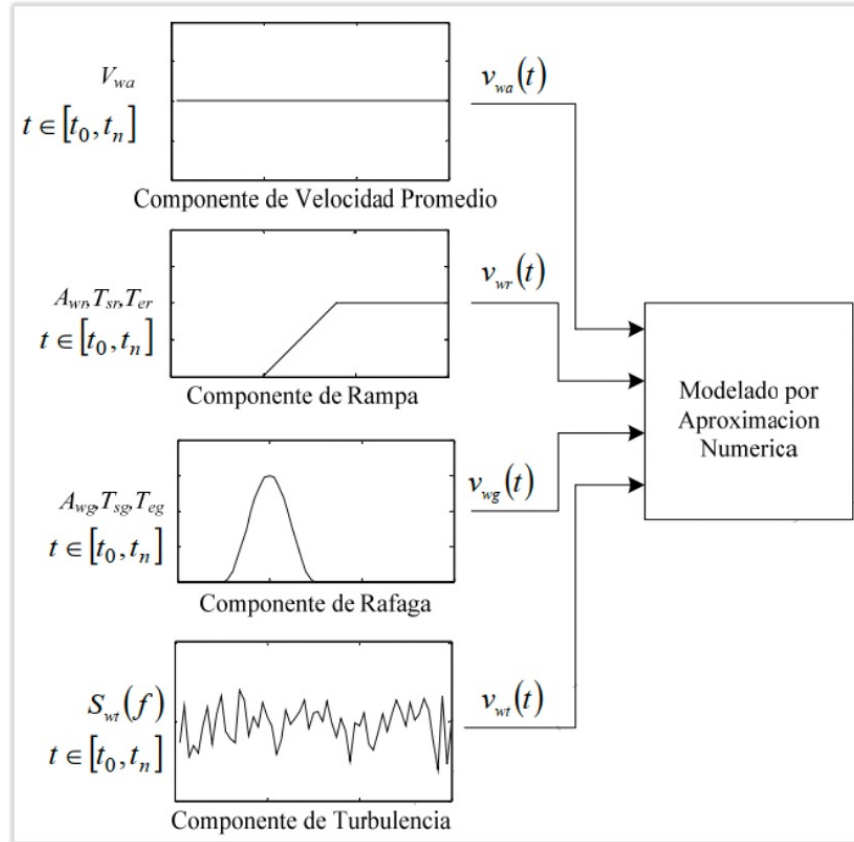


Figura 3.8: Componentes de la velocidad del viento para pequeñas escalas de tiempo ([Amaya et al., 2007](#))

La velocidad promedio equivale a la media aritmética de la velocidad del viento durante un cierto periodo de tiempo. Con respecto a la componente rampa, esta se puede expresar matemáticamente como

$$v_{wr} = \begin{cases} 0 & , si \quad t < T_{sr} \\ A_r \left(\frac{t - T_{sr}}{T_{er} - T_{sr}} \right) & , si \quad T_{sr} \leq t \leq T_{er} \\ A_r & , si \quad T_{er} < t \end{cases} \quad (3.4)$$

donde t es el instante de tiempo de la simulación, A_r es la amplitud de la rampa de velocidad del viento, T_{sr} es el tiempo de inicio de la rampa y T_{er} es el tiempo final de la rampa. En paralelo, una ráfaga de viento es una fluctuación rápida de la velocidad del viento y puede ser caracterizada por la amplitud de la ráfaga de la velocidad del viento A_g , el tiempo de inicio de la ráfaga T_{sg} y el tiempo final de la ráfaga T_{eg} . La formulación queda de la siguiente forma:

$$v_{wg} = \begin{cases} 0 & , si \quad t < T_{sg} \\ A_g \left[1 - \cos \left(2\pi \left(\frac{t - T_{sg}}{T_{eg} - T_{sg}} \right) \right) \right] & , si \quad T_{sg} \leq t \leq T_{eg} \\ 0 & , si \quad T_{eg} < t \end{cases} \quad (3.5)$$

Finalmente, la componente de turbulencia es un poco más compleja de describir por el hecho de que su comportamiento es errático y depende de la ubicación de estudio, por lo cual no se entrará en detalle, sin embargo como información complementaria, esta componente está influenciada por 3 factores: origen de la turbulencia, intensidad y espectro ([Amaya et al., 2007](#)).

Fuerza de Arrastre

La fuerza de arrastre para cualquier fluido puede ser estimada de manera general como

$$F_d = \frac{1}{2} C \rho A V_r^2 \quad (3.6)$$

Donde:

- F_d : Fuerza de arrastre.
- C : Coeficiente de arrastre.
- ρ : densidad del fluido.
- A : Área del objeto normal a la dirección del fluido.
- V_r : Velocidad relativa entre el fluido y el objeto.

3.5 Mecánica de Cuerpo Rígido

En mecánica, un cuerpo rígido es conocido como aquel sistema de partículas en el que la distancia entre cualquier par de partículas permanece constante, dicho de otra forma, es un cuerpo ideal cuyas dimensiones no varían en ningún momento. Existen 2 características principales que permiten caracterizar un cuerpo: posición y orientación. Dependiendo de si se trabaja con un problema en 2 o 3 dimensiones, varía la cantidad de parámetros necesarios para describir la posición y orientación del cuerpo. A continuación, se definirán los elementos necesarios para poder describir y abordar los distintos tipos de problemas.

3.5.1 Sistema de Referencia

Antes de comenzar cualquier análisis, es primordial definir un sistema de referencia que puede encontrarse en reposo o en movimiento, pero generalmente se encuentra en el primer estado mencionado. Por otro lado, cuando se quiere estudiar la dinámica de un cuerpo suele ser conveniente definir, además, un sistema de referencia local situado en alguna zona del cuerpo, como se puede ver en la Figura 3.9; si bien se puede ubicar en cualquier parte del cuerpo, estratégicamente se suele ubicar en el centro de masa para simplificar los cálculos (Nikraves, 2019), lo cual se abordará con más detalles en las secciones posteriores. Una de las principales funciones del sistema de referencia es que a partir de este se pueden calcular diversas magnitudes físicas de interés como, por ejemplo, la posición, velocidad y aceleración de un cuerpo. En la Figura 3.9, los ejes X_1 , X_2 y X_3 representan los ejes ortogonales del sistema de referencia inercial, mientras que X'_1 , X'_2 y X'_3 representan los ejes ortogonales del sistema de referencia local. De ahora en adelante, se utilizará un superíndice de barra para diferenciar un sistema inercial y uno local, ejemplificando esto:

r : vector visto desde un sistema de referencia inercial.

$\bar{r}$: vector visto desde un sistema de referencia local.

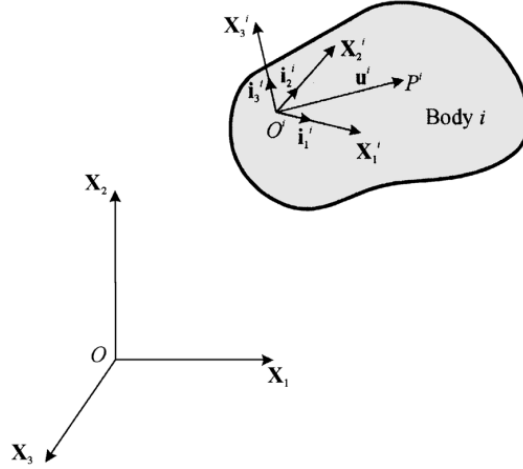


Figura 3.9: Sistemas de referencia inercial y local (Shabana, 2005)

3.5.2 Matriz de Rotación

Las matrices de rotación son utilizadas, valga la redundancia, para representar la rotación de un cuerpo en el espacio y permiten relacionar parámetros entre un sistema de referencia inercial y uno local, por ejemplo, se pueden definir vectores de posición en un sistema de referencia local y, posteriormente, transformarlos a un sistema de referencia inercial. Es aquí donde surge la aplicación de lo que se conoce como "matriz de rotación" o "matriz de transformación".

En la literatura, se pueden encontrar diversas matrices de rotación, las cuales dependen de qué manera se describa la orientación de un cuerpo. Las más usuales son los ángulos de Euler, los parámetros de Rodriguez y los parámetros de Euler (Shabana, 2005). Cualquiera sea el tipo de matriz de rotación a utilizar, todas cumplen la misma función, sin embargo, para el análisis dinámico a realizar es mucho mejor usar los parámetros de Euler por su ventaja en la forma de escribir la matriz, ya que no aparecen funciones trigonométricas involucradas, lo que evita problemas de indeterminación en los cálculos en comparación con los ángulos de Euler, y también permite un menor esfuerzo computacional.

Teorema Principal de Rotación de Euler

Para poder definir los parámetros de Euler, se debe conocer previamente el "Teorema Principal de rotación de Euler", el cual dice que *el desplazamiento general de un cuerpo rígido con un punto fijo es una rotación alrededor de un solo eje* (Hendricks, 2006). Esto quiere decir que no importa cuántas rotaciones se realicen: la orientación final del cuerpo se puede obtener a través de una única rotación respecto a un eje elegido sabiamente.

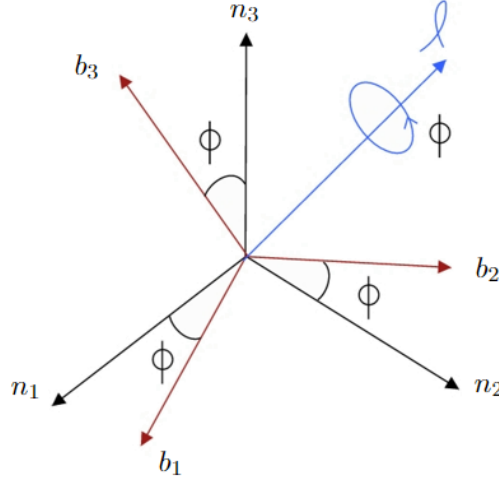


Figura 3.10: Rotación alrededor de eje l (Elaboración Propia)

El eje de rotación permanece igual tanto para el marco de referencia inercial $\hat{n}$ como de un marco de referencia local $\hat{b}$. Matemáticamente esto queda expresado como

$$l = l_1 n_1 + l_2 n_2 + l_3 n_3$$

$$l = l_1 b_1 + l_2 b_2 + l_3 b_3$$

donde n_1, n_2, n_3 y b_1, b_2, b_3 representan las componentes del vector unitario $\hat{n}$ y $\hat{b}$, respectivamente.

Parámetros de Euler

Para definir la orientación de un cuerpo en el espacio se requieren de al menos 3 parámetros, sin embargo, existe una manera en donde se pueden emplear 4 términos para definir la orientación de un cuerpo, estos son los denominados parámetros de Euler. Estos se pueden definir de la siguiente forma ([Hendricks, 2006](#)):

$$\theta_0 = \cos \frac{\phi}{2}, \quad \theta_1 = l_1 \sin \frac{\phi}{2}, \quad \theta_2 = l_2 \sin \frac{\phi}{2}, \quad \theta_3 = l_3 \sin \frac{\phi}{2} \quad (3.7)$$

Donde l_1, l_2 y l_3 corresponden a las componentes del vector unitario $\hat{l}$ que define el eje de rotación y ϕ el ángulo de rotación respecto al eje. Los parámetros de Euler deben satisfacer la siguiente ecuación de restricción:

$$\theta_0^2 + \theta_1^2 + \theta_2^2 + \theta_3^2 = 1 \quad (3.8)$$

Se puede escribir, por lo tanto, la matriz de rotación en términos de los parámetros de Euler de la siguiente forma

$$A = \begin{bmatrix} \theta_0^2 + \theta_1^2 - \theta_2^2 - \theta_3^2 & 2(\theta_1\theta_2 + \theta_0\theta_3) & 2(\theta_1\theta_3 - \theta_0\theta_2) \\ 2(\theta_1\theta_2 - \theta_0\theta_3) & \theta_0^2 - \theta_1^2 + \theta_2^2 - \theta_3^2 & 2(\theta_2\theta_3 + \theta_0\theta_1) \\ 2(\theta_1\theta_3 + \theta_0\theta_2) & 2(\theta_2\theta_3 - \theta_0\theta_1) & \theta_0^2 - \theta_1^2 - \theta_2^2 + \theta_3^2 \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Matriz de Rotación para obtener Parámetros de Euler

Supongamos que se tiene una matriz de rotación A de la siguiente manera:

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix}$$

Para poder determinar los parámetros de Euler a partir de la matriz de rotación A conocida, se puede relacionar los valores de la matriz y los parámetros de Euler de la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \theta_0 &= \frac{1}{2}\sqrt{1 + A_{11} + A_{22} + A_{33}} \\ \theta_1 &= \frac{1}{2}\sqrt{1 + A_{11} - A_{22} - A_{33}} \\ \theta_2 &= \frac{1}{2}\sqrt{1 - A_{11} + A_{22} - A_{33}} \\ \theta_3 &= \frac{1}{2}\sqrt{1 - A_{11} - A_{22} + A_{33}} \end{aligned}$$

Asimismo, se tienen las siguientes relaciones:

$$\begin{aligned} \theta_0\theta_1 &= \frac{A_{23} - A_{32}}{4}, \quad \theta_0\theta_2 = \frac{A_{31} - A_{13}}{4}, \quad \theta_0\theta_3 = \frac{A_{12} - A_{21}}{4} \\ \theta_1\theta_2 &= \frac{A_{12} + A_{21}}{4}, \quad \theta_1\theta_3 = \frac{A_{31} + A_{13}}{4}, \quad \theta_2\theta_3 = \frac{A_{32} + A_{23}}{4} \end{aligned}$$

Por lo tanto, un esquema para obtener los parámetros de Euler es calculando 1 parámetro, por ejemplo θ_0 , y dejar el resto de ecuaciones en función de este, quedando de la siguiente manera:

$$\theta_1 = \frac{A_{23} - A_{32}}{4\theta_0}, \quad \theta_2 = \frac{A_{31} - A_{13}}{4\theta_0}, \quad \theta_3 = \frac{A_{12} - A_{21}}{4\theta_0}$$

Existe una posibilidad de que hayan problemas de inexactitud numérica si el denominador (parámetro de Euler que está dividiendo en las expresiones) está cerca de cero. De ser así, existen aún otras 3 formas posibles de obtener los parámetros que ayudan a evitar estas situaciones.

3.5.3 Desplazamiento General

Con respecto al desplazamiento general, este puede ser descrito mediante una traslación y una rotación. Esto se puede representar de manera vectorial mediante el Teorema de Chasles, que permite establecer la posición global de cualquier punto. Sea r^i el vector posición de un punto cualquiera del cuerpo visto desde un sistema de referencia inercial, este se puede definir como

$$r^i = R^i + A^i \bar{u}^i \quad (3.10)$$

donde R^i representa el vector posición del sistema de referencia del cuerpo, $\bar{u}^i$ corresponde al vector posición del punto P visto desde el sistema de referencia del cuerpo y A^i la matriz de rotación del cuerpo.

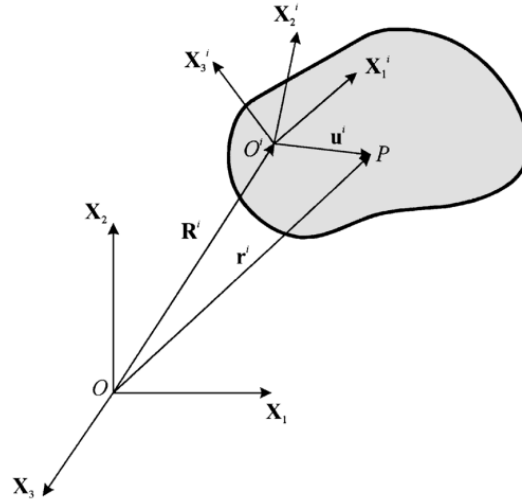


Figura 3.11: Representación vectorial de ubicación punto P (Shabana, 2005)

3.5.4 Coordenadas Generalizadas

A la hora de estudiar la evolución de un sistema, es necesario tener claro cuales serán las variables de estudio. Las coordenadas generalizadas son los parámetros que dan la configuración a un cuerpo y son los que se analizan para determinar su variación en el tiempo. Según la configuración de un sistema, se pueden usar distintas coordenadas generalizadas, como se puede apreciar en la Figura 3.12. De manera general, el conjunto de coordenadas de un cuerpo se denomina q^i , esto es

$$q^i = [R^{iT} \ \theta^{iT}]^T \quad (3.11)$$

donde R^i es el vector que contiene los parámetros de posición del sistema de referencia del cuerpo y θ^i el vector que contiene los parámetros de orientación del cuerpo. Los valores que puede tomar R^i y θ^i van a depender en gran medida de la dimensión del problema (caso plano o espacial) y de la manera de describir la orientación del cuerpo. En el caso de usar ángulos de Euler, se utilizan 6 parámetros para determinar la configuración espacial de un cuerpo, donde 3 representan la posición del cuerpo y 3 definen su orientación, mientras que, en el caso de emplear los Parámetros de Euler, este número de parámetros aumenta a 7, ya que se requieren de 3 términos para la posición y 4 para la orientación.

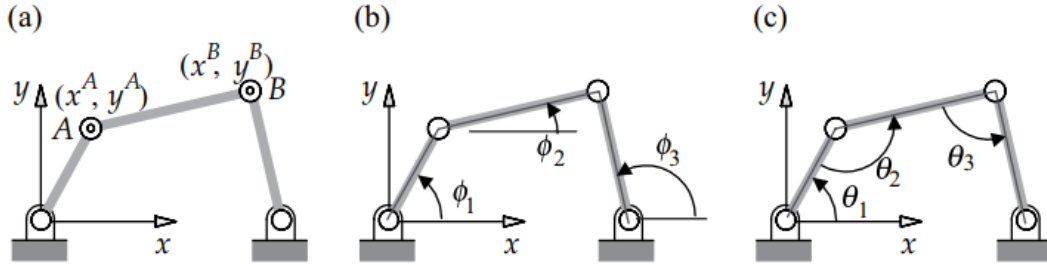


Figura 3.12: Distintas coordenadas generalizadas para un mismo mecanismo de 3 barras (Nikraves, 2019)

3.5.5 Restricciones de Movimiento

Naturalmente, un cuerpo no siempre se puede mover libremente, por ejemplo, el caso de un péndulo simple que esté pivotado en un extremo, lo cual implica que el cuerpo solo puede rotar en torno a dicho punto, es decir, se encuentra restringido. En el caso de un sistema multicuerpo, dichos cuerpos no pueden moverse de manera libre, ya que están sujetos a restricciones debido a los puntos de unión entre cada cuerpo. Es importante destacar que, si se tiene n coordenadas generalizadas que se encuentran relacionadas por n_c ecuaciones de restricción, se debe cumplir que $n_c \leq n$. Una ecuación de restricción que describa una condición sobre un set de coordenadas generalizadas q , se puede expresar como:

$$\mathbf{C}(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = \mathbf{C}(q, t) = 0 \quad (3.12)$$

En general, las ecuaciones de restricción de igualdad como la presentada en la ecuación (3.12) que están en función de la posición y, en algunos casos, también en función del tiempo, son llamadas restricciones holonómicas, en cambio, si dichas ecuaciones poseen desigualdades o términos de velocidad que no son integrables, se denominan restricciones no holonómicas (Shabana, 2005).

Junta Esférica

Una de las restricciones típicas que se puede encontrar en un sistema es una junta esférica, la cual restringe el desplazamiento entre 2 cuerpos, pero que permite girar libremente a estos.

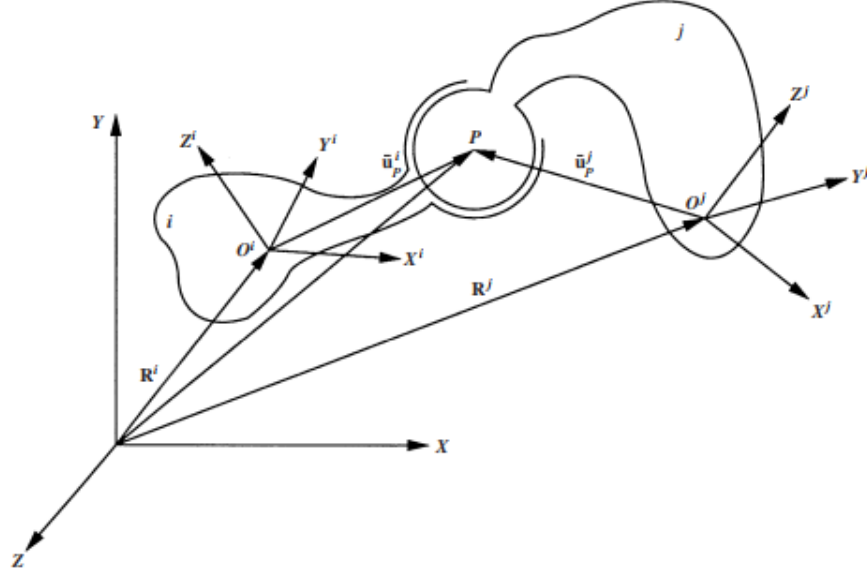


Figura 3.13: Representación de junta esférica (Shabana, 2010)

Sea un punto P , el cual es el punto de unión entre un par de cuerpos i y j , la ecuación de restricción vectorial se puede expresar como

$$C(q^i, q^j) = R^i + A^i \bar{u}^i - R^j - A^j \bar{u}^j = 0 \quad (3.13)$$

donde R^i y R^j representan el vector de posición de los sistemas de referencia local de los cuerpos i y j , respectivamente; A^i y A^j representan las matrices de rotación de los cuerpos; por último, $\bar{u}^i$ y $\bar{u}^j$ son los vectores de posición del punto P visto desde los sistemas de referencia locales de cada cuerpo (Shabana, 2010).

Junta Prismática

Otra junta que es usual encontrar en algunos sistemas es la junta prismática, el cual solo deja 1 grado de libertad, por lo que solo existe movimiento en una única dirección entre 2 cuerpos. Ejemplificando esto, un elemento mecánico que tiene dicha restricción son los cilindros oleohidráulicos, ya que el vástago solo se puede mover en una dirección.

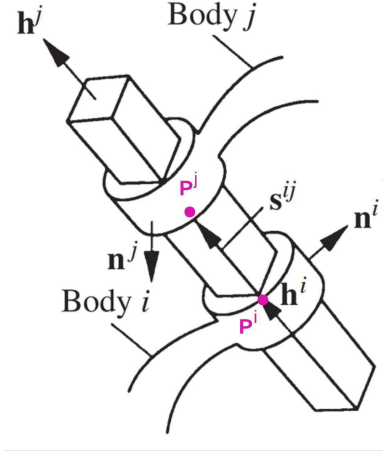


Figura 3.14: Representación de junta prismática (Shabana, 2010)

Para poder describir una restricción de este tipo se requieren de 3 ecuaciones vectoriales:

$$C(q^i, q^j) = \begin{bmatrix} h^i \times h^j \\ h^i \times s^{ij} \\ n^{iT} n^j \end{bmatrix} = 0 \quad (3.14)$$

Donde h^i y h^j son vectores que se ubican en un mismo eje a lo largo de los cuerpos i y j respectivamente, n^i y n^j son 2 vectores perpendiculares entre sí, como también perpendiculares al eje entre los cuerpos y, por último, el vector s^{ij} se puede expresar como

$$s^{ij} = r_p^i - r_p^j$$

donde r_p^i y r_p^j son los vectores de posición de los puntos P^i y P^j vistos desde el sistema de referencia inercial.

3.5.6 Dinámica Lagrangiana

Para estudiar la dinámica de un sistema de cuerpos existen diversas técnicas de análisis, donde una de las más conocidas corresponde a las Leyes de Newton. Sin embargo, para analizar sistemas multicuerpos hay métodos más sencillos y sistemáticos, como lo es la Dinámica Lagrangiana. La ecuación que explica la dinámica viene definida como

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right] = Q_j \quad (3.15)$$

$$\mathcal{L} = T - V$$

donde $\mathcal{L}$ es conocido como el Lagrangiano, que relaciona la energía cinética de un cuerpo y su energía potencial, q_j es la coordenada generalizada del cuerpo j , $\dot{q}_j$ es la derivada temporal de la coordenada generalizada y, por último, Q_j representa una fuerza o momento externo al sistema y se conoce como Fuerza Generalizada ([Shabana, 2005](#)).

Por otro lado, esta formulación solo entrega información de las posiciones, velocidades y aceleraciones en cada instante, pero no permite determinar las fuerzas y/o momentos que se generan en las articulaciones o puntos de apoyo del sistema. Es por esto que se añade un término extra a la ecuación de Lagrange denominado "Multiplicadores de Lagrange", quedando de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial q_j} - \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{q}_j} \right] = Q_j + \sum_{n=k} \lambda_k \left(\frac{\partial C_k}{\partial q_j} \right) \quad (3.16)$$

donde C_k corresponde a la k -ésima ecuación de restricción y λ_k es el k -ésimo Multiplicador de Lagrange que representa una fuerza o momento que ejerce el punto de apoyo/conexión.

3.5.7 Ecuaciones de Movimiento en Sistemas de Cuerpos Rígidos

Existen diversos términos que se deben considerar para abordar la dinámica de cuerpos rígidos interconectados, es por esto que, a partir de ahora, se presentarán los conceptos fundamentales involucrados.

Velocidad Angular

La velocidad angular de un cuerpo puede escribirse en base de la derivada temporal de los Parámetros de Euler de dicho cuerpo, es decir

$$\bar{w}^i = \bar{G}^i \dot{\theta}^i \quad (3.17)$$

donde $\bar{w}^i$ corresponde a la velocidad angular del cuerpo i visto desde el sistema de referencia local. Según el tipo de parámetros que se quieran emplear para definir la orientación de un cuerpo, dependerá los valores usados en $\dot{\theta}^i$ y $\bar{G}^i$. Si se decide usar los parámetros de Euler, $\dot{\theta}^i$ correspondería a un vector de 4 componentes con la variación temporal de cada parámetro, mientras que $\bar{G}^i$ se expresaría como

$$\bar{G}^i = 2 \begin{bmatrix} -\theta_1^i & \theta_0^i & \theta_3^i & -\theta_2^i \\ -\theta_2^i & -\theta_3^i & \theta_0^i & \theta_1^i \\ -\theta_3^i & \theta_2^i & -\theta_1^i & \theta_0^i \end{bmatrix} \quad (3.18)$$

donde $\theta_0^i, \theta_1^i, \theta_2^i, \theta_3^i$ corresponden a los parámetros de Euler del cuerpo i .

Matriz de Masas de los Cuerpos Rígidos

Los cuerpos tienen ciertas características que los diferencian: poseen una masa y una inercia asociada. La inercia de un cuerpo rígido puede ser descrita por un Tensor de Inercia el cual permite tener una noción de cómo se distribuye la masa de un cuerpo rígido; matricialmente se expresa como

$$I = \begin{bmatrix} I_{xx} & -I_{xy} & -I_{xz} \\ -I_{yx} & I_{yy} & -I_{yz} \\ -I_{zx} & -I_{zy} & I_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

donde las cantidades I_{xx} , I_{yy} y I_{zz} son llamados “momentos de inercia” con respecto a los ejes X , Y y Z , respectivamente, mientras que I_{xy} , I_{xz} , I_{yx} , I_{yz} , I_{zx} y I_{zy} son llamados “productos de inercia” y permiten tener una medida del desequilibrio en la distribución de masas ([J. Peraire, 2008](#)). La inercia de un cuerpo varía según desde qué sistema de referencia se calcule; un punto a destacar es que siempre es posible encontrar 3 ejes ortogonales de tal forma que generen que los productos de inercia sean igual a cero, lo cual conllevaría a una matriz diagonal. Dicho esto, se suele trabajar con un sistema de referencia local situado en el centro de masa para que, primero, los productos de inercia sean cero y, en segundo lugar, la inercia de un cuerpo rígido visto desde un sistema de referencia local genere que la inercia permanezca constante a lo largo del tiempo, lo que facilita los cálculos. La *Matriz de Masa*, por lo tanto, es definida como una matriz que contiene la información tanto de la masa del cuerpo i , como su inercia. Esta se define como

$$M^i = \begin{bmatrix} m_{RR}^i & 0 \\ 0 & m_{\theta\theta}^i \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

Donde

$$m_{RR}^i = \begin{bmatrix} m^i & 0 & 0 \\ 0 & m^i & 0 \\ 0 & 0 & m^i \end{bmatrix} \quad \text{y} \quad m_{\theta\theta}^i = \bar{G}^{iT} \bar{I}_{\theta\theta}^i \bar{G}^i$$

M^i corresponde a la matriz de masa del cuerpo, m_{RR}^i es una matriz asociada con el movimiento de traslación del cuerpo, mientras que $m_{\theta\theta}^i$ es una matriz asociada a las coordenadas rotacionales del cuerpo de referencia y, por otro lado, $\bar{I}_{\theta\theta}^i$ corresponde a la matriz de inercia del cuerpo i vista desde el sistema de referencia local, además, como esta matriz de inercia se calcula respecto al sistema de referencia con origen en el centro de masa del cuerpo, los productos de inercia son cero y la matriz queda de la forma

$$\bar{I}_{\theta\theta}^i = \begin{bmatrix} I_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & I_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & I_{zz} \end{bmatrix}$$

Fuerza Generalizada

En los problemas de dinámica es normal que los cuerpos estén sometidos a fuerzas y momentos externos. No obstante, en la Mecánica Lagrangiana aparece un concepto denominado Fuerza Generalizada, que contiene las fuerzas y momentos asociados a una coordenada generalizada; algunos ejemplos de estas fuerzas son la gravedad, la amortiguación, la fricción o la fuerza de un resorte, entre otras. Generalmente, dicho vector se define como

$$Q_e^i = \begin{bmatrix} Q_R^i \\ Q_\theta^i \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

donde Q_R^i representa el vector fuerza asociado al movimiento de traslación y Q_θ^i representa el vector fuerza asociado al movimiento de rotación, por lo que técnicamente sería un momento y no una fuerza. A continuación, se expondrán algunas de las fuerzas generalizadas utilizadas a lo largo del trabajo.

Vector de Fuerza

Un vector de fuerza es uno de los elementos más básicos y usuales que son aplicados en un cuerpo o sistema de multicuerpos. Esta fuerza puede ser aplicada ya sea por un agente externo o puede ser algo tan común como la fuerza de peso de un cuerpo. Sea F^i una fuerza aplicada sobre un cuerpo i en un punto P^i , el vector de fuerza generalizada aplicada en ese punto se puede expresar como ([Shabana, 2010](#))

$$Q^i = \begin{bmatrix} F_R^i \\ F_\theta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F^i \\ \bar{G}^{iT} \bar{M}_a^i \end{bmatrix} \quad (3.22)$$

Donde

$$\bar{M}_a^i = A^{iT} M_a$$

$$M_a = u_p \times F^i$$

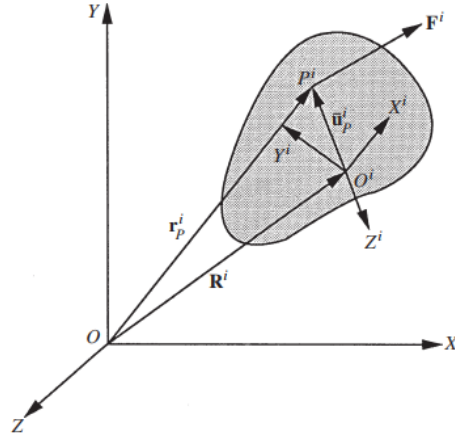


Figura 3.15: Fuerza F^i aplicada sobre un cuerpo i (Shabana, 2010)

Fuerza de Resorte - Amortiguador - Actuador

Existen 3 elementos que son ampliamente encontrados en sistemas mecánicos, el primero corresponde a un resorte o también conocido en la literatura como muelle, los amortiguadores, y los elementos actuadores, como por ejemplo, un cilindro neumático. En la Figura 3.16 se presentan estos 3 elementos actuando sobre un cuerpo i y j , a lo largo de la línea de acción entre los puntos P^i y P^j .

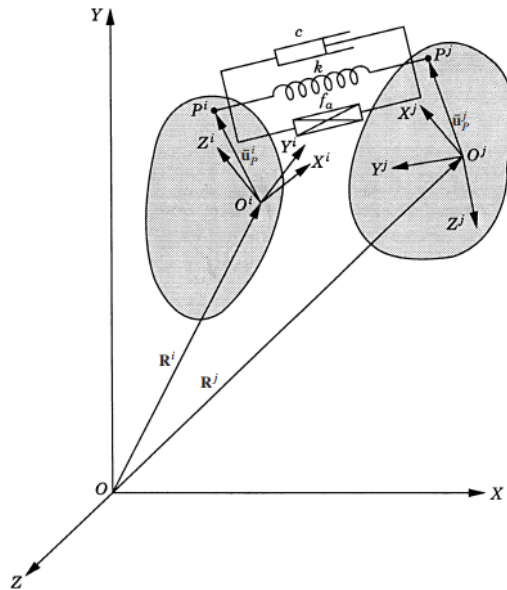


Figura 3.16: Fuerzas Resorte-Amortiguador-Actuador sobre cuerpo i (Shabana, 2010)

La magnitud de la fuerza que actúa en ambos cuerpos se define como

$$F_s = k(l - l_0) + c\dot{l} + f_a \quad (3.23)$$

donde k representa la constante del resorte, l es la longitud del resorte, l_0 es la longitud inicial del resorte sin deformar, c corresponde al coeficiente de amortiguamiento y f_a es la fuerza del actuador. El término l se puede escribir de la siguiente manera:

$$l = \sqrt{(r_p^{ij})^T r_p^{ij}} \quad (3.24)$$

Donde

$$\begin{aligned} r_p^{ij} &= r_p^i - r_p^j \\ &= R^i + A^i \bar{u}^i - R^j - A^j \bar{u}^j \end{aligned}$$

Para conocer la dirección de la línea de acción de las fuerzas, se define el vector unitario $\hat{r}_p^{ij}$ como

$$\hat{r}_p^{ij} = \frac{r_p^{ij}}{l}$$

Finamente, los vectores de fuerza generalizada de un sistema Resorte-Amortiguador-Actuador se pueden escribir como

$$Q^i = \begin{bmatrix} Q_R^i \\ Q_\theta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -F_s \hat{r}_p^{ij} \\ F_s (G^i)^T (\tilde{u}_p^i)^T \hat{r}_p^{ij} \end{bmatrix} \quad (3.25a)$$

$$Q^j = \begin{bmatrix} Q_R^j \\ Q_\theta^j \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_s \hat{r}_p^{ij} \\ -F_s (G^j)^T (\tilde{u}_p^j)^T \hat{r}_p^{ij} \end{bmatrix} \quad (3.25b)$$

Donde

$$\tilde{u}_p^i = \begin{bmatrix} 0 & -u_z^i & u_y^i \\ u_z^i & 0 & -u_x^i \\ -u_y^i & u_x^i & 0 \end{bmatrix}$$

Q_i y Q_j corresponden al vector de Fuerza Generalizada aplicados sobre los cuerpos i y j , respectivamente.

Vector de Velocidad Cuadrático

Se denomina Vector de Velocidad Cuadrático al término que agrupa las fuerzas inerciales del sistema, dentro de las cuales están consideradas la fuerza centrífuga y la aceleración de Coriolis. Este término se denota Q_v^i y se expresa como

$$Q_v^i = \left[0^T \quad -2\bar{w}^{iT} \bar{I}_{\theta\theta}^i \dot{\bar{G}}^i \right]^T \quad (3.26)$$

Matriz Jacobiana de Restricciones

Como se mencionó en la sección 3.5.5, $C(q, t)$ corresponde al vector de restricciones de un sistema multicuerpo. Se define la Matriz Jacobiana de Restricciones como

$$C_q = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1n} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{n_c1} & C_{n_c2} & \dots & C_{n_cn} \end{bmatrix} \quad (3.27)$$

donde C_q es una matriz de orden $n_c \times n$ y cada elemento de ésta corresponde a

$$C_{ij} = \frac{\partial C_i}{\partial q_j}$$

3.5.8 Sistema Diferencial - Algebraico

Una vez presentadas todas las componentes que influyen en los cuerpos rígidos, se puede escribir el sistema de ecuaciones de un sistema multicuerpo mediante la Dinámica Lagrangiana como:

$$M\ddot{q} + C_q^T \lambda = Q_e + Q_v \quad (3.28)$$

$$C(q, t) = 0 \quad (3.29)$$

Dichas ecuaciones forman un sistema de ecuaciones diferencial - algebraicas (o por sus siglas en inglés *DAEs*), debido a que la ecuación (3.28) contiene las derivadas temporales de las coordenadas generalizadas, mientras que la ecuación (3.29) corresponde a las ecuaciones de restricción algebraicas. Para poder resolver el sistema DAEs, se deriva la ecuación (3.29) dos veces respecto al tiempo, produciendo que:

$$C_q \ddot{q} = -C_{tt} - (C_q \dot{q})_q \dot{q} - 2(C_q)_t \dot{q} \quad (3.30)$$

$$C_q \ddot{q} = Q_c \quad (3.31)$$

Sin embargo, en caso que el vector de restricciones C no dependa del tiempo, esto se puede simplificar a

$$Q_c^i = -\dot{q}^T \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 C_i}{\partial q_1^2} & \cdots & \frac{\partial^2 C_i}{\partial q_1 \partial q_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 C_i}{\partial q_n \partial q_1} & \cdots & \frac{\partial^2 C_i}{\partial q_n^2} \end{bmatrix} \dot{q} \quad (3.32)$$

donde el superíndice i indica la ecuación de restricción C_i . Por último, reordenando algebraicamente el set de ecuaciones planteadas, se puede escribir matricialmente las ecuaciones (3.28) y (3.31) como

$$\begin{bmatrix} M & C_q^T \\ C_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{q} \\ \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Q_e + Q_v \\ Q_c \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

Discretización del sistema diferencial

Para resolver el sistema diferencial - algebraico, se discretiza la variable $\ddot{q}$ para proceder a resolver las ecuaciones diferenciales mediante el método de Euler explícito de primer orden. Al realizar esto, se tiene que

$$\ddot{q} = \dot{v} = \frac{v^{t+\Delta t} - v^t}{\Delta t} \quad (3.34)$$

donde v^t corresponde a la velocidad de la coordenada generalizada en el instante t y Δt es el paso de tiempo. Reemplazando esta nueva expresión en la ecuación (3.33) y reordenando, se obtiene que:

$$\begin{bmatrix} M & C_q^T \\ C_q & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v^{t+\Delta t} \\ \mu^{t+\Delta t} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} P^t + f\Delta t \\ C_q v^t + Q_c^t \Delta t \end{bmatrix} \quad (3.35)$$

$$\mu = \lambda \Delta t, \quad P^t = M v^t, \quad f = Q_e + Q_v$$

Por lo tanto, conociendo las condiciones iniciales de posición, orientación y velocidad de cada cuerpo, se puede resolver el problema como un sistema lineal de la forma $Ax = b$. Una forma de despejar podría ser calculando la inversa de la matriz A , que representa el primer término de la ecuación matricial, sin embargo, no es factible en gran parte de los casos debido a que la matriz A suele ser no invertible, lo cual se puede verificar calculando su determinante, obteniéndose valores cercanos a cero. Por consiguiente, se emplean métodos numéricos para resolver dicho sistema lineal, donde destaca el Método Iterativo GMRES que evita los problemas mencionados.

Una práctica común es, además, utilizar preconditionadores para transformar el sistema lineal $Ax = b$ a otro equivalente, pero con condiciones espectrales más favorables. Al resolver el sistema lineal se obtienen los valores de velocidad de cada coordenada generalizada $v^{t+\Delta t}$, así como también los valores de $\mu^{t+\Delta t}$. Con estos valores se puede calcular las coordenadas generalizadas y los valores de λ del siguiente paso de tiempo:

$$q^{t+\Delta t} = q^t + v^{t+\Delta t} \Delta t \quad (3.36)$$

$$\lambda^{t+\Delta t} = \frac{1}{\Delta t} \mu^{t+\Delta t} \quad (3.37)$$

Capítulo 4

Metodología

A lo largo de este capítulo se explicará en detalle el modelo para cada componente del Terminal Multiboyas y acerca de las condiciones marítimas y del viento que serán aplicadas en el sistema, además, se entrará en detalle en la formulación de cada fuerza y su respectiva transformación a Fuerza Generalizada y se nombrarán las restricciones de movimiento que tendrán los cuerpos. Posteriormente, se explicará grosso modo el código elaborado en MATLAB que permite realizar las simulaciones para el Terminal Multiboyas y, finalmente, se mostrará el layout del sistema propuesto.

4.1 Modelo Multiboyas Propuesto

Tras haber presentado las piezas y factores cruciales de un terminal multiboyas, se procederá a explicar el modelo utilizado para representar las boyas, los cables de amarre del buque y las líneas de fondeo. [Zhu and Yoo](#) realizó una investigación en la cual se buscó modelar un sistema de dos cables de fondeo y una boya esférica bajo un oleaje dado y considerando las fuerzas hidrodinámicas y de gravedad, donde el objetivo era modelar de manera eficiente dicho sistema. No obstante, para efectos de este trabajo, lo que se quiere destacar de este estudio es la forma de modelar los cables de fondeo y boyas; en la Figura 4.1 se observa que el sistema de referencia inercial se ubica a nivel del mar, los cables son discretizados en pequeños elementos que se encuentran conectados en los nodos destacados con color rojo, mientras que el primer y último nodo son los puntos de anclaje a la boya y al lecho marino, respectivamente.

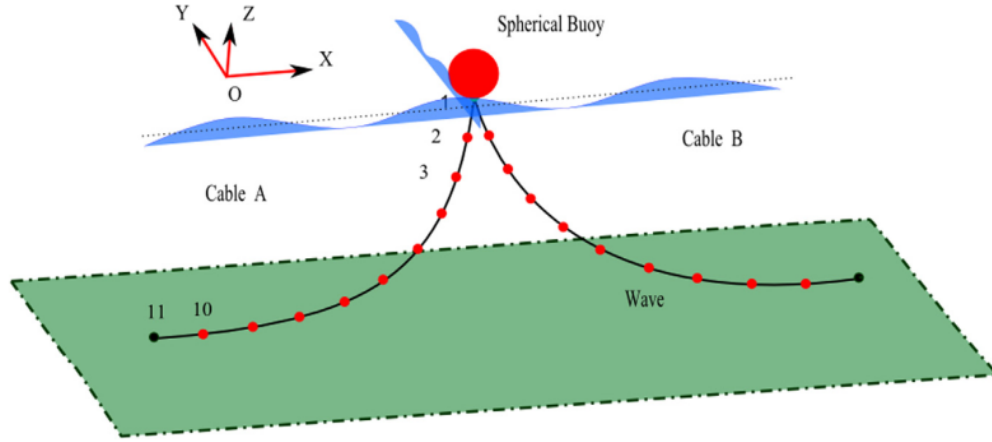


Figura 4.1: Modelo discretizado de cables (Zhu and Yoo, 2016)

De esta manera, se decidió modelar los cables de amarre y las líneas de anclaje como cuerpos divididos en pequeños elementos que se conectan en cada nodo, mientras que, si bien las boyas de los terminales tienen una geometría más cilíndrica en la práctica, para los efectos de este trabajo será considerado esférica porque de igual manera ayudará a comprender y tener una noción acerca de las cargas dinámicas del sistema y, con respecto al modelamiento del buque, puesto que sería complejo estimar propiedades geométricas como el volumen hundido, la inercia, las áreas transversal y longitudinal, entre otros parámetros, y además de no contar con información específica del buque, se decidió trabajar con un cilindro robusto.

4.1.1 Modelo oceánico

Para poder realizar el modelo oceánico, hay que partir conociendo las características de la Bahía Quintero, ubicación del Puerto Ventanas. Para el diseño del terminal se considerará un escenario extremo que podría ocurrir en la bahía y, para esto, en la Figura 4.2 se pueden observar los 30 casos más extremos que han ocurrido entre los años 1980 y 2015.

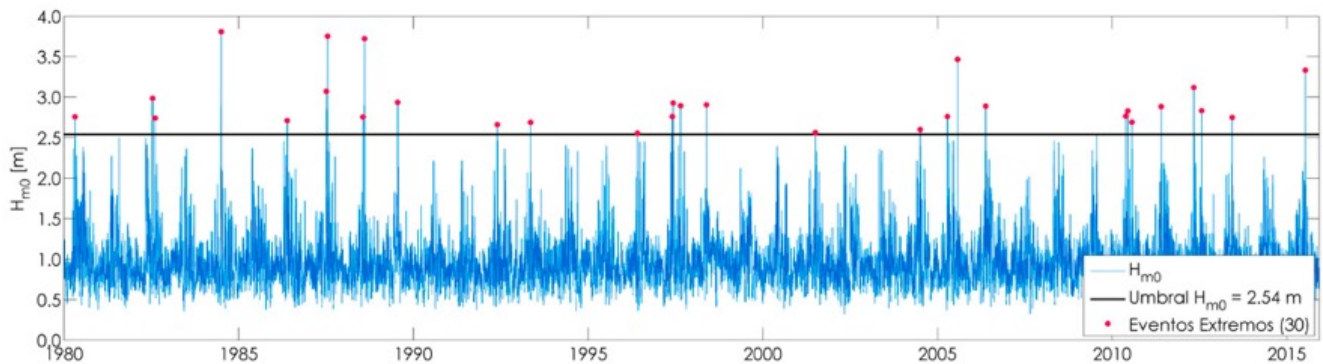


Figura 4.2: Serie de Tiempo de la Altura Significativa (J. et al., 2016)

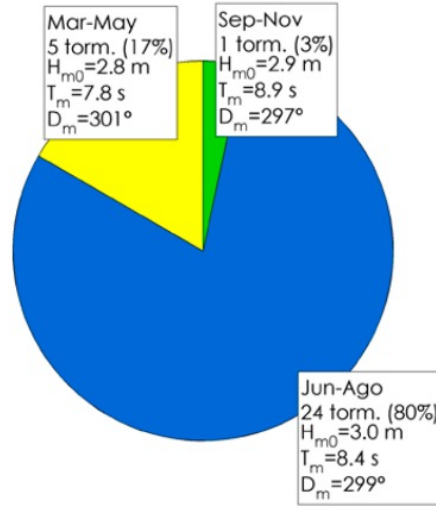


Figura 4.3: Distribución Estacional de Extremos (J. et al., 2016)

En la Figura 4.3 se puede ver los 30 eventos más extremos ocurridos en una condición de tormenta distribuidos de manera estacional, donde naturalmente, el 80% de los eventos han ocurrido en la temporada de invierno con una dirección predominante de 299 [°] respecto a la rosa de los vientos. Además, a modo de complemento, en la Figura 4.4 en el diagrama de Distribución de Extremos se puede ver que la dirección predominante del oleaje es entre O y NO entrando a la bahía. En paralelo, una información relevante se puede ver en el diagrama de Periodos de Retorno Bivariado donde es posible ver que hay eventos que suceden frecuentemente, como también eventos que suceden una vez cada 100 años y, como último dato importante, se advierte en los diagramas que el Periodo de oleaje T_m en gran parte de los eventos es de 8 segundos.

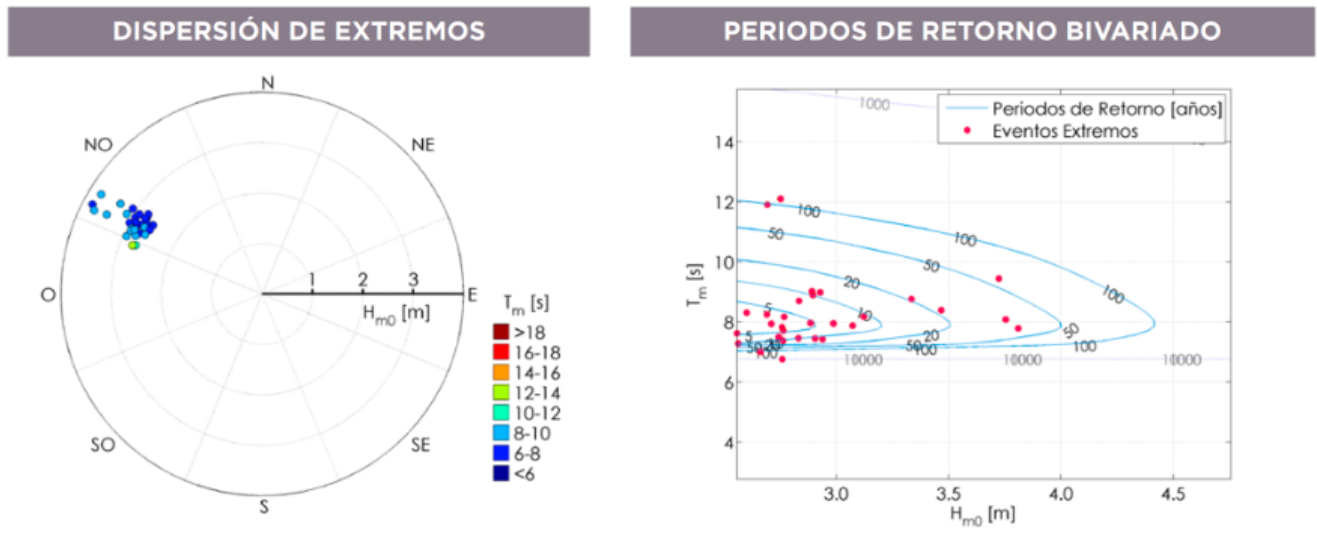


Figura 4.4: Dirección predominante, Periodo de Oleaje medio y Periodos de retorno de eventos (J. et al., 2016)

Considerando una posible ubicación del terminal multiboyas en la Latitud $-32,75^\circ$ y Longitud $-71,50^\circ$, ubicación que se puede ver en la Figura 4.5, es necesario conocer la profundidad del lecho marino en dicho punto. Es por esto que a partir de las Cartas Náuticas proporcionadas por el académico del Departamento de Obras Civiles UTFSM, Patricio Catalán, se obtuvo que la profundidad d correspondiente es de 22 [m] bajo el nivel del mar.

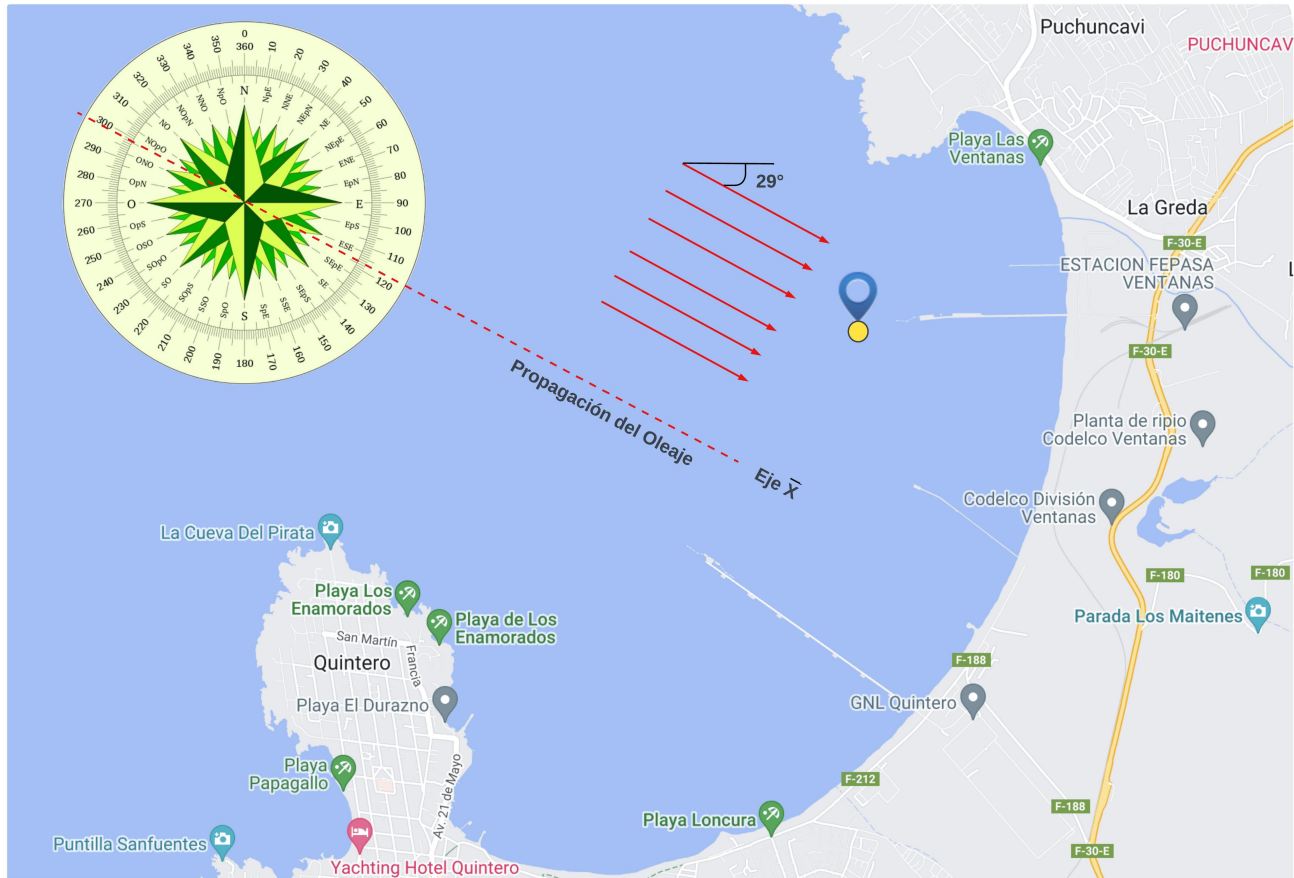


Figura 4.5: Ubicación del Terminal Multiboyas. Se indica, además, la dirección de propagación del oleaje (Elaboración Propia)

Dicho esto, en las simulaciones a realizar se considerarán diversos escenarios respecto al estado del océano. Primero, la dirección predominante, el periodo de oleaje y la profundidad del océano serán los mismos en todas las simulaciones, valores que se encuentran en la Tabla 4.1, mientras que la altura del oleaje H será un parámetro de estudio que cambiará en cada simulación. Para esto, se considerarán 2 escenarios: Tormenta baja y Tormenta crítica, los cuales se encuentran en la Tabla 4.2.

Tabla 4.1: Parámetros del estado del océano

Parámetro	Valor	Unidad
Periodo de onda, $T^{\bar{x}}$	8	[s]
Profundidad de la zona, d	22	[m]
Dirección de propagación del oleaje	299	[°]
Densidad del agua, ρ_f	1025	[kg/m ³]

Tabla 4.2: Distintos escenarios de Altura de oleaje

Situación	Altura de oleaje [m]
Tormenta baja	2,5
Tormenta crítica	4

En la sección 3.3 se comentó acerca de los modelos vigentes para modelar el océano y para este trabajo se decidió emplear la Teoría Lineal de Airy. Para comenzar, en la Figura 3.7 del Capítulo 3 es posible ver tres columnas: Aguas Someras, Aguas Intermedias y Aguas Profundas; cada una de estas contiene 8 ecuaciones que indican, por ejemplo, la velocidad de la onda, la velocidad de las partículas de agua según la profundidad, entre otros valores. Sin embargo, para poder saber en que zona del mar nos encontramos, hay que calcular la profundidad relativa, lo que implica calcular la Longitud de Onda para cada caso y relacionarla con la profundidad de la localidad, como se hizo en la Tabla 4.3.

Tabla 4.3: Clasificación de la zona según la longitud de onda y profundidad

Zona	Longitud de onda [m]	$\frac{d}{L} < \frac{1}{25}$	$\frac{1}{25} \leq \frac{d}{L} < \frac{1}{2}$	$\frac{1}{2} \leq \frac{d}{L}$
Aguas Someras	117,5	No Cumple	-	-
Aguas Intermedias	90,8	-	Cumple	-
Aguas Profundas	99,9	-	-	No Cumple

Finalmente, se concluye que el oleaje corresponde a una zona de Aguas Intermedias, que se interpreta como una transición entre Aguas Profundas y Aguas Someras.

Ecuaciones Involucradas

La dirección de propagación del oleaje es de 229 [°] utilizando como referencia la Rosa de los Vientos de la Figura 4.5, es decir, que la onda proviene desde NOpO hacia ESE. Sin embargo, para fines de este trabajo, este ángulo será medido a partir del eje horizontal en sentido antihorario,

por ende, la ola estaría entrando a la bahía con un ángulo de -29 [°]. Considerando que la onda se propaga a lo largo del eje $\bar{X}$, es posible definir la elevación de la superficie del mar η como

$$\eta = \eta^{\bar{x}} \cos(k^{\bar{x}} \bar{X} - \omega^{\bar{x}} t) \quad (4.1)$$

donde

$$\begin{aligned} L^{\bar{x}} &= \frac{g(T^{\bar{x}})^2}{2\pi} \tanh\left(\frac{2\pi d}{L^{\bar{x}}}\right) \\ k^{\bar{x}} &= \frac{2\pi}{L^{\bar{x}}} \\ \omega^{\bar{x}} &= \frac{2\pi}{T} \end{aligned}$$

$L^{\bar{x}}$ corresponde a la longitud de onda, $k^{\bar{x}}$ representa el número de onda y $\omega^{\bar{x}}$ corresponde a la frecuencia angular; cabe destacar que g corresponde a la aceleración de gravedad que equivale a $9,81 \text{ m/s}^2$.

Para poder relacionar el sistema de referencia inercial X, Y, Z con el sistema de referencia local $\bar{X}, \bar{Y}, \bar{Z}$ de la onda se utilizan las siguientes ecuaciones:

$$\bar{X} = X \cos(\alpha) + Y \sin(\alpha) \quad (4.2)$$

$$\bar{Y} = Y \cos(\alpha) - X \sin(\alpha) \quad (4.3)$$

$$\bar{Z} = Z \quad (4.4)$$

donde α es la dirección de propagación del oleaje respecto a la horizontal igual a -29 [°]. Por otra parte, la velocidad del océano en un punto cualquiera se puede expresar como

$$\bar{V}_f = \begin{bmatrix} \bar{u}_g & \bar{v}_g & \bar{w}_g \end{bmatrix}^T \quad (4.5)$$

donde $\bar{u}_g, \bar{v}_g$ y $\bar{w}_g$ son las componentes en la dirección $\bar{X}, \bar{Y}$ y $\bar{Z}$ respectivamente. La velocidad del océano va a depender de la ubicación espacial del cuerpo, como también dependerá explícitamente del tiempo. Dicho esto, las componentes de la velocidad se pueden formular como

$$\begin{aligned} \bar{u}_g &= \eta^{\bar{x}} \cdot \omega^{\bar{x}} \cdot \frac{\cosh(2\pi(\bar{Z} + d)/L^{\bar{x}})}{\cosh(2\pi d/L^{\bar{x}})} \cdot \cos(k^{\bar{x}} \bar{X} - \omega^{\bar{x}} t) \\ \bar{v}_g &= 0 \\ \bar{w}_g &= \eta^{\bar{x}} \cdot \omega^{\bar{x}} \cdot \frac{\sinh(2\pi(\bar{Z} + d)/L^{\bar{x}})}{\cosh(2\pi d/L^{\bar{x}})} \cdot \sin(k^{\bar{x}} \bar{X} - \omega^{\bar{x}} t) \end{aligned}$$

De manera análoga, se puede expresar la aceleración del océano en un punto cualquiera con

componentes $\dot{\bar{u}}_g$, $\dot{\bar{v}}_g$ y $\dot{\bar{w}}_g$ de la siguiente manera

$$\begin{aligned}\dot{\bar{u}}_g &= \eta^{\bar{x}} \cdot (\omega^{\bar{x}})^2 \cdot \frac{\cosh(2\pi(\bar{Z} + d)/L^{\bar{x}})}{\cosh(2\pi d/L^{\bar{x}})} \cdot \sin(k^{\bar{x}} \bar{X} - \omega^{\bar{x}} t) \\ \dot{\bar{v}}_g &= 0 \\ \dot{\bar{w}}_g &= -\eta^{\bar{x}} \cdot (\omega^{\bar{x}})^2 \cdot \frac{\sinh(2\pi(\bar{Z} + d)/L^{\bar{x}})}{\cosh(2\pi d/L^{\bar{x}})} \cdot \cos(k^{\bar{x}} \bar{X} - \omega^{\bar{x}} t)\end{aligned}$$

Finalmente, conociendo la velocidad y aceleración del océano, sus respectivos vectores son transformados al sistema de referencia inercial:

$$V_f = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \bar{u}_g \\ \bar{v}_g \\ \bar{w}_g \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

$$a_f = \begin{bmatrix} \cos(\alpha) & -\sin(\alpha) & 0 \\ \sin(\alpha) & \cos(\alpha) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\bar{u}}_g \\ \dot{\bar{v}}_g \\ \dot{\bar{w}}_g \end{bmatrix} \quad (4.7)$$

4.1.2 Modelo del viento

Otra variable que debe ser incluida en la simulación es el viento de la localidad. Según los datos analizados ([Meteoblue, 2023b](#)), existen 2 condiciones de viento que son predominante en la zona, uno proveniente de SW y otro de ENE, alcanzando máximos de 12 y 28 [km/h] a 10 [m] sobre el nivel del mar, respectivamente, tal como se puede observar en la Figura 4.6. Además, teniendo en cuenta que la escala temporal de la simulación es del orden de segundos, se decidió emplear un modelo de ráfaga de viento en donde inicialmente no habrá viento que afecte a los cuerpos, pero irá aumentando gradualmente hasta alcanzar su peak y, luego, irá disminuyendo hasta finalizar la simulación. Por ende, se realizarán simulaciones donde existirá un viento proveniente de SW y otras donde el viento provendrá de ENE. El lector podrá percatarse que las velocidades usuales de viento en la bahía son moderadas comparadas con otras zonas del país, es por esto que, adicionalmente, se analizará un caso de viento fuerte de 70 [km/h] que es bastante probable que suceda, por ejemplo, en la ciudad de Punta Arenas como se puede observar en la Figura 4.7.

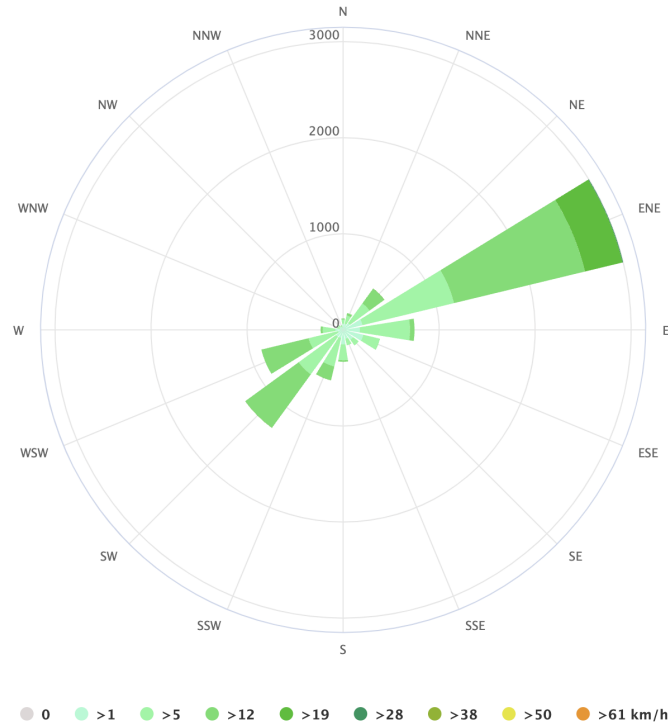


Figura 4.6: Distribución de viento en Quintero, representado en Rosa de los Vientos ([Meteoblue, 2023b](#))

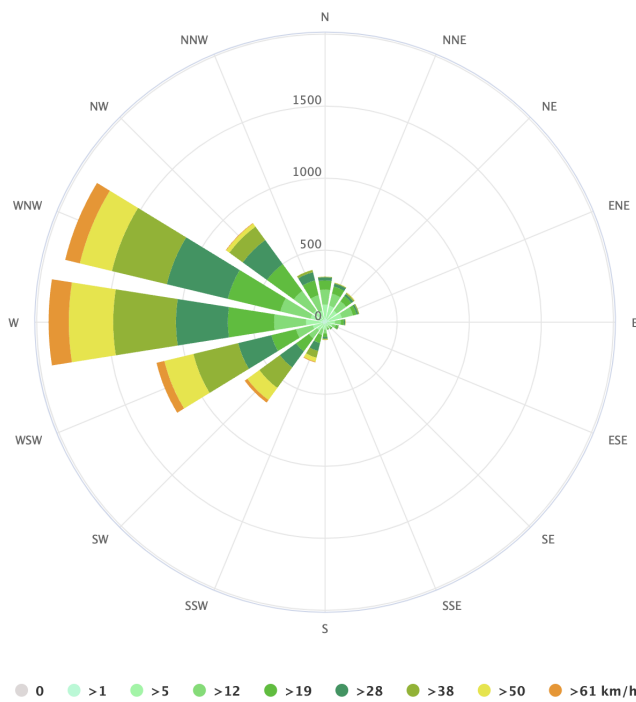


Figura 4.7: Distribución de viento en Punta Arenas, representado en Rosa de los Vientos ([Meteoblue, 2023a](#))

Teniendo en cuenta las ecuaciones vistas en el Capítulo 3, es posible escribir la velocidad del viento a una altura z como

$$V_{tw}(z) = V_{tw}(10) \left(\frac{z}{10} \right)^{0.11} \quad (4.8)$$

luego, debido a que se está trabajando con una componente de ráfaga, la velocidad del viento en un instante dado es

$$v_{wg} = \begin{cases} 0 & , si \quad t < T_{sg} \\ \frac{V_{tw}(z)}{2} \left[1 - \cos \left(2\pi \left(\frac{t - T_{sg}}{T_{eg} - T_{sg}} \right) \right) \right] & , si \quad T_{sg} \leq t \leq T_{eg} \\ 0 & , si \quad T_{eg} < t \end{cases} \quad (4.9)$$

donde t es el instante de tiempo de la simulación, $V_{tw}(z)$ es la amplitud de la ráfaga de velocidad del viento, T_{sg} es el tiempo de inicio de la ráfaga y T_{eg} es el tiempo final de la ráfaga. Finalmente, el vector velocidad del viento visto desde el sistema de referencia inercial se puede expresar como

$$V_{wg} = \begin{bmatrix} v_{wg} \cos(\beta) & v_{wg} \sin(\beta) & 0 \end{bmatrix}^T \quad (4.10)$$

Tabla 4.4: Parámetros del estado del viento para 3 casos posibles

Parámetro	Caso 1	Caso 2	Caso 3	Unidad
Velocidad máxima a 10 [m] SWL, $V_{tw}(10)$	12	28	70	[km/h]
Dirección predominante, β	30	195	0	[°]
Instante de inicio de la ráfaga, T_{sg}	0	ídem	ídem	[s]
Instante de fin de la ráfaga, T_{eg}	16	ídem	ídem	[s]
Densidad del aire, ρ_w	1,225	ídem	ídem	[kg/m3]

4.1.3 Cables de fondeo

A diferencia de [Zhu and Yoo](#) que usan cables hechos con poliéster, estos cables serán de acero y van a ser considerados como cuerpos rígidos. En la Figura 4.8 es posible ver que cada elemento tendrá un sistema de referencia local situado en su centro de gravedad, además, cada cuerpo tendrá una masa asociada y una inercia que será calculada respecto al centro de masa. Con respecto a las cargas externas que actúan sobre cada cuerpo, estas serán aplicadas en el origen del sistema de referencia local.

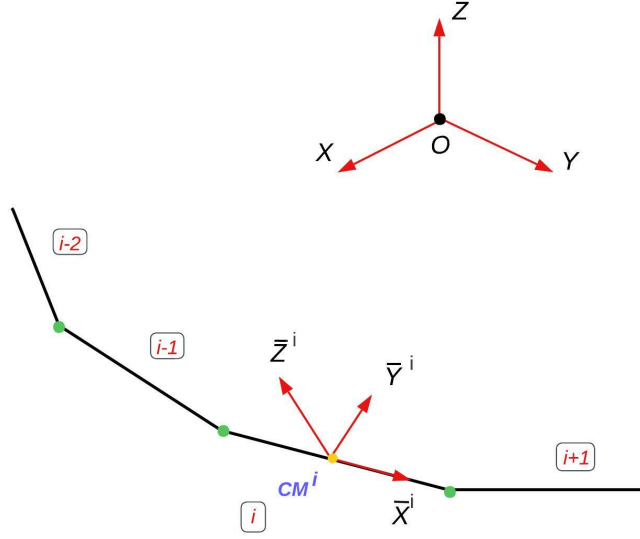


Figura 4.8: Representación general de un elemento (Elaboración Propia)

Un aspecto de considerable importancia radica en la discretización espacial del cable. A medida que esta discretización aumenta, la representación del comportamiento en el análisis dinámico mejora significativamente y, en cierto sentido, el cable adquiere una apariencia más fiel a la realidad. La forma geométrica que posee cada elemento del cable es cilíndrica, por ende, los parámetros geométricos importantes de cada cuerpo son su largo y diámetro; en la Tabla 4.5 se encuentran las propiedades generales para las líneas de anclaje.

Las cargas a las que estará sometido cada elemento del cable son las siguientes:

- Peso propio
- Fuerza de empuje
- Fuerza de arrastre hidrodinámico

La determinación del peso del i -ésimo cuerpo perteneciente al cable se calcula como

$$F_p^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-g}{n_{cuerpos}}(l_{rig} \cdot \rho_{rig}) \end{bmatrix}^T \quad (4.11)$$

donde ρ_{rig} corresponde a la densidad lineal del cable, $n_{cuerpos}$ es la cantidad de cuerpos en la que se dividirá el cable, l_{rig} es la longitud total del cable y g corresponde a la aceleración de gravedad. Como el peso es aplicado en el centro de masa del cuerpo, el vector de fuerza generalizada quedaría expresado como

$$Q_{e,peso}^i = \begin{bmatrix} Q_R^i \\ Q_\theta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_p^i \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (4.12)$$

Por otro lado, los cables de anclaje al encontrarse siempre sumergidos bajo el océano conllevan a que el volumen sumergido sea constante, por lo tanto, la fuerza de empuje que tendrá cada cuerpo se determina como

$$F_e^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{g}{n_{cuerpos}}(l_{rig} \cdot \rho_f) \end{bmatrix}^T \quad (4.13)$$

y expresado como vector de fuerza generalizado quedaría de la siguiente forma

$$Q_{e,empuje}^i = \begin{bmatrix} Q_R^i \\ Q_\theta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_e^i \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (4.14)$$

Para el cálculo de la fuerza de arrastre hidrodinámico, esta puede ser descompuesta a lo largo de los ejes del sistema de referencia local como en la Figura 4.8, lo cual permite obtener fácilmente las áreas proyectadas de cada componente. Por lo tanto, para calcular esta fuerza se debe:

1. Transformar el vector velocidad relativa entre el fluido y el cuerpo desde el sistema de referencia inercial hacia el sistema de referencia local empleando una matriz de rotación.

$$\bar{v}_r^i = A^{iT} v_r^i$$

2. Dado que la nueva velocidad relativa estará alineada con los ejes locales del cuerpo, se procede a calcular la fuerza hidrodinámica.

$$\begin{aligned} \bar{F}_{d,x}^i &= \frac{1}{2} \cdot C_{n,rigid} \cdot \rho_f \cdot \left(\frac{\pi \cdot \phi_{rig}^2}{4} \right) \cdot \bar{v}_{r,x}^i \cdot |\bar{v}_{r,x}^i| \\ \bar{F}_{d,y}^i &= \frac{1}{2} \cdot C_{f,rigid} \cdot \rho_f \cdot \left(\frac{\phi_{rig} \cdot l_{rig}}{n_{cuerpos}} \right) \cdot \bar{v}_{r,y}^i \cdot |\bar{v}_{r,y}^i| \\ \bar{F}_{d,z}^i &= \frac{1}{2} \cdot C_{f,rigid} \cdot \rho_f \cdot \left(\frac{\phi_{rig} \cdot l_{rig}}{n_{cuerpos}} \right) \cdot \bar{v}_{r,z}^i \cdot |\bar{v}_{r,z}^i| \\ \bar{\mathbf{F}}_d^i &= \begin{bmatrix} \bar{F}_{d,x}^i & \bar{F}_{d,y}^i & \bar{F}_{d,z}^i \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

3. Una vez calculada la fuerza hidrodinámica en el sistema de referencia local, esta debe ser transformada nuevamente al sistema de referencia inercial.

$$F_d^i = A^i \bar{F}_d^i \quad (4.15)$$

Por lo tanto, el vector de fuerza generalizada quedaría como

$$Q_{e,arrastre}^i = \begin{bmatrix} Q_R^i \\ Q_\theta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_d^i \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (4.16)$$

Tabla 4.5: Propiedades de líneas de anclaje

Parámetro	Valor	Unidad
Diámetro, ϕ_{rig}	0,032	[m]
Densidad lineal, ρ_{rig}	3,68	[kg/m]
Largo, l_{rig}	22	[m]
Coefficiente de Arrastre en dirección transversal, $C_{n,rig}$	1	[-]
Coefficiente de Arrastre en dirección longitudinal, $C_{f,rig}$	0,01	[-]
Carga de rotura mínima	598	[kN]

Para finalizar, hay que tener en cuenta que los cuerpos tienen distintas restricciones, las cuales son:

- (a) **Restricción de movimiento interno entre cada cuerpo perteneciente al cable:** Los nodos de color verde mostrados en la Figura 4.8 imponen una restricción de movimiento, ya que obliga a los cuerpos del cable a moverse en conjunto, sin embargo, estos pueden rotar libremente. Es por esto que se debe imponer una ecuación de restricción vectorial para cada nodo del cable, la cual será expresada como junta esférica presentada en la ecuación (3.13).
- (b) **Restricción de los nodos extremos:** El nodo que conecta el cable con la boya tiene impuesto una restricción tal, que obliga al cable y la boya moverse juntos, mientras que el nodo que va anclado al lecho marino debe permanecer quieto en un punto invariante, permitiendo solo rotación del cuerpo. La junta que representa las restricciones mencionadas también es del tipo esférica.
- (c) **Restricción de Parámetros de Euler:** Debido a que la orientación de los cuerpos es reflejada con los Parámetros de Euler, estos deben cumplir con la restricción de la ecuación (3.8).

4.1.4 Boyas

Como bien se mencionó, cada boya tendrá una geometría esférica, cuya inercia será calculada respecto a su centro de gravedad, además, en dicho centro se ubicará el sistema de referencia local como se muestra en la Figura 4.9.

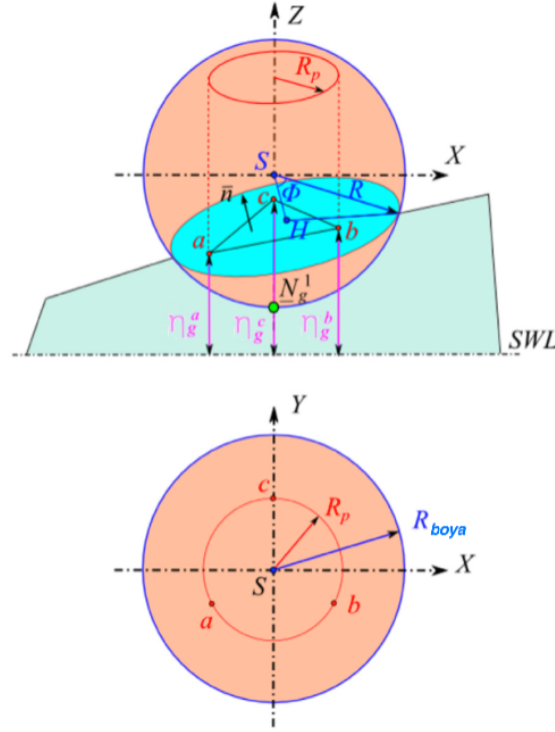


Figura 4.9: Modelo de una boya esférica (Zhu and Yoo, 2016)

Las cargas que se aplicarán en las boyas son las siguientes:

- Peso propio
- Fuerza de empuje
- Fuerza de arrastre hidrodinámico
- Fuerza de arrastre causada por el viento

El peso de la boya es aplicado en su centro de gravedad al igual que la fuerza de empuje, aunque a diferencia de los cables de fondeo, el volumen sumergido y el área proyectada para el cálculo de las fuerzas de arrastre sí cambia a lo largo del tiempo, debido a que la boya puede encontrarse en algunos instantes gran parte sumergida o levemente sumergida. En la Figura 4.9 se puede apreciar la posición de la boya en un instante determinado, donde N_g^1 , que designa el punto más bajo de

la boya, es donde se efectúan las conexiones de los cables de fondeo, S corresponde al centro de gravedad, SWL es el nivel del mar y R_{boya} es el radio de la boya.

Tabla 4.6: Propiedades de boya esférica

Parámetro	Valor	Unidad
Radio, R_{boya}	1	[m]
Masa, m_{boya}	500	[kg]
Radio del círculo concéntrico, R_p	0,5	[m]
Coefficiente de arrastre de la boya (océano), $C_{f,boya}$	1	[-]
Coefficiente de arrastre de la boya (viento), $C_{w,boya}$	1	[-]

Suponiendo que la boya no rota y teniendo en cuenta que la longitud de onda del mar es aproximadamente 90 veces mayor que el radio de la boya, se definen los puntos coplanares a , b y c , los cuales se encuentran espaciados uniformemente alrededor de un círculo concéntrico de radio R_p y cada punto está vinculado a una coordenada en el sistema de referencia inercial. Las coordenadas X e Y de los puntos se obtiene como

$$a_x = N_g^{1,x} - \frac{\sqrt{3}}{2}R_p, \quad a_y = N_g^{1,y} - \frac{1}{2}R_p \quad (4.17)$$

$$b_x = N_g^{1,x} + \frac{\sqrt{3}}{2}R_p, \quad b_y = N_g^{1,y} - \frac{1}{2}R_p \quad (4.18)$$

$$c_x = N_g^{1,x}, \quad c_y = N_g^{1,y} + R_p \quad (4.19)$$

mientras que la coordenada en el eje Z de cada punto se obtiene con la elevación del oleaje de la ecuación (4.1) como

$$\eta_g^a = \eta^{\bar{x}} \cos(k^{\bar{x}} \cdot \bar{a}_x - \omega^{\bar{x}}t) \quad (4.20)$$

$$\eta_g^b = \eta^{\bar{x}} \cos(k^{\bar{x}} \cdot \bar{b}_x - \omega^{\bar{x}}t) \quad (4.21)$$

$$\eta_g^c = \eta^{\bar{x}} \cos(k^{\bar{x}} \cdot \bar{c}_x - \omega^{\bar{x}}t) \quad (4.22)$$

donde $\bar{a}_x$, $\bar{b}_x$ y $\bar{c}_x$ se obtienen utilizando la ecuación (4.2). Conociendo la ubicación de los puntos, es posible determinar el vector normal del plano que indica la orientación del volumen sumergido:

$$\hat{n} = \frac{\overline{ac} \times \overline{bc}}{\|\overline{ac} \times \overline{bc}\|} \quad (4.23)$$

donde

$$\begin{aligned}\overline{ac} &= \left[\frac{\sqrt{3}}{2}R_p \quad \frac{3}{2}R_p \quad \eta_g^c - \eta_g^a \right]^T \\ \overline{bc} &= \left[-\frac{\sqrt{3}}{2}R_p \quad \frac{3}{2}R_p \quad \eta_g^c - \eta_g^b \right]^T\end{aligned}$$

Esto hace posible calcular la distancia entre el centro de masa y el plano usando las siguiente ecuación:

$$SH = n_x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}R_p + n_y \cdot \frac{1}{2}R_p + n_z \cdot (N_g^{1,z} + R - \eta_g^a) \quad (4.24)$$

Para calcular el volumen sumergido de la boya se divide en dos partes a través del plano transversal. Una parte será representada como un cono circular y otra será un casquete esférico como se puede ver en la Figura 4.10.

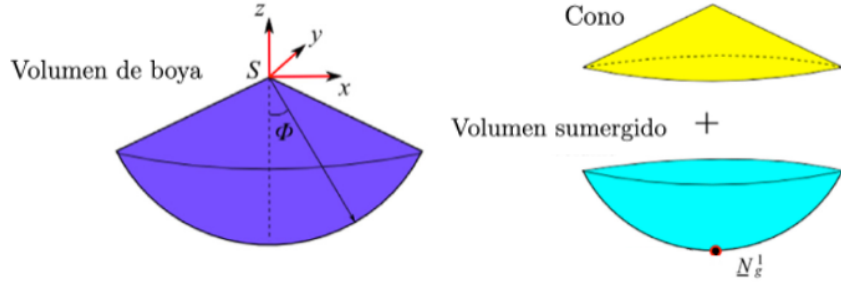


Figura 4.10: Representación del cálculo del volumen sumergido (Zhu and Yoo, 2016)

Por lo tanto, para calcular el volumen sumergido V_s :

$$V_s = \begin{cases} K - \frac{\pi}{3} \cdot SH(R_{boya}^2 - SH^2) & , si \quad PH < N_g^{1,z} + R_{boya} \\ \frac{4}{3}\pi R_{boya}^3 - K + \frac{\pi}{3} \cdot SH(R_{boya}^2 - SH^2) & , si \quad PH \geq N_g^{1,z} + R_{boya} \end{cases} \quad (4.25)$$

$$K = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^\phi \sin(\phi) d\phi \int_0^{R_{boya}} r^2 dr$$

donde PH corresponde a la altura media de la sección transversal, $(N_g^{1,z} + R)$ es la ubicación del centro de masa de la boya en el eje Z respecto al SWL , y ϕ es el ángulo de la esquina del cono.

$$\phi = \arccos\left(\frac{SH}{R_{boya}}\right) \quad (4.26)$$

$$PH = \frac{\eta_g^a + \eta_g^b + \eta_g^c}{3} \quad (4.27)$$

Finalmente, conociendo los valores de SH , PH , ϕ y V_s , se puede obtener las fuerzas respectivas.

Peso propio

Dado que se conoce la masa de una boya, cuyo valor se encuentra en la Tabla 4.6, el peso de una boya es

$$F_{p,boya} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -m_{boya} \cdot g \end{bmatrix}^T \quad (4.28)$$

como esta fuerza es aplicada en el centro de masa, el vector de fuerza generalizada es

$$Q_{e,peso} = \begin{bmatrix} Q_R^i \\ Q_\theta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{p,boya} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (4.29)$$

Fuerza de empuje

Debido al volumen hundido V_s de la boya, se genera una fuerza de empuje positiva en el eje Z dada en la ecuación (4.30), aplicada en el centro de gravedad de la boya.

$$F_{e,boya} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & V_s \cdot \rho_f \cdot g \end{bmatrix}^T \quad (4.30)$$

Expresada como vector de fuerza generalizada:

$$Q_{e,empuje} = \begin{bmatrix} Q_R^i \\ Q_\theta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{e,boya} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (4.31)$$

Fuerza de arrastre hidrodinámico

Existe una parte de la boya que se encuentra en contacto todo el tiempo con el océano que corresponde a la zona inferior donde se amarran los cables de anclaje, es decir, el nodo N_g^1 . Es por esto que la fuerza de arrastre hidrodinámica será aplicada en dicho nodo usando la velocidad relativa entre el fluido y la boya en el punto inferior. Para esto, es necesario conocer posición del centro de masa de la boya, su orientación y su velocidad, lo cual permite determinar la velocidad del nodo N_g^1 de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\dot{\mathbf{N}}_g^1 &= C\dot{\mathbf{M}}_{boya} + A_{boya}(\bar{\omega}_{boya} \times \bar{u}_{inf}) \\ \bar{u}_{inf} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & -R_{boya} \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

donde $C\dot{\mathbf{M}}_{boya}$ corresponde al vector velocidad del centro de masa de la boya, A_{boya} corresponde a la matriz de rotación, $\bar{\omega}_{boya}$ es el vector velocidad angular vista desde el sistema de referencia local y $\bar{u}_{inf}$ es el vector de posición local del nodo N_g^1 . Es importante mencionar que la matriz de rotación A_{boya} es simplemente una matriz identidad, ya que se supuso que la boya no rota. Luego, es necesario calcular la velocidad relativa entre el fluido y la boya:

$$V_{f/b} = V_f - \dot{\mathbf{N}}_g^1 \quad (4.32)$$

El área de la sección sumergida de la boya viene dada por la siguiente ecuación:

$$A_s = \begin{cases} \frac{\pi}{2} R_{boya}^2 - \left(SH \cdot \sqrt{R_{boya}^2 - SH^2} + R_{boya}^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \right) & , si \quad PH < N_g^{1,z} + R_{boya} \\ \frac{\pi}{2} R_{boya}^2 + \left(SH \cdot \sqrt{R_{boya}^2 - SH^2} + R_{boya}^2 \cdot \left(\frac{\pi}{2} - \phi \right) \right) & , si \quad PH \geq N_g^{1,z} + R_{boya} \end{cases} \quad (4.33)$$

Finalmente, conociendo estos valores se puede calcular el vector fuerza de arrastre hidrodinámico como sigue:

$$F_{d,boya} = \frac{1}{2} C_{f,boya} \cdot \rho_f \cdot A_s \cdot |V_{f/b}| \cdot V_{f/b} \quad (4.34)$$

Donde la multiplicación entre los vectores $|V_{f/b}|$ y $V_{f/b}$ es realizada componente a componente. Teniendo en cuenta que la fuerza está aplicada en la parte inferior de la boya y empleando la ecuación (3.22), el vector de fuerza generalizada quedaría como:

$$Q_{e,arraastre} = \begin{bmatrix} Q_R^i \\ Q_\theta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{d,boya} \\ \bar{G}_{boya}^T \cdot \bar{M}_a \end{bmatrix} \quad (4.35)$$

Donde $\bar{G}_{boya}$ se puede obtener con la ecuación (3.18) y, además:

$$\bar{M}_a = A_{boya}^T \cdot M_a$$

$$M_a = u_{inf} \times F_{d,boya}$$

$$u_{inf} = A_{boya} \cdot \bar{u}_{inf}$$

Fuerza de arrastre causada por el viento

Con respecto a la fuerza de arrastre del viento, esta será calculada en el nodo N_w , representado en la Figura 4.11, donde dicho nodo se encuentra ubicado en la mitad del eje Z de la sección no hundida de la boya.

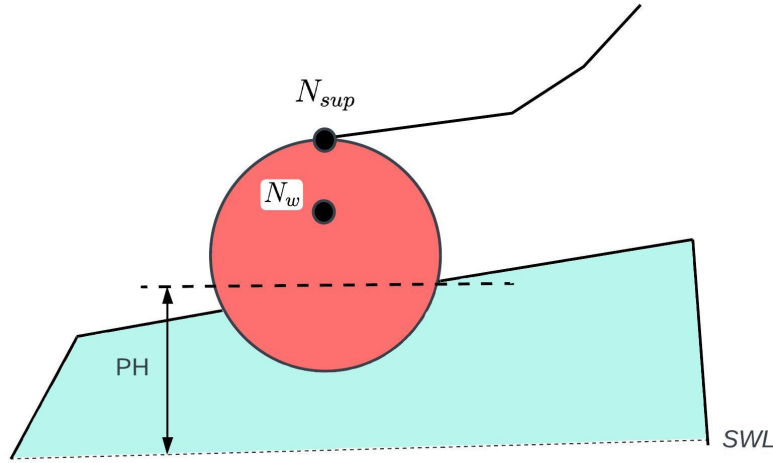


Figura 4.11: Conexión superior entre boya y cable de amarre (Elaboración Propia)

Antes de proceder con los cálculos, es necesario conocer el nodo de la parte superior de la boya:

$$N_{sup} = CM_{boya} + A_{boya} \bar{u}_{sup}$$

$$\bar{u}_{sup} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & R_{boya} \end{bmatrix}^T$$

Luego, el vector posición $\bar{u}_{w,N_{sup}}$ del nodo N_w visto desde el nodo N_{sup} se puede calcular como

$$\bar{u}_{w,N_{sup}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-(N_{sup}^z - PH)}{2} \end{bmatrix}^T$$

Ya que el nodo N_w se puede expresar tanto desde el nodo N_{sup} como desde el centro de masa CM_{boya} y considerando que la matriz de rotación es una matriz identidad, se puede despejar el vector de posición u_w del nodo N_w visto desde el centro de masa de la boya como:

$$\begin{aligned} N_{sup} + A_{boya}u_{w,N_{sup}} &= CM_{boya} + A_{boya}u_w \\ u_w &= N_{sup} + u_{w,N_{sup}} - CM_{boya} \end{aligned}$$

Luego, la velocidad del viento V_{wg} se puede obtener con la ecuación (4.10), mientras que la velocidad del nodo N_w de la boya se puede calcular como:

$$\dot{N}_w = \dot{CM}_{boya} + A_{boya}(\bar{\omega}_{boya} \times \bar{u}_w) \quad (4.36)$$

Conociendo estos valores, se procede a calcular la velocidad relativa entre el viento y el nodo:

$$V_{tw/b} = V_{wg} - \dot{N}_w \quad (4.37)$$

El área de la sección transversal que separa la parte sumergida viene dada por la siguiente ecuación:

$$A_w = \pi \cdot R_{boya}^2 - A_s \quad (4.38)$$

Finalmente, se puede calcular el vector fuerza de arrastre ocasionada por el viento como

$$F_{w,boya} = \frac{1}{2} C_{w,boya} \cdot \rho_w \cdot A_w \cdot |V_{tw/b}| \cdot V_{tw/b} \quad (4.39)$$

donde la multiplicación entre los vectores $|V_{tw/b}|$ y $V_{tw/b}$ es realizada componente a componente. Dado que la fuerza no se aplica en el centro de masa, el vector de fuerza generalizada quedaría como sigue:

$$Q_{e,viento} = \begin{bmatrix} Q_R^i \\ Q_\theta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{w,boya} \\ \bar{G}_{boya}^T \cdot \bar{M}_a \end{bmatrix} \quad (4.40)$$

Donde

$$\begin{aligned} \bar{M}_a &= A_{boya}^T \cdot M_a \\ M_a &= u_w \times F_{w,boya} \\ u_w &= A_{boya} \cdot \bar{u}_w \end{aligned}$$

Restricciones para una boya

Cada boya está condicionada a moverse en conjunto con las líneas de anclaje y con los cables de amarre del buque, sin embargo, la restricción de las líneas de anclaje ya fueron consideradas en el ítem de **Cables de fondeo**. Dicho esto, existirán las siguientes restricciones:

- (a) **Restricción de movimiento entre cables de amarre y boya:** Se debe imponer una ecuación de restricción vectorial en el nodo de conexión entre el cable y la boya, la cual será expresada como junta esférica presentada en la ecuación (3.13). Este tipo de amarras serán aplicadas en la parte superior de la boya como se mostró en la Figura 4.11.
- (b) **Restricción de Parámetros de Euler:** Debido a que la orientación de la boya es reflejada con los Parámetros de Euler, debe cumplir con la restricción de la ecuación (3.8).

4.1.5 Cables de amarre

Los cables utilizados como amarras entre el buque y las boyas serán de tipo flexible, lo que posibilita una mayor capacidad de absorción de cargas, en consecuencia, se evidenciará una diferencia en la modelación entre las líneas de anclaje y los cables de amarre. Para poder realizar un modelo flexible utilizando dinámica de cuerpos rígidos, se discretiza el cable de amarre en diversos “cuerpos” de misma longitud y masa que están obligados a moverse en conjunto debido a las conexiones en cada nodo, luego, cada uno de estos cuerpos es dividido en dos partes como se puede ver en la Figura 4.12. A partir de ahora, se hará la distinción entre “cuerpo” y “eslabón”, donde el primero corresponde al elemento obtenido al discretizar el cable en n partes, mientras que el término eslabón hará referencia al elemento resultante de la división de 1 cuerpo.

Tabla 4.7: Propiedades de cables de amarre

Parámetro	Valor	Unidad
Diámetro, ϕ_{flex}	0,03	[m]
Densidad, ρ_{flex}	2,52	[kg/m]
Largo, l_{flex}	18	[m]
Módulo de Elasticidad, E	2,38	[GPa]
Factor de Amortiguación, $C_{damping}$	10000	[N·s/m]
Coefficiente de Arrastre en dirección transversal, $C_{n,flex}$	1	[-]
Coefficiente de Arrastre en dirección longitudinal, $C_{f,flex}$	0,01	[-]
Carga de rotura mínima	660	[kN]

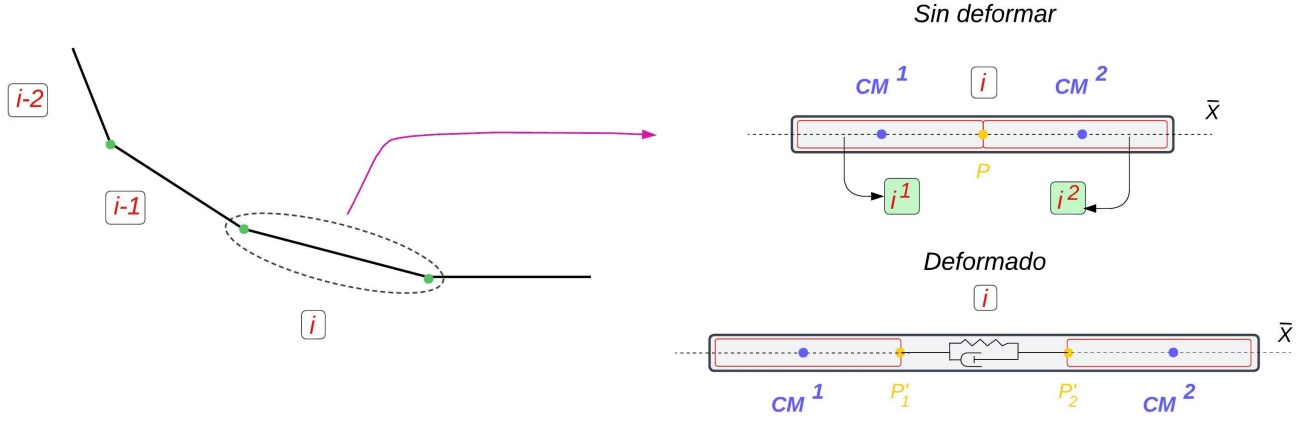


Figura 4.12: Modelo para cable de amarre (Elaboración Propia)

En la figura mostrada, es posible ver que el cuerpo i es dividido en 2 eslabones, i^1 e i^2 , cada uno con su respectivo centro de masa. Estos, cuando están juntos, comparten un punto P en común representado de color amarillo en el caso "sin deformar", sin embargo, cuando actúa una fuerza externa en el sistema, los eslabones se pueden desplazar a lo largo del eje local $\bar{X}$, cuyo desplazamiento conlleva a la aparición de un sistema Resorte - Amortiguador aplicado en los puntos P'_1 y P'_2 , como se puede ver en el caso "deformado". La finalidad del resorte es otorgar elasticidad al sistema, mientras que el amortiguador tiene como fin disipar la energía del sistema. Cada par de eslabones es concéntrico, ya que su movimiento es siempre a lo largo del eje local $\bar{X}$.

Las cargas que soporta cada eslabón son:

- Peso propio
- Fuerza de arrastre causada por el viento
- Fuerza del sistema resorte - amortiguador

La fuerza peso que soportará el i -ésimo eslabón es

$$F_{p,flex}^i = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-g}{n_{eslabones}} \left(\frac{\pi \cdot \phi_{flex}^2}{4} \cdot l_{flex} \cdot \rho_{flex} \right) \end{bmatrix}^T \quad (4.41)$$

donde ρ_{flex} corresponde a la densidad del cable de amarre, $n_{eslabones}$ es la cantidad de eslabones en la que se dividirá el cable, l_{flex} es la longitud total del cable y ϕ_{flex} es el diámetro del cable. Como el peso es aplicado en el centro de masa de cada eslabón, el vector de fuerza generalizada quedaría como

$$Q_{e,peso}^i = \begin{bmatrix} Q_R^i \\ Q_\theta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{p,flex}^i \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (4.42)$$

En relación a la fuerza de arrastre provocada por el viento, su cálculo se efectúa siguiendo los mismos procedimientos que se emplean para calcular la fuerza de arrastre hidrodinámica mencionada en los cables de fondeo:

1. Transformar el vector velocidad relativa entre el fluido y el cuerpo desde el sistema de referencia inercial hacia el sistema de referencia local empleando una matriz de rotación.

$$\bar{v}_r^i = A^{iT} v_r^i$$

2. Dado que la nueva velocidad relativa estará alineada con los ejes locales del cuerpo, se procede a calcular la fuerza de arrastre.

$$\begin{aligned}\bar{F}_{d,x}^i &= \frac{1}{2} \cdot C_{n,flex} \cdot \rho_w \cdot \left(\frac{\pi \cdot \phi_{flex}^2}{4} \right) \cdot \bar{v}_{r,x}^i \cdot |\bar{v}_{r,x}^i| \\ \bar{F}_{d,y}^i &= \frac{1}{2} \cdot C_{f,flex} \cdot \rho_w \cdot \left(\frac{\phi_{flex} \cdot l_{flex}}{n_{eslabones}} \right) \cdot \bar{v}_{r,y}^i \cdot |\bar{v}_{r,y}^i| \\ \bar{F}_{d,z}^i &= \frac{1}{2} \cdot C_{f,flex} \cdot \rho_w \cdot \left(\frac{\phi_{flex} \cdot l_{flex}}{n_{eslabones}} \right) \cdot \bar{v}_{r,z}^i \cdot |\bar{v}_{r,z}^i| \\ \bar{\mathbf{F}}_d^i &= \begin{bmatrix} \bar{F}_{d,x}^i & \bar{F}_{d,y}^i & \bar{F}_{d,z}^i \end{bmatrix}^T\end{aligned}$$

3. Una vez calculada la fuerza en el sistema de referencia local, esta debe ser transformada nuevamente al sistema de referencia inercial.

$$F_d^i = A^i \bar{F}_d^i \quad (4.43)$$

Las áreas de proyección para el cálculo de estas fuerzas permanecen constante, ya que los cables de amarre permanecen siempre en el mismo medio (aire). Como la fuerza de arrastre es calculada en el centro de masa de cada eslabón, el vector de fuerza generalizada queda de la siguiente manera:

$$Q_{e,arrastre}^i = \begin{bmatrix} Q_R^i \\ Q_\theta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_d^i \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (4.44)$$

En la Figura 4.13 se puede observar que cada eslabón estará a diferente altura respecto del nivel del mar, por lo que la velocidad del viento no será la misma para cada eslabón; para obtener el vector velocidad del viento en cada eslabón se utiliza la ecuación (4.10).

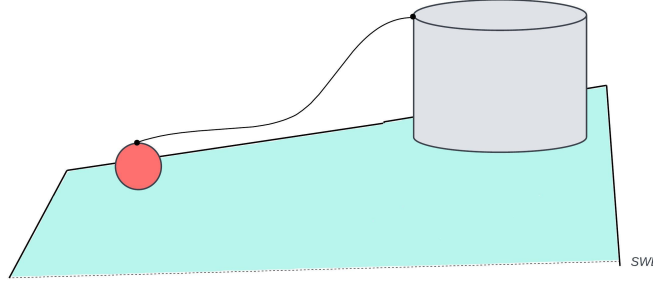


Figura 4.13: Amarra entre buque - boya (Elaboración Propia)

Por último, la fuerza que existe entre cada par de eslabones debida al sistema resorte - amortiguador es descrita con las ecuaciones mencionadas en el Capítulo 3, en la sección 3.5.7 - "*Fuerza Generalizada*". Recordando esto, se sabe que la magnitud de la fuerza ejercida en cada par de eslabones se puede calcular como

$$F_s^i = k_{flex} \cdot l^i + C_{damping} \cdot \dot{l}^i \quad (4.45)$$

$$\begin{aligned} \dot{l}^i &= \frac{\partial l^i}{\partial q^i} \frac{dq^i}{dt} + \frac{\partial l^i}{\partial t} \\ \frac{\partial l^i}{\partial q^i} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial l^i}{\partial q_1^i} & \frac{\partial l^i}{\partial q_2^i} & \cdots & \frac{\partial l^i}{\partial q_n^i} \end{bmatrix} \\ \frac{dq^i}{dt} &= \begin{bmatrix} \frac{dq_1^i}{dt} & \frac{dq_2^i}{dt} & \cdots & \frac{dq_n^i}{dt} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

donde $C_{damping}$ corresponde al Factor de Amortiguación de los cables de amarre, el cual está dado en la Tabla 4.7, mientras que k_{flex} corresponde a la constante elástica, cuyo valor se puede obtener como

$$\begin{aligned} k_{flex} &= \left(\frac{\pi}{4} \cdot \phi_{flex}^2 \right) \cdot \frac{E}{l_0} \\ l_0 &= \frac{l_{flex}}{n_{cuerpos}} \end{aligned}$$

donde E corresponde al Módulo de Elasticidad de los cables de amarre, l_0 equivale a la longitud inicial "sin deformar", es decir, cuando cada par de eslabones se encuentran unidos en el punto P de la Figura 4.12. Con respecto a su expresión como vector de fuerza generalizada, esta se puede determinar con las ecuaciones (3.25a) y (3.25b) vistas en el Capítulo 3.

Finalmente, los cables de amarre tienen 5 tipos de restricciones en general, una de ellas ya fue considerada en el inciso (a) de “Restricciones para una boya”, apartado de **Boyas**. Las restricciones, por lo tanto, son las siguientes:

- (a) **Restricción de movimiento entre cable de amarre y buque:** Se debe imponer una ecuación de restricción vectorial en el nodo de conexión entre el cable de amarre y el buque, lo cual será expresado como una junta esférica presentada en la ecuación (3.13).
- (b) **Restricción de movimiento interno entre cada cuerpo perteneciente al cable:** Los nodos de color verde mostrados en la Figura 4.12 imponen una restricción de movimiento, ya que obliga a los cuerpos del cable a moverse en conjunto, sin embargo, estos pueden rotar libremente. Es por esto que se debe imponer una ecuación de restricción vectorial para cada nodo del cable, la cual será expresada como junta esférica presentada en la ecuación (3.13).
- (c) **Restricción de movimiento entre cada par de eslabones:** Como se mencionó, el movimiento relativo entre cada par de eslabones siempre es a lo largo de un eje concéntrico en común, donde además no se les permite una rotación relativa entre ellos. Es por esto que se aplicará una ecuación de restricción vectorial para cada par de eslabones, la cual será expresada como junta prismática dada en la ecuación (3.14).
- (d) **Restricción de Parámetros de Euler:** Debido a que la orientación de los eslabones es reflejada con los Parámetros de Euler, estos deben cumplir con la restricción de la ecuación (3.8).

4.1.6 Buque Cisterna

Para poder modelar el buque cisterna, se considera un cilindro robusto que está compuesto de 3 partes: un cilindro hueco y una tapa superior e inferior. El centro de masa del buque será el origen del sistema de referencia local, a partir del cual se calcularán tanto la inercia, como también la posición de los puntos de amarre vistos desde el sistema local. En la Tabla 4.8 se encuentran las propiedades que caracterizan al buque.

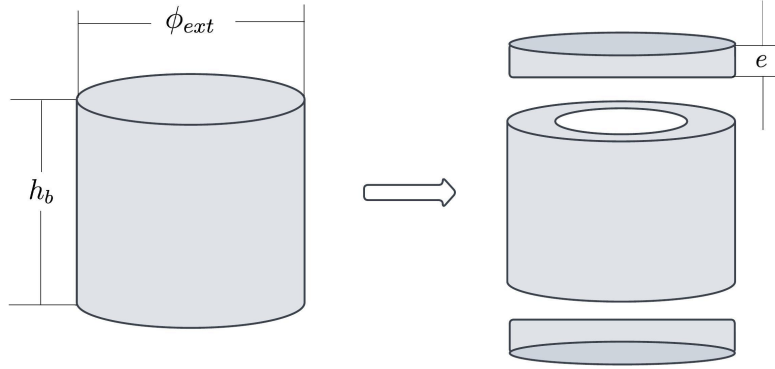


Figura 4.14: Partes del cilindro robusto (Elaboración Propia)

Tabla 4.8: Propiedades del Buque Cisterna

Parámetro	Valor	Unidad
Diámetro interno, ϕ_{int}	10,02	[m]
Diámetro externo, ϕ_{ext}	10	[m]
Altura, h_b	4	[m]
Densidad buque, ρ_b	7850	[kg/m3]
Masa total, m_b	35	[T]
Radio del círculo concéntrico, R_c	2,5	[m]
Coeficiente de arrastre del buque (océano), $C_{f,buque}$	1,3	[-]
Coeficiente de arrastre del buque (viento), $C_{w,buque}$	1,3	[-]

Las fuerzas que actúan en el buque cisterna son las siguientes:

- Peso propio
- Fuerza de empuje
- Fuerza de arrastre hidrodinámico
- Fuerza de arrastre causada por el viento

A continuación, se explicará cómo determinar cada una de estas fuerzas.

Peso Propio

Para poder calcular el peso del buque, es necesario conocer el volumen del cilindro, el cual se puede obtener como la suma de los volúmenes de cada componente:

$$V_t = V_{hueco} + 2 \cdot V_{tapa}$$

$$V_t = \frac{\pi}{4} \cdot h_b \cdot (\phi_{ext}^2 - \phi_{int}^2) + 2 \left(\frac{\pi}{4} \cdot e \cdot \phi_{ext}^2 \right)$$

Donde e corresponde al espesor de una tapa y, además, coincide con el espesor del cilindro hueco, el cual se puede calcular como:

$$e = \phi_{ext} - \phi_{int}$$

Por lo tanto, conociendo la densidad del buque y su volumen, es posible calcular el peso de este como:

$$F_{p,buque} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -V_t \cdot \rho_b \cdot g \end{bmatrix}^T \quad (4.46)$$

Y, ya que esta fuerza es aplicada en el centro de masa, el vector de fuerza generalizada queda expresado como

$$Q_{e,empuje} = \begin{bmatrix} Q_R^i \\ Q_\theta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{p,buque} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (4.47)$$

Fuerza de empuje

Al igual que con las boyas, el volumen hundido del buque cisterna varía a lo largo del tiempo, por lo tanto, antes de explicar cómo calcular dicho volumen, es importante destacar que se tomará como suposición que el buque no rota. En la Figura 4.15 se puede observar que al interior del buque se ubican los puntos a , b , c que se encuentran espaciados uniformemente alrededor de un círculo concéntrico de radio R_p y cada punto está vinculado a una coordenada en el sistema de referencia inercial. Las coordenadas X e Y de los puntos se obtiene como

$$a_x = N_{inf}^x - \frac{\sqrt{3}}{2}R_p, \quad a_y = N_{inf}^y - \frac{1}{2}R_p \quad (4.48)$$

$$b_x = N_{inf}^x + \frac{\sqrt{3}}{2}R_p, \quad b_y = N_{inf}^y - \frac{1}{2}R_p \quad (4.49)$$

$$c_x = N_{inf}^x, \quad c_y = N_{inf}^y + R_p \quad (4.50)$$

donde N_{inf} es la ubicación del nodo inferior del buque, cuyo valor se puede obtener conociendo el vector posición del centro de masa del buque CM_b y su matriz de rotación A_b , cuyo valor es simplemente una matriz identidad debido a la suposición mencionada anteriormente:

$$N_{inf} = CM_b + A_b \bar{u}_{inf}$$

$$\bar{u}_{inf} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{h_b}{2} \end{bmatrix}^T$$

Mientras que la coordenada en el eje Z de cada punto se obtiene con la elevación del oleaje de la ecuación (4.1) como

$$\eta^a = \eta^{\bar{x}} \cos(k^{\bar{x}} \cdot \bar{a}_x - \omega^{\bar{x}} t) \quad (4.51)$$

$$\eta^b = \eta^{\bar{x}} \cos(k^{\bar{x}} \cdot \bar{b}_x - \omega^{\bar{x}} t) \quad (4.52)$$

$$\eta^c = \eta^{\bar{x}} \cos(k^{\bar{x}} \cdot \bar{c}_x - \omega^{\bar{x}} t) \quad (4.53)$$

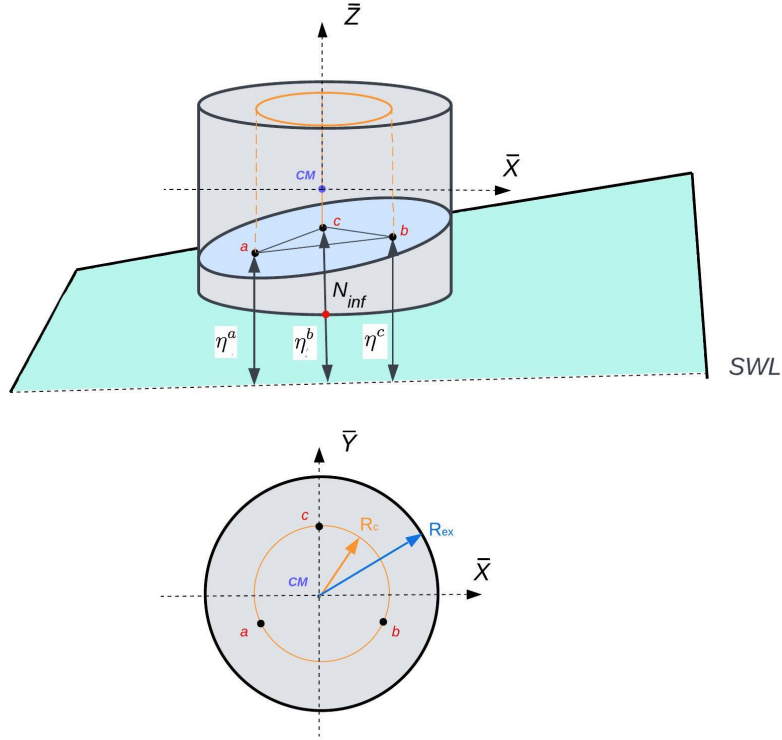


Figura 4.15: Modelo del Buque Cisterna (Elaboración Propia)

donde $\bar{a}_x$, $\bar{b}_x$ y $\bar{c}_x$ se obtienen utilizando la ecuación (4.2). De esta manera, conociendo la elevación del océano en 3 puntos distintos del buque, se procede a calcular una elevación promedio:

$$\eta_p = \frac{\eta^a + \eta^b + \eta^c}{3}$$

El motivo de esto es para suponer que cualquier parte del buque tiene la misma elevación y permite estimar de manera simplificada el volumen sumergido. En la Figura 4.16, se puede ver que todo el buque se encuentra a una misma elevación η_p y, por ende, la ecuación que permite calcular el volumen sumergido V_b es la siguiente:

$$V_b = \begin{cases} 0 & , si \quad \eta_p \leq N_{inf}^z \\ \frac{\pi}{4} \cdot \phi_{ext}^2 \cdot (\eta_p - N_{inf}^z) & , si \quad N_{inf}^z < \eta_p < N_{inf}^z + h_b \\ \frac{\pi}{4} \cdot \phi_{ext}^2 \cdot h_b & , si \quad \eta_p \geq N_{inf}^z + h_b \end{cases} \quad (4.54)$$

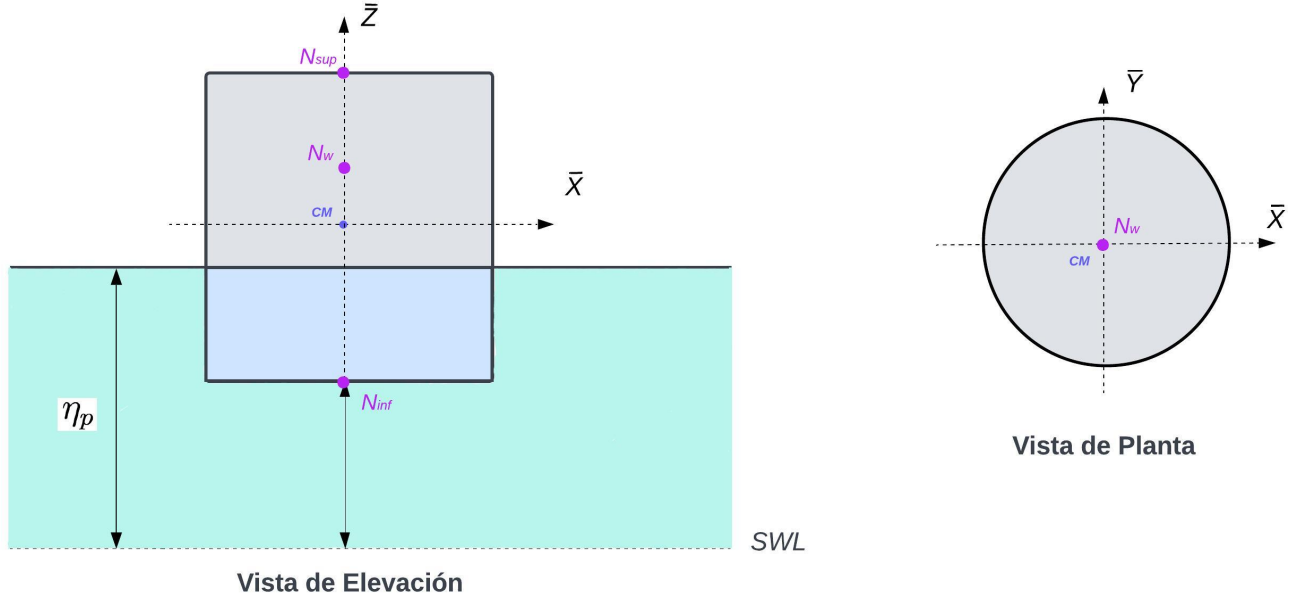


Figura 4.16: Volumen hundido del buque (Elaboración Propia)

Finalmente, la fuerza de empuje sobre el buque es:

$$F_{e,buque} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & V_b \cdot \rho_f \cdot g \end{bmatrix}^T \quad (4.55)$$

Como la fuerza será aplicada en el centro de masa del buque, el vector de fuerza generalizada queda como

$$Q_{e,empuje} = \begin{bmatrix} Q_R^i \\ Q_\theta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{e,buque} \\ \vec{0} \end{bmatrix} \quad (4.56)$$

Fuerza de arrastre hidrodinámico

Dado que la parte inferior del buque cisterna se encuentra en contacto todo el tiempo con el océano, la fuerza de arrastre hidrodinámica será calculada y aplicada en el nodo N_{inf} usando la velocidad relativa entre el fluido y el buque. Para esto, es necesario conocer la posición del centro de masa del buque, su orientación y su velocidad, lo cual permite determinar la velocidad del nodo N_{inf} de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} \dot{\mathbf{N}}_{inf} &= C\dot{\mathbf{M}}_b + A_b(\bar{\omega}_b \times \bar{u}_{inf}) \\ \bar{u}_{inf} &= \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-h_b}{2} \end{bmatrix}^T \end{aligned}$$

donde $\dot{C}\dot{M}_b$ corresponde al vector velocidad del centro de masa del buque, $\bar{\omega}_b$ es el vector velocidad angular vista desde el sistema de referencia local del buque y $\bar{u}_{inf}$ es el vector de posición local del nodo N_{inf} . Luego, es necesario calcular la velocidad relativa entre el fluido y el buque:

$$V_{f/b} = V_f - \dot{N}_{inf} \quad (4.57)$$

Otro valor que es requerido es el área de la sección sumergida del buque, cuyo valor viene dado por la siguiente ecuación:

$$A_{s,b} = \begin{cases} 0 & , si \quad \eta_p \leq N_{inf}^z \\ \phi_{ext} \cdot (\eta_p - N_{inf}^z) & , si \quad N_{inf}^z < \eta_p < N_{inf}^z + h_b \\ \phi_{ext} \cdot h_b & , si \quad \eta_p \geq N_{inf}^z + h_b \end{cases} \quad (4.58)$$

Finalmente, conociendo estos términos, se puede calcular el vector fuerza de arrastre hidrodinámico como

$$F_{d,buque} = \frac{1}{2} C_{f,buque} \cdot \rho_f \cdot A_{s,b} \cdot |V_{f/b}| \cdot V_{f/b} \quad (4.59)$$

donde la multiplicación entre los vectores $|V_{f/b}|$ y $V_{f/b}$ es realizada componente a componente. Dado que el arrastre hidrodinámico es aplicado en la parte inferior del buque, el vector de fuerza generalizada es

$$Q_{e,arrastre} = \begin{bmatrix} Q_R^i \\ Q_\theta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{d,buque} \\ \bar{G}_{buque}^T \cdot \bar{M}_a \end{bmatrix} \quad (4.60)$$

Donde

$$\begin{aligned} \bar{M}_a &= A_b^T \cdot M_a \\ M_a &= u_{inf} \times F_{d,buque} \\ u_{inf} &= A_b \cdot \bar{u}_{inf} \end{aligned}$$

Fuerza de arrastre causada por el viento

Una fuerza importante que soporta el buque cisterna corresponde a la ocasionada por el viento, la cual será calculada en el nodo N_w , representado en la Figura 4.16, donde dicho nodo se encuentra ubicado en la mitad del eje Z de la sección no hundida del buque. Para esto, es necesario conocer previamente el nodo de la parte superior del buque:

$$N_{sup} = CM_b + A_b \bar{u}_{sup}$$

$$\bar{u}_{sup} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{h_b}{2} \end{bmatrix}^T$$

Luego, el vector posición $\bar{u}_{w,N_{sup}}$ del nodo N_w visto desde el nodo N_{sup} se puede calcular como:

$$\bar{u}_{w,N_{sup}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \frac{-(N_{sup}^z - \eta_p)}{2} \end{bmatrix}^T$$

Ya que el nodo N_w se puede expresar tanto desde el nodo N_{sup} como desde el centro de masa CM_b y considerando que la matriz de rotación es una matriz identidad, se puede despejar el vector de posición u_w del nodo N_w visto desde el centro de masa del buque como:

$$N_{sup} + A_b u_{w,N_{sup}} = CM_b + A_b u_w$$

$$u_w = N_{sup} + u_{w,N_{sup}} - CM_b$$

Posterior a esto, la velocidad del viento V_{wg} se puede obtener con la ecuación (4.10), mientras que la velocidad en el nodo se puede calcular como:

$$\dot{N}_w = \dot{CM}_b + A_b(\bar{\omega}_b \times \bar{u}_w) \quad (4.61)$$

Conociendo estos valores, se procede a calcular la velocidad relativa entre el viento y el nodo:

$$V_{tw/b} = V_{wg} - \dot{N}_w \quad (4.62)$$

El área de la sección transversal de la parte no sumergida viene dada por la siguiente ecuación:

$$A_{w,b} = \phi_{ext} \cdot h_b - A_{s,b} \quad (4.63)$$

Finalmente, se puede calcular el vector fuerza de arrastre ocasionada por el viento como

$$F_{w,buque} = \frac{1}{2} C_{w,buque} \cdot \rho_w \cdot A_{w,b} \cdot |V_{tw/b}| \cdot V_{tw/b} \quad (4.64)$$

donde la multiplicación entre los vectores $|V_{tw/b}|$ y $V_{tw/b}$ es realizada componente a componente. Ya que la fuerza no se aplica en el centro de masa del buque, el vector de fuerza generalizada se puede escribir como

$$Q_{e,viento} = \begin{bmatrix} Q_R^i \\ Q_\theta^i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} F_{w,buque} \\ \bar{G}^T \cdot \bar{M}_a \end{bmatrix} \quad (4.65)$$

Donde

$$\begin{aligned} \bar{M}_a &= A_b^T \cdot M_a \\ M_a &= u_w \times F_{w,buque} \\ u_w &= A_b \cdot \bar{u}_w \end{aligned}$$

Restricciones para el buque

El buque cisterna debe moverse en conjunto con los cables de amarre del buque, sin embargo, esta restricción ya fue considerada en el ítem de **Cables de amarre**. Finalmente, la 2° restricción que debe cumplir es la siguiente:

- (a) **Restricción de Parámetros de Euler:** Debido a que la orientación del buque es reflejada con los Parámetros de Euler, debe cumplir con la restricción de la ecuación (3.8).

4.2 Código Elaborado

Se elaboró un código en MATLAB para poder realizar la dinámica del terminal multiboyas en conjunto con el buque cisterna bajo los efectos externos, lo cual permite obtener las posiciones de los centros de masa de cada cuerpo y también su orientación, esto aporta información relevante para saber qué tanto se desplaza el buque y cuánto puede girar en torno a su punto de equilibrio. Por otro lado, es posible obtener todas las fuerzas que actúan a lo largo del tiempo, ya sean las fuerzas internas en los cables de amarre o de anclaje, cómo también las fuerzas de restricción impuestas en cada nodo de amarre, no obstante, el principal foco recae en los nodos de anclaje al lecho marino, en las conexiones inferiores y superiores de las boyas, y por último, en los puntos de conexión de las amarras al buque cisterna. En el diagrama de flujo presentado en la Figura 4.17 es posible ver a grandes rasgos la secuencia del código y, a continuación, se explicará paso a paso las etapas principales del programa complementando con imágenes de algunas partes del código.

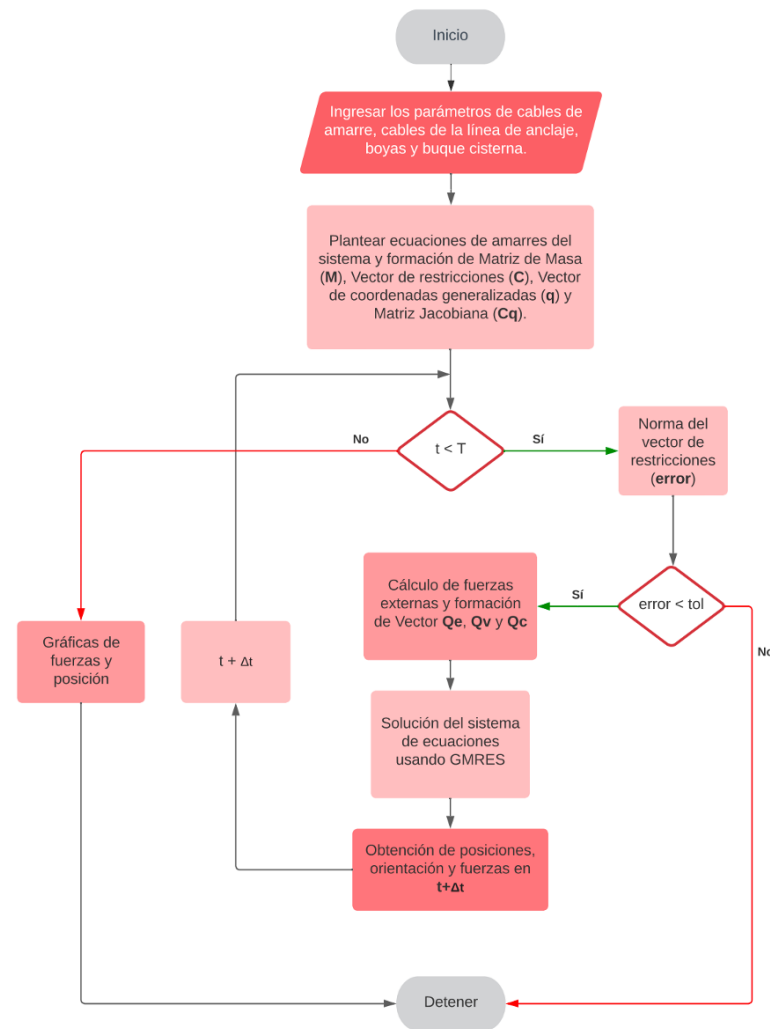


Figura 4.17: Diagrama de flujo del código elaborado (Elaboración Propia)

Para iniciar, el usuario debe ingresar cuatro planillas en formato Excel que contienen información fundamental de los cables de anclaje, cables de amarre, las boyas y el buque cisterna. En la Tabla 4.9 se puede ver un ejemplo de los parámetros solicitados para las líneas de anclaje, mientras que en la Tabla 4.10 se puede ver los parámetros pedidos para realizar el modelo de una boya.

Tabla 4.9: Ejemplo de los datos a configurar para un cable de fondeo

Entrada	Valor	Unidad
<i>N° Cuerpos</i>	10	[-]
<i>Tiempo inicial</i>	0	[s]
<i>Tiempo final</i>	8	[s]
<i>Longitud del cable</i>	22	[m]
<i>Nodo inicial X</i>	25,51	[m]
<i>Nodo inicial Y</i>	6,062	[m]
<i>Nodo inicial Z</i>	-20	[m]
<i>Nodo final X</i>	22,01	[m]
<i>Nodo final Y</i>	0	[m]
<i>Nodo final Z</i>	0,5	[m]
<i>Densidad lineal</i>	3,680	[kg/m]
<i>Diámetro del cable</i>	0,03	[m]

Tabla 4.10: Ejemplo de los datos a configurar para una boya

Entrada	Valor	Unidades
<i>Tiempo inicial</i>	0	[s]
<i>Tiempo final</i>	8	[s]
<i>Diámetro</i>	10	[m]
<i>CM en X</i>	0	[m]
<i>CM en Y</i>	0	[m]
<i>CM en Z</i>	3,5	[m]
<i>Ángulo Theta inicial (X)</i>	0	[°]
<i>Ángulo Phi inicial (Z)</i>	90	[°]
<i>Densidad boya</i>	119,4	[kg/m3]

Luego de tener el modelo para cada componente, es decir, tener la configuración inicial de la posición, orientación y restricciones internas de cada cuerpo del sistema, se deben escribir las ecuaciones de restricción de los puntos de anclaje y amarre, como se puede observar en la Figura 4.18.

```

%% AMARRES DEL SISTEMA

% ----- Amarres entre lineas de anclaje y boyas ----- %

% Es 1 amarre por cada cable, ya que son sus uniones con las boyas.

% SISTEMA 1
amarre_1 = R_cableRigid1(:, :, end) + A_cableRigid1(:, :, end) * u_cableRigid1...
    - R_boya1 + A_boya1 * u_boya1;

amarre_2 = R_cableRigid2(:, :, end) + A_cableRigid2(:, :, end) * u_cableRigid2...
    - R_boya1 + A_boya1 * u_boya1;

amarre_3 = R_cableRigid3(:, :, end) + A_cableRigid3(:, :, end) * u_cableRigid3...
    - R_boya1 + A_boya1 * u_boya1;

% SISTEMA 2
amarre_4 = R_cableRigid4(:, :, end) + A_cableRigid4(:, :, end) * u_cableRigid4...
    - R_boya2 + A_boya2 * u_boya2;

amarre_5 = R_cableRigid5(:, :, end) + A_cableRigid5(:, :, end) * u_cableRigid5...
    - R_boya2 + A_boya2 * u_boya2;

amarre_6 = R_cableRigid6(:, :, end) + A_cableRigid6(:, :, end) * u_cableRigid6...
    - R_boya2 + A_boya2 * u_boya2;

% ----- Amarres entre amarras flexibles y buque ----- %

% Posiciones de nudos en la parte superior del buque, visto desde sist local ***

u_buque1 = [-diam_ex_buque/2, 0, altura_buque/2]';
u_buque2 = [diam_ex_buque/2, 0, altura_buque/2]';

% Flexible 1
nudo_1 = R_cableFlex1(:, :, 1) - A_cableFlex1(:, :, 1) * u_cableFlex1...
    - (R_boya1 + A_boya1 * u_boya1);

nudo_2 = R_cableFlex1(:, :, end) + A_cableFlex1(:, :, end) * u_cableFlex1...
    - (R_buque + A_buque * u_buque1);

% Flexible 2
nudo_3 = R_cableFlex2(:, :, 1) - A_cableFlex2(:, :, 1) * u_cableFlex2...
    - (R_boya2 + A_boya2 * u_boya2);

nudo_4 = R_cableFlex2(:, :, end) + A_cableFlex2(:, :, end) * u_cableFlex2...
    - (R_buque + A_buque * u_buque2);

```

Figura 4.18: Ejemplo de formulación de ecuaciones de restricción en el código (Elaboración Propia)

Después de tener planteadas las restricciones, se deben unificar las ecuaciones de restricción de cada cable, boya y buque en el vector de restricciones $\mathbf{C}$, como también se unifican sus matrices de masa $\mathbf{M}^i$ y sus vectores de coordenadas generalizadas $\mathbf{q}^i$ tal como se puede observar en la Figura 4.19, para finalmente poder calcular la matriz Jacobiana $\mathbf{C}_q$ del sistema.

```

%% UNIFICACION DE VARIABLES

% Agrupar vectores C por tipo
C_rigidos = [C_cableRigid1' C_cableRigid2' C_cableRigid3' C_cableRigid4' C_cableRigid5' C_cableRigid6'];
C_flexibles = [C_cableFlex1' C_cableFlex2'];
C_boyas = [C_boya1' C_boya2'];
C_amarres = [amarre_1' amarre_2' amarre_3' amarre_4' amarre_5' amarre_6'];
C_nudos = [nudo_1' nudo_2' nudo_3' nudo_4'];

% Vector C
C = [C_rigidos' C_flexibles' C_boyas' C_buque' C_amarres' C_nudos]';

% Cantidad de restricciones para cables y boyas
if (number_CR > 0)
    nc_cableRigid = size(C_cableRigid1,1);
end

if (number_CF > 0)
    nc_cableFlex = size(C_cableFlex1,1);
end

if (number_B > 0)
    nc_boya = size(C_boya1,1);
end

if (number_buque > 0)
    nc_buque = size(C_buque,1);
end

% Agrupar vectores 'q' por tipo
q_rigidos = [q_cableRigid1' q_cableRigid2' q_cableRigid3' q_cableRigid4' q_cableRigid5' q_cableRigid6'];
q_flexibles = [q_cableFlex1' q_cableFlex2'];
q_boyas = [q_boya1' q_boya2'];

% Vector q
q = [q_rigidos' q_flexibles' q_boyas' q_buque]';

% Adicional para agregar syms de velocidad flexibles
q_SoloFlexs = [t q_cableFlex1' var_dq_flex1' q_cableFlex2' var_dq_flex2]';

% Matriz JACOBIANA
Cq = jacobian(C,q);

```

Figura 4.19: Ejemplo de unificación de variables en el código (Elaboración Propia)

Posterior a esto, un punto importante es el paso de tiempo que se usará en el proceso de integración numérico, dado que, como se está trabajando con un esquema de integración numérico explícito, una cualidad de estos es que son métodos condicionalmente estables, es decir, que existe un paso de tiempo crítico por encima del cual el esquema es inestable y conlleva a una solución incorrecta. Para determinar el paso de tiempo mínimo requerido, hay que determinar el paso de tiempo crítico, ahora bien, cada componente del terminal multiboyas tiene un paso de tiempo crítico distinto que depende de diferentes variables, es por esto que hay que calcular el de cada uno y quedarse con el menor de estos pasos de tiempo. En particular para este trabajo, el componente que requiere un paso de tiempo más pequeño le compete a los cables de amarre y se estimó utilizando la Condición de Courant-Friedrichs-Levy dada por la siguiente expresión ([Ansys, 2020](#))

$$\Delta t_{critic} \leq f \cdot \frac{L}{c}$$

Donde Δt_{critic} es el paso de tiempo crítico, f corresponde a un factor de seguridad que toma un

valor usualmente menor o igual a 1, L es la longitud característica, en este caso, la longitud de un eslabón de un cable de amarre y c es la velocidad del sonido en el material, cuyo valor se calcula de la siguiente manera:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho}}$$

Donde E corresponde al Módulo de Young del material y ρ es su densidad. La cantidad de veces que se realizarán los cálculos va a depender del intervalo de tiempo de estudio. De manera repetitiva, antes de iniciar los cálculos que corresponden, se debe estimar un error relacionado con las ecuaciones de restricción impuestas en el sistema, ya que, recordando la ecuación (3.12), el vector de restricciones debe ser igual a cero. Se determina el error, por lo tanto, calculando la norma del vector de restricciones $\mathbf{C}$ cuyo valor debe ser inferior a una tolerancia ingresada por el usuario (un número cercano a cero).

```
% ----- VERIFICACION DE ESTABILIDAD ----- %
value_C(:,i) = double(subs(C,q,value_q)); % aqui se ve que se cumplan las restricciones
errores_C(1,i) = norm(value_C(:,i));

if errores_C(1,i)>10^(-4)
    error('Solución no estable, se detendrá el programa.')
end

if i==length(T)
    disp('SE HA FINALIZADO EL CÁLCULO.')
    break
end
```

Figura 4.20: Verificación de vector de restricciones $\mathbf{C}$ (Elaboración Propia)

Cuando se cumple esta condición, se procede a calcular las fuerzas inerciales Q_v^i de cada cuerpo utilizando la ecuación (3.26) para luego agruparlas en el vector de velocidad cuadrática $\mathbf{Q}_v$ del sistema, además de calcular las fuerzas externas Q_e^i que actúan en cada cuerpo vistas en la sección 4.1, las cuales varían en el tiempo como, por ejemplo, las fuerzas hidrodinámicas, y se obtiene el vector de fuerzas generalizadas $\mathbf{Q}_e$ del sistema; por último, empleando la ecuación (3.32) sobre el vector de restricciones del sistema $\mathbf{C}$, se calcula el vector $\mathbf{Q}_c$.

Teniendo todas las componentes para formar el sistema matricial de la ecuación (3.35), se utiliza la función GMRES incorporada en MATLAB que permite resolver el sistema de ecuaciones utilizando dicho método iterativo. En la Figura 4.21 se puede observar que se realizan dos desgloses de la solución obtenida, esto se debe a que GMRES entrega como solución un vector que contiene las velocidades $v^{t+\Delta t}$ de cada coordenada generalizada de cada cuerpo en el siguiente instante y el vector $\mu^{t+\Delta t}$, del cual se puede obtener las fuerzas resultantes asociadas a cada ecuación de restricción (puntos de amarres, anclajes, entre otros) utilizando la ecuación (3.37).

```

% ::: DESGLOSE DE VELOCIDADES :::

% Una columna representa 1 cable, asi que tener ojo en la seccion "Orden de Velocidades".

% CABLES RIGIDOS
solucion_dq_cables_rigidos = solucion_dq(1:number_CR);
solucion_dq_cables_rigidos = reshape(solucion_dq_cables_rigidos,number_CR/n_CR,[]);

% CABLES FLEXIBLES
solucion_dq_cables_flexibles = solucion_dq(number_CR+1:number_CR+number_CF);
solucion_dq_cables_flexibles = reshape(solucion_dq_cables_flexibles,number_CF/n_CF,[]);

% BOYAS
solucion_dq_boyas = solucion_dq(number_CR+number_CF+1:number_CR+number_CF+number_B);
solucion_dq_boyas = reshape(solucion_dq_boyas,number_B/n_B,[]);

% BUQUE
solucion_dq_buque = solucion_dq(number_CR+number_CF+number_B+1:number_CR+number_CF+number_B+number_buque);

% ::: ORDEN DE VELOCIDADES :::

% CABLES RIGIDOS
solucion_dq_cableRigid1 = reshape(solucion_dq_cables_rigidos(:,1),7,[]); % se ordenan en vectores 7x1 para cada cuerpo
solucion_dq_cableRigid2 = reshape(solucion_dq_cables_rigidos(:,2),7,[]);
solucion_dq_cableRigid3 = reshape(solucion_dq_cables_rigidos(:,3),7,[]);

solucion_dq_cableRigid4 = reshape(solucion_dq_cables_rigidos(:,4),7,[]);
solucion_dq_cableRigid5 = reshape(solucion_dq_cables_rigidos(:,5),7,[]);
solucion_dq_cableRigid6 = reshape(solucion_dq_cables_rigidos(:,6),7,[]);

% CABLES FLEXIBLES
solucion_dq_cableFlex1 = reshape(solucion_dq_cables_flexibles(:,1),7,[]);
solucion_dq_cableFlex2 = reshape(solucion_dq_cables_flexibles(:,2),7,[]);

% BOYAS
solucion_dq_boya1 = reshape(solucion_dq_boyas(:,1),7,[]);
solucion_dq_boya2 = reshape(solucion_dq_boyas(:,2),7,[]);

% ----- RESULTADO LAMBDA ----- %

solucion_miu = solucion(size(q,1)+1:size(solucion,1)); % solucion miu, NO TOCAR
lambdas(:,i+1) = solucion_miu/h; % fuerzas - momentos obtenidas

```

Figura 4.21: Ejemplo de orden del vector solución obtenido por GMRES (Elaboración Propia)

Por esta razón, se realiza un desglose de las velocidades obtenidas y las fuerzas resultantes y son ordenadas para cada cuerpo respectivo, para luego poder actualizar las posiciones en el siguiente instante utilizando la ecuación (3.36) como se puede ver en la Figura 4.22 en la sección del código “Actualización de Valores”.

```

% ----- ACTUALIZACION DE VALORES ----- %

% CABLES RIGIDOS
[CM_cableRigid1, DIREC_PE_cableRigid1, dq_cableRigid1] = ordenVeloCables(i,h,dq_cableRigid1,solucion_dq_cableRigid1,CM_cableRigid1,DIREC_PE_cableRigid1);
[CM_cableRigid2, DIREC_PE_cableRigid2, dq_cableRigid2] = ordenVeloCables(i,h,dq_cableRigid2,solucion_dq_cableRigid2,CM_cableRigid2,DIREC_PE_cableRigid2);
[CM_cableRigid3, DIREC_PE_cableRigid3, dq_cableRigid3] = ordenVeloCables(i,h,dq_cableRigid3,solucion_dq_cableRigid3,CM_cableRigid3,DIREC_PE_cableRigid3);

[CM_cableRigid4, DIREC_PE_cableRigid4, dq_cableRigid4] = ordenVeloCables(i,h,dq_cableRigid4,solucion_dq_cableRigid4,CM_cableRigid4,DIREC_PE_cableRigid4);
[CM_cableRigid5, DIREC_PE_cableRigid5, dq_cableRigid5] = ordenVeloCables(i,h,dq_cableRigid5,solucion_dq_cableRigid5,CM_cableRigid5,DIREC_PE_cableRigid5);
[CM_cableRigid6, DIREC_PE_cableRigid6, dq_cableRigid6] = ordenVeloCables(i,h,dq_cableRigid6,solucion_dq_cableRigid6,CM_cableRigid6,DIREC_PE_cableRigid6);

% CABLES FLEXIBLES
[CM_cableFlex1, DIREC_PE_cableFlex1, dq_cableFlex1] = ordenVeloCables(i,h,dq_cableFlex1,solucion_dq_cableFlex1,CM_cableFlex1,DIREC_PE_cableFlex1);
[CM_cableFlex2, DIREC_PE_cableFlex2, dq_cableFlex2] = ordenVeloCables(i,h,dq_cableFlex2,solucion_dq_cableFlex2,CM_cableFlex2,DIREC_PE_cableFlex2);

% BOYAS
[CM_boya1, DIREC_PE_boya1, dq_boya1] = ordenVeloBoya(i,h,dq_boya1,solucion_dq_boya1,CM_boya1,DIREC_PE_boya1);
[CM_boya2, DIREC_PE_boya2, dq_boya2] = ordenVeloBoya(i,h,dq_boya2,solucion_dq_boya2,CM_boya2,DIREC_PE_boya2);

% BUQUE
[CM_buque, DIREC_PE_buque, dq_buque] = ordenVeloBuque(i,h,dq_buque,solucion_dq_buque,CM_buque,DIREC_PE_buque);

```

Figura 4.22: Cálculo de las Coordenadas Generalizadas para el siguiente instante (Elaboración Propia)

Finalmente, se procede a realizar todos los pasos mencionados una vez más, pero para el siguiente instante hasta completar el periodo de tiempo que se quiere estudiar. De manera coherente, el tiempo de ejecución del código va a depender del paso de tiempo utilizado y el intervalo de tiempo, dado que a menor paso de tiempo, más veces se tendrá que repetir el ciclo anterior y tardará más en terminar la ejecución del programa, así como también mientras mayor sea el intervalo de tiempo de estudio, mayor tiempo tardará la ejecución. Adicionalmente, cuando ya se obtienen todos los valores para cada instante de tiempo, estos son graficados para visualizar de mejor manera y ver el comportamiento ya sea de las fuerzas o posiciones a lo largo del tiempo para cada cuerpo.

4.3 Layout del Terminal Multiboyas

El terminal multiboyas propuesto para este trabajo consta de los siguientes elementos:

- a) 1 Buque, representado de color gris. Identificación: Bq
- b) 2 Boyas, representadas de color rojo. Identificación: B1, B2
- c) 6 Cables de anclaje, representados de color negro. Identificación: R1, R2, R3, R4, R5, R6
- d) 2 Cables de Amarre, representados de color ámbar. Identificación: A1, A2

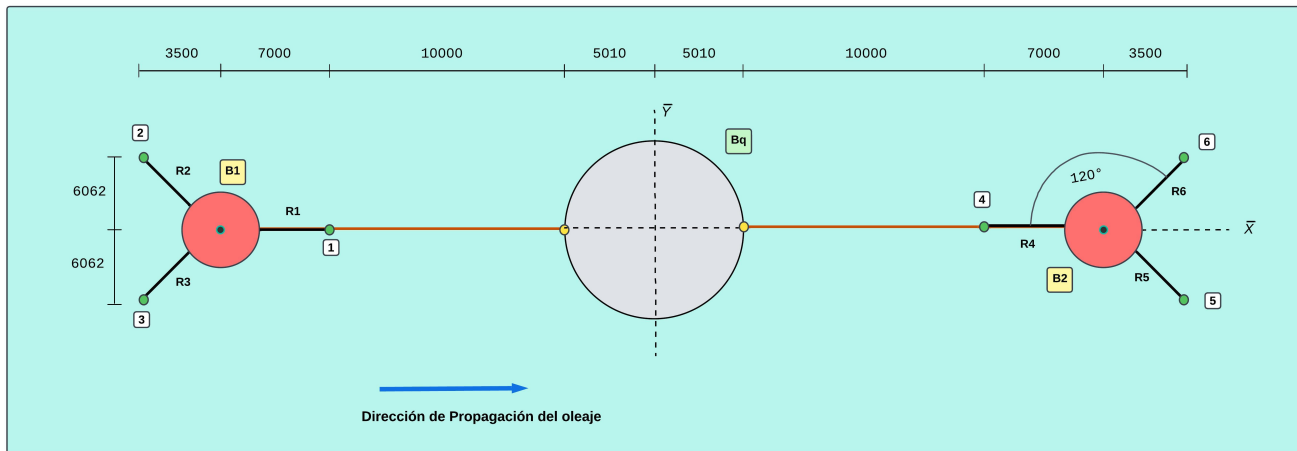


Figura 4.23: Vista de planta del Terminal multiboyas. Cotas en milímetros (Elaboración Propia)

Como se puede observar en la Figura 4.23, se ubicó el terminal paralelo a la dirección de oleaje como es recomendado por [Ministerio de Obras Públicas](#). El origen del sistema de referencia coincide con la posición inicial del centro de masa del buque, el cual se encuentra amarrado en sus extremos superiores tal como se presenta en la Figura 4.24; por otra parte, las boyas de estabilización tendrán 3 cables de anclaje cada una que son atados a su parte inferior y, en el fondo marino, son amarrados a una fundación de hormigón; estos cables se encuentran distribuidos a $120 [^\circ]$ alrededor de cada boya. Los nodos de conexión de todo el sistema han sido enumerados del 1 hasta el 12.

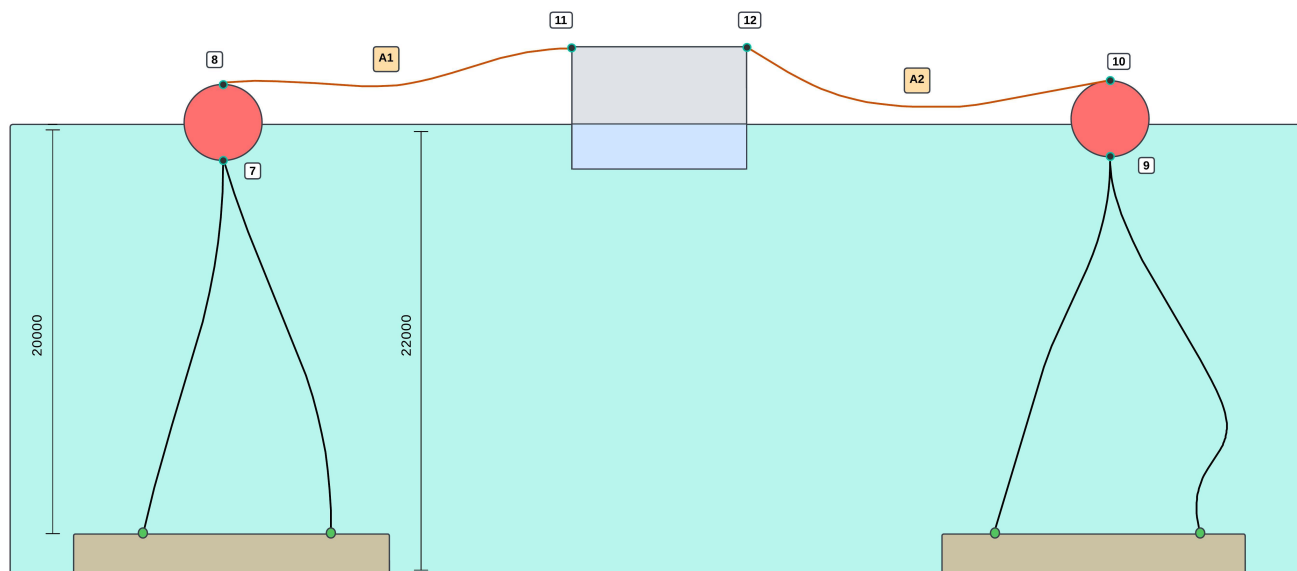


Figura 4.24: Vista de elevación del Terminal multiboyas. Cotas en milímetros (Elaboración Propia)

Capítulo 5

Simulaciones y resultados

5.1 Casos de estudio

Para poder analizar la efectividad de estabilidad del terminal sobre el buque, se analizarán dos casos: uno donde el buque se encuentre solamente estabilizado usando un ancla, y otro caso donde estará atado al terminal multiboyas. Además, se analizarán los efectos que tiene la altura de oleaje H y la velocidad del viento $V_{tw}(10)$ para diferentes valores, como fue presentado en el capítulo anterior. Dicho esto y considerando que se analizarán dos escenarios de oleaje y tres escenarios de viento distintos, se requiere llevar a cabo un total de 6 simulaciones, detalladas en la Tabla 5.1; no obstante, es pertinente señalar que estas 6 simulaciones serán exclusivamente aplicadas al caso del terminal multiboyas. En el escenario donde se utilizará únicamente un ancla, se examinará el caso más crítico, es decir, las condiciones de la simulación 6, con el propósito de realizar una comparación en la estabilidad del sistema. Para conocer cuáles fueron las posiciones y orientaciones iniciales de los cuerpos flotantes, en el Anexo A del documento está la información detallada.

Tabla 5.1: Parámetros a utilizar en cada simulación

Simulación	Altura de oleaje [m]	Viento [km/h]	Dirección Viento [°]
1	2,5	12	30
2	4	12	30
3	2,5	28	195
4	4	28	195
5	2,5	70	0
6	4	70	0

Se abordarán 3 aristas principales:

- 1) *Resistencia en los cables de anclaje y amarre*: Teniendo en cuenta la carga mínima a la rotura de cada cable y calculando la magnitud de la fuerza máxima alcanzada en cada nodo del sistema, se calculará un Factor de Seguridad (F.S) en cada simulación para cada componente.
- 2) *Estabilidad de boyas y buque*: Cuando se habla acerca de Estabilidad, se hace referencia a evitar grandes cambios de orientación en un cuerpo, es por esto que se calculará los ángulos respecto al eje X (θ) y eje Z (ϕ) para mostrar cómo se ven afectados. En la Figura 5.1 se puede observar dichos ángulos.
- 3) *Desplazamiento de boyas y buque*: Se calculará el desplazamiento que sufren los cuerpos a lo largo del tiempo respecto a su posición inicial.

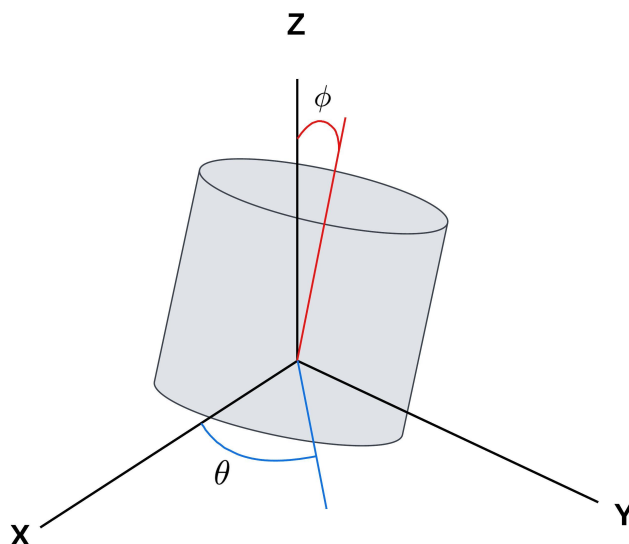


Figura 5.1: Ángulos de orientación (Elaboración Propia)

Las simulaciones se llevarán a cabo en un intervalo de 0 a 16 segundos, ya que la finalidad es capturar las fuerzas que afectan al sistema durante 2 periodos completos de oleaje, se asumirá que estas fuerzas son representativas, lo que implica que a lo largo del tiempo deberían exhibir un comportamiento cíclico y recurrente. También es importante tener presente que la Celeridad de Grupo del oleaje, es decir, la velocidad con la que se propaga el paquete de ondas, es de 9,48 [m/s] el cual se obtuvo utilizando la Tabla 3.7 para Aguas Intermedias; este valor es constante para todas las simulaciones, ya que no depende de la altura del oleaje. Otro parámetro relevante es el paso de tiempo, el cual tendrá un valor de $2 \cdot 10^{-4}$ [s]. Finalmente, tanto los cables de anclaje como los de amarre serán discretizados espacialmente en 10 partes cada uno.

5.2 Resultados

5.2.1 Buque sin boyas estabilizadoras

En la Figura 5.2 se presenta el comportamiento que tuvieron las fuerzas del nodo lecho marino y el nodo de amarre entre el ancla y el buque a lo largo del tiempo; en paralelo, también se muestran los valores de altura del oleaje y la velocidad del viento. Lo primero que uno se puede percatar es que se obtuvo un pico de fuerza de 2,54 [kN] aproximadamente, cuyo valor no se alcanzó necesariamente cuando el viento y el oleaje alcanzaron sus máximos valores. Con dicha fuerza máxima, el Factor de Seguridad del ancla resulta ser de 235 [-] y, por ende, implica que la cadena del ancla esta fuera de peligro. En la Figura 5.3 se quiso mostrar la posición que tiene el buque cisterna en 6 instantes diferentes partiendo inicialmente del reposo, donde la cadena del ancla es representada con un color anaranjado, mientras que el buque tiene un tono café claro, además, el océano es representado con una superficie curva que muestra la elevación de la superficie libre. Un dato que se puede desprender de la Figura 5.2 es que los 3 picos de fuerza que sobrepasan los 2 [kN] coinciden con los puntos máximos y mínimos de la elevación del oleaje; cuando el buque se encuentra llegando a un valle de la ola, hay que tener en cuenta que viene acelerando por el peso propio y el peso del ancla, entonces se detiene con cierta brusquedad y produce un aumento de la fuerza en su nodo de conexión entre los cuerpos, mientras que cuando se encuentra en una cresta, el buque logra tensar mucho más la cadena del ancla y es por esto que incrementa la fuerza que debe haber en el nodo de conexión para que ambos cuerpos permanezcan juntos. Por otro lado, hay un claro sesgo entre las fuerzas del nodo del lecho marino y el nodo de amarre, donde en este último las cargas son mucho mayores; la explicación es que la fuerza de arrastre hidrodinámica por parte del océano aumenta a medida que un cuerpo se encuentra más cerca de la superficie libre.

En la Figura 5.4 se presenta cómo varía la orientación del buque a lo largo del tiempo donde, analizando primeramente su rotación respecto al eje X, esta no varió de gran manera, es más, casi siempre estuvo cercano a valores de 0 [°]; esto tiene sentido físico porque el viento y el oleaje provienen de direcciones similares, es decir, a lo largo del eje X. Sin embargo, la orientación respecto a la vertical (eje Z) tuvo una mayor variación, ya que a partir de los 8 [s] comenzó a aumentar el ángulo de inclinación rápidamente alcanzando un valor cercano a los 12 [°] a los 16 [s] de simulación, además de que a simple vista parece no haber una tendencia a disminuir dicha inclinación. Como comentario adicional, en la Figura 5.3 no se ve reflejada la rotación del buque, pero se debe a que graficar la rotación del cuerpo no era tan sencillo en MATLAB.

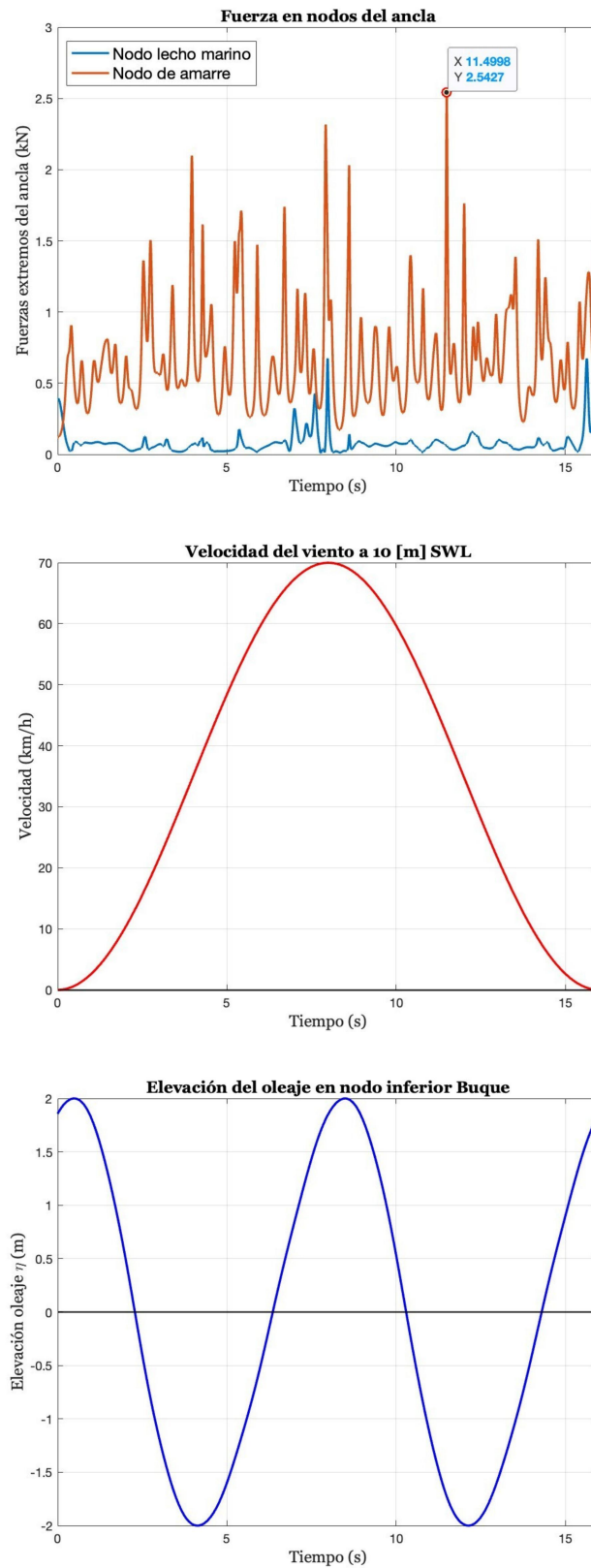


Figura 5.2: Influencia de las condiciones climáticas en las fuerzas resultantes (Elaboración Propia)

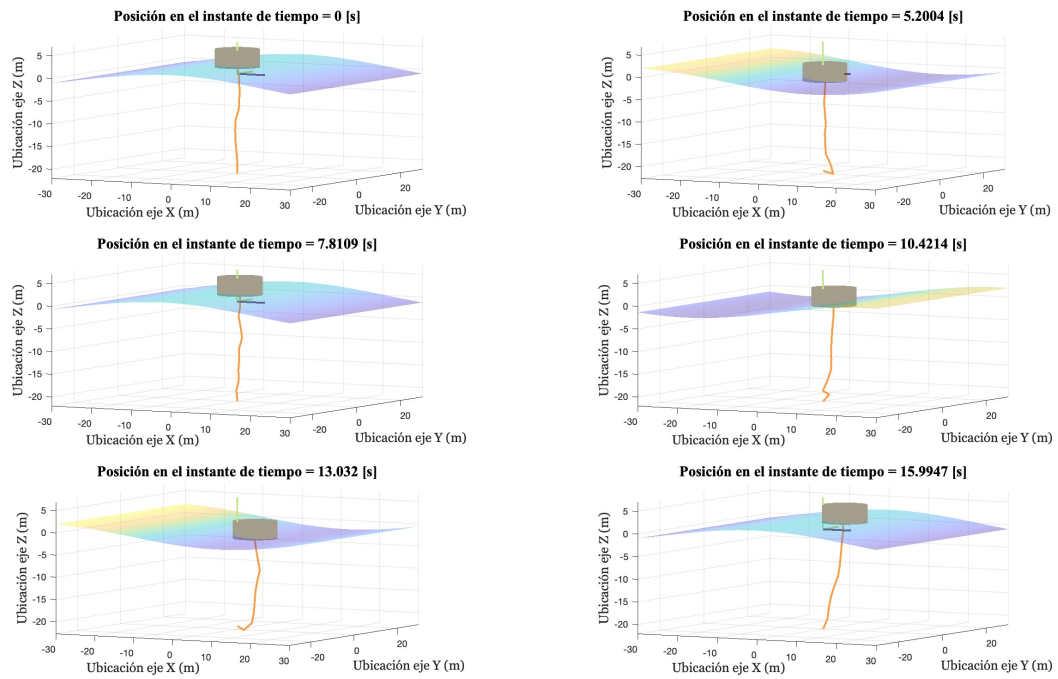


Figura 5.3: Posición en diferentes instantes de tiempo (Elaboración Propia)

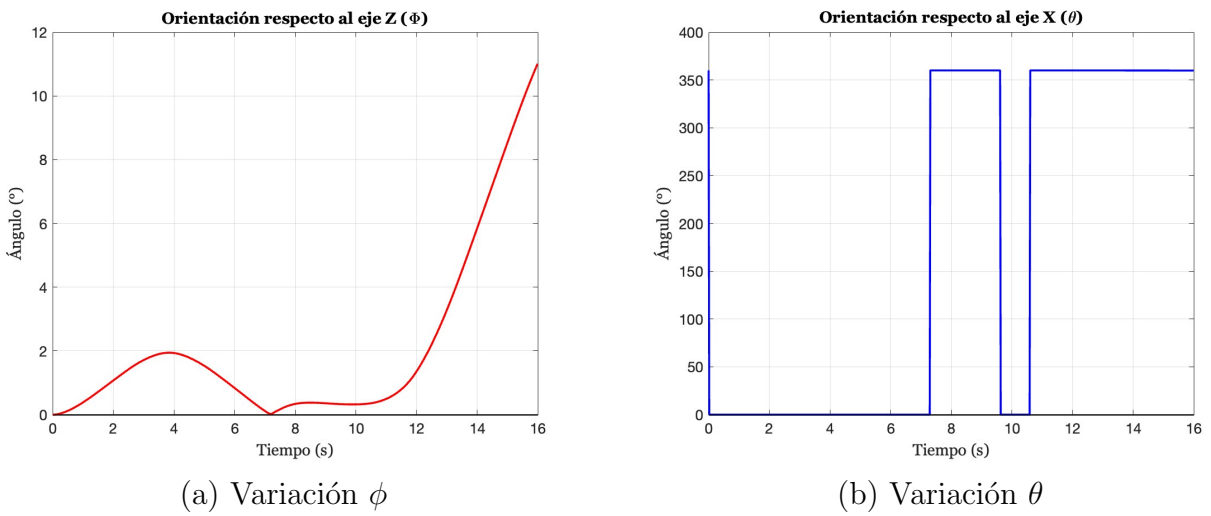
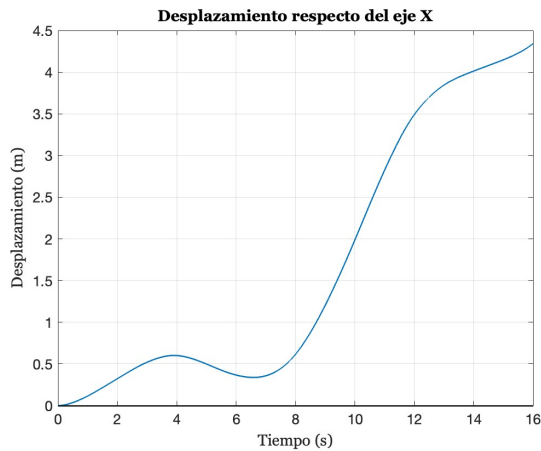
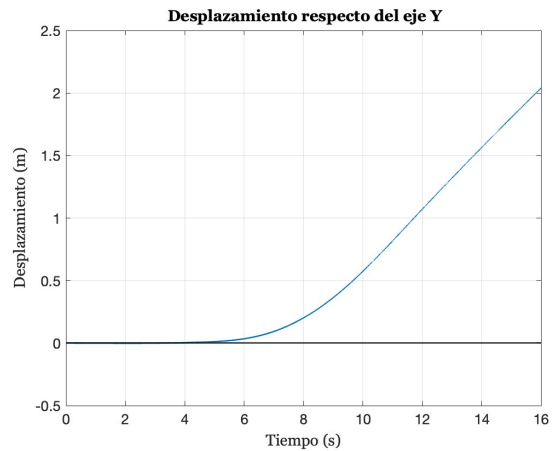


Figura 5.4: Rotación del buque a lo largo del tiempo (Elaboración propia)

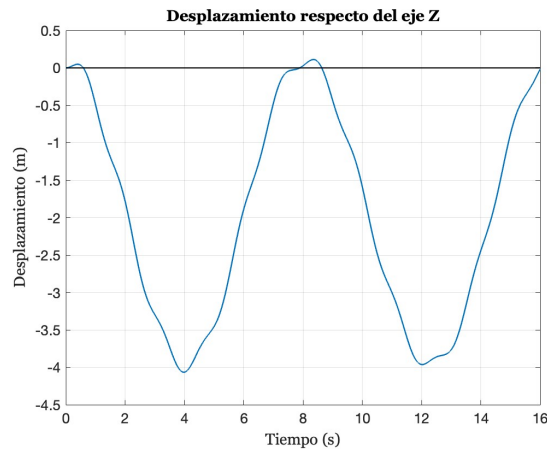
En la Figura 5.5 se presentan 3 gráficos sobre los desplazamientos que sufrió el buque respecto a su posición inicial. Con respecto al eje X, el buque se mantuvo con un desplazamiento cercano a los 0,5 [m] durante los primeros 6 [s], pero luego este empezó a moverse velozmente alcanzando un desplazamiento máximo de 4,5 [m] a los 16 [s]; comportamiento similar hubo respecto al eje Y, ya que también no presentaba grandes desplazamientos hasta que a partir de los 7 [s] empezó a moverse mayores distancias alcanzando un desplazamiento de 2 [m]. El motivo por el cual en ambos ejes comienza a aumentar el desplazamiento en el mismo instante es porque cercano a los 8 [s] se alcanza los valores máximos de altura del oleaje y velocidad del viento tal como se puede ver en la Figura 5.2, y esto provoca que las cargas aplicadas sean mayores y aumente la aceleración del cuerpo. Asimismo, el motivo por el cual el desplazamiento en el eje X es mayor respecto al eje Y, se debe a que gran parte de la fuerzas de oleaje y viento son aplicadas en esta dirección. Por último, el desplazamiento en el eje Z es oscilatorio, ya que está relacionado con el comportamiento ondulatorio del oleaje, alcanzando un peak de -4 [m].



(a) Desplazamiento X



(b) Desplazamiento Y



(c) Desplazamiento Z

Figura 5.5: Desplazamientos del buque a lo largo del tiempo (Elaboración propia)

5.2.2 Buque con boyas estabilizadoras

En relación a los resultados obtenidos de las seis simulaciones del terminal multiboyas, no todas lograron realizarse en su totalidad, es decir, no se pudo analizar el intervalo de 16 [s] completo como se tenía esperado, debido a que la norma del vector de restricciones superó la tolerancia en algún instante de tiempo, lo cual significa que alguna de las restricciones impuestas en el sistema ya no se estaba cumpliendo. Es por esto que se analizarán intervalos de tiempo donde el error aún es bajo (cumple con la tolerancia especificada). Dicho esto, la sección estará dividida en 2 partes:

- En la primera, para poder comparar los resultados entre simulaciones de manera igualitaria, se tomará como referencia el intervalo de tiempo de la simulación que haya fallado antes. Por ejemplo, supongamos que 5 de las 6 simulaciones alcanzaron un 90% de avance antes de fallar y 1 simulación alcanzó solo un 70% de avance. Ya que esta falló mucho antes que las demás simulaciones, se utilizará como referencia el intervalo de tiempo de esta última para los análisis.
- En la segunda parte, se presentarán los resultados obtenidos de la Simulación 6 con la intención de poder compararlos con el buque que se encontraba sin boyas estabilizadoras.

1° Análisis

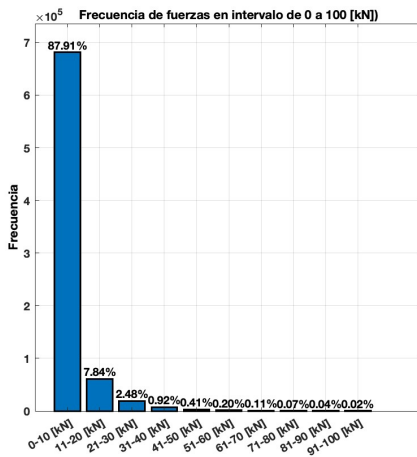
El intervalo de tiempo que se analizará para las 6 simulaciones es de 0 a 10 [s] y, dicho sea de paso, los resultados obtenidos en las simulaciones se encuentran en la sección de Anexos, donde es posible ver con mayor detalle las gráficas de cada simulación; como último comentario, es fundamental resaltar que con el fin de comparar los resultados de manera efectiva, se clasificaron las simulaciones en los siguientes grupos: 1-2, 3-4 y 5-6. Este enfoque se justifica porque en cada uno de estos pares de simulaciones se comparte las mismas direcciones de propagación del oleaje y viento, diferenciándose únicamente en la altura del oleaje como se mostró en la Tabla 5.1, así se asegura una comparación adecuada y precisa. Como primer dato, en la Tabla 5.2 se puede ver los Factores de Seguridad más críticos obtenidos en cada simulación.

Tabla 5.2: Factores de Seguridad más bajos obtenidos

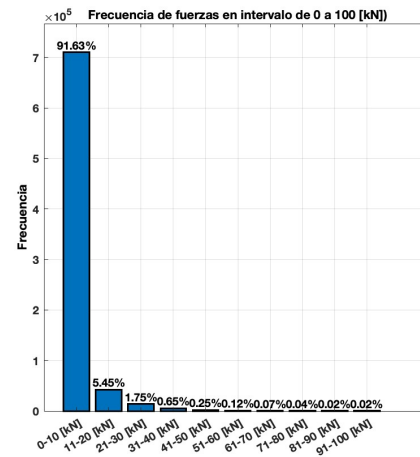
Simulación	Factor de Seguridad Crítico [-]	Componente
1	0,58	R6
2	1,89	R5
3	1,92	R6
4	1,57	R4
5	1,87	A2
6	1,57	R4

En general, los Factores de Seguridad resultantes oscilan en valores cercanos, a excepción de la Simulación 1, donde se obtuvo el F.S. más crítico de todos en el cable de anclaje R6. A primera vista parece extraño, ya que para este caso la altura de oleaje de 2,5 [m] y la velocidad del viento de 12 [km/h] no son las peores condiciones que pueden suceder en la bahía, sin embargo, esto sucede porque en el instante donde ocurre la fuerza máxima coincide con los mayores desplazamientos de los cuerpos flotantes, principalmente de la boya B2, y hay que recordar que el cable R6 es uno de los cables de anclaje que sostiene a esta, lo cual produjo un pico de tensión; no obstante, esto fue un caso puntual, ya que globalmente las fuerzas para este caso tuvieron valores relativamente parejos que no superaban los 200 [kN]. Otro dato que se puede desprender de la tabla, es que todas las componentes que tuvieron los F.S. más bajos del terminal multiboyas son los cables que pertenecen a la boya B2, sobretodo los cables de anclaje; el motivo por el cual este tipo de cable es quien se encuentra soportando más fuerzas elevadas es porque no poseen la misma elasticidad que los cables de amarre.

Por otro lado, se quiso observar cuál era la distribución que tenían las fuerzas, dando como resultado que el 99,95% de las cargas aplicadas en los puntos de conexión de los cables se encuentra en un intervalo de 0 a 100 [kN]. Para poder tener un mayor detalle de la distribución en este intervalo, en las Figuras 5.6, 5.7 y 5.8 se muestra la frecuencia con que se presentan las fuerzas, dividiendo el rango de estudio en intervalos de 10 en 10 [kN] y expresando los resultados en porcentajes.

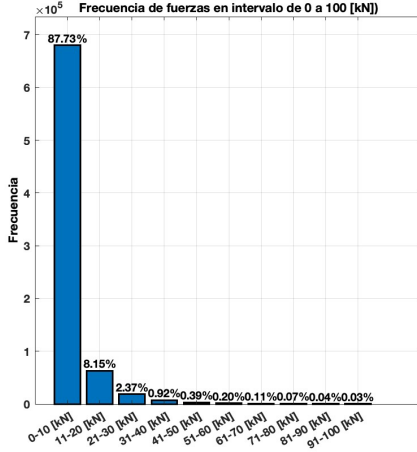


(a) Simulación 1

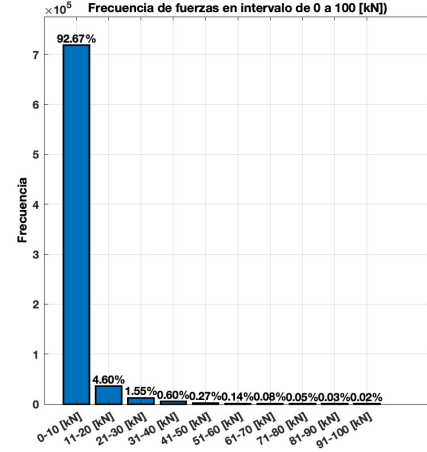


(b) Simulación 2

Figura 5.6: Distribución de fuerzas para Simulaciones 1 y 2 (Elaboración propia)

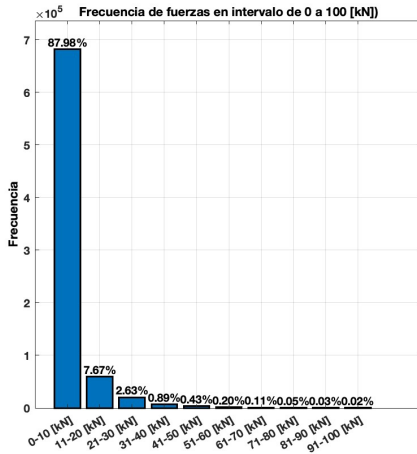


(a) Simulación 3

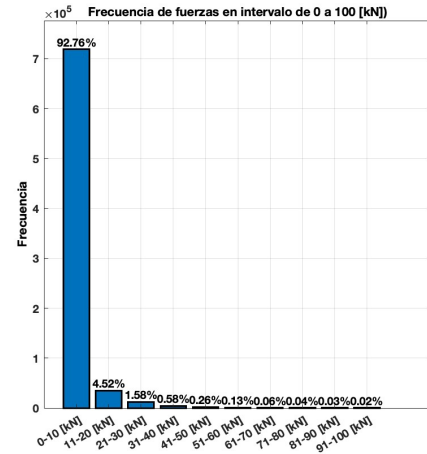


(b) Simulación 4

Figura 5.7: Distribución de fuerzas para Simulaciones 3 y 4 (Elaboración propia)



(a) Simulación 5



(b) Simulación 6

Figura 5.8: Distribución de fuerzas para Simulaciones 5 y 6 (Elaboración propia)

Al analizar los 3 pares de simulaciones de las distribuciones de fuerza, se puede notar que se reparten de manera similar, donde gran parte de las fuerzas fluctúan entre 0 a 30 [kN], mientras que apenas un 1-2% se distribuye entre los 31 a 100 [kN]. En paralelo, si se analiza la distribución de fuerzas en un rango mayor a 100 [kN], es decir, el otro 0,05% de fuerzas restantes, se tiene que en promedio un 90% oscila entre 101 a 200 [kN], seguido de un 6% que se encuentra entre 201 a 300 [kN] y el 4% restante son fuerzas mayores a este último rango. Dicho de otra forma, los casos de fuerzas que superan los 300 [kN] son solamente un 0,002%, indicando que estos picos de fuerza son valores atípicos.

Al examinar los gráficos de fuerza de los pares de simulaciones 1-2, 3-4 y 5-6, fue posible ver que en los instantes de 0 a 2 [s] existen picos de fuerza, y un argumento es que inicialmente los cables de amarre y anclaje están en posiciones arbitrarias e igualmente se encuentran en reposo, pero transcurrido unos segundos, estos comienzan a adquirir velocidad y tienden a caer por su propio peso provocando un tirón que se traduce como un pico de tensión; en teoría, los cables deberían tender a posicionarse como una catenaria. Otro fenómeno interesante es que cada 4 [s] la fuerza de los cables es cercana a 0 y esto está íntimamente relacionado con la ubicación respecto al eje Z de las boyas y el buque, ya que en esos momentos la elevación del oleaje en los cuerpos es tal que, la diferencia de altura entre los cuerpos flotantes es la mínima y hace que los cables del sistema no estén ejerciendo grandes tensiones en los nodos de conexión, básicamente es lo contrario a lo que ocurre cuando los cuerpos están en la cresta del oleaje, puesto que al darse esta situación, la diferencia de altura que hay entre el lecho marino y la parte inferior de las boyas es de las máximas que pueden ocurrir y ahí es cuando se generan cargas altas en los nodos de conexión. En las simulaciones 3-4 ocurre un ligero cambio en el comportamiento de las fuerzas, ya que a simple vista se observa que las cargas dinámicas en la simulación 3 son mayores en comparación con la simulación 4 siendo que en esta última hay mayor altura de oleaje, lo cual también se evidencia en la Figura 5.7 al aumentar la frecuencia de los 2 rangos más bajos de fuerzas; aunque esto parezca contra intuitivo, se debe a que la dirección del viento y la dirección de propagación del oleaje son relativamente opuestas y esto conlleva a que las fuerzas se opongan y la fuerza neta aplicada sea menor. Para poder validar las magnitudes de fuerzas obtenidas en el trabajo, se comparó con la investigación desarrollada por [Zhu and Yoo](#); estos analizaron el comportamiento de una boya que tenía una masa de 500 [kg] que se encontraba sujeta a 2 cables de anclaje que poseían una densidad lineal de 2,52 [kg/m], donde obtuvieron fuerzas que tenían un orden de magnitud alrededor de 0 a 12,5 [kN], alcanzando valores máximos de 20 [kN]. Teniendo en cuenta que las boyas empleadas en esta memoria tienen las mismas características y los cables utilizados tienen densidades lineales semejantes, se puede validar que los resultados que se consiguieron son correctos.

Con respecto a la orientación de los cuerpos, al comparar el par de simulaciones 1-2, 3-4 y 5-6 se puede apreciar que para cada uno de estos casos el valor pico de inclinación respecto al eje Z (ϕ) se observa a los 4 [s]. En relación a la orientación respecto al eje Z de las boyas, quién más gira de estas es indudablemente la boya B1, donde tiene máximos de alrededor de 35 a 45 [°], seguido por la boya B2 con rotaciones máximas de 25 a 32 [°]. Esto sucede justamente cuando una boya está llegando al valle de una ola, ya que en esta zona el peso de los cables de amarre provoca una fuerza excéntrica que actúa en las boyas e induce un momento que hace rotar a los cuerpos; esto también explica el por qué el buque cisterna también sus picos de rotación son a los 4 [s], porque es cuando se encuentra en un valle. Sumado a esto, cuando se analiza cualquier par de simulaciones, como por ejemplo las simulaciones 1-2, en la segunda simulación siempre el balanceo ϕ respecto a la vertical

es mayor, y es porque la altura del oleaje de la segunda simulación es casi el doble, entonces el movimiento de caída de los cuerpos entre la cresta y el valle es un poco más abrupto. Por otro lado, las rotaciones respecto al eje X (θ), tanto de las boyas como del buque, son despreciables para este intervalo de tiempo; se puede destacar que en las simulaciones 1, 2, 5 y 6, donde la propagación del oleaje y del viento es relativamente parecida, los cuerpos tienden a girar en sentido horario en el plano X-Y, mientras que en las simulaciones 3 y 4 giran en sentido antihorario.

Para finalizar, hay algo que tienen en común las 6 simulaciones y es que los grandes desplazamientos en los ejes X e Y del buque son siempre cercano a los 8 [s] de simulación, dado que en ese tiempo se está alcanzando la velocidad máxima de la ráfaga de viento, además, los desplazamientos que tienen los cuerpos flotantes coinciden con la dirección de propagación del viento, lo que da una idea de lo relevante que se comienza a convertir la fuerza de arrastre del viento por sobre la fuerza hidrodinámica del oleaje, lo cual se puede observar en los gráficos de desplazamiento de las simulaciones 3 y 4, donde el viento y el océano se propagan en direcciones relativamente opuestas. Pese a ello, la altura del oleaje también es capaz de influir como se puede observar en el par de simulaciones 1-2, ya que comparando los desplazamientos del buque respecto al eje X hay un incremento en el segundo caso cuando la altura del oleaje es de 4 [m], mientras que en el eje Y no hay gran diferencia porque no hay componente de fuerza por parte del océano en esa dirección que se oponga al viento. Complementando a esto, en el par de simulaciones 3-4 cuando el oleaje aumenta hace que los desplazamientos sean menores comparados con la simulación 3, donde el oleaje es menor para contrarrestar al viento.

2° Análisis

A partir de la Simulación 6, de la cual se pudo obtener información del comportamiento del sistema en un intervalo de 0 a 14 [s], lo primero que se analiza son las fuerzas obtenidas. En la Figura 5.10 se exhibe las magnitud de las fuerzas en cada nodo de conexión del terminal multiboyas, donde el cable que sufrió una mayor fuerza corresponde al cable de amarre A2 en el nodo de conexión 10, es decir, en la parte superior de una de las boyas, alcanzando un valor pico de 570 [kN]; dicho sea de paso, en la leyenda de la gráfica se indica el cable y el nodo de interés, por ejemplo, $A2_{10}$ es el cable del cual se estaba hablando recientemente y es representado con una línea punteada. De manera adicional y para tener una noción de la resistencia del sistema, en la Figura 5.11 se muestran los Factores de Seguridad de cada cable considerando la fuerza máxima que soportó en el intervalo de estudio, donde el factor del cable de amarre A2 dio un valor de 1,16 [-] aproximadamente; teniendo esto en cuenta, el buque estaría corriendo el riesgo de quedar inestable por una posible falla, asimismo, los cables de anclaje R2 y R4 también están en el límite de la carga mínima de rotura. Una observación que es importante mencionar, es que si bien el cable de amarre fue el cable más crítico del sistema, en términos generales quienes más están soportando fuerzas elevadas y que alcanzaron varios picos de fuerza son los cables de anclaje, mientras que los cables de amarre son quienes tuvieron magnitudes de fuerza más bajos en general. El motivo es porque hay que recordar que los cables de amarre tienen cierta flexibilidad modelada y debido a esta propiedad de elasticidad son buenos para absorber las cargas dinámicas, lo cual justamente coincide con los cables que uno ve en el mercado hechos con materiales de poliéster, polipropileno, entre otros, quienes destacan por esta característica.

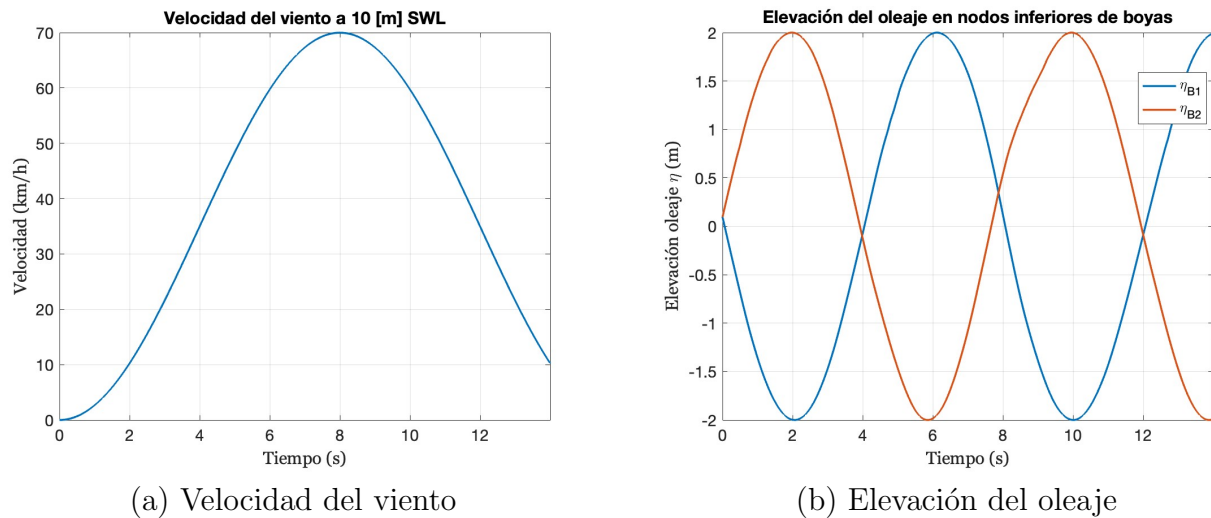


Figura 5.9: Estado del viento y océano a lo largo del tiempo (Elaboración propia)

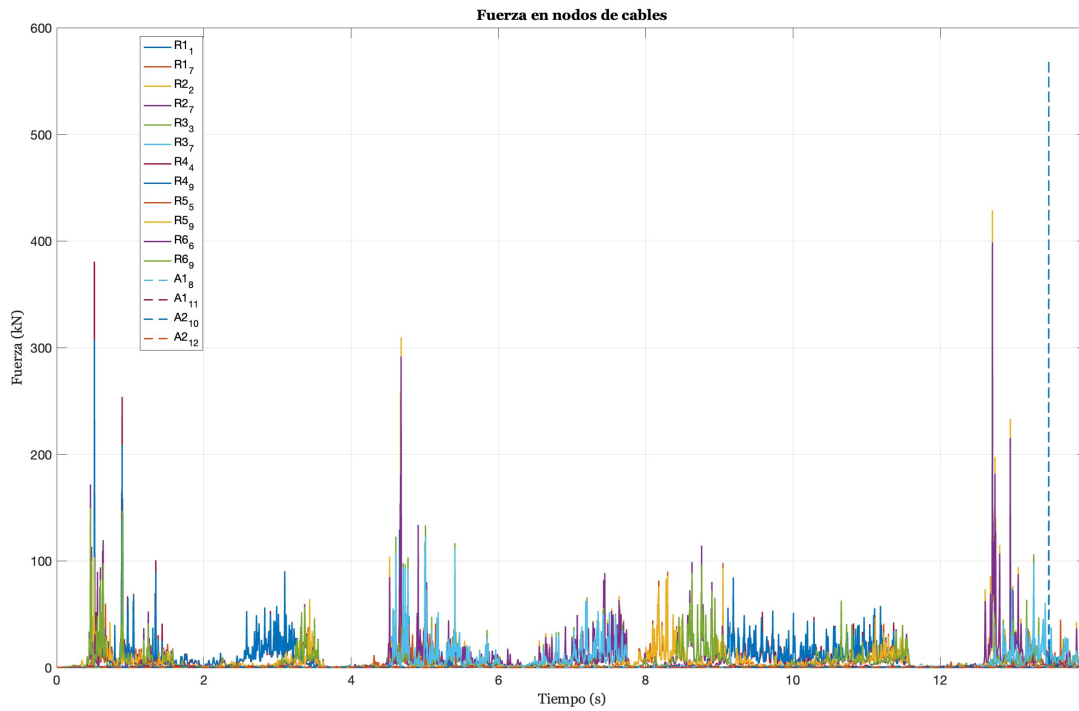


Figura 5.10: Comportamiento de las fuerzas nodales a lo largo del tiempo (Elaboración Propia)

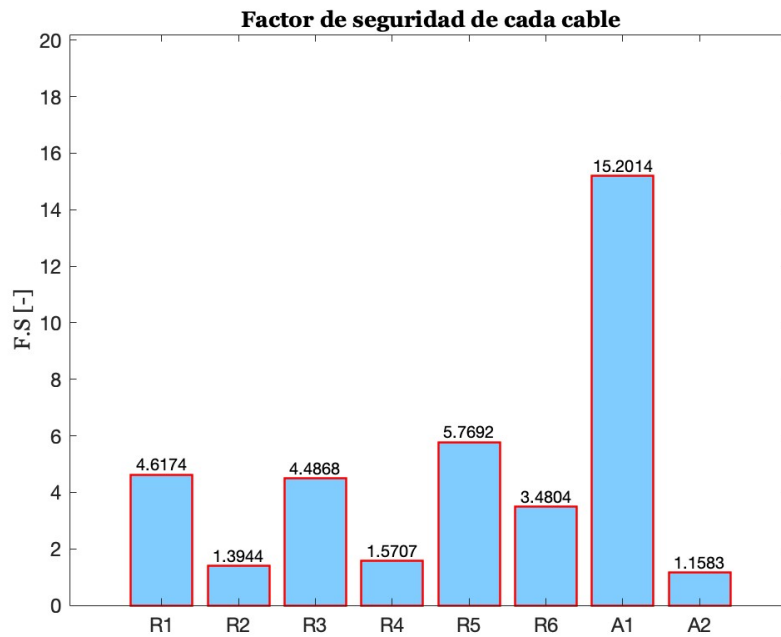


Figura 5.11: Factores de Seguridad para cada cable del sistema (Elaboración Propia)

Por otra parte, en la Figura 5.12 se muestran las rotaciones que sufrieron las boyas y el buque cisterna en cada instante de tiempo. En el gráfico (a) se muestra la orientación respecto al eje Z de los cuerpos, donde las boyas son quienes más giran y sobretodo la boya B1 alcanzando un ángulo cercano a los 50 [°], mientras que el buque cisterna tan solo llega a rotar como máximo 4,5 [°], una rotación que se puede considerar pequeña. Tiene sentido que las boyas sean quienes más roten, ya que debido a su forma geométrica esférica poseen una inercia menor comparada con la del buque y, a su vez, hay que considerar que los cables de amarre tienen un peso considerable y debido a la excentricidad de esta fuerza se produce un momento alrededor del centro de masa de las boyas; igualmente, se tiende a ver un comportamiento de vaivén oscilatorio en los ángulos ϕ de cada boya. En cuanto a la orientación de los cuerpos respecto al eje X presentado en el gráfico (b), no existe grandes cambios de orientación, solamente la boya B1 es quién cercano a los 10 [s] de simulación comienza a rotar poco a poco, llegando a rotar -15 [°]; el sentido físico de esta poca rotación se debe a que las fuerzas del viento y el oleaje actúan mayormente en dirección del eje X.

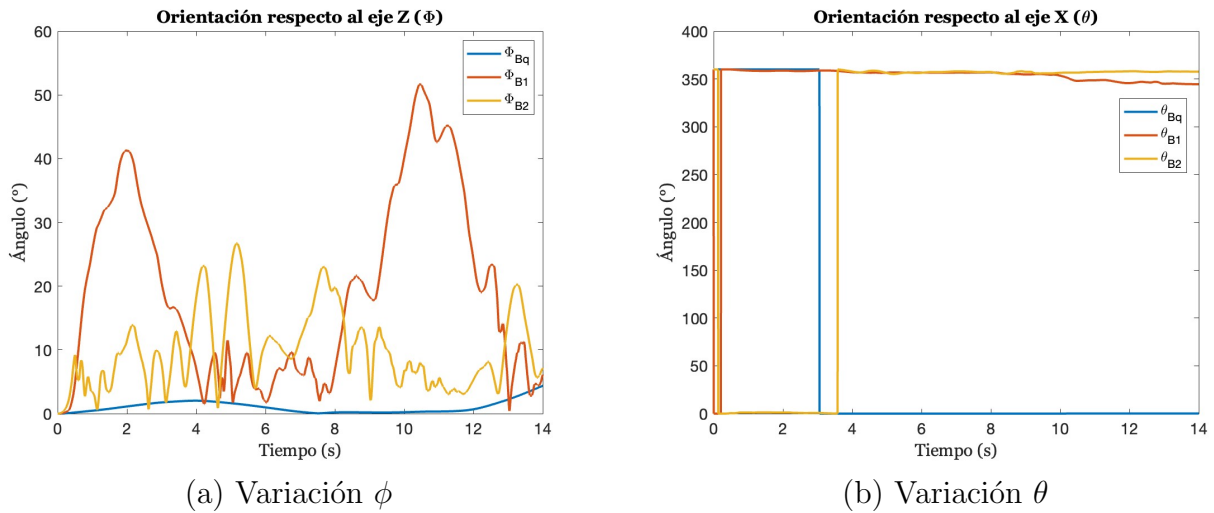
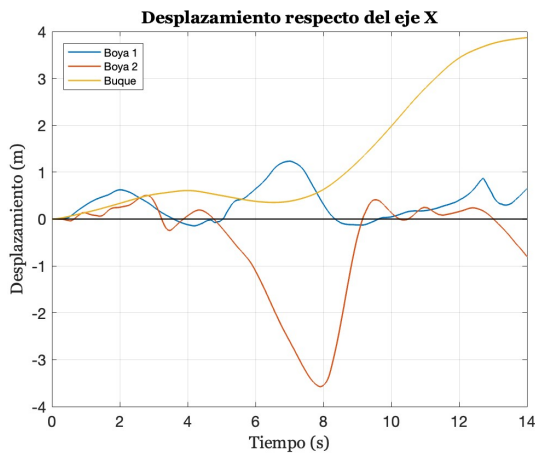


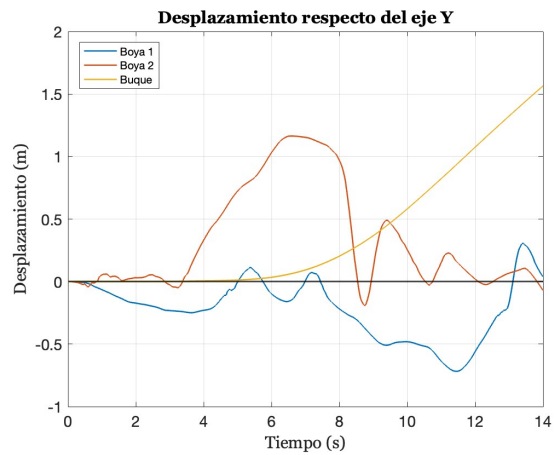
Figura 5.12: Rotación de cuerpos a lo largo del tiempo (Elaboración propia)

Como último punto de análisis, en la Figura 5.13 se pueden observar los desplazamientos que tuvieron los cuerpos a lo largo del tiempo. En el gráfico (a) se observa que el cuerpo que más se desplazó en el eje X fue el buque, alcanzando un desplazamiento máximo cercano a los 4 [m], seguido de la boya B2 que se desplazó -3,5 [m], no obstante, estos valores fueron en distintos instantes. En la gráfica (b) se aprecia el desplazamiento respecto al eje Y, donde nuevamente el buque cisterna y la boya B2 fueron quienes más se movieron, alcanzando desplazamientos máximos de 1,5 [m] y 1,2 [m] respectivamente.

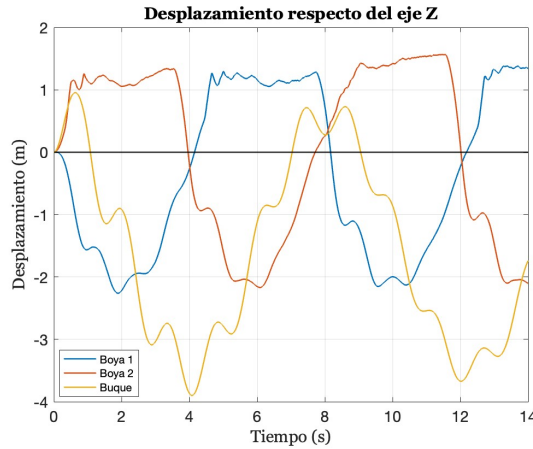
El incremento de los desplazamientos en los ejes X e Y del buque cisterna están estrechamente relacionados con los estados del océano y viento, ya que cuando la ráfaga de viento está alcanzando su velocidad máxima y, además, el oleaje también está alcanzando su máxima elevación, es cuando el buque comienza a tener desplazamientos notorios, considerando que antes de esto apenas se había movido unos cuantos centímetros. Sumado a esto, a pesar de que el oleaje influya en el movimiento de los cuerpos, uno se percata que quién más está relacionado con los grandes desplazamientos de los cuerpos es el viento porque, de hecho, los movimientos que tiene el buque son en la misma dirección en que se propaga el viento. En relación a la última gráfica (c), los desplazamientos siguen el mismo patrón ondulatorio que tienen las olas, como se puede ver en la Figura 5.9.



(a) Desplazamiento X



(b) Desplazamiento Y



(c) Desplazamiento Z

Figura 5.13: Desplazamientos de cuerpos a lo largo del tiempo (Elaboración propia)

Para tener una idea del comportamiento del terminal multiboyas propuesto, en la Figura 5.14 se muestra la posición de los cuerpos flotantes en seis momentos diferentes. La elevación del océano es representada con una superficie curva que tiene diversos colores; las boyas de estabilización son representadas con un tono verde, mientras que el buque cisterna tiene un color café claro; los cables de anclaje son graficados con un color rojo y los cables de amarre entre las boyas y el buque son de color negro. Un detalle interesante es ver cómo se visualizan los cables, ya que estos fueron discretizados espacialmente, dando lugar a pequeños tramos rectos que reflejan los elementos individuales que conforman cada cable. Aunque en este caso se dividió el cable en 10 partes, una mayor discretización, por ejemplo, en 60 partes, habría proporcionado una representación más fiel de cómo luce un cable en la realidad, así como resultados más precisos. No obstante, la discretización empleada en este caso aún nos brinda una noción aproximada de las fuerzas que pueden soportarse en cada nodo. Otra ayuda visual que ofrece la imagen es la de poder ver cuánto se desplazo el buque cisterna, puesto que en los gráficos también se ilustraron los ejes del sistema de referencia inercial y si se compara la posición inicial contra la posición cercana a los 14 [s], vemos que el buque se desplazo principalmente en el eje X.

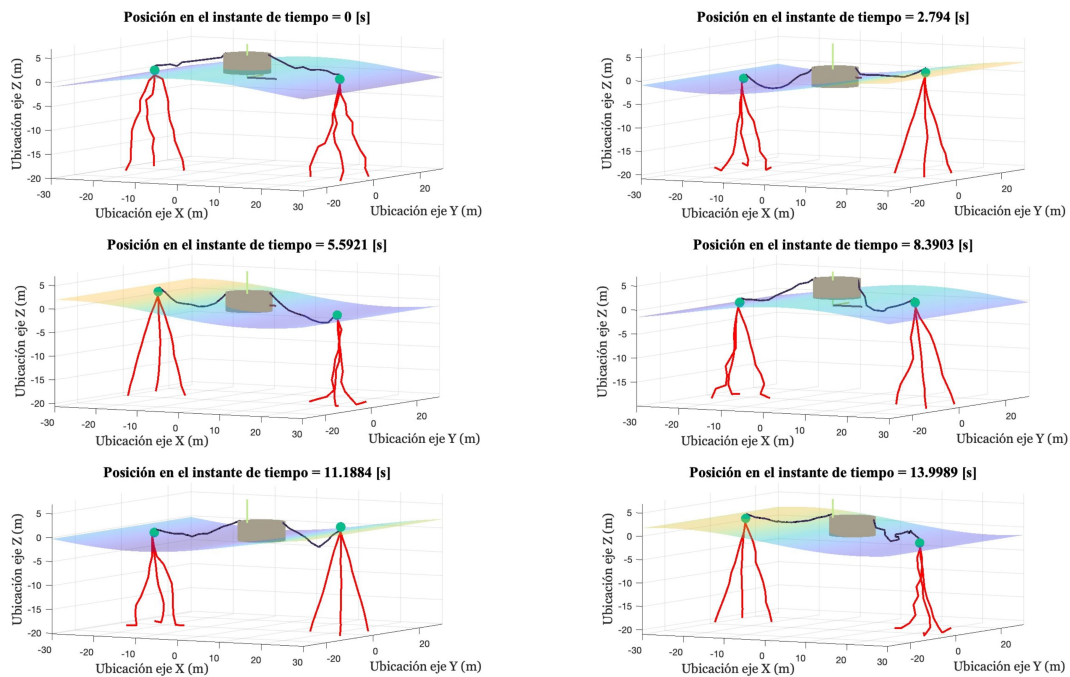


Figura 5.14: Posición del sistema en diferentes instantes de tiempo (Elaboración Propia)

Capítulo 6

Conclusiones y Recomendaciones

Como cierre de esta memoria, este capítulo final contendrá una síntesis del estudio realizado, acompañada de una serie de recomendaciones y algunas perspectivas para investigaciones futuras.

Con respecto a las cargas dinámicas, se puede afirmar que los estados del océano y del viento son quienes condicionan de manera directa las fuerzas en los nodos de conexión de un sistema, puesto que los picos de fuerza siempre ocurrieron transcurrido unos cuantos segundos después de que se alcanzaba la velocidad máxima del viento y la máxima elevación del oleaje; luego de estos segundos, los cuerpos de las boyas y el buque cisterna se distanciaban lo suficiente como para tensionar en gran medida a los cables. Se pudo establecer que cuando se usan boyas, las fuerzas que soportan los cables de amarre y anclaje tienen magnitudes predominantes menores a 100 [kN], e incluso, a 30 [kN], lo cual resulta ser un aspecto positivo porque existe una baja probabilidad de alcanzar un valor extremo de fuerza, donde solamente en un 0,002% se alcanzaban valores atípicos de fuerza. No obstante, este pequeño porcentaje sigue representando un riesgo que hay que tener en cuenta, ya que un tirón de gran magnitud podría causar un desastre con la estabilidad del buque; uno puede intuir que los fabricantes pueden tener un margen de juego con respecto a las fuerzas máximas de las componentes, sin embargo, no es apropiado alcanzar tensiones tan críticas. En este caso, los cables que pertenecen a la boya B2 son los más perjudicados, ya que son los que obtuvieron un Factor de Seguridad más bajo. Cuando se presentaron las fuerzas que soportó la cadena del ancla que sujetaba al buque en el primer análisis, estas no resultaron tan altas comparadas con el uso del sistema de boyas, pero no podemos pasar por alto que, en primer lugar, el buque tiene una masa de 35 [T] y poder acelerarlo no es fácil, es por esto que de cierta forma el buque se podía mantener en su lugar un buen periodo de tiempo evitando tensiones mayores por parte del ancla; en segundo lugar, la cadena del ancla tenía un largo tal que cuando el buque se encontraba en una cresta de la ola, la cadena no se encontraba completamente estirada y no causaba cambios abruptos en la tensión; y tercero, cuando se observa el movimiento de los cuerpos a lo largo del tiempo uno se da cuenta que estos suben y bajan de manera sincronizada.

Existe una diferencia en cuanto a estabilidad, principalmente con respecto al eje Z del sistema de referencia inercial entre el buque con y sin las boyas de estabilización. Cuando el buque se encontraba sujeto solo a su ancla, alcanzó rotaciones de 12 [°], donde el ángulo ϕ varió de inmediato cuando el viento alcanzó su velocidad máxima. Si se compara con el uso de un terminal multiboyas para los mismos estado del océano y viento, se logra reducir en un 37,5% el giro respecto al eje Z, demostrando la efectividad de implementar boyas que compensen la rotación. Esto también sirvió para demostrar que fue útil seguir la recomendación de [Ministerio de Obras Públicas](#) de ubicar de manera paralela el terminal multiboyas con respecto a la dirección de propagación del oleaje/viento cuando se quiere estabilizar un buque aplicando solo 2 boyas. En lo que concierne a la movilidad del buque, el uso de un terminal multiboyas logró reducir levemente los desplazamientos en las direcciones X e Y. Es fundamental tener en mente que las boyas en la realidad tienen una geometría generalmente cilíndrica, haciendo que sean más estables que las boyas esféricas utilizadas en este trabajo, esto se menciona porque tal vez se podría alcanzar una mejor estabilidad en el buque usando un modelo de boyas cilíndricas.

Una observación que se pudo rescatar de este trabajo fue ver la influencia que tiene el oleaje con respecto al desplazamiento y la orientación que pueden tomar los cuerpos flotantes, como también analizarlo desde la perspectiva de las velocidades que adquiere el viento de la localidad. En relación a la amplitud del oleaje a lo largo del tiempo, uno puede desprender que la fuerza que ejercía sobre los cuerpos no era la suficiente como para cambiar de manera abrupta la orientación del cuerpo o desplazarlos grandes distancias, lo cual se puede comprobar analizando intervalos de tiempo de 0 a 6 [s] que son instantes antes de que la ráfaga de viento logre su punto más alto. Por el contrario, cuando el viento toma protagonismo alcanzando su velocidad máxima, los cuerpos comienzan a moverse y rotar grandes cantidades comparado a su estado inicial, aumentando la inestabilidad e inseguridad del sistema. De esta forma hay que tomar precaución cuando existen grandes desplazamientos de aire que podrían causar un accidente en la embarcación. Aunque la densidad del océano es aproximadamente 800 veces mayor que la del aire en condiciones estándar, la velocidad que puede alcanzar el viento es considerablemente mayor. Dicha velocidad ejerce una influencia significativa en la fuerza de arrastre, ya que esta última es proporcional al cuadrado de la velocidad del viento. Además, durante la mayoría de las simulaciones, se observó que la estructura sumergida del buque tenía una proyección menor comparado con la parte viva del buque, dejando gran parte de la estructura del buque expuesta al viento. Por lo tanto, la acción del viento resulta ser el factor predominante en el comportamiento del sistema.

Acerca de las recomendaciones, la primera de estas va relacionada con asegurar la resistencia de los componentes del terminal multiboyas; se debería utilizar cables de amarre con mayor diámetro, sobretodo en los cables de anclaje quienes tienen menor elasticidad, ya que aumenta la carga

mínima de rotura. Sería esencial para las líneas de anclaje porque aparte de soportar mayores cargas, entregaría una mayor estabilidad al sistema de boya - cables por el incremento de peso y debería tender a disminuir los desplazamientos del buque cisterna, o también una vía sería añadir más cables que vayan en la parte inferior de las boyas para que las fuerzas sean distribuidas de mejor forma. Otra posibilidad para poder brindar una mayor estabilidad al buque cisterna es añadir algunas boyas extras, ya que de esta forma podría soportar cargas que no necesariamente sean tan paralelas, para este caso en particular donde el buque es representado como un cilindro robusto, la alternativa tentativa sería añadir una boya extra y la disposición espacial de estas sería alrededor de 120° cada una con respecto a la posición del buque; esto también permitiría reducir los desplazamientos del buque y evitaría que los cables estén estirados en su totalidad, reduciendo las cargas soportadas en los nodos. Por otro lado, en relación a la resolución de las ecuaciones de movimiento del sistema, si se quiere analizar intervalos de tiempo mayores, una opción sería disminuir el paso de tiempo, ya que, como se vio en el capítulo de *Simulaciones y resultados*, con el paso de tiempo actual no fue posible calcular el intervalo de 0 a 16 [s] en todas las simulaciones como se tenía planeado, esto porque el esquema explícito de Euler de primer orden es condicionalmente estable y conllevaba a que no se cumplieran las restricciones impuestas en el sistema, igualmente, trabajar con un paso menor es costoso computacionalmente por el hecho de que toma bastante tiempo poder obtener los resultados, por ejemplo, para las simulaciones realizadas en este trabajo tardaron alrededor de 2 semanas, por ende, utilizar un paso de tiempo menor implicaría que la máquina estaría trabajando una mayor cantidad de tiempo; sumado a esto, el sistema de ecuaciones que se resuelve se vuelve más inestable a medida que se colocan cuerpos adicionales y resulta ser una barrera cuando se quiere estudiar el comportamiento del terminal multiboyas sujeto a una mayor cantidad de boyas o cables. Teniendo en cuenta estos detalles, sería bueno aplicar otro esquema de integración para resolver el sistema de ecuaciones y también ofrecer una mayor precisión como podría ser un Runge - Kutta explícito de 4 orden, en virtud de que en varias literaturas e investigaciones se utiliza este esquema, sin ir más lejos, [Shabana](#) es uno de aquellos.

El terminal multiboyas propuesto está relativamente lejano a la costa, superior a 2 [km] de distancia, sin embargo, otra propuesta que podría ser útil es situarlo un poco más cerca del puerto. Esto se traduce en que, para un trabajo a futuro, se debería cambiar la forma de modelar el océano usando Teoría de Oleaje Irregular, en la cual se trabajaría con un espectro de oleaje con diferentes alturas y direcciones de propagación en el espacio, donde además habría que estudiar cómo afecta el rompimiento de olas a las estructuras marinas, lo cual también es un tema de interés. Una limitación que tiene este trabajo es que el modelo del buque utilizado no es totalmente representativo en temas dimensionales comparado con la realidad de un buque cisterna, sin embargo, la explicación de esto se debe a que la fuerza del oleaje que se aplica en cuerpos de enorme tamaño

se calcula de manera diferente y no es tan sencilla, de hecho hay literaturas que tienen varios capítulos dedicados a las teorías para estimar dichas fuerzas ([Journée and Massie, 2001](#)), por lo cual sería interesante realizar en un futuro un modelo que abarque cuerpos masivos, es decir, que sus dimensiones sean comparables con la longitud de onda del oleaje. En las simulaciones que se llevaron a cabo se pudo mostrar el movimiento oscilatorio que siguen tanto las boyas como el buque cisterna con respecto al eje Z del sistema inercial. Por lo tanto, en materia energética, sería atractivo ver cómo generar electricidad aprovechando, por ejemplo, el movimiento vertical de las boyas de estabilización para accionar un motor lineal como fue propuesto en ([Ribeiro et al., 2021](#)), una investigación que por cierto es bastante reciente. Otra posibilidad para sacar provecho del movimiento vertical de las boyas sería accionar pistones ubicados cerca del lecho marino que, en teoría, serían bombas de desplazamiento positivo y podrían transportar el agua marina a una turbina hidráulica convencional para generar electricidad, en fin, existe un amplio abanico de casos que se podrían analizar. Finalmente, un trabajo que podría ser desafiante es intentar determinar la posición ideal de las boyas de estabilización de tal manera que minimicen las cargas en los puntos de conexión de las boyas, abordándolo como un problema de optimización.

A modo de resumen, se puede decir lo siguiente:

- Se cumplió el objetivo general de calcular las cargas dinámicas que soportan las boyas de estabilización como se tenía previsto, destacando que en prácticamente todas las simulaciones los cables fueron capaces de resistir dichas fuerzas sin sobrepasar la carga mínima de rotura, a excepción de la simulación 1 donde podría eventualmente haber una falla. Por otra parte, se pudo demostrar que las rotaciones y desplazamientos que puede sufrir el buque cisterna son minimizados gracias al terminal multiboyas propuesto.
- Se pudo ver el real efecto que tienen las cargas hidrodinámicas por parte del océano y viento sobre los cuerpos flotantes, además de mostrar y cuantificar el impacto que tiene la altura del oleaje y la velocidad del viento. Las amplias oscilaciones que puede experimentar un buque cisterna se deben en gran parte a la velocidad del viento.
- Las limitaciones que son importantes mencionar corresponden a la cantidad de cuerpos que se pueden modelar y los intervalos de tiempo que son de interés, puesto que aumentar la cantidad de cuerpos en el modelo trae consigo un aumento en la inestabilidad numérica, mientras que si se quiere analizar grandes tiempos de simulación, el actual esquema de resolución numérico tardaría demasiado.

Anexos

ANEXO A: Configuraciones iniciales de cada cuerpo

ANEXO B: Resultados de Fuerzas

ANEXO C: Resultados de Factores de Seguridad

ANEXO D: Resultados de Orientación

ANEXO E: Resultados de Desplazamiento

Anexo A: Configuraciones iniciales de cada cuerpo

Arreglo en simulaciones 1, 3 y 5

Configuración de boyas y buque

	B1	B2	Bq
CM en X [m]	-22,01	22,01	0
CM en Y [m]	0	0	0
CM en Z [m]	0,56	0,56	2,25
Orientación theta inicial [°]	0	0	0
Orientación phi inicial [°]	90	90	90

Configuración de cables de amarre

	A1	A2
Nodo inicial X [m]	-22,01	22,01
Nodo inicial Y [m]	0	0
Nodo inicial Z [m]	1,56	1,56
Nodo final X [m]	-5,01	5,01
Nodo final Y [m]	0	0
Nodo final Z [m]	4,25	4,25

Configuración de cables de anclaje

	R1	R2	R3	R4	R5	R6
Nodo inicial X [m]	-15,01	-25,51	-25,51	15,01	25,51	25,51
Nodo inicial Y [m]	0	6,062	-6,062	0	-6,062	6,062
Nodo inicial Z [m]	-20	-20	-20	-20	-20	-20
Nodo final X [m]	-22,01	-22,01	-22,01	22,01	22,01	22,01
Nodo final Y [m]	0	0	0	0	0	0
Nodo final Z [m]	-0,44	-0,44	-0,44	-0,44	-0,44	-0,44

Arreglo en simulaciones 2, 4 y 6

Configuración de boyas y buque

	B1	B2	Bq
CM en X [m]	-22,01	22,01	0
CM en Y [m]	0	0	0
CM en Z [m]	0,59	0,59	3
Orientación theta inicial [°]	0	0	0
Orientación phi inicial [°]	90	90	90

Configuración de cables de amarre

	A1	A2
Nodo inicial X [m]	-22,01	22,01
Nodo inicial Y [m]	0	0
Nodo inicial Z [m]	1,59	1,59
Nodo final X [m]	-5,01	5,01
Nodo final Y [m]	0	0
Nodo final Z [m]	5	5

Configuración de cables de anclaje

	R1	R2	R3	R4	R5	R6
Nodo inicial X [m]	-15,01	-25,51	-25,51	15,01	25,51	25,51
Nodo inicial Y [m]	0	6,062	-6,062	0	-6,062	6,062
Nodo inicial Z [m]	-20	-20	-20	-20	-20	-20
Nodo final X [m]	-22,01	-22,01	-22,01	22,01	22,01	22,01
Nodo final Y [m]	0	0	0	0	0	0
Nodo final Z [m]	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41	-0,41

- En las tablas se indica la posición inicial del centro de masa (CM) de cada cuerpo a excepción de los cables, donde solo se indican los nodos de conexión inicial y final, por ende, la ubicación de los extremos de estos.
- La orientación de las boyas y buque que se indican en las tablas corresponden a la orientación del eje X del sistema local del cuerpo. Para las simulaciones, por lo tanto, el sistema de referencia local de las boyas y buque comenzó con la misma orientación que el sistema de referencia inercial.

Ubicación y orientación de cables

Para calcular la posición de cada elemento/eslabón de un cable se describen las coordenadas X, Y, Z usando coordenadas esféricas, de esta forma se debe resolver el siguiente sistema de ecuaciones:

$$\sum_{i=1}^n L \cdot \sin \phi_i \cos \theta_i = B_x - A_x \quad (6.1)$$

$$\sum_{i=1}^n L \cdot \sin \phi_i \sin \theta_i = B_y - A_y \quad (6.2)$$

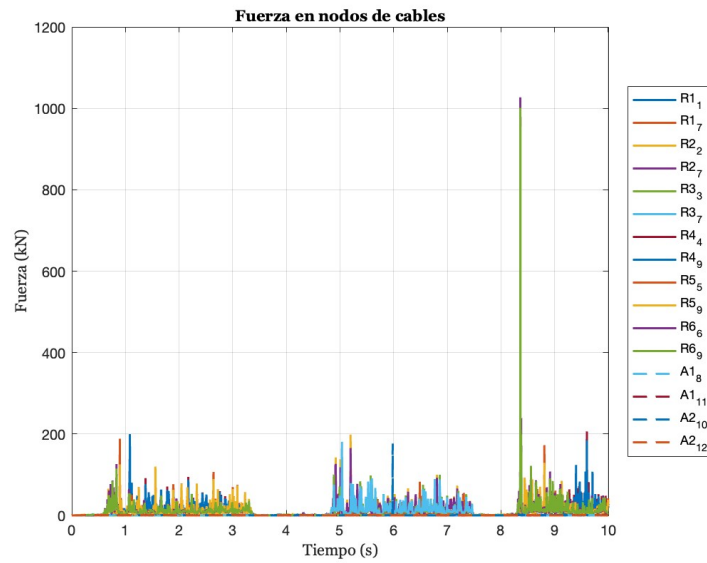
$$\sum_{i=1}^n L \cdot \cos \phi_i = B_z - A_z \quad (6.3)$$

Donde n es la cantidad de cuerpos en la que se discretizó el cable, L corresponde al largo de un eslabón, ϕ_i corresponde al ángulo respecto al eje Z del i -ésimo eslabón, θ_i corresponde al ángulo respecto al eje X en el plano $X - Y$ del i -ésimo eslabón, A y B corresponde a los vectores de posición inicial y final de los extremos de un cable, respectivamente. Para resolver este sistema de ecuaciones se utiliza un solver de MATLAB denominado 'vpasolve', al cual le ingresamos nuestro sistema de ecuaciones y además se le entrega una suposición inicial de las posibles orientaciones de los eslabones generado de manera aleatoria. De manera adicional, para poder resolver estas ecuaciones se debe cumplir la siguiente restricción:

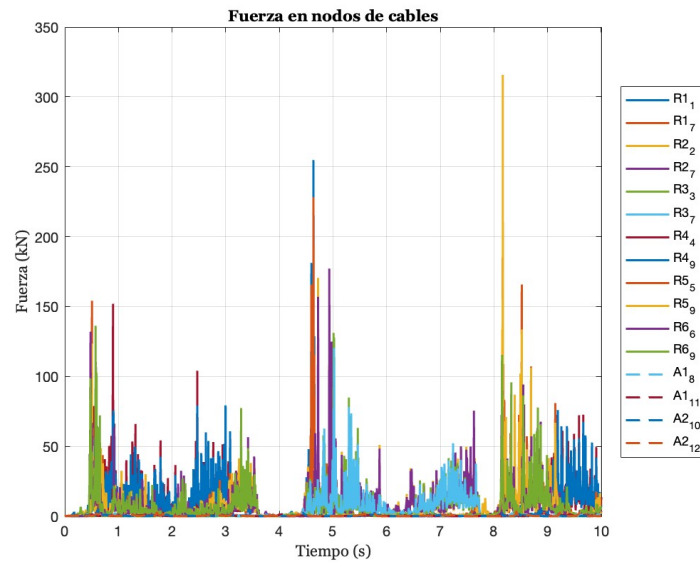
$$\|A - B\| \leq L_{cable} \quad (6.4)$$

De esta forma, una vez calculada las orientaciones de cada eslabón, se puede calcular la posición de cada nodo interno de los cables usando coordenadas esféricas y, por último, conocer la ubicación de cada centro de masa de los eslabones.

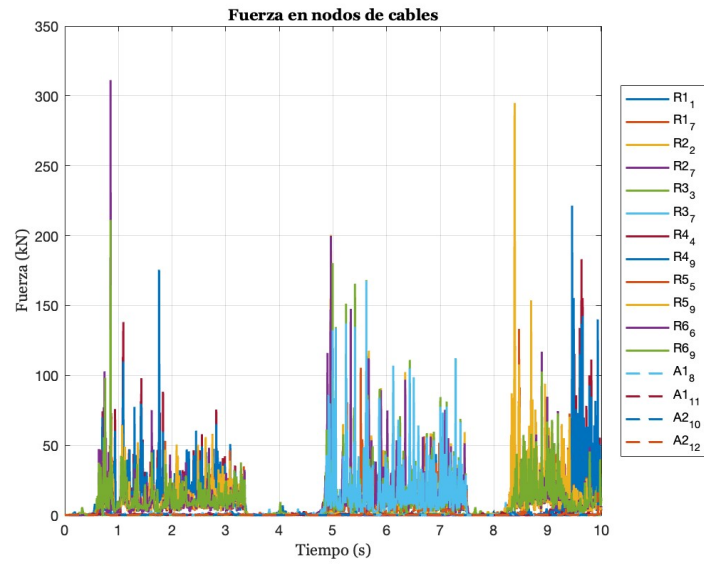
Anexo B: Resultados de Fuerzas



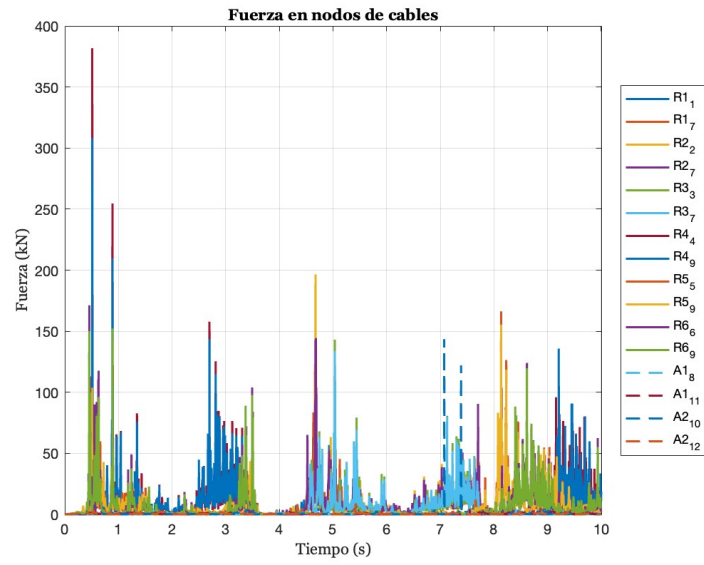
Simulación 1: altura de oleaje de 2,5 [m] y vientos de 12 [km/h]



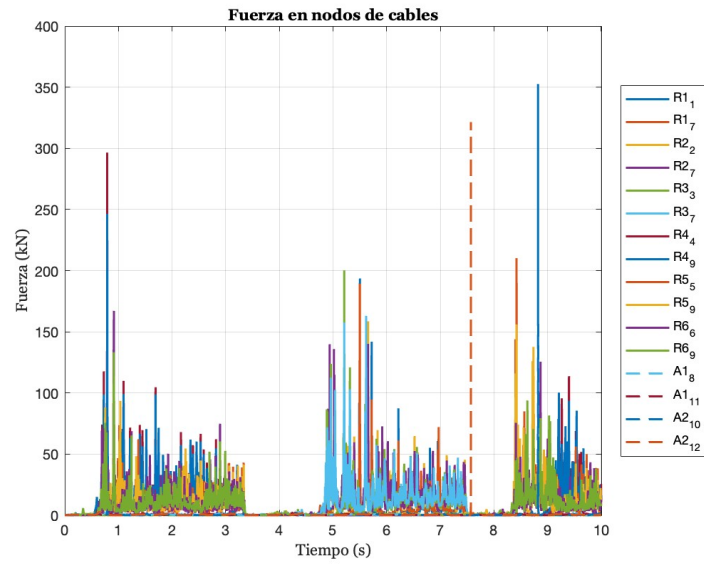
Simulación 2: altura de oleaje de 4 [m] y vientos de 12 [km/h]



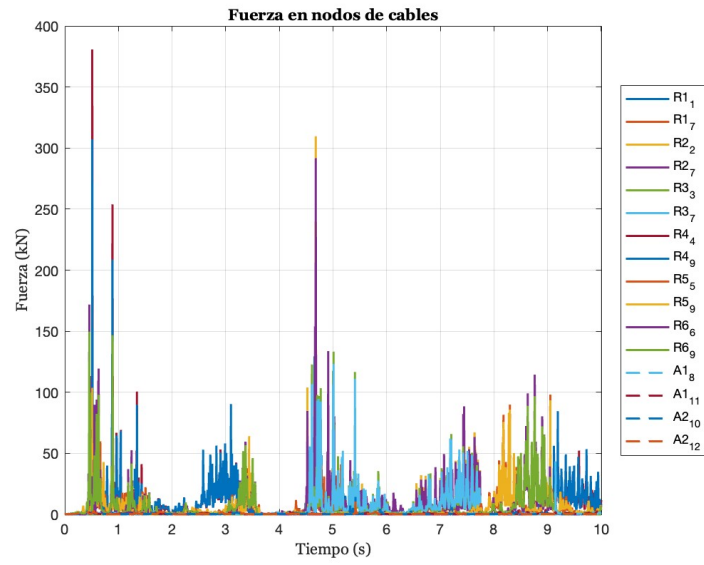
Simulación 3: altura de oleaje de 2,5 [m] y vientos de 28 [km/h]



Simulación 4: altura de oleaje de 4 [m] y vientos de 28 [km/h]

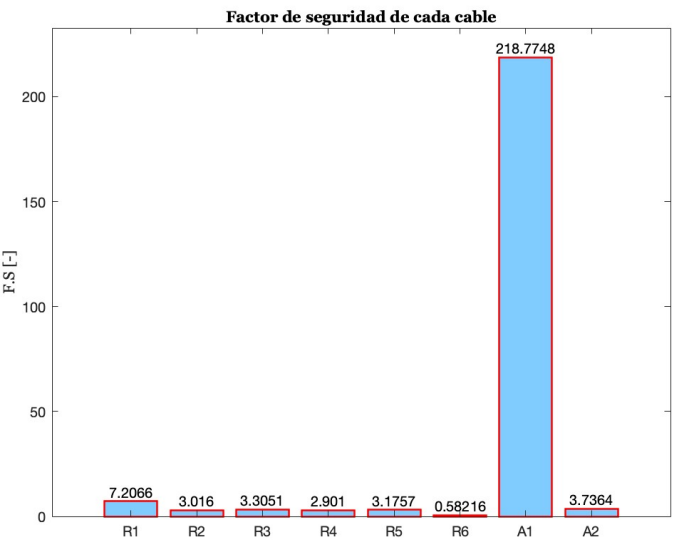


Simulación 5: altura de oleaje de 2,5 [m] y vientos de 70 [km/h]

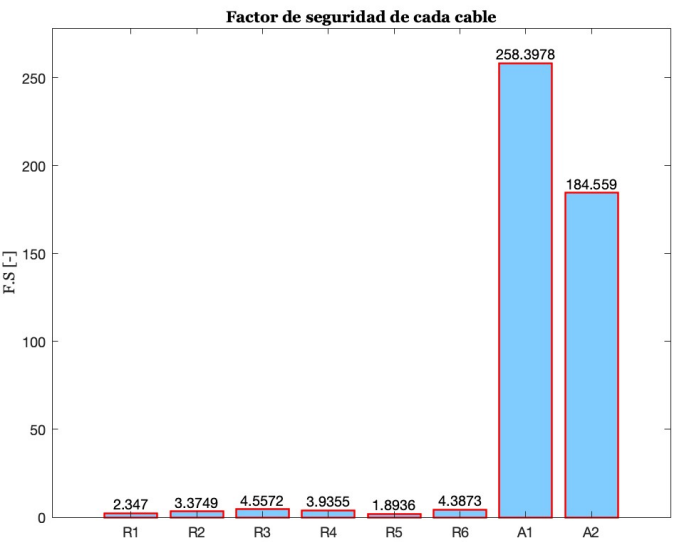


Simulación 6: altura de oleaje de 4 [m] y vientos de 70 [km/h]

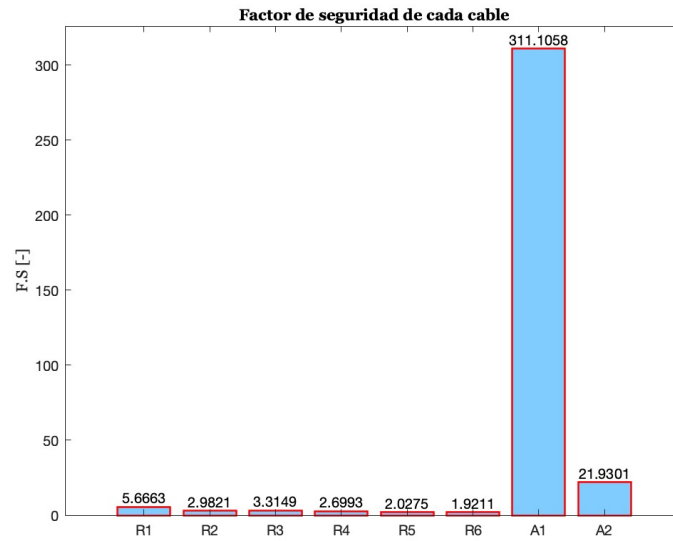
Anexo C: Resultados de Factores de Seguridad



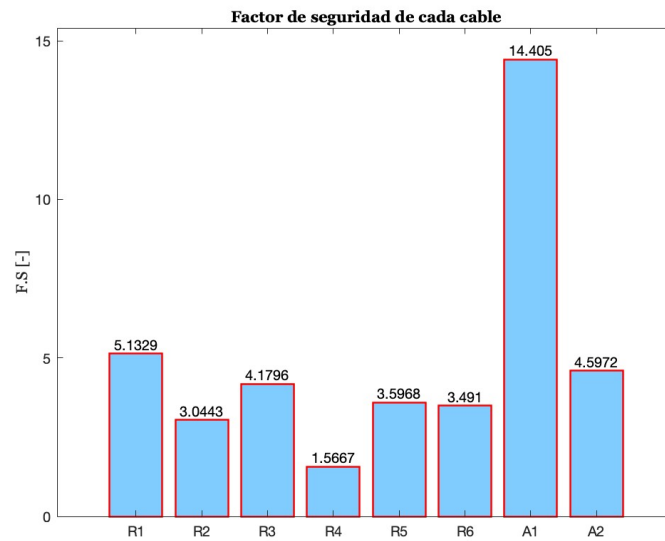
Simulación 1: altura de oleaje de 2,5 [m] y vientos de 12 [km/h]



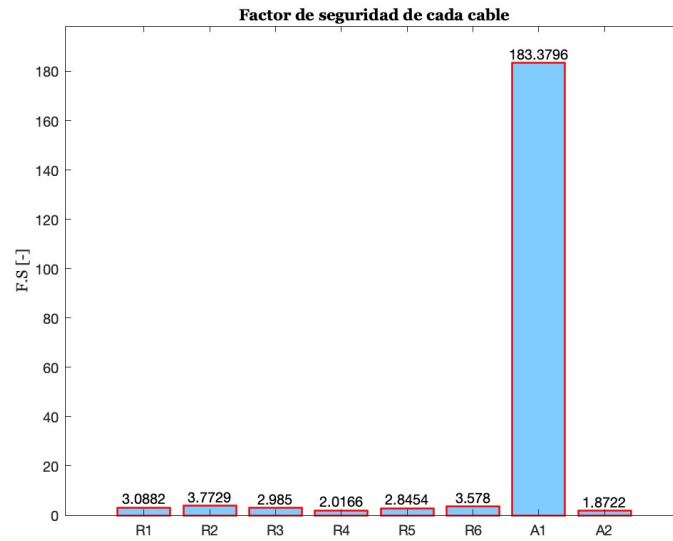
Simulación 2: altura de oleaje de 4 [m] y vientos de 12 [km/h]



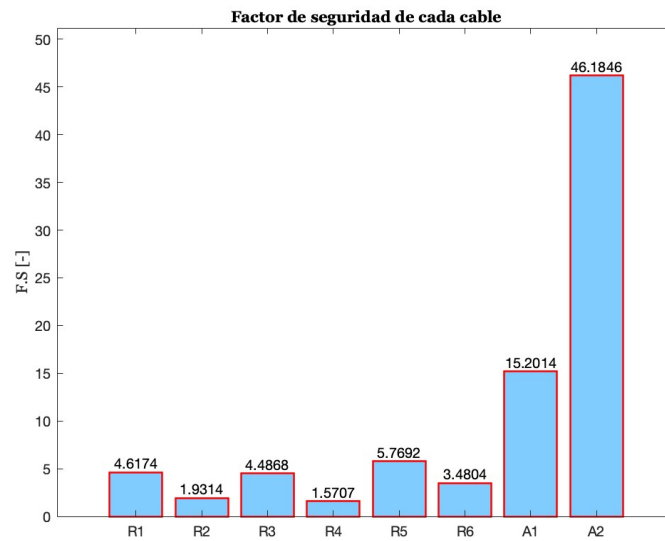
Simulación 3: altura de oleaje de 2,5 [m] y vientos de 28 [km/h]



Simulación 4: altura de oleaje de 4 [m] y vientos de 28 [km/h]

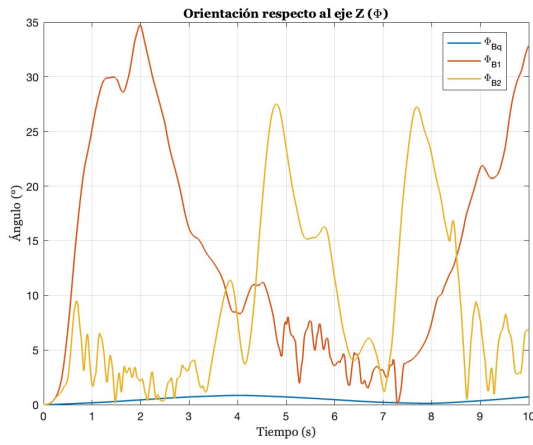


Simulación 5: altura de oleaje de 2,5 [m] y vientos de 70 [km/h]

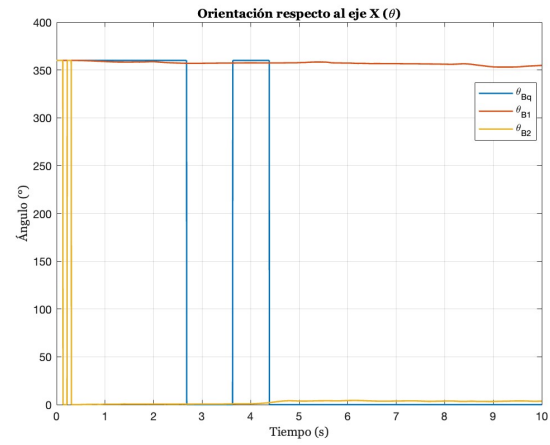


Simulación 6: altura de oleaje de 4 [m] y vientos de 70 [km/h]

Anexo D: Resultados de Orientación

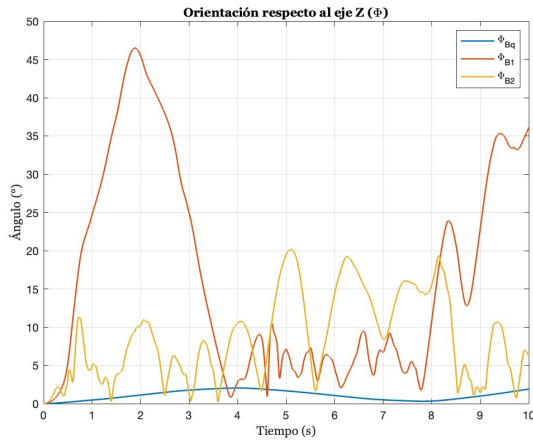


(a) Variación ϕ

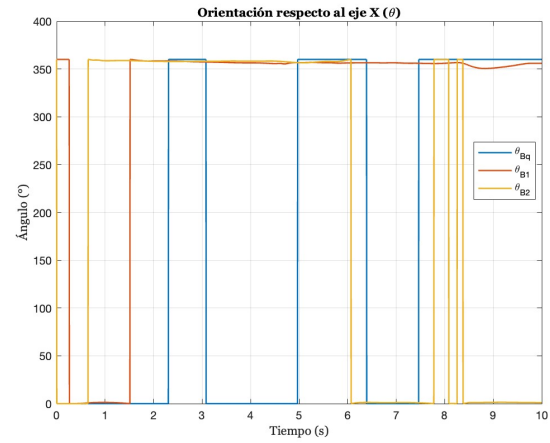


(b) Variación θ

Simulación 1: altura de oleaje de 2,5 [m] y vientos de 12 [km/h]

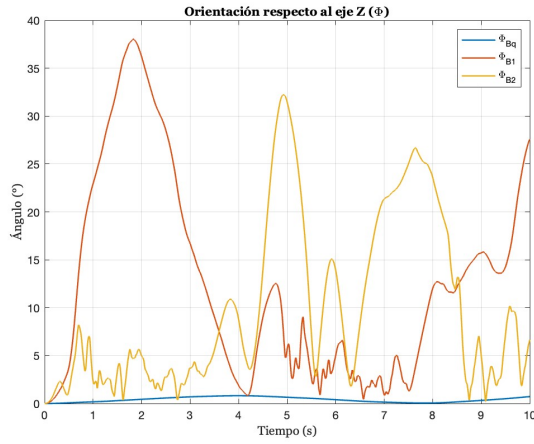


(a) Variación ϕ

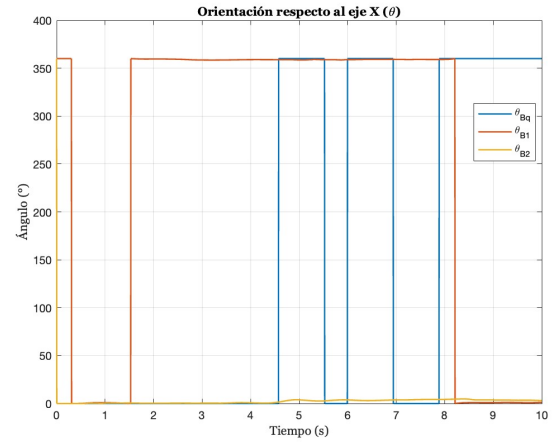


(b) Variación θ

Simulación 2: altura de oleaje de 4 [m] y vientos de 12 [km/h]

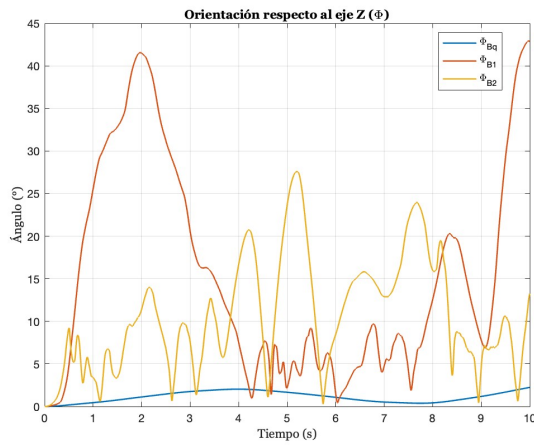


(a) Variación ϕ

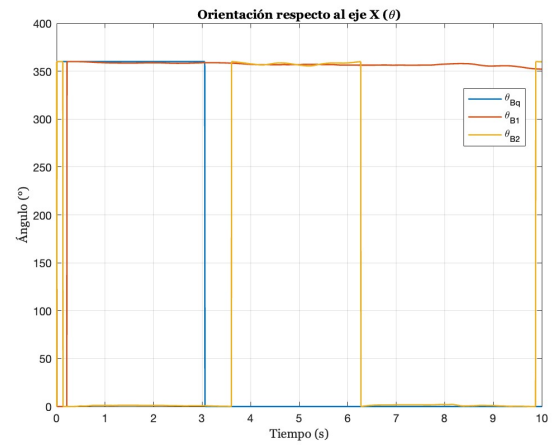


(b) Variación θ

Simulación 3: altura de oleaje de 2,5 [m] y vientos de 28 [km/h]

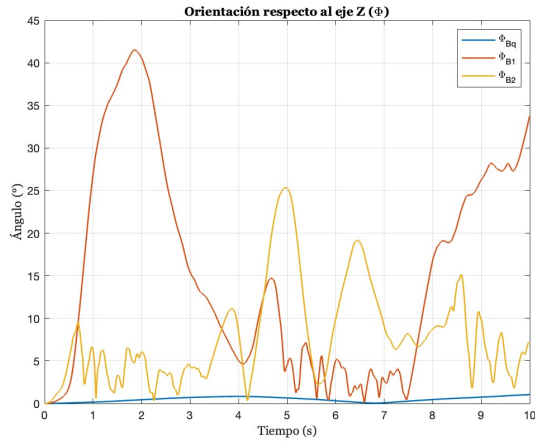


(a) Variación ϕ

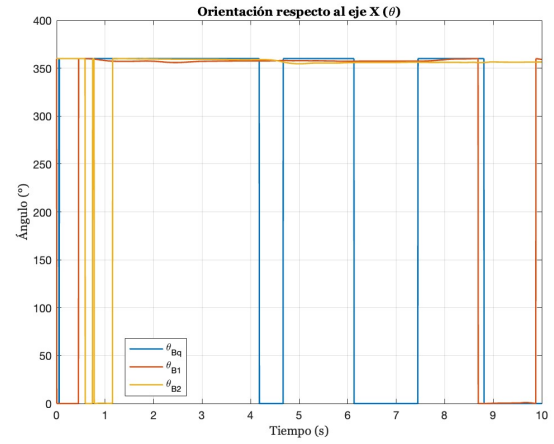


(b) Variación θ

Simulación 4: altura de oleaje de 4 [m] y vientos de 28 [km/h]

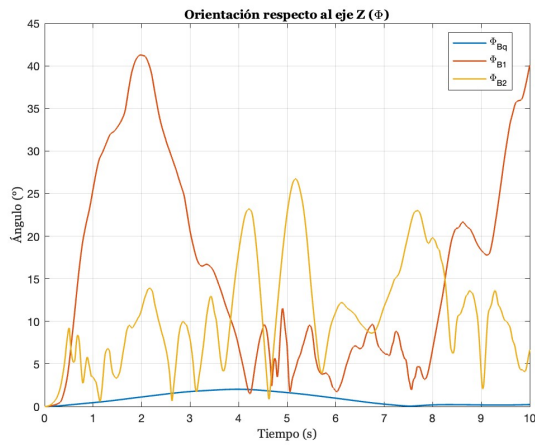


(a) Variación ϕ

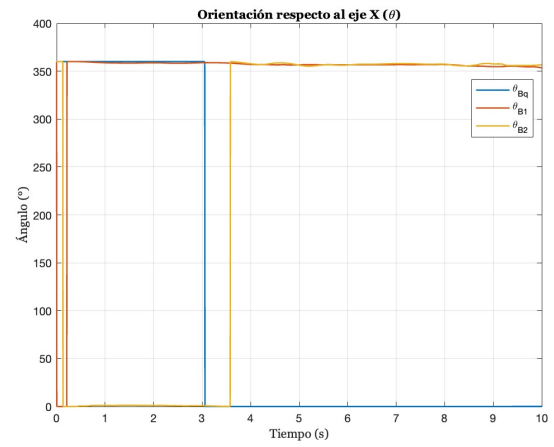


(b) Variación θ

Simulación 5: altura de oleaje de 2,5 [m] y vientos de 70 [km/h]



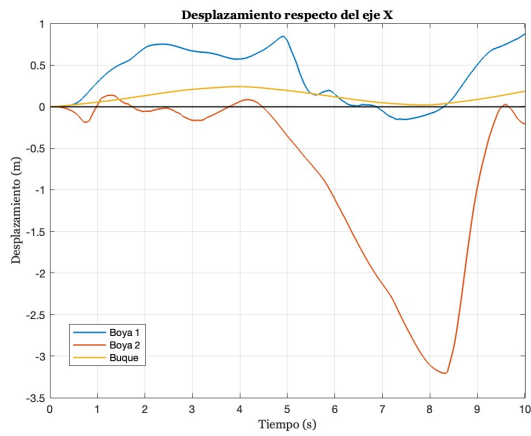
(a) Variación ϕ



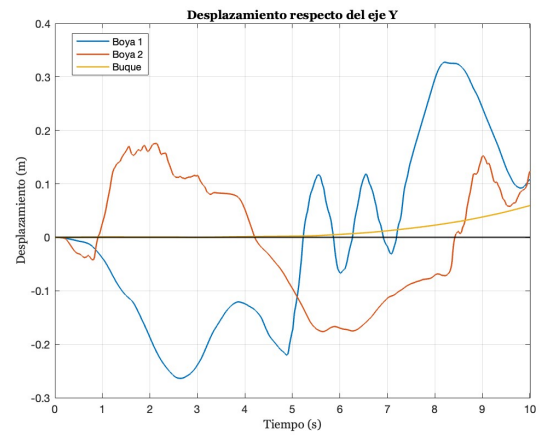
(b) Variación θ

Simulación 6: altura de oleaje de 4 [m] y vientos de 70 [km/h]

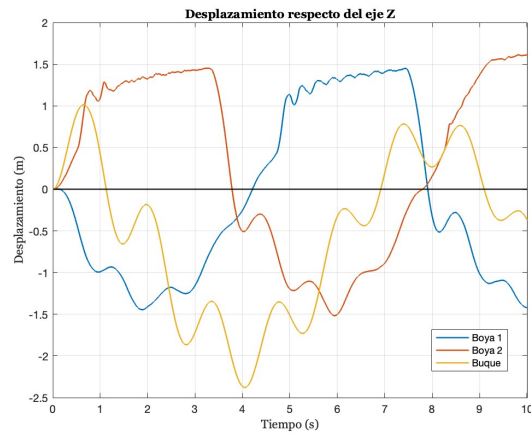
Anexo E: Resultados de Desplazamiento



(a) Desplazamiento X

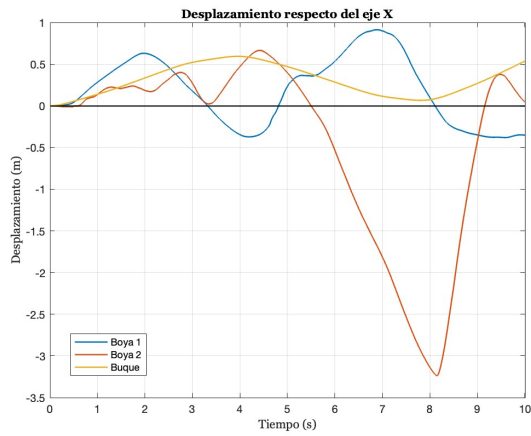


(b) Desplazamiento Y

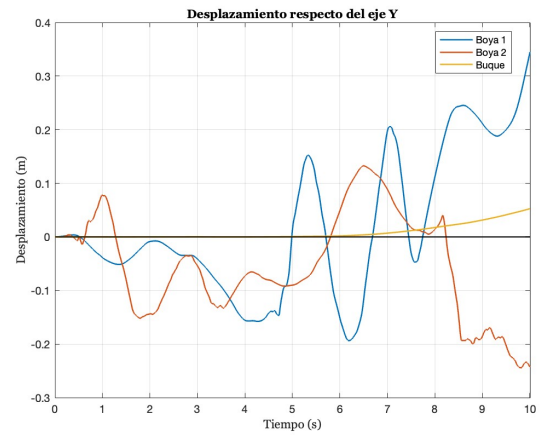


(c) Desplazamiento Z

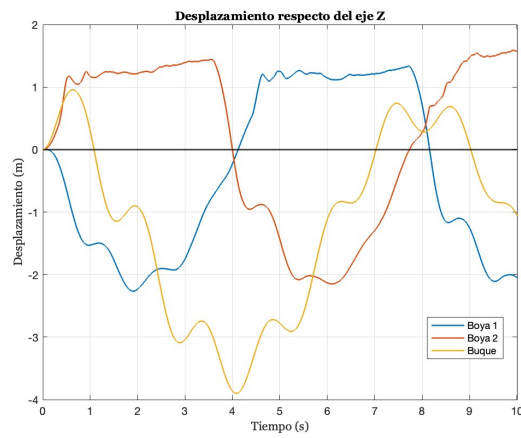
Simulación 1: altura de oleaje de 2,5 [m] y vientos de 12 [km/h]



(a) Desplazamiento X

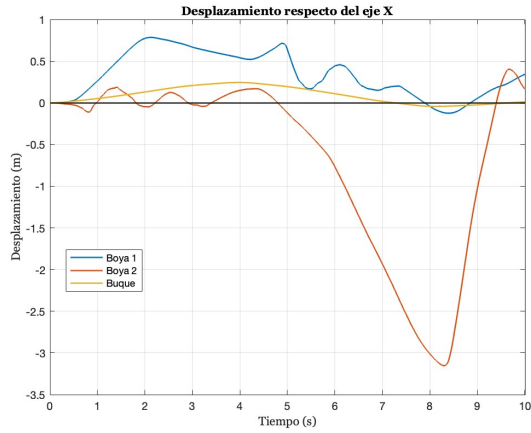


(b) Desplazamiento Y

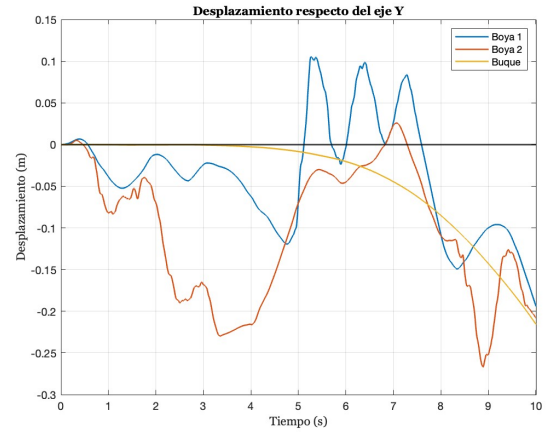


(c) Desplazamiento Z

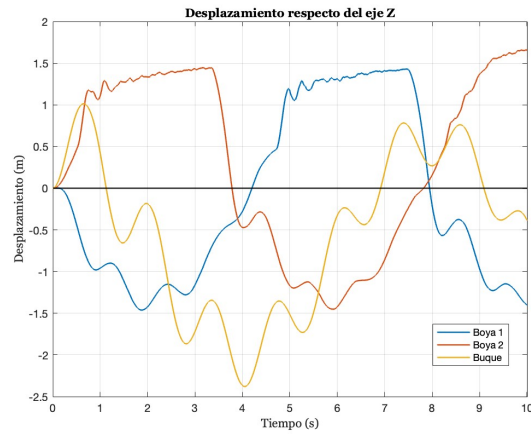
Simulación 2: altura de oleaje de 4 [m] y vientos de 12 [km/h]



(a) Desplazamiento X

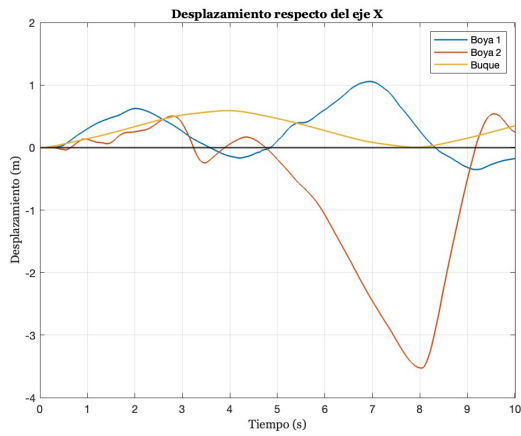


(b) Desplazamiento Y

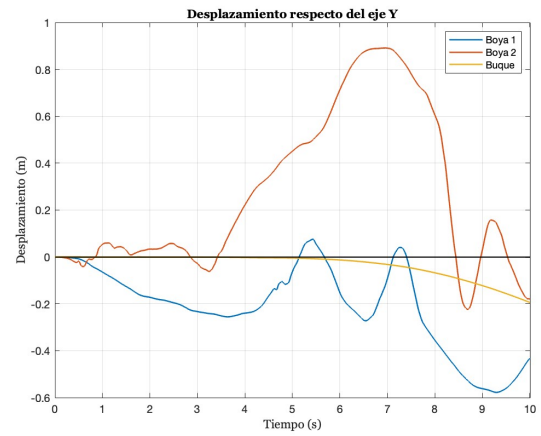


(c) Desplazamiento Z

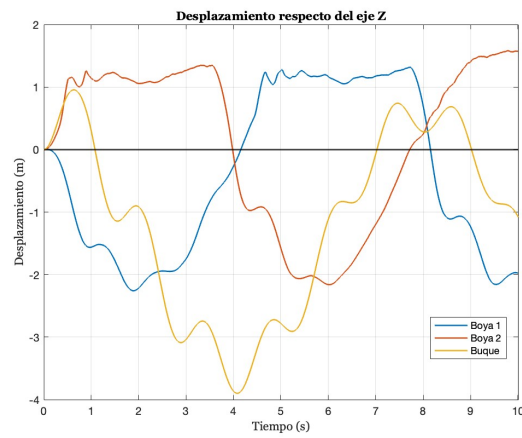
Simulación 3: altura de oleaje de 2,5 [m] y vientos de 28 [km/h]



(a) Desplazamiento X

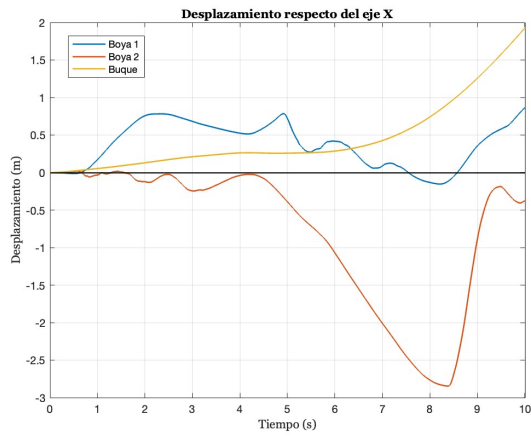


(b) Desplazamiento Y

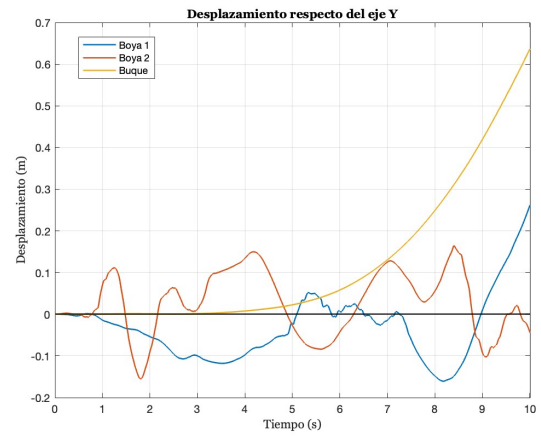


(c) Desplazamiento Z

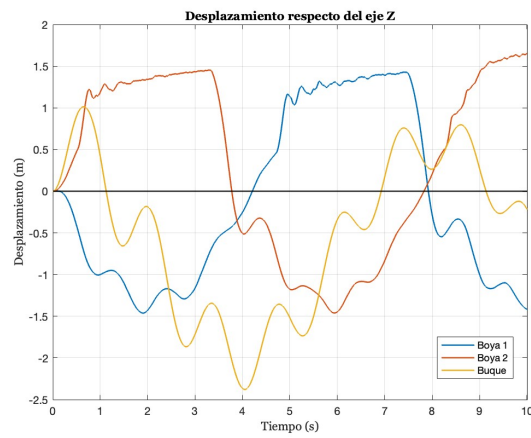
Simulación 4: altura de oleaje de 4 [m] y vientos de 28 [km/h]



(a) Desplazamiento X

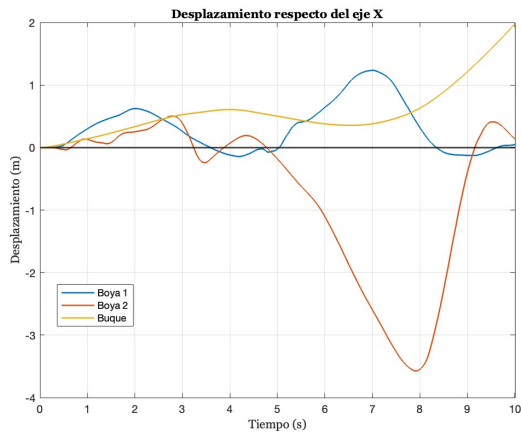


(b) Desplazamiento Y

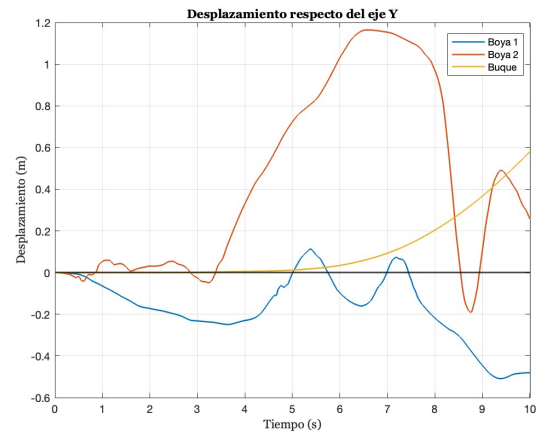


(c) Desplazamiento Z

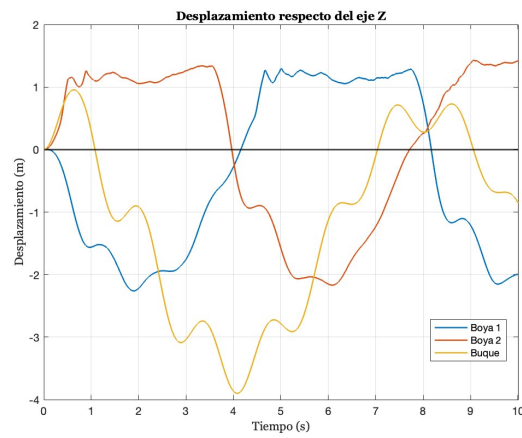
Simulación 5: altura de oleaje de 2,5 [m] y vientos de 70 [km/h]



(a) Desplazamiento X



(b) Desplazamiento Y



(c) Desplazamiento Z

Simulación 6: altura de oleaje de 4 [m] y vientos de 70 [km/h]

Referencias

- Almazán, J. L., Carmen, G. M. D., Monzón, P., Manuel, J., Cabrera, P., and Goded, J. E. (2001). Ingeniería marítima: Sistemas de fondeo y anclaje.
- Amaya, Omar, G., Cooz, R., Marco, U., Duran, A., Luís, M., and R (2007). Modelado del viento para simulaciones computarizadas de sistemas de potencia.
- Ansys (2020). Discussion of implicit and explicit methods and time-step size.
- Calisto, E. V. M. (2016). Análisis de un dispositivo oscilante como medio de captación de energía undimotriz.
- Carmen, M. A. D., Monzón, P., Luis, J., and Gárate, A. (2000). Descripción, medida y análisis del oleaje.
- Correa H., D. (2016). *Estudio del comportamiento de un mecanismo de boyas para obtener energía undimotriz*. PhD thesis, Departamento de Ingeniería Mecánica. Universidad de Chile.
- del Estado, P. (2000). Rom 3.1-99 proyecto de la configuracion maritima de los puertos; canales de acceso y areas de flotacion. Technical report, .
- Hendricks, S. L. (2006). *Advanced Dynamics*. .
- J., B., M., A., A., G., H., H., C., A., J., V., C., P., L., M., F., C., P., W., and M., M. (2016). *Atlas de Oleaje de Chile*. Universidad de Valparaíso.
- J. Peraire, S. W. (2008). Lecture l26-3d rigid body dynamics: The inertia tensor. Technical report, Massachusetts Institute of Technology.
- Journée, J. and Massie, W. (2001). Offshore hydromechanics first edition. Technical report, Delft University of Technology.
- Meteoblue (2023a). Datos climáticos y meteorológicos históricos simulados para Punta Arenas.
- Meteoblue (2023b). Datos climáticos y meteorológicos históricos simulados para Quintero.

- Ministerio de Obras Públicas, D. d. O. P. (2013a). Guía de diseño, construcción, operación y conservación de obras marítimas y costeras. volumen 1: Introducción.
- Ministerio de Obras Públicas, D. d. O. P. (2013b). Guía de diseño, construcción, operación y conservación de obras marítimas y costeras. volumen 4: Operación, volumen 5: Anexos.
- Nikraves, P. E. (2019). *Planar Multibody Dynamics Formulation, Programming with MATLAB, and Applications*. CRC Press.
- Ribeiro, M. A., Tusset, A. M., Lenz, W. B., and Balthazar, J. M. (2021). Dynamic analysis of the non-linear behavior of an ocean buoy for energy harvesting. *European Physical Journal: Special Topics*, 230:3599–3602.
- Shabana, A. A. (2005). *Dynamics of multibody systems*. Cambridge University Press.
- Shabana, A. A. (2010). *Computational dynamics*. John Wiley Sons.
- Vivanco Font, E. J. (2022). Zonas de sacrificio en Chile: Quintero-Puchuncaví, Coronel, Mejillones, Tocopilla y Huasco. Componente industrial y salud de la población.
- Zhu, X. and Yoo, W. S. (2016). Dynamic analysis of a floating spherical buoy fastened by mooring cables. *Ocean Engineering*, 121:462–471.