



UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Obras Civiles

ANÁLISIS COMPARATIVO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA MODELACIÓN DE FENÓMENOS EN DINÁMICA DE FLUIDOS: UN ESTUDIO DE SENSIBILIDAD, CONVERGENCIA Y COSTO COMPUTACIONAL

Memoria de Título presentada por

Felipe Ignacio Meléndez Acevedo

como requisito parcial para optar al título de la carrera de

Ingeniería Civil

Profesor Guía
Vivian Clarisa Aranda Núñez

28 DE OCTUBRE DE 2025



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): Memoria o trabajo de título; Tesis de Postgrado;

Título del trabajo: "Análisis comparativo de métodos numéricos para la modelación de fenómenos en dinámica de fluidos: un estudio de sensibilidad, convergencia y costo computacional"

Nombre del candidato(a): Felipe Ignacio Meléndez Acevedo

Carrera / Grado: Ingeniería Civil

Campus: Casa Central Valparaíso ; **Departamento:** Ingeniería Civil

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Vivian Clarisa Aranda Núñez, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL

El trabajo **NO contiene información que amerite confidencialidad** y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.


El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (embargo) por:

6 meses; 12 meses; 2 años; 3 años; 5 años; 10 años


Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 28/10/2025 ; Firma: 

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 28/10/2025 ; Firma: 

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

ANÁLISIS COMPARATIVO DE MÉTODOS NUMÉRICOS PARA LA MODELACIÓN DE FENÓMENOS EN DINÁMICA DE FLUIDOS: UN ESTUDIO DE SENSIBILIDAD, CONVERGENCIA Y COSTO COMPUTACIONAL

Felipe Ignacio Meléndez Acevedo¹, Vivian Clarisa Aranda Núñez¹,

¹ Universidad Técnica Federico Santa María

Resumen

En la presente memoria de titulación se evalúan y comparan los rendimientos de tres métodos numéricos (diferencias finitas, elementos finitos y volúmenes finitos) aplicado a una situación de flujo laminar dentro del marco de la dinámica de fluidos computacional, con el objetivo de establecer criterios adecuados de selección y aplicación de estos métodos para el modelado CFD.

En primer lugar, se validó el software comercial Ansys Fluent como herramienta de calibración de los códigos finales mediante el modelado CFD a escala 1:1 de un canal abierto de laboratorio con vertedero de Ogee, para obtener los parámetros experimentales de calibración, se contó con el apoyo del equipamiento presente en el campus San Joaquín de la UTFSM. Se obtuvieron resultados que validan que este software simula de manera precisa las presiones y alturas de agua obtenidas en la muestra experimental.

Luego, se procedió a modelar la situación física Cavity Flow con un número de Reynolds=100 (flujo laminar) mediante los métodos de diferencias finitas, elementos finitos, y volúmenes finitos en lenguaje de programación Matlab. Los valores obtenidos fueron validados con un modelo CFD de la cavidad realizado en Ansys Fluent, obteniendo resultados que señalan que el método de volúmenes finitos presentó mejor afinidad a los datos teóricos con tiempos de iteración y número de iteraciones menores. Por otra parte, el método de elementos finitos presentó buenos resultados en cuanto a velocidades, pero no se ajustó correctamente a la modelación de las presiones, mientras que el método de diferencias finitas presentó resultados bien calibrados en presiones y velocidades, sin embargo, necesitó de tiempos mayores de cálculo para trabajar con mallados más finos, y así, obtener mejor precisión en la respuesta, comportamiento que no se presentó en el método de volúmenes finitos.

Palabras claves: CFD, Ansys Fluent, elementos finitos, volúmenes finitos, diferencias finitas, cavity flow.

Abstract

In the present undergraduate thesis, the performance of three numerical methods (finite differences, finite elements, and finite volumes) is evaluated and compared for a laminar flow situation within the framework of computational fluid dynamics (CFD), with the objective of establishing appropriate criteria for the selection and application of these methods in CFD modeling.

First, the commercial software ANSYS Fluent was validated as a calibration tool for the final codes through a 1:1 CFD model of an open-channel laboratory setup with an Ogee spillway. To obtain the experimental calibration parameters, the equipment available at the San Joaquín campus of UTFSM was used. The

results confirmed that the software accurately reproduces the pressures and water depths measured in the experimental setup.

Subsequently, the physical problem of cavity flow with a Reynolds number of 100 (laminar flow) was modeled using the finite difference, finite element, and finite volume methods implemented in the MATLAB programming language. The results obtained were validated against a CFD cavity model developed in ANSYS Fluent. The comparison showed that the finite volume method exhibited the closest agreement with theoretical data, while also requiring fewer iterations and shorter computation times. On the other hand, the finite element method produced good results in terms of velocity fields but did not accurately capture the pressure distribution, whereas the finite difference method yielded well-calibrated pressure and velocity results; however, it required significantly longer computation times to handle finer meshes and achieve improved accuracy—an issue that was not observed with the finite volume method.

Keywords: CFD; ANSYS Fluent; finite element method; finite volume method; finite difference method; cavity flow.

Agradecimientos

Quisiera agradecer profundamente a todos quienes, sin importar la magnitud, complementaron, aportaron y enriquecieron enormemente mi desarrollo como profesional y, sobre todo, como persona.

Partir agradeciendo a mi familia, a mis padres Mary y Jaime por entregarse completamente a mi educación y a mi crianza, los amo por sobre todas las cosas y sé que siempre estarán para mi cuando los necesite, así como yo también estaré para ellos con todo lo que puede dar mi corazón. Agradecer también a mis hermanos Daniel y Sebastián, a quienes amo y respeto desde el fondo de mi corazón y velaré siempre por su seguridad y salud. Agradecer a mi tías Alys y Roxana, a mis primos Sophía, Samuel y Romina, a mi tío Gabriel, a mi yayita y a mi familia paterna, quienes han sido parte muy importante e influyente en mi formación como ciudadano y profesional, les debo mucho a todos ellos ya que siempre me han apoyado y espero sigamos teniendo el vínculo que nos caracteriza como familia. Agradezco profundamente también a mi polola Paloma, quién llegó a mi vida en el cierre de mi carrera universitaria y fue parte fundamental en un momento de mi vida bastante complejo en lo emocional, vivir tantas emociones acompañado de una persona tan bella es realmente impagable. ¡Los amo profundamente a todos!

Agradecer también a todos los amigos que formé en mi etapa universitaria, no quiero nombrarlos a todos para no dejar fuera a nadie, pero ellos saben quienes son y me gustaría dedicarles nada más que palabras de gratitud y de alegría de haber podido iniciar y concluir mi vida universitaria con su compañía, fue verdaderamente un placer y un honor haber compartido con ustedes tantos momentos alegres, tristes y melancólicos a veces, sin ustedes no hubiese sido tan llevadero.

Agradezco profundamente a mi profesora guía Vivian Aranda, quién me recibió como memorista el año 2024 con una idea muy vaga, pero me fue nutriendo con su conocimiento día a día hasta llegar al tema que abarca la presente investigación. Todos los logros y oportunidades a los que he podido acceder en términos profesionales se los debo en gran parte a ella, pero sin lugar a dudas, lo que más caracteriza a la profesora es su increíble vocación de enseñar y así también su preocupación por el bienestar del estudiante. Ella además de entregarte una buena educación te entrega valores importantísimos para ser, además de un excelente profesional, una muy buena persona.

Dedicatoria

Finalmente, agradecer a quienes fueron y siguen siendo el motor de mi vida, a quienes me criaron desde chiquitito, a quienes les debo más de una vida, a quienes los amé, los amo y los seguiré amando por siempre, a mis viejitos Ronaldo y Rosa, esta memoria va en su nombre y les escribo estas palabras con mucha emoción y tristeza, ya que lo que más quería es que pudiesen verme en estos momentos, los extraño más que nunca. Para ellos va dirigida y dedicada esta memoria.

Índice

1. Introducción	16
2. Objetivos y Metodología	16
2.1. Objetivo General	16
2.2. Objetivos Específicos	17
2.3. Metodología General	17
2.4. Metodología Específica	17
3. Marco Teórico	19
3.1. Dinámica de fluidos computacional	19
3.2. Expresiones matemáticas que dominan el fenómeno	20
3.2.1. Teorema de transporte de Reynolds (Çengel, 2018)	20
3.2.2. Conservación de la masa (Çengel, 2018)	21
3.2.3. Ecuación de conservación del momento (Çengel, 2018)	23
3.2.4. Ecuación de Navier-Stokes (Çengel, 2018)	25
3.3. Ecuación de conservación de una cantidad escalar ϕ	28
3.4. Formulación velocidad-presión para flujo incompresible: ecuación de Poisson	29
3.5. Métodos numéricos aplicables	31
3.5.1. Nomenclatura	31
3.5.2. Método de diferencias finitas	31
3.5.3. Método de elementos finitos	34
3.5.4. Método de volúmenes finitos	37
3.6. Modelación de flujo turbulento	40
3.7. Modelación de flujo bifásico agua - aire	42
3.8. Conceptos de hidráulica general	43
3.8.1. Flujo en canal abierto	43
3.8.2. Número de Reynolds	43
3.8.3. Teoría de vertederos	43

3.8.4. Vertedero de Pared Delgada	44
3.8.5. Vertedero Frontal Tipo Ogee	45
3.9. Herramientas aplicables al modelado CFD	45
3.9.1. Matlab	45
3.9.2. Ansys Fluent	46
3.9.3. OpenFOAM	46
3.10. Criterios para el análisis de desempeño del modelo	46
3.10.1. RSR (Error cuadrático medio relativo)	46
3.10.2. NSE (Nash Sutcliffe Error)	47
4. Validación de Ansys Fluent como Herramienta de Calibración	47
4.1. Modelo del vertedero en Ansys Fluent	48
4.1.1. Definición de la geometría	48
4.1.2. Mallado	49
4.1.3. Configuraciones del modelo	50
4.1.4. Condiciones de borde	51
4.1.5. Resultados modelo vertedero	51
4.2. Validación mediante muestras de laboratorio	52
4.2.1. Equipamiento	52
4.3. Procedimiento de medición	52
4.4. Comparación de resultados	53
4.4.1. Validación eje hidráulico	53
4.4.2. Validación presiones	55
4.5. Análisis de resultados modelo vertedero de Ogee en Ansys Fluent	57
5. Modelación Cavity Flow	58
5.1. Definición del problema físico	58
5.2. Modelación en Ansys Fluent	58
5.2.1. Geometría de la cavidad	59
5.2.2. Mallado	59

5.2.3. Configuraciones del modelo	60
5.2.4. Condiciones de borde	61
5.2.5. Resultados modelo Cavity Flow en Ansys Fluent	61
5.3. Modelación mediante el Método de Diferencias Finitas (Barba & Forsyth, 2013)	62
5.3.1. Discretización de las Ecuaciones en Diferencias Finitas	62
5.3.2. Codificación en Matlab	65
5.4. Modelación mediante el Método de Elementos Finitos	66
5.4.1. Ecuaciones diferenciales parciales	66
5.4.2. Problema de flujo confinado en una cavidad	68
5.4.3. Elementos isoparamétricos y funciones de forma	68
5.4.4. Aproximación de Galerkin	71
5.4.5. Derivadas e integrales usando coordenadas locales	80
5.4.6. Cálculo de la matriz Jacobiana	81
5.5. Cuadratura de Gauss	83
5.6. Desarrollo de la matriz elemental	84
5.6.1. Ensamblaje	88
5.6.2. Método de Picard	89
5.7. Modelación mediante el Método de Volúmenes Finitos	91
5.7.1. Esquema de diferencias centradas	91
5.7.2. Iteración de tiempo	92
5.7.3. Corrección de presiones y velocidades	92
5.7.4. Corrección de velocidades	93
5.7.5. Codificación	93
6. Resultados y Análisis	94
6.1. Resultados Cavity Flow en diferencias finitas	94
6.2. Análisis de resultados modelo diferencias finitas	97
6.3. Resultados Cavity Flow en elementos finitos	98
6.4. Análisis de resultados modelo elementos finitos	100

6.5. Resultados Cavity Flow en volúmenes finitos	101
6.6. Análisis de resultados modelo volúmenes finitos	104
7. Conclusiones y Recomendaciones	105
7.1. Comparación métodos numéricos	105
7.2. Recomendaciones y criterios	107
8. Referencias	109
A. Demostración discretización en volúmenes finitos: caso bidimensional	111
B. Resultados modelo vertedero para distintos caudales	112
C. Comparación de caudales ANSYS v/s Laboratorio	116
D. Comparación gráfica eje hidráulico para distintos caudales	117
E. Función para Calcular el Término B de la Ecuación de Poisson	119
F. Función que Calcula la Presión mediante la Ecuación de Poisson	119
G. Script General Cavity Flow en Diferencias Finitas	120
H. Script General Cavity Flow en Volúmenes Finitos	123

Índice de figuras

2.1. Diagrama de flujo metodología aplicada	17
3.1. Aproximación Continua y Discreta	20
3.2. Tensor de Esfuerzos Sobre el Volumen de Control	23
3.3. Grilla Método Diferencias Finitas	32
3.4. Discretización del Dominio Método Elementos Finitos.	34
3.5. Malla típica MVF	38
3.6. Arreglo Colocado	38
3.7. Flujo Turbulento	41
3.8. Flujo bifásico (interacción agua - aire)	42
3.9. Ejemplo de canal abierto	43
3.10. Vertedero de pared delgada.	45
3.11. Vertedero de tipo Ogee y su relación con el vertedero de pared delgada.	45
4.1. Vertedero de Ogee en canal abierto de laboratorio	48
4.2. Geometría vertedero de Ogee, unidades en [cm]	48
4.3. Geometría vertedero de Ogee en Ansys Design Modeler	49
4.4. Mallado del dominio computacional	49
4.5. Named selections generados	50
4.6. Diagrama de presiones, $Q=8$ [L/s]	51
4.7. Diagrama de velocidades, $Q=8$ [L/s]	51
4.8. Eje hidráulico, $Q=8$ [L/s]	52
4.9. Vertedero tipo Ogee S6-23	52
4.10. Distribución espacial de sensores en mm	53
4.11. Medición de cotas piezométricas	53
4.12. Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 1, $Q= 3$ [L/s]	54
4.13. Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 2, $Q= 3$ [L/s]	54
4.14. Presión medida en laboratorio	55
4.15. Presiones calculadas en Ansys	56

4.16. Comparación distribución de presiones para distintos caudales	56
5.1. Representación Cavity Flow y Condiciones de Contorno	58
5.2. Geometría cavidad en DesignModeler	59
5.3. Mallado cavidad en Meshing	59
5.4. Named selections	60
5.5. Líneas de corriente en la cavidad	61
5.6. Vectores de velocidad en la cavidad	61
5.7. Velocidades en la cavidad	62
5.8. Presiones en la cavidad	62
5.9. Elemento de 8 nodos	69
6.1. Resultados líneas de corriente para los dos casos de mallado	94
6.2. Resultados campo de vectores para los dos casos de mallado	95
6.3. Resultados velocidades para los dos casos de mallado	95
6.4. Resultados presiones para los dos casos de mallado	96
6.5. Comparación de velocidades caso mallado 101x101	96
6.6. Comparación de velocidades caso mallado 201x201	97
6.7. Resultados campo de vectores para los dos casos de mallado	98
6.8. Resultados velocidades para los dos casos de mallado	99
6.9. Comparación de velocidades caso mallado 10x10	99
6.10. Comparación de velocidades caso mallado 201x201	100
6.11. Resultados líneas de corriente para los dos casos de mallado	101
6.12. Resultados campo de vectores para los dos casos de mallado	102
6.13. Resultados velocidades para los dos casos de mallado	102
6.14. Resultados presiones para los dos casos de mallado	103
6.15. Comparación de velocidades caso mallado 101x101	103
6.16. Comparación de velocidades caso mallado 201x201	104
7.1. Comparación tiempos de iteración	106
7.2. Comparación criterio NSE	106
7.3. Comparación criterio velocidades en la mitad de la cavidad	107

7.4. Ventajas y desventajas métodos numéricos	107
B.1. Diagrama de presiones, $Q=12$ [L/s]	112
B.2. Diagrama de velocidades, $Q=12$ [L/s]	112
B.3. Eje hidráulico, $Q=12$ [L/s]	113
B.4. Diagrama de presiones, $Q=5$ [L/s]	113
B.5. Diagrama de velocidades, $Q=5$ [L/s]	113
B.6. Eje hidráulico, $Q=5$ [L/s]	114
B.7. Diagrama de presiones, $Q=3$ [L/s]	114
B.8. Diagrama de velocidades, $Q=3$ [L/s]	114
B.9. Eje hidráulico, $Q=3$ [L/s]	115
B.10. Diagrama de presiones, $Q=2$ [L/s]	115
B.11. Diagrama de velocidades, $Q=2$ [L/s]	115
B.12. Eje hidráulico, $Q=2$ [L/s]	116
C.1. Comparación distribución de presiones para distintos caudales	116
C.2. Comparación distribución de presiones para distintos caudales	117
C.3. Comparación distribución de presiones para distintos caudales	117
D.1. Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 1, $Q= 12$ [L/s]	117
D.2. Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 2, $Q= 12$ [L/s]	118
D.3. Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 1, $Q= 8$ [L/s]	118
D.4. Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 2, $Q= 8$ [L/s]	118
D.5. Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 1, $Q= 5$ [L/s]	118
D.6. Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 2, $Q= 5$ [L/s]	119
D.7. Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 1, $Q= 2$ [L/s]	119
D.8. Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 2, $Q= 2$ [L/s]	119

Índice de tablas

3.1. Tipos de vertederos más comunes y sus coeficientes de gasto. Fuente: (Mery, 2013)	44
3.2. Clasificación del desempeño basada en el valor de RSR. Fuente: (Gupta et al., 2009)	47
3.3. Clasificación del desempeño basada en el valor de NSE. Fuente: (Gupta et al., 2009)	47
4.1. Resultados validación eje hidráulico. Fuente: Elaboración propia.	55
4.2. Resultados validación presiones. Fuente: Elaboración propia	57
6.1. Resultados criterios de desempeño código de diferencias finitas para un $Re=100$	97
6.2. Resultados criterios de desempeño código de elementos finitos para un $Re=100$	100
6.3. Resultados criterios de desempeño código de volúmenes finitos para un $Re=100$	104
7.1. Comparación métodos numéricos	105

Glosario de variables

Símbolo	Descripción
A	Área [m ²].
$[A^e]$	Matriz elemental MEF
$a(\cdot, \cdot)$	Forma bilineal en la formulación débil (MEF).
a_E, a_W, a_N, a_S	Coefficientes MVF asociados a celdas vecinas (Este, Oeste, Norte y Sur).
a_P	Coefficiente central MVF (discretización).
a_P^0	Coefficiente temporal MVF (término transiente).
b	Propiedad intensiva por unidad de masa B/m en el Teorema de Transporte de Reynolds (RTT).
B	Ancho del canal [m].
B_{sist}	Propiedad extensiva del sistema B .
C_μ	Constante empírica del modelo $k - \varepsilon$.
$C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}, C_{3\varepsilon}$	Constantes empíricas del modelo realizable $k - \varepsilon$.
C_Q	Coefficiente de gasto adimensional del vertedero.
dA	Elemento diferencial de área [m ²].
dm	Elemento diferencial de masa [kg].
dV	Elemento diferencial de volumen [m ³].
D_+, D_-, D_o	Operadores de diferencia finita hacia adelante, hacia atrás y centrada.
D_e, D_w, D_n, D_s	Coefficientes difusivos MVF en caras Este, Oeste, Norte y Sur.
F_e, F_w, F_n, F_s	Flujos advectivos MVF en caras Este, Oeste, Norte y Sur.
f	Función fuente en el problema de valores de borde (MEF).
f_ϕ	Transporte total de ϕ por convección/difusión y fuentes/sumideros.
g	Aceleración de gravedad [m/s ²].
g_x, g_y, g_z	Componentes cartesianas de la gravedad [m/s ²].
\vec{g}	Vector gravedad [m/s ²].
\vec{G}	Campo vectorial utilizado en el teorema de Gauss.
h	Paso espacial en diferencias finitas [m].
H_1	Carga total aguas arriba del vertedero [m].
\tilde{I}	Matriz identidad.
i, j	Índices espaciales de grilla (discretización).
J_x, J_y	Flujos totales en x e y para la ecuación escalar.
k	Energía cinética turbulenta [m ² /s ²].
$[K]$	Matriz de global en MEF.
L	Longitud característica o longitud del canal (según contexto) [m].
$\mathcal{L}(\vec{V})$	Operador lineal difusivo (según definición adoptada).
$L^2(\Omega)$	Espacio de Lebesgue de funciones cuadrado-integrables.
m	Masa [kg].
\mathbb{M}	Variable genérica (en propiedad de derivadas).

Continúa en la siguiente página

Símbolo	Descripción
n	Número de datos (MSE/RMSE/NSE/RSR) o índice temporal (según contexto).
M_i	Funciones de forma/interpolación lineal de 4 nodos en MEF.
N_i	Funciones de forma/interpolación cuadrática de 8 nodos en MEF.
\vec{n}	Vector unitario normal a la superficie de control.
$\mathcal{N}(\vec{V})$	Operador no lineal convectivo (según definición adoptada).
\mathcal{P}	Número de Peclet (adimensional).
$\mathcal{P}_e, \mathcal{P}_w, \mathcal{P}_n, \mathcal{P}_s$	Números de Peclet por cara (Este, Oeste, Norte, Sur).
P	Presión [Pa].
P	Altura de la cresta del vertedero [m].
P_k	Producción de energía turbulenta por gradientes de velocidad.
P_b	Producción de turbulencia por flotación.
q	Caudal por unidad de ancho [$\text{m}^3/\text{s}/\text{m}$].
Q	Caudal [m^3/s].
Q_d	Caudal de diseño [m^3/s].
S	Término fuente (ecuación escalar / MVF, según contexto).
\bar{S}	Fuente promediada en MVF (según discretización).
S_0	Pendiente del fondo (adimensional).
S_k	Fuente del usuario para la ecuación de k .
S_ε	Fuente del usuario para la ecuación de ε .
SC	Superficie de control.
t	Tiempo [s].
u, v, w	Componentes cartesianas de la velocidad [m/s].
u_j	Componente j de la velocidad media (notación indicial) [m/s].
\vec{U}^e	Vector incógnitas elemental.
U_{ij}^n	Incógnita discreta en el nodo (i, j) al tiempo n (DF).
\vec{U}	Vector de velocidad (VOF: fase líquida) [m/s]
\vec{U}_*	Vector de incógnitas (MEF), según contexto. [m/s]
\vec{U}_g	Vector de velocidad de la fase gaseosa (VOF) [m/s].
\vec{V}	Vector velocidad del fluido [m/s].
VC	Volumen de control.
\mathbb{V}	Volumen genérico [m^3].
x, y, z	Coordenadas cartesianas [m].
x_j	Coordenada j (notación indicial).
$x_{s,t}$	Dato simulado en el instante t .
$x_{o,t}$	Dato observado en el instante t .
Y_M	Término de disipación por fluctuaciones compresibles (modelo turbulento).
$1 - \alpha$	Fracción de volumen de la fase gaseosa (VOF) (adimensional).
α	Fracción de volumen de la fase líquida (VOF) (adimensional): $\alpha = 1$ líquido, $\alpha = 0$ gas, $0 < \alpha < 1$ interfase.
α_i	Cantidad escalar cualquiera.

Continúa en la siguiente página

Símbolo	Descripción
Δt	Paso temporal [s].
$\Delta x, \Delta y$	Tamaños de celda (pasos espaciales) [m].
$(\delta x)_e, (\delta x)_w$	Distancias asociadas a caras/celdas en MVF (dirección x).
$(\delta y)_n, (\delta y)_s$	Distancias asociadas a caras/celdas en MVF (dirección y).
ε	Tasa de disipación turbulenta [m^2/s^3].
ε_{ij}	Componentes del tensor de razón de deformación.
$\tilde{\varepsilon}$	Tensor de razón de deformación (tasa de deformación).
Γ	Coefficiente de difusión (masa/calor) asociado a ϕ (según contexto).
$\Gamma_e, \Gamma_w, \Gamma_n, \Gamma_s$	Difusividades en caras del MVF (según discretización).
μ	Viscosidad dinámica [Pa s].
μ_t	Viscosidad turbulenta [Pa s].
μ_o	Media de los datos observados.
∇	Operador nabla.
$\nabla \cdot (\cdot)$	Divergencia.
$\nabla^2(\cdot)$	Laplaciano.
ρ	Densidad del fluido [kg/m^3].
σ_{ij}	Componentes del tensor de esfuerzos total.
$\tilde{\sigma}$	Tensor de esfuerzos total.
$\sigma_k, \sigma_\varepsilon$	Números de Prandtl turbulentos para k y ε .
σ_o^2	Varianza de los datos observados.
$\Sigma \vec{F}$	Sumatoria de fuerzas sobre el volumen de control.
τ_{ij}	Componentes del tensor de esfuerzos viscosos.
$\tilde{\tau}$	Tensor de esfuerzos viscosos.
Φ	Cantidad extensiva asociada a ϕ .
ϕ	Cantidad escalar general (variable de transporte).

Glosario de siglas

Sigla	Descripción
CFD	<i>Computational Fluid Dynamics</i> . Dinámica de Fluidos Computacional.
DF	Diferencias Finitas.
EDP	Ecuaciones Diferenciales Parciales.
FE	<i>Finite Element</i> . Elemento finito.
FFT	<i>Fast Fourier Transform</i> . Transformada Rápida de Fourier.
FVM	<i>Finite Volume Method</i> . Método de Volúmenes Finitos.
MEF	Método de Elementos Finitos.
MDF	Método de Diferencias Finitas.
MVF	Método de Volúmenes Finitos.
MSE	<i>Mean Squared Error</i> . Error cuadrático medio.
NSE	<i>Nash–Sutcliffe Efficiency</i> . Coeficiente de eficiencia de Nash–Sutcliffe.
ODE	<i>Ordinary Differential Equation</i> . Ecuación Diferencial Ordinaria.
PDE	<i>Partial Differential Equation</i> . Ecuación Diferencial Parcial.
Re	Número de Reynolds.
RMSE	<i>Root Mean Squared Error</i> . Raíz del error cuadrático medio.
RSR	<i>Root Mean Square Error Ratio</i> . Error cuadrático medio relativo.
RTT	<i>Reynolds Transport Theorem</i> . Teorema de Transporte de Reynolds.
SOR	<i>Successive Over-Relaxation</i> . Método iterativo de sobrerrelajación sucesiva.
TDMA	<i>TriDiagonal Matrix Algorithm</i> . Algoritmo para matrices tridiagonales.
VOF	<i>Volume of Fluid</i> . Método de fracción de volumen para flujo multifásico.
VC	Volumen de Control.
SC	Superficie de Control.
2D	Bidimensional.
3D	Tridimensional.

1. Introducción

El diseño y análisis de las estructuras hidráulicas requieren modelos precisos (Chow, 1988) para predecir los parámetros asociados al flujo, como pueden ser las velocidades, presiones y líneas de flujo. Estos parámetros son fundamentales para garantizar la seguridad y eficiencia al momento de dimensionar y diseñar obras hidráulicas.

La mecánica de fluidos corresponde a la ciencia que estudia el comportamiento de los parámetros físicos del flujo en distintas situaciones. Sin embargo, cuando el fluido en estudio se encuentra en movimiento, nace lo que se conoce como la dinámica de fluidos.

Para estimar los parámetros del flujo, se debe dar solución a las ecuaciones diferenciales parciales que controlan el fenómeno (Çengel, 2018), tales como las ecuaciones de conservación de masa y la conservación del momento lineal. Estas ecuaciones se pueden resolver, o bien, analíticamente, es decir, encontrando una solución empírica para el fenómeno, o mediante la aplicación de técnicas de resolución numérica, a esta última se le denomina Dinámica de Fluidos Computacional, o por su abreviatura en inglés CFD.

La modelación CFD ofrece diversas ventajas, entre las cuáles se encuentra la capacidad de resolver ecuaciones diferenciales parciales o EDP, como es la ecuación de Navier – Stokes, ahorrando costo de cálculo humano y reemplazándolo por iteraciones realizadas en una computadora. Además, permite dar solución a fenómenos físicos que no poseen hasta el momento solución analítica, como es el caso de la situación “Flujo en una Cavidad” o más conocida como “Cavity Flow”.

Se han desarrollado diversas herramientas tecnológicas de software para desarrollar modelos numéricos CFD, cuyos programas utilizan diversos métodos numéricos para realizar las simulaciones. Sin embargo, es importante que el usuario que realice la modelación, comprenda correctamente todos los conceptos asociados tanto al tipo de fenómeno que está abarcando, como a las herramientas computacionales y los métodos numéricos aplicables. Es en este contexto donde aparecen las siguientes preguntas de investigación: ¿Cómo elegir el método numérico adecuado para abordar el problema específico que se está trabajando? ¿Qué consideraciones debiese tener el usuario al momento de realizar una modelación en dinámica de fluidos computacional? ¿Cómo se comportan la convergencia, sensibilidad y el costo computacional de los distintos métodos numéricos al modelar la misma situación física?

A raíz de estas preguntas la presente investigación se centra en analizar y comparar los métodos numéricos de diferencias finitas (Pozrikidis, 2001), elementos finitos (Löhner, 2001) y volúmenes finitos (Patankar, 1980; Astroza, 2017) , mediante la modelación de la situación “Cavity Flow”, analizando su convergencia, sensibilidad y costo computacional, para así establecer criterios adecuados para la modelación CFD de fenómenos físicos asociados a la dinámica de fluidos, contribuyendo así al adecuado y eficiente uso de estas herramientas.

2. Objetivos y Metodología

2.1. Objetivo General

Establecer ventajas y desventajas de distintos métodos numéricos para la modelación matemática aplicada a la dinámica de fluidos, mediante el análisis de la variación del error y del costo computacional de cada uno, con el fin de mejorar los criterios para la aproximación numérica y reducir la incertidumbre para este tipo de fenómenos a nivel teórico.

2.2. Objetivos Específicos

- Verificar la aplicabilidad del software comercial Ansys Fluent como herramienta de validación mediante la modelación de un canal abierto con vertedero de Ogee, asegurando que los resultados obtenidos coincidan con datos experimentales.
- Diseñar programas con distintos métodos numéricos, tales como, Diferencias Finitas, Elementos Finitos y Volúmenes Finitos, para el problema “Cavity Flow”, explorando estrategias de optimización computacional para reducir el costo de simulación sin sacrificar la precisión en los resultados obtenidos.
- Validar los distintos modelos numéricos utilizando la herramienta Ansys Fluent.
- Establecer criterios para la selección del método numérico adecuado que represente una aproximación confiable y eficaz para problemas físicos asociados a la dinámica de fluidos, mediante el análisis de la sensibilidad y la evaluación de la convergencia de los programas diseñados.

2.3. Metodología General

A continuación, se presenta en la figura 2.1 un diagrama de flujo donde se ven representadas gráficamente las fases metodológicas y sus diversas actividades asociadas:

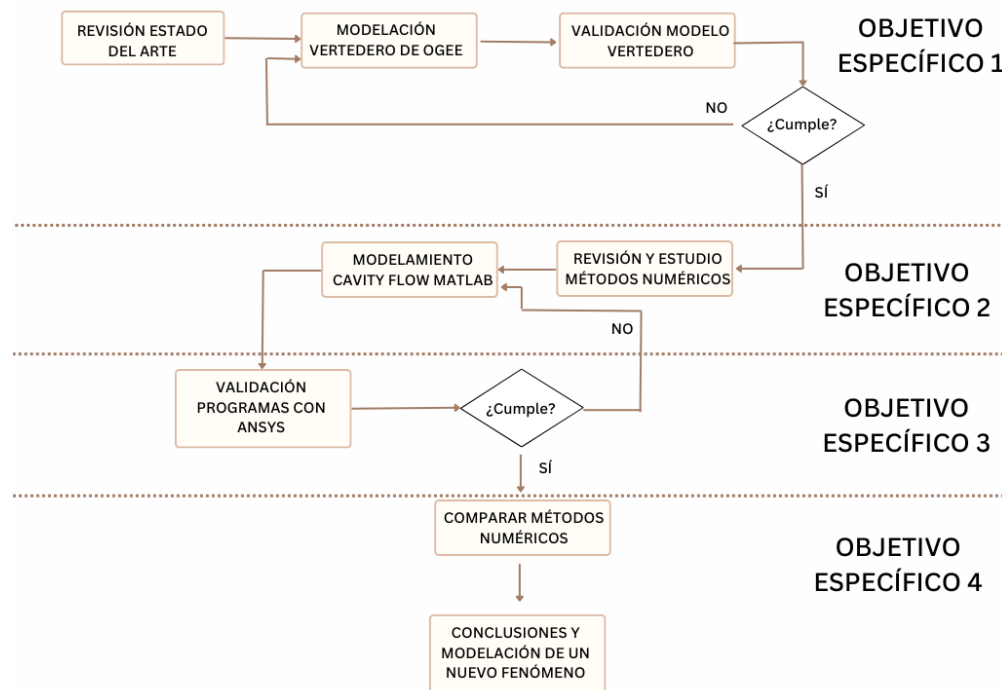


Figura 2.1: Diagrama de flujo metodología aplicada

Fuente: Elaboración Propia

2.4. Metodología Específica

A continuación, se detallan las fases metodológicas asociadas a cada objetivo específico, junto con el planeamiento de actividades para cada etapa:

OE1: Verificar la aplicabilidad del software comercial Ansys Fluent como herramienta de validación mediante la modelación de un canal abierto con vertedero de Ogee, asegurando que los resultados obtenidos coincidan con datos experimentales.

Fases metodológicas:

1. Revisión del Estado del Arte y Formulación del Marco Teórico.

- Estudiar expresiones matemáticas que controlan la dinámica de fluidos.
- Investigar las herramientas computacionales disponibles para la modelación CFD.
- Estudiar conceptos de hidráulica de canales abiertos, teoría de vertederos, modelación de turbulencia y modelación de flujo bifásico (interacción agua-aire).

2. Modelación Numérica del Vertedero de Ogee.

- Modelar vertedero de Ogee en canal abierto de laboratorio en Ansys Fluent.
- Obtener presiones, velocidades y altura de pelo de agua.

3. Validación del Modelo con Ensayos de Laboratorio.

- Definir los ensayos necesarios para validar el modelo.
- Ejecutar ensayos de laboratorio.
- Validar presiones y eje hidráulico del modelo utilizando los datos obtenidos en laboratorio.

OE2: Diseñar programas con distintos métodos numéricos, tales como Diferencias Finitas, Elementos Finitos y Volúmenes Finitos, para el problema “Cavity Flow”, explorando estrategias de optimización computacional para reducir el costo de simulación sin sacrificar la precisión en los resultados obtenidos.

Fases metodológicas:

1. Revisión y Estudio de Métodos Numéricos Aplicables (Elementos Finitos, Volúmenes Finitos y Diferencias Finitas).

- Lectura y Estudio Método de Diferencias Finitas.
- Lectura y Estudio Método de Elementos Finitos.
- Lectura y Estudio Método de Volúmenes Finitos.

2. Modelamiento del Fenómeno Cavity Flow con Distintos Métodos Numéricos en Matlab.

- Modelación Fenómeno “Cavity Flow” en Diferencias Finitas, Elementos Finitos y Volúmenes Finitos.
- Estimación de Presiones y Velocidades de los modelos.
- Aplicación de Estrategias para Optimizar los Programas (Paralelización de Códigos, Uso de GPU digitales, entre otros).

OE3: Validar los distintos modelos numéricos utilizando la herramienta Ansys Fluent.

Fases metodológicas:

1. Validación de los Programas con Ansys Fluent.

- Desarrollar el modelo Cavity Flow en Ansys Fluent.
- Validar las presiones y velocidades de los programas generados, analizando el error y aplicando criterios NSE y RSR.

OE4: Establecer criterios para la selección del método numérico adecuado que represente una aproximación confiable y eficaz para problemas físicos asociados a la dinámica de fluidos, mediante el análisis de la sensibilidad y la evaluación de la convergencia de los programas diseñados.

Fases metodológicas:

1. Comparación de los Métodos Numéricos Aplicados.

- Análisis de la convergencia de los códigos.
- Comparación indicadores de error NSE y RSR.
- Comparación del costo computacional.

2. Conclusiones y Modelación de un Nuevo Fenómeno.

- Análisis de los resultados.
- Redacción de las conclusiones.
- Modelación de un nuevo fenómeno de dinámica de fluidos, aplicando criterios y conclusiones obtenidas.

3. Marco Teórico

En el presente capítulo se detallan algunas definiciones teóricas importantes, expresiones matemáticas que controlan la dinámica de los fluidos y algunas herramientas aplicables a la modelación numérica. El objetivo de este capítulo es abordar y desarrollar los conceptos claves para el correcto entendimiento e interpretación de la investigación desarrollada en la presente memoria.

3.1. Dinámica de fluidos computacional

En el contexto de la investigación y análisis de las propiedades físicas de un flujo en movimiento, tales como las velocidades y las presiones, es necesario regirse por las expresiones matemáticas que controlan la mecánica de los fluidos, como son la conservación de la masa y la conservación del momento.

Sin embargo, estas expresiones corresponden a EDP, las cuáles por lo general requieren de un trabajo matemático extenso y complejo para su análisis, llegando en gran parte de los casos, a no poseer una solución analítica para ciertas situaciones de escurrimiento y condiciones de contorno.

A causa de esta desventaja, hace algunos años se comenzó a implementar la dinámica de fluidos computacional, más conocida en inglés por sus siglas CFD (Computational Fluid Dynamics), la cuál se basa en aproximarse a las soluciones de estas expresiones matemáticas mediante métodos numéricos, como las diferencias finitas, elementos finitos y volúmenes finitos. Es decir, discretizar el dominio a uno computacional, y así obtener una aproximación numérica discreta a la ecuación que domina la situación modelada. (Figura 3.1)

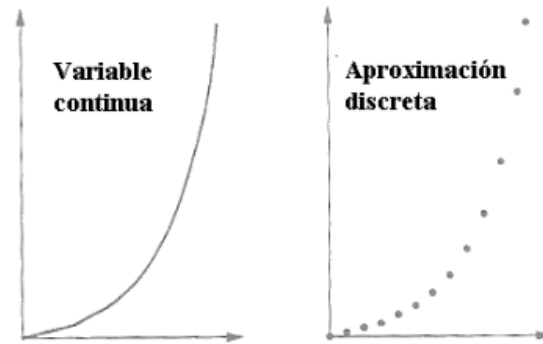


Figura 3.1: Aproximación Continua y Discreta
Fuente: (Sánchez Vázquez, 2004)

Versteeg en 2007 definió lo siguiente (Versteeg & Malalasekera, 2007) *la dinámica de fluidos computacional o CFD es el análisis de sistemas que involucran el flujo de fluidos, transferencia de calor y fenómenos asociados como reacciones químicas, mediante simulación basada en computadoras.*

Una de las principales ventajas de la modelación CFD es la posibilidad de aproximarse a las soluciones más rápidamente, reduciendo de manera considerable los tiempos de investigación, y optimizando los procesos de análisis al prescindir del trabajo matemático requerido para resolver estas expresiones, sustituyéndolo por el trabajo iterativo en una computadora.

3.2. Expresiones matemáticas que dominan el fenómeno

A continuación, se presentan las expresiones matemáticas que modelan las situaciones físicas asociadas a la dinámica de los fluidos:

3.2.1. Teorema de transporte de Reynolds (Çengel, 2018)

La base para todas las ecuaciones de conservación asociadas a la mecánica de fluidos se desprenden del teorema de transporte de Reynolds, el cual relaciona cantidades eulerianas con cantidades langrangeanas. Su expresión general se presenta a continuación:

$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \frac{d}{dt} \int_{VC} (\rho b) dV + \int_{SC} (\rho b) \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (3.1)$$

Donde:

$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt}$: corresponde a la razón de cambio respecto del tiempo de la cantidad de la propiedad B del sistema.

VC: corresponde al volumen de control definido.

SC: corresponde a la superficie de control seleccionada.

ρ : corresponde a la densidad del fluido.

b : corresponde a la propiedad intensiva por unidad de masa B/m.

\mathbb{V} : corresponde a un volumen cualquiera.

A : corresponde a un área cualquiera.

\vec{V} : corresponde al vector velocidad del fluido.

\vec{n} : corresponde al vector unitario en dirección normal a la superficie.

Para un volumen de control rígido y fijo, el VC es constante en el tiempo, por lo que los límites de la integral no dependen del tiempo y la diferenciación se aplica únicamente en la variable densidad, por lo que el teorema de transporte de Reynolds para un volumen de control rígido y fijo se denota de la forma:

$$\frac{dB_{\text{sist}}}{dt} = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\rho b) d\mathbb{V} + \int_{SC} (\rho b) \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (3.2)$$

3.2.2. Conservación de la masa (Çengel, 2018)

Desde la aplicación del teorema de transporte de Reynolds, ecuación 3.2, se puede desprender la siguiente expresión general que define la conservación de la masa aplicada a un volumen de control VC fijo:

$$0 = \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot d\mathbb{V} + \int_{SC} \rho \vec{V} \cdot \vec{n} \cdot dA \quad (3.3)$$

Se trabajará la ecuación 3.3 utilizando el teorema de divergencia, o más conocido como teorema de Gauss, el cual señala lo siguiente:

$$\oint_A \vec{G} \cdot \vec{n} \cdot dA = \int_V \nabla \cdot \vec{G} \cdot d\mathbb{V} \quad (3.4)$$

Si se tiene que $\vec{G} = \rho \vec{V}$, se reemplaza entonces la ecuación 3.4 en 3.3, integrando en el volumen de control seleccionado y se obtiene:

$$0 = \int_{VC} \frac{\partial \rho}{\partial t} \cdot d\mathbb{V} + \int_{VC} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \cdot d\mathbb{V}$$

Juntando las dos integrales en una sola se obtiene:

$$0 = \int_{VC} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] d\mathbb{V}$$

Para que esta última expresión sea verdadera considerando un volumen de control existente y distinto de 0, siendo $d\mathbb{V} = 0$ la solución trivial, se debe cumplir la expresión algebraica encerrada entre corchetes sea 0, lo que se le denomina como la formulación integral (lagrangiana) de la ecuación de conservación de

masa:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0 \quad (3.5)$$

Desarrollando y trabajando la ecuación 3.5:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial(\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\rho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\rho w)}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + u \frac{\partial \rho}{\partial x} + v \frac{\partial \rho}{\partial y} + w \frac{\partial \rho}{\partial z} + \rho \frac{\partial u}{\partial x} + \rho \frac{\partial v}{\partial y} + \rho \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(u \frac{\partial}{\partial x} + v \frac{\partial}{\partial y} + w \frac{\partial}{\partial z} \right) \rho + \rho \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) = 0$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \rho + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.6)$$

Conociendo la definición de derivada material de un escalar ϕ como:

$$\frac{D\phi}{Dt} = \frac{\partial \phi}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \phi \quad (3.7)$$

Reemplazando la ecuación 3.7 en la ecuación 3.6 se obtiene finalmente la formulación diferencial (euleriana) de la ecuación de conservación de la masa:

$$\frac{D\rho}{Dt} + \rho \nabla \cdot \vec{V} = 0 \quad (3.8)$$

Considerando que el fluido a estudiar corresponde a agua líquida, se puede realizar el supuesto que el fluido es incompresible, por lo que la expresión asociada a la derivada material de la densidad se anula:

$$\frac{D\rho}{Dt} = 0$$

Por lo tanto, la ecuación de conservación de la masa para un flujo incompresible y un volumen de control fijo, también denominada comúnmente como la ecuación de continuidad queda expresada por:

$$\begin{aligned} \rho \cdot \nabla \cdot \vec{V} &= 0 \\ \nabla \cdot \vec{V} &= 0 \end{aligned} \quad (3.9)$$

Reescribiendo la expresión en coordenadas cartesianas se obtiene la ecuación de continuidad en coordenadas cartesianas:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \quad (3.10)$$

3.2.3. Ecuación de conservación del momento (Çengel, 2018)

Para comenzar se procede a definir la sumatoria de fuerzas $\Sigma \vec{F}$ en un volumen de control rígido y fijo VC como:

$$\Sigma \vec{F} = \underbrace{\int_{VC} (\rho \vec{g}) dV}_{\text{Fuerzas de Campo}} + \underbrace{\int_{SC} \tilde{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot dA}_{\text{Fuerzas de Superficie}} \quad (3.11)$$

Donde \vec{g} corresponde al vector aceleración de gravedad y $\tilde{\sigma}$ corresponde al tensor de esfuerzos que se generan sobre el volumen de control, como se puede apreciar en la figura 3.2 a continuación:

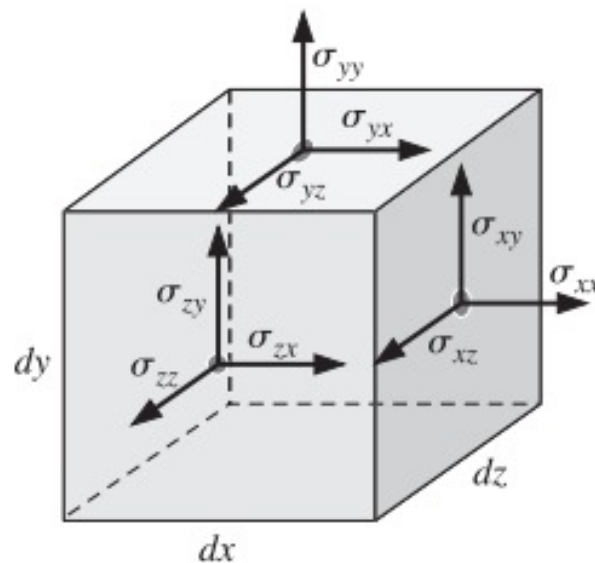


Figura 3.2: Tensor de Esfuerzos Sobre el Volumen de Control
Fuente: Mecánica de Fluidos, Fundamentos y Aplicaciones. (Çengel, 2018)

Aplicando nuevamente el teorema de transporte de Reynolds para el vector $m\vec{V}$ se puede obtener la expresión general para la conservación de cantidad de movimiento en un volumen de control:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \frac{d}{dt} \int_{VC} (\rho \vec{V}) dV + \int_{SC} \rho \vec{V} (\vec{V} \cdot \vec{n}) dA \quad (3.12)$$

Sabiendo que el volumen de control es rígido y fijo:

$$\Sigma \vec{F} = \frac{d}{dt}(m\vec{V}) = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})dV + \int_{SC} \rho\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n})dA \quad (3.13)$$

Juntando las ecuaciones 3.11 y 3.13 se obtiene:

$$\Sigma \vec{F} = \int_{VC} (\rho\vec{g})dV + \int_{SC} \tilde{\sigma} \cdot \vec{n} \cdot dA = \int_{VC} \frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V})dV + \int_{SC} \rho\vec{V}(\vec{V} \cdot \vec{n})dA \quad (3.14)$$

Utilizando nuevamente el teorema de la divergencia presentado en la ecuación 3.4, reemplazando el término \vec{G} por el tensor de segundo orden $(\rho\vec{V})\vec{V}$ se obtiene:

$$\int_{SC} (\rho\vec{V})\vec{V} \cdot \vec{n}dA = \int_{VC} \nabla \cdot (\rho\vec{V})\vec{V}dV \quad (3.15)$$

Realizando el mismo procedimiento pero ahora reemplazando en el término \vec{G} el tensor de esfuerzos $\tilde{\sigma}$ se obtiene:

$$\int_{SC} (\tilde{\sigma} \cdot \vec{n})dA = \int_{VC} (\nabla \cdot \tilde{\sigma})dV \quad (3.16)$$

Ahora, reemplazando las ecuaciones 3.15 y 3.16 en la expresión de conservación de momento 3.14 se obtiene:

$$\begin{aligned} \int_{VC} (\rho\vec{g})dV + \int_{VC} (\nabla \cdot \tilde{\sigma})dV &= \frac{d}{dt} \int_{VC} (\rho\vec{V})dV + \int_{VC} \nabla \cdot (\rho\vec{V})\vec{V}dV \\ 0 &= \frac{d}{dt} \int_{VC} (\rho\vec{V})dV + \int_{VC} \nabla \cdot (\rho\vec{V})\vec{V}dV - \int_{VC} (\rho\vec{g})dV - \int_{VC} (\nabla \cdot \tilde{\sigma})dV \\ 0 &= \int_{VC} \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \nabla \cdot (\rho\vec{V})\vec{V} - (\rho\vec{g}) - \nabla \cdot \tilde{\sigma} \right] dV \end{aligned}$$

Para que esta igualdad se cumpla considerando un volumen de control distinto de cero, obligatoriamente se debe cumplir que:

$$0 = \left[\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \nabla \cdot (\rho\vec{V})\vec{V} - (\rho\vec{g}) - \nabla \cdot \tilde{\sigma} \right]$$

Por lo que finalmente se obtiene la ecuación de Cauchy, también conocida como la ecuación diferencial general para la conservación de la cantidad de movimiento lineal:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\vec{V}) + \nabla \cdot (\rho\vec{V})\vec{V} = \rho\vec{g} + \nabla \cdot \tilde{\sigma} \quad (3.17)$$

Aplicando la regla de la cadena al primer término de la ecuación 3.17 se obtiene:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \vec{V}) = \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} \quad (3.18)$$

Mientras que, el segundo término se puede escribir como:

$$\nabla \cdot (\rho \vec{V} \vec{V}) = \vec{V} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \quad (3.19)$$

Reemplazando entonces las ecuaciones 3.18 y 3.19 en la ecuación 3.17 se obtiene:

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \frac{\partial \rho}{\partial t} + \vec{V} \nabla \cdot (\rho \vec{V}) + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \rho \vec{g} + \nabla \tilde{\sigma}$$

Factorizando por \vec{V} :

$$\rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \left[\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho \vec{V}) \right] + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} = \rho \vec{g} + \nabla \tilde{\sigma}$$

Notamos que, el elemento entre corchetes es 0 por conservación de la masa, ecuación 3.5, por lo que trabajando la expresión finalmente se obtiene la forma euleriana de la ecuación de Cauchy:

$$\begin{aligned} \rho \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \rho (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} &= \rho \vec{g} + \nabla \tilde{\sigma} \\ \rho \left[\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + (\vec{V} \cdot \nabla) \vec{V} \right] &= \rho \vec{g} + \nabla \tilde{\sigma} \\ \rho \frac{D\vec{V}}{Dt} &= \rho \vec{g} + \nabla \tilde{\sigma} \end{aligned} \quad (3.20)$$

3.2.4. Ecuación de Navier-Stokes (Çengel, 2018)

A partir de la forma alternativa de la ecuación de Cauchy 3.20, se procederá a determinar la expresión para la ecuación de Navier - Stokes para fluido incompresible y newtoniano.

Como paso previo, se debe separar la componente del tensor de esfuerzos producidos por la presión y los esfuerzos viscosos, para un fluido en movimiento el tensor de esfuerzos se puede denotar de la siguiente forma:

$$\tilde{\sigma} = -\tilde{I}P + \tilde{\tau}$$

$$\begin{pmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{yx} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} & \sigma_{zy} & \sigma_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \tau_{xx} & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \tau_{yy} & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \tau_{zz} \end{pmatrix} \quad (3.21)$$

De esta última igualdad se presenta como nueva incógnita las presiones P , y un nuevo tensor de esfuerzos viscosos $\tilde{\tau}$. Para continuar se debe primero definir el tensor de razón de deformación en coordenadas cartesianas:

$$\tilde{\varepsilon} = \begin{pmatrix} \varepsilon_{xx} & \varepsilon_{xy} & \varepsilon_{xz} \\ \varepsilon_{yx} & \varepsilon_{yy} & \varepsilon_{yz} \\ \varepsilon_{zx} & \varepsilon_{zy} & \varepsilon_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.22)$$

Luego, si se realiza el supuesto que el tensor de esfuerzo es linealmente proporcional al tensor de razón de deformación, para flujo incompresible se puede definir una expresión para el tensor de esfuerzo viscoso:

$$\tau_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij}$$

$$\tilde{\tau} = \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.23)$$

Reemplazando entonces en 3.21:

$$\tilde{\sigma} = \begin{pmatrix} -P & 0 & 0 \\ 0 & -P & 0 \\ 0 & 0 & -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2\mu \frac{\partial u}{\partial x} & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right) & \mu \left(\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) & 2\mu \frac{\partial v}{\partial y} & \mu \left(\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} \right) \\ \mu \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) & \mu \left(\frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z} \right) & 2\mu \frac{\partial w}{\partial z} \end{pmatrix} \quad (3.24)$$

Se trabajará a continuación con la componente \hat{e}_x de la ecuación de Cauchy, sustituyendo entonces la ecuación 3.24 en la ecuación 3.20 y trabajando la expresión se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + 2\mu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \mu \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial u}{\partial z} \right) \\ \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \end{aligned} \quad (3.25)$$

Notar que, mientras las componentes de velocidad sean funciones continuas no importa el orden de diferenciación, tal que siendo α_i una constante cualquiera y \mathbb{M} una variable cualquiera:

$$\alpha_i \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial y} \right) = \alpha_i \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial \mathbb{M}}{\partial x} \right) \quad (3.26)$$

Aplicando la propiedad de la ecuación 3.26 en 3.25, y ordenando los términos convenientemente:

$$\begin{aligned}\rho \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial v}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial w}{\partial x} \right) + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \\ \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial v}{\partial y} \right) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial w}{\partial z} \right) \right] \\ \rho \frac{Du}{Dt} &= \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} \right) \right]\end{aligned}\quad (3.27)$$

Nótese que, el término entre paréntesis es cero por la forma cartesiana de la ecuación de continuidad para fluido incompresible, ecuación 3.10, por lo que finalmente:

$$\rho \frac{Du}{Dt} = \rho g_x - \frac{\partial P}{\partial x} + \mu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (3.28)$$

Esta última expresión representa la componente \hat{e}_x de la ecuación de Navier-Stokes en forma euleriana, realizando el mismo procedimiento para las direcciones z e y de la velocidad se pueden obtener las componentes cartesianas de la ecuación de Navier-Stokes para flujo incompresible:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g_x + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (3.29)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + g_y + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (3.30)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g_z + \frac{\mu}{\rho} \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (3.31)$$

Se define la viscosidad cinemática como:

$$\nu = \frac{\mu}{\rho} \quad (3.32)$$

Reemplazando:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g_x + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} \right] \quad (3.33)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + g_y + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial z^2} \right] \quad (3.34)$$

$$\frac{Dw}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial z} + g_z + \nu \left[\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 w}{\partial z^2} \right] \quad (3.35)$$

Finalmente, uniendo las tres componentes se obtiene la formulación euleriana de la ecuación de Navier-Stokes para flujo newtoniano incompresible:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (3.36)$$

3.3. Ecuación de conservación de una cantidad escalar ϕ

Aplicando el Teorema de transporte de Reynolds 3.2 para un $b=\phi$, que corresponde a una cantidad escalar cualquiera:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left(\int_{M_{sis}} \phi \cdot dm \right) &= \frac{d}{dt} \int_{VC} (\rho\phi) dV + \int_{SC} (\rho\phi) \vec{V} \cdot \vec{n} dA \\ \frac{d}{dt} \left(\int_{V_{sis}} \rho\phi \cdot dV \right) &= \frac{d}{dt} \int_{VC} (\rho\phi) dV + \int_{SC} (\rho\phi) \vec{V} \cdot \vec{n} dA \\ \frac{d}{dt} (\Phi) &= \frac{d}{dt} \int_{VC} (\rho\phi) dV + \int_{SC} (\rho\phi) \vec{V} \cdot \vec{n} dA \end{aligned} \quad (3.37)$$

Donde:

ϕ : Corresponde a la cantidad intensiva del sistema.

Φ : Corresponde a la cantidad extensiva del sistema.

Cambiando un poco la nomenclatura:

$$\sum f_\phi = \frac{d}{dt} \int_{VC} (\rho\phi) dV + \int_{SC} (\rho\phi) \vec{V} \cdot \vec{n} dA \quad (3.38)$$

Donde:

$\sum f_\phi$: Corresponde al transporte de la cantidad ϕ por diferentes mecanismos, además de convección ($\nabla\phi$) y cualquier fuente o sumidero.

Aplicando la ley de Fourier para la difusión de calor y la ley de Fick para difusión de masa, considerando también una fuente cualquiera S y un coeficiente de difusión Γ aplicado a la variable escalar ϕ , se puede obtener la formulación de $\sum f_\phi$:

$$\sum f_\phi = \int_{VC} [\nabla \cdot (\Gamma \cdot \nabla \phi)] \cdot dV + \int_{VC} S \cdot dV \quad (3.39)$$

Si se combinan las ecuaciones 3.38 y 3.39:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} (\rho\phi) dV + \int_{SC} (\rho\phi) \vec{V} \cdot \vec{n} dA = \int_{VC} [\nabla \cdot (\Gamma \cdot \nabla\phi)] \cdot dV + \int_{VC} S \cdot dV$$

Aplicando el teorema de la divergencia 3.4:

$$\frac{d}{dt} \int_{VC} (\rho\phi) dV + \int_{VC} \nabla(\rho\phi \vec{V}) \cdot dV = \int_{VC} [\nabla \cdot (\Gamma \cdot \nabla\phi)] \cdot dV + \int_{VC} S \cdot dV$$

Considerando un volumen de control rígido y fijo:

$$\int_{VC} \frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) dV + \int_{VC} \nabla(\rho\phi \vec{V}) \cdot dV = \int_{VC} [\nabla \cdot (\Gamma \cdot \nabla\phi)] \cdot dV + \int_{VC} S \cdot dV$$

$$\int_{VC} \left(\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \nabla(\rho\phi \vec{V}) \right) dV = \int_{VC} [\nabla \cdot (\Gamma \cdot \nabla\phi) + S] \cdot dV$$

Si se considera un volumen de control distinto que 0, se obtiene la ecuación general de transporte de la cantidad ϕ :

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \nabla(\rho\phi \vec{V}) = \nabla \cdot (\Gamma \cdot \nabla\phi) + S \quad (3.40)$$

Otra forma de escribir la ecuación 3.40 es la siguiente:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho\phi \vec{V}) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial\phi}{\partial x_j} \right) + S$$

Finalmente, considerando un coeficiente de difusión Γ constante:

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j} (\rho\phi \vec{V}) = \Gamma \frac{\partial^2\phi}{\partial x_j^2} + S \quad (3.41)$$

3.4. Formulación velocidad-presión para flujo incompresible: ecuación de Poisson

Para realizar una simulación numérica de flujo laminar, la ecuación de Navier-Stokes no es suficiente para abastecer la cantidad de incógnitas a encontrar, ya que carece de una ecuación para el cálculo de las presiones. Es por esto que se determinará una ecuación de estado, tal que cumpla con las ecuaciones anteriormente señaladas y que permitan computar la evolución de la presión.

Se tiene la ecuación de Navier-Stokes para flujo incompresible 3.36:

$$\frac{D\vec{V}}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V} \quad (3.42)$$

Desarrollando la expresión:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} + \vec{V} \cdot \nabla \vec{V} = -\frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V}$$

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = -\vec{V} \cdot \nabla \vec{V} - \frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} + \nu \nabla^2 \vec{V}$$

Si se le denomina al término $-\vec{V} \cdot \nabla \vec{V}$ como el operador no-lineal convectivo $\mathcal{N}(\vec{V})$ y al término $\nabla^2 \vec{V}$ como el operador lineal difusivo $\mathcal{L}(\vec{V})$ (Pozrikidis, 2001), la ecuación anterior queda de la forma:

$$\frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \mathcal{N}(\vec{V}) - \frac{1}{\rho} \nabla P + \vec{g} + \nu \mathcal{L}(\vec{V})$$

Aplicando divergencia a ambos lados de la ecuación se obtiene:

$$\nabla \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathcal{N}(\vec{V}) - \nabla \cdot \frac{1}{\rho} \nabla P + \nabla \cdot \vec{g} + \nabla \cdot \nu \mathcal{L}(\vec{V})$$

Se tiene que:

- Al no ser ∇ función del tiempo, $\nabla \cdot \frac{\partial \vec{V}}{\partial t} = \frac{\partial \nabla \vec{V}}{\partial t}$
- $-\nabla \cdot \frac{1}{\rho} \nabla P = -\frac{1}{\rho} \nabla^2 P$
- Al ser \vec{g} un vector de constantes su divergencia es 0, tal que $\nabla \cdot \vec{g} = 0$
- Si se considera una viscosidad constante y uniforme en todo el dominio del flujo, el operador lineal difusivo puede conmutar el orden de divergencia tal que $\nabla \mathcal{L}(\vec{V}) = \mathcal{L}(\nabla \vec{V})$.
- Notar que el operador de divergencia y el operador no lineal \mathcal{N} **no son conmutables**.

Reescribiendo la expresión con las consideraciones anteriores:

$$\frac{\partial \nabla \vec{V}}{\partial t} = \nabla \cdot \mathcal{N}(\vec{V}) - \frac{1}{\rho} \nabla^2 P + \nu \mathcal{L}(\nabla \vec{V})$$

Para que esta igualdad se cumpla, se requiere que el lado izquierdo de la expresión se anule en cada instante de tiempo, por lo que se debe satisfacer la **Ecuación de Poisson para la Presión**:

$$\nabla^2 P = \rho \left[\nabla \cdot \mathcal{N}(\vec{V}) + \nu \mathcal{L}(\nabla \vec{V}) \right] \quad (3.43)$$

Se está realizando el supuesto de que el flujo es incompresible, por lo que para satisfacer la ecuación de continuidad 3.5 el término $L(\nabla \vec{V})$ debe ser 0. Obteniendo entonces la **Ecuación de Poisson para la Presión en Flujo Incompresible**:

$$\nabla^2 P = \rho \nabla \cdot \mathcal{N}(\vec{V}) \quad (3.44)$$

3.5. Métodos numéricos aplicables

A continuación, se detallan 3 métodos aplicables para la aproximación numérica de la ecuación de Navier-Stokes.

3.5.1. Nomenclatura

Para facilitar la lectura y el desarrollo y aplicación de los métodos numéricos se utilizará la siguiente nomenclatura para los puntos a obtener:

$$U_{ij}^n$$

Donde:

U : Corresponde a la incógnita que se está obteniendo al aplicar un respectivo método numérico.

n : Superíndice que indica el número de iteración de tiempo que se está calculando.

i, j : Subíndices que representan la ubicación espacial del punto calculado con respecto a una grilla previamente definida.

3.5.2. Método de diferencias finitas

El método de diferencias finitas MDF, se basa en generar un sistema de ecuaciones algebraicas a partir de la discretización generada al reemplazar las derivadas de las EDP por aproximaciones de diferencias finitas.

Primero, para ilustrar la aplicación del método se definirá un dominio espacial rectangular 2D en el plano xy de la forma de $(m + 1) \times (m + 1)$, obteniendo así una distribución de grillado como se presenta a continuación en la figura 3.3:

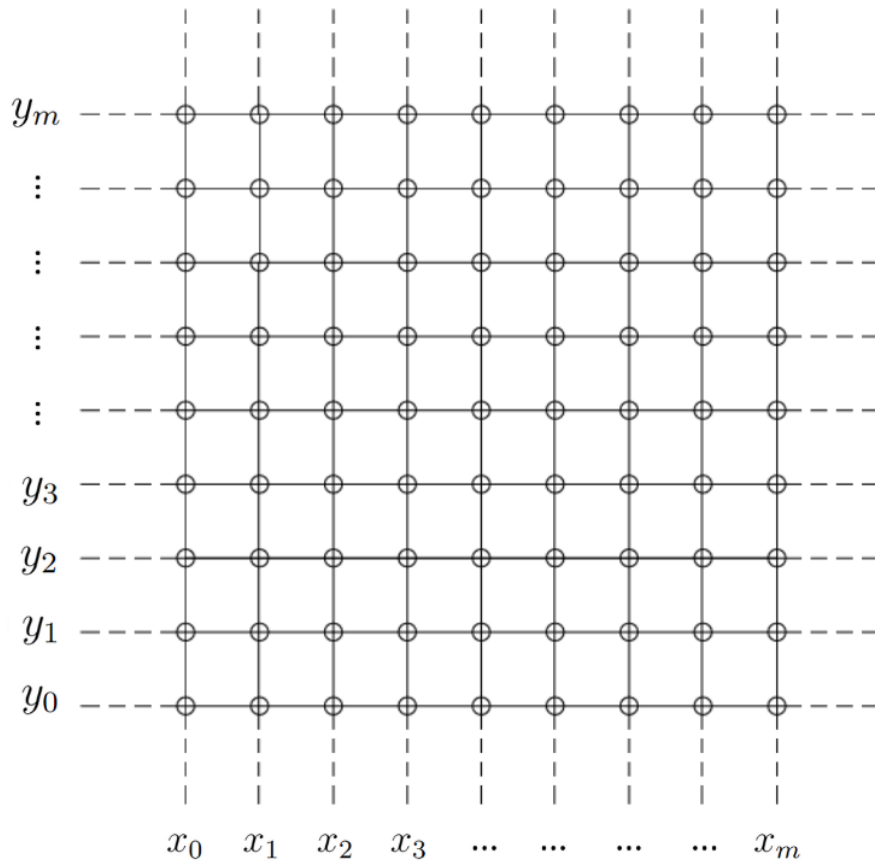


Figura 3.3: Grilla Método Diferencias Finitas
 Fuente: Elaboración Propia.

La discretización asociada a la primera derivada espacial de una variable u en un paso h muy pequeño se puede obtener utilizando la definición estándar de derivada, obteniendo así una aproximación para la secante por ambos lados del punto estudiado:

$$D_+u(\bar{x}) = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x})}{h} \tag{3.45}$$

$$D_-u(\bar{x}) = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)}{h} \tag{3.46}$$

Aplicando la nomenclatura anteriormente señalada las expresiones quedan formuladas por:

$$D_+u(\bar{x}) = \frac{U_{j+1} - U_j}{h} \tag{3.47}$$

$$D_-u(\bar{x}) = \frac{U_j - U_{j-1}}{h} \tag{3.48}$$

También se puede definir una expresión para la aproximación de la derivada por diferencia centrada, de la forma:

$$D_o u(\bar{x}) = \frac{\Delta u}{\Delta x} = \frac{u(\bar{x} + h) + u(\bar{x} - h)}{2h} \quad (3.49)$$

Reemplazando las expresiones 3.45 y 3.46 en la ecuación 3.49 se obtiene:

$$D_o u(\bar{x}) = \frac{1}{2}(D_+ u(\bar{x}) + D_- u(\bar{x})) \quad (3.50)$$

Se aprecia que las diferencias centradas establece una definición discreta de la derivada de la variable $u(\bar{x})$ a partir del promedio de las aproximaciones por definición de la derivada por ambos extremos.

Aplicando la nomenclatura anteriormente mencionada se puede aproximar la primera derivada en diferencias finitas de una variable U_j en un instante de tiempo cualquiera:

$$DU_j = \frac{1}{2h}(U_{j+1} - U_{j-1}) \quad (3.51)$$

La segunda derivada espacial de una variable $u(\bar{x})$ también puede ser aproximada por diferencias centradas de la forma:

$$D^2 u(\bar{x}) = D_+ (D_- u(\bar{x})) = \frac{D_- u(\bar{x} + h) - D_- u(\bar{x})}{h}$$

$$D^2 u(\bar{x}) = \frac{1}{h} \left[\left(\frac{u(\bar{x} + h) - u(\bar{x})}{h} \right) - \left(\frac{u(\bar{x}) - u(\bar{x} - h)}{h} \right) \right]$$

$$D^2 u(\bar{x}) = \frac{1}{h^2} [u(\bar{x} + h) - 2u(\bar{x}) + u(\bar{x} - h)] \quad (3.52)$$

De la misma manera que en la ecuación 3.51, se define una expresión en diferencias finitas para la aproximación de la segunda derivada espacial de una función U_j :

$$D^2 U_j = \frac{1}{h^2}(U_{j-1} - 2U_j + U_{j+1}) \quad (3.53)$$

Para reemplazar la primera derivada temporal de la variable $u(\bar{x})$ existen diversas aproximaciones, para objeto de la investigación y como una simplificación de los códigos se utilizará el más directo, reemplazando la primera derivada por la aproximación en diferencias finitas de la secante por el borde superior de la forma:

$$D_+ u(\bar{x}) = \frac{u(\bar{x} + k) - u(\bar{x})}{k} \quad (3.54)$$

Utilizando la nomenclatura señalada en 3.3.1:

$$D_+ U^n = \frac{U^{n+1} - U^n}{k} \quad (3.55)$$

Obteniendo así el método de Forward Euler:

$$\frac{U^{n+1} - U^n}{k} = f(U^n) \tag{3.56}$$

Se aprecia que se puede despejar directamente la incógnita U^{n+1} de la forma:

$$U^{n+1} = f(U^n) \cdot k + U^n \tag{3.57}$$

3.5.3. Método de elementos finitos

El método de elementos finitos MEF, corresponde a un método numérico utilizado para resolver ecuaciones diferenciales parciales mediante la formulación y resolución de un sistema lineal por medio de la discretización del dominio en elementos convenientes conformados por nodos, como se puede apreciar en la Figura 3.4

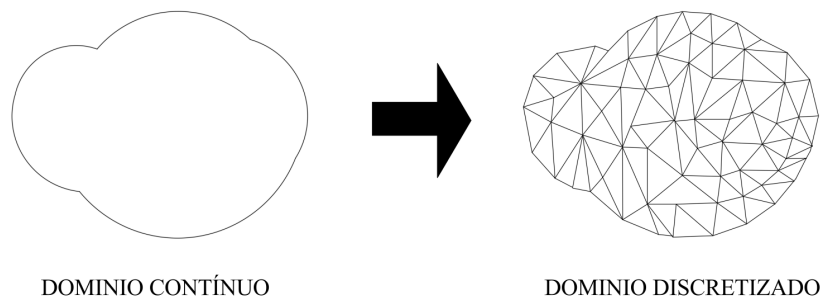
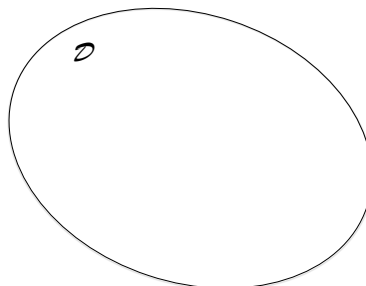


Figura 3.4: Discretización del Dominio Método Elementos Finitos.
 Fuente: Elaboración Propia.

Formulación débil del problema de valores de borde

Considerando el problema de valores de borde de dos puntos.

$$\begin{aligned} f &= -u''(x) & \mathcal{D} &= (0, 1) \\ u(0) &= 0 \\ u'(1) &= 0 \end{aligned} \tag{3.58}$$



Si u es la solución y v es cualquier función (suficientemente regular) tal que $v(0) = 0$, luego integrando por partes,

$$\begin{aligned}
 f(x) &= -u''(x) \quad \Big| \cdot v(x) \\
 f(x) \cdot v(x) &= -u''(x) \cdot v(x) \\
 \int_0^1 f(x) \cdot v(x) \, dx &= - \int_0^1 u''(x) \cdot v(x) \, dx \\
 \int_0^1 f(x) \cdot v(x) \, dx &= -v(x) \cdot u'(x) \Big|_0^1 + \int_0^1 u'(x) \cdot v'(x) \, dx \\
 \int_0^1 f(x) \cdot v(x) \, dx &= -v(1) \cdot \underbrace{u'(1)}_0 + \underbrace{v(0)}_0 \cdot u'(0) + \int_0^1 u'(x) \cdot v'(x) \, dx \\
 \int_0^1 f(x) \cdot v(x) \, dx &= \int_0^1 u'(x) \cdot v'(x) \, dx \\
 (f, v) &= a(u, v)
 \end{aligned} \tag{3.59}$$

Donde $L^2(\Omega)$ es el Espacio de Lebesgue,

$$L^2(\Omega) = \left\{ g : \|g\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int_{\Omega} |g(x)|^2 \, dx \right)^{1/2} < \infty \right\}$$

Definimos,

$$V = \{v \in L^2(0, 1) : a(v, v) < \infty \text{ y } v(0) = 0\}$$

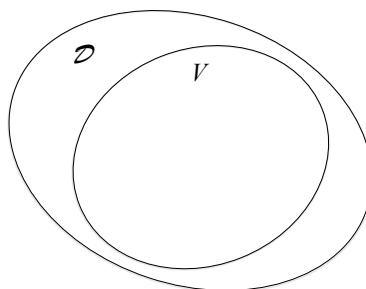
Notar que,

$$\|g\|_{L^2(\Omega)}^2 = \int_{\Omega} |g(x)|^2 \, dx = \int_{\Omega} g(x) \cdot g(x) \, dx = a(g, g)$$

Luego, podemos decir que la solución u para 3.58 está caracterizada por,

$$u \in V, \quad \text{tal que} \quad a(u, v) = (f, v) \quad \forall v \in V \tag{3.60}$$

la expresión 3.60 es llamado el variacional o formulación débil.



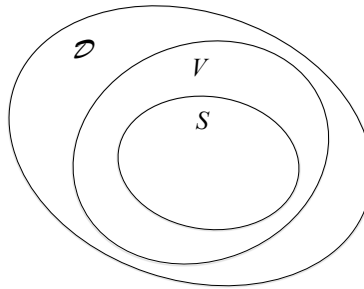
Un espacio de Hilbert es un espacio vectorial cuya topología está definida usando un producto interior,

un ejemplo de un espacio de Hilbert es $L^2(0, 1)$ con producto interior (\cdot, \cdot) . El espacio V puede ser visto como un espacio de Hilbert con producto interior $a(\cdot, \cdot)$.

Aproximación de Ritz-Galerkin

Sea $S \subset V$ cualquier subespacio (dimensión finita). Consideremos la expresión 3.60 con el espacio V reemplazado por S .

$$u_s \in S, \quad \text{tal que} \quad a(u_s, v) = (f, v) \quad \forall v \in S \quad (3.61)$$



La expresión 3.61 representa un sistema de ecuaciones para u_s (cuadrado, finito), se genera un esquema discreto para aproximar 3.58. Esto es solo uno de los aspectos poderosos del método de Ritz-Galerkin.

Escribiendo la 3.61 en términos de una base,

$$\{N_i : 1 \leq i \leq n\} \text{ base de } S \quad (N_i \text{ funciones de forma o funciones de interpolación})$$

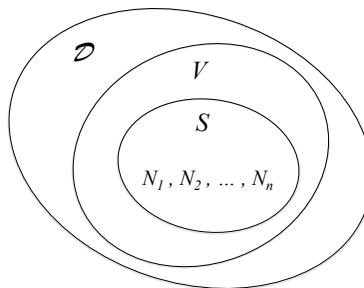
Sea ,

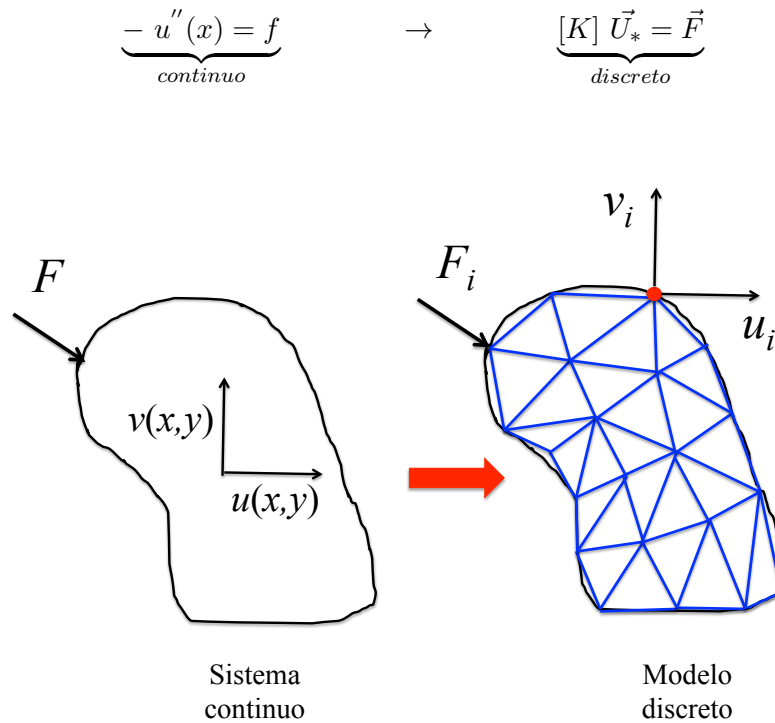
$$u_s = \sum_{j=1}^n U_j N_j \quad ; \quad K_{ij} = a(N_j, N_i) \quad ; \quad F_i = (f, N_i), \quad \text{para } i, j = 1, 2, \dots, n$$

$$\vec{U}_* = \{U_j\} \quad ; \quad [K] = [K_{ij}] \quad ; \quad \vec{F} = \{F_i\}$$

Esto es equivalente a resolver la ecuación matricial (cuadrada),

$$[K] \vec{U}_* = \vec{F}$$





3.5.4. Método de volúmenes finitos

El método de volúmenes finitos (Ferziger et al., 2020) MVF usa la formulación integral de la ecuación de conservación de una cantidad escalar ϕ , tal como se presentó en 3.41, donde el dominio se ve subdividido en un número finito de pequeño de volúmenes de control, a diferencia del método de diferencias finitas, se definen volúmenes de control de borde en lugar de nodos.

En la siguiente figura 3.5 se presenta la distribución típica de una malla computacional asociada a la discretización del dominio en volúmenes de control, donde normalmente se colocan los nodos computacionales en el centro de estos volúmenes infinitesimales generados, sin embargo, para algunas mallas estructuradas se pueden definir los nodos primero y generar en base a estos los volúmenes de control asociados al método.

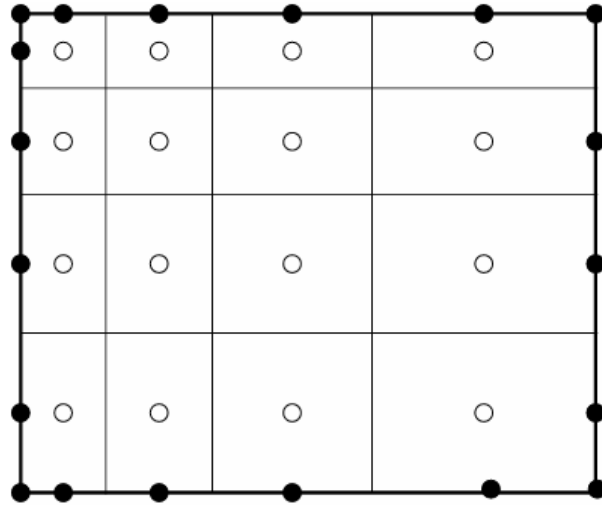


Figura 3.5: Malla típica MVF
Fuente: (Ferziger et al., 2020)

Cabe destacar que los nodos en negrita corresponden a los cuáles se les imponen las condiciones de frontera de acuerdo a la formulación de la situación física a modelar.

Para la discretización en los volúmenes de control anteriormente mencionados, se debe trabajar la expresión 3.41 como un sistema de expresiones algebraicas (Astroza, 2017). Para llegar a estas expresiones se utilizará un arreglo colocado (figura 3.6), donde se presenta en línea segmentada el volumen de control generado y con círculos los nodos asociados a las variables a calcular, es decir, aplicados a presiones y velocidades.

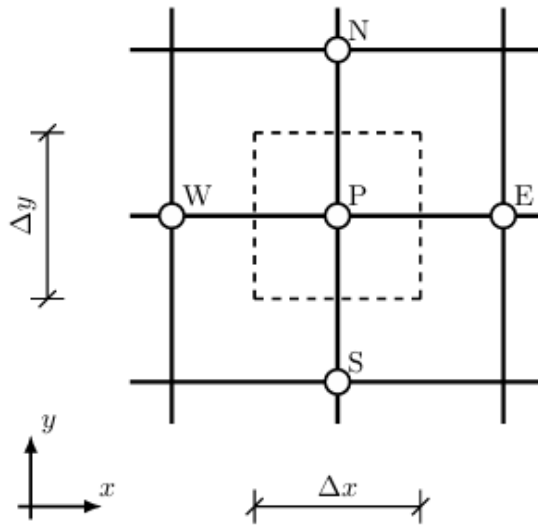


Figura 3.6: Arreglo Colocado
Fuente: (Astroza, 2017)

Considerando entonces la ecuación de conservación de una cantidad escalar presentada en 3.41:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\phi \vec{V}) &= \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} + S \\ \frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\phi \vec{V}) - \Gamma \frac{\partial^2 \phi}{\partial x_j^2} &= S\end{aligned}$$

Permutando el orden de la derivada del tercer término:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho\phi \vec{V}) - \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) = S$$

Desarrollando esta última expresión en dos dimensiones:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x}(\rho\phi u) - \frac{\partial}{\partial x} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho\phi v) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = S \quad (3.62)$$

Por propiedad de derivadas se cumple que:

$$\begin{aligned}f(x) &= g(x) + h(x) \\ f'(x) &= g'(x) + h'(x)\end{aligned}$$

Aplicando esto último en 3.62:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial}{\partial x} \left(\rho\phi u - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\rho\phi v - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \right) = S$$

Se definen entonces los flujos totales J_x y J_y

$$\begin{aligned}J_x &= \rho\phi u - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \\ J_y &= \rho\phi v - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y}\end{aligned}$$

Por lo que, finalmente la ecuación diferencial general de conservación para dos dimensiones, en términos de los flujos totales se escribe de la forma:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S \quad (3.63)$$

Se define matemáticamente el número adimensional de Peclet (\mathcal{P}), el cual, mide la dominancia del término advectivo sobre el difusivo de la forma:

$$\mathcal{P} = \frac{\rho u L}{\Gamma}$$

También, se definen los flujos advectivos como:

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y, \quad F_w = (\rho u)_w \Delta y, \quad F_n = (\rho v)_n \Delta x, \quad F_s = (\rho v)_s \Delta x \quad (3.64)$$

Los coeficientes difusivos se presentan a continuación:

$$D_e \equiv \frac{\Gamma_e}{(\delta x)_e}, \quad D_w \equiv \frac{\Gamma_w}{(\delta x)_w}, \quad D_n \equiv \frac{\Gamma_n}{(\delta y)_n}, \quad D_s \equiv \frac{\Gamma_s}{(\delta y)_s} \quad (3.65)$$

Finalmente, se pueden evaluar también los números de Peclet correspondientes a cada nodo de cada volumen de control:

$$\mathcal{P}_e = \frac{F_e}{D_e}, \quad \mathcal{P}_w = \frac{F_w}{D_w}, \quad \mathcal{P}_n = \frac{F_n}{D_n}, \quad \mathcal{P}_s = \frac{F_s}{D_s} \quad (3.66)$$

Realizando una serie de ajustes (desarrollo matemático adjunto en el anexo ??) se puede llegar finalmente a la discretización por volúmenes finitos de la ecuación de conservación de una cantidad escalar ϕ :

$$a_P \phi_P = a_E \phi_E + a_W \phi_W + a_N \phi_N + a_S \phi_S + b \quad (3.67)$$

donde:

$$\begin{aligned} a_E &= D_e \mathcal{A}(|\mathcal{P}_e|) + \|\phi - F_e, 0\|, \\ a_W &= D_w \mathcal{A}(|\mathcal{P}_w|) + \|\phi - F_w, 0\|, \\ a_N &= D_n \mathcal{A}(|\mathcal{P}_n|) + \|\phi - F_n, 0\|, \\ a_S &= D_s \mathcal{A}(|\mathcal{P}_s|) + \|\phi - F_s, 0\|, \\ a_P^0 &= \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t}, \\ b &= \bar{S} \Delta x \Delta y + a_P^0 \phi_P^0, \\ a_P &= a_E + a_W + a_N + a_S + a_P^0 - \bar{S} \Delta x \Delta y. \end{aligned}$$

Queda definir únicamente la expresión $\mathcal{A}(|\mathcal{P}|)$, la cuál corresponde a una función asociada al esquema seleccionado para aproximar los ΔJ en términos de la información nodal de ϕ , el esquema a utilizar será planteado en la sección de desarrollo del código en volúmenes finitos.

3.6. Modelación de flujo turbulento

El flujo turbulento, figura 3.7, se produce en una gran cantidad de situaciones donde existe movimiento de un fluido, ya sea líquido o gaseoso, este se presenta cuando las fuerzas inerciales son considerablemente preponderantes con respecto a las fuerzas viscosas, traduciéndose en un número de Reynolds elevado y, por consiguiente, presentándose desorden en las líneas de flujo y variación aleatoria en las magnitudes de sus parámetros como la velocidad y la presión.

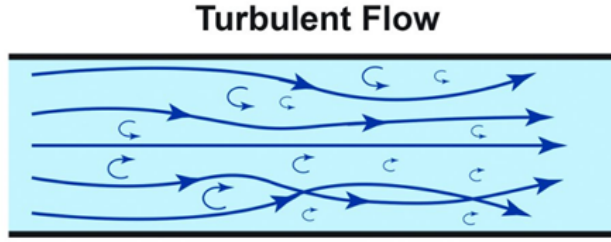


Figura 3.7: Flujo Turbulento
Fuente: (Garlan, 2019)

La ecuación de Navier-Stokes presentada anteriormente está definida para flujo laminar, sin embargo, al momento de analizar flujos con presencia de turbulencia se incorporan nuevas incógnitas al problema asociadas al desorden de las partículas. Como consecuencia, el sistema original de ecuaciones deja de ser cerrado, requiriéndose ecuaciones adicionales para poder describir adecuadamente el fenómeno. A partir de esta necesidad surgen distintos modelos y métodos numéricos orientados a la modelación de la turbulencia, los cuales permiten cerrar el sistema y capturar sus principales efectos físicos.

Para el ejemplo de estudio se realizará la modelación de la turbulencia mediante un modelo de dos ecuaciones denominado como modelo $k - \epsilon$ realizable (COMSOL Multiphysics, 2019), que simula la turbulencia mediante la resolución de dos ecuaciones de transporte que representan las propiedades turbulentas del fluido. El parámetro k del modelo corresponde a la energía cinética turbulenta, mientras que el parámetro ϵ corresponde a la tasa de disipación turbulenta

Las ecuaciones de transporte que controlan el método k -épsilon realizable se presentan a continuación (CFD-Online, 2023):

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho k) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho k u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_k} \right) \frac{\partial k}{\partial x_j} \right] + P_k + P_b - \rho \epsilon - Y_M + S_k \quad (3.68)$$

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho \epsilon) + \frac{\partial}{\partial x_j}(\rho \epsilon u_j) = \frac{\partial}{\partial x_j} \left[\left(\mu + \frac{\mu_t}{\sigma_\epsilon} \right) \frac{\partial \epsilon}{\partial x_j} \right] + \rho C_{1\epsilon} \frac{\epsilon}{k} (P_k + C_{3\epsilon} P_b) - \rho C_{2\epsilon} \frac{\epsilon^2}{k} + S_\epsilon \quad (3.69)$$

Donde:

ρ : densidad del fluido.

k : energía cinética turbulenta.

ϵ : tasa de disipación turbulenta.

u_j : componente de velocidad media en la dirección j .

μ : viscosidad dinámica molecular.

μ_t : viscosidad turbulenta (modelada como $\mu_t = \rho C_\mu \frac{k^2}{\epsilon}$).

$\sigma_k, \sigma_\epsilon$: números de Prandtl turbulentos para k y ϵ respectivamente (constantes empíricas).

P_k : producción de energía turbulenta debida a gradientes de velocidad.

P_b : producción de turbulencia debida a fuerzas de flotación (buoyancy).

Y_M : contribución a la disipación turbulenta por fluctuaciones compresibles (importante en flujos con Mach alto).

S_k : término fuente definido por el usuario para la ecuación de k .

S_ϵ : término fuente definido por el usuario para la ecuación de ϵ .

$C_{1\varepsilon}, C_{2\varepsilon}, C_{3\varepsilon}$: constantes empíricas del modelo realizable $k-\varepsilon$.

3.7. Modelación de flujo bifásico agua - aire

En situaciones de flujo en canales abiertos, se puede presentar interacción entre el agua y el aire, a lo que se conoce como flujo bifásico, figura 3.8. En una simulación computacional, esto implica en ciertos sectores de la grilla habrá un porcentaje de aire y de agua, lo cual debe ser considerado en el modelo.



Figura 3.8: Flujo bifásico (interacción agua - aire)
Fuente: <https://www.simulacionesyproyectos.com/>

Para modelar este fenómeno se utilizará el método Volume of Fluid VOF (Villamizar, 2014), el cual se basa en definir el porcentaje o fracción de volumen α de cada fase del fluido en cada celda del mallado computacional. La relación entre la fracción de volumen α y las velocidades u y v se escribe de la siguiente forma:

$$\frac{\partial \alpha}{\partial t} + \nabla \cdot (\vec{U} \alpha) = 0 \quad (3.70)$$

$$\frac{\partial (1 - \alpha)}{\partial t} + \nabla \cdot [\vec{U}_g (1 - \alpha)] = 0 \quad (3.71)$$

Donde:

α : fracción de volumen de la fase líquida.

$\alpha = 1$: celda completamente llena de líquido.

$\alpha = 0$: celda sin líquido (solo gas).

$0 < \alpha < 1$: zona de interfase líquido-gas.

$1 - \alpha$: fracción de volumen de la fase gaseosa.

t : tiempo.

\vec{U} : vector de velocidad de la fase líquida.

\vec{U}_g : vector de velocidad de la fase gaseosa.

Ambas ecuaciones garantizan que la suma de fracciones de volumen sea siempre:

$$\alpha + (1 - \alpha) = 1$$

lo que significa que en cada celda del dominio siempre hay 100 % de fluido (ya sea líquido, gas o mezcla).

3.8. Conceptos de hidráulica general

3.8.1. Flujo en canal abierto

Consiste en el movimiento de un fluido cualquiera por medio de un canal cuya superficie libre se ve expuesta a la presión atmosférica, figura 3.9. Para la presente memoria en particular se estudiará la situación de flujo de agua por un canal abierto con vertedero frontal de Ogee.



Figura 3.9: Ejemplo de canal abierto
Fuente: <https://www.diariodemocracia.com/>

3.8.2. Número de Reynolds

El número de Reynolds corresponde al valor que indica la relación entre las fuerzas producidas por la inercia del movimiento del fluido con respecto a las fuerzas viscosas, lo que en resumen, representa si corresponde a un régimen laminar o turbulento y su posición relativa mediante una escala que refleja la posición relativa de las tendencias turbulentas a laminares (Streeter, 2000). La definición matemática del valor asociado al número de Reynolds se detalla a continuación:

$$Re = \frac{u \cdot l \cdot \rho}{\mu} \quad (3.72)$$

Donde:

u : Corresponde a la velocidad característica del escurrimiento.

l : Corresponde a la longitud característica del escurrimiento.

ρ : Corresponde a la densidad de masa del fluido.

μ : Corresponde a la viscosidad dinámica del fluido.

3.8.3. Teoría de vertederos

Un vertedero corresponde a una estructura hidráulica ampliamente utilizada en la medición de flujo en canales abiertos, definido como un obstáculo transversal de geometría y forma variable que se instala en

un canal, río o depósito con el objetivo de nivelar el nivel del agua al interior de la estructura y controlar el escurrimiento aguas abajo del canal (Ngamalieu Nengoue, 2016).

La forma de la cresta del vertedero evacuador por lo general se diseña para maximizar la capacidad de descarga para una carga determinada de diseño y así trasladar con seguridad el caudal solicitante con el mínimo costo posible (Mery, 2013).

La ecuación general para el diseño de vertederos se presenta a continuación:

$$q = C_Q \cdot \sqrt{g} \cdot \left[\frac{2}{3} \cdot (H_1 - P) \right]^{\frac{3}{2}} \quad (3.73)$$

Donde:

q : Corresponde al caudal por unidad de ancho del vertedero en $[m^3/s/m]$.

C_Q : Coeficiente de gasto adimensional.

H_1 : Carga total medida aguas arriba del vertedero en $[m]$.

P : Altura de la cresta del vertedero $[m]$.

Los principales vertederos y sus respectivos valores para sus coeficientes de gasto se presentan a continuación en la tabla 3.1:

Tabla 3.1: Tipos de vertederos más comunes y sus coeficientes de gasto. Fuente: (Mery, 2013)

Tipo de vertedero	C_Q
Vertedero de pared gruesa	1
Vertedero de pared delgada	>1
Vertedero de cresta Ogee	>1

3.8.4. Vertedero de Pared Delgada

El vertedero de pared delgada tiene como característica principal que su cresta está constituida por una arista viva y fina, en este tipo de vertedero la napa vertiente sufre una contracción y la lámina inferior describe su trayectoria, llegando a su punto más alto aguas abajo de la pared de este. En la siguiente figura 3.10 se muestra el caso de un vertedero de pared delgada evacuando un cierto caudal mediante una lámina líquida sobre su umbral de arista viva (Mery, 2013):

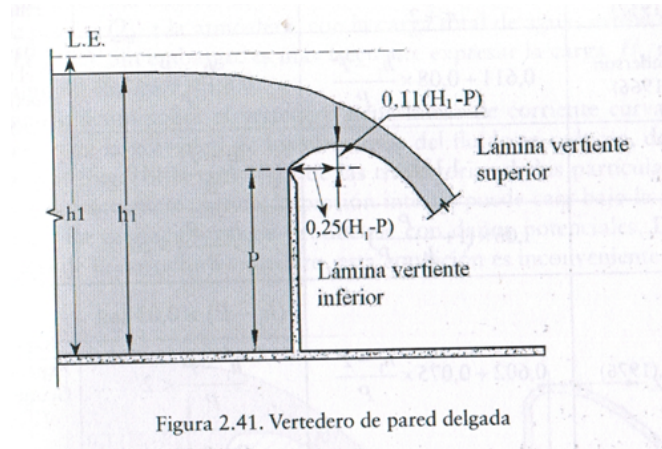


Figura 3.10: Vertedero de pared delgada.
Fuente: (Mery, 2013)

3.8.5. Vertedero Frontal Tipo Ogee

El vertedero frontal de tipo Ogee obtiene su forma básica de la trayectoria de la lámina inferior de un vertedero de pared delgada, a continuación en la figura 3.11 se puede apreciar la concordancia entre el perfil generado por la lámina inferior del escurrimiento de un caudal Q_d por sobre un vertedero de pared delgada y el perfil de la cresta de un vertedero de tipo Ogee:

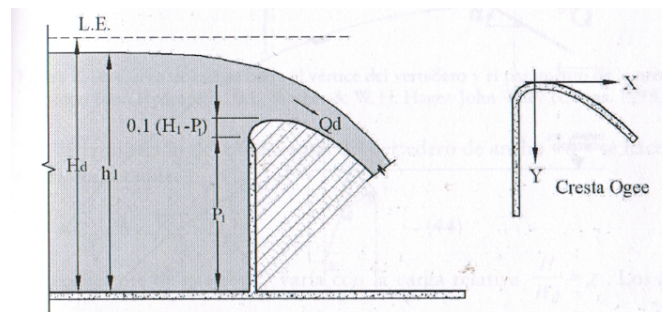


Figura 3.11: Vertedero de tipo Ogee y su relación con el vertedero de pared delgada.
Fuente: (Mery, 2013)

3.9. Herramientas aplicables al modelado CFD

Se realizó una revisión y estudio de las herramientas computacionales disponibles para la modelación CFD aplicables al contexto de la investigación, se detectaron 3 software los cuales se presentan a continuación:

3.9.1. Matlab

Matlab es una herramienta computacional que posee su propio lenguaje de programación, ideal y cómodo para resolver sistemas matemáticos y ecuaciones diferenciales parciales mediante la codificación de métodos numéricos, posee extensiones y vínculos con otras aplicaciones para potenciar el rendimiento de sus códigos y también una amplia biblioteca de funciones, facilitando al usuario el proceso de programación.

En la presente memoria se utilizará matlab para diseñar los programas en elementos finitos, diferencias finitas y volúmenes finitos del problema físico cavity flow.

3.9.2. Ansys Fluent

Software comercial de pago ampliamente utilizado en la ingeniería e investigación para el modelamiento CFD, aplicable a diversos contextos y problemas de la dinámica de fluidos, incluyendo herramientas para la modelación de canal abierto, modelación de turbulencia y flujo bifásico.

Ansys Fluent será la herramienta de calibración de los programas numéricos generados, sin embargo, previamente se analizará su precisión y aplicabilidad mediante la comparación de un modelo a escala de un vertedero frontal de Ogee y muestras extraídas de laboratorio.

3.9.3. OpenFOAM

Open Field Operation and Manipulation corresponde a un software de código abierto especialmente potente para resolver ecuaciones asociadas a la dinámica de fluidos mediante el método de volúmenes finitos. A diferencia de Ansys, este software es gratuito. Se reconoce a este software como una variante al programa Ansys Fluent, pero no será utilizado en la investigación.

3.10. Criterios para el análisis de desempeño del modelo

Los criterios de desempeño cuantifican la correlación existente entre los datos obtenidos por el modelo computacional y los datos teóricos (Villamizar, 2014), para este estudio en particular se evaluarán tres indicadores de desempeño los cuáles se presentan a continuación:

3.10.1. RSR (Error cuadrático medio relativo)

El error cuadrático medio está definido por la siguiente expresión (Gupta et al., 2009):

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n (x_{s,t} - x_{o,t})^2 \quad (3.74)$$

Por lo que, el indicador RMSE corresponde a la raíz de la expresión anterior:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\text{MSE}} = \sqrt{\frac{1}{n} \cdot \sum_{t=1}^n (x_{s,t} - x_{o,t})^2} \quad (3.75)$$

Estandarizando el RMSE se obtiene la expresión que define el RSR, presentada a continuación (Villamizar, 2014):

$$\text{RSR} = \frac{\sum_{t=1}^n (x_{s,t} - x_{o,t})^2}{\sum_{t=1}^n (x_{o,t} - \mu_o)^2} \quad (3.76)$$

El nivel de desempeño que presenta la aproximación numérica mediante el criterio del RSR se presenta a continuación en la siguiente tabla 3.2:

Tabla 3.2: Clasificación del desempeño basada en el valor de RSR. Fuente: (Gupta et al., 2009)

Clasificación del desempeño	Intervalo
Muy bueno	$0.00 < \text{RSR} \leq 0.50$
Bueno	$0.50 < \text{RSR} \leq 0.60$
Satisfactorio	$0.60 < \text{RSR} \leq 0.70$
Insuficiente	$\text{RSR} > 0.70$

3.10.2. NSE (Nash Sutcliffe Error)

El coeficiente de eficiencia de Nash-Sutcliffe se define como (Gupta et al., 2009):

$$\text{NSE} = 1 - \frac{\sum_{t=1}^n (x_{s,t} - x_{o,t})^2}{\sum_{t=1}^n (x_{o,t} - \mu_o)^2} = 1 - \frac{\text{MSE}}{\sigma_o^2} \quad (3.77)$$

Los parámetros que determinan el nivel de desempeño de la correlación de los datos mediante el criterio NSE se presenta a continuación en la siguiente tabla 3.3:

Tabla 3.3: Clasificación del desempeño basada en el valor de NSE. Fuente: (Gupta et al., 2009)

Clasificación del desempeño	Intervalo
Muy bueno	$0.75 < \text{NSE} \leq 1.00$
Bueno	$0.65 < \text{NSE} < 0.75$
Satisfactorio	$0.50 < \text{NSE} < 0.65$
Insuficiente	$\text{NSE} \leq 0.50$

4. Validación de Ansys Fluent como Herramienta de Calibración

Para verificar la aplicabilidad del software comercial Ansys Fluent se modelará el canal abierto de laboratorio del campus San Joaquín de la Universidad Técnica Federico Santa María con vertedero de Ogee (Figura 4.1) y se verificarán si las presiones y altura de escurrimiento de agua coinciden con las muestras obtenidas experimentalmente.

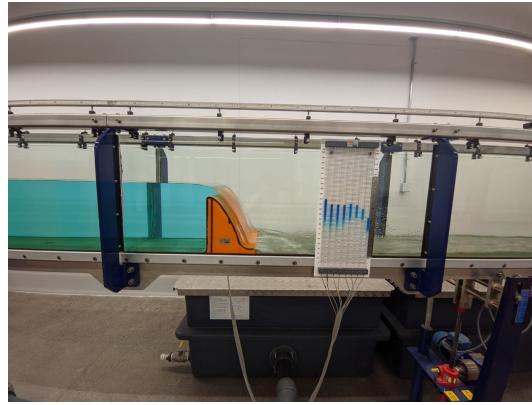


Figura 4.1: Vertedero de Ogee en canal abierto de laboratorio
Fuente: Laboratorio UTFSM campus San Joaquín

4.1. Modelo del vertedero en Ansys Fluent

4.1.1. Definición de la geometría

Para definir la geometría, se realiza un trazado discreto del vertedero de Ogee en AutoCAD con sus respectivas dimensiones, tal como se presenta en la figura 4.2 a continuación:

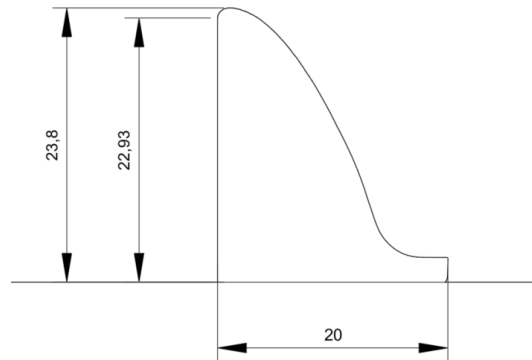


Figura 4.2: Geometría vertedero de Ogee, unidades en [cm]
Fuente: Elaboración Propia

NOTA: No se suavizaron las curvas del vertedero, debido a que Ansys detecta infinitos nodos al importar una geometría curva, lo que produce que el modelo no converja al tener una cantidad excesiva de particiones en su geometría.

Posteriormente, se ingresó la geometría a Ansys mediante la extensión de Workbench Design Modeler, como se aprecia en la siguiente figura 4.3:

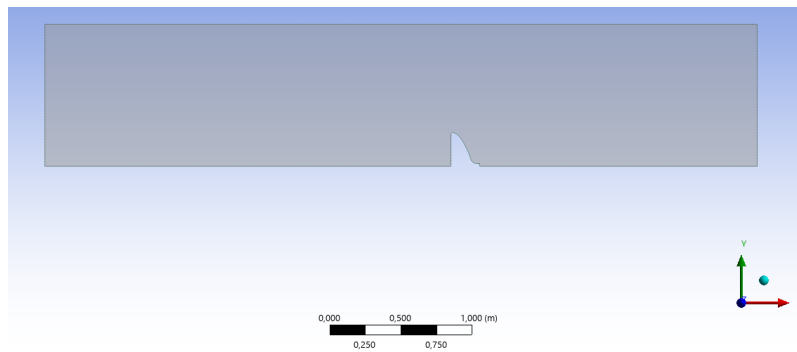
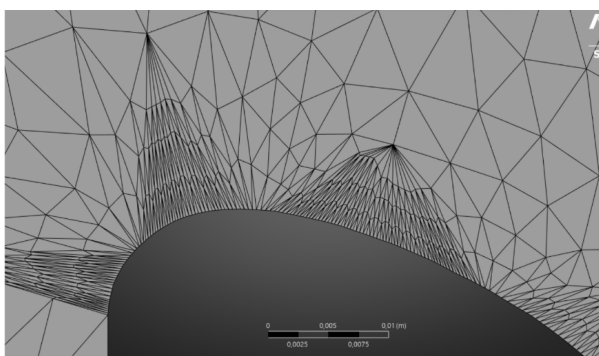


Figura 4.3: Geometría vertedero de Ogee en Ansys Design Modeler
Fuente: Elaboración Propia

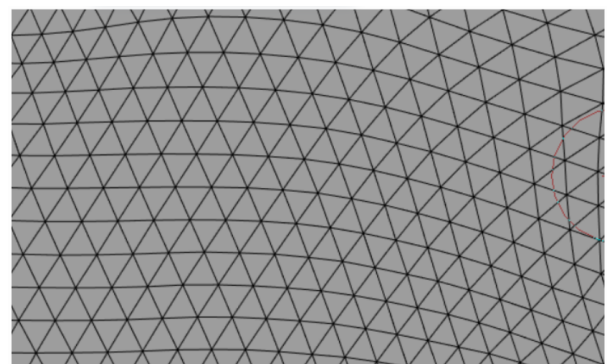
4.1.2. Mallado

Con la geometría ya definida, se procedió a ingresarla a la herramienta Meshing de Workbench, donde se realizó el mallado del dominio computacional, las principales características se detallan a continuación:

- Tipo de Mallado: Fluent (ANSYS Inc., 2024), recomendado por el manual del usuario para simulaciones 2D en Ansys Fluent.
- Los elementos tienen geometría triangular.
- Número de elementos: 105984
- Número de nodos: 53833
- Se definen por defecto elementos más pequeños en sectores curvos del vertedero, donde se necesita mayor precisión en los datos, ver figura 4.4a.
- En el resto de la malla, se definen elementos de tamaño 0.04 [m], ver figura 4.4b.



(a) Mallado sectores curvos del vertedero



(b) Grilla del resto del canal abierto

Figura 4.4: Mallado del dominio computacional
Fuente: Elaboración Propia

Además, en el apartado del mallado también se pueden generar los denominados named selection, los cuáles corresponden a grupos de puntos que, posteriormente, serán asignados con una condición de borde, ver figura 4.5.



Figura 4.5: Named selections generados
Fuente: Elaboración Propia

Donde:

- A: Corresponde al named selection INLET, entrada de caudal.
- B: Corresponde al named selection STATIC WALL, pared sin velocidad.
- C: Corresponde al named selection OUTLET, salida de caudal.
- D: Corresponde al named selection ENVIROMENT, borde superior en presión atmosférica, ya que se trata de un canal abierto.

4.1.3. Configuraciones del modelo

A continuación, se presentan las configuraciones generales que se le aplicaron al modelo:

- Antes de ejecutar el setup, se activó la opción de paralelización del solver, es decir, se permitió que el solver utilizara los 4 núcleos del computador para realizar simulación en paralelo, ahorrando costo computacional.
- Se eligió un solver basado en la presión para la resolución del modelo, ya que la otra opción corresponde a un solver basado en la densidad, el cual es inviable considerando que el agua posee densidad constante.
- Se realizó una simulación de tipo Steady, ya que se buscan resultados para el flujo completamente desarrollado.
- Se definió aceleración de gravedad en dirección $-e_y$ con magnitud de $9,81 [m/s^2]$.
- Para el flujo bifásico, se adoptó el método VOF, considerando un coeficiente de tensión agua-aire constante con el valor de $0.072 [N/m]$ (Mak & Wong, 1990).
- Para la turbulencia, se adoptó un modelo viscoso k-epsilon realizable, buscando la convergencia más rápida del programa.
- Para la resolución se utilizó el método coupled (ANSYS Inc., 2024), recomendado por el manual de Ansys para las simulaciones de canal abierto, con un paso de tiempo $\Delta t = 0.1[s]$.
- Como criterio de detención de la simulación, Ansys por defecto establece que los valores residuales correspondientes a la continuidad, velocidades, parámetros k-epsilon y VOF sean menores que 10^{-3} .

4.1.4. Condiciones de borde

Se definieron las siguientes condiciones de borde para las named selection anteriormente definidas:

- **INLET**: se le asignó una velocidad de entrada asociada al caudal que se está simulando.
- **STATIC WALL**: se le asignó velocidad nula.
- **OUTLET y ENVIROMENT**: se les asignó presión atmosférica.

4.1.5. Resultados modelo vertedero

A continuación, se presentan los diagramas de velocidades, presiones y eje hidráulico para el caudal $Q=8[L/s]$, los diagramas resultante para el resto de los caudales se encuentran adjuntos en el anexo B.

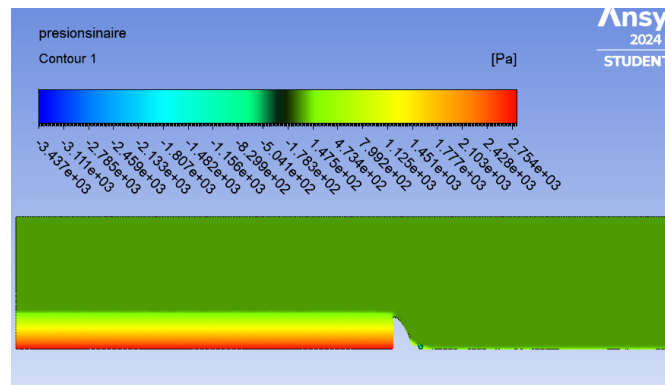


Figura 4.6: Diagrama de presiones, $Q=8 [L/s]$
Fuente: Elaboración Propia

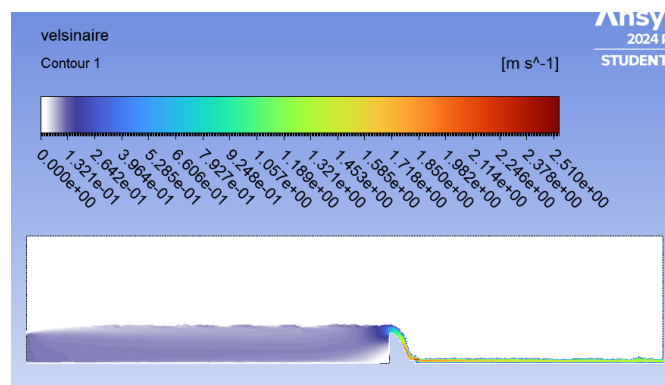


Figura 4.7: Diagrama de velocidades, $Q=8 [L/s]$
Fuente: Elaboración Propia

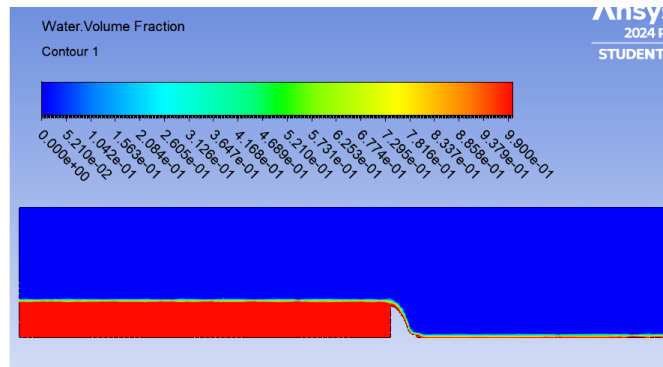


Figura 4.8: Eje hidráulico, $Q=8$ [L/s]
Fuente: Elaboración Propia

4.2. Validación mediante muestras de laboratorio

4.2.1. Equipamiento

El equipamiento utilizado (Armfield, 2020) para la realización del ensayo es el siguiente:

- Canal inclinable con paredes de vidrio (S6-MkII)
- Vertedero tipo Ogee y manómetro de ocho tubos S6-23, figura 4.9.



Figura 4.9: Vertedero tipo Ogee S6-23
Fuente: Laboratorio UTFSM campus San Joaquín

4.3. Procedimiento de medición

Para la calibración del modelo desarrollado en Ansys se tomaron las siguientes medidas en laboratorio:

- Se midió mediante una linmímetro el eje hidráulico en 8 puntos para 5 muestras de caudal distintos (2, 3, 5, 8 y 12 [L/s]).
- Las presiones se midieron mediante 8 sensores, cuyas ubicaciones espaciales se presentan en la figura 4.10.6
- Se midieron las cotas piezométricas para 22 caudales distintos, la medición se tomó con la ayuda de una regla como se puede apreciar en la figura 4.11

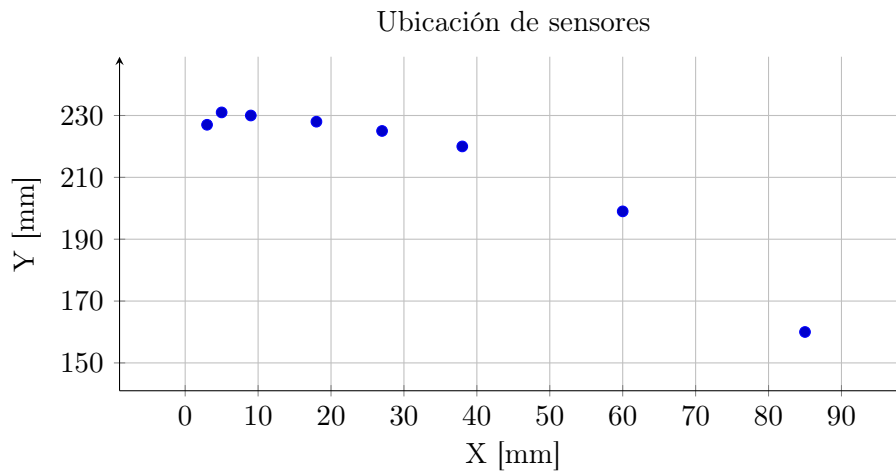


Figura 4.10: Distribución espacial de sensores en mm
Fuente: Elaboración Propia

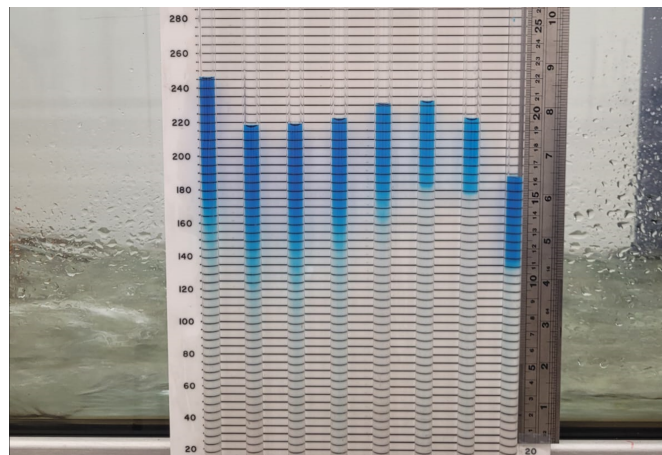


Figura 4.11: Medición de cotas piezométricas
Fuente: Laboratorio UTFSM campus San Joaquín

4.4. Comparación de resultados

4.4.1. Validación eje hidráulico

Se realizó la comparación entre los resultados obtenidos en el software Ansys y las muestras tomadas en laboratorio. Sin embargo, no se tiene certeza de dónde delimitar el eje hidráulico obtenido en Ansys, ya

que llegando a la cota de pelo de agua empieza a existir una fracción de volumen asociada al líquido y otra asociada al aire, por lo que se consideraron los siguientes 2 casos:

- Caso 1: considerando el eje hidráulico donde el porcentaje de volumen de agua se encuentra entre el 30 y el 60 %.
- Caso 2: considerando el eje hidráulico donde el porcentaje de volumen de agua se encuentra entre el 60 y el 80 %.

Se obtienen los gráficos comparativos entre el eje hidráulico real y el calculado numéricamente para los dos casos en estudio, obteniendo los siguientes resultados para $Q=3$ [L/s], para el resto de los caudales las gráficas estarán presentes en el anexo D.

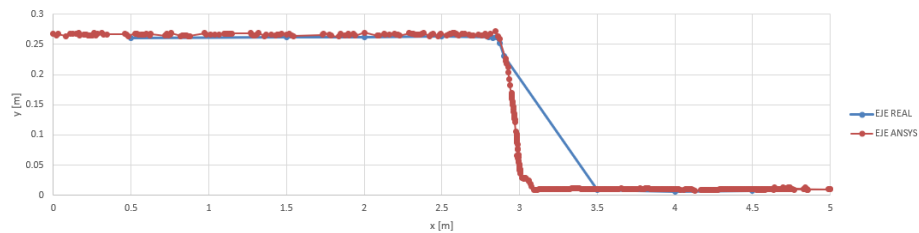


Figura 4.12: Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 1, $Q= 3$ [L/s]
Fuente: Elaboración Propia

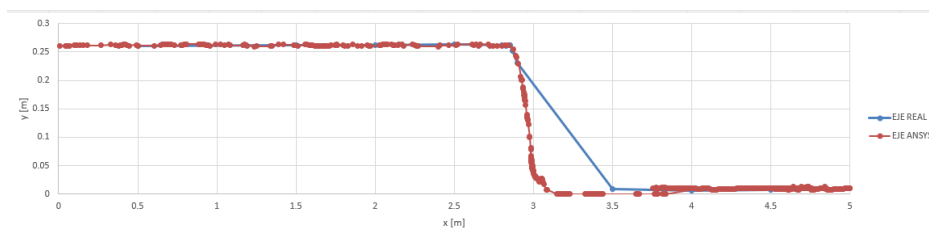


Figura 4.13: Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 2, $Q= 3$ [L/s]
Fuente: Elaboración Propia

Se aprecia que el eje hidráulico obtenido numéricamente visualmente se ajusta bien a los datos experimentales, se procede entonces a calcular los valores asociados a los criterios NSE y RSR, los resultados se muestran a continuación en la tabla 4.1:

Tabla 4.1: Resultados validación eje hidráulico. Fuente: Elaboración propia.

Q [L/s]	Caso	NSE	Clasificación NSE	RSR	Clasificación RSR
2	1	0.9828	Muy bueno	0.1310	Muy Bueno
2	2	0.9932	Muy bueno	0.0824	Muy Bueno
3	1	0.9949	Muy bueno	0.0713	Muy Bueno
3	2	0.9839	Muy bueno	0.1267	Muy Bueno
5	1	0.9980	Muy bueno	0.0451	Muy Bueno
5	2	0.9993	Muy bueno	0.0265	Muy Bueno
8	1	0.9971	Muy bueno	0.0536	Muy Bueno
8	2	0.9991	Muy bueno	0.0299	Muy Bueno
12	1	0.9994	Muy bueno	0.0249	Muy Bueno
12	2	0.9981	Muy bueno	0.0431	Muy Bueno

Se aprecia que todos los criterios de error cumplen en sus rangos más óptimos, por lo que el eje hidráulico de la simulación numérica estaría bien validado. Además, si se observan las gráficas comparativas, se aprecia que el modelo se ajusta mejor cuando trabaja con caudales pequeños.

4.4.2. Validación presiones

A continuación, se presentan las presiones obtenidas directamente de las muestras observadas en laboratorio para cada sensor, en la figura 4.14:

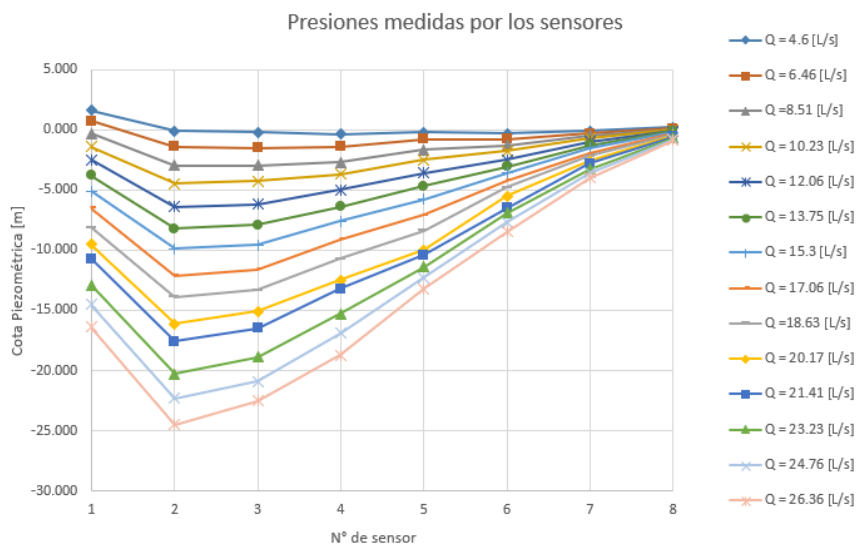


Figura 4.14: Presión medida en laboratorio
Fuente: Elaboración propia

También se presentan las presiones obtenidas desde la modelación numérica en Ansys Fluent, a continuación en la figura 4.15:

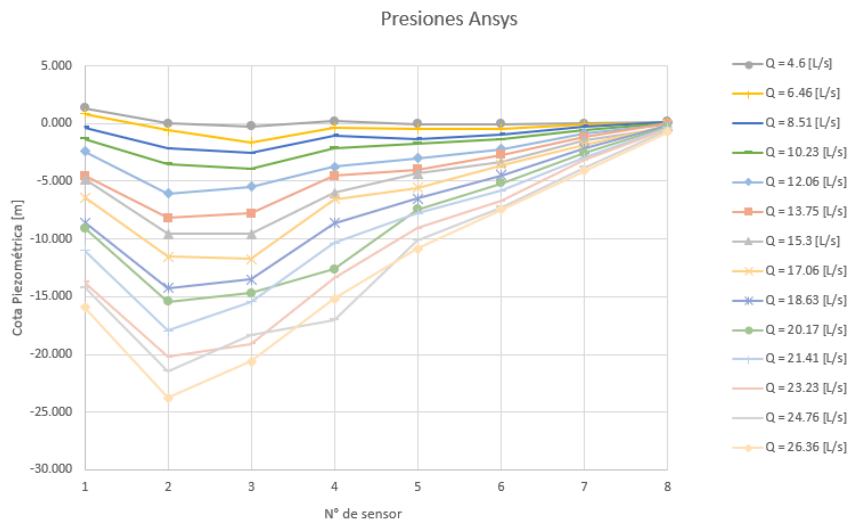


Figura 4.15: Presiones calculadas en Ansys
 Fuente: Elaboración propia

Se pueden apreciar similitudes generales entre las gráficas obtenidas, para mejor visualización se presenta a continuación una comparación entre las curvas obtenidas para los caudales de 4.6, 6.46 y 8.51 [L/s] en la figura 4.16, mientras que en el anexo C se presenta la comparación entre los demás casos de caudal.

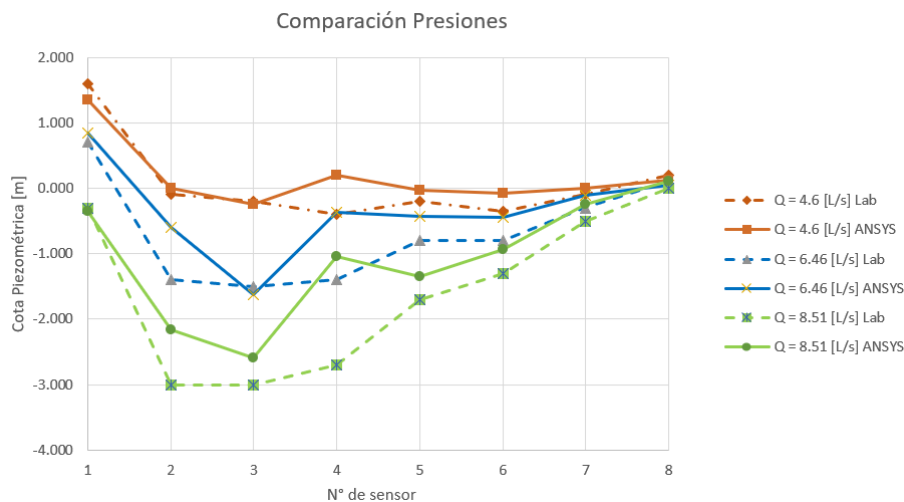


Figura 4.16: Comparación distribución de presiones para distintos caudales
 Fuente: Elaboración propia

Se pueden apreciar mejor la similitud entre las presiones obtenidas por el software Ansys Fluent y por las muestras obtenidas de laboratorio, sin embargo, las mediciones presentan diferencias mayores en el sensor 4.

A continuación se presentan los resultados de desempeño de la aproximación numérica de las presiones con respecto a las muestras obtenidas en laboratorio en la figura 4.2:

Tabla 4.2: Resultados validación presiones. Fuente: Elaboración propia

Q [L/s]	NSE	Clasificación NSE	RSR	Clasificación RSR
4.6	0.6937	Bueno	0.5534	Bueno
6.46	0.5172	Satisfactorio	0.6948	Satisfactorio
8.51	0.5151	Satisfactorio	0.6963	Satisfactorio
10.23	0.7109	Bueno	0.5377	Bueno
12.06	0.9178	Muy bueno	0.2867	Muy Bueno
13.75	0.9201	Muy bueno	0.2827	Muy Bueno
15.3	0.9392	Muy bueno	0.2465	Muy Bueno
17.06	0.9232	Muy bueno	0.2771	Muy Bueno
18.63	0.9529	Muy bueno	0.2169	Muy Bueno
20.17	0.9662	Muy bueno	0.1839	Muy Bueno
21.41	0.9348	Muy bueno	0.2553	Muy Bueno
23.23	0.9720	Muy bueno	0.1673	Muy Bueno
24.76	0.9677	Muy bueno	0.1798	Muy Bueno
26.36	0.9499	Muy bueno	0.2239	Muy Bueno

Se puede apreciar que para todos los caudales las presiones cumplen con los criterios mínimos de desempeño, por lo que el modelo CFD estaría calibrado para este parámetro.

4.5. Análisis de resultados modelo vertedero de Ogee en Ansys Fluent

A partir de los resultados obtenidos en la presente sección se determina lo siguiente:

- El modelo CFD del vertedero de Ogee en Ansys Fluent se ajusta de manera, como mínimo satisfactoria a los datos de presión obtenidos en los ensayos de laboratorio, por lo que esta variable obtenida del modelo se puede considerar calibrada.
- El eje hidráulico se ajustó a los datos obtenidos en laboratorio en el mejor de los rangos de los medidores de desempeño, por lo que se concluye que esta variable obtenida del modelo numérico se encuentra bien calibrada y con alta precisión en los resultados.
- Los valores obtenidos para el eje hidráulico se ajustaron de mejor manera que las presiones.
- El modelo presenta mejor desempeño, menor costo computacional y mayor precisión de los resultados al trabajar con caudales mayores a 12 [L/s].
- Considerando todo lo anteriormente mencionado, se concluye que Ansys Fluent puede utilizarse como una herramienta confiable para la validación y calibración de los modelos a diseñar en la memoria.

5. Modelación Cavity Flow

5.1. Definición del problema físico

El problema Cavity Flow es ampliamente investigado en el contexto de la dinámica de fluidos, cuya definición se presenta a continuación:

Un fluido inmerso en una cavidad rectangular cerrada (Figura 5.1) en la que el borde superior se desplazó con velocidad constante. Este caso no posee solución analítica, sin embargo, su solución numérica se presenta bajo las siguientes suposiciones:

- Flujo estacionario: $\partial/\partial t = 0$.
- Campo gravitatorio igual a cero.
- Condición de adherencia en bordes inferior y costados: $u = v = 0$.
- Condición de adherencia en borde superior: $u(x, 1) = 1, v(x, 1) = 0$.

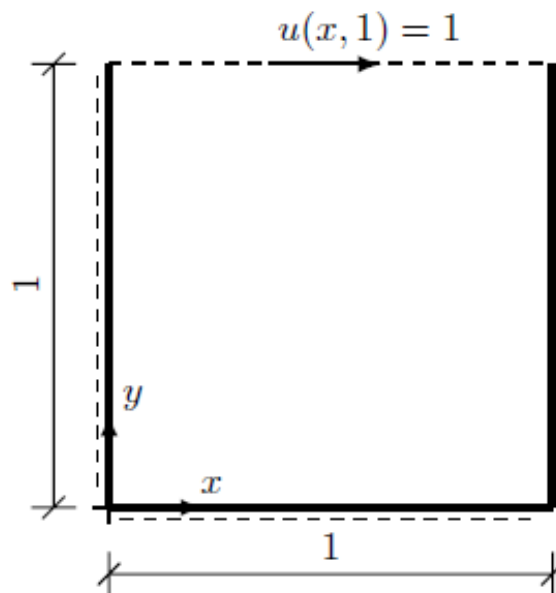


Figura 5.1: Representación Cavity Flow y Condiciones de Contorno
Fuente: Clases Profesora Vivian Aranda

Para los parámetros del flujo, se considerará densidad constante y uniforme $\rho = 1$, viscosidad dinámica del fluido constante $\mu = 0.01$, velocidad de la pared superior $u(x, 1) = 1$. Lo que se traduce en un número de Reynolds $Re = 100$ (flujo laminar).

5.2. Modelación en Ansys Fluent

La presente sección tiene como objetivo exponer la modelación realizada en Ansys Fluent del fenómeno en estudio, modelo que será utilizado posteriormente para la calibración y validación de los programas a desarrollar en los métodos numéricos mencionados.

5.2.1. Geometría de la cavidad

Se desarrolló la geometría de la cavidad mediante la herramienta de Ansys Workbench DesignModeler, se consideró un ancho y un largo de 1 [m], obteniendo así la siguiente configuración presente en la figura 5.2:

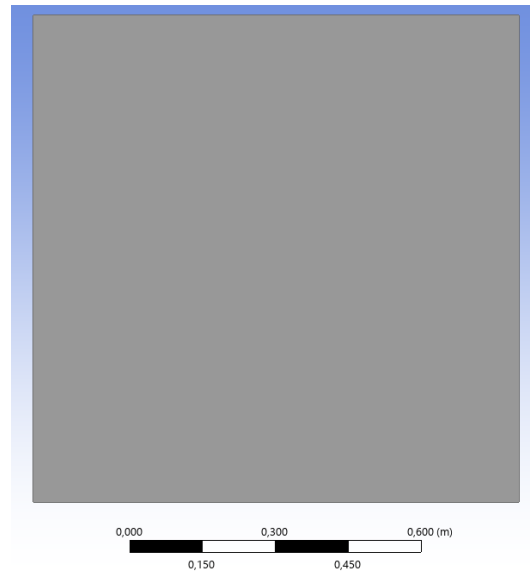


Figura 5.2: Geometría cavidad en DesignModeler
Fuente: Elaboración propia

5.2.2. Mallado

Para el proceso de mallado se utilizó la herramienta Meshing de Ansys Workbench. Se aplicó un mallado de tipo Fluent con 17689 elementos cuadrados de tamaño 3 [cm] y 17689 nodos, como se presenta en la figura 5.3:

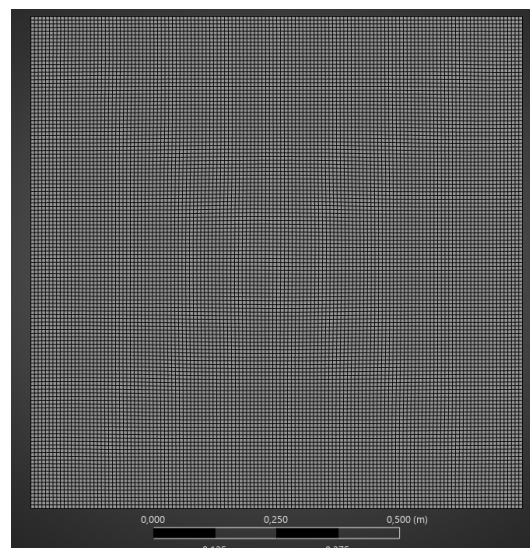


Figura 5.3: Mallado cavidad en Meshing
Fuente: Elaboración propia

Al igual que para el caso del modelo CFD del vertedero de Ogee, se procedió a definir en la sección Meshing los named selection para la asignación de condiciones de borde, los cuáles se presentan a continuación en la figura 5.4:

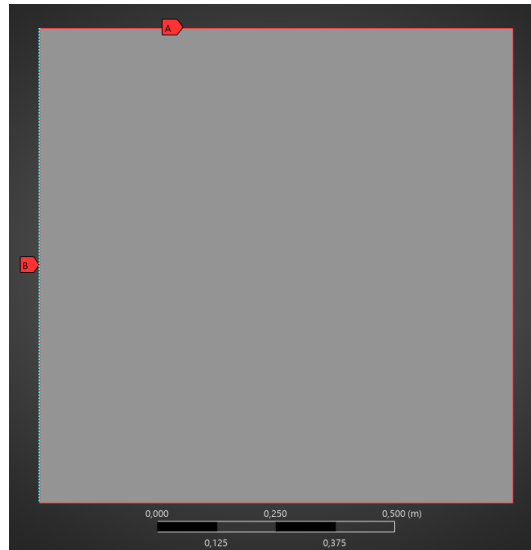


Figura 5.4: Named selections
Fuente: Elaboración propia

Donde:

A: Corresponde al named selection *moving wall*.

B: Corresponde al named selection *static wall*.

5.2.3. Configuraciones del modelo

Para el cálculo del modelo se tomaron las siguientes consideraciones:

- Antes de ejecutar el setup, se activó la opción de paralelización del solver.
- Se eligió un solver basado en la presión para la resolución del modelo.
- Se realizó una simulación de tipo Steady, ya que se buscan resultados para el flujo completamente desarrollado.
- Se definió aceleración de gravedad nula.
- Se consideró una situación de escurrimiento de flujo laminar, además se modificaron los parámetros del agua para obtener un número de Reynolds = 100.
- Para la resolución se utilizó el método coupled (ANSYS Inc., 2024).
- Como criterio de detención de la simulación, Ansys por defecto establece que los valores residuales correspondientes a la continuidad y velocidades sean menores que 10^{-3} .

5.2.4. Condiciones de borde

Se les asignaron las siguientes condiciones de borde a cada named selection:

- *moving wall*: Se le asignó la condición de borde de pared móvil con adherencia y velocidad de 1 [m/s].
- *static wall*: Se le asignó la condición de borde de pared estático con adherencia y velocidad nula.

5.2.5. Resultados modelo Cavity Flow en Ansys Fluent

En la figura 5.5 se presentan las líneas de corriente obtenidas con el modelo Ansys Fluent:

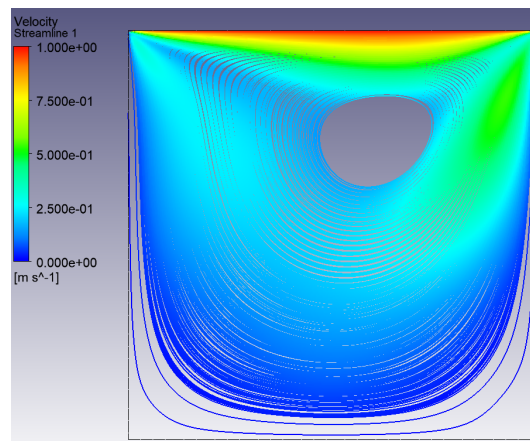


Figura 5.5: Líneas de corriente en la cavidad
Fuente: Elaboración propia

También se obtuvieron los vectores de velocidad en la cavidad, los cuáles se presentan a continuación en la figura 5.6:

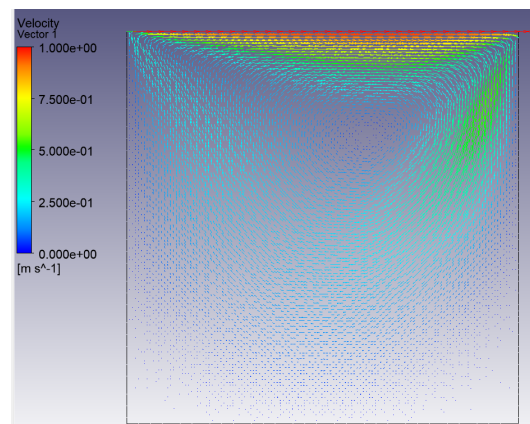


Figura 5.6: Vectores de velocidad en la cavidad
Fuente: Elaboración propia

A continuación se presenta la distribución de velocidades en la cavidad, figura 5.7:

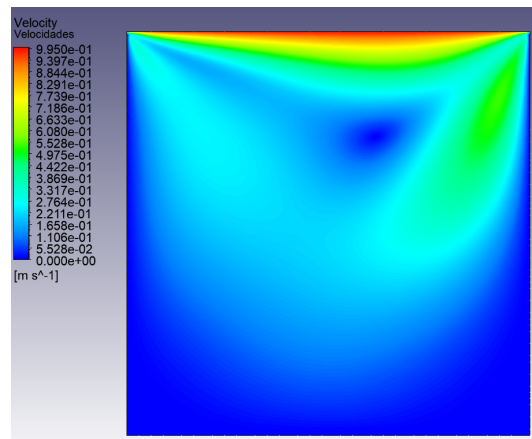


Figura 5.7: Velocidades en la cavidad
Fuente: Elaboración propia

Finalmente se obtuvieron las presiones en toda la cavidad, las cuáles se presentan a continuación en la figura 5.8:

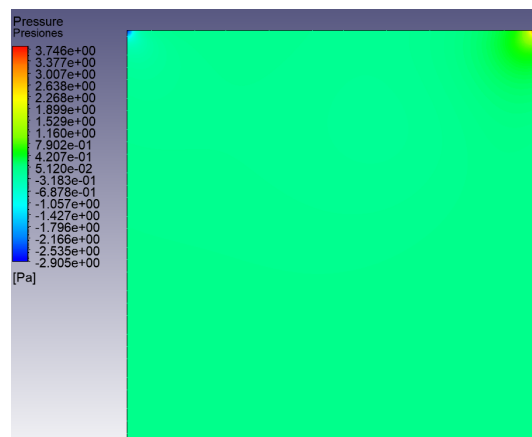


Figura 5.8: Presiones en la cavidad
Fuente: Elaboración propia

5.3. Modelación mediante el Método de Diferencias Finitas (Barba & Forsyth, 2013)

5.3.1. Discretización de las Ecuaciones en Diferencias Finitas

Para comenzar, se deben discretizar en diferencias finitas las componentes \hat{e}_x y \hat{e}_y de la ecuación de Navier-Stokes para flujo incompresible (3.36):

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + g_x + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \tag{5.1}$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + g_y + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \tag{5.2}$$

Considerando Flujo Bidimensional y el supuesto de que la aceleración de gravedad es nula, las ecuaciones a discretizar son las siguientes:

$$\frac{Du}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right] \quad (5.3)$$

$$\frac{Dv}{Dt} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right] \quad (5.4)$$

Se aplicarán las siguientes aproximaciones en diferencias finitas para las derivadas de cada variable de la ecuación de Navier-Stokes:

- Para las primeras derivadas espaciales de las velocidades u y v se aplicará la discretización asociada a la aproximación en diferencias finitas por el borde inferior, tal como se expresó en 3.48
- Para la segunda derivada espacial de las velocidades u y v se utilizará la formulación de diferencias centradas, como se presentó en 3.53.
- Para la primera derivada espacial de la presión, se utilizará la aproximación por diferencias centradas, como se presentó en 3.51.
- Para la derivada temporal de las velocidades u y v , se utilizará el método de Forward Euler, presentado en 3.56.

Trabajando entonces las expresiones 5.3 y 5.4:

En dirección \hat{e}_x :

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial x} + \nu \left[\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right]$$

Discretizando en el sentido de las Diferencias Finitas:

$$\begin{aligned} \frac{U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n}{\Delta t} + U_{i,j}^n \left[\frac{U_{i,j}^n - U_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right] + V_{i,j}^n \left[\frac{U_{i,j}^n - U_{i,j-1}^n}{\Delta y} \right] &= -\frac{1}{\rho} \left[\frac{P_{i+1,j}^n - P_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right] \\ + \nu \left(\left[\frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right] + \left[\frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] \right) \end{aligned}$$

Multiplicando la expresión por Δt :

$$\begin{aligned} U_{i,j}^{n+1} - U_{i,j}^n + U_{i,j}^n \cdot \Delta t \left[\frac{U_{i,j}^n - U_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right] + V_{i,j}^n \cdot \Delta t \left[\frac{U_{i,j}^n - U_{i,j-1}^n}{\Delta y} \right] &= -\frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{P_{i+1,j}^n - P_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right] \\ + \nu \cdot \Delta t \left(\left[\frac{U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right] + \left[\frac{U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] \right) \end{aligned}$$

Agrupando términos y despejando $U_{i,j}^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
 U_{i,j}^{n+1} = U_{i,j}^n - U_{i,j}^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) [U_{i,j}^n - U_{i-1,j}^n] - V_{i,j}^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta y} \right) [U_{i,j}^n - U_{i,j-1}^n] - \frac{\Delta t}{2\rho\Delta x} [P_{i+1,j}^n - P_{i-1,j}^n] \\
 + \nu \left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) [U_{i+1,j}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i-1,j}^n] + \left(\frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) [U_{i,j+1}^n - 2U_{i,j}^n + U_{i,j-1}^n] \right) \quad (5.5)
 \end{aligned}$$

En dirección \hat{e}_y :

$$\frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial P}{\partial y} + \nu \left[\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right]$$

Aplicando la discretización por Diferencias Finitas:

$$\begin{aligned}
 \frac{V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n}{\Delta t} + U_{i,j}^n \left[\frac{V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right] + V_{i,j}^n \left[\frac{V_{i,j}^n - V_{i,j-1}^n}{\Delta y} \right] = -\frac{1}{\rho} \left[\frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right] \\
 + \nu \left(\left[\frac{V_{i+1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right] + \left[\frac{V_{i,j+1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] \right)
 \end{aligned}$$

Multiplicando por Δt a ambos lados de la expresión:

$$\begin{aligned}
 V_{i,j}^{n+1} - V_{i,j}^n + U_{i,j}^n \Delta t \left[\frac{V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n}{\Delta x} \right] + V_{i,j}^n \Delta t \left[\frac{V_{i,j}^n - V_{i,j-1}^n}{\Delta y} \right] = -\frac{\Delta t}{\rho} \left[\frac{P_{i,j+1}^n - P_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right] \\
 + \nu \Delta t \left(\left[\frac{V_{i+1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i-1,j}^n}{\Delta x^2} \right] + \left[\frac{V_{i,j+1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j-1}^n}{\Delta y^2} \right] \right)
 \end{aligned}$$

Agrupando términos y despejando $V_{i,j}^{n+1}$:

$$\begin{aligned}
 V_{i,j}^{n+1} = V_{i,j}^n - U_{i,j}^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta x} \right) [V_{i,j}^n - V_{i-1,j}^n] - V_{i,j}^n \left(\frac{\Delta t}{\Delta y} \right) [V_{i,j}^n - V_{i,j-1}^n] - \frac{\Delta t}{2\rho\Delta y} [P_{i,j+1}^n - P_{i,j-1}^n] \\
 + \nu \left(\left(\frac{\Delta t}{\Delta x^2} \right) [V_{i+1,j}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i-1,j}^n] + \left(\frac{\Delta t}{\Delta y^2} \right) [V_{i,j+1}^n - 2V_{i,j}^n + V_{i,j-1}^n] \right) \quad (5.6)
 \end{aligned}$$

Para la modelación de la presión, se utiliza la Ecuación de Poisson, calculada anteriormente en 3.44

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\rho \left[\frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (5.7)$$

Se aplicarán las siguientes aproximaciones en diferencias finitas para las derivadas de cada variable de la ecuación de Poisson asociada a la presión:

- Para las primeras derivadas espaciales de las velocidades u y v se aplicará la discretización asociada a la aproximación en diferencias centradas, tal como se expresó en 3.51
- Para la segunda derivada espacial de la presión se utilizará la formulación de diferencias centradas, como se presentó en 3.53.
- Se agregará un término asociado a la variación temporal en la ecuación de Poisson, utilizado por la profesora Lorena Barba en su paper "12 steps to Navier-Stokes" (Barba & Forsyth, 2013).

La ecuación entonces a discretizar es la siguiente:

$$\frac{\partial^2 P}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 P}{\partial y^2} = -\rho \left[\underbrace{-\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right)}_{\text{Término Variación Temporal}} + \frac{\partial u}{\partial x} \frac{\partial u}{\partial x} + 2 \frac{\partial u}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \frac{\partial v}{\partial y} \right] \quad (5.8)$$

Discretizando entonces la ecuación 5.8 utilizando diferencias finitas:

$$\frac{P_{i-1,j}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i+1,j}^n}{\Delta x^2} + \frac{P_{i,j-1}^n - 2P_{i,j}^n + P_{i,j+1}^n}{\Delta y^2} = \rho \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta x} \right) \right] \\ + \rho \left[-\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \cdot \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - 2 \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \cdot \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2\Delta x} - \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \cdot \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right]$$

Despejando $P_{i,j}^n$:

$$P_{i,j}^n = \frac{(P_{i+1,j}^n + P_{i-1,j}^n)\Delta y^2 + (P_{i,j+1}^n + P_{i,j-1}^n)\Delta x^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} - \frac{\rho\Delta x^2\Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \left[\frac{1}{\Delta t} \left(\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta x} + \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta x} \right) \right] \\ - \frac{\rho\Delta x^2\Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \left[-\frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \cdot \frac{U_{i+1,j}^n - U_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right] - \frac{\rho\Delta x^2\Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \left[-2 \frac{U_{i,j+1}^n - U_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \cdot \frac{V_{i+1,j}^n - V_{i-1,j}^n}{2\Delta x} \right] \\ - \frac{\rho\Delta x^2\Delta y^2}{2(\Delta x^2 + \Delta y^2)} \left[-\frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \cdot \frac{V_{i,j+1}^n - V_{i,j-1}^n}{2\Delta y} \right] \quad (5.9)$$

5.3.2. Codificación en Matlab

Para la discretización temporal se consideraron 5000 iteraciones de tiempo, con un $\Delta t = 0.00001[s]$, mientras que para la discretización espacial se consideró una malla de 200x200 nodos. Además, se consideró un número de iteraciones de 50 para la corrección de la presión en cada intervalo de tiempo calculado.

Se codificaron 2 funciones en matlab para relajar el cálculo de la presión, la primera fue denominada *Termino_b.m*, donde se calculan todos los términos encerrados entre paréntesis de corchetes de la expresión 5.9, mientras que la segunda función fue almacenada en el archivo *presiones.m* y calcula la expresión completa de la ecuación de Poisson, estas dos funciones se presentan en los anexos E y F.

Se generó un script general donde se calculan las ecuaciones asociadas a la velocidad u y v para cada intervalo de tiempo predefinido, se actualiza la presión mediante la incorporación de las funciones *Termino_b.m* y *presiones.m* dentro del bucle. Además, se almacenaron los valores correspondientes a los errores en las dos direcciones de la velocidad y a la ecuación de continuidad. Finalmente, se genera un apartado gráfico donde se generaron las líneas de corriente, vectores de velocidad, diagramas de velocidades y presiones, gráficas de velocidades en $x=0.5$ e $y=0.5$ y curvas de tendencia de la norma 2 del error. El archivo fue denominado *cavity.m* y el código se encuentra presente en el anexo G.

5.4. Modelación mediante el Método de Elementos Finitos

5.4.1. Ecuaciones diferenciales parciales

Para un fluido newtoniano incompresible estacionario sin considerar fuerzas de cuerpo ni externas, las ecuaciones que rigen el flujo bidimensional son:

Ecuación de continuidad:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.10)$$

Ecuación de Navier-Stokes (3.36):

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5.11)$$

$$\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5.12)$$

donde u y v son las componentes x, y del vector velocidad, p es la presión estática, ρ es la densidad y μ la viscosidad dinámica del fluido que fluye.

Usando L_o y V_o como longitud características y velocidad características respectivamente (referencia), definimos las variables adimensionales como:

$$x^* = \frac{x}{L_o} \quad y^* = \frac{y}{L_o} \quad u^* = \frac{u}{V_o} \quad v^* = \frac{v}{V_o} \quad p^* = \frac{p}{\rho V_o^2}$$

Las ecuaciones que gobiernan el movimiento, ecuación 5.10, ecuación 5.11 y ecuación 5.12 se pueden escribir en su forma adimensional como:

La ecuación de continuidad:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u^* V_o}{\partial x^* L_o} + \frac{\partial v^* V_o}{\partial y^* L_o} &= 0 \\ \frac{V_o}{L_o} \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{V_o}{L_o} \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= 0 \\ \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + \frac{\partial v^*}{\partial y^*} &= 0\end{aligned}$$

La ecuación de Navier-Stokes en la dirección x :

$$\begin{aligned}\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial x} + \mu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \rho \left(u^* V_o \frac{\partial u^* V_o}{\partial x^* L_o} + v^* V_o \frac{\partial u^* V_o}{\partial y^* L_o} \right) &= - \frac{\partial p^* \rho V_o^2}{\partial x^* L_o} + \mu \left(\frac{\partial^2 u^* V_o}{\partial (x^* L_o)^2} + \frac{\partial^2 u^* V_o}{\partial (y^* L_o)^2} \right) \\ \frac{\rho V_o^2}{L_o} \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) &= - \frac{\rho V_o^2}{L_o} \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu V_o}{L_o^2} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial (y^*)^2} \right) \\ \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) &= - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{L_o}{\rho V_o^2} \frac{\mu V_o}{L_o^2} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial (y^*)^2} \right) \\ \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) &= - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{\mu}{\rho V_o L_o} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial (y^*)^2} \right) \\ \left(u^* \frac{\partial u^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial u^*}{\partial y^*} \right) &= - \frac{\partial p^*}{\partial x^*} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 u^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 u^*}{\partial (y^*)^2} \right)\end{aligned}$$

Realizando el mismo procedimiento para la ecuación de Navier-Stokes en la dirección y , se obtiene:

$$\begin{aligned}\rho \left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) &= - \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \left(u^* \frac{\partial v^*}{\partial x^*} + v^* \frac{\partial v^*}{\partial y^*} \right) &= - \frac{\partial p^*}{\partial y^*} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 v^*}{\partial (x^*)^2} + \frac{\partial^2 v^*}{\partial (y^*)^2} \right)\end{aligned}$$

donde R_e es el número de Reynolds.

$$R_e = \frac{\rho V_o L_o}{\mu}$$

reemplazando x^* , y^* , u^* , v^* , p^* , por x , y , u , v , p respectivamente.

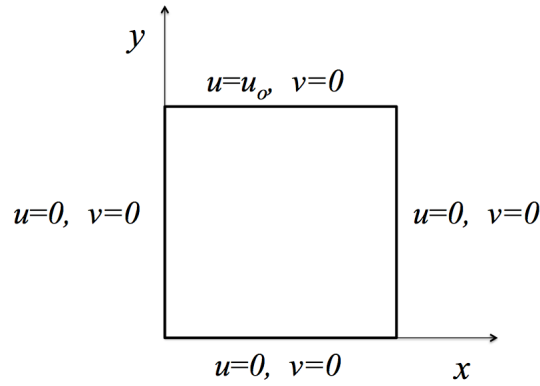
$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad (5.13)$$

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \quad (5.14)$$

$$\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \quad (5.15)$$

5.4.2. Problema de flujo confinado en una cavidad

Finalmente las ecuaciones diferenciales con condiciones de borde que modelan el problema de un flujo confinado en una cavidad rectangular impulsada por una velocidad horizontal uniforme en la parte superior son:



$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0$$

$$\left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)$$

$$\left(u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right)$$

5.4.3. Elementos isoparamétricos y funciones de forma

Se utilizan elementos rectangulares de ocho nodos para modelar el flujo, donde los ocho nodos de cada elemento modelan las componentes de velocidad u y v , y los cuatro nodos de las esquinas modelan la presión p . Las libertades numeradas siguen el orden u, p, v , según Smith (Smith et al., 2014) y Taylor (Zienkiewicz & Taylor, 1981).

Denotemos un elemento por Ω . Las funciones de forma para los elementos rectangulares se expresan en términos de coordenadas locales ξ y η donde

$$\xi = \frac{2(x - x_c)}{l_x} \quad \eta = \frac{2(y - y_c)}{l_y}$$

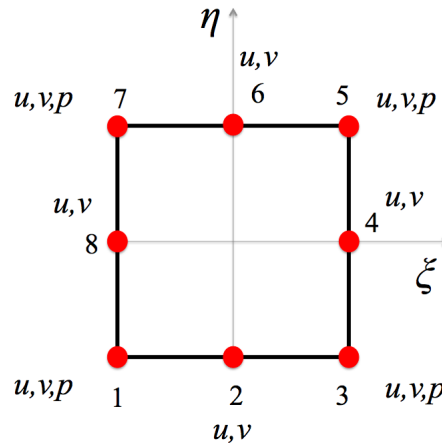


Figura 5.9: Elemento de 8 nodos

Aquí, (x_c, y_c) es el centróide del elemento, y l_x, l_y representan su longitud en dirección x e y .

Los nodos 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 y 8 tienen coordenadas $(-1, -1), (0, -1), (1, -1), (1, 0), (1, 1), (0, 1), (-1, 1), (-1, 0)$ en el sistema de coordenadas local. Entonces, la forma general de las funciones de forma para un elemento rectangular bilineal de 4 nodos (considerando los nodos de las esquinas) usando coordenadas locales es

$$M = a_1 + b_1\xi + c_1\eta + d_1\xi\eta \quad (5.16)$$

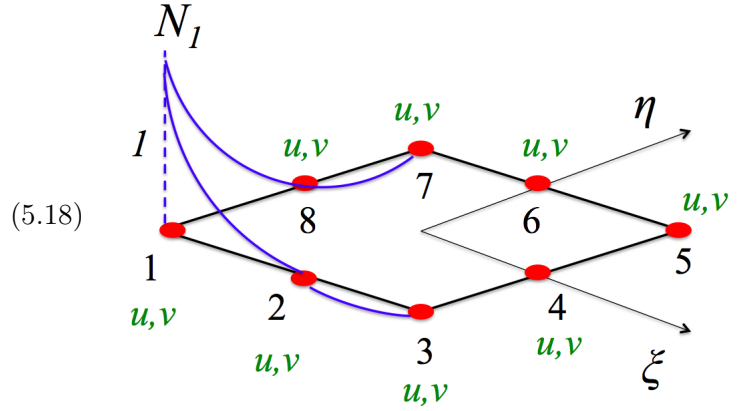
La forma general de las funciones de forma para un elemento rectangular cuadrático de 8 nodos (considerando todos los nodos) usando coordenadas locales es:

$$N = a_2 + b_2\xi + c_2\eta + d_2\xi^2 + e_2\xi\eta + f_2\eta^2 + g_2\xi^2\eta + h_2\xi\eta^2 \quad (5.17)$$

Utilizando la propiedad delta de Kronecker de las funciones de forma, de las ecuaciones 5.34 y 5.35 las funciones de forma para elementos rectangulares de 4 y 8 nodos son:

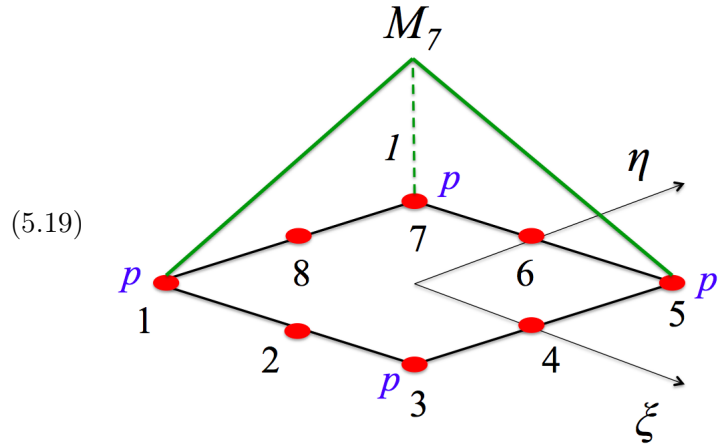
Función de forma o de interpolación N :

$$\begin{aligned}
 N_1 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \\
 N_2 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1-\eta) \\
 N_3 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+\eta) \\
 N_4 &= \frac{1}{2}(1+\xi)(1-\eta^2) \\
 N_5 &= -\frac{1}{4}(1+\xi)(1+\eta)(1-\xi-\eta) \\
 N_6 &= \frac{1}{2}(1-\xi^2)(1+\eta) \\
 N_7 &= -\frac{1}{4}(1-\xi)(1+\eta)(1+\xi-\eta) \\
 N_8 &= \frac{1}{2}(1-\xi)(1-\eta^2)
 \end{aligned}
 \tag{5.18}$$



Función de forma o de interpolación M :

$$\begin{aligned}
 M_1 &= \frac{1}{4}(1-\xi-\eta+\xi\eta) \\
 M_3 &= \frac{1}{4}(1+\xi-\eta-\xi\eta) \\
 M_5 &= \frac{1}{4}(1+\xi+\eta+\xi\eta) \\
 M_7 &= \frac{1}{4}(1-\xi+\eta-\xi\eta)
 \end{aligned}
 \tag{5.19}$$



Por lo tanto, se utilizan funciones de interpolación cuadrática para los componentes de velocidad, mientras que funciones de interpolación lineal para la presión. Como resultado, las incógnitas para las velocidades y la presión son 20 por cada elemento. Por lo tanto, las variables dependientes u , v y p se expresan como:

$$\begin{aligned}
 u &= \sum_{i=1}^8 N_i u_i \\
 v &= \sum_{i=1}^8 N_i v_i \\
 p &= \sum_{l=1}^4 M_{(2l-1)} p_{(2l-1)}
 \end{aligned}
 \tag{5.20}$$

donde u_i , v_i son las velocidades en todos los nodos y $p_{(2l-1)}$ la presión en los nodos impares.

5.4.4. Aproximación de Galerkin

Expresando las ecuaciones 5.13, 5.14 y 5.15 usando estas funciones de forma, obtenemos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^8 N_j u_j \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(\sum_{j=1}^8 N_j v_j \right) &= 0 \\ \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j + \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j &= 0 \end{aligned} \quad (5.21)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right) \\ \sum_{k=1}^8 N_k u_k \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right) + \sum_{k=1}^8 N_k v_k \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j \right) &= -\sum_{l=1}^4 \frac{\partial M_{(2l-1)}}{\partial x} p_{(2l-1)} \\ &+ \frac{1}{Re} \left[\sum_{j=1}^8 \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} u_j + \sum_{j=1}^8 \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} u_j \right] \end{aligned} \quad (5.22)$$

$$\begin{aligned} u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \frac{1}{Re} \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right) \\ \sum_{k=1}^8 N_k u_k \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j \right) + \sum_{k=1}^8 N_k v_k \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j \right) &= -\sum_{l=1}^4 \frac{\partial M_{(2l-1)}}{\partial y} p_{(2l-1)} \\ &+ \frac{1}{Re} \left[\sum_{j=1}^8 \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} v_j + \sum_{j=1}^8 \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} v_j \right] \end{aligned} \quad (5.23)$$

Empleando el enfoque residual ponderado de Galerkin en la ecuación 5.22, utilizando las funciones de ponderación N_i obtenemos:

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1}^8 N_k u_k \cdot \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right) + \sum_{k=1}^8 N_k v_k \cdot \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j \right) + \\ &+ \left(\sum_{l=1}^4 \frac{\partial M_{(2l-1)}}{\partial x} p_{(2l-1)} \right) - \frac{1}{Re} \left[\left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} u_j \right) + \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} u_j \right) \right] = 0 \quad \Bigg| \cdot N_i \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \sum_{k=1}^8 N_k u_k \cdot \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right) N_i + \sum_{k=1}^8 N_k v_k \cdot \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j \right) N_i + \\
 & + \left(\sum_{l=1}^4 \frac{\partial M_{(2l-1)}}{\partial x} p_{(2l-1)} \right) N_i - \frac{1}{R_e} \left[\left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} u_j \right) + \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} u_j \right) \right] N_i = 0 \quad \Big| \int_{\Omega} \\
 & \int_{\Omega} \sum_{k=1}^8 N_k u_k \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right) N_i d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^8 N_k v_k \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j \right) N_i d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left(\sum_{l=1}^4 \frac{\partial M_{(2l-1)}}{\partial x} p_{(2l-1)} \right) N_i d\Omega \tag{5.24} \\
 & - \int_{\Omega} \frac{1}{R_e} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} u_j \right) N_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{R_e} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} u_j \right) N_i d\Omega = 0
 \end{aligned}$$

Utilizando el teorema de divergencia de Gauss,

$$\begin{aligned}
 \int_{\Omega} \frac{1}{R_e} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} u_j \right) N_i d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{1}{R_e} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{1}{R_e} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} n_x u_j \right) N_i d\Gamma \\
 \int_{\Omega} \frac{1}{R_e} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} u_j \right) N_i d\Omega &= - \int_{\Omega} \frac{1}{R_e} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial y} d\Omega + \int_{\Gamma} \frac{1}{R_e} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} n_y u_j \right) N_i d\Gamma
 \end{aligned}$$

donde:

Γ es el límite del elemento Ω

\hat{n} , es el vector normal unitario sobre el borde del elemento y hacia afuera del elemento

$\frac{\partial N_j}{\partial n}$ es la derivada direccional de N_j en la dirección normal a Ω

$$\hat{n} = n_x \vec{e}_x + n_y \vec{e}_y = (n_x, n_y)$$

$$\frac{\partial N_j}{\partial n} = \left(\frac{\partial N_j}{\partial x}, \frac{\partial N_j}{\partial y} \right) \cdot (n_x, n_y) = \frac{\partial N_j}{\partial x} n_x + \frac{\partial N_j}{\partial y} n_y$$

tenemos:

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} \sum_{k=1}^8 N_k u_k \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right) N_i d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^8 N_k v_k \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j \right) N_i d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} \left(\sum_{l=1}^4 \frac{\partial M_{(2l-1)}}{\partial x} p_{(2l-1)} \right) N_i d\Omega + \int_{\Omega} \frac{1}{R_e} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial x} d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{1}{R_e} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} n_x u_j \right) N_i d\Gamma \\
 & + \int_{\Omega} \frac{1}{R_e} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j \right) \frac{\partial N_i}{\partial y} d\Omega - \int_{\Gamma} \frac{1}{R_e} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} n_y u_j \right) N_i d\Gamma = 0, \\
 & \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, 8
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} N_i \cdot \sum_{k=1}^8 N_k u_k \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j d\Omega + \int_{\Omega} N_i \cdot \sum_{k=1}^8 N_k v_k \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j d\Omega \\
 & \qquad \qquad \qquad + \int_{\Omega} N_i \cdot \sum_{l=1}^4 \frac{\partial M_{(2l-1)}}{\partial x} p_{(2l-1)} d\Omega \\
 & \qquad \qquad \qquad + \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j d\Omega + \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j d\Omega = \frac{1}{R_e} \int_{\Gamma} N_i \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial n} u_j d\Gamma \\
 & \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, 8
 \end{aligned} \tag{5.25}$$

donde:

$$g_i = \frac{1}{R_e} \int_{\Gamma} N_i \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial n} u_j \right) d\Gamma, \quad i = 1, 2, \dots, 8.$$

La expresión 5.25 corresponde a las condiciones de Neumann en los bordes y son datos conocidos, por lo tanto, pertenecen a \bar{F} . En el caso de un flujo confinado en una cavidad, no existe flujo entrante o saliente por los bordes, es decir,

$$\frac{\partial N_j}{\partial n} u_j = 0,$$

por lo tanto, $g_i = 0$ en la ecuación 5.25.

$$\begin{aligned}
 & \int_{\Omega} N_i \cdot \sum_{k=1}^8 N_k u_k \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j d\Omega + \int_{\Omega} N_i \cdot \sum_{k=1}^8 N_k v_k \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j d\Omega \\
 & + \int_{\Omega} N_i \cdot \sum_{l=1}^4 \frac{\partial M_{(2l-1)}}{\partial x} p_{(2l-1)} d\Omega + \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j d\Omega + \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j d\Omega = 0 \\
 & \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, 8
 \end{aligned} \tag{5.26}$$

Aplicando el mismo procedimiento a la ecuación 5.23, se obtiene:

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \sum_{k=1}^8 N_k u_k \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j \right) N_i d\Omega + \int_{\Omega} \sum_{k=1}^8 N_k v_k \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j \right) N_i d\Omega \\
& + \int_{\Omega} \left(\sum_{l=1}^4 \frac{\partial M_{(2l-1)}}{\partial y} p_{(2l-1)} \right) N_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{R_e} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial^2 N_j}{\partial x^2} v_j \right) N_i d\Omega - \int_{\Omega} \frac{1}{R_e} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial^2 N_j}{\partial y^2} v_j \right) N_i d\Omega = 0.
\end{aligned} \tag{5.27}$$

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} N_i \left(\sum_{k=1}^8 N_k u_k \right) \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j \right) d\Omega + \int_{\Omega} N_i \left(\sum_{k=1}^8 N_k v_k \right) \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j \right) d\Omega \\
& + \int_{\Omega} N_i \left(\sum_{l=1}^4 \frac{\partial M_{(2l-1)}}{\partial y} p_{(2l-1)} \right) d\Omega + \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j \right) d\Omega + \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j \right) d\Omega \\
& = \frac{1}{R_e} \int_{\Gamma} N_i \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial n} v_j \right) d\Gamma, \\
& \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, 8
\end{aligned} \tag{5.28}$$

donde:

$$q_i = \frac{1}{R_e} \int_{\Gamma} N_i \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial n} v_j \right) d\Gamma, \quad i = 1, 2, \dots, 8.$$

corresponde a las condiciones de Neumann en los bordes y son datos conocidos, por lo tanto, pertenecen a \vec{F} . En el caso de Cavity Flow no existe flujo entrante o saliente por los bordes, es decir,

$$\frac{\partial N_j}{\partial n} v_j = 0,$$

por lo tanto, $q_i = 0$ en la ecuación 5.28.

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} N_i \cdot \sum_{k=1}^8 N_k u_k \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j d\Omega + \int_{\Omega} N_i \cdot \sum_{k=1}^8 N_k v_k \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j d\Omega \\
& + \int_{\Omega} N_i \cdot \sum_{l=1}^4 \frac{\partial M_{(2l-1)}}{\partial y} p_{(2l-1)} d\Omega + \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j d\Omega + \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j d\Omega = 0 \\
& \qquad \qquad \qquad i = 1, 2, \dots, 8
\end{aligned} \tag{5.29}$$

Al emplear el enfoque residual ponderado de Galerkin en la ecuación (5.21) utilizando las funciones de ponderación $M_{(2l-1)}$, se obtiene:

$$\left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right) + \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j \right) = 0 \quad \left| \cdot M_{(2l-1)} \right.$$

$$\left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right) \cdot M_{(2l-1)} + \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j \right) \cdot M_{(2l-1)} = 0 \quad \left| \int_{\Omega} \right.$$

$$\int_{\Omega} M_{(2l-1)} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right) d\Omega + \int_{\Omega} M_{(2l-1)} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j \right) d\Omega = 0, \quad l = 1, 2, 3, 4. \quad (5.30)$$

No linealidad de las ecuaciones:

Debido a la no linealidad, el conjunto de ecuaciones algebraicas que se obtiene no puede resolverse de una sola vez, sino que es necesaria una solución iterativa. En dicha solución iterativa, los términos no lineales pueden linealizarse de diversas maneras. La forma más simple que se utiliza se conoce como linealización de Picard, en la que los términos no lineales se sustituyen por:

$$\begin{aligned} u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} &\rightarrow \bar{u} \frac{\partial u}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial u}{\partial y} \\ u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} &\rightarrow \bar{u} \frac{\partial v}{\partial x} + \bar{v} \frac{\partial v}{\partial y} \end{aligned}$$

donde u y v son valores aproximados para los componentes de velocidad.

Suponemos valores iniciales $u_{01}, u_{02}, u_{03}, \dots, u_{08}$ y $v_{01}, v_{02}, v_{03}, \dots, v_{08}$ para el elemento, y

$$\begin{aligned} \bar{u} &= \sum_{k=1}^8 N_k u_{0k} \\ \bar{v} &= \sum_{k=1}^8 N_k v_{0k} \end{aligned}$$

El proceso de iteración continúa reemplazando u_{0k} y v_{0k} , $k = 1, 2, \dots, 8$, por el promedio de los valores de los componentes de velocidad de las dos iteraciones anteriores hasta que se satisface la tolerancia.

A partir de las ecuaciones 5.26, 5.30 y 5.29, se obtiene un sistema de ecuaciones en forma matricial como:

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega} N_i \bar{u} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right) d\Omega + \int_{\Omega} N_i \bar{v} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j \right) d\Omega \\ &+ \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right) d\Omega + \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j \right) d\Omega \\ &+ \int_{\Omega} N_i \left(\sum_{l=1}^4 \frac{\partial M_{(2l-1)}}{\partial x} p_{(2l-1)} \right) d\Omega = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 8. \end{aligned} \quad (5.31)$$

$$\int_{\Omega} M_{(2l-1)} \cdot \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j \right) d\Omega + \int_{\Omega} M_{(2l-1)} \cdot \left(\sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j \right) d\Omega = 0 \quad l = 1, 2, 3, 4. \quad (5.32)$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega} N_i \cdot \bar{u} \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j d\Omega + \int_{\Omega} N_i \cdot \bar{v} \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j d\Omega \\ & + \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j d\Omega + \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \sum_{j=1}^8 \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j d\Omega \\ & + \int_{\Omega} N_i \cdot \sum_{l=1}^4 \frac{\partial M_{(2l-1)}}{\partial y} p_{(2l-1)} d\Omega = 0 \end{aligned} \quad (5.33)$$

$i = 1, 2, \dots, 8$

Reescribiremos (5.31) utilizando subíndices:

$$\begin{aligned} b_{ij}^{(1)} &= \int_{\Omega} N_i \cdot \bar{u} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j d\Omega + \int_{\Omega} N_i \cdot \bar{v} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} u_j d\Omega + \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] u_j d\Omega \\ &= \int_{\Omega} \left(N_i \cdot \bar{u} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i \cdot \bar{v} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] \right) u_j d\Omega \\ &= \left\{ \int_{\Omega} \left(N_i \cdot \bar{u} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i \cdot \bar{v} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] \right) d\Omega \right\} u_j \\ &= a_{ij}^{(1)} u_j \quad (i = 1, 2, \dots, 8 \quad y \quad j = 1, 2, \dots, 8 \quad , \text{siendo la variable } u_j \text{ desconocida.}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} b_{ij}^{(2)} &= \int_{\Omega} N_i \cdot \frac{\partial M_{(2j-1)}}{\partial x} p_{(2j-1)} d\Omega \\ &= \left(\int_{\Omega} N_i \cdot \frac{\partial M_{(2j-1)}}{\partial x} d\Omega \right) p_{(2j-1)} \\ &= a_{ij}^{(2)} p_{(2j-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, 8 \quad y \quad j = 1, 2, 3, 4 \quad , \text{siendo la variable } p_{(2j-1)} \text{ desconocida.}) \end{aligned}$$

Reescribiremos (5.32) utilizando subíndices:

$$\begin{aligned} b_{ij}^{(4)} &= \int_{\Omega} M_{(2i-1)} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} u_j d\Omega \\ &= \left(\int_{\Omega} M_{(2i-1)} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \right) u_j \\ &= a_{ij}^{(4)} u_j \quad (i = 1, 2, 3, 4 \quad y \quad j = 1, 2, \dots, 8 \quad , \text{siendo la variable } u_j \text{ desconocida.}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{ij}^{(6)} &= \int_{\Omega} M_{(2i-1)} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j d\Omega \\
 &= \left(\int_{\Omega} M_{(2i-1)} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} d\Omega \right) v_j \\
 &= a_{ij}^{(6)} v_j \quad (i = 1, 2, 3, 4 \text{ y } j = 1, 2, \dots, 8 \text{ , siendo la variable } v_j \text{ desconocida.})
 \end{aligned}$$

Reescribiremos (5.33) utilizando subíndices:

$$\begin{aligned}
 b_{ij}^{(9)} &= \int_{\Omega} N_i \cdot \bar{u} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} v_j d\Omega + \int_{\Omega} N_i \cdot \bar{v} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} v_j d\Omega + \frac{1}{R_e} \int_{\Omega} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] v_j d\Omega \\
 &= \int_{\Omega} \left(N_i \cdot \bar{u} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i \cdot \bar{v} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] \right) v_j d\Omega \\
 &= \left\{ \int_{\Omega} \left(N_i \cdot \bar{u} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i \cdot \bar{v} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] \right) d\Omega \right\} v_j \\
 &= a_{ij}^{(9)} v_j \quad (i = 1, 2, \dots, 8 \text{ y } j = 1, 2, \dots, 8 \text{ , siendo la variable } v_j \text{ desconocida.})
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 b_{ij}^{(8)} &= \int_{\Omega} N_i \cdot \frac{\partial M_{(2j-1)}}{\partial y} p_{(2j-1)} d\Omega \\
 &= \left(\int_{\Omega} N_i \cdot \frac{\partial M_{(2j-1)}}{\partial y} d\Omega \right) p_{(2j-1)} \\
 &= a_{ij}^{(8)} p_{(2j-1)} \quad (i = 1, 2, \dots, 8 \text{ y } j = 1, 2, 3, 4 \text{ , siendo la variable } p_{(2j-1)} \text{ desconocida.})
 \end{aligned}$$

Notar que:

$$a_{ij}^{(9)} = a_{ij}^{(1)}$$

Forma matricial del elemento:

$$[A^e] \vec{U}^e = \vec{F}^e \tag{5.34}$$

$$[A^e] = \begin{pmatrix} [A_1]_{(8 \times 8)} & [A_2]_{(8 \times 4)} & [A_3]_{(8 \times 8)} \\ [A_4]_{(4 \times 8)} & [A_5]_{(4 \times 4)} & [A_6]_{(4 \times 8)} \\ [A_7]_{(8 \times 8)} & [A_8]_{(8 \times 4)} & [A_9]_{(8 \times 8)} \end{pmatrix}_{(20 \times 20)}$$

$$[A_1] = \begin{pmatrix} a_{11}^{(1)} & a_{12}^{(1)} & a_{13}^{(1)} & a_{14}^{(1)} & a_{15}^{(1)} & a_{16}^{(1)} & a_{17}^{(1)} & a_{18}^{(1)} \\ a_{21}^{(1)} & a_{22}^{(1)} & a_{23}^{(1)} & a_{24}^{(1)} & a_{25}^{(1)} & a_{26}^{(1)} & a_{27}^{(1)} & a_{28}^{(1)} \\ a_{31}^{(1)} & a_{32}^{(1)} & a_{33}^{(1)} & a_{34}^{(1)} & a_{35}^{(1)} & a_{36}^{(1)} & a_{37}^{(1)} & a_{38}^{(1)} \\ a_{41}^{(1)} & a_{42}^{(1)} & a_{43}^{(1)} & a_{44}^{(1)} & a_{45}^{(1)} & a_{46}^{(1)} & a_{47}^{(1)} & a_{48}^{(1)} \\ a_{51}^{(1)} & a_{52}^{(1)} & a_{53}^{(1)} & a_{54}^{(1)} & a_{55}^{(1)} & a_{56}^{(1)} & a_{57}^{(1)} & a_{58}^{(1)} \\ a_{61}^{(1)} & a_{62}^{(1)} & a_{63}^{(1)} & a_{64}^{(1)} & a_{65}^{(1)} & a_{66}^{(1)} & a_{67}^{(1)} & a_{68}^{(1)} \\ a_{71}^{(1)} & a_{72}^{(1)} & a_{73}^{(1)} & a_{74}^{(1)} & a_{75}^{(1)} & a_{76}^{(1)} & a_{77}^{(1)} & a_{78}^{(1)} \\ a_{81}^{(1)} & a_{82}^{(1)} & a_{83}^{(1)} & a_{84}^{(1)} & a_{85}^{(1)} & a_{86}^{(1)} & a_{87}^{(1)} & a_{88}^{(1)} \end{pmatrix} (8 \times 8)$$

$$[A_2] = \begin{pmatrix} a_{11}^{(2)} & a_{12}^{(2)} & a_{13}^{(2)} & a_{14}^{(2)} \\ a_{21}^{(2)} & a_{22}^{(2)} & a_{23}^{(2)} & a_{24}^{(2)} \\ a_{31}^{(2)} & a_{32}^{(2)} & a_{33}^{(2)} & a_{34}^{(2)} \\ a_{41}^{(2)} & a_{42}^{(2)} & a_{43}^{(2)} & a_{44}^{(2)} \\ a_{51}^{(2)} & a_{52}^{(2)} & a_{53}^{(2)} & a_{54}^{(2)} \\ a_{61}^{(2)} & a_{62}^{(2)} & a_{63}^{(2)} & a_{64}^{(2)} \\ a_{71}^{(2)} & a_{72}^{(2)} & a_{73}^{(2)} & a_{74}^{(2)} \\ a_{81}^{(2)} & a_{82}^{(2)} & a_{83}^{(2)} & a_{84}^{(2)} \end{pmatrix} (8 \times 4)$$

$$[A_3] = [A_7] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} (8 \times 8)$$

$$[A_4] = \begin{pmatrix} a_{11}^{(4)} & a_{12}^{(4)} & a_{13}^{(4)} & a_{14}^{(4)} & a_{15}^{(4)} & a_{16}^{(4)} & a_{17}^{(4)} & a_{18}^{(4)} \\ a_{21}^{(4)} & a_{22}^{(4)} & a_{23}^{(4)} & a_{24}^{(4)} & a_{25}^{(4)} & a_{26}^{(4)} & a_{27}^{(4)} & a_{28}^{(4)} \\ a_{31}^{(4)} & a_{32}^{(4)} & a_{33}^{(4)} & a_{34}^{(4)} & a_{35}^{(4)} & a_{36}^{(4)} & a_{37}^{(4)} & a_{38}^{(4)} \\ a_{41}^{(4)} & a_{42}^{(4)} & a_{43}^{(4)} & a_{44}^{(4)} & a_{45}^{(4)} & a_{46}^{(4)} & a_{47}^{(4)} & a_{48}^{(4)} \end{pmatrix}_{(4 \times 8)}$$

$$[A_5] = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}_{(4 \times 4)}$$

$$[A_6] = \begin{pmatrix} a_{11}^{(6)} & a_{12}^{(4)} & a_{13}^{(6)} & a_{14}^{(6)} & a_{15}^{(6)} & a_{16}^{(6)} & a_{17}^{(6)} & a_{18}^{(6)} \\ a_{21}^{(6)} & a_{22}^{(4)} & a_{23}^{(6)} & a_{24}^{(6)} & a_{25}^{(6)} & a_{26}^{(6)} & a_{27}^{(6)} & a_{28}^{(6)} \\ a_{31}^{(6)} & a_{32}^{(4)} & a_{33}^{(6)} & a_{34}^{(6)} & a_{35}^{(6)} & a_{36}^{(6)} & a_{37}^{(6)} & a_{38}^{(6)} \\ a_{41}^{(6)} & a_{42}^{(4)} & a_{43}^{(6)} & a_{44}^{(6)} & a_{45}^{(6)} & a_{46}^{(6)} & a_{47}^{(6)} & a_{48}^{(6)} \end{pmatrix}_{(4 \times 8)}$$

$$[A_8] = \begin{pmatrix} a_{11}^{(8)} & a_{12}^{(8)} & a_{13}^{(8)} & a_{14}^{(8)} \\ a_{21}^{(8)} & a_{22}^{(8)} & a_{23}^{(8)} & a_{24}^{(8)} \\ a_{31}^{(8)} & a_{32}^{(8)} & a_{33}^{(8)} & a_{34}^{(8)} \\ a_{41}^{(8)} & a_{42}^{(8)} & a_{43}^{(8)} & a_{44}^{(8)} \\ a_{51}^{(8)} & a_{52}^{(8)} & a_{53}^{(8)} & a_{54}^{(8)} \\ a_{61}^{(8)} & a_{62}^{(8)} & a_{63}^{(8)} & a_{64}^{(8)} \\ a_{71}^{(8)} & a_{72}^{(8)} & a_{73}^{(8)} & a_{74}^{(8)} \\ a_{81}^{(8)} & a_{82}^{(8)} & a_{83}^{(8)} & a_{84}^{(8)} \end{pmatrix}_{(8 \times 4)}$$

$$[A_9] = \begin{pmatrix} a_{11}^{(9)} & a_{12}^{(9)} & a_{13}^{(9)} & a_{14}^{(9)} & a_{15}^{(9)} & a_{16}^{(9)} & a_{17}^{(9)} & a_{18}^{(9)} \\ a_{21}^{(9)} & a_{22}^{(9)} & a_{23}^{(9)} & a_{24}^{(9)} & a_{25}^{(9)} & a_{26}^{(9)} & a_{27}^{(9)} & a_{28}^{(9)} \\ a_{31}^{(9)} & a_{32}^{(9)} & a_{33}^{(9)} & a_{34}^{(9)} & a_{35}^{(9)} & a_{36}^{(9)} & a_{37}^{(9)} & a_{38}^{(9)} \\ a_{41}^{(9)} & a_{42}^{(9)} & a_{43}^{(9)} & a_{44}^{(9)} & a_{45}^{(9)} & a_{46}^{(9)} & a_{47}^{(9)} & a_{48}^{(9)} \\ a_{51}^{(9)} & a_{52}^{(9)} & a_{53}^{(9)} & a_{54}^{(9)} & a_{55}^{(9)} & a_{56}^{(9)} & a_{57}^{(9)} & a_{58}^{(9)} \\ a_{61}^{(9)} & a_{62}^{(9)} & a_{63}^{(9)} & a_{64}^{(9)} & a_{65}^{(9)} & a_{66}^{(9)} & a_{67}^{(9)} & a_{68}^{(9)} \\ a_{71}^{(9)} & a_{72}^{(9)} & a_{73}^{(9)} & a_{74}^{(9)} & a_{75}^{(9)} & a_{76}^{(9)} & a_{77}^{(9)} & a_{78}^{(9)} \\ a_{81}^{(9)} & a_{82}^{(9)} & a_{83}^{(9)} & a_{84}^{(9)} & a_{85}^{(9)} & a_{86}^{(9)} & a_{87}^{(9)} & a_{88}^{(9)} \end{pmatrix} (8 \times 8)$$

$$\vec{U}^e = \begin{pmatrix} \vec{u} \\ \vec{p} \\ \vec{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \\ u_5 \\ u_6 \\ u_7 \\ u_8 \\ p_1 \\ p_3 \\ p_5 \\ p_7 \\ v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ v_4 \\ v_5 \\ v_6 \\ v_7 \\ v_8 \end{pmatrix} (20 \times 1) \qquad \vec{F}^e = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} (20 \times 1)$$

5.4.5. Derivadas e integrales usando coordenadas locales

Sea $N(\xi, \eta)$ una función de forma en términos de coordenadas locales. Si x e y son las coordenadas globales, entonces:

$$\begin{aligned} \frac{\partial N}{\partial \xi} &= \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \xi} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \xi} & \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{pmatrix} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} &= \frac{\partial N}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \eta} + \frac{\partial N}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{aligned}$$

donde $[J]$ es la matriz Jacobiana de la transformación del sistema de coordenadas global al sistema de coordenadas local.

$$[J] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

Luego, tenemos:

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{pmatrix} = [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{pmatrix} \quad (5.35)$$

5.4.6. Cálculo de la matriz Jacobiana

Sean $N_1(\xi, \eta), N_2(\xi, \eta), \dots, N_n(\xi, \eta)$, las funciones de forma de un elemento en coordenadas locales. Si $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ son las coordenadas globales de los nodos del elemento y (x, y) es la coordenada global de un punto del elemento, entonces:

$$x = N_1(\xi, \eta)x_1 + N_2(\xi, \eta)x_2 + \dots + N_n(\xi, \eta)x_n$$

$$y = N_1(\xi, \eta)y_1 + N_2(\xi, \eta)y_2 + \dots + N_n(\xi, \eta)y_n$$

$$\frac{\partial x}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi}(\xi, \eta)x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi}(\xi, \eta)x_2 + \dots + \frac{\partial N_n}{\partial \xi}(\xi, \eta)x_n$$

$$\frac{\partial y}{\partial \xi} = \frac{\partial N_1}{\partial \xi}(\xi, \eta)y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \xi}(\xi, \eta)y_2 + \dots + \frac{\partial N_n}{\partial \xi}(\xi, \eta)y_n$$

$$\frac{\partial x}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta}(\xi, \eta)x_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta}(\xi, \eta)x_2 + \dots + \frac{\partial N_n}{\partial \eta}(\xi, \eta)x_n$$

$$\frac{\partial y}{\partial \eta} = \frac{\partial N_1}{\partial \eta}(\xi, \eta)y_1 + \frac{\partial N_2}{\partial \eta}(\xi, \eta)y_2 + \dots + \frac{\partial N_n}{\partial \eta}(\xi, \eta)y_n$$

Por lo tanto, la matriz Jacobiana de la transformación $[J]$ es:

$$[J] = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial N_1}{\partial \xi} & \frac{\partial N_2}{\partial \xi} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_1}{\partial \eta} & \frac{\partial N_2}{\partial \eta} & \cdots & \frac{\partial N_n}{\partial \eta} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 & y_1 \\ x_2 & y_2 \\ \vdots & \vdots \\ x_n & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \xi} y_i \\ \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i}{\partial \eta} y_i \end{pmatrix} \quad (5.36)$$

$$[J]^{-1} = \frac{1}{\det[J]} \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial y}{\partial \eta} & -\frac{\partial y}{\partial \xi} \\ -\frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial x}{\partial \xi} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot y_i & -\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot y_i \\ -\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot x_i \end{pmatrix}$$

El determinante de $[J]$ finalmente es:

$$\begin{aligned} \det[J] &= \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \xi} & \frac{\partial y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial x}{\partial \eta} & \frac{\partial y}{\partial \eta} \end{pmatrix} = \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial y}{\partial \eta} - \frac{\partial y}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta} \\ &= \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot x_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot y_i \right) - \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot y_i \right) \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot x_i \right) \end{aligned}$$

Finalmente:

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial x} \\ \frac{\partial N}{\partial y} \end{pmatrix} &= [J]^{-1} \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{\det[J]} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot y_i & -\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot y_i \\ -\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N}{\partial \eta} \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Ejemplo para N_4 :

$$\begin{pmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial x} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} \end{pmatrix} = \frac{1}{\det[J]} \cdot \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot y_i & -\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot y_i \\ -\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot x_i & \sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot x_i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial N_4}{\partial \xi} \\ \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial N_4}{\partial x} &= \frac{1}{\det[J]} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot y_i \right) \frac{\partial N_4}{\partial \xi} - \frac{1}{\det[J]} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot y_i \right) \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \\ \frac{\partial N_4}{\partial y} &= -\frac{1}{\det[J]} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \eta} \cdot x_i \right) \frac{\partial N_4}{\partial \xi} + \frac{1}{\det[J]} \left(\sum_{i=1}^n \frac{\partial N_i(\xi, \eta)}{\partial \xi} \cdot x_i \right) \frac{\partial N_4}{\partial \eta} \end{aligned}$$

La formación de un sistema de elementos finitos discretos requiere la evaluación de integrales sobre elementos. Salvo en las geometrías elementales más simples, esta integral no puede evaluarse analíticamente. Por lo tanto, las integraciones numéricas son las únicas alternativas. La cuadratura gaussiana se emplea principalmente. Por ejemplo, utilizando el cálculo para la transformación de coordenadas, una integral típica para un elemento rectangular bidimensional puede evaluarse como:

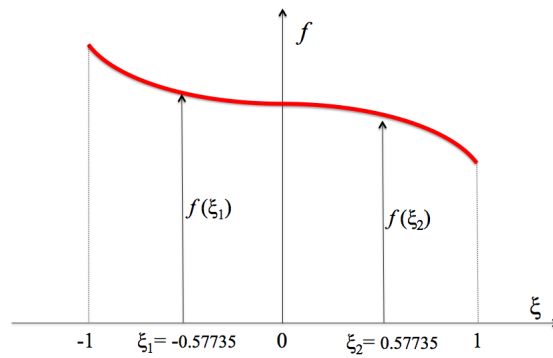
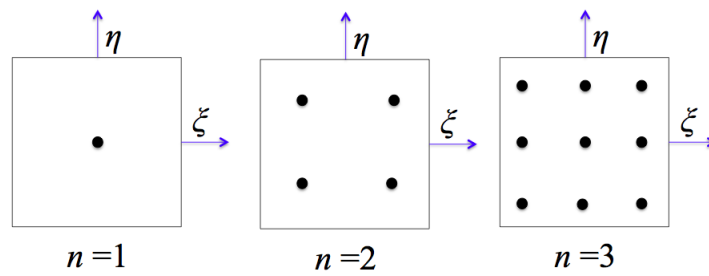
$$\begin{aligned} \int_{\Omega(x,y)} f(x, y) dx dy &= \int_{\Omega(\xi,\eta)} f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \det[J] d\xi d\eta \\ &= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 f(x(\xi, \eta), y(\xi, \eta)) \det[J] d\xi d\eta \\ &\approx \sum_{k_1}^{n_1} \sum_{k_2}^{n_2} f(x(\xi_{k_1}, \eta_{k_2}), y(\xi_{k_1}, \eta_{k_2})) \cdot \det[J(\xi_{k_1}, \eta_{k_2})] \cdot \omega_{k_1} \cdot \omega_{k_2} \end{aligned}$$

Donde $[J]$ es la matriz Jacobiana de la transformación, ξ_{k_1} y η_{k_2} son las abscisas de la cuadratura Gaussiana, y ω_{k_1} y ω_{k_2} son los pesos correspondientes.

5.5. Cuadratura de Gauss

$$\int_{-1}^1 f(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^n f(\xi_k) \omega_k$$

n	$\pm\xi_k$	ω_k
1	0	2
2	$1/\sqrt{3} = 0.57735027$	1
3	$\sqrt{0.6} = 0.77459667$	5/9
	0	8/9



Integración Gaussiana para $n = 2$.

5.6. Desarrollo de la matriz elemental

$$[A^e] = \begin{pmatrix} [A_1]_{(8 \times 8)} & [A_2]_{(8 \times 4)} & [A_3]_{(8 \times 8)} \\ [A_4]_{(4 \times 8)} & [A_5]_{(4 \times 4)} & [A_6]_{(4 \times 8)} \\ [A_7]_{(8 \times 8)} & [A_8]_{(8 \times 4)} & [A_9]_{(8 \times 8)} \end{pmatrix}_{(20 \times 20)}$$

$$\begin{aligned}
a_{ij}^{(1)} &= \int_{\Omega} \left(N_i \cdot \bar{u} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + N_i \cdot \bar{v} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} + \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} + \frac{\partial N_i}{\partial y} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y} \right] \right) d\Omega \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \left(N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{u} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x}(\xi, \eta) + N_i(\xi, \eta) \cdot \bar{v} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y}(\xi, \eta) \right) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\
&\quad + \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x}(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x}(\xi, \eta) + \frac{\partial N_i}{\partial y}(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y}(\xi, \eta) \right] \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\
&\approx \sum_{k_1}^{n_1} \sum_{k_2}^{n_2} \left(N_i(\xi_{k_1}, \eta_{k_2}) \cdot \bar{u} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x}(\xi_{k_1}, \eta_{k_2}) + N_i(\xi_{k_1}, \eta_{k_2}) \cdot \bar{v} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y}(\xi_{k_1}, \eta_{k_2}) \right) \det[J(\xi_{k_1}, \eta_{k_2})] \omega_{k_1} \omega_{k_2} \\
&\quad + \sum_{k_1}^{n_1} \sum_{k_2}^{n_2} \frac{1}{R_e} \left[\frac{\partial N_i}{\partial x}(\xi_{k_1}, \eta_{k_2}) \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x}(\xi_{k_1}, \eta_{k_2}) + \frac{\partial N_i}{\partial y}(\xi_{k_1}, \eta_{k_2}) \cdot \frac{\partial N_j}{\partial y}(\xi_{k_1}, \eta_{k_2}) \right] \det[J(\xi_{k_1}, \eta_{k_2})] \omega_{k_1} \omega_{k_2} \\
&\quad (i = 1, 2, \dots, 8 \quad y \quad j = 1, 2, \dots, 8)
\end{aligned}$$

$$a_{ij}^{(9)} = a_{ij}^{(1)}$$

$$\begin{aligned}
a_{ij}^{(2)} &= \int_{\Omega} N_i \cdot \frac{\partial M_{(2j-1)}}{\partial x} d\Omega \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 N_i(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial M_{(2j-1)}}{\partial x}(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\
&\approx \sum_{k_1}^{n_1} \sum_{k_2}^{n_2} N_i(\xi_{k_1}, \eta_{k_2}) \cdot \frac{\partial M_{(2j-1)}}{\partial x}(\xi_{k_1}, \eta_{k_2}) \det[J(\xi_{k_1}, \eta_{k_2})] \omega_{k_1} \omega_{k_2} \\
&\quad (i = 1, 2, \dots, 8 \quad y \quad j = 1, 2, \dots, 4)
\end{aligned}$$

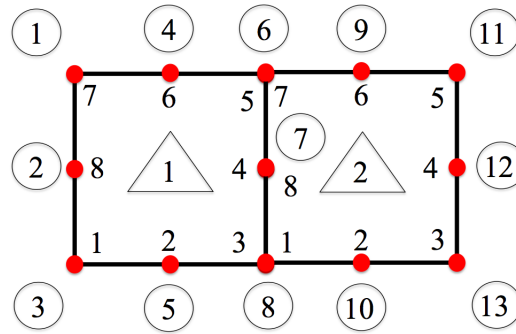
$$\begin{aligned}
a_{ij}^{(4)} &= \int_{\Omega} M_{(2i-1)} \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x} d\Omega \\
&= \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 M_{(2i-1)}(\xi, \eta) \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x}(\xi, \eta) \det[J(\xi, \eta)] d\xi d\eta \\
&\approx \sum_{k_1}^{n_1} \sum_{k_2}^{n_2} M_{(2i-1)}(\xi_{k_1}, \eta_{k_2}) \cdot \frac{\partial N_j}{\partial x}(\xi_{k_1}, \eta_{k_2}) \det[J(\xi_{k_1}, \eta_{k_2})] \omega_{k_1} \omega_{k_2} \\
&\quad (i = 1, 2, \dots, 4 \quad y \quad j = 1, 2, \dots, 8)
\end{aligned}$$

$$[A^e] = \begin{pmatrix} A_{1,1}^{(e)} & \cdots & A_{1,8}^{(e)} & A_{1,9}^{(e)} & \cdots & A_{1,12}^{(e)} & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{8,1}^{(e)} & \cdots & A_{8,8}^{(e)} & A_{8,9}^{(e)} & \cdots & A_{8,12}^{(e)} & 0 & \cdots & 0 \\ A_{9,1}^{(e)} & \cdots & A_{9,8}^{(e)} & 0 & \cdots & 0 & A_{9,13}^{(e)} & \cdots & A_{9,20}^{(e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{12,1}^{(e)} & \cdots & A_{12,8}^{(e)} & 0 & \cdots & 0 & A_{12,13}^{(e)} & \cdots & A_{12,20}^{(e)} \\ 0 & \cdots & 0 & A_{13,9}^{(e)} & \cdots & A_{13,12}^{(e)} & A_{13,13}^{(e)} & \cdots & A_{13,20}^{(e)} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & A_{20,9}^{(e)} & \cdots & A_{20,12}^{(e)} & A_{20,13}^{(e)} & \cdots & A_{20,20}^{(e)} \end{pmatrix} \quad (20 \times 20)$$

$$= \begin{pmatrix} A_{1,1}^{(e)} & A_{1,2}^{(e)} & \cdots & A_{1,7}^{(e)} & A_{1,8}^{(e)} & A_{1,9}^{(e)} & A_{1,10}^{(e)} & A_{1,11}^{(e)} & A_{1,12}^{(e)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_{2,1}^{(e)} & A_{2,2}^{(e)} & \cdots & A_{2,7}^{(e)} & A_{2,8}^{(e)} & A_{2,9}^{(e)} & A_{2,10}^{(e)} & A_{2,11}^{(e)} & A_{2,12}^{(e)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ A_{7,1}^{(e)} & A_{7,2}^{(e)} & \cdots & A_{7,7}^{(e)} & A_{7,8}^{(e)} & A_{7,9}^{(e)} & A_{7,10}^{(e)} & A_{7,11}^{(e)} & A_{7,12}^{(e)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_{8,1}^{(e)} & A_{8,2}^{(e)} & \cdots & A_{8,7}^{(e)} & A_{8,8}^{(e)} & A_{8,9}^{(e)} & A_{8,10}^{(e)} & A_{8,11}^{(e)} & A_{8,12}^{(e)} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ A_{9,1}^{(e)} & A_{9,2}^{(e)} & \cdots & A_{9,7}^{(e)} & A_{9,8}^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{9,13}^{(e)} & A_{9,14}^{(e)} & \cdots & A_{9,19}^{(e)} & A_{9,20}^{(e)} \\ A_{10,1}^{(e)} & A_{10,2}^{(e)} & \cdots & A_{10,7}^{(e)} & A_{10,8}^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{10,13}^{(e)} & A_{10,14}^{(e)} & \cdots & A_{10,19}^{(e)} & A_{10,20}^{(e)} \\ A_{11,1}^{(e)} & A_{11,2}^{(e)} & \cdots & A_{11,7}^{(e)} & A_{11,8}^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{11,13}^{(e)} & A_{11,14}^{(e)} & \cdots & A_{11,19}^{(e)} & A_{11,20}^{(e)} \\ A_{12,1}^{(e)} & A_{12,2}^{(e)} & \cdots & A_{12,7}^{(e)} & A_{12,8}^{(e)} & 0 & 0 & 0 & 0 & A_{12,13}^{(e)} & A_{12,14}^{(e)} & \cdots & A_{12,19}^{(e)} & A_{12,20}^{(e)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{13,9}^{(e)} & A_{13,10}^{(e)} & A_{13,11}^{(e)} & A_{13,12}^{(e)} & A_{13,13}^{(e)} & A_{13,14}^{(e)} & \cdots & A_{13,19}^{(e)} & A_{13,20}^{(e)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{14,9}^{(e)} & A_{14,10}^{(e)} & A_{14,11}^{(e)} & A_{14,12}^{(e)} & A_{14,13}^{(e)} & A_{14,14}^{(e)} & \cdots & A_{14,19}^{(e)} & A_{14,20}^{(e)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{19,9}^{(e)} & A_{19,10}^{(e)} & A_{19,11}^{(e)} & A_{19,12}^{(e)} & A_{19,13}^{(e)} & A_{19,14}^{(e)} & \cdots & A_{19,19}^{(e)} & A_{19,20}^{(e)} \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & A_{20,9}^{(e)} & A_{20,10}^{(e)} & A_{20,11}^{(e)} & A_{20,12}^{(e)} & A_{20,13}^{(e)} & A_{20,14}^{(e)} & \cdots & A_{20,19}^{(e)} & A_{20,20}^{(e)} \end{pmatrix}$$

5.6.1. Ensamblaje

Para el siguiente ejemplo, consistente en 2 elementos, 13 nodos globales, se tienen 32 variables, donde los nodos globales 6, 7 y 8 pertenecen a los 2 elementos, es decir, el nodo global 6, corresponde al nodo local 5 del elemento 1 y el nodo local 7 del elemento 2.



$$[K]\vec{U} = \vec{F}$$

$$[K(\vec{U}_*^{(r-1)})]\vec{U}_*^{(r)} = \vec{F}(\vec{U}_*^{(r-1)}) \quad (5.38)$$

La iteración de Picard (Reddy, 2004) o el método de sustituciones sucesivas corresponde al procedimiento de resolver la ecuación 5.38 de manera iterativa.

El proceso comienza al momento de situarse en un $r=1$, calculando el valor de $\vec{U}_*^{(1)}$ utilizando las condiciones de contorno de Dirichlet del problema, atendiendo a la resolución directa de la siguiente expresión:

$$[K(U_*^{(r-1)})] U_*^{(r)} = F(U_*^{(r-1)}), \quad (5.39)$$

$$[K(U_*^{(r-1)})]^{-1} [K(U_*^{(r-1)})] U_*^{(r)} = [K(U_*^{(r-1)})]^{-1} F(U_*^{(r-1)}), \quad (5.40)$$

$$U^{(r)} = [K(U_*^{(r-1)})]^{-1} F(U_*^{(r-1)}). \quad (5.41)$$

Al escribir la ecuación (4.4.2), asumimos que la matriz de coeficientes $[K(r-1)]$ es invertible tras la imposición de condiciones de contorno. Por lo tanto, el vector de aproximación inicial $\vec{U}_*(0)$ debe ser tal que:

- (a) satisfaga las condiciones de contorno esenciales especificadas, y
- (b) $[K^{(0)}]$ sea invertible.

Una vez obtenida la respuesta de cada iteración, se debe calcular el valor residual y evitar que supere una tolerancia ϵ dada inicialmente, tal como:

$$\|\vec{R}^{(r)}\| \leq \epsilon \|\vec{F}^{(r)}\| \quad (5.42)$$

O también como:

$$\|\vec{U}_*^{(r)} - \vec{U}_*^{(r-1)}\| \leq \epsilon \|\vec{U}_*^{(r)}\| \quad (5.43)$$

Utilizando la norma Euclidiana, podemos expresar el criterio de error como

$$\sqrt{\frac{\vec{R}^{(r)} \cdot \vec{R}^{(r)}}{\vec{F}^{(r)} \cdot \vec{F}^{(r)}}} \leq \epsilon \quad (4.4.4)$$

Como alternativa, se puede verificar si la diferencia normalizada entre los vectores de solución de dos iteraciones consecutivas, medida con la norma Euclidiana, es menor que una tolerancia preseleccionada ϵ :

$$\sqrt{\frac{\Delta \vec{U}_* \cdot \Delta \vec{U}_*}{\vec{U}_*^{(r)} \cdot \vec{U}_*^{(r)}}} = \sqrt{\frac{\sum_{I=1}^N |U_I^{(r)} - U_I^{(r-1)}|^2}{\sum_{I=1}^N |U_I^{(r)}|^2}} \leq \epsilon \quad (4.4.5)$$

5.7. Modelación mediante el Método de Volúmenes Finitos

5.7.1. Esquema de diferencias centradas

Para comenzar, se define que el esquema seleccionado para la estimación de las presiones y velocidades corresponde al de diferencias centradas, el cuál se detalla a continuación.

La derivación del esquema parte desde la ecuación de conservación de una cantidad escalar en una dimensión (dirección e-w), con la ecuación:

$$\frac{d}{dx}(\rho \phi u) = \Gamma \frac{d^2 \phi}{dx^2} \quad (5.44)$$

Para las condiciones de borde: $\phi(x = 0) = \phi_0$ y $\phi(x = L) = \phi_L$, la solución exacta de (5.44) es:

$$\frac{\phi - \phi_0}{\phi_L - \phi_0} = \frac{e^{\frac{Px}{L}} - 1}{e^P - 1} \quad (5.45)$$

Integrando la ecuación 5.44 sobre el volumen de control seleccionado en el arreglo colocado (figura 3.6), se obtiene la forma integral:

$$(\rho \phi u)_e - (\rho \phi u)_w = \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_e - \left(\Gamma \frac{d\phi}{dx} \right)_w \quad (5.46)$$

A partir de la ecuación 5.46, los términos advectivos pueden expresarse en función de ϕ_P y ϕ_E con una aproximación de segundo orden mediante serie de Taylor. Considerando la cara e:

$$\phi_e = \phi_E \lambda_e + \phi_P (1 - \lambda_e) - \frac{(x_e - x_P)(x_E - x_e)}{2} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right)_P + H \quad (5.47)$$

donde:

$$\lambda_e = \frac{x_e - x_P}{x_E - x_P} \quad (5.48)$$

Por otra parte, los términos difusivos pueden ser aproximados mediante *diferencias centradas*. Considerando la cara e:

$$\left(\frac{d\phi}{dx} \right)_e \approx \frac{\phi_E - \phi_P}{x_E - x_P} \quad (5.49)$$

cuyo error de truncamiento es:

$$\varepsilon_r = \frac{(x_e - x_P)^2 - (x_E - x_e)^2}{2(x_E - x_P)} \left(\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2} \right) - \frac{(x_e - x_P)^3 - (x_E - x_e)^3}{6(x_E - x_P)} \left(\frac{\partial^3 \phi}{\partial x^3} \right) + H \quad (5.50)$$

Para el caso de mallas uniformes el primer sumando del error es cero y la aproximación es entonces de tercer orden; mientras que al trabajar con mallas no uniformes la aproximación es de segundo orden y su error aumenta conforme varía la malla.

Al considerar malla uniforme, se tendrá que $\lambda_e = 1/2$ y la ecuación 5.46 resulta como:

$$\frac{1}{2}(\rho u)_e(\phi_E + \phi_P) - \frac{1}{2}(\rho u)_w(\phi_P + \phi_W) = \Gamma_e \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta x)_e} - \Gamma_w \frac{\phi_E - \phi_P}{(\delta x)_w} \quad (5.51)$$

Que puede reescribirse como los siguientes coeficientes:

$$a_E = D_e - \frac{F_e}{2}, \quad a_W = D_w + \frac{F_w}{2} \quad (5.52)$$

Estos coeficientes deben ser positivos, por lo que necesariamente $P < 2$ para que la solución sea físicamente realista. Al apreciar la figura 4.3 es claro que a altos números de Peclet, el valor de ϕ_e puede ser inestable. En este caso debe considerarse esta estabilidad y la condición de positividad se verá reflejada en la condición $P < 2$. Además, este esquema está limitado para bajos números de Peclet.

Realizando este mismo procedimiento en la dirección N-S se puede obtener el esquema completo para la discretización en 2 dimensiones mediante el método de volúmenes finitos.

Traduciéndose finalmente en:

$$\mathcal{A}(|\mathcal{P}|) = 1 - 0.5|\mathcal{P}|$$

5.7.2. Iteración de tiempo

Se realizó únicamente análisis de primer orden, utilizando, al igual que en el MDF, el método de Fordwar Euler, presentado previamente en la sección 3.57.

5.7.3. Corrección de presiones y velocidades

Para la corrección de presiones, primero se utiliza el método Successive Over-Relaxation (SOR) (Shiach, 2021), el cuál mejora la convergencia del método de Gauss-Seidel aplicando un factor de ponderación para actualizar las estimaciones ajustándose así a la magnitud del cambio de este propiedad. La ecuación que describe la iteración del método se presenta a continuación:

$$x_i^{(k+1)} = (1 - \omega) \frac{x_i^{(k)}}{a_{ii}} + \frac{\omega}{a_{ii}} \left(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} a_{ij} x_j^{(k+1)} - \sum_{j=i+1}^n a_{ij} x_j^{(k)} \right), \quad i = 1, \dots, n, \quad (5.53)$$

Donde:

$\mathbf{x}^{(k)}$: es el vector de las soluciones en la iteración k .

a_{ii} : son los elementos de la matriz A en la diagonal.

b_i : es el elemento i -ésimo del vector \mathbf{b} .

ω es el factor de relajación, donde $\omega \in [0, 2]$.

n : es el número de ecuaciones o el tamaño de la matriz A .

Aplicándose a la ecuación de Poisson para las presiones se obtiene:

$$p(i, j) = \frac{1}{A_p} (-A_x (p(i, j + 1) + p(i, j - 1)) - A_y (p(i + 1, j) + p(i - 1, j)) + S(i - 1, j - 1)) \quad (5.54)$$

Donde:

$p(i, j)$: Presión en el punto (i, j) de la malla.

A_p : Coeficiente de la matriz de presión en el punto (i, j) , que depende de la discretización espacial.

A_x y A_y : Coeficientes de los términos de diferencia en las direcciones x y y , respectivamente, que están relacionados con los gradientes de presión.

$S(i - 1, j - 1)$: Término fuente en el punto (i, j) .

Además, se combinó el método SOR con el análisis multicelda V-cycle de dos niveles (Anexo ??, recalculando hasta que los valores residuales de presión fueran inferiores a la tolerancia propuesta por el usuario.

5.7.4. Corrección de velocidades

Las velocidades se corrigieron con el gradiente de presión, de la siguiente forma:

$$u = u^* - (p(i, j + 1) - p(i, j)) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta x} \quad (5.55)$$

$$v = v^* - (p(i, j + 1) - p(i, j)) \cdot \frac{\Delta t}{\Delta y} \quad (5.56)$$

Donde:

u^* y v^* : Corresponden a las velocidades en \vec{e}_x y en \vec{e}_y sin corregir del paso anterior de la iteración.

5.7.5. Codificación

El código empleado fue extraído de la librería de códigos abiertos de matlab, realizándose pequeñas modificaciones en función de la aplicación neta del método de volúmenes finitos, el código completo se encuentra adjunto en el Anexo H.

En principio, el código comienza definiendo las celdas y el mallado del dominio computacional, solicitando como input los parámetros asociados a la geometría de la cavidad y la cantidad de volúmenes de control a generar en el algoritmo.

Se definen también los parámetros asociados al número de Reynolds de la situación física, para después inicializar las matrices de presiones, y velocidades en \vec{e}_x y en \vec{e}_y . Se define posteriormente el dominio computacional del tiempo (Δt y valor residual de detención).

Posteriormente se definen los coeficientes asociados a la resolución de la ecuación de Navier-Stokes mediante

el método de volúmenes finitos, como fue presentado en 3.67.

Avanzando en el código, se denotan las condiciones de borde de las paredes de la cavidad (adherencia con velocidad nula en las paredes laterales e inferior y $u = 1$ en la pared superior).

Luego, el código realiza las iteraciones temporales, utilizando únicamente el método de primer ordenes Forward Euler, presentado anteriormente en 3.57. Siguiendo a esto el código realiza la corrección de las presiones y de velocidades mediante los métodos anteriormente mencionados.

Se almacenan los valores máximos residuales de presiones y velocidades y , mediante la función Predictor, se calculan las velocidades utilizando el método de volúmenes finitos, haciendo uso del principio de conservación de una cantidad escalar aplicado a la conservación de la cantidad convectiva (convective) y difusiva (viscous) para cada uno de los volúmenes de control establecidos en el mallado.

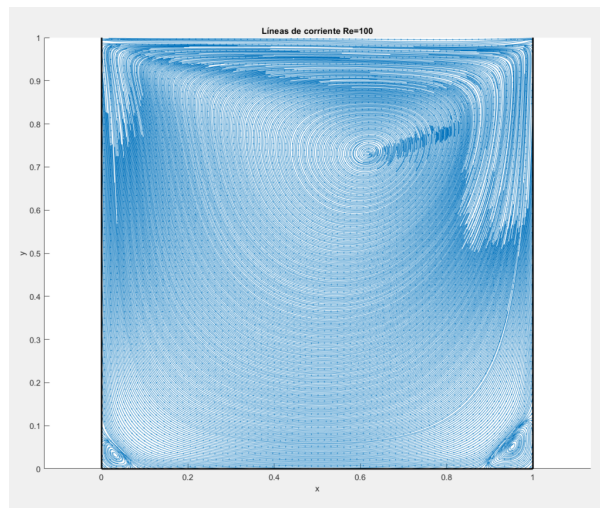
6. Resultados y Análisis

6.1. Resultados Cavity Flow en diferencias finitas

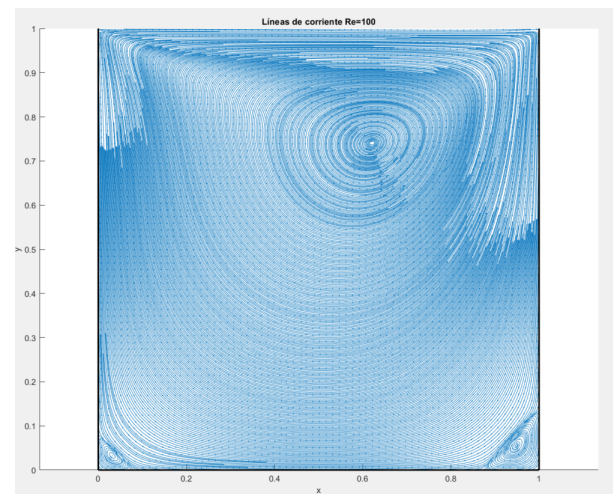
Para el código desarrollado en diferencias finitas, se consideraron y compararon dos mallados posibles:

- Malla de 101x101 nodos, con 5000 iteraciones de tiempo y un $\Delta t = 0.001[s]$.
- Malla de 201x201 nodos, con 50000 iteraciones de tiempo y un $\Delta t = 0.0001[s]$

Se obtuvieron entonces las siguientes líneas de corriente para ambos casos:



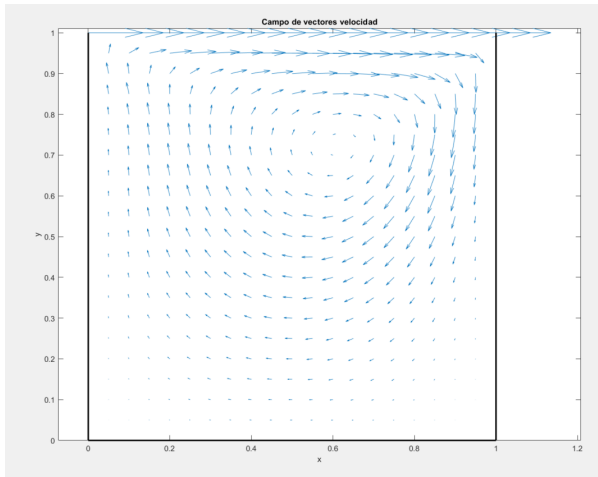
(a) Líneas de corriente $Re=100$, 101x101
Fuente: Elaboración propia



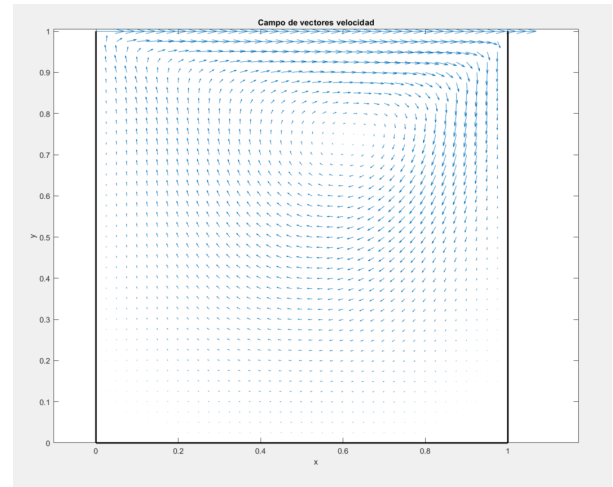
(b) Líneas de corriente $Re=100$, 201x201
Fuente: Elaboración Propia

Figura 6.1: Resultados líneas de corriente para los dos casos de mallado

Se presenta a continuación el campo de vectores para ambos casos de mallado:



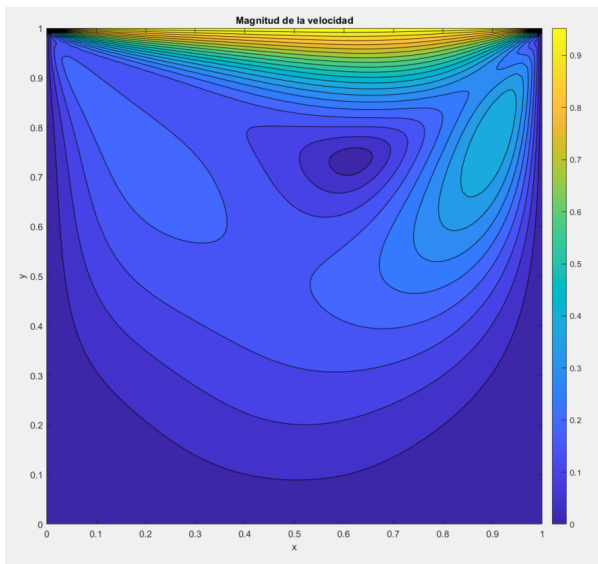
(a) Campo de vectores $Re=100$, 101×101
Fuente: Elaboración propia



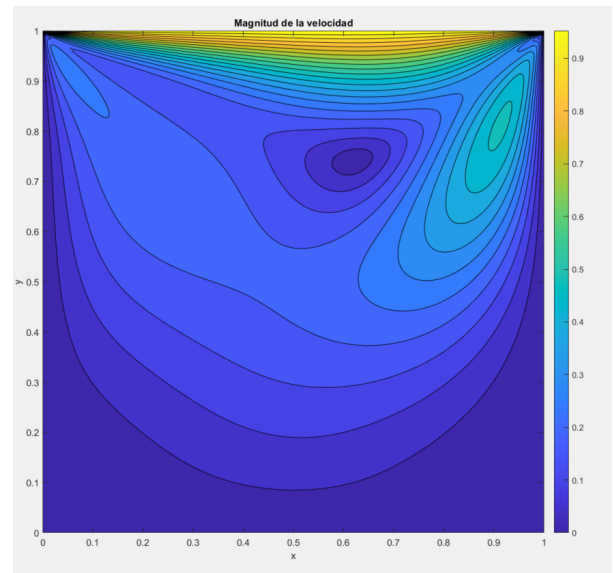
(b) Campo de vectores $Re=100$, 201×201
Fuente: Elaboración Propia

Figura 6.2: Resultados campo de vectores para los dos casos de mallado

Se presentan también, la distribución de presiones y velocidades en toda la cavidad en los siguientes diagramas:

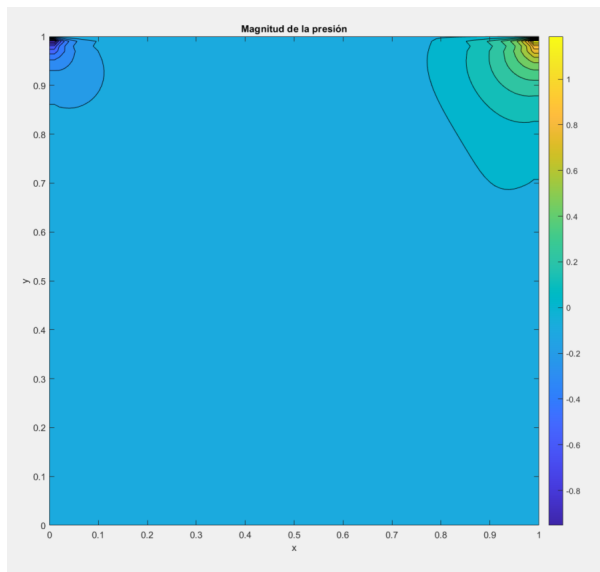


(a) Distribución de velocidades $Re=100$, 101×101
Fuente: Elaboración propia

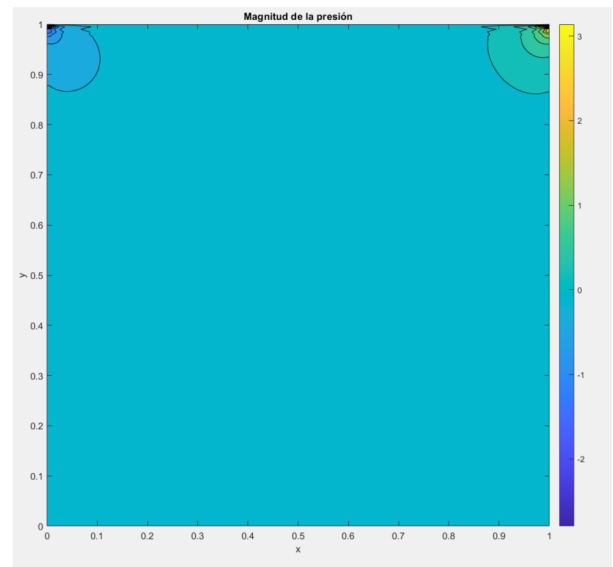


(b) Distribución de velocidades $Re=100$, 201×201
Fuente: Elaboración Propia

Figura 6.3: Resultados velocidades para los dos casos de mallado



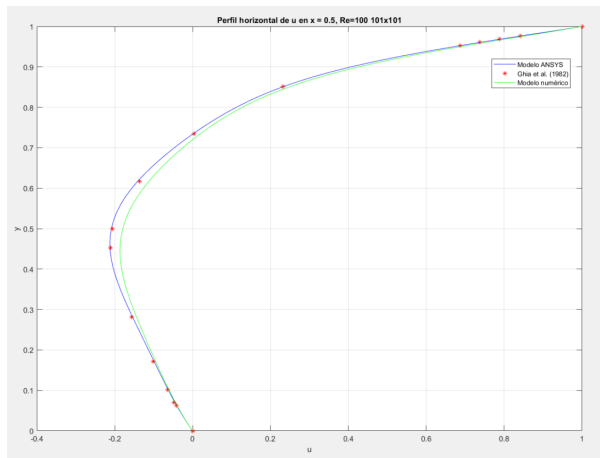
(a) Distribución de presiones $Re=100$, 101×101
 Fuente: Elaboración propia



(b) Distribución de presiones $Re=100$, 201×201
 Fuente: Elaboración Propia

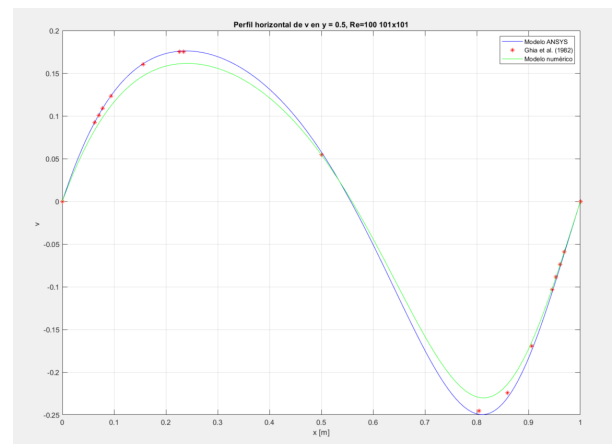
Figura 6.4: Resultados presiones para los dos casos de mallado

Para analizar gráficamente los resultados obtenidos por la simulación numérica, se presentan a continuación la comparación entre las curvas obtenidas de velocidad u en $x=0.5$ y la velocidad v en $y=0.5$, con respecto al estudio realizado en 1982 por Ghia (Ghia et al., 1982), y también con respecto a la curva obtenida en el software comercial Ansys Fluent:



(a) Comparación velocidad u $x=0.5$, $Re=100$
 101×101

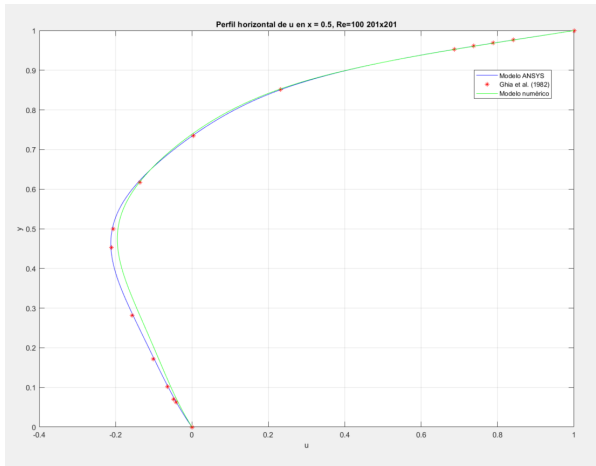
Fuente: Elaboración propia



(b) Comparación velocidad v $x=0.5$, $Re=100$
 101×101

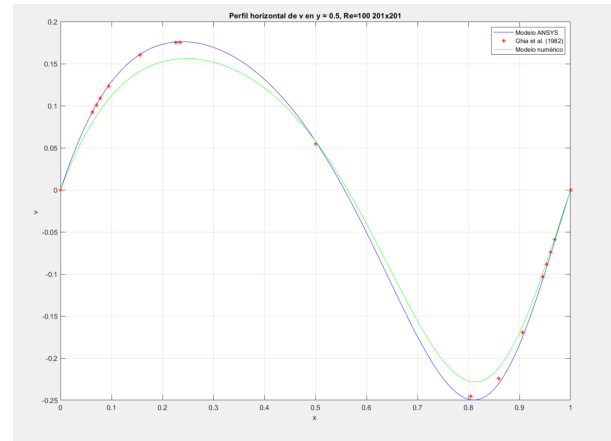
Fuente: Elaboración propia

Figura 6.5: Comparación de velocidades caso mallado 101×101



(a) Comparación velocidad u x=0.5, Re=100 201x201

Fuente: Elaboración propia



(b) Comparación velocidad v x=0.5, Re=100 201x201

Fuente: Elaboración propia

Figura 6.6: Comparación de velocidades caso mallado 201x201

Se procedió entonces a calcular el error entre el resultado experimental obtenido desde el código realizado con respecto al modelo CFD en Ansys, los indicadores de desempeño del modelo referente a las velocidades y presiones se presentan a continuación en la siguiente tabla 6.2

Tabla 6.1: Resultados criterios de desempeño código de diferencias finitas para un Re=100

Malla	NSE Velocidad u	Desempeño	NSE Velocidad v	Desempeño	NSE Presión	Desempeño
101x101	0.98816	Muy Bueno	0.96473	Muy Bueno	0.63376	Satisfactorio
201x201	0.99733	Muy Bueno	0.98986	Muy Bueno	0.70021	Bueno
Malla	RSR Velocidad u	Desempeño	RSR Velocidad v	Desempeño	RSR Presión	Desempeño
101x101	0.10883	Muy Bueno	0.18781	Muy Bueno	0.60516	Satisfactorio
201x201	0.051671	Muy Bueno	0.10069	Muy Bueno	0.54751	Bueno

6.2. Análisis de resultados modelo diferencias finitas

A partir de los resultados obtenidos de la modelación y calibración del método de diferencias finitas, se extrae lo siguiente:

- El algoritmo de diferencias finitas presentó divergencia al trabajar con pasos espaciales muy pequeños, esto se debe a que en la discretización en diferencias finitas presentada en la sección 5.3.1, aparecen términos Δx^2 y Δy^2 , los cuáles al hacerse muy pequeños disparan los valores obtenidos en cada iteración. Este problema se puede combatir mediante la aplicación de pasos temporales pequeños, sin embargo, la cantidad de tiempo de cálculo se verá altamente aumentada, debido a que el modelo requerirá de una mayor cantidad de iteraciones para que el escurrimiento se estabilice.
- Los resultados asociados a las presiones obtenidas de la malla de 101x101 nodos presentaron valores residuales, lo que no ocurre en el mallado de 201x201 nodos.

- Los resultados obtenidos con el mallado de 201x201 nodos presentaron mejores valores de desempeño que los obtenidos con una malla de 101x101 nodos.
- Las velocidades en ambos casos de mallado se ajustaron con bastante precisión a los valores obtenidos por Ansys Fluent y por la investigación desarrollada por Ghia en 1988.
- Las velocidades en \vec{e}_x se ajustaron de mejor manera a los datos teóricos que las velocidades en dirección \vec{e}_y .
- Las presiones se ajustaron con valores de desempeño aceptables a las obtenidas por Ansys Fluent.
- Se aprecian presiones residuales para el caso del mallado de 101x101 nodos.

6.3. Resultados Cavity Flow en elementos finitos

Para el código desarrollado en elementos finitos se consideraron las siguientes disposiciones de malla:

- Malla de 10x10 elementos, 341 nodos de velocidad y 121 nodos de presión.
- Malla de 20x20 elementos, 1281 nodos de velocidad y 441 nodos de presión.

Se presenta primero el campo vectorial de velocidades para ambos casos de mallado:

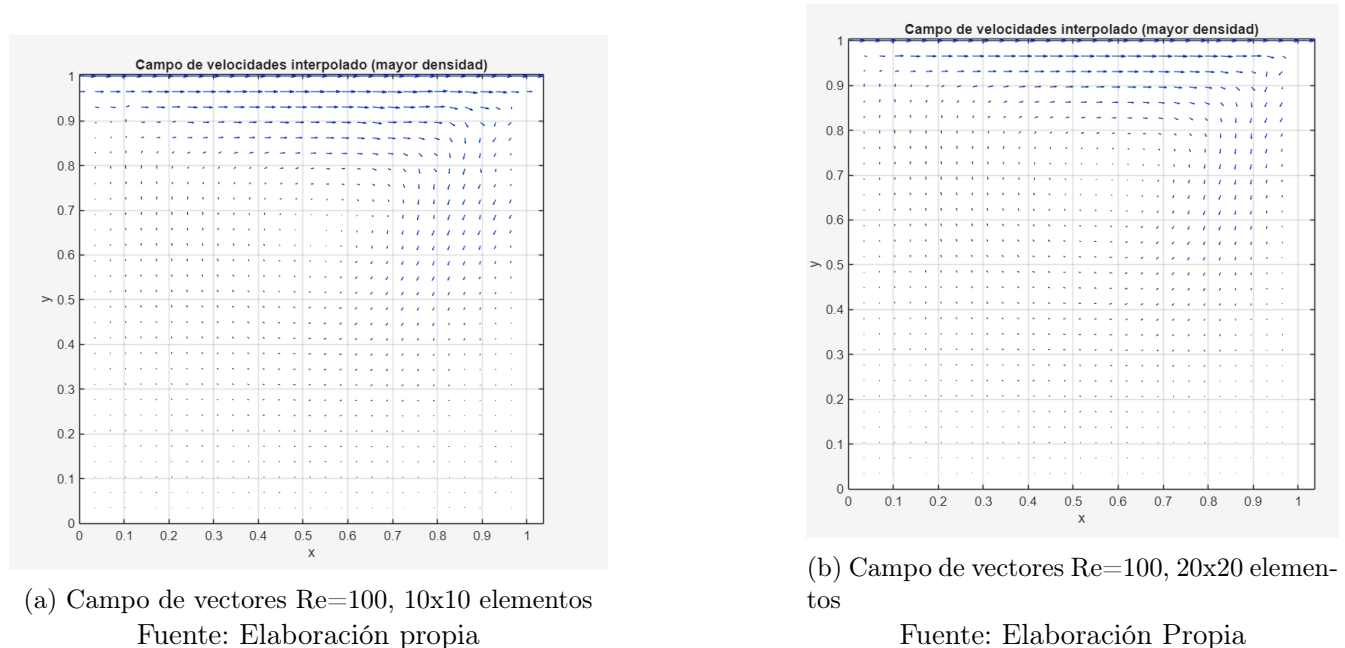
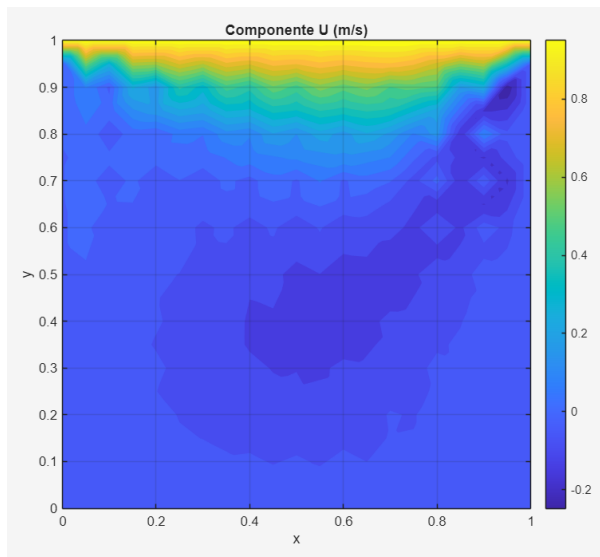


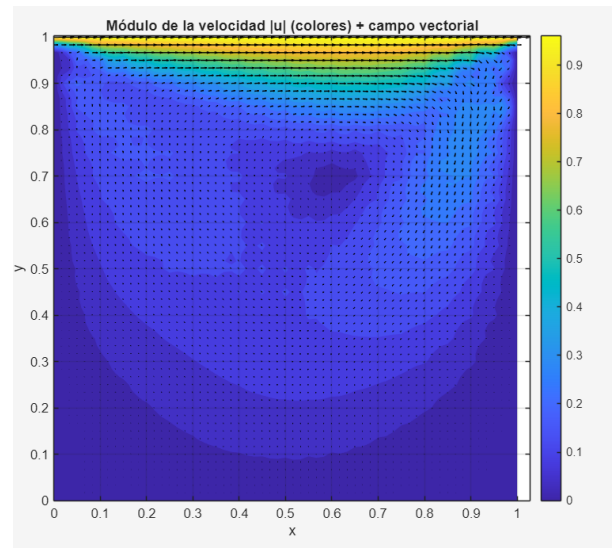
Figura 6.7: Resultados campo de vectores para los dos casos de mallado

Se presentan también, la distribución de velocidades en toda la cavidad para ambos caso de mallado en los siguientes diagramas:



(a) Distribución de velocidades $Re=100$, 10×10 elementos

Fuente: Elaboración propia

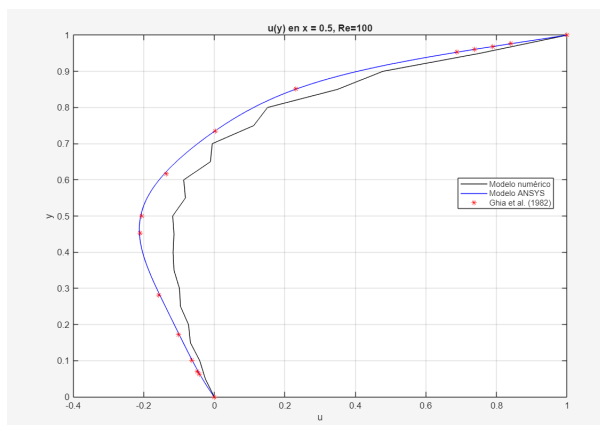


(b) Distribución de velocidades $Re=100$, 20×20 elementos

Fuente: Elaboración Propia

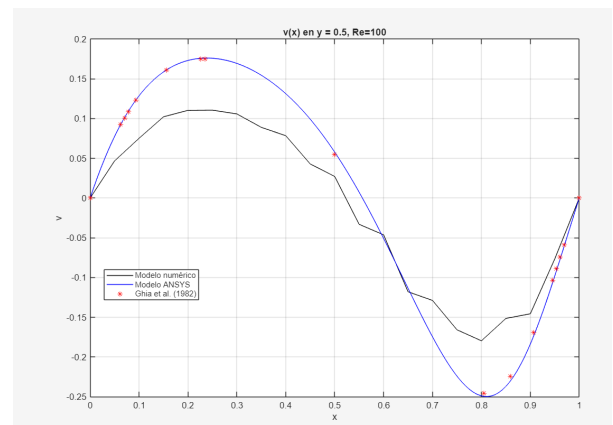
Figura 6.8: Resultados velocidades para los dos casos de mallado

Para analizar gráficamente los resultados obtenidos por la simulación numérica, se presentan a continuación la comparación entre las curvas obtenidas de velocidad u en $x=0.5$ y la velocidad v en $y=0.5$, con respecto al estudio realizado en 1982 por Ghia (Ghia et al., 1982), y también con respecto a la curva obtenida en el software comercial Ansys Fluent:



(a) Comparación velocidad u $x=0.5$, $Re=100$ 101×101

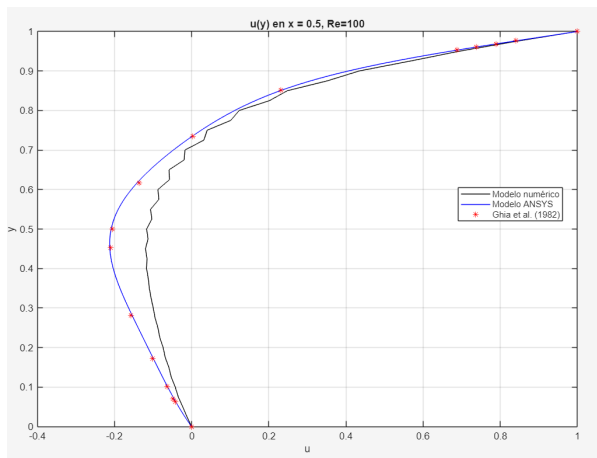
Fuente: Elaboración propia



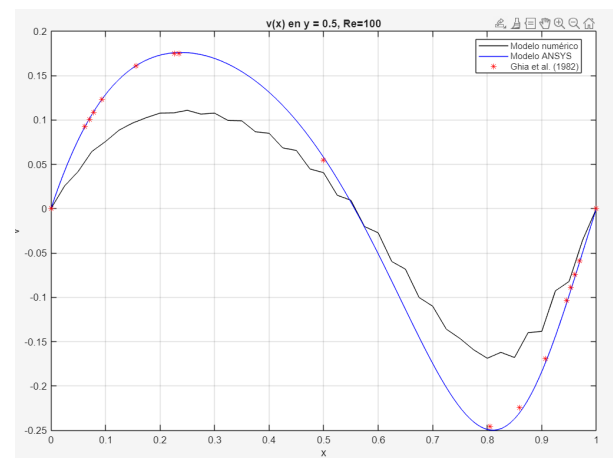
(b) Comparación velocidad v $x=0.5$, $Re=100$ 10×10

Fuente: Elaboración propia

Figura 6.9: Comparación de velocidades caso mallado 10×10



(a) Comparación velocidad u x=0.5, Re=100 20x20
Fuente: Elaboración propia



(b) Comparación velocidad v x=0.5, Re=100 20x20
Fuente: Elaboración propia

Figura 6.10: Comparación de velocidades caso mallado 201x201

Se calculó el error entre el resultado experimental obtenido desde el código realizado con respecto al modelo CFD en Ansys, se obtienen los siguientes indicadores de desempeño:

Tabla 6.2: Resultados criterios de desempeño código de elementos finitos para un Re=100

Malla	NSE Velocidad u	Desempeño	NSE Velocidad v	Desempeño	NSE Presión	Desempeño
10x10	0.9597	Muy Bueno	0.8654	Muy Bueno	0.1893	Pobre
20x20	0.9801	Muy Bueno	0.8689	Muy Bueno	0.3603	Pobre
Malla	RSR Velocidad u	Desempeño	RSR Velocidad v	Desempeño	RSR Presión	Desempeño
101x101	0.0086	Muy Bueno	0.0157	Muy Bueno	0.7891	Insuficiente
201x201	0.0053	Muy Bueno	0.0013	Muy Bueno	0.7494	Insuficiente

6.4. Análisis de resultados modelo elementos finitos

Apreciando y analizando los resultados de la modelación con elementos finitos se puede declarar lo siguiente:

- El código de elementos permite trabajar con una mayor cantidad de nodos que los trabajables en el MDF, ya que se pudieron realizar mallados con un orden de magnitud bastante superior a los utilizados en los anteriores métodos nombrados.
- El algoritmo presentó presiones incorrectas y residuales, por lo que no fueron presentadas en los resultados gráficos, pero sí en los resultados estadísticos, esto puede deberse a un error en la asignación de presiones a los nodos interiores en la iteración del código.
- Los tiempos de iteración suben a medida que aumentan la cantidad de elementos en el mallado.
- Para llegar al sistema lineal que resuelve la situación física en flujo completamente desarrollado se requirió de bastante trabajo matemático, a diferencia de los otros dos métodos estudiados en la presente memoria.

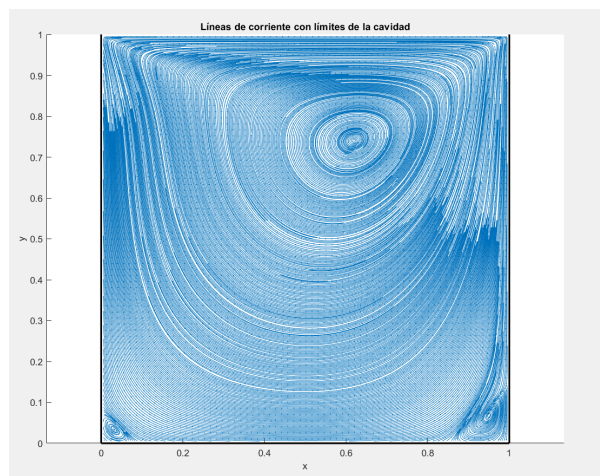
- Los resultados obtenidos por el MEF presentaron errores numéricos, los cuáles se pueden apreciar en las oscilaciones de la gráfica de las velocidades en la mitad de la cavidad, lo que se puede deber a que el orden de los pesos de Gauss utilizados para la integración es muy bajo.
- El MEF presentó resultados notablemente peores que el MDF.

6.5. Resultados Cavity Flow en volúmenes finitos

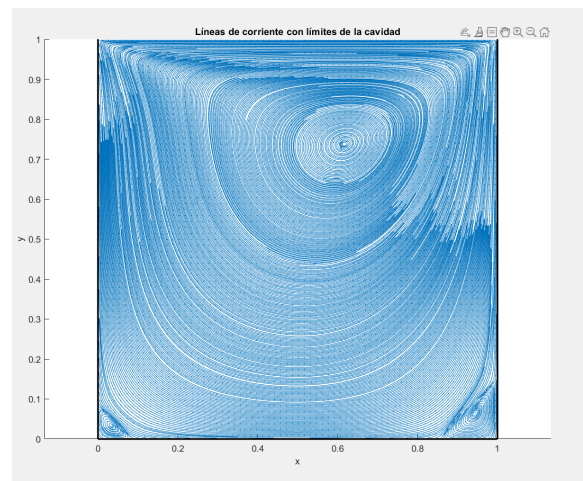
Se realizó un análisis con los siguientes valores de entrada para el código de volúmenes finitos:

- Malla de 101x101 nodos, con un criterio de detención del código cuando los valores residuales sean menores a 10^{-5} .
- Malla de 201x201 nodos, con un criterio de detención del código cuando los valores residuales sean menores a 10^{-8} .

A continuación se presentan las líneas de corriente obtenidas para ambos mallados:



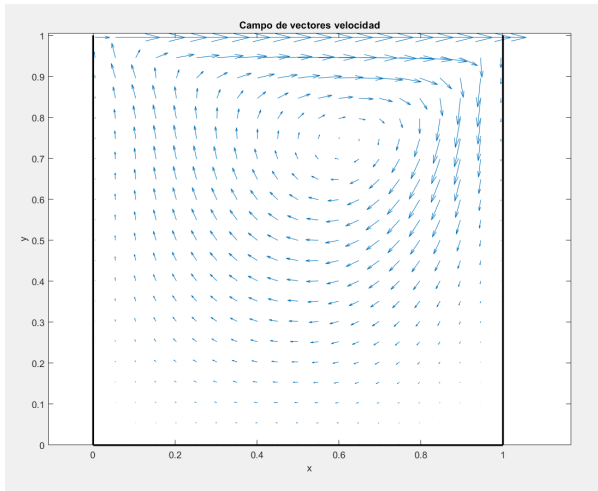
(a) Líneas de corriente $Re=100$, 101x101
Fuente: Elaboración propia



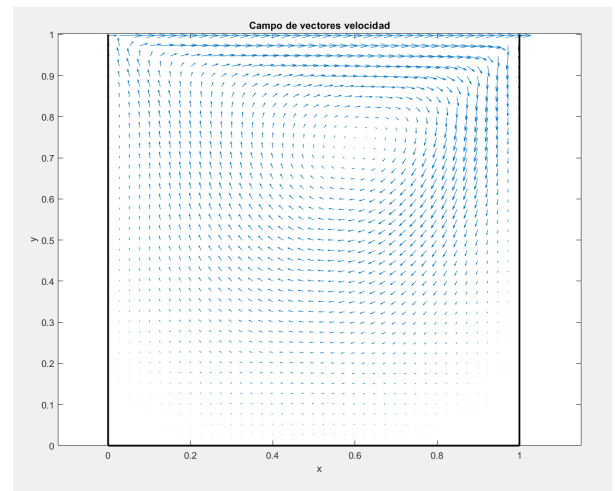
(b) Líneas de corriente $Re=100$, 201x201
Fuente: Elaboración Propia

Figura 6.11: Resultados líneas de corriente para los dos casos de mallado

Se presenta a continuación el campo de vectores para ambos casos de mallado:



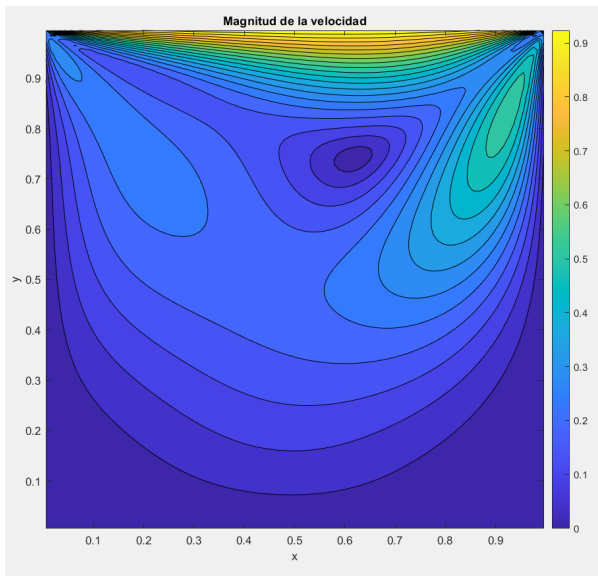
(a) Campo de vectores $Re=100$, 101×101
Fuente: Elaboración propia



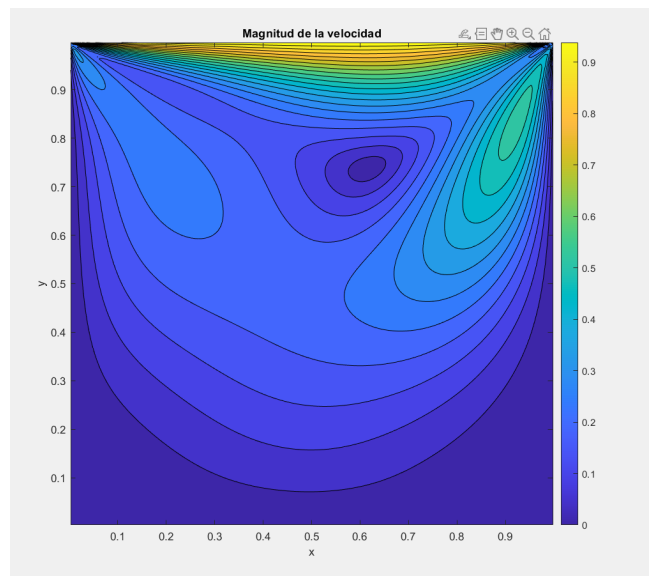
(b) Campo de vectores $Re=100$, 201×201
Fuente: Elaboración Propia

Figura 6.12: Resultados campo de vectores para los dos casos de mallado

Se presentan también, la distribución de presiones y velocidades en toda la cavidad en los siguientes diagramas:

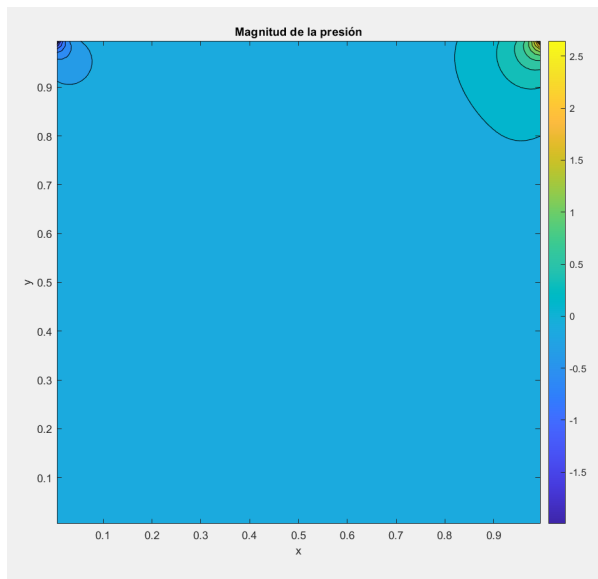


(a) Distribución de velocidades $Re=100$, 101×101
Fuente: Elaboración propia

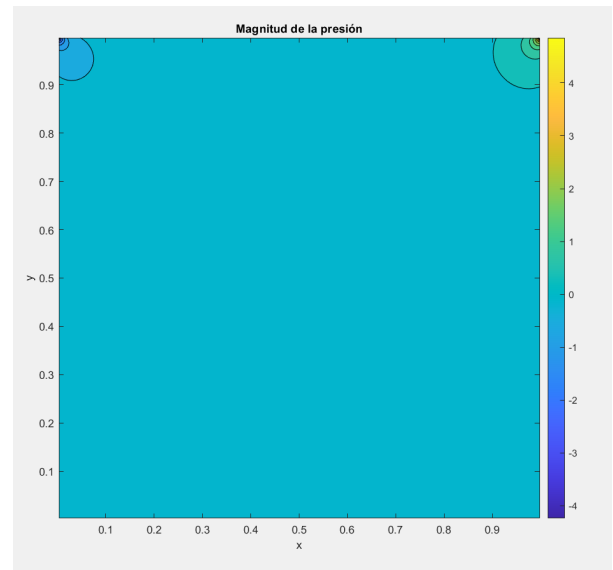


(b) Distribución de velocidades $Re=100$, 201×201
Fuente: Elaboración Propia

Figura 6.13: Resultados velocidades para los dos casos de mallado



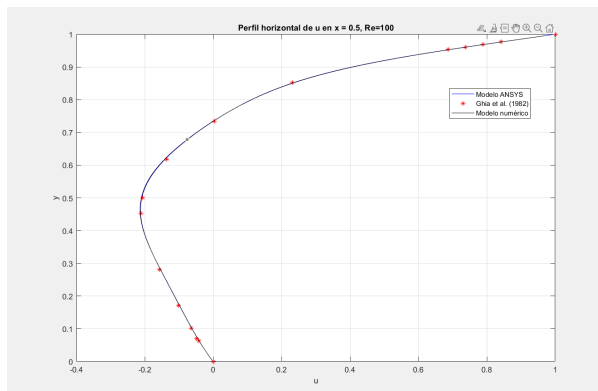
(a) Distribución de presiones Re=100, 101x101
 Fuente: Elaboración propia



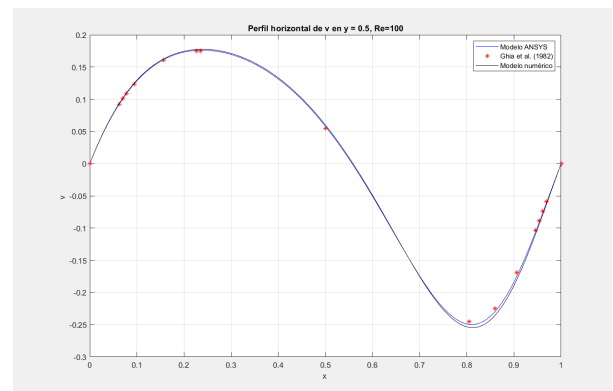
(b) Distribución de presiones Re=100, 201x201
 Fuente: Elaboración Propia

Figura 6.14: Resultados presiones para los dos casos de mallado

Con motivo de realizar un análisis visual de los resultados obtenidos por el algoritmo de volúmenes finitos, se procede a graficar la comparación entre las curvas de velocidad en direcciones e_x y e_y para la mitad de la cavidad del modelo numérico, de la investigación realizada por Ghia en 1982 (Ghia et al., 1982) y de los valores obtenidos mediante la modelación cfd en Ansys Fluent, esto se presenta a continuación en la siguiente figura 6.15:

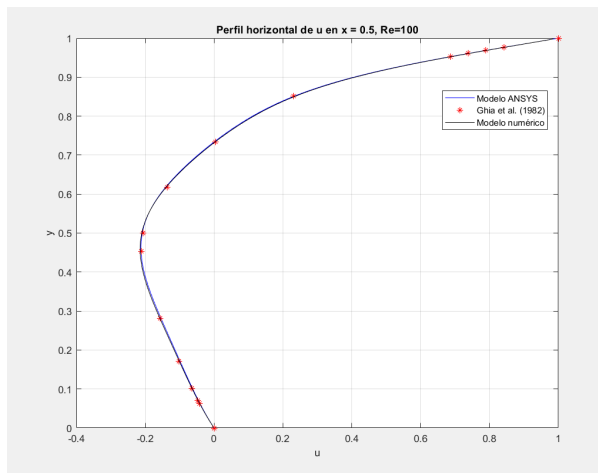


(a) Comparación velocidad u x=0.5, Re=100
 201x201
 Fuente: Elaboración propia



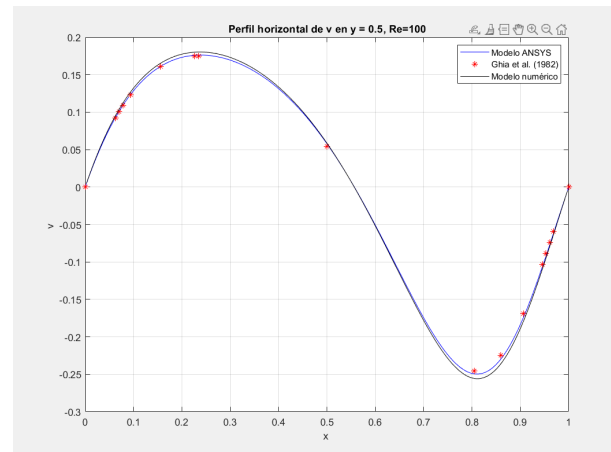
(b) Comparación velocidad v x=0.5, Re=100
 201x201
 Fuente: Elaboración propia

Figura 6.15: Comparación de velocidades caso mallado 101x101



(a) Comparación velocidad u $x=0.5$, $Re=100$
201x201

Fuente: Elaboración propia



(b) Comparación velocidad v $x=0.5$, $Re=100$
201x201

Fuente: Elaboración propia

Figura 6.16: Comparación de velocidades caso mallado 201x201

Se calcularon los valores correspondientes a cada criterio de error para las presiones y velocidad u y v, cuyos resultados se presentan a continuación en la siguiente tabla 6.3:

Tabla 6.3: Resultados criterios de desempeño código de volúmenes finitos para un $Re=100$

Malla	NSE Velocidad u	Desempeño	NSE Velocidad v	Desempeño	NSE Presión	Desempeño
101x101	0.99952	Muy Bueno	0.99877	Muy Bueno	0.97887	Muy Bueno
201x201	0.99975	Muy Bueno	0.99951	Muy Bueno	0.97828	Muy Bueno
Malla	RSR Velocidad u	Desempeño	RSR Velocidad v	Desempeño	RSR Presión	Desempeño
101x101	0.022245	Muy Bueno	0.035536	Muy Bueno	0.14757	Muy Bueno
201x201	0.015967	Muy Bueno	0.022461	Muy Bueno	0.14961	Muy Bueno

6.6. Análisis de resultados modelo volúmenes finitos

A partir de los resultados observados al ejecutar el código de volúmenes finitos se puede comentar lo siguiente:

- Al trabajar con una malla de 101x101 nodos, el paso de tiempo utilizado fue de 10^{-3} [s], lo que requirió acotar los valores residuales a 10^{-6} , ya que el sistema llegó a una situación de flujo completamente desarrollado con esa tolerancia.
- Al trabajar con una malla de 201x201 nodos, el paso de tiempo se debió reducir a 10^{-4} [s] para asegurar la convergencia del algoritmo, lo que produjo que la tolerancia de los valores residuales se redujera a valores menores a 10^{-8} , obteniendo así mayor cantidad de iteraciones y tiempo de cálculo para lograr obtener una respuesta de flujo completamente desarrollado.
- Se aprecia que, para ambos casos de mallado, se obtienen resultados que se ajustan en el mejor de los

intervalos a los valores teóricos obtenidos del modelo CFD desarrollado con la herramienta Ansys, tanto para las presiones como para las velocidades.

- Para ambos casos de mallado, la respuesta de velocidades obtenidas concuerdan con los valores obtenidos por la investigación realizada por Ghia (Ghia et al., 1982).
- Se aprecian presiones residuales para el caso del mallado de 101x101 nodos.
- En general, no se aprecia una clara diferencia en la precisión de los resultados cuando se aumenta la cantidad de nodos, por lo que el método de volúmenes finitos representa una muy buena aproximación a los valores teóricos sin la necesidad de refinar demasiado la malla espacial. Esto puede deberse a que Ansys Fluent utiliza este método para la aproximación numérica del problema estudiado.

7. Conclusiones y Recomendaciones

7.1. Comparación métodos numéricos

Primero, se procede a comparar los tiempos de iteración y valores estadísticos obtenidos en la siguiente tabla 7.1 y figuras 7.1 y 7.2

Tabla 7.1: Comparación métodos numéricos

Diferencias Finitas	Tiempo de simulación [s]	NSE Velocidad u	NSE Velocidad v	NSE Presiones	RSR Velocidad u	RSR Velocidad v	RSR Presiones
Malla 101x101	194.0625	0.9882	0.9673	0.6338	0.1088	0.1878	0.6052
Desempeño	–	Muy Bueno	Muy Bueno	Satisfactorio	Muy Bueno	Muy Bueno	Satisfactorio
Malla 201x201	499.3125	0.9973	0.9899	0.7002	0.0517	0.1007	0.5475
Desempeño	–	Muy Bueno	Muy Bueno	Bueno	Muy Bueno	Muy Bueno	Bueno
Elementos Finitos	Tiempo de simulación [s]	NSE Velocidad u	NSE Velocidad v	NSE Presiones	RSR Velocidad u	RSR Velocidad v	RSR Presiones
Malla 10x10	2.4688	0.9597	0.8654	0.1893	0.0086	0.0157	0.7891
Desempeño	–	Muy Bueno	Muy Bueno	Pobre	Muy Bueno	Muy Bueno	Pobre
Malla 20x20	12.5781	0.9801	0.8689	0.3603	0.0053	0.0014	0.7494
Desempeño	–	Muy Bueno	Muy Bueno	Pobre	Muy Bueno	Muy Bueno	Pobre
Volúmenes Finitos	Tiempo de simulación [s]	NSE Velocidad u	NSE Velocidad v	NSE Presiones	RSR Velocidad u	RSR Velocidad v	RSR Presiones
Malla 101x101	30.0000	0.9995	0.9988	0.9789	0.0222	0.0355	0.1457
Desempeño	–	Muy Bueno	Muy Bueno	Muy Bueno	Muy Bueno	Muy Bueno	Muy Bueno
Malla 201x201	986.9062	0.9998	0.9995	0.9783	0.0160	0.0225	0.1496
Desempeño	–	Muy Bueno	Muy Bueno	Muy Bueno	Muy Bueno	Muy Bueno	Muy Bueno

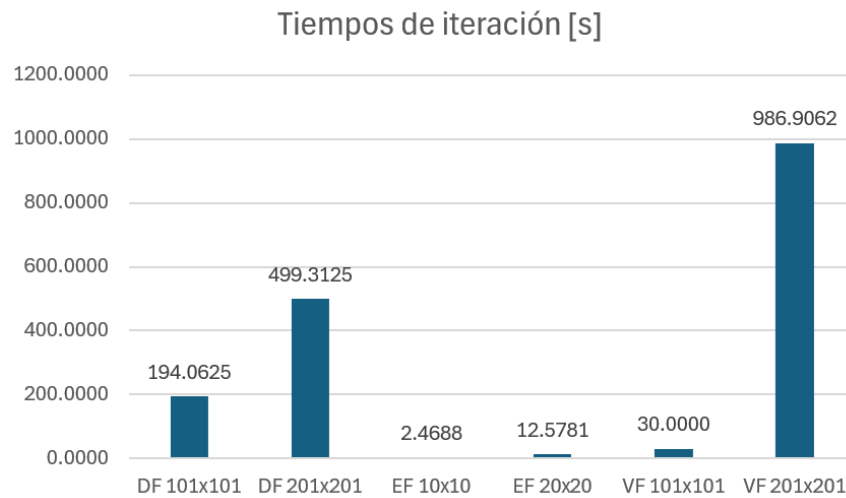


Figura 7.1: Comparación tiempos de iteración
 Fuente: Elaboración propia.

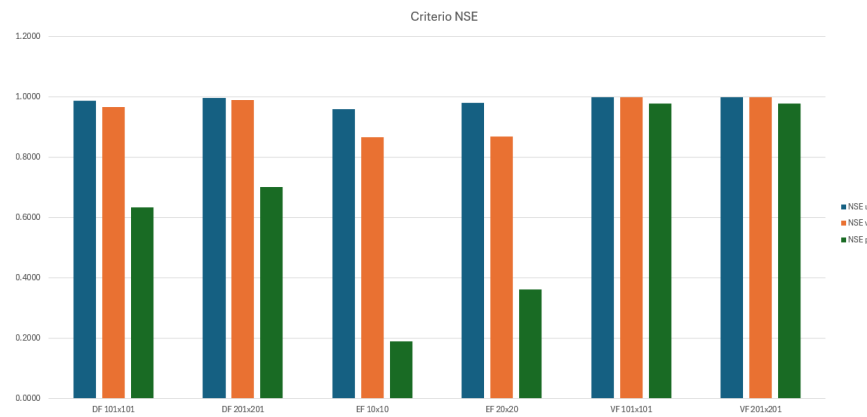


Figura 7.2: Comparación criterio NSE
 Fuente: Elaboración propia.

Se comparan también los tres casos en su mallado más fino con respecto a las líneas de calibración de Ghia y Ansys para las velocidades en la mitad de la cavidad:

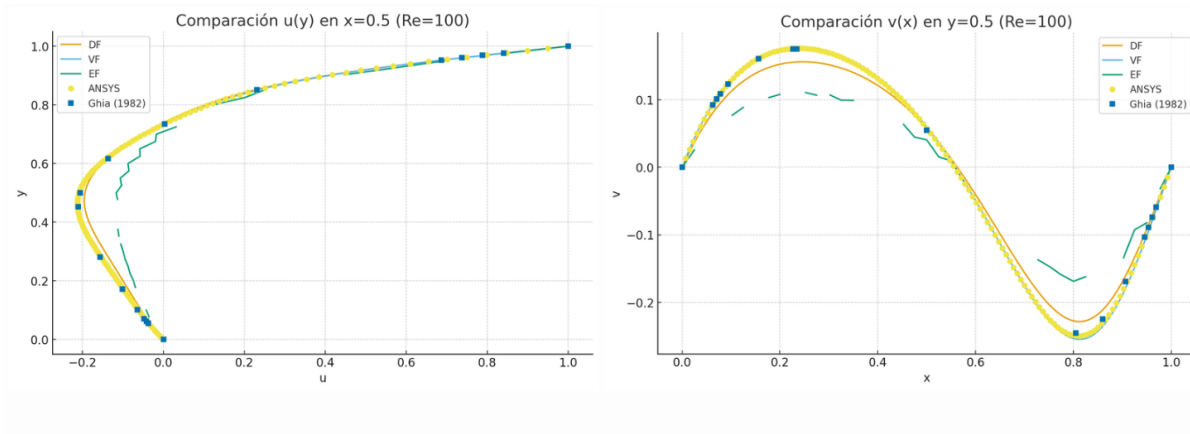


Figura 7.3: Comparación criterio velocidades en la mitad de la cavidad
Fuente: Elaboración propia.

Se obtiene entonces la siguiente matriz de ventajas y desventajas de cada método numérico aplicado:

Método	FDM	FEM	FVM
Ventajas	<ol style="list-style-type: none"> Alta precisión en velocidades Buena precisión en presiones 	<ol style="list-style-type: none"> Alta precisión en velocidades Se puede trabajar con mallas mucho más finas en poco tiempo. Método más robusto 	<ol style="list-style-type: none"> Alta precisión en velocidades Alta precisión en presiones. Alta precisión en mallados no tan finos
Desventajas	<ol style="list-style-type: none"> Requiere de mayores tiempos de iteración para mejores resultados Tiende a diverger en función de los pasos 	<ol style="list-style-type: none"> No calcula de manera correcta las presiones. Requiere de mucho trabajo matemático. 	<ol style="list-style-type: none"> Requiere de mayores tiempos de iteración para mejores resultados.

Figura 7.4: Ventajas y desventajas métodos numéricos
Fuente: Elaboración propia.

7.2. Recomendaciones y criterios

Analizando la totalidad de los resultados obtenidos, se redactan las siguientes recomendaciones para contribuir al proceso de modelación numérica CFD:

- Para la modelación CFD del Vertedero de Ogee en Ansys Fluent se recomienda utilizar caudales mayores a 12 [L/s], para así disminuir el número de iteraciones y el tiempo de resolución del solver y, además, obtener resultados mejores ajustados a la teoría.
- Se debe elegir cuidadosamente la ecuación de estado y las condiciones de contorno para la modelación CFD de la presión, ya que este parámetro es considerablemente sensible a cambios en la formulación del método de resolución numérica.

- Se recomienda utilizar pasos de tiempo pequeños si se modela con una malla de muchos nodos en diferencias finitas.
- Se recomienda utilizar mallas con mayor cantidad de nodos si se requiere mayor precisión en los valores a obtener al utilizar el método de diferencias finitas.
- Para obtener resultados más precisos, el método de diferencias finitas presenta como desventaja el incremento del número de iteraciones y del tiempo de cálculo necesario para reducir el tamaño de los elementos de la malla.
- Con volúmenes finitos se pueden obtener resultados altamente precisos con un menor tiempo de simulación y un mallado menos fino.
- El método de volúmenes finitos, gracias a su formulación que considera tanto el aporte convectivo como difusivo del fluido presentó mejor desempeño al momento de modelar la ecuación de Navier-Stokes, por lo que se recomienda altamente su uso en la realización de modelos CFD.
- El código de elementos finitos puede ser mejorado incorporando más subrelajaciones a su formulación, corrigiendo el ensamblaje de las presiones de 4 nodos y aplicando una integración por una cuadratura de Gauss de orden superior, además se recomienda comprobar si los resultados mejoran aplicando una iteración que considere el paso temporal, como Forward Euler.

8. Referencias

- ANSYS Inc. (2024). *ANSYS Fluent User's Guide* [Consultado el 16 de mayo de 2025]. https://www.afs.enea.it/project/neptunius/docs/fluent/html/ug/main_pre.htm
- Armfield. (2020). *S6 MKII Glass Sided Tilting Flume and Accessorie Instruction Manual. Issue 20* [Consultado desde el manual proporcionado en PDF].
- Astroza, N. (2017). Método de volúmenes finitos aplicado a las ecuaciones de Navier-Stokes y en el funcionamiento de vertederos [Repositorio USM]. <https://repositorio.usm.cl/entities/tesis/129a1ee9-4b4c-403d-9263-aa74da3dbc40>
- Barba, L. A., & Forsyth, G. F. (2013). *CFD Python: 12 steps to Navier-Stokes equations - Step 11* [Accessed: 2025-05-12].
- Çengel, Y. A. (2018). *Mecánica de fluidos: fundamentos y aplicaciones* (4.ª ed.). McGraw-Hill.
- CFD-Online. (2023). Realisable k- model [Artículo en línea sobre el modelo realizable k-]. https://www.cfd-online.com/Wiki/Realisable_k-epsilon_model
- Chow, V. T. (1988). *Open-channel hydraulics* (1.ª ed.). McGraw-Hill.
- COMSOL Multiphysics. (2019). The k- Turbulence Model [Disponible en la documentación oficial de COMSOL Multiphysics]. https://doc.comsol.com/5.5/doc/com.comsol.help.cfd/cfd_ug_fluidflow_single.06.088.html
- Ferziger, J. H., Perić, M., & Street, R. L. (2020). *Computational Methods for Fluid Dynamics* (4th). Springer Nature Switzerland AG. <https://doi.org/10.1007/978-3-319-99693-6>
- Garlan, B. (2019, diciembre). *Contributions to an electromagnetic and microfluidic microsystem for immunological detection using magnetic nanoparticles* [Tesis doctoral].
- Ghia, U., Ghia, K., & Shin, C. (1982). High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and a multigrid method. *Journal of Computational Physics*, 48(3), 387-411. [https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0021-9991\(82\)90058-4](https://doi.org/https://doi.org/10.1016/0021-9991(82)90058-4)
- Gupta, H. V., Kling, H., Yilmaz, K. K., & Martinez, G. F. (2009). Decomposition of the mean squared error and NSE performance criteria: Implications for improving hydrological modelling. *Journal of Hydrology*, 377(1), 80-91. <https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.jhydrol.2009.08.003>
- Löhner, R. (2001). *Applied CFD techniques: An introduction based on finite element methods*. John Wiley & Sons.
- Mak, S., & Wong, K. (1990). The measurement of surface tension by the method of direct pull. *American Journal of Physics*, 58(8), 791-792.
- Mery, H. M. (2013). *Hidráulica aplicada al diseño de obras*. RIL editores.
- Ngamalieu Nengoue, U. A. (2016). Caracterización de los vertederos hidráulicos mediante técnicas CFD [Trabajo de fin de máster, Universitat Politècnica de València]. <https://riunet.upv.es/bitstreams/80d52b0e-d50d-4abc-83ed-748fd26634c6/download>
- Patankar, S. V. (1980). *Numerical Heat Transfer and Fluid Flow*. Hemisphere Publishing Corporation.
- Pozrikidis, C. (2001). *Fluid dynamics: Theory, computation, and numerical simulation*. Kluwer Academic Publishers.
- Reddy, J. N. (2004). *An Introduction to Nonlinear Finite Element Analysis: With Applications to Heat Transfer, Fluid Mechanics, and Solid Mechanics* (1.ª ed.). Oxford University Press.
- Sánchez Vázquez, J. (2004). Simulación numérica directa en paralelo de las ecuaciones de Navier-Stokes en flujos con capa límite desprendida: Aplicaciones en instalaciones deportivas con gradas cubiertas [Proyecto fin de carrera, Ingeniería Industrial, Universidad de Sevilla].
- Shiach, J. (2021). Successive over-relaxation method (SOR) [Accedido: 13 de octubre de 2025]. https://jonshiach.github.io/ODEs-book/_pages/7.4_SOR_method.html
- Smith, I. M., Griffiths, D. V., & Margetts, L. (2014). *Programming the Finite Element Method* (5th). John Wiley & Sons Ltd.
- Streeter, V. L. (2000). *Mecánica de fluidos*. McGraw-Hill.

- Versteeg, H. K., & Malalasekera, W. (2007). *An Introduction to Computational Fluid Dynamics: The Finite Volume Method* (2nd). Pearson Education Limited.
- Villamizar, A. (2014). Aplicación de un modelo turbulento bidimensional para la simulación de flujo a superficie libre en un canal horizontal [Repositorio UNAL]. <https://repositorio.unal.edu.co/handle/unal/53225>
- Zienkiewicz, O. C., & Taylor, R. L. (1981). *The Finite Element Method: Its Basis and Fundamentals* (something (earlier ed.)). Butterworth–Heinemann.

Anexos

A. Demostración discretización en volúmenes finitos: caso bidimensional

Continuando con la discretización de la ecuación diferencial general de conservación (32), para dos dimensiones se presenta como:

$$\frac{\partial}{\partial t}(\rho\phi) + \frac{\partial J_x}{\partial x} + \frac{\partial J_y}{\partial y} = S \quad (48)$$

donde J_x y J_y son los flujos totales que se definen como:

$$J_x = \rho u \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial x} \quad (49)$$

$$J_y = \rho v \phi - \Gamma \frac{\partial \phi}{\partial y} \quad (50)$$

en que u y v denotan las componentes de velocidad en direcciones x e y .

Derivación

Integrando la ecuación (48) entre los instantes t y $t + \Delta t$ considerando un esquema implícito de un paso en el tiempo, y luego integrando en el espacio sobre el volumen de control de la figura 4.8 de dimensiones $\Delta x \cdot \Delta y \cdot 1$, resulta:

$$\frac{(\rho\phi_P - \rho_P^0\phi_P^0)\Delta x\Delta y}{\Delta t} + J_e - J_w + J_n - J_s = \bar{S}\Delta x\Delta y \quad (51)$$

en donde ρ_P^0 y ϕ_P^0 son los valores del paso anterior, y \bar{S} es el valor promediado de S sobre el volumen de control.

De manera similar podemos integrar la ecuación (7) de continuidad, obteniendo así:

$$\frac{(\rho - \rho_P^0)\Delta x\Delta y}{\Delta t} + F_e - F_w + F_n - F_s = 0 \quad (52)$$

cuyos flujos advectivos vienen dados por:

$$F_e = (\rho u)_e \Delta y, \quad F_w = (\rho u)_w \Delta y, \quad F_n = (\rho v)_n \Delta x, \quad F_s = (\rho v)_s \Delta x \quad (53)$$

Multiplicando esta ecuación por ϕ_P y restándosela a la ecuación (51) se obtiene:

$$(\phi_P - \phi_P^0) \frac{\rho_P^0 \Delta x \Delta y}{\Delta t} + (J_e - F_e \phi_P) - (J_w - F_w \phi_P) + (J_n - F_n \phi_P) - (J_s - F_s \phi_P) = \bar{S} \Delta x \Delta y \quad (54)$$

Bajo el supuesto de uniformidad de flujo en las caras del volumen de control, podemos extender el desarrollo visto para una dimensión a dos dimensiones. Utilizando las ecuaciones (38) y (39) para expresar los flujos $(J_e - F_e \phi_P)$ y $(J_w - F_w \phi_P)$ en términos de la función $A(|P|)$, resulta en:

$$a_E = D_e A(|P_e|) + \|- F_e, 0\| \quad (55)$$

$$a_W = D_w A(|P_w|) + \|\ F_w, 0\| \quad (56)$$

Expresiones similares se pueden obtener para $(J_n - F_n \phi_P)$ y $(J_s - F_s \phi_P)$.

B. Resultados modelo vertedero para distintos caudales

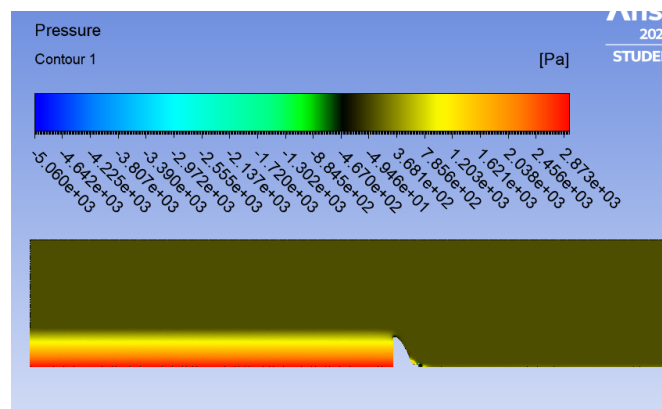


Figura B.1: Diagrama de presiones, $Q=12$ [L/s]
 Fuente: Elaboración Propia

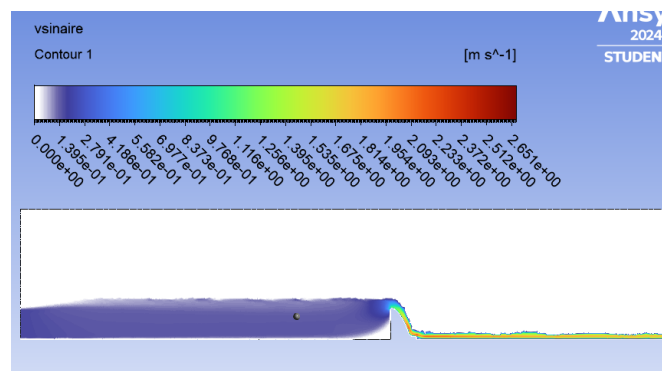


Figura B.2: Diagrama de velocidades, $Q=12$ [L/s]
 Fuente: Elaboración Propia

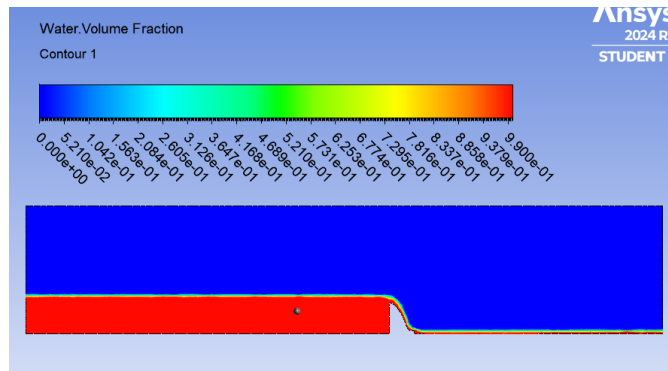


Figura B.3: Eje hidráulico, $Q=12$ [L/s]
Fuente: Elaboración Propia

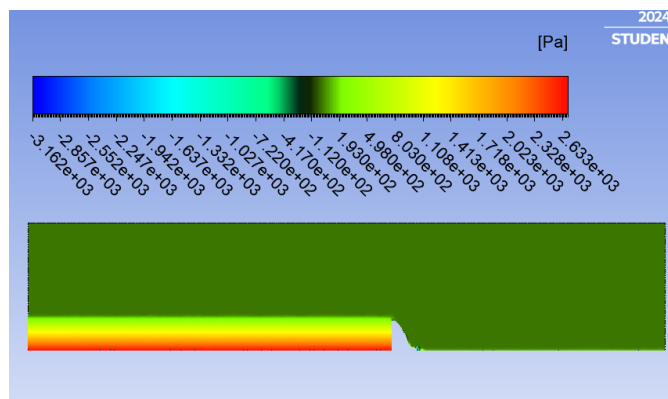


Figura B.4: Diagrama de presiones, $Q=5$ [L/s]
Fuente: Elaboración Propia

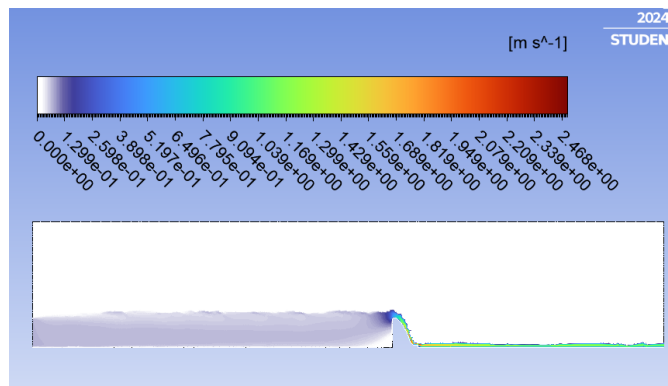


Figura B.5: Diagrama de velocidades, $Q=5$ [L/s]
Fuente: Elaboración Propia

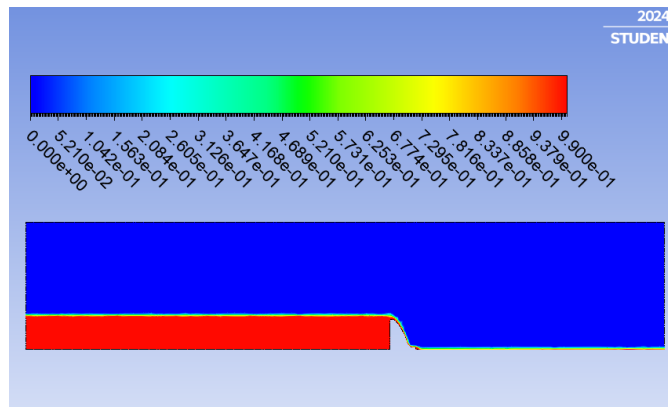


Figura B.6: Eje hidráulico, $Q=5$ [L/s]
Fuente: Elaboración Propia

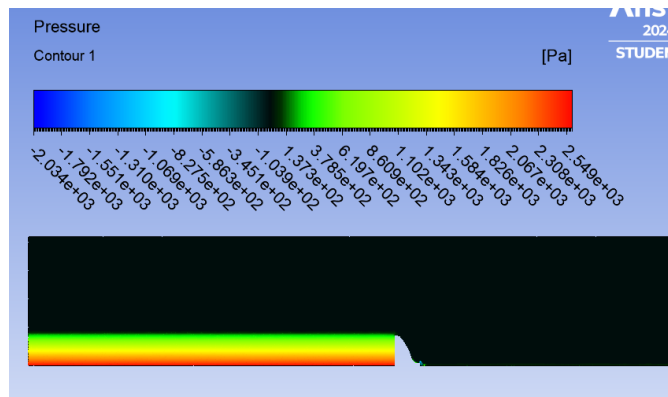


Figura B.7: Diagrama de presiones, $Q=3$ [L/s]
Fuente: Elaboración Propia

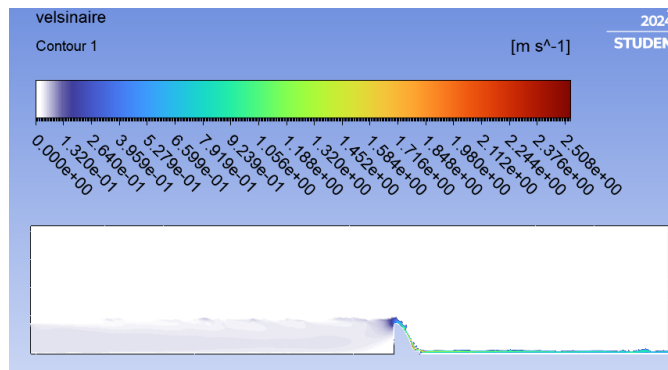


Figura B.8: Diagrama de velocidades, $Q=3$ [L/s]
Fuente: Elaboración Propia

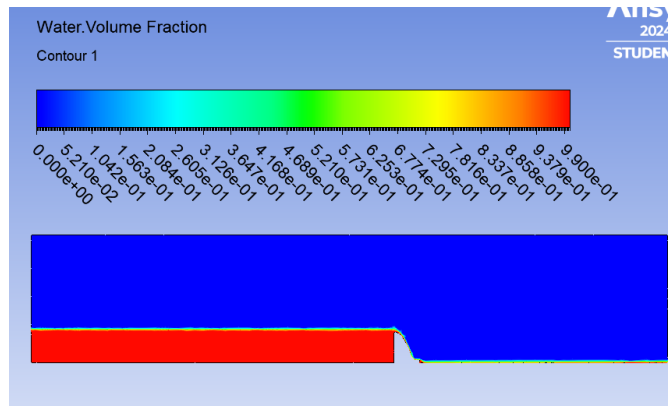


Figura B.9: Eje hidráulico, $Q=3$ [L/s]
Fuente: Elaboración Propia

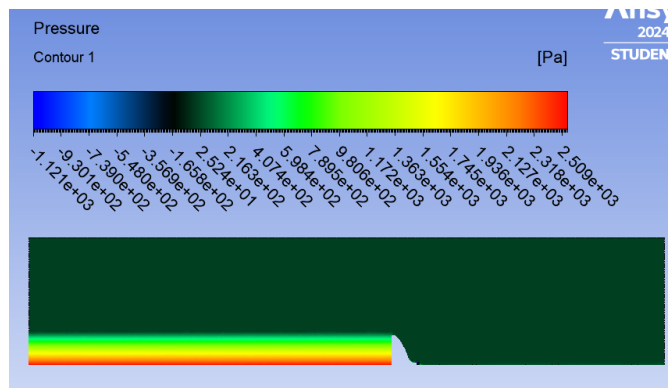


Figura B.10: Diagrama de presiones, $Q=2$ [L/s]
Fuente: Elaboración Propia

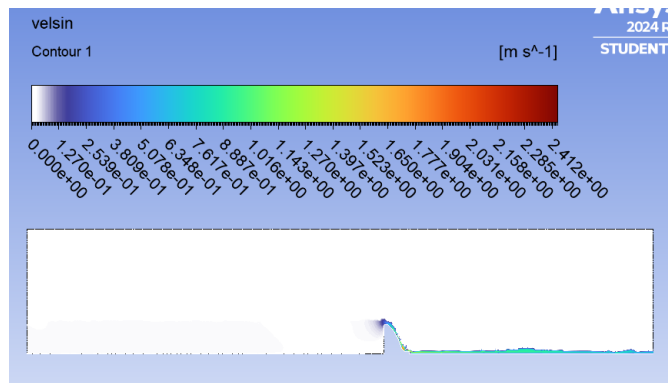


Figura B.11: Diagrama de velocidades, $Q=2$ [L/s]
Fuente: Elaboración Propia

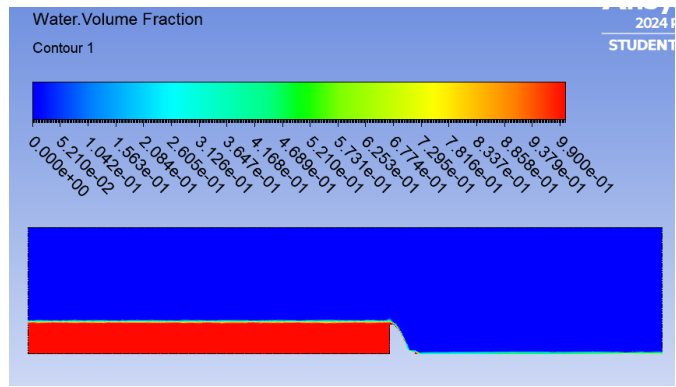


Figura B.12: Eje hidráulico, $Q=2$ [L/s]
 Fuente: Elaboración Propia

C. Comparación de caudales ANSYS v/s Laboratorio

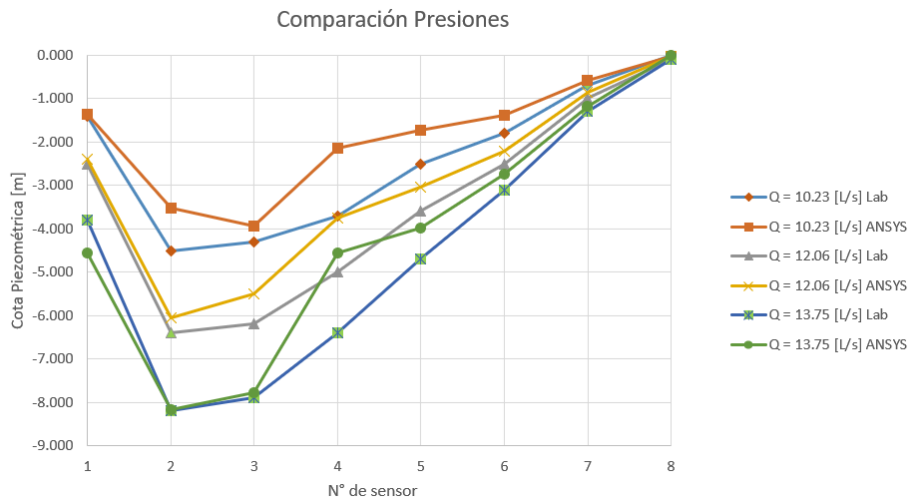


Figura C.1: Comparación distribución de presiones para distintos caudales
 Fuente: Elaboración propia

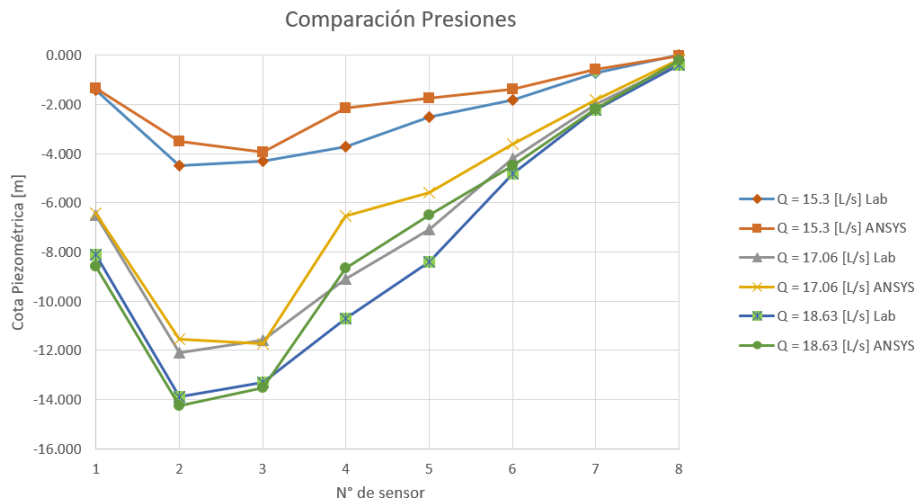


Figura C.2: Comparación distribución de presiones para distintos caudales
 Fuente: Elaboración propia

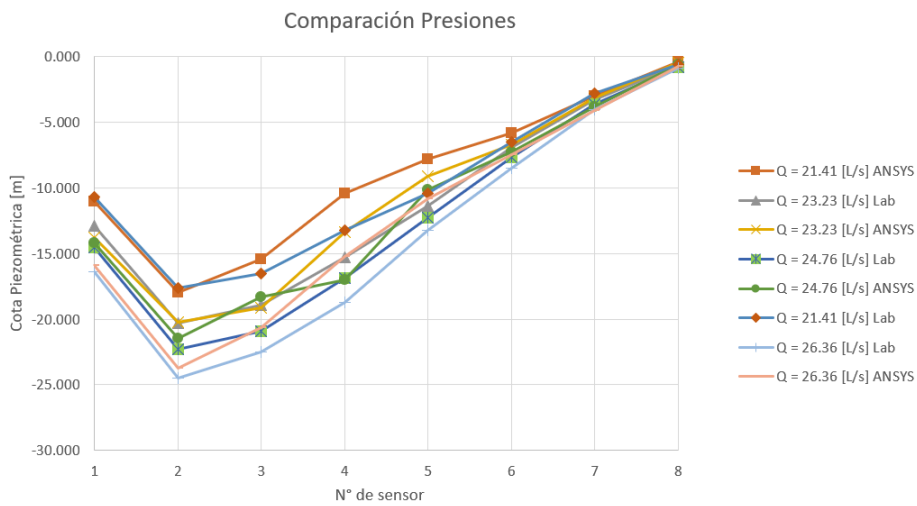


Figura C.3: Comparación distribución de presiones para distintos caudales
 Fuente: Elaboración propia

D. Comparación gráfica eje hidráulico para distintos caudales

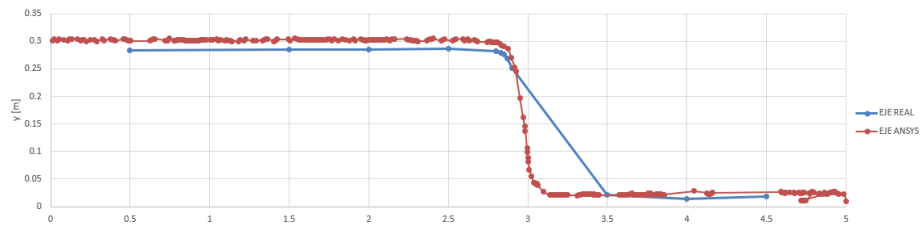


Figura D.1: Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 1, $Q = 12$ [L/s]
 Fuente: Elaboración Propia

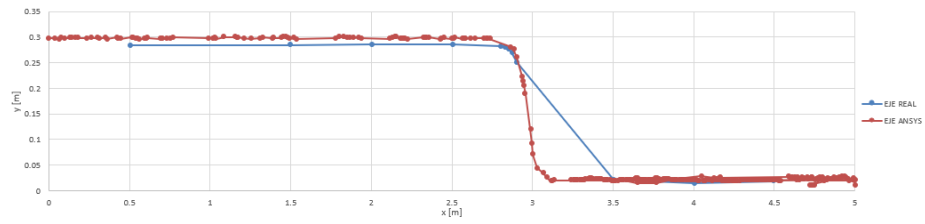


Figura D.2: Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 2, $Q = 12 \text{ [L/s]}$
Fuente: Elaboración Propia

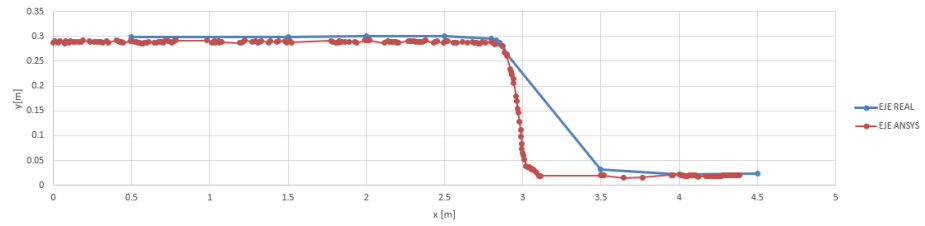


Figura D.3: Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 1, $Q = 8 \text{ [L/s]}$
Fuente: Elaboración Propia

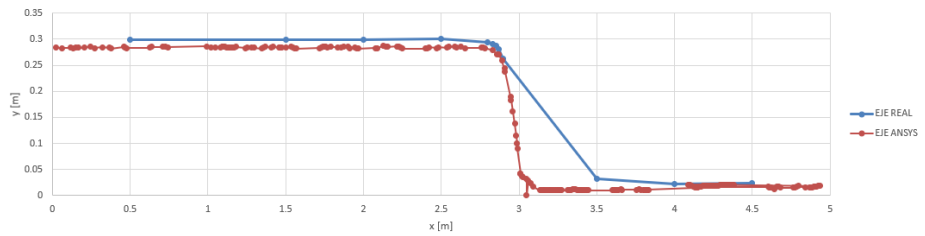


Figura D.4: Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 2, $Q = 8 \text{ [L/s]}$
Fuente: Elaboración Propia

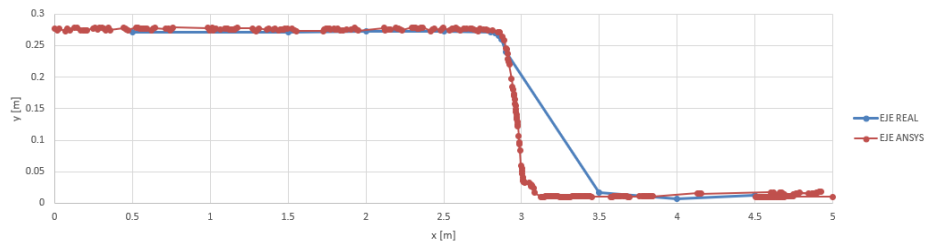


Figura D.5: Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 1, $Q = 5 \text{ [L/s]}$
Fuente: Elaboración Propia

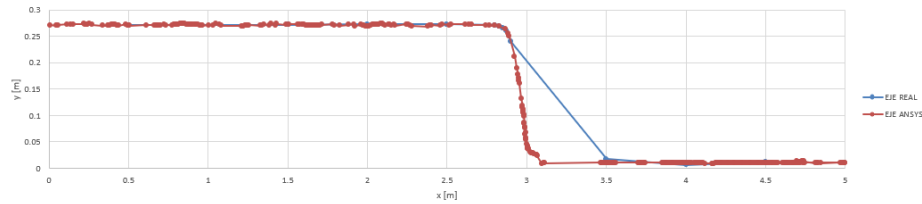


Figura D.6: Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 2, $Q= 5[L/s]$
Fuente: Elaboración Propia

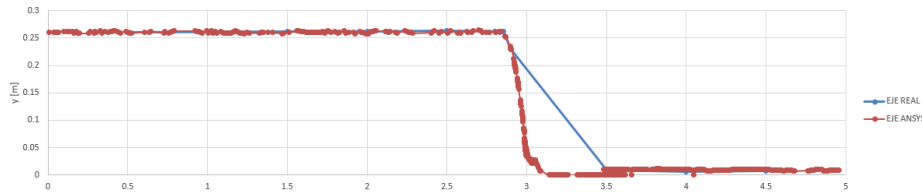


Figura D.7: Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 1, $Q= 2[L/s]$
Fuente: Elaboración Propia

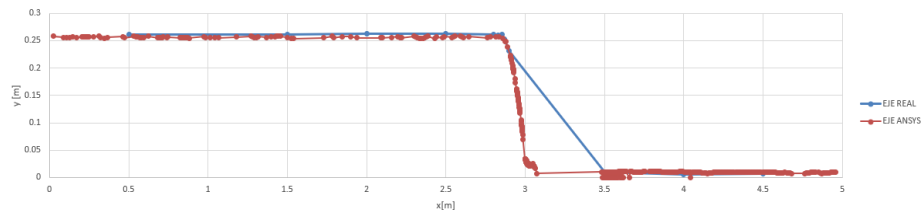


Figura D.8: Comparación gráfica ejes hidráulicos caso 2, $Q= 2[L/s]$
Fuente: Elaboración Propia

E. Función para Calcular el Término B de la Ecuación de Poisson

```

1 function B = Termino_b(b1,rho,dt,u,v,dx,dy)
2     B = b1;
3     B(2:end-1,2:end-1) = rho * (1/dt * ((u(2:end-1,3:end) - u(2:end-1,1:
4         end-2)) / (2*dx) + ...
5         (v(3:end,2:end-1) - v(1:end-2,2:end-1)) / (2*dy)) - ...
6         ((u(2:end-1,3:end) - u(2:end-1,1:end-2)) / (2*dx)).^2 - ...
7         2 * ((u(3:end,2:end-1) - u(1:end-2,2:end-1)) / (2*dy)) .* ...
8         ((v(2:end-1,3:end) - v(2:end-1,1:end-2)) / (2*dx)) - ...
9         ((v(3:end,2:end-1) - v(1:end-2,2:end-1)) / (2*dy)).^2);
end

```

F. Función que Calcula la Presión mediante la Ecuación de Poisson

```

1 function P = Presiones(p,dx,dy,b,nit)
2     [ny, nx] = size(p);

```

```

3     for i = 1:nit
4         pn = p;
5         p(2:end-1,2:end-1) = ((pn(2:end-1,3:end) + pn(2:end-1,1:end-2)) *
6             dy^2 + ...
7             (pn(3:end,2:end-1) + pn(1:end-2,2:end-1)) *
8             dx^2 - ...
9             b(2:end-1,2:end-1) * dx^2 * dy^2) / (2 * (
10            dx^2 + dy^2));
11
12        % Condiciones de frontera
13        p(:,end) = p(:,end-1); % Neumann
14        p(:,1) = p(:,2);
15        p(1,:) = p(2,:);
16        p(end,end) = 0; % Dirichlet
17
18    end
19    P = p;
20 end

```

G. Script General Cavity Flow en Diferencias Finitas

```

1  clc
2  clear vars
3
4  tic
5
6  % Definicion del Dominio Espacial y Temporal
7  nx = 101; % Nodos en x
8  ny = 101; % Nodos en y
9  nt = 5000; % N de intervalos de tiempo
10 nit = 100; % N de iteraciones para la presion
11 a = 0; b = 1; % Limites geometricos cavidad
12 dx = (b - a)/(nx - 1);
13 dy = (b - a)/(ny - 1);
14 x_values = linspace(a, b, nx);
15 y_values = linspace(a, b, ny);
16 [X, Y] = meshgrid(x_values, y_values); % Grilla
17
18
19 rho = 1; % Densidad
20 mu = 0.01; % Viscosidad dinamica
21 dt = 0.001; % Paso de tiempo
22 V = mu / rho; % Viscosidad cinematica
23 v_sup = 1; % Velocidad pared superior
24 Re = rho * v_sup * (b - a) / mu; % N de Reynolds
25
26 %% Matrices Iniciales
27 u = zeros(ny, nx);
28 v = zeros(ny, nx);
29 p = zeros(ny, nx);

```

```

30 b1 = zeros(ny, nx);
31 N=length(b1);
32
33 %% Calculo de las velocidades
34 for n = 1:nt
35     un = u;
36     vn = v;
37
38     % Iteracion para la presion
39     b = Termino_b(b1, rho, dt, u, v, dx, dy);
40     p = Presiones(p, dx, dy, b, nit);
41
42     % Velocidad u
43     u(2:end-1, 2:end-1) = un(2:end-1, 2:end-1) - ...
44         un(2:end-1, 2:end-1) * dt / dx .* (un(2:end-1, 2:end-1) - un(2:
45             end-1, 1:end-2)) - ...
46         vn(2:end-1, 2:end-1) * dt / dy .* (un(2:end-1, 2:end-1) - un(1:
47             end-2, 2:end-1)) - ...
48         dt / (2 * dx * rho) .* (p(2:end-1, 3:end) - p(2:end-1, 1:end-2))
49         + ...
50         V * dt / dx^2 .* (un(2:end-1, 3:end) - 2 * un(2:end-1, 2:end-1) +
51             un(2:end-1, 1:end-2)) + ...
52         V * dt / dy^2 .* (un(3:end, 2:end-1) - 2 * un(2:end-1, 2:end-1) +
53             un(1:end-2, 2:end-1));
54
55     % Velocidad v
56     v(2:end-1, 2:end-1) = vn(2:end-1, 2:end-1) - ...
57         vn(2:end-1, 2:end-1) * dt / dx .* (vn(2:end-1, 2:end-1) - vn(2:
58             end-1, 1:end-2)) - ...
59         vn(2:end-1, 2:end-1) * dt / dy .* (vn(2:end-1, 2:end-1) - vn(1:
60             end-2, 2:end-1)) - ...
61         dt / (2 * dy * rho) .* (p(3:end, 2:end-1) - p(1:end-2, 2:end-1))
62         + ...
63         V * dt / dx^2 .* (vn(2:end-1, 3:end) - 2 * vn(2:end-1, 2:end-1) +
64             vn(2:end-1, 1:end-2)) + ...
65         V * dt / dy^2 .* (vn(3:end, 2:end-1) - 2 * vn(2:end-1, 2:end-1) +
66             vn(1:end-2, 2:end-1));
67
68     % Condiciones de frontera u
69     u(1,:) = 0;
70     u(:,1) = 0;
71     u(:,end) = 0;
72     u(end,:) = v_sup; % velocidad pared superior
73
74     % Condiciones de frontera v
75     v(1,:) = 0;
76     v(:,1) = 0;
77     v(:,end) = 0;
78     v(end,:) = 0;

```

```

70     % Guardar Errores de Velocidad por iteraciones
71     error_u=un-u;
72     nor_erroru(n)=norm(error_u);
73     error_v=vn-v;
74     nor_errorv(n)=norm(error_v);
75 end
76 toc
77
78 CONT=(u(2:N-1,3:N)-u(2:N-1,1:N-2))/(2*dx)+(v(3:N,2:N-1)-v(1:N-2,2:N-1))
    /(2*dy); % Ec de Continuidad
79
80 %% Apartado Grafico
81
82 % Streamlines
83 figure;
84 streamslice(X, Y, u, v,100); % Cambiar ultimo valor para agregar
    streamlines
85 hold on;
86
87 plot([0 0], [0 1], 'k', 'LineWidth', 2); % pared izquierda
88 plot([1 1], [0 1], 'k', 'LineWidth', 2); % pared derecha
89 plot([0 1], [0 0], 'k', 'LineWidth', 2); % pared inferior
90
91 axis equal;
92 title('Lineas de corriente');
93 xlabel('x'); ylabel('y');
94
95
96
97 % Campo de Velocidades Vectores
98 step = 3; % Densidad de campo de vectores
99 figure;
100 quiver(X(1:step:end, 1:step:end), Y(1:step:end, 1:step:end), ...
101         u(1:step:end, 1:step:end), v(1:step:end, 1:step:end), ...
102         'AutoScale', 'on', 'AutoScaleFactor', 2);
103 hold on;
104
105 plot([0 0], [0 1], 'k', 'LineWidth', 2); % pared izquierda
106 plot([1 1], [0 1], 'k', 'LineWidth', 2); % pared derecha
107 plot([0 1], [0 0], 'k', 'LineWidth', 2); % pared inferior
108
109 axis equal;
110 title('Campo de vectores de velocidad con limites');
111 xlabel('x'); ylabel('y');
112
113 % Campo de Velocidades por colores
114 Vmag = sqrt(u.^2 + v.^2);
115 figure;
116 contourf(X, Y, Vmag, 20); colorbar;
117 title('Magnitud de la velocidad');
    
```

```
118 xlabel('x'); ylabel('y');
119 axis equal tight;
120
121 % Campo de Presiones por colores
122 figure;
123 contourf(X, Y, p, 20); colorbar;
124 title('Magnitud de la presion');
125 xlabel('x'); ylabel('y');
126 axis equal tight;
127
128 % Norma 2 del error velocidad u
129 figure;
130 plot(1:1:nt,nor_erroru)
131 title('Tendencia del error en u');
132 xlabel('N de Iteraciones Temporales'); ylabel('N2 error u');
133
134 % Norma 2 del error velocidad v
135 figure;
136 plot(1:1:nt,nor_errorv)
137 title('Tendencia del error en v');
138 xlabel('N de Iteraciones Temporales'); ylabel('N2 error v');
```

H. Script General Cavity Flow en Volúmenes Finitos

```
1
2 clear
3 %% Mallado
4
5 tic
6
7 % Nodos Espaciales
8 Lx = 1; Ly = 1;
9 nx = 101; ny = 101;
10 dx = Lx/nx; dy = Ly/ny;
11 Nx = nx + 1; Ny = ny + 1;
12
13 % N de Reynolds
14 U_lid = 1;
15 Re = 100;
16
17 % Dominio Espacial
18 x(2:Nx+1) = linspace(0, Lx, nx+1);
19 y(2:Ny+1) = linspace(0, Ly, ny+1);
20
21 xm = 0.5*(x(2:Nx)+x(3:Nx+1));
22 ym = 0.5*(y(2:Ny)+y(3:Ny+1));
23
24 % Vectores iniciales
```

```

25 p = zeros(ny+2, nx+2);
26 u = zeros(ny+2, nx+1); u_old = u; u_star = u;
27 v = zeros(ny+1, nx+2); v_old = v; v_star = v;
28
29 % Discretizacion Temporal
30 t = 0;
31 dt = 0.001;
32 % dt = 0.1*dx;
33 iter = 1;
34 Residual = 1;
35
36 % Valores correspondientes MVF
37 Ax = -dt*dy/dx; % Since Ae = Aw
38 Ay = -dt*dx/dy; % Since An = As
39 Ap = -2*(Ax + Ay);
40
41 while Residual(end) > 1e-6
42     % Condiciones de Borde Velocidad
43     u(:,1) = 0; v(1,:) = 0;
44     u(:,end) = 0; v(end,:) = 0;
45     u(1,:) = -u(2,:); v(:,1) = -v(:,2);
46     u(end,:) = 2*U_lid - u(end-1,:); v(:,end) = -v(:,end-1);
47
48     if iter == 1 % Euler Explicit
49         [u_tmp, v_tmp] = Predictor(nx, ny, u, v, Re, dx, dy);
50         u_star = u + dt*u_tmp;
51         v_star = v + dt*v_tmp;
52     else % 2nd order Adams-Bashforth
53         [u_tmp, v_tmp] = Predictor(nx, ny, u, v, Re, dx, dy);
54         u_star = u + 1.5*dt*u_tmp;
55         v_star = v + 1.5*dt*v_tmp;
56
57         [u_tmp, v_tmp] = Predictor(nx, ny, u_old, v_old, Re, dx, dy);
58         u_star = u_star - 0.5*dt*u_tmp;
59         v_star = v_star - 0.5*dt*v_tmp;
60     end
61
62     % Correccion de Presiones
63     p_res = 1; p_iter=1;
64     WU(iter) = 0;
65     R1 = 1; R2 = 1;
66     iter1 = 0; iter2 = 0;
67
68     % 2 layer Multi-Grid (V-cycle)
69     while p_res(end) > 1e-5
70         for i = 2 : nx + 1
71             for j = 2 : ny + 1
72                 S(i-1,j-1) = (u_star(i,j-1)-u_star(i,j))*dy + (v_star(i
73                     -1,j)-v_star(i,j))*dx;

```

```

74     end
75
76     % Residuales de Presion
77     [p, ~, r] = SOR(p, S, Ax, Ay, Ap);
78     R1 = r;
79     R1(2) = R1;
80     R1(1) = 2*R1(2);
81
82     while R1(end-1)/R1(end) >= 2
83         [p, res_1, R1(end + 1)] = SOR(p, S, Ax, Ay, Ap);
84         iter1 = iter1 + 1;
85     end
86
87     % Move to Coarser
88     r_1_2 = Restrict(res_1);
89     Correction_2 = zeros(round(size(p)/2));
90
91     % Residuales Espaciales
92     R2 = norm(r_1_2, 'fro')/sqrt(numel(r_1_2));
93     R2(2) = R2;
94     R2(1) = 2*R2(2);
95
96     while R2(end-1)/R2(end) >= 2
97         [Correction_2, r_2, R2(end+1)] = SOR(Correction_2, r_1_2, Ax,
98             Ay, Ap);
99         iter2 = iter2 + 1;
100    end
101    % Correccion
102    p = p + interp2(Correction_2);           % Prologation
103    p_res = R1(end);
104    end
105    WU(iter) = iter1 + iter2/4;
106
107    % Correccion Velocidad
108    for i = 2 : nx + 1
109        for j = 2 : nx
110            u(i,j) = u_star(i,j) - (p(i,j+1)-p(i,j))*(dt/dx);
111        end
112    end
113    for i = 2 : nx
114        for j = 2 : nx + 1
115            v(i,j) = v_star(i,j) - (p(i+1,j)-p(i,j))*(dt/dy);
116        end
117    end
118
119    % Residuales de Velocidad
120    u_res = norm(u-u_old, 'fro')/sqrt((nx+1)*(ny+2));
121    v_res = norm(v-v_old, 'fro')/sqrt((nx+1)*(ny+2));
122
123    Residual(iter) = max(u_res, v_res);

```

```
123
124     % Actualizamos velocidad
125     u_old = u;      v_old = v;
126
127     fprintf('Iter = %0.3e, Time = %0.4e s, Residue = %0.5e\n', iter, t,
128           Residual(end));
129
130     % Paso de tiempo e iteracion
131     t = t + dt;
132     iter = iter + 1;
133 end
134 %%
135 figure(1)
136 contourf(xm, ym, u(2:end-1, 2:end), 50, 'edgecolor','none');colormap jet;
137     hold on
138     colorbar
139     quiver(xm, ym, u(2:end-1, 2:end),v(2:end,2:end-1), 2, 'black');
140
141 figure(2)
142 contourf(p(2:end-1, 2:end-1), 50, 'edgecolor','none');colormap jet
143     colorbar
```