



UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE OBRAS CIVILES

EVALUACIÓN DE LA RESPUESTA ESTRUCTURAL DE UN EDIFICIO PROTOTIPO SOMETIDO A CARGAS SÍSMICAS UTILIZANDO MÚLTIPLES AMORTIGUADORES DE MASA ACTIVO

Memoria de Título presentada por

Cristóbal Mauricio Garay Vera

como requisito parcial para optar al título de

Ingeniero Civil

Profesor Guía

Gastón Fernandois

Agosto de 2026



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título ☐ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: EVALUACIÓN DE LA RESPUESTA ESTRUCTURAL DE UN EDIFICIO PROPTOTIPO SOMETIDO A CARGAS SÍSMICAS UTILIZANDO MÚLTIPLES AMORTIGUADORES DE MASA ACTIVO (AMD)

Nombre del candidato(a): Cristóbal Mauricio Garay Vera

Carrera / Grado: Ingeniería Civil

Campus: San Joaquín Departamento: Obras Civiles

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, GASTON ANDRES FERNANDOIS CORNEJO, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO**

CONSTANCIA que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☒ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 03-SEP-2026

Firma:

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 03-SEP-2026

Firma:

Resumen

El uso de sistemas de control estructural para resguardar la integridad de una estructura y la seguridad de sus ocupantes es fundamental en aquellas edificaciones localizadas en zonas de alto riesgo sísmico. Dentro de estos sistemas de control se encuentran los amortiguadores de masa activo o AMD, los cuales cuentan con la particularidad de poder ser sintonizados para una amplia gama de frecuencias y de adaptarse a situaciones cambiantes en tiempo real. Múltiples estudios se han realizado para estudiar la eficacia del uso de 1 AMD instalado en el último piso de múltiples edificios alrededor del mundo y, al mismo tiempo, se ha estudiado la eficiencia del uso de 2 AMDs instalados en distintos pisos de distintas edificaciones. Ante eso, surge la siguiente duda: ¿cuál es la opción más efectiva para reducir las respuestas de una estructura cuando esta está sometida a múltiples frecuencias de vibración? ¿será el uso de un AMD “grande” posicionado en el último piso del edificio? ¿o el uso de múltiples AMDs de menor tamaño, pero posicionados de manera estratégica? En el siguiente trabajo se busca responder esa interrogante modelando tres edificios benchmark reales en MATLAB, junto a un amortiguador de masa sintonizado (TMD) y 2 amortiguadores de masa activo distintos, uno “grande” y dos pequeños. Se analiza la respuesta de estas tres estructuras usando los tres mecanismos de control estructural distintos al ser sometidas a 2 registros sísmicos con el programa Simulink. Finalmente, se comparan los resultados obtenidos de la simulación para ver cual es el método más efectivo para reducir las respuestas en los edificios.

Abstract

The use of structural control systems to safeguard the integrity of a structure and the safety of its occupants is fundamental in buildings located in high seismic risk zones. Among these control systems are active mass dampers (AMD), which have the particularity of being tunable for a wide range of frequencies and adapting to changing situations in real time. Multiple studies have been carried out to examine the effectiveness of using a single AMD installed on the top floor of various buildings around the world, and, at the same time, the efficiency of using 2 AMDs installed on different floors of different buildings has also been studied. Given this, the following question arises: what is the most effective option to reduce the responses of a structure when it is subjected to multiple vibration frequencies? Is it the use of a "large" AMD positioned on the top floor of the building? Or the use of multiple smaller AMDs, but strategically positioned? This work seeks to answer that question by modeling three real benchmark buildings in MATLAB, along with a tuned mass damper (TMD) and 2 different active mass dampers, a "large" one and two small ones. The response of these three structures is analyzed using the three different structural control mechanisms when subjected to 2 seismic records using the Simulink program. Finally, the results obtained from the simulation are compared to determine which method is the most effective in reducing the responses in the buildings.

Índice

1. Introducción.....	5
1.1. Contextualización.....	5
1.2. Alcance del trabajo.....	6
1.3. Objetivos	7
2. Marco Teórico.....	7
2.1. Sistemas dinámicos	7
2.2. Amortiguador de Masa Sintonizado (TMD).....	9
2.2.1. Modelamiento matemático	9
2.3. Amortiguador de Masa Activo (AMD)	12
2.3.1. Modelamiento matemático	13
2.3.2. Algoritmo de control.....	19
2.4. Controlabilidad	23
3. Metodología	24
3.1. Sismos	24
3.2. Estructuras	26
3.3. Sistemas de control	29
3.3.1. Amortiguador de masa sintonizado (TMD).....	29
3.3.2. Amortiguador de masa activo (AMD)	29
3.4. Modelamiento de sistemas dinámicos	30
3.4.1. Sismo + estructura	30
3.4.2. Sismo + estructura + TMD.....	31
3.4.3. Sismo + estructura + 1 AMD.....	31
3.4.4. Sismo + estructura + 2 AMDs	32
4. Resultados y análisis	33
4.1. Frecuencias naturales edificios	33
4.2. Concepción (2010).....	34
4.2.1. Edificio de 3 pisos.....	34
4.2.2. Edificio de 9 pisos.....	38
4.2.3. Edificio de 20 pisos.....	42
4.3. Northridge (1994)	47
4.3.1. Edificio de 3 pisos.....	47
4.3.2. Edificio de 9 pisos.....	51
4.3.3. Edificio de 20 pisos.....	55
5. Conclusiones	60
Referencias	61
A. Anexos.....	62

1. Introducción

1.1. Contextualización

El uso de sistemas de control estructural para resguardar la integridad de una estructura y la seguridad de sus ocupantes es fundamental en aquellas edificaciones localizadas en zonas de alto riesgo sísmico. Durante las últimas décadas, múltiples estudios se han realizado para analizar la eficacia de los distintos tipos de sistemas de control estructural existentes a la fecha, los cuales a grandes rasgos se pueden separar en cuatro categorías: amortiguadores pasivos, semi-activos, activos e híbridos (Spencer & Nagarajaiah, 2003). Los amortiguadores pasivos disipan la energía de una estructura inducida por un terremoto ya sea mediante la conversión de energía cinética en calor o por transferencia de energía entre modos de vibrar (Braz-César & Carneiro De Barros, 2013). El funcionamiento de este tipo de sistemas se basa en la deformación, fluencia o fricción de materiales, como también en la instalación de osciladores que se ajustan a las condiciones de la estructura, como su frecuencia natural fundamental. El control semi-activo consiste en aparatos que integran características tanto del control pasivo como del activo, modificando las propiedades mecánicas de la estructura mediante un algoritmo de control, el cual depende de las señales entregadas por distintos sensores, como por ejemplo acelerómetros, posicionados en distintas partes de la estructura (Symans & Constantinou, 1999). Por otra parte, el control activo también funciona a partir de un algoritmo de control, sensores dispuestos y un actuador, el cual genera fuerzas de control en tiempo real a partir de los datos recopilados por los sensores, que al ser analizados por el algoritmo de control genera la señal que acciona al actuador (Koutsoloukas et al. (2022)).

A pesar de que tanto controladores pasivos como semi-activos han demostrado ser eficaces para reducir las vibraciones y daños de una estructura, estos tienen sus limitaciones. Un ejemplo es el amortiguador de masa sintonizado o TMD, el cual es un tipo de controlador pasivo cuya principal restricción radica en que estos se sintonizan para la frecuencia fundamental de la estructura, es decir, que su funcionamiento es efectivo solo cuando el sistema se excita con frecuencias cercanas a la primera frecuencia natural (Rebecchi et al., 2022a). Esto genera un problema, puesto que aquellas estructuras que cuentan con múltiples grados de libertad, como edificios habitacionales, hospitales o cualquier infraestructura con múltiples pisos, quedan expuestas a sufrir daños tanto estructurales como no estructurales si son excitadas en sus frecuencias naturales superiores. Por otra parte, los controladores semiactivos pueden adaptarse a una amplia gama de frecuencias y cuentan con la propiedad de poder funcionar tanto con energía como sin energía; sin embargo, estos operan con una cantidad relativamente pequeña de energía, con lo cual su rango de funcionamiento es mucho menor en comparación al de aparatos activos (Ripamonti et al., 2019).

Para solucionar esta problemática existen los amortiguadores de masa activo o AMD, los cuales cuentan con la propiedad de poder ser sintonizados para una amplia gama de frecuencias y de adaptarse a situaciones cambiantes (D. H. Yang et al., 2017), lo que resulta muy beneficioso teniendo en cuenta la naturaleza variable de los sismos.

Múltiples estudios se han realizado para verificar la eficacia del uso de un AMD en distintos tipos de estructuras alrededor del mundo: Yamamoto et al., (2001) evaluaron de manera experimental la respuesta sísmica de cuatro edificios en Japón con un AMD en sus techos, obteniendo resultados prometedores respecto a la energía disipada por los dispositivos y el aumento de la amortiguación de la estructura. En Italia, Rebecchi et al., (2022) compararon el daño estructural de dos edificios de hormigón armado a escala real, uno con control estructural y el otro sin control sometidos a las vibraciones de una mesa vibratoria,

resultando en una reducción del movimiento relativo entre pisos de un 72% para el caso con AMD. Por otra parte, Chang (2020) modeló un puente atirantado a escala reducida con un AMD para reducir sus vibraciones verticales mientras se somete a acciones de viento y sismos, dando como resultado el aumento en la razón de amortiguamiento del puente como también una alta disminución en sus vibraciones verticales.

A su vez, algunos autores han intentado modelar estructuras con múltiples AMDs y ver cómo es su comportamiento ante distintas perturbaciones. Talib et al. (2019) modelaron una estructura tipo marco de acero de dos pisos con un AMD en cada piso con tal de disminuir las vibraciones en ambos pisos, logrando reducciones en las aceleraciones de cada piso de hasta un 80% al excitar la estructura en sus dos modos de vibrar. Por otra parte, Magliula & Sallum (2000) compararon un modelo matemático con resultados experimentales de un marco de dos pisos con un AMD en cada piso, obteniendo que ambos modelos son bastante parecidos en sus respuestas dinámicas y que el sistema de control fue capaz de reducir los esfuerzos en los muros de la estructura.

Tal y como lo han demostrado los diversos estudios realizados a estructuras con amortiguadores de masa activo, el uso de tanto un AMD como de múltiples AMDs en una misma estructura son opciones efectivas para reducir su respuesta sísmica ante múltiples frecuencias de excitación. Ante tal aseveración surge la siguiente pregunta: ¿cuál es la opción más efectiva para reducir las respuestas de una estructura (aceleraciones, velocidades, desplazamientos) cuando esta está sometida a múltiples frecuencias de vibración? ¿será el uso de un AMD “grande” posicionado en el último piso del edificio? ¿o el uso de múltiples AMDs de menor tamaño, pero posicionados de manera estratégica?

1.2. Alcance del trabajo

El objetivo de este trabajo es estudiar el comportamiento de un edificio con múltiples AMDs posicionados estratégicamente de tal manera de reducir las respuestas de la estructura al máximo y comparar esta reducción con aquella obtenida a partir del uso de un AMD en el último piso del edificio. Para lograr este objetivo, se modelarán tanto el edificio como los amortiguadores con la ayuda de los softwares MATLAB y Simulink, luego se definirá un sistema estructural que integre tanto la estructura como los AMDs utilizando los mismos programas computacionales. Luego se creará (o descargará) el registro de un sismo que sea capaz de excitar a la estructura en sus múltiples frecuencias naturales para así poder perturbar al sistema estructural. A partir del sistema perturbado, se va a determinar la disposición estratégica de los AMDs que optimice la respuesta sísmica de la estructura a partir del cálculo de un Gramiano de control, el cual permitirá identificar aquellas disposiciones de amortiguadores que sean más controlables. Finalmente, se van a comparar las respuestas del sistema con los amortiguadores posicionados estratégicamente con un modelo del sistema consistente del edificio con un AMD en su último piso y determinar cuál sistema es el mejor para reducir las aceleraciones, velocidades y desplazamientos del edificio.

1.3. Objetivos

Objetivo General: Estudiar el desempeño sísmico de un edificio con múltiples AMDs instalados en la altura.

Objetivos Específicos

OE1: Modelar un sistema estructural, consistente de un edificio plano de 20 pisos y dos AMDs.

OE2: Determinar la disposición estratégica de los AMDs que optimice la respuesta sísmica de la estructura.

OE3: Comparar la respuesta del sistema obtenida a partir de la disposición óptima con aquella obtenida a partir de un AMD en el último piso del edificio.

2. Marco Teórico

2.1. Sistemas dinámicos

El modelamiento de un sistema dinámico excitado por un sismo se hace a partir de la definición de sus componentes dinámicas, las cuales se obtienen de la ecuación de movimiento:

$$M\ddot{x}_0(t) + C\dot{x}_0(t) + Kx_0(t) = -M\Gamma\ddot{x}_g(t) \quad (1)$$

Donde M es la matriz de masa, $x_0(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t)]^T$ es el vector de desplazamientos de los grados de libertad, C es la matriz de amortiguamiento, K la matriz de rigidez, $\Gamma = [1 \ 1 \ \dots \ 1]$ corresponde al vector de participación sísmica y $\ddot{x}_g(t)$ la aceleración del suelo. Si a este sistema dinámico se le incorpora un mecanismo de control estructural, la ecuación de movimiento queda de la siguiente forma:

$$M\ddot{x}_0(t) + C\dot{x}_0(t) + Kx_0(t) = -M\Gamma\ddot{x}_g(t) + r_0F_c(t) \quad (2)$$

Donde F_c es la fuerza de control que ejerce el mecanismo en el sistema y r_0 es un vector booleano que representa el piso en el que se ubica el mecanismo de control. La expresión matemática que define a esta fuerza depende del tipo de mecanismo de control que se esté utilizando.

Para calcular el valor de C se utiliza el modelo proporcional de Rayleigh, la cual establece que el amortiguamiento depende linealmente de M y K :

$$C = \alpha M + \beta K \quad (3)$$

Donde α y β son factores que dependen de las frecuencias naturales y factores de amortiguamiento de dos modos de vibrar distintos.

$$\alpha = \xi \frac{2\omega_i\omega_j}{\omega_i + \omega_j} \quad (4)$$

$$\beta = \xi \frac{2}{\omega_i + \omega_j} \quad (5)$$

Siendo ξ el coeficiente de amortiguamiento de la estructura y ω_i con ω_j las frecuencias naturales angulares de 2 modos distintos.

Los valores de x_0 , $\dot{x}_0$ y $\ddot{x}_0$ se pueden calcular a partir de ecuaciones state-space:

$$\begin{aligned}\dot{X} &= AX + Bp(t) \\ Y &= CX + Dp(t)\end{aligned}\tag{6}$$

Siendo $X = \begin{bmatrix} x_0(t) \\ \dot{x}_0(t) \end{bmatrix}$ el vector de estados del sistema (desplazamientos y velocidades), $\dot{X} = \begin{bmatrix} \dot{x}_0(t) \\ \ddot{x}_0(t) \end{bmatrix}$, Y el vector de respuestas que se quieren obtener y $p(t) = \begin{bmatrix} \ddot{x}_g(t) \\ F_c(t) \end{bmatrix}$ la o las señales de entrada. Estas ecuaciones state-space son las que permiten definir a la estructura como un sistema dinámico, el cual recibe una “señal de entrada” o input (en este caso $p(t)$) y da como resultado una “señal de salida” u output (en este caso Y). Las matrices A y B son las que definen al sistema dinámico, sus propiedades y como se relacionan los inputs con los estados del sistema, mientras que las matrices C y D establecen la respuesta que se quiere obtener en función de los estados y las entradas, por lo que su forma varía de acuerdo con la respuesta que sea de interés.

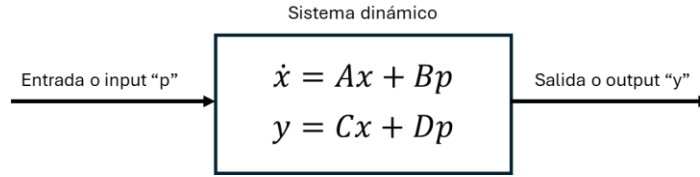


Figura 1: Esquema de un sistema dinámico tipo state-space

Para el caso del edificio afectado por una vibración externa (sismo) y una fuerza de control, su ecuación de movimiento corresponde a la Ecuación (2) y sus matrices state-space son de la siguiente forma:

$$A_{est} = \begin{bmatrix} 0_{nxn} & I_{nxn} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}\tag{7}$$

$$B_{est} = \begin{bmatrix} 0_{nx1} & 0_{nx1} \\ -\Gamma & M^{-1}r_0 \end{bmatrix}\tag{8}$$

$$C_{est} = \begin{bmatrix} I_{nxn} & 0_{nxn} \\ -M^{-1}K & -M^{-1}C \end{bmatrix}\tag{9}$$

$$D_{est} = \begin{bmatrix} 0_{nx1} & 0_{nx1} \\ 0_{nx1} & M^{-1}r_0 \end{bmatrix}\tag{10}$$

Donde n representa el número de pisos, 0 es una matriz de ceros e I es la matriz identidad. Estas matrices están definidas para recibir como “input” la aceleración del suelo o sismo y para dar como “output” los desplazamientos de la estructura y sus aceleraciones absolutas.

2.2. Amortiguador de Masa Sintonizado (TMD)

El amortiguador de masa sintonizado, o TMD por sus siglas en inglés (Tuned Mass Damper) es un sistema de control estructural pasivo, cuyo principio de funcionamiento se basa en la disipación de energía vibratoria mediante la instalación de una “pequeña” masa (entre un 1-5% de la masa total de la estructura) conectada a la estructura a partir de un sistema de resortes y amortiguadores (F. Yang et al. (2022)). La frecuencia natural de esta masa auxiliar se calibra de tal manera que sea lo más cercana posible a la frecuencia fundamental de la estructura, es decir, la correspondiente a su primer modo de vibrar.

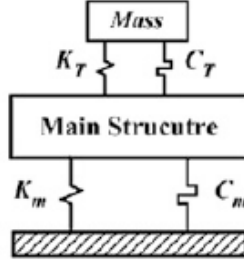


Figura 2: Esquema de una estructura con TMD. Fuente: F. Yang et al. (2022)

2.2.1. Modelamiento matemático

Se definen las propiedades de un amortiguador de masas sintonizado o TMD utilizando las expresiones matemáticas definidas por Den Hartog (1947), el cual establece que las propiedades de un TMD dependen de la razón de masas μ de la siguiente forma:

$$\mu = \frac{m_{TMD}}{m_{estructura}} \quad (11)$$

$$\alpha = \frac{\sqrt{1 - 0,5\mu}}{1 + \mu} \quad (12)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{3\mu}{8(1 + \mu)}} \quad (13)$$

$$\omega_{n,TMD} = \alpha \omega_n \quad (14)$$

$$k_{TMD} = m_{TMD}(\omega_n \alpha)^2 \quad (15)$$

$$c_{TMD} = 2\beta \omega_{n,TMD} \quad (16)$$

Donde α es la razón de frecuencias, β es la razón de amortiguamiento, $\omega_{n,TMD}$ es la frecuencia natural del TMD, k_{TMD} su rigidez y c_{TMD} su amortiguamiento. Se considera un valor de $\mu=3\%$ ya que este se encuentra dentro del rango normal de valores para este tipo de amortiguadores, con lo cual se pueden calcular todas sus propiedades.

Para la definición de las matrices state-space del sistema estructural con un TMD se analizaron dos casos distintos: caso acoplado y desacoplado. Se define el sistema acoplado como un modelo del sistema edificio-TMD en el cual tanto las propiedades de la estructura como del amortiguador forman parte de un mismo

sistema dinámico, con lo cual las matrices M, C y K de este sistema dinámico incorporan tanto las propiedades del edificio como las del TMD. En el caso acoplado, su EDM es la siguiente:

$$M_{aco}\ddot{x}_{aco}(t) + C_{aco}\dot{x}_{aco}(t) + K_{aco}x_{aco}(t) = -M_{aco}\Gamma\ddot{x}_g(t) \quad (17)$$

Donde $x_{aco}(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t) \ x_{TMD}(t)]^T$ representa los desplazamientos del edificio y del TMD. Las matrices del sistema acoplado tienen la siguiente estructura:

$$M_{aco} = \begin{bmatrix} m_1 & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & m_{TMD} \end{bmatrix} \quad (18)$$

$$K_{aco} = \begin{bmatrix} K & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & -k_{TMD} \\ 0 & -k_{TMD} & k_{TMD} \end{bmatrix} \quad (19)$$

$$C_{aco} = \begin{bmatrix} C & \dots & 0 \\ \vdots & \ddots & -c_{TMD} \\ 0 & -c_{TMD} & c_{TMD} \end{bmatrix} \quad (20)$$

De esta manera, las ecuaciones state-space del sistema acoplado quedan de la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{TMD}(t) \\ \ddot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \ddot{x}_{TMD}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0_{n+1 \times n+1} & I_{n+1 \times n+1} \\ -M_{aco}^{-1}K_{aco} & -M_{aco}^{-1}C_{aco} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{TMD}(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{TMD}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n+1 \times 1} \\ -\Gamma \end{bmatrix} \ddot{x}_g(t) \quad (21)$$

$$\begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{TMD}(t) \\ a_{abs1} \\ \vdots \\ a_{absTMD} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I_{n+1 \times n+1} & 0_{n+1 \times n+1} \\ -M_{aco}^{-1}K_{aco} & -M_{aco}^{-1}C_{aco} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ \vdots \\ x_{TMD}(t) \\ \dot{x}_1(t) \\ \vdots \\ \dot{x}_{TMD}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0_{n+1 \times 1} \\ 0_{n+1 \times 1} \end{bmatrix} \ddot{x}_g(t) \quad (22)$$

Este sistema state-space recibe como input el registro sísmico y entrega como output los desplazamientos del sistema acoplado y sus aceleraciones absolutas. Con estas matrices también es posible calcular el Factor de Amplificación Dinámica (FAD) de un sistema de 1 grado de libertad con TMD y compararlo con el caso sin TMD.

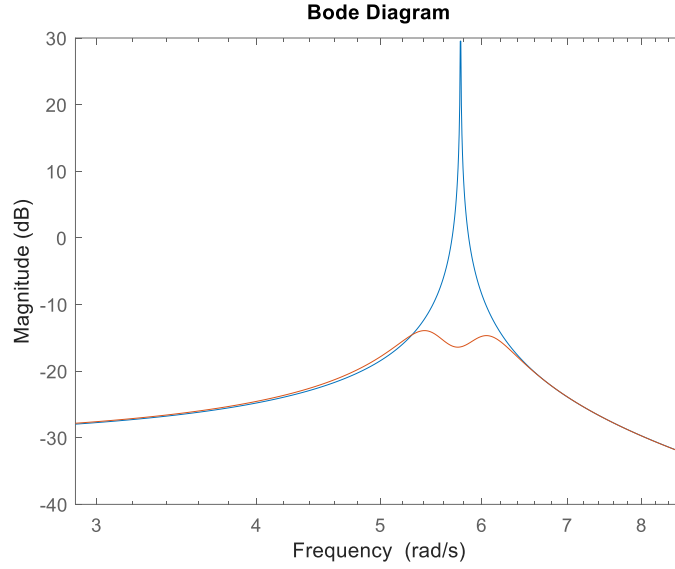


Gráfico 1: FAD de un sistema de 1GDL sin TMD (curva azul) y con TMD (curva naranja) con razón de masa del 1%

Por otra parte, en el caso desacoplado se definen tanto a la estructura como al TMD como dos sistemas dinámicos independientes, por lo que cada uno cuenta con su propia EDM y, por ende, con sus propias ecuaciones state-space. La EDM del edificio es la Ecuación (2) y sus matrices state space son las definidas en las Ecuaciones (7), (8), (9) y (10). En el caso del TMD, su ecuación de movimiento es la siguiente:

$$m_{TMD}\ddot{x}_{TMD}(t) + c_{TMD}\dot{x}_{TMD}(t) + k_{TMD}x_{TMD}(t) = -m_{TMD}\ddot{a}_{abs-piso}(t) \quad (23)$$

Donde $\ddot{x}_{TMD}(t)$ es la aceleración del TMD con respecto al piso en el que se encuentra ubicado y $\ddot{a}_{abs-piso}(t) = \ddot{x}_n(t) + \ddot{x}_g(t)$ es la aceleración absoluta del piso. De esta forma, sus matrices state-space tienen la siguiente forma:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_{TMD}(t) \\ \ddot{x}_{TMD}(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -k_{TMD}/-m_{TMD} & -c_{TMD}/-m_{TMD} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_{TMD}(t) \\ \dot{x}_{TMD}(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ -1 \end{bmatrix} \ddot{a}_{abs-piso}(t) \quad (24)$$

$$F_{TMD} = [-k_{TMD} \quad -c_{TMD}] \begin{bmatrix} x_{TMD}(t) \\ \dot{x}_{TMD}(t) \end{bmatrix} + [0]\ddot{a}_{abs-piso}(t) \quad (25)$$

Las matrices de la estructura desacoplada se arman de tal manera que reciben como input el registro sísmico y la fuerza del TMD y entregan como respuesta los desplazamientos y aceleraciones absolutas del edificio. Por otra parte, el sistema dinámico del TMD recibe como entrada la aceleración del piso en el que se encuentra ubicado y entrega como respuesta la fuerza que genera en la estructura, creándose así un bucle cerrado entre el edificio y el amortiguador.

2.3. Amortiguador de Masa Activo (AMD)

El amortiguador de masa activo, o AMD por sus siglas en inglés (Active Mass Damper) es un sistema de control estructural el cual permite reducir la respuesta de una estructura a partir de una masa móvil alimentada por una fuente de energía que genera fuerzas inerciales a partir del movimiento de esta masa y que contrarrestan aquellas producidas en la estructura debido a una acción externa vibratoria como vientos o sismos (Ripamonti et al., 2019). Para definir el AMD se deben identificar sus componentes más importantes. Un AMD está compuesto principalmente por: sensores, un controlador, un actuador y una masa móvil.

Los sensores son dispositivos eléctricos capaces de medir la respuesta dinámica de una estructura, como su aceleración, velocidad o desplazamiento. Estos sensores reciben una señal de entrada o *input* la cual corresponde a la vibración experimentada por la estructura (señal análoga) y la transforman en una señal discreta (*output*) que representa de manera digital la respuesta dinámica, la cual será enviada como *input* al controlador. Un sensor muy utilizado en los amortiguadores de masa activo es el acelerómetro, que tal y como indica su nombre, es capaz de medir las aceleraciones experimentadas en el punto en donde está instalado. Dependiendo del principio de funcionamiento del acelerómetro, este se puede clasificar como piezoeléctrico o resistivo.

El controlador corresponde al algoritmo que va a definir el movimiento de la masa móvil en función de los valores enviados por los sensores. Es el “cerebro” del sistema, ya que su función es recibir las señales de los sensores, procesar la información de dichas señales y tomar decisiones en tiempo real en función de esa información. El controlador es un dispositivo electrónico, como un drive, que incluye: un microprocesador más una tarjeta de adquisición de datos (hardware) y un algoritmo de control más un procesador digital de señales (software).

El actuador es el que acciona el movimiento de la masa. En los AMDs se suele utilizar dos tipos de actuadores: servo-eléctrico o servo-hidráulico. Los actuadores servo-eléctricos constan de un servomotor, el cual es un motor eléctrico unido a un sensor que permite controlar de manera precisa el movimiento y posición del eje del motor. Por otra parte, un actuador servo-hidráulico consta de una servovalvula y además de un pistón con fluido en su interior, el cual genera la fuerza necesaria para mover la masa a partir de la presión del fluido. El tipo de actuador que se quiera utilizar depende de factores tales como el espacio disponible para instalar el AMD, costos de mantención, entre otros.

Finalmente, la masa móvil será la encargada de generar las fuerzas inerciales que van a contrarrestar las aceleraciones del edificio debido al movimiento sísmico. Su peso depende netamente de las dimensiones de la estructura.

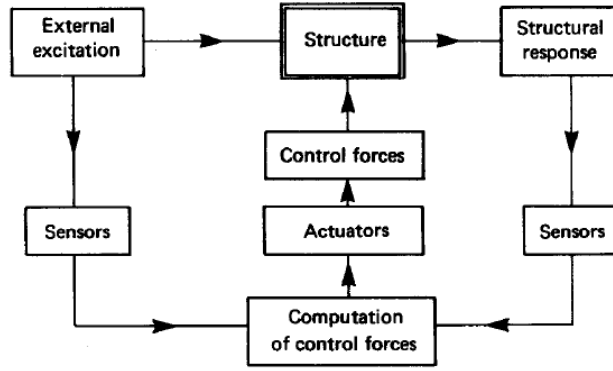


Figura 3: Diagrama esquemático del control activo. Fuente: Soong (1987)

2.3.1. Modelamiento matemático

Para definir el movimiento del AMD en el tiempo se deben establecer las ecuaciones matemáticas que relacionan las componentes del amortiguador que permiten su movimiento. Para lograr esto, se utilizan las relaciones establecidas por Venanzi et al. (2017), en el cual se define un AMD compuesto por una masa móvil, un deslizador, un ballscrew y un servomotor torsional.

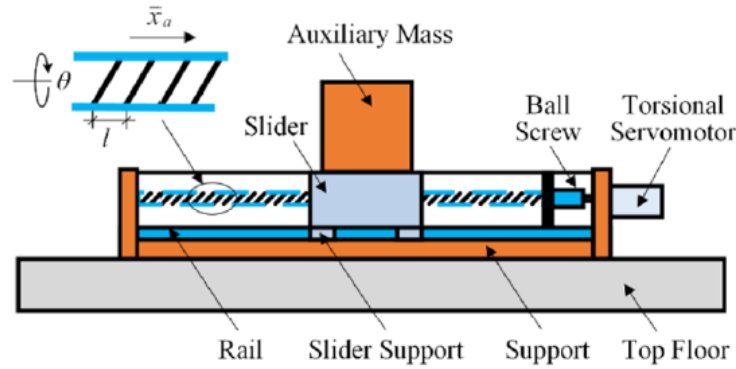


Figura 4: Componentes de un AMD. Se aprecian el deslizador (slider), masa (auxiliary mass), husillo de bolas (ball screw) y servomotor torsional. Fuente: Dai et al. (2024)

El servomotor torsional es un motor que transforma energía eléctrica en movimiento rotatorio. Este movimiento rotatorio θ se traduce en el movimiento lineal de la masa móvil m_{AMD} mediante un mecanismo ballscrew. Un ballscrew es un dispositivo mecánico capaz de transformar movimiento rotatorio en movimiento lineal a partir de un sistema compuesto por un eje con roscas helicoidales, un rodamiento de bolas de acero y una tuerca. El rodamiento de bolas se ubica dentro de la tuerca, la cual a su vez está montada sobre el eje roscado. Al girar el eje, las bolas de acero se empiezan a mover a través de las roscas helicoidales, generando así que la tuerca se mueva a través del largo del eje de manera lineal. Como la masa móvil se encuentra conectada a la tuerca, esta también se mueve a lo largo del eje.

$$\frac{l_A}{2\pi} \theta(t) = x_A(t) - x_n(t) = \bar{x}_A(t) \quad (26)$$

Donde x_A es el desplazamiento de la masa móvil, x_n el desplazamiento del piso en el que se encuentra ubicado el AMD, $\bar{x}_A$ el desplazamiento relativo de la masa móvil respecto al piso y l_A es el “pitch” del ballscrew. El “pitch” corresponde a la distancia entre las roscas y equivale a la distancia que recorre la masa móvil cuando el eje completa un giro.

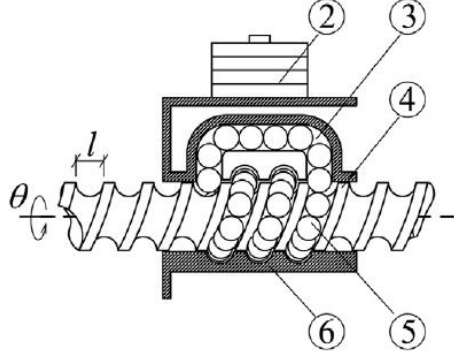


Figura 5: Esquema de un ballscrew. Se puede apreciar el eje roscado (4), el rodamiento de bolas (5) y la tuerca (6). Fuente (Ubertini et al., 2015)

Para obtener las ecuaciones de movimiento de la estructura con el amortiguador, se utilizan las ecuaciones de Lagrange, las cuales tienen la siguiente forma:

$$L = T(t) - U(t) \quad (27)$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L(t)}{\partial \dot{\eta}_i(t)} \right) - \frac{\partial L(t)}{\partial \eta_i(t)} = Q_i(t), \quad i = 1, 2, \dots, n \quad (28)$$

Donde L es el Lagrangiano, $T(t)$ es la energía cinética del sistema, $U(t)$ la energía potencial, $Q(t)$ el vector de fuerzas generalizadas no conservativas aplicadas al sistema y $\eta_i(t) = [x_1(t) \ x_2(t) \ \dots \ x_n(t) \ \theta(t)]'$ es el vector de coordenadas generalizada. Estos se definen por las siguientes fórmulas:

$$T(t) = \frac{1}{2} \left(\sum_{i=1}^n m_i (\dot{x}_g(t) + \dot{x}_i(t))^2 + m_A \left(\dot{x}_g(t) + \dot{x}_n(t) + \frac{l_A}{2\pi} \dot{\theta}(t) \right)^2 + J \dot{\theta}^2(t) \right) \quad (29)$$

$$U(t) = \frac{1}{2} x_0^T(t) K x_0(t) \quad (30)$$

$$Q(t) = -C \dot{x}_0(t) + r_A u_t(t) \quad (31)$$

Donde m_i es la masa del i -ésimo piso, m_A la masa del AMD, J es el momento de inercia torsional del ballscrew, r_A es el vector posición del AMD y $u_t(t)$ es el torque del servomotor. Este torque viene dado por la siguiente relación:

$$u_T(t) = k_T I(t) \quad (32)$$

Donde k_T es la constante de torque del servomotor e $I(t)$ es la corriente suministrada al accionador o *drive* del servomotor, el cual es el encargado de procesar la información que permitirá el movimiento del motor a

partir de un algoritmo de control que corrige los errores de medición en el tiempo, para luego suministrar la energía eléctrica necesaria para que el motor realice el movimiento deseado. Para este caso de estudio, el error de medición a corregir corresponde a la diferencia entre la posición angular comandada θ_c y la posición angular medida θ_A del servomotor y el algoritmo encargado de minimizar esta diferencia será un controlador tipo proporcional P. De esta manera, la expresión de la corriente queda de la siguiente forma:

$$I(t) = k_p(\theta_c - \theta_A) \quad (33)$$

Donde k_p es la ganancia del control proporcional. Reemplazando la Ecuación (33) en la expresión de torque se obtiene lo siguiente:

$$u_T(t) = k_T k_p(\theta_c - \theta_A) \quad (34)$$

Reemplazando las Ecuaciones (29), (30) y (31) en (27) y (28) se obtienen como resultado las ecuaciones de movimiento de la estructura y del AMD:

$$(M + m_A r_A r_A^T) \ddot{x}_0(t) + C_{aum} \dot{x}_0(t) + K x_0(t) = -(M \Gamma + m_A r_A) \ddot{x}_g(t) - F_A(t) \quad (35)$$

$$\left(J + \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2} \right) \ddot{\theta}_A(t) + k_T k_p \theta_A(t) = k_T k_p \theta_c(t) - \frac{m_A l_A}{2\pi} a_{abs-piso0}(t) \quad (36)$$

Donde C_{aum} es la matriz de amortiguamiento del edificio con 1 AMD, $F_A(t) = \frac{m_A l_A}{2\pi} r_A \ddot{\theta}_A(t)$ es la fuerza del AMD aplicada en la estructura y $a_{abs-piso0}(t) = (r_A^T \ddot{x}_0(t) + \ddot{x}_g(t))$ es la aceleración absoluta del piso en que encuentra ubicado el AMD. La Ecuación (35) representa la dinámica de la estructura, la cual depende de la aceleración del suelo y de la fuerza del AMD, mientras que la Ecuación (36) representa la dinámica del AMD que depende de la aceleración absoluta del piso en que se encuentra ubicado y de la posición angular comandada.

Como la Ecuación (35) está en coordenadas lineales y la Ecuación (36) en coordenadas angulares, esta última se transforma a coordenadas lineales para mayor facilidad en los cálculos. Esto se logra multiplicando la expresión por $\frac{l_A}{2\pi}$, quedando de la siguiente forma:

$$\left(J + \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2} \right) \ddot{\bar{x}}_A(t) + k_T k_p \bar{x}_A(t) = k_T k_p \bar{x}_C(t) - \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2} a_{abs-piso0}(t) \quad (37)$$

Y si, además se le adiciona un amortiguamiento c_A a la expresión anterior, se obtiene la ecuación de movimiento final del AMD:

$$\left(J + \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2} \right) \ddot{\bar{x}}_A(t) + c_A \dot{\bar{x}}_A(t) + k_T k_p \bar{x}_A(t) = k_T k_p \bar{x}_C(t) - \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2} a_{abs-piso0}(t) \quad (38)$$

Al realizar también el cambio de coordenadas a la expresión de F_A , tanto la Ecuación (35) como la (36) quedan únicamente en coordenadas lineales. Con estas ecuaciones de movimiento es posible armar las matrices state-space de la estructura con el AMD y del AMD propiamente tal:

$$A_{est+1AMD} = \begin{bmatrix} 0_{nxn} & I_{nxn} \\ -M_{aum_1}^{-1}K & -M_{aum_1}^{-1}C_{aum} \end{bmatrix} \quad (39)$$

$$B_{est+1AMD} = \begin{bmatrix} 0_{nx1} & 0_{nx1} \\ -\Gamma & -M_{aum_1}^{-1}(m_A r_0) \end{bmatrix} \quad (40)$$

$$C_{est+1AMD} = \begin{bmatrix} I_{nxn} & 0_{nxn} \\ 0_{nxn} & I_{nxn} \\ -M_{aum_1}^{-1}K & -M_{aum_1}^{-1}C_{aum} \end{bmatrix} \quad (41)$$

$$D_{est+1AMD} = \begin{bmatrix} 0_{nx1} & 0_{nx1} \\ 0_{nx1} & 0_{nx1} \\ 0_{nx1} & -M_{aum_1}^{-1}(m_A r_A) \end{bmatrix} \quad (42)$$

$$A_{AMD} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_T k_P}{\bar{J}} & -\frac{c_A}{\bar{J}} \end{bmatrix} \quad (43)$$

$$B_{AMD} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{m_A l_A^2}{4\pi^2 \bar{J}} & \frac{k_T k_P}{\bar{J}} \end{bmatrix} \quad (44)$$

$$C_{AMD} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{k_T k_P}{\bar{J}} & -\frac{c_A}{\bar{J}} \end{bmatrix} \quad (45)$$

$$D_{AMD} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{m_A l_A^2}{4\pi^2 \bar{J}} & \frac{k_T k_P}{\bar{J}} \end{bmatrix} \quad (46)$$

Donde $M_{aum_1} = (M + m_A r_A r_A^T)$ y $\bar{J} = \left(J + \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2}\right)$. El sistema estructura+AMD recibe como entradas la aceleración del suelo $\ddot{x}_g$ y la aceleración lineal $\ddot{\bar{x}}_A$ del servomotor para dar como respuesta los estados del edificio (desplazamientos y velocidades) y sus aceleraciones absolutas. Por otra parte, el sistema AMD recibe de inputs la aceleración absoluta del piso en donde se encuentra el amortiguador $a_{abs-piso}$ y el desplazamiento comandado $\bar{x}_C$ para entregar como respuesta los estados del AMD y su aceleración lineal medida.

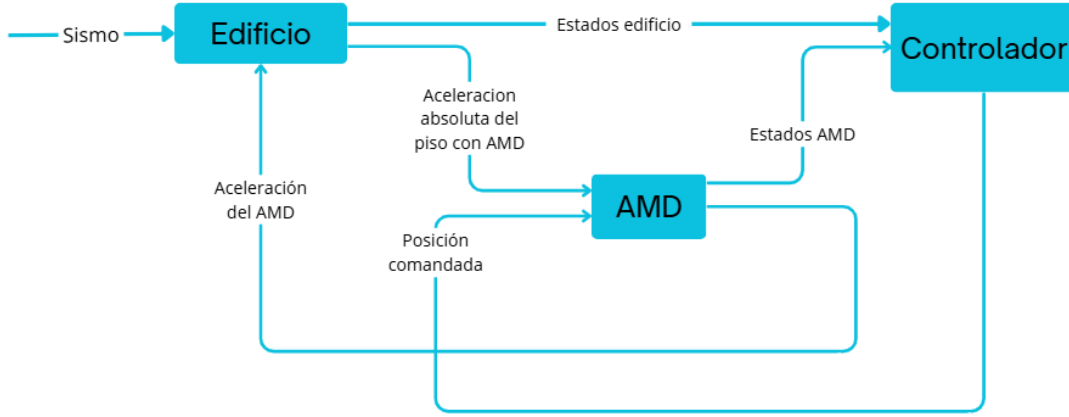


Figura 6: Diagrama de bloques ilustrativo del edificio con un AMD

En el caso del edificio con 2 AMDs, las ecuaciones que definen la dinámica tanto del edificio como de los amortiguadores son muy parecidas a las anteriormente vistas, con la diferencia de que en este caso el edificio recibe como inputs la aceleración del suelo y la aceleración de los 2 AMDs:

$$(M + m_a r_{a1} r_{a1}^T + m_a r_{a2} r_{a2}^T) \ddot{x}_0(t) + C_{aum2} \dot{x}_0(t) + K x_0(t) = -(M \Gamma + m_a r_{a1} + m_a r_{a2}) \ddot{x}_g(t) - F_{a1}(t) - F_{a2}(t) \quad (47)$$

$$\left(j + \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2} \right) \ddot{x}_{a1}(t) + c_a \dot{x}_{a1}(t) + k_t k_p \bar{x}_{a1}(t) = k_t k_p \bar{x}_{c1}(t) - \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2} a_{abs-piso1}(t) \quad (48)$$

$$\left(j + \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2} \right) \ddot{x}_{a2}(t) + c_a \dot{x}_{a2}(t) + k_t k_p \bar{x}_{a2}(t) = k_t k_p \bar{x}_{c2}(t) - \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2} a_{abs-piso2}(t) \quad (49)$$

Donde r_{a1} y r_{a2} son los vectores posición del primer y segundo amortiguador respectivamente, m_a , j , l_a , c_a , k_t y k_p son la masa, momento de inercia, pitch, coeficiente de amortiguamiento, constante de torque y constante de control proporcional de los AMDs que, para simplificar el análisis, tendrán los mismos valores para ambos amortiguadores. Por otra parte, C_{aum2} es la matriz de amortiguamiento del edificio con 2 AMDs, $F_{a1}(t) = m_a r_{a1} \ddot{x}_{a1}(t)$ y $F_{a2}(t) = m_a r_{a2} \ddot{x}_{a2}(t)$ son las fuerzas del primer y segundo amortiguador respectivamente y $a_{abs-piso1}$ con $a_{abs-piso2}$ son las aceleraciones absolutas de los pisos en donde se encuentra cada masa. Para este caso, las matrices state-space son las siguientes:

$$A_{est+2AMD} = \begin{bmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -M_{aum2}^{-1} K & -M_{aum2}^{-1} C_{aum2} \end{bmatrix} \quad (50)$$

$$B_{est+2AMD} = \begin{bmatrix} 0_{nx1} & 0_{nx1} & 0_{nx1} \\ -\Gamma & -M_{aum2}^{-1}m_ar_{a1} & -M_{aum2}^{-1}m_ar_{a2} \end{bmatrix} \quad (51)$$

$$C_{est+2AMD} = \begin{bmatrix} I_{nxn} & 0_{nxn} \\ 0_{nxn} & I_{nxn} \\ -M_{aum2}^{-1}K & -M_{aum2}^{-1}C_{aum2} \end{bmatrix} \quad (52)$$

$$D_{est+2AMD} = \begin{bmatrix} 0_{nx1} & 0_{nx1} & 0_{nx1} \\ 0_{nx1} & 0_{nx1} & 0_{nx1} \\ 0_{nx1} & -M_{aum2}^{-1}m_ar_{a1} & -M_{aum2}^{-1}m_ar_{a2} \end{bmatrix} \quad (53)$$

$$A_{amd1} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_t k_p}{\bar{J}} & -\frac{c_a}{\bar{J}} \end{bmatrix} \quad (54)$$

$$B_{amd1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 \bar{J}} & \frac{k_t k_p}{\bar{J}} \end{bmatrix} \quad (55)$$

$$C_{amd1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{k_t k_p}{\bar{J}} & -\frac{c_a}{\bar{J}} \end{bmatrix} \quad (56)$$

$$D_{amd1} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 \bar{J}} & \frac{k_t k_p}{\bar{J}} \end{bmatrix} \quad (57)$$

$$A_{amd2} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{k_t k_p}{\bar{J}} & -\frac{c_a}{\bar{J}} \end{bmatrix} \quad (58)$$

$$B_{amd2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ -\frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 \bar{J}} & \frac{k_t k_p}{\bar{J}} \end{bmatrix} \quad (59)$$

$$C_{amd2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ -\frac{k_t k_p}{\bar{J}} & -\frac{c_a}{\bar{J}} \end{bmatrix} \quad (60)$$

$$D_{amd2} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ -\frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 \bar{j}} & \frac{k_t k_p}{\bar{j}} \end{bmatrix} \quad (61)$$

Donde $M_{aum2} = M + m_a r_{a1} r_{a1}^T + m_a r_{a2} r_{a2}^T$ y $\bar{j} = j + \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2}$. El sistema estructura + 2AMDs recibe como entradas la aceleración del suelo $\ddot{x}_g$ y las aceleraciones lineales $\ddot{x}_{a1}$ y $\ddot{x}_{a2}$ de ambos amortiguadores para dar como respuesta los estados del edificio (desplazamientos y velocidades) y sus aceleraciones absolutas. Por otra parte, los AMDs reciben como entrada la aceleración absoluta del piso en donde se encuentra cada masa respectivamente, es decir, el primer amortiguador recibe $a_{abs-piso1}$ y el segundo recibe $a_{abs-piso2}$, junto a su desplazamiento comandado correspondiente ($\bar{x}_{c1}$ y $\bar{x}_{c2}$) para entregar como salida los estados de los AMDs y sus aceleraciones lineales ($\ddot{x}_{a1}$ y $\ddot{x}_{a2}$).

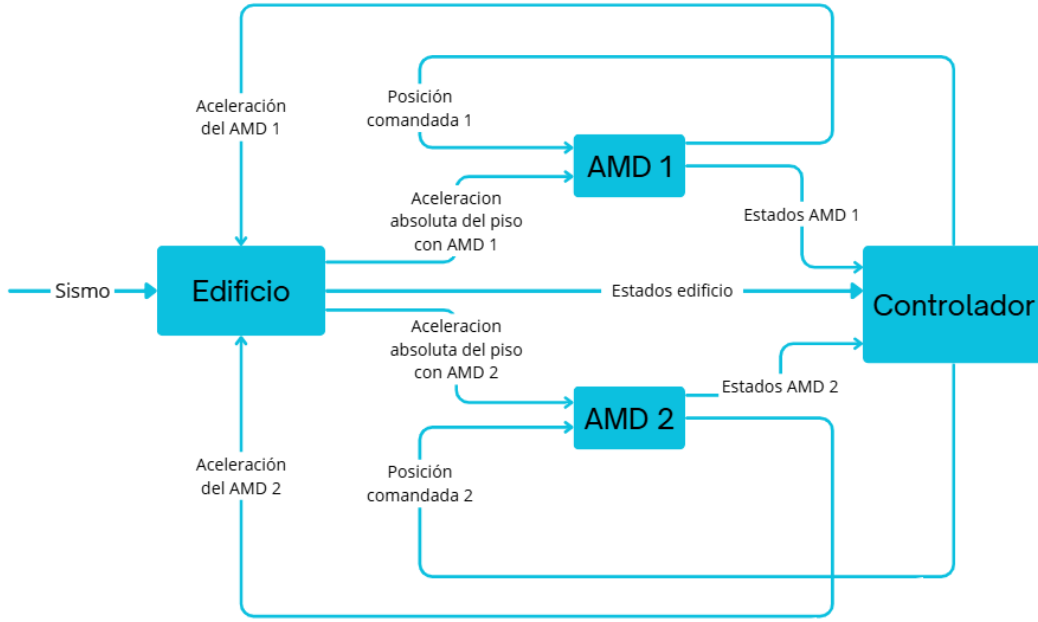


Figura 7: Diagrama de bloques ilustrativo del edificio con dos AMDs

Por otra parte, el desplazamiento comandado $\bar{x}_c$ se obtiene a partir de un algoritmo de control óptimo tipo LQR, el cual se explica a continuación.

2.3.2. Algoritmo de control

Como se mencionó anteriormente, el controlador del AMD será el encargado de definir cómo se va a mover la masa móvil, con lo cual es muy importante que este algoritmo esté bien definido. Dentro de las opciones existentes se encuentran los controladores óptimos, cuyo principal objetivo es encontrar una señal de control “ $u(t)$ ” la cual sea capaz de llevar un estado $x(t)$ hasta un estado $x(t_1)$ en un tiempo finito $t \in [t_0, t_1]$, de tal manera que se cumpla la siguiente condición:

$$L(u) = \int_{t_0}^{t_1} l(x(t), u(t), t) dt + m(x(t_1)) \quad (62)$$

Donde $L(u)$ es un funcional de desempeño, el término $\int_{t_0}^{t_1} l(x(t), u(t), t) dt$ es el “costo de viaje”, es decir, el costo acumulado desde t_0 hasta t_1 y que penaliza los estados $x(t)$ y señales de control $u(t)$ en cada instante de tiempo, mientras que el término $m(x(t_1))$ es el “costo terminal” que representa el costo de llegada y penaliza el estado final.

Como el objetivo del control óptimo es optimizar la señal de control $u(t)$, se debe minimizar el costo asociado, es decir, se debe cumplir la siguiente condición:

$$u(t)_o = \arg \min_{u[t_0, t_1]} L(u) \quad (63)$$

Donde $u(t)_o$ es la señal de control óptima que minimiza la función de desempeño, es decir, minimiza el costo asociado de llevar el estado $x(t)$ hasta un estado $x(t_1)$.

Una forma de control óptima muy utilizada es el control LQR (Linear Quadratic Regulator por sus siglas en inglés), cuyo funcional de desempeño y señal óptima de control están dados por las siguientes ecuaciones:

$$L = \min \left(\int_{t_0}^{t_f} [x^T \quad u^T] \begin{bmatrix} Q & 0 \\ 0 & R \end{bmatrix} \begin{bmatrix} X \\ u \end{bmatrix} dt \right) \quad (64)$$

$$u(t)_o = -K_G X \quad (65)$$

Donde X son los estados del sistema y u son las señales de control. El factor Q es una matriz definida positiva y simétrica que se asocia a los estados del sistema y se relaciona con la velocidad de respuesta del controlador, con lo cual, si se quiere priorizar la eficacia en la respuesta del AMD, se deben dar grandes valores a los coeficientes de Q . Por otra parte, la matriz R (también definida simétrica y positiva) está asociada a la fuerza de control que recibe el sistema y se relaciona con el costo energético del controlador, por lo que, si se quiere priorizar un esfuerzo mínimo de energía del AMD, se deben dar grandes valores a los coeficientes de R . Es importante aclarar que para que el controlador LQR funcione no se pueden aumentar los coeficientes de las matrices Q y R simultáneamente, por lo que se debe escoger entre priorizar la eficacia de la respuesta o un gasto energético mínimo.

El factor K_G es la matriz de ganancias del control LQR, cuyo valor está dado por la siguiente ecuación:

$$K_G = R^{-1} B^T P \quad (66)$$

Donde R es la matriz definida simétrica y positiva presente en la Ecuación (64), B es la matriz de señales de control de las ecuaciones state-space del sistema y P es la función solución de la ecuación de Riccati:

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0 \quad (67)$$

Donde P es la solución de la ARE, definida única, simétrica y positiva bajo condiciones de estabilidad.

Como se mencionó anteriormente, el desplazamiento comandado $\bar{x}_c$ se obtiene a partir del control LQR, con lo cual se tiene la siguiente fórmula:

$$\bar{x}_c = -K_G X \quad (68)$$

Donde X corresponde a los estados del edificio y del AMD y K_G es la matriz de ganancias LQR del sistema aumentado. Este sistema aumentado corresponde a una estructura dinámica que incorpora tanto la dinámica del edificio como del AMD. Notar que para poder usar el control LQR es necesario conocer todos los estados

del edificio y de los amortiguadores, con lo cual se requiere de la presencia de sensores que sean capaces de medir los desplazamientos y velocidades de todos los pisos del edificio y de los AMDs.

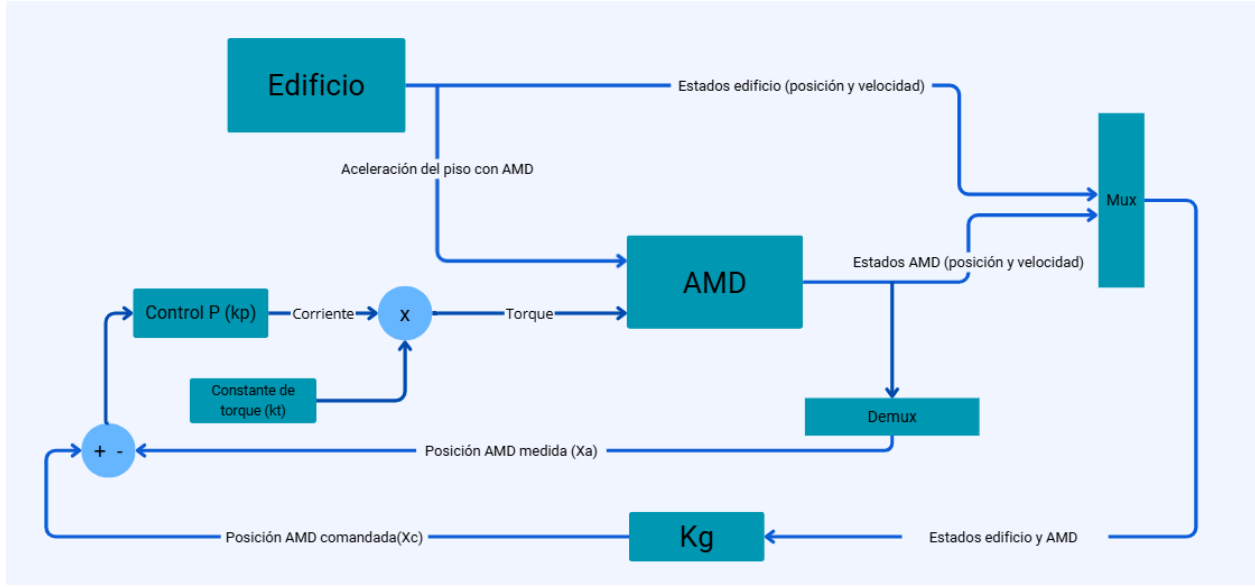


Figura 8: Diagrama de bloques ilustrativo del bucle de control

Para poder calcular la matriz K_G del sistema aumentado (edificio+AMD) es necesario definir las matrices A, Bu, Q y R, las cuales son, para el edificio con 1 AMD, las siguientes:

$$A_{aum1} = \begin{bmatrix} 0_{n+1 \times n+1} & \\ & -\bar{H}_A K & \bar{H}_A m_A r_A \frac{k_T k_P}{\bar{J}} \\ \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2 \bar{h}_A} r_A^T M_{aum1}^{-1} K & -\frac{k_T k_P}{\bar{h}_A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{n+1 \times n+1} & \\ & -\bar{H}_A C & \bar{H}_A m_A r_A \frac{c_A}{\bar{J}} \\ \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2 \bar{h}_A} r_A^T M_{aum1}^{-1} C & -\frac{c_A}{\bar{h}_A} \end{bmatrix} \quad (69)$$

$$B_{u1} = \begin{bmatrix} 0_{n+1 \times 1} \\ -\bar{H}_A m_A r_A \frac{k_T k_P}{\bar{J}} \\ \frac{k_T k_P}{\bar{h}_A} \end{bmatrix} \quad (70)$$

$$Q_1 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0_{nx1} \\ 0_{1xn} & a \end{bmatrix} & 0_{n+1 \times n+1} \\ 0_{n+1 \times n+1} & \begin{bmatrix} M & 0_{nx1} \\ 0_{1xn} & 0 \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (71)$$

$$R_1 = b \quad (72)$$

Donde $\bar{H}_A = [I - M_{aum1}^{-1} \frac{m_A^2 l_A^2}{4\pi^2 \bar{J}} r_A r_A^T]^{-1} M_{aum1}^{-1}$ y $\bar{h}_A = \bar{J}(1 - \frac{m_A^2 l_A^2}{4\pi^2 \bar{J}} r_A^T M_{aum1}^{-1} r_A)$. Estos términos aparecen al resolver la ecuación de movimiento del sistema aumentado con 1 AMD (ver Anexos). B_{u1} es la matriz de señal de control que considera como input el torque del motor.

Para el sistema aumentado con 2 amortiguadores (edificio+2 AMDs) las matrices son las siguientes:

$$A_{aum2} = \begin{bmatrix} 0_{n+2 \times n+2} & I_{n+2 \times n+2} \\ [-\bar{H}_a K] [\bar{H}_a m_a r_{a1} \frac{k_t k_p}{\bar{J}}] [\bar{H}_a m_a r_{a2} \frac{k_t k_p}{\bar{J}}] & [-\bar{H}_a C] [\bar{H}_a m_a r_{a1} \frac{c_a}{\bar{J}}] [\bar{H}_a m_a r_{a2} \frac{c_a}{\bar{J}}] \\ [\frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 \bar{h}_{a1}} r_{a1}^T M_{aum2}^{-1} K] [-\frac{k_t k_p}{\bar{h}_{a1}}] 0 & [\frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 \bar{h}_{a1}} r_{a1}^T M_{aum2}^{-1} C] [-\frac{c_a}{\bar{h}_{a1}}] 0 \\ [\frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 \bar{h}_{a2}} r_{a2}^T M_{aum2}^{-1} K] 0 [-\frac{k_t k_p}{\bar{h}_{a2}}] & [\frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 \bar{h}_{a2}} r_{a2}^T M_{aum2}^{-1} C] 0 [-\frac{c_a}{\bar{h}_{a2}}] \end{bmatrix} \quad (73)$$

$$B_{u2} = \begin{bmatrix} 0_{n+2 \times 1} & 0_{n+2 \times 1} \\ -\bar{H}_a m_a r_{a1} \frac{k_t k_p}{\bar{J}} & -\bar{H}_a m_a r_{a2} \frac{k_t k_p}{\bar{J}} \\ \frac{k_t k_p}{\bar{h}_{a1}} & 0 \\ 0 & \frac{k_t k_p}{\bar{h}_{a2}} \end{bmatrix} \quad (74)$$

$$Q_2 = \begin{bmatrix} \begin{bmatrix} K & 0_{nx2} \\ 0_{2xn} & a \cdot I_{2x2} \end{bmatrix} & 0_{n+2 \times n+2} \\ 0_{n+2 \times n+2} & \begin{bmatrix} M & 0_{nx2} \\ 0_{2xn} & 0_{2x2} \end{bmatrix} \end{bmatrix} \quad (75)$$

$$R_2 = b * I_{2x2} \quad (76)$$

Donde $\bar{H}_a = [I - M_{aum2}^{-1} \frac{m_a^2 l_a^2}{4\pi^2 \bar{J}} (r_{a1} r_{a1}^T + r_{a2} r_{a2}^T)]^{-1} M_{aum2}^{-1}$, $\bar{h}_{a1} = \bar{J}(1 - \frac{m_a^2 l_a^2}{4\pi^2 \bar{J}} r_{a1}^T M_{aum2}^{-1} r_{a1})$ y $\bar{h}_{a2} = \bar{J}(1 - \frac{m_a^2 l_a^2}{4\pi^2 \bar{J}} r_{a2}^T M_{aum2}^{-1} r_{a2})$. Estos términos aparecen al resolver la ecuación de movimiento del sistema aumentado con 2 AMDs (ver Anexos). B_{u2} es la matriz de señal de control que considera como input el torque de los motores. La forma que se le da a las matrices Q_1 y Q_2 viene dada por Lee & Wang (2004), en donde lo que se busca es reducir la energía mecánica total de la estructura, ya que la matriz K está relacionada con la energía potencial del sistema y la matriz M se relaciona con su energía cinética, tal y como se puede observar de las Ecuaciones (29) y (30). Como se puede apreciar, las matrices R tienen un valor más pequeño que las matrices Q , por lo cual se le está dando prioridad a la eficacia en la respuesta de los AMDs por sobre un gasto energético mínimo. En la matriz Q , el coeficiente a es un término que se asocia a los estados de los AMDS, más específicamente a su desplazamiento, con lo cual, el valor de a determina el rango de movimiento o stroke de los amortiguadores. Los valores de R (b) se escogen a partir de iteraciones, teniendo en cuenta que las fuerzas de los actuadores no sean extremadamente grandes, pero que al mismo tiempo tengan una magnitud suficiente para reducir los drifts de manera considerable. Con estas matrices ya definidas, es posible calcular K_{G1} (1 AMD) y K_{G2} (2 AMDs) y, por ende, los desplazamientos $\bar{x}_C$, $\bar{x}_{c1}$ y $\bar{x}_{c2}$.

2.4. Controlabilidad

Junto al algoritmo de control, es importante estudiar la controlabilidad de las distintas combinaciones de actuadores por analizar. Un sistema se dice que es controlable si, para cualquier estado x_0 , existe una entrada de control $u(t)$ definida en el intervalo de tiempo $[0, t]$ que lleva al sistema al origen en un tiempo finito t Heidingsfeld et al. (2017). Es decir, la controlabilidad se refiere a que tan factible es llevar al sistema dinámico (en este caso la estructura) al equilibrio a partir de una señal de entrada o input $u(t)$. Esta puede medirse, entre otras formas, con la matriz de controlabilidad $\mathcal{C}$, que tiene la siguiente fórmula:

$$\mathcal{C} = [B \ AB \ A^2B \ \cdots \ A^{n-1}B] \quad (77)$$

Para que un sistema sea controlable, es decir, que todos sus estados iniciales puedan ser llevados al equilibrio, se tiene que cumplir la siguiente condición:

$$\text{rank}(\mathcal{C}) = n \quad (78)$$

Donde n es el número de estados del sistema. El problema con la matriz de controlabilidad es que entrega resultados de tipo binario, es decir, solo dice si el sistema es controlable o no pero no entrega información de “que tan controlable” es el sistema o de cuanta energía hay que inyectarle al sistema para llevar los estados al equilibrio. Esto es un problema ya que, para el caso en estudio, pueden existir combinaciones de disposición de amortiguadores que necesiten de una enorme cantidad de energía para poder llevar al edificio al equilibrio, lo cual en muchos casos no es factible. Para solucionar esta problemática existe otra manera de calcular la controlabilidad del sistema, conocida como el Gramiano de control, el cual es una matriz que se calcula con la siguiente expresión:

$$W_c(t) = \int_0^t e^{A\tau} B B^T e^{A^T \tau} d\tau \quad (79)$$

Esta matriz entrega información de que tan controlable es un sistema (Bruant & Proslie, 2005), sin embargo, puede ser muy costosa de calcular computacionalmente hablando. Es por eso que existe una manera alternativa de calcularla y corresponde a la ecuación algebraica de Lyapunov para el caso de horizonte infinito:

$$A W_c + W_c A^T + B B^T = 0 \quad (80)$$

Siendo A y B las matrices de estado del sistema aumentado. Para el caso en estudio, W_c indica para que combinaciones de colocación de los AMDs en el edificio este es más controlable, es decir, aquellas distribuciones en donde el sistema requiere de menos uso de energía para llevar los estados al equilibrio. Para poder comparar todas las combinaciones posibles e identificar aquellas que requieren de una menor cantidad de energía, se calcula la traza de cada combinación y se escogen las 3 que tengan la mayor traza. De esta manera, se analizan solo un par de combinaciones en vez de analizar todo el espectro de posibles combinaciones.

3. Metodología

3.1. Sismos

Primero se definen los sismos que van a perturbar a las estructuras en estudio. Para este trabajo, se consideraron dos registros sísmicos: el terremoto de Northridge, California de 1994 y el terremoto de Concepción, Biobío del 2010.

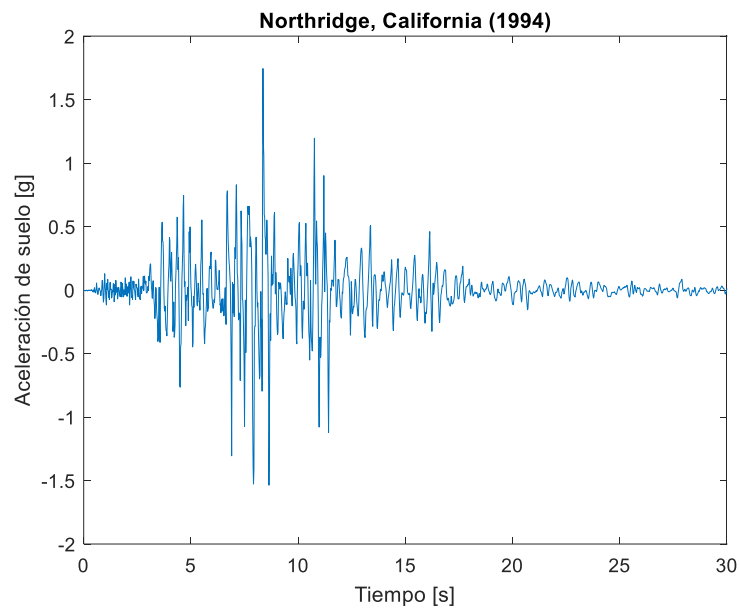


Gráfico 2: Registro de aceleraciones del terremoto de Northridge, California (1994)

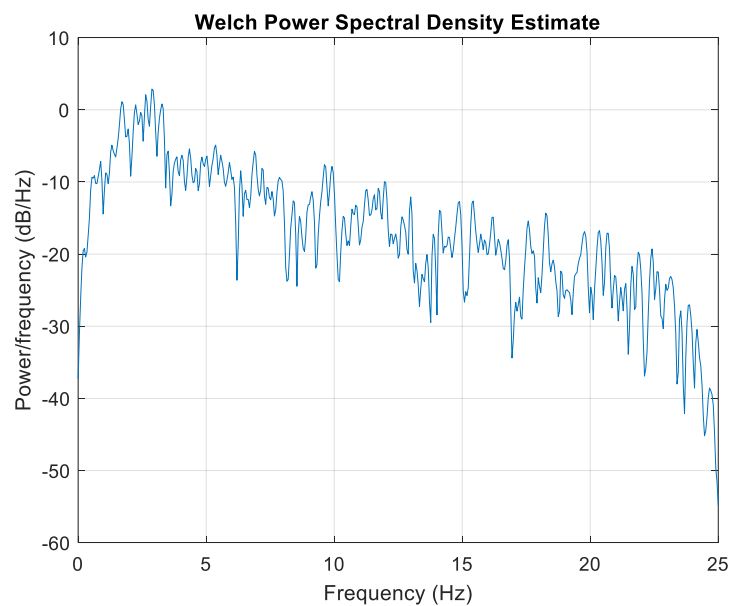


Gráfico 3: Densidad Espectral de Potencia (PSD) del terremoto de Northridge

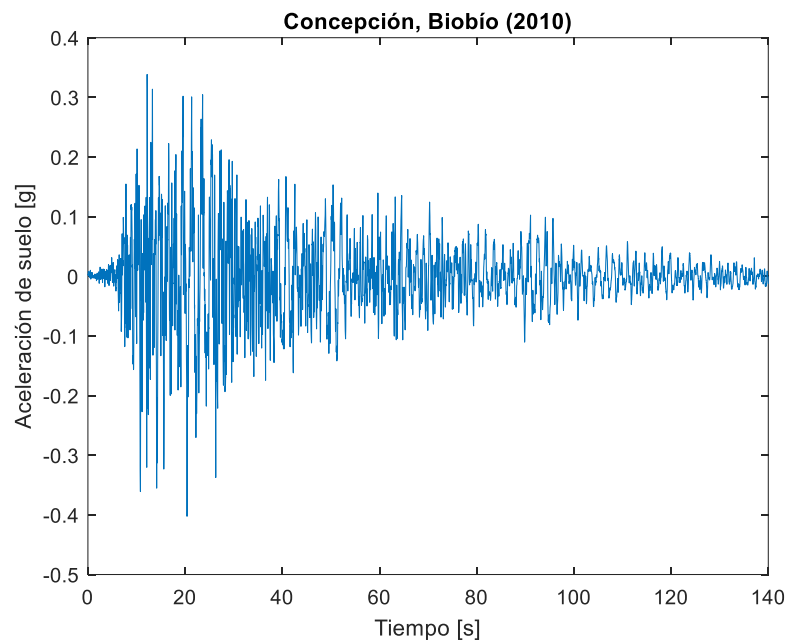


Gráfico 4: Registro de aceleraciones del terremoto de Concepción, Biobío (2010)

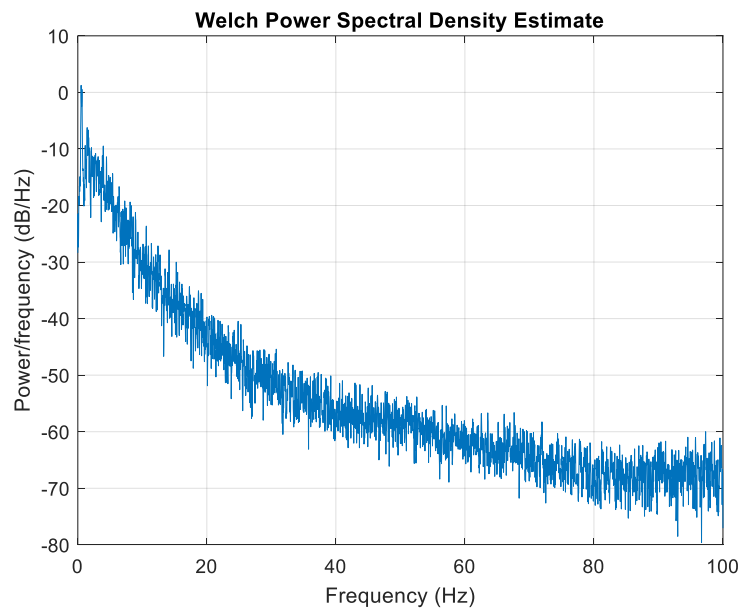


Gráfico 5: Densidad Espectral de Potencia (PSD) del terremoto de Concepción

Para ambos casos se utilizan los datos de aceleración de suelo (u_g) y tiempo (t) para usarlos como input en cada estructura.

3.2. Estructuras

Para analizar el desempeño de los amortiguadores se modelaron 3 estructuras de acero en SAP2000, las cuales cumplen con los siguientes supuestos:

- Edificios de corte
- Planta simétrica
- Vigas rígidas y columnas flexibles
- Rango de movimiento es exclusivamente horizontal, con lo cual el número de grados de libertad es igual número de pisos de cada edificio

Estas estructuras corresponden a edificios benchmark reales obtenidos del paper de Ohtori et al. (2004). Estos edificios son estructuras de acero conformados por marcos resistentes a momento (MRF) y cada uno de 3, 9 y 20 pisos de altura.

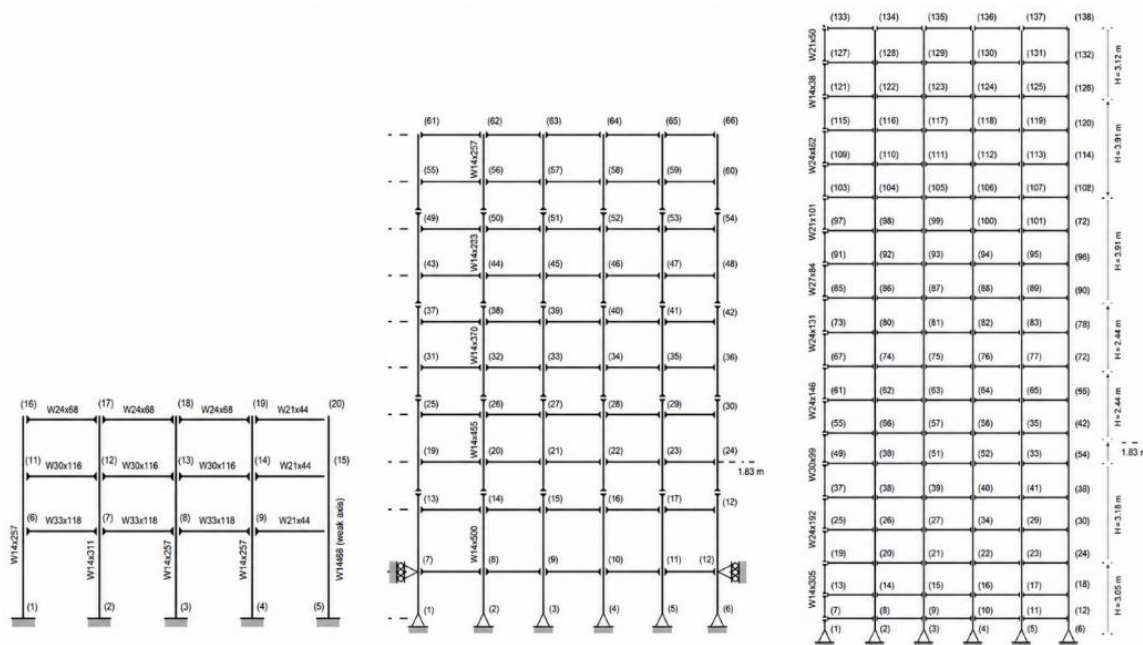


Figura 9: Edificios benchmark de 3, 9 y 20 pisos. Fuente: Ohtori et al. (2004)

Con las matrices M y K es posible obtener las frecuencias naturales angulares de la estructura a partir del comando $\text{eig}(K, M)$ en Matlab, y con estos valores junto al del coeficiente de amortiguamiento, el cual se establece con un valor de $\xi = 5\%$, se puede calcular matriz de amortiguamiento C a partir de las ecuaciones de Rayleigh.

En el paper de Ohtori et al. (2004), las propiedades de los edificios benchmark, tales como masas de piso, alturas, perfiles de acero, entre otros, se encuentran tabulados para cada estructura (ver Anexo). A partir de estas propiedades, los autores calculan la matriz de rigidez mediante un modelo bilineal histerético para caracterizar el comportamiento no lineal de las estructuras al ser sometidas a una acción externa. En este trabajo, a diferencia del paper original, se utiliza un modelo elasto-plástico perfecto para caracterizar el comportamiento no lineal de la estructura, considerando rótulas plásticas en los extremos de cada elemento y efectos P- Δ . Este procedimiento se realiza utilizando el software SAP2000 de la siguiente forma:

- 1) Se define una grilla de 2 dimensiones para modelar el edificio de corte.
- 2) Se definen el material y los perfiles de acero de vigas y columnas, importando sus propiedades desde el Manual de la ASCE v14.

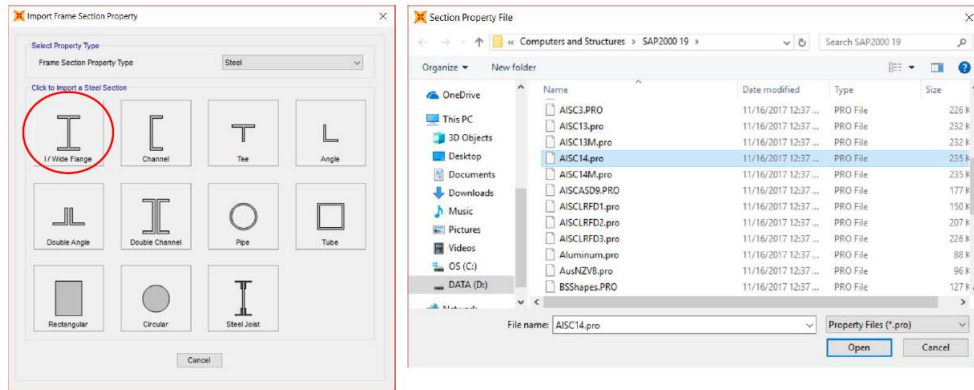


Figura 10: Ventana emergente "Import Frame Section Property" de SAP2000. Aquí se importan los perfiles de acero al modelo

- 3) Se dibuja la estructura usando elementos "frame"

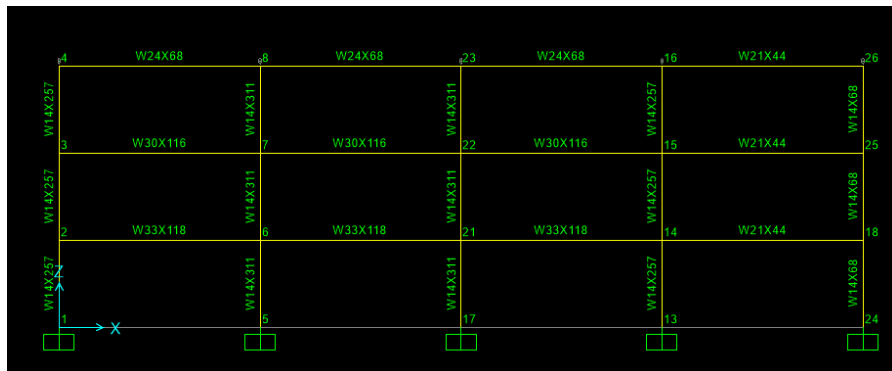


Figura 11: Vista en el plano xz del edificio de 3 pisos modelado en SAP2000

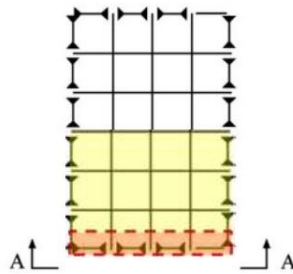


Figura 12: Vista en planta del edificio. La zona amarilla es la que se considera para el peso total del modelo

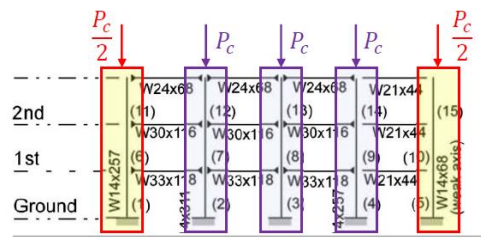


Figura 13: Vista en elevación del modelo. Carga muerta se distribuye por áreas tributarias

- 4) Se definen las cargas externas, las cuales son de tipo carga muerta que representa el peso propio del marco
- 5) Definir el comportamiento elasto-plástico perfecto de los elementos (ver Figura 11).

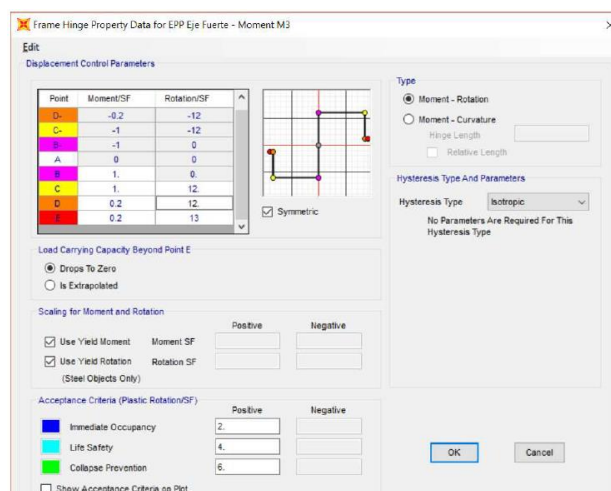


Figura 14. Ventana emergente "Frame Hinge Properties". Aquí se define el comportamiento EPP de los elementos

- 6) Correr el análisis del modelo
- 7) Ir a la opción "Display" a seleccionar la opción "Show Tables"
- 8) En la sección "Analysis Results", marcar "Structure Output", luego "Modal Information" y luego "Modal Periods And Frequencies"
- 9) De esta forma se obtienen las frecuencias naturales del edificio para luego compararlas con las obtenidas en el paper original y verificar que el modelo sea correcto.
- 10) En la sección "Analysis Results", marcar "Structure Output", luego "Joint Output" y luego "Displacements". Con esto se obtienen las formas modales del edificio.

Realizando este proceso para los tres edificios benchmark se obtienen las frecuencias naturales de todos los grados de libertad de cada edificio. A su vez, también es posible obtener la matriz de rigidez K a partir del siguiente procedimiento:

- 1) Restringir el movimiento horizontal de todos los pisos con condiciones de apoyo (Restrains)
- 2) Aplicar un desplazamiento horizontal unitario (Joint Loads > Displacements) en el primer piso de la estructura
- 3) Correr el modelo (Run Analysis) e ir a la opción Display > Show Tables > Joint Reactions

- 4) Con los datos de las fuerzas horizontales en cada restricción de piso (F1) se arma la columna 1 de la matriz de rigidez
- 5) Se repiten los pasos 2, 3 y 4 para el resto de pisos hasta armar toda la matriz K

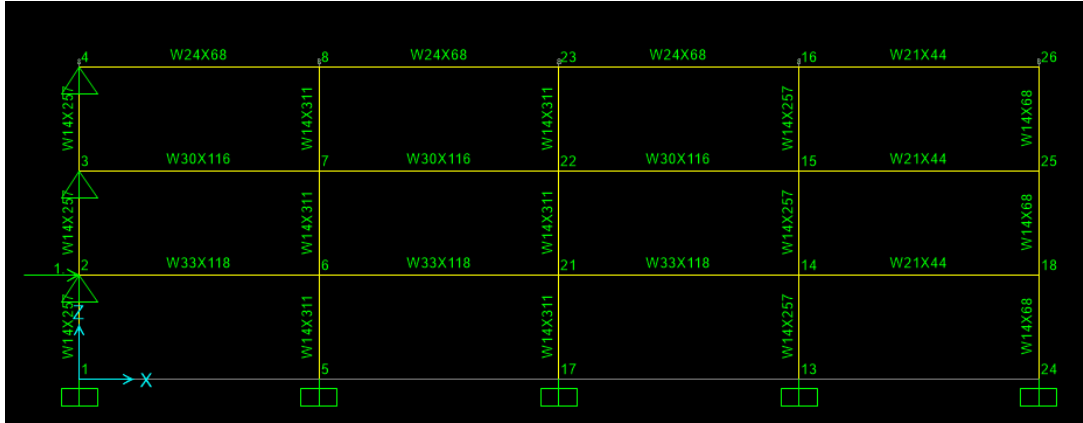


Figura 15: Desplazamiento unitario aplicado en el 1er piso de la estructura de 3 pisos

Donde Φ es la matriz de modos de la estructura y Ω es una matriz diagonal con las frecuencias naturales angulares al cuadrado. Con las matrices M y K se puede calcular la matriz C usando la razón de Rayleigh. Habiendo calculado las matrices M , K y C y definiendo un “n” igual al número de pisos y el vector de participación sísmica Γ como un vector columna de dimensión “n” se pueden obtener las matrices state-space del edificio a partir de la función de Matlab `SS_edificio_sincontrol`. Estas matrices son las que permitirán analizar al edificio como un sistema dinámico en Simulink.

3.3. Sistemas de control

3.3.1. Amortiguador de masa sintonizado (TMD)

Para modelar el TMD se parte definiendo la razón de masas μ que este tendrá. La masa de este tipo de amortiguadores suele rondar entre 1%-5% de la masa total del edificio en que se ubican (F. Yang et al., 2015)

Por lo que se escogerá un valor de $\mu = 3\%$ para analizar el modelo. Con este valor, junto al de la masa total del edificio y su frecuencia natural fundamental, se pueden calcular la razón de frecuencias α y la razón de amortiguamiento β y con estos se obtienen la masa m_{TMD} , la rigidez k_{TMD} y el amortiguamiento c_{TMD} del TMD a partir de la función `Propiedades_TMD`. Finalmente, con las propiedades del TMD ya calculadas se arman sus matrices state-space con la función `SS_TMD` y las del edificio con el TMD con `SS_edificio_TMD`.

3.3.2. Amortiguador de masa activo (AMD)

En el caso del AMD su masa m_A y amortiguamiento c_A se calculan de la misma manera que con el TMD, es decir, utilizando las ecuaciones de Den Hartog y considerando un $\mu = 2\%$ para el amortiguador activo grande. La rigidez k_A que se obtiene de la Ecuación (15) se va a considerar con un valor de 0, ya que, como se puede apreciar en la ecuación de movimiento del AMD (Ecuación 38), la rigidez del AMD lo aporta el producto de los términos $k_T k_P$. La constante k_T se define con un valor de 10 Nm/A, mientras que a k_P se le da un valor de 1000 A.

El valor de J en comparación a la masa m_A es muy pequeño, con lo cual se puede despreciar. Para el pitch l_A se considera un valor de 0.1 metros, es decir, por cada giro del ballscrew la masa avanza 10 centímetros.

Para el caso del AMD pequeño se considera un valor de $\mu = 1\%$, a partir del cual se obtienen la masa m_a y el amortiguamiento c_a . Parecido al caso del AMD grande, se considera un valor de rigidez k_a igual a 0 ya que esta viene dada por el producto $k_t k_p$, donde k_t tiene un valor de 5 Nm/A y k_p de 1000 A.

El valor de j se deprecia al igual que en el caso de J por las mismas razones y al pitch l_a se le asigna el mismo valor de l_A , es decir, 0.1 metros.

Las propiedades de ambos AMDs se definen en las funciones `Propiedades_AMD_grande` y `Propiedades_AMD_pequeno` y con estas se calculan las matrices state space de ambos amortiguadores con las funciones `SS_AMD_grande` y `SS_AMD_pequeno`. A su vez, también se calculan matrices del edificio con AMDs con `SS_edificio_1AMD` y `SS_edificio_2AMDs`. Con la función `Gramianos` se obtiene una lista con las trazas de los gramianos de cada combinación posible de amortiguadores ordenadas de mayor a menor valor. De todas las combinaciones posibles, se escogen las 3 con mayor valor para analizarlas en Simulink. Finalmente, la matriz K_G se calcula con el comando `lqr(A_sist1, B_u1, Q1, R1)`, donde A_{sist1} y B_{u1} son las matrices state space del sistema aumentado, las cuales se obtienen de la función `SS_Sistema_aumentado_1AMD`. Se realiza el mismo procedimiento para el cálculo de K_g . En ambos casos, el valor del coeficiente a es igual a 10^6 , esto asegura que el AMD tenga un rango de movimiento moderado de ± 1 metro y que no se pase de este. Para el valor del factor R del control LQR se considera un $b = 5000$.

3.4. Modelamiento de sistemas dinámicos

Para modelar la interacción entre los sismos con los edificios y los sistemas de control se utilizó el software Simulink, el cual es un programa de simulación que permite modelar sistemas dinámicos a partir del uso de diagramas de bloque. La razón por la que se utiliza Simulink es que cuenta con la particularidad de que se puede trabajar con datos importados desde Matlab para construir estos sistemas dinámicos

3.4.1. Sismo + estructura

Se parte por definir el sismo que va a perturbar a la estructura. Para ello se utiliza el bloque “From Workspace” el que permite importar los datos de aceleración de suelo (ug) y de tiempo (t) del terremoto. Este terremoto se conecta con un bloque “State-Space” el cual permite definir a un sistema dinámico en función de sus matrices espacio-estado. Para este caso, como se está modelando el edificio sin control estructural, se utilizan las matrices obtenidas de la función `SS_edificio_sincontrol` de Matlab. Finalmente, este bloque que entrega como resultados los desplazamientos y aceleración absoluta de cada piso, se conecta a un bloque “Demux” que separa ambos resultados en dos grupos distintos, los cuales se importan en Matlab a partir de dos bloques tipo “To Workspace”.

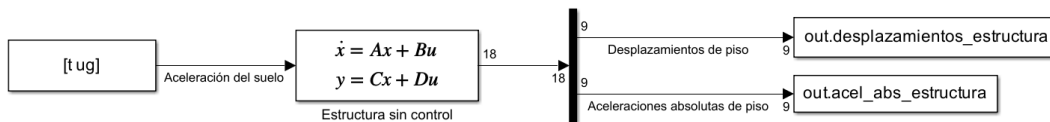


Figura 16: Diagrama de bloques del edificio sin control estructural en Simulink

3.4.2. Sismo + estructura + TMD

Al igual que en el caso anterior, se parte definiendo el sismo a partir de un bloque “From Workspace” el cual se conecta al “State-Space” de la estructura y que entrega como output los desplazamientos y aceleraciones absolutas de piso. El vector de aceleraciones es luego multiplicado por un bloque tipo “Constant” el cual contiene al vector r_0' , dando como resultado la aceleración absoluta del piso en donde está ubicado el TMD. Esta aceleración entra como input al “State-Space” del TMD, el que entrega como salida la fuerza que este aplica sobre la estructura. Finalmente, la fuerza del amortiguador entra como input al “State-Space” de la estructura, creándose así un closed-loop entre el edificio y el amortiguador. Los desplazamientos de piso, aceleraciones absolutas y la fuerza del TMD se importan a Matlab con bloques “To Workspace”.

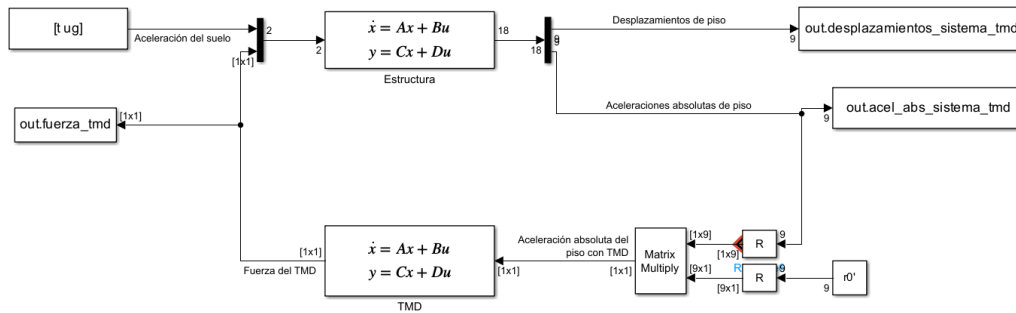


Figura 17: Diagrama de bloques del edificio con TMD en Simulink

3.4.3. Sismo + estructura + 1 AMD

Se parte definiendo el bloque “From Workspace” del sismo, el cual entra al “State-Space” del edificio y que da como outputs sus estados (desplazamientos y velocidades de piso) y aceleraciones absolutas de piso. A partir de aquí las salidas del bloque SS toman dos caminos distintos: los estados se conectan a un bloque “Mux” el cual une a los desplazamientos y velocidades del edificio con los estados del AMD en un solo vector (esto se explica con más detalle más adelante), mientras que las aceleraciones absolutas se multiplican por un bloque “Constant” que contiene el valor de r_A' , resultando en la aceleración absoluta del piso en el que se encuentra el AMD. Esta aceleración entra como input al “State-Space” del AMD, quien da como outputs sus estados ($\bar{x}_A$ y $\dot{\bar{x}}_A$) y su aceleración medida ($\ddot{\bar{x}}_A$) en un mismo vector. Este vector pasa por un bloque “Demux” que separa a la aceleración medida de los estados, para luego unir a estos últimos en el mismo bloque “Mux” en donde se habían conectado los estados del edificio previamente, dando como resultado un vector con los estados de la estructura y del AMD. Luego, el vector con todos los estados se conecta a un bloque “Gain” que multiplica a los estados con la matriz de ganancias K_{G1} , dando como resultado la posición comandada del AMD ($\bar{x}_C$) la cual entra como input al “State-Space” del amortiguador. Finalmente, se conecta la aceleración medida ($\ddot{\bar{x}}_A$) con el bloque SS del edificio. Se importan a Matlab los estados del edificio y el AMD, las aceleraciones absolutas de piso y la posición comandada del AMD usando bloques “To Workspace”.

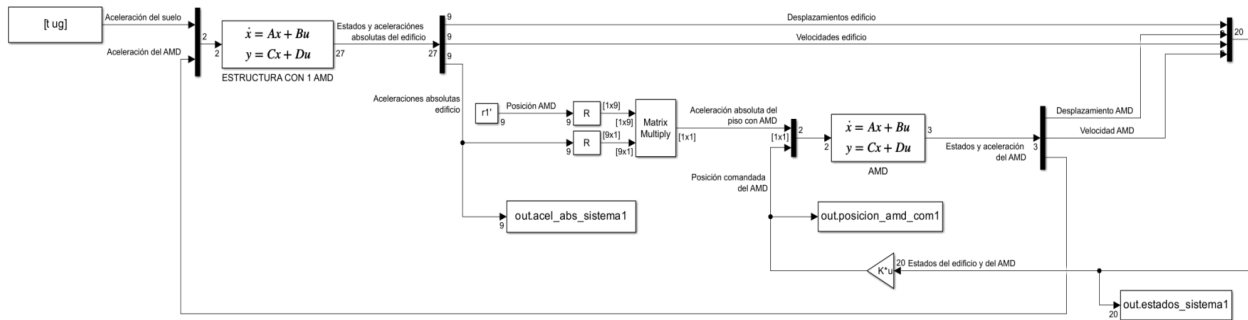


Figura 18: Diagrama de bloques del edificio con 1 AMD en Simulink

3.4.4. Sismo + estructura + 2 AMDs

Previo a modelar el diagrama de bloques, se escogen los dos pisos en donde se van a posicionar los AMDs. Esto se hace a partir de la lista obtenida con la función Gramianos, la cual calcula el gramiano de controlabilidad de cada combinación a partir del operador $\text{gram}(\text{sys}, "c")$, siendo sys el conjunto de matrices state-space del sistema aumentado y, posterior a eso, calcula la traza de todas estas combinaciones y las ordena de mayor a menor valor. Finalmente, de todas las combinaciones posibles se decide trabajar con las tres con mayor traza, partiendo por la que tiene el máximo valor. Habiendo hecho esto, se procede a armar el diagrama de Simulink.

Se define el terremoto con el bloque "From Workspace" el cual entra como input al "State-Space" del edificio. Esta entrega como output sus estados y aceleraciones absolutas de piso en un mismo vector, los cuales se separan en 3 vectores distintos a partir de un bloque "Demux", donde las aceleraciones se multiplican por dos bloques "Constant" distintos: uno con el valor de r_{a1}' y otro con r_{a2}' , dando como resultado dos señales distintas donde cada una representa la aceleración del piso en donde se ubica cada AMD. Estas señales entran a los "State-Space" de sus AMDs respectivos los cuales entregan como output sus estados y aceleración en un mismo vector para luego ser separados por un bloque "Demux". Posterior a esto, tanto los estados de los dos AMDs como los estados del edificio se unen a partir de un bloque "Mux", dando como resultado un vector con todos los estados que se multiplica con un bloque "Gain" con el valor de la matriz K_{G2} . Este producto entrega las posiciones comandadas de los 2 AMDs, las que entran como input al bloque SS de su amortiguador respectivo. Finalmente, se conectan las aceleraciones de cada AMD al bloque SS del edificio. Se importan a Matlab las aceleraciones absolutas de piso, los estados del edificio y los amortiguadores y las posiciones comandadas de ambos AMDs.

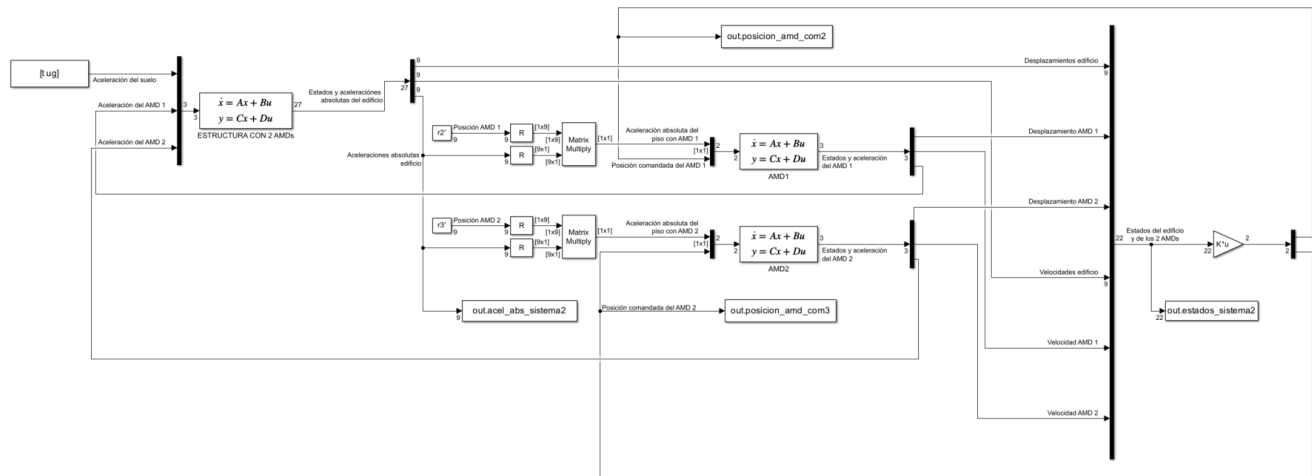


Figura 19: Diagrama de bloques del edificio con 2 AMDs en Simulink

4. Resultados y análisis

4.1. Frecuencias naturales edificios

A continuación, se muestran los valores de frecuencias naturales obtenidos a partir de SAP2000 en contraste con los valores que aparecen en el paper de Ohtori et al. (2004):

Frecuencias naturales [Hz]		
	SAP2000	Ohtori et al. (2004)
1	0.93	0.99
2	2.86	3.06
3	5.33	5.83

Tabla 1: Frecuencias naturales obtenidas en SAP2000 y del paper de Ohtori et al. (2004) del edificio de 3 pisos

Frecuencias naturales [Hz]		
	SAP2000	Ohtori et al. (2004)
1	0.43	0.443
2	1.15	1.18
3	2.00	2.05
4	3.01	3.09
5	4.12	4.27
6	5.06	-
7	5.15	-
8	5.31	-
9	5.47	-

Tabla 2: Frecuencias naturales obtenidas en SAP2000 y del paper de Ohtori et al. (2004) del edificio de 9 pisos

Frecuencias naturales [Hz]		
	SAP2000	Ohtori et al. (2004)
1	0.25	0.261
2	0.71	0.753
3	1.22	1.3
4	1.71	1.83
5	2.25	2.4
6	2.57	2.44
7	2.80	2.92
8	2.98	3.01
9	3.38	3.63
10	3.64	3.68
11	4.01	-
12	4.34	-
13	4.67	-
14	4.84	-
15	5.11	-
16	5.34	-
17	6.01	-
18	6.57	-
19	6.72	-
20	6.88	-

Tabla 3: Frecuencias naturales obtenidas en SAP2000 y del paper de Ohtori et al. (2004) del edificio de 20 pisos

Se aprecia de los valores obtenidos en SAP2000 que estos son muy parecidos a los del paper de Ohtori et al. (2004), con lo cual el modelo de SAP2000 está correctamente ejecutado.

4.2. Concepción (2010)

4.2.1. Edificio de 3 pisos

posiciones	trazas
"Pisos 1 y 2"	529.73
"Pisos 1 y 3"	529.05
"Pisos 2 y 3"	529.05

Tabla 4: Trazas máximas del Gramiano de control del edificio de 3 pisos

Reducción del drift (%)			
	Piso 3	Piso 3	Pisos 1 y 2
Pisos	Con TMD	Con 1 AMD	Con 2 AMDs
1	-2.27	17.64	5.83
2	-0.11	17.42	6.28
3	-17.02	15.06	7.82
Promedio	-8.57	16.24	7.05

Tabla 5: Reducción porcentual del drift del edificio de 3 pisos, considerando combinación "1 y 2" para los 2 AMDs

Reducción de aceleración absoluta (%)			
	Piso 3	Piso 3	Pisos 1 y 2
Pisos	Con TMD	Con 1 AMD	Con 2 AMDs
1	-11.60	8.27	3.38
2	-11.38	18.15	7.53
3	-1.03	20.10	7.70
Promedio	-8.00	15.51	6.20

Tabla 6: Reducción porcentual de aceleración absoluta del edificio de 3 pisos, considerando combinación "1 y 2" para los 2 AMDs

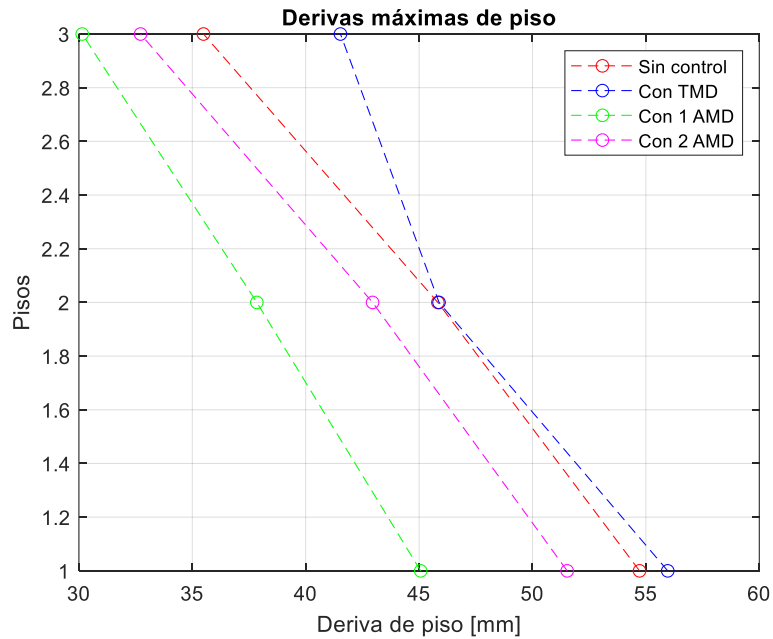


Gráfico 6: Derivas máximas de piso del edificio de 3 pisos, considerando combinación "1 y 2" para los 2 AMDs

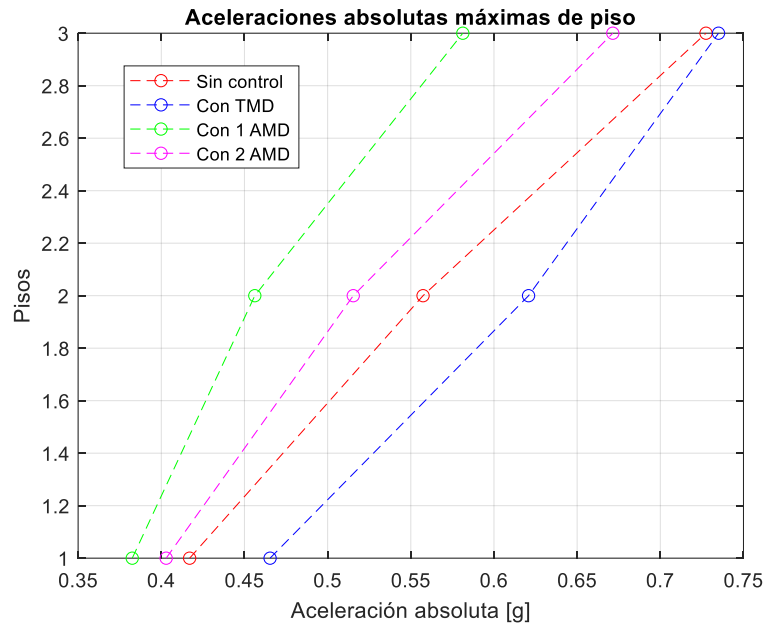


Gráfico 7: Aceleraciones absolutas máximas de piso del edificio de 3 pisos, considerando combinación "1 y 2" para los 2 AMDs

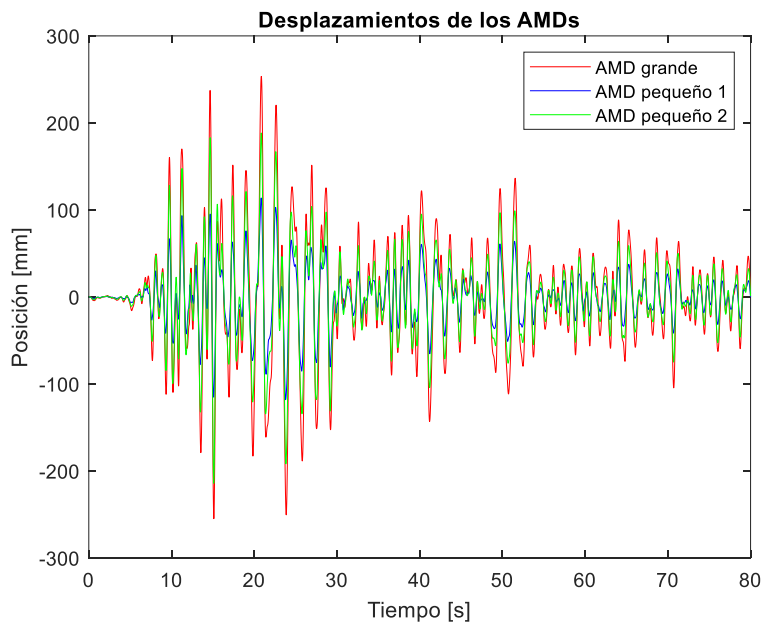


Gráfico 8: Desplazamientos de los AMDs en el edificio de 3 pisos

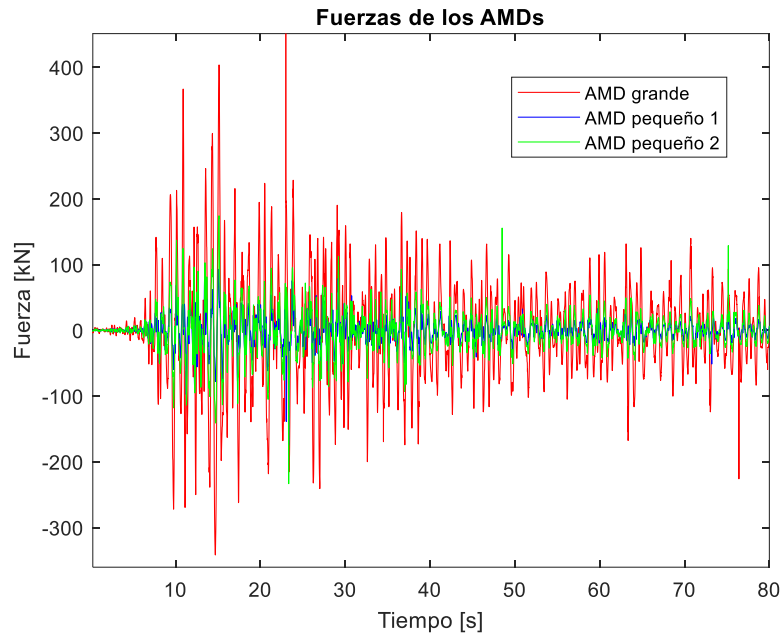


Gráfico 9: Fuerzas de los AMDs en el edificio de 3 pisos

Se puede observar que, para este caso en particular, la estrategia que genera las reducciones más grandes es la del AMD grande ubicado en el último piso, seguido por los dos AMDs en los pisos 1 y 2 y el TMD en último lugar. Respecto al desplazamiento de los AMDs, se observa que los 3 se mueven en un rango máximo de ± 0.3 metros, con lo cual se cumple el prerequisite de moverse ± 1 metro, siendo además el AMD grande el que más se mueve respecto a su posición de reposo. Entre los tres AMDs, el que genera las mayores fuerzas es el AMD grande, lo cual hace mucho sentido considerando que es el que tiene la mayor masa y que, en general, el último piso de un edificio es el que experimenta las mayores aceleraciones y, por lo tanto, las mayores fuerzas durante un sismo.

Para estudiar la efectividad del gramiano de controlabilidad como método para escoger las mejores posiciones de los AMDs pequeños, se analizan las otras dos posiciones con mayor traza del gramiano, es decir, las combinaciones “1 y 3” y “2 y 3”, obteniéndose los siguientes resultados:

Reducción del drift (%)		
	Pisos 1 y 3	Pisos 2 y 3
Pisos	Con 2 AMD	Con 2 AMD
1	9.89	12.46
2	10.51	12.01
3	9.29	12.40
Promedio	9.90	12.29

Tabla 7: Reducción porcentual del drift del edificio de 3 pisos, considerando combinaciones “1 y 3” y “2 y 3”

Reducción de aceleración absoluta (%)		
	Pisos 1 y 3	Pisos 2 y 3
Pisos	Con 2 AMD	Con 2 AMD
1	6.93	7.48
2	10.99	13.70
3	11.99	14.94
Promedio	9.97	12.04

Tabla 8: Reducción porcentual de aceleración absoluta del edificio de 3 pisos, considerando combinaciones "1 y 3" y "2 y 3"

Como se puede observar, al comparar las reducciones de drifts y aceleraciones absolutas de los tres casos con 2 AMDs, aquel que con los mejores resultados es el de la combinación "2 y 3", es decir, la combinación con la menor traza de gramiano de control. En comparación al caso con la mayor traza del gramiano (pisos 1 y 2), en promedio, las reducciones aumentan en un 5.24% en el caso de los drifts y un 5.84% en las aceleraciones absolutas. A pesar de que la nueva combinación no genera reducciones mayores a las del caso con 1 AMD, esto ya dice que es posible mejorar el desempeño de un edificio si se escogen bien las posiciones de los AMDs.

4.2.2. Edificio de 9 pisos

posiciones	trazas
"Pisos 2 y 3"	172.04
"Pisos 2 y 4"	172.03
"Pisos 3 y 4"	172.03

Tabla 9: Trazas máximas del Gramiano de control del edificio de 9 pisos

Reducción del drift (%)			
	Piso 9	Piso 9	Pisos 2 y 3
Pisos	Con TMD	Con 1 AMD	Con 2 AMDs
1	5.45	24.18	5.99
2	5.85	24.37	6.36
3	6.88	24.59	7.24
4	8.36	24.65	8.18
5	9.69	24.39	8.16
6	10.16	23.69	8.06
7	11.78	22.22	7.96
8	16.39	19.47	8.42
9	16.04	10.88	9.06
Promedio	10.07	22.05	7.71

Tabla 10: Reducción porcentual del drift del edificio de 9 pisos, considerando combinación "2 y 3" para los 2 AMDs

Reducción de aceleración absoluta (%)			
	Piso 9	Piso 9	Pisos 2 y 3
Pisos	Con TMD	Con 1 AMD	Con 2 AMDs
1	-7.01	21.58	3.45
2	-1.13	26.61	-35.18
3	-2.35	26.56	8.46
4	-3.07	26.12	7.79
5	-0.35	27.33	7.62
6	1.06	27.27	7.48
7	-1.00	25.65	7.42
8	-2.06	24.03	8.08
9	36.30	25.01	9.24
Promedio	2.26	25.57	2.71

Tabla 11: Reducción porcentual de aceleración absoluta del edificio de 9 pisos, considerando combinación "2 y 3" para los 2 AMDs

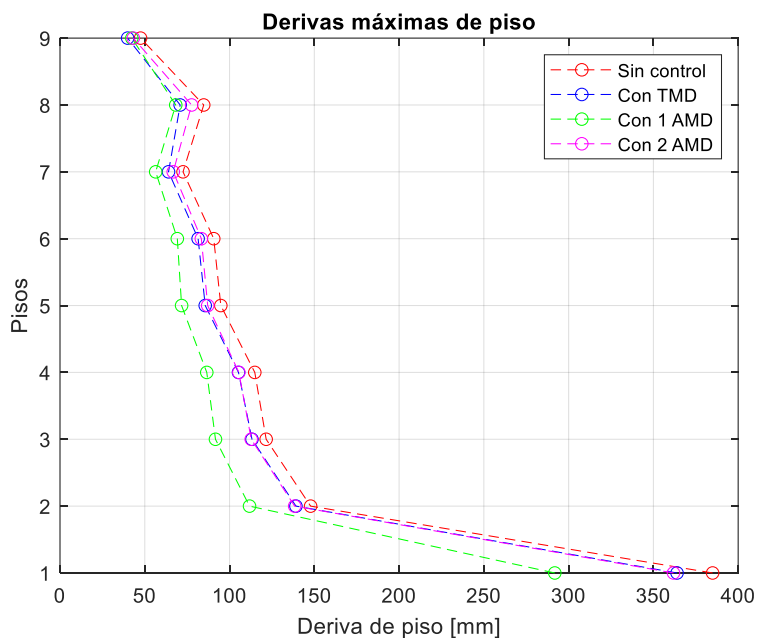


Gráfico 10: Derivas máximas de piso del edificio de 9 pisos, considerando combinación "2 y 3" para los 2 AMDs

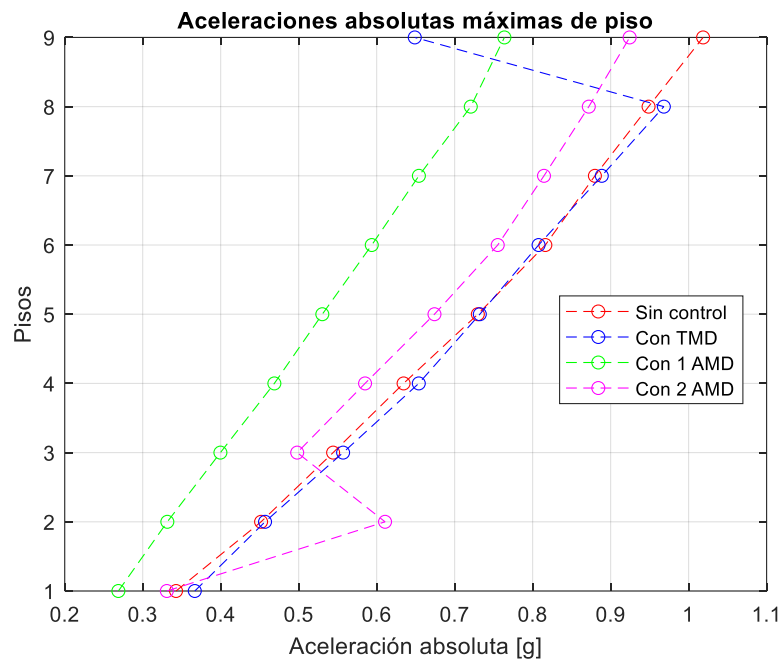


Gráfico 11: Aceleraciones absolutas máximas de piso del edificio de 9 pisos, considerando combinación "2 y 3" para los 2 AMDs

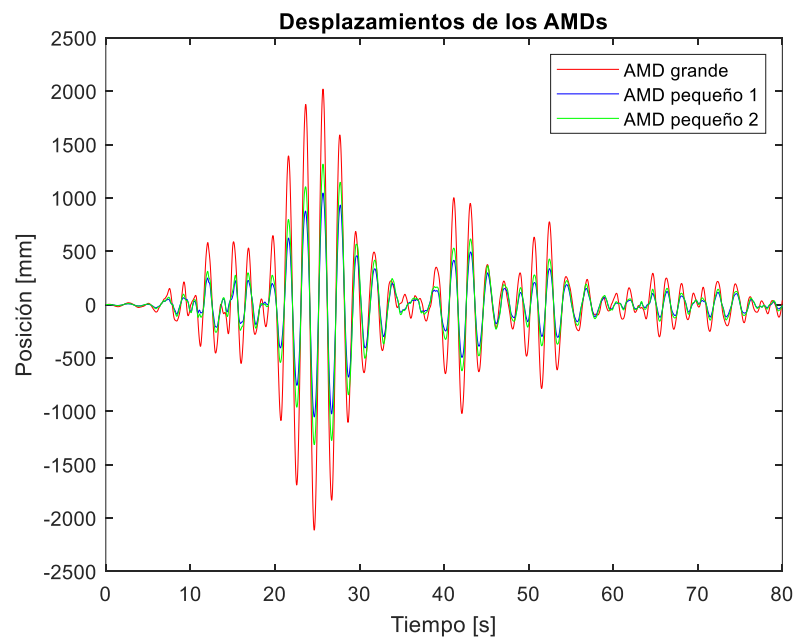


Gráfico 12: Desplazamientos de los AMDs en el edificio de 9 pisos

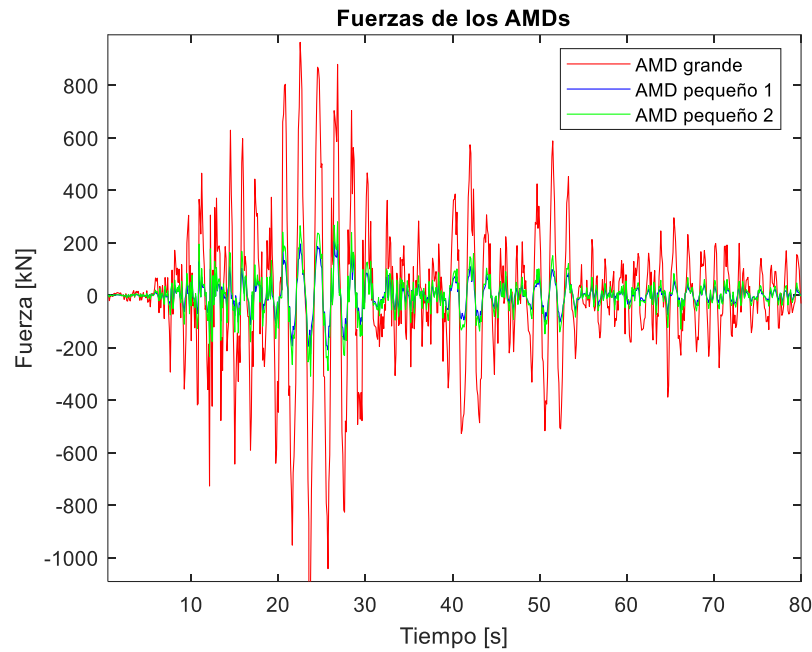


Gráfico 13: Fuerzas de los AMDs en el edificio de 9 pisos

En este caso se observa que, al igual que en el caso del edificio de 3 pisos, la configuración con mayores reducciones es la del 1 AMD. Los desplazamientos máximos de los AMDs se encuentran en el rango de ± 2.3 metros aproximadamente, con lo cual se pasa del rango predefinido de ± 1 metro. Esto significa que la matriz Q del control LQR no está correctamente calibrada para delimitar el movimiento de los AMDs en este caso en particular, lo cual se puede arreglar al recalibrar esta matriz. Igual que para el edificio de 3 pisos, las fuerzas más grandes las genera el AMD más grande, lo cual es un resultado esperable debido a las razones explicadas en el caso anterior.

Para estudiar la efectividad del gramiano, se analizan las otras dos combinaciones con mayor traza junto a una combinación nueva que no está dentro de las combinaciones con la mayor traza. La nueva combinación corresponde a los pisos 7 y 9.

Reducción del drift (%)			
	Pisos 2 y 4	Pisos 3 y 4	Pisos 7 y 9
Pisos	Con 2 AMDs	Con 2 AMDs	Con 2 AMDs
1	7.29	8.30	17.97
2	7.73	8.72	18.08
3	8.55	9.39	18.33
4	8.79	10.23	18.49
5	9.98	11.23	18.36
6	9.89	11.23	17.76
7	9.72	10.85	16.49
8	9.93	10.99	17.20
9	10.83	12.05	14.22
Promedio	9.19	10.33	17.43

Tabla 12: Reducción porcentual del drift del edificio de 9 pisos, considerando combinaciones "2 y 4", "3 y 4" y "7 y 9"

Reducción de aceleración absoluta (%)			
	Pisos 2 y 4	Pisos 3 y 4	Pisos 7 y 9
Pisos	Con 2 AMDs	Con 2 AMDs	Con 2 AMDs
1	6.87	5.50	20.24
2	8.20	6.19	22.58
3	7.14	11.27	21.75
4	7.61	4.58	19.26
5	10.12	11.89	20.88
6	9.90	11.28	22.09
7	9.49	10.68	20.26
8	9.40	10.32	18.91
9	11.22	12.61	20.00
Promedio	8.88	9.37	20.66

Tabla 13: Reducción porcentual de aceleración absoluta del edificio de 9 pisos, considerando combinaciones "2 y 4", "3 y 4" y "7 y 9"

Analizando estos resultados se puede observar que la combinación que genera las máximas reducciones es la de los pisos 7 y 9, es decir, la combinación que no se encontraba dentro de las con mayor traza del gramiano de control. En comparación a la combinación "2 y 3", la nueva combinación aumenta las reducciones en un 9.72% y 17.95 para los drifts y aceleraciones absolutas respectivamente. Estos resultados dan a entender la posibilidad de que la máxima traza del gramiano de control quizás no sea el mejor método para escoger el posicionamiento estratégico de AMDs en un edificio.

4.2.3. Edificio de 20 pisos

posiciones	trazas
"Pisos 6 y 8"	178.44
"Pisos 7 y 8"	178.44
"Pisos 6 y 7"	178.44

Tabla 14: Trazas máximas del Gramiano de control del edificio de 20 pisos

Reducción del drift (%)			
	Piso 20	Piso 20	Pisos 6 y 8
Pisos	Con TMD	Con 1 AMD	Con 2 AMDs
1	-6.01	9.31	0.05
2	-5.73	9.95	0.16
3	-5.44	10.60	0.30
4	-5.10	11.18	0.50
5	-4.74	11.80	0.71
6	-4.36	12.31	0.92
7	-3.95	12.83	0.43

8	-3.51	13.27	0.67
9	-3.03	13.70	0.44
10	-2.49	14.07	0.66
11	-1.87	14.40	0.90
12	-1.15	14.65	1.14
13	-0.32	14.81	1.38
14	0.68	14.78	1.57
15	1.90	14.52	1.75
16	3.50	13.84	1.92
17	5.76	12.37	2.10
18	9.27	9.29	2.30
19	16.01	0.54	2.53
20	34.79	-34.30	2.77
Promedio	1.21	9.70	1.16

Tabla 15: Reducción porcentual del drift del edificio de 20 pisos, considerando combinación "6 y 8" para los 2 AMDs

Reducción de aceleración absoluta (%)			
	Piso 20	Piso 20	Pisos 6 y 8
Pisos	Con TMD	Con 1 AMD	Con 2 AMDs
1	1.59	-4.02	0.03
2	2.41	-7.11	-1.66
3	3.23	-11.19	-6.29
4	0.47	-12.86	-11.76
5	0.13	-10.25	-7.15
6	-0.79	-7.36	-4.50
7	-1.72	-1.88	-1.88
8	-4.03	4.85	3.09
9	-10.39	9.51	-0.80
10	-10.54	13.52	-0.72
11	-9.50	14.89	-0.02
12	-8.42	14.68	0.36
13	-7.49	12.53	0.53
14	-9.50	10.25	0.14
15	-8.29	12.35	0.59
16	-7.35	14.08	0.97
17	-6.57	15.63	1.35
18	-5.86	16.66	1.74
19	-5.06	17.43	2.29
20	65.59	3.32	2.86
Promedio	-1.11	5.25	-1.04

Tabla 16: Reducción porcentual de aceleración absoluta del edificio de 20 pisos, considerando combinación "6 y 8" para los 2 AMDs

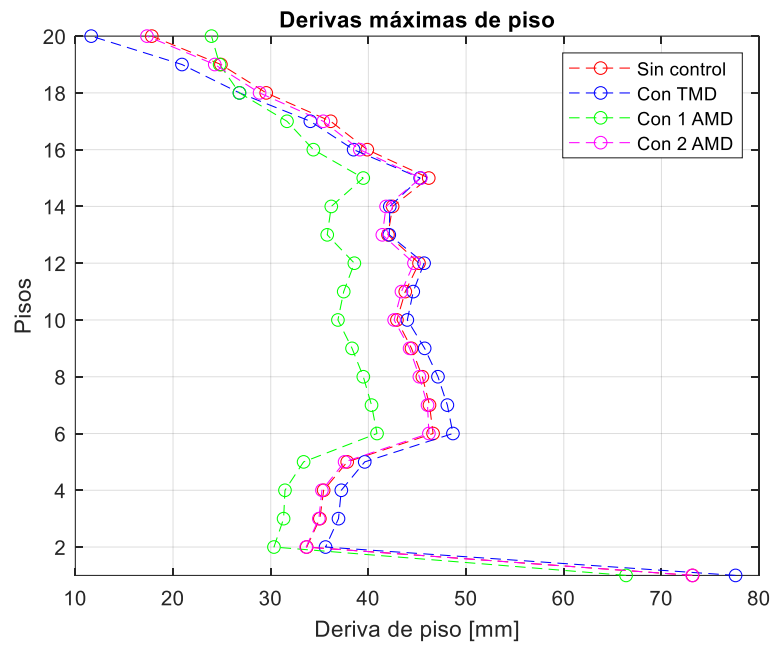


Gráfico 14: Derivas máximas de piso del edificio de 20 pisos, con AMDs en los pisos 6 y 8 y sometido al sismo de Concepción

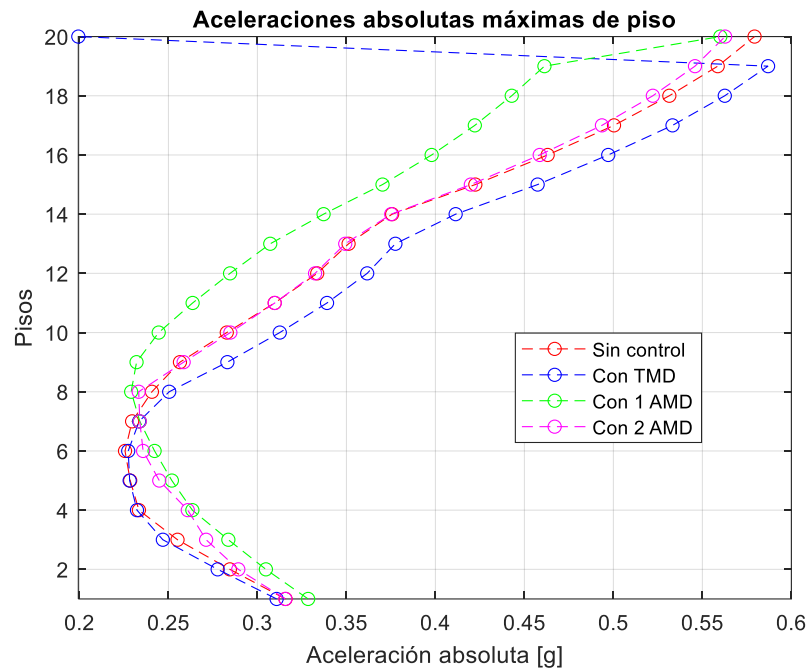


Gráfico 15: Aceleraciones absolutas máximas de piso del edificio de 20 pisos, con AMDs en los pisos 6 y 8 y sometido al sismo de Concepción

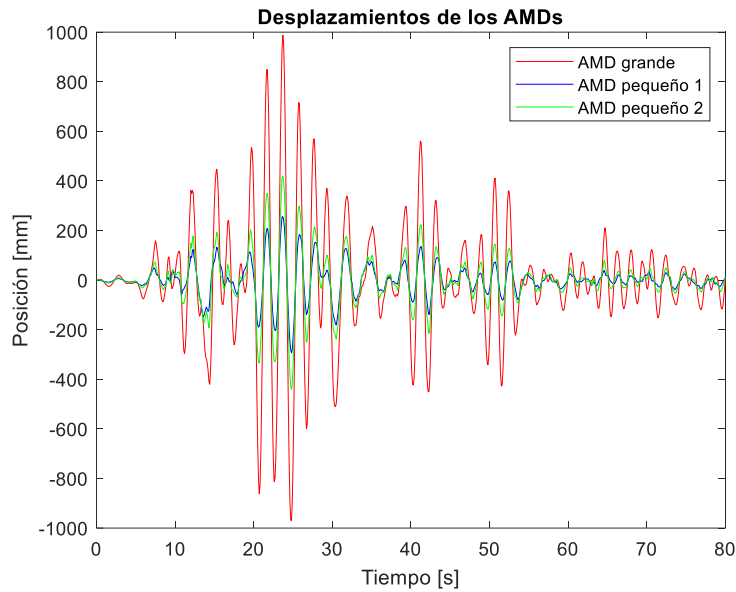


Gráfico 16: Desplazamientos de los AMDs en el edificio de 20 pisos

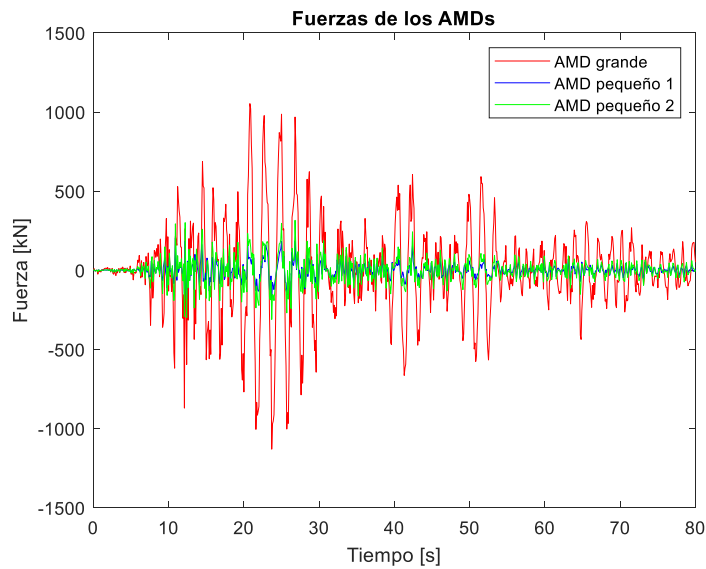


Gráfico 17: Fuerzas de los AMDs en el edificio de 20 pisos

De las tablas y de los gráficos de reducciones se puede apreciar que, al igual que en el caso de los dos edificios benchmark anteriores, las máximas reducciones las genera el AMD grande posicionado en el último piso, tanto en drifts como en aceleraciones absolutas. El desplazamiento de los amortiguadores se encuentra dentro del rango ± 1 metro, con lo cual se asegura que el movimiento de los AMDs se encuentre

en los límites previamente establecidos para el diseño de los amortiguadores y que el amortiguador que genera las mayores fuerzas es el AMD grande posicionado en el último piso.

Al igual que en los casos anteriores, se compara la combinación “6 y 8” con las combinaciones “7 y 8”, “6 y 7” y una nueva combinación, que en este caso será la “15 y 19”.

Reducción del drift (%)			
	Pisos 7 y 8	Pisos 6 y 7	Pisos 15 y 19
Pisos	Con 2 AMDs	Con 2 AMDs	Con 2 AMDs
1	1.55	1.24	6.85
2	1.58	1.26	6.86
3	1.62	1.28	6.89
4	1.67	1.31	6.84
5	1.68	1.13	6.61
6	1.65	1.10	7.56
7	1.61	0.86	8.37
8	1.38	0.60	8.34
9	1.12	0.58	8.34
10	1.07	0.56	8.37
11	1.04	0.55	8.41
12	1.02	0.55	8.47
13	1.01	0.55	8.55
14	1.00	0.56	8.65
15	1.00	0.58	8.74
16	1.00	0.59	8.99
17	1.00	0.60	9.15
18	1.01	0.61	9.14
19	1.01	0.62	6.89
20	1.01	0.63	8.91
Promedio	1.25	0.79	8.05

Tabla 17: Reducciones de drift máximo del edificio de 20 pisos, usando las combinaciones “7 y 8”, “6 y 7” y “15 y 19”

Reducción de aceleración absoluta (%)			
	Pisos 7 y 8	Pisos 6 y 7	Pisos 15 y 19
Pisos	Con 2 AMDs	Con 2 AMDs	Con 2 AMDs
1	0.51	0.40	-0.80
2	-0.61	-0.82	0.30
3	-0.93	-1.15	0.49
4	-3.44	-2.88	1.29
5	-4.30	-3.61	1.54
6	-5.68	-2.58	1.87

7	-6.28	-6.99	0.18
8	0.52	0.47	4.37
9	0.26	0.25	5.61
10	0.14	0.10	5.18
11	0.12	0.03	3.44
12	0.73	0.50	3.36
13	0.54	0.17	3.61
14	0.54	0.21	4.11
15	1.18	0.63	6.39
16	1.18	0.66	7.49
17	1.19	0.69	8.67
18	1.20	0.72	9.52
19	1.21	0.74	-32.40
20	1.22	0.76	9.68
Promedio	-0.54	-0.58	2.19

Tabla 18: Reducciones de aceleración absoluta máxima del edificio de 20 pisos, usando las combinaciones "7 y 8", "6 y 7" y "15 y 19"

Se observa que, al igual que con los otros edificios, la combinación que no es parte del grupo de combinaciones con máxima traza es la que obtiene las reducciones más grandes en el caso con 2 AMDs, aumentando el promedio de reducción de drifts en un 6.89% y un 3.23% en el caso de las aceleraciones absolutas.

4.3. Northridge (1994)

4.3.1. Edificio de 3 pisos

Reducción del drift (%)			
	Piso 3	Piso 3	Pisos 1 y 2
Pisos	Con TMD	Con 1 AMD	Con 2 AMDs
1	1.31	6.40	0.96
2	5.41	9.70	2.38
3	10.36	10.11	3.92
Promedio	5.69	8.74	2.42

Tabla 19: Reducción porcentual del drift del edificio de 3 pisos, considerando combinación "1 y 2" para los 2 AMDs

Reducción de aceleración absoluta (%)			
	Piso 3	Piso 3	Pisos 1 y 2
Pisos	Con TMD	Con 1 AMD	Con 2 AMDs
1	-1.92	6.90	5.63
2	3.86	10.63	8.34
3	18.82	9.89	4.19
Promedio	6.92	9.14	6.05

Tabla 20: Reducción porcentual de aceleración absoluta del edificio de 3 pisos, considerando combinación "1 y 2" para los 2 AMDs

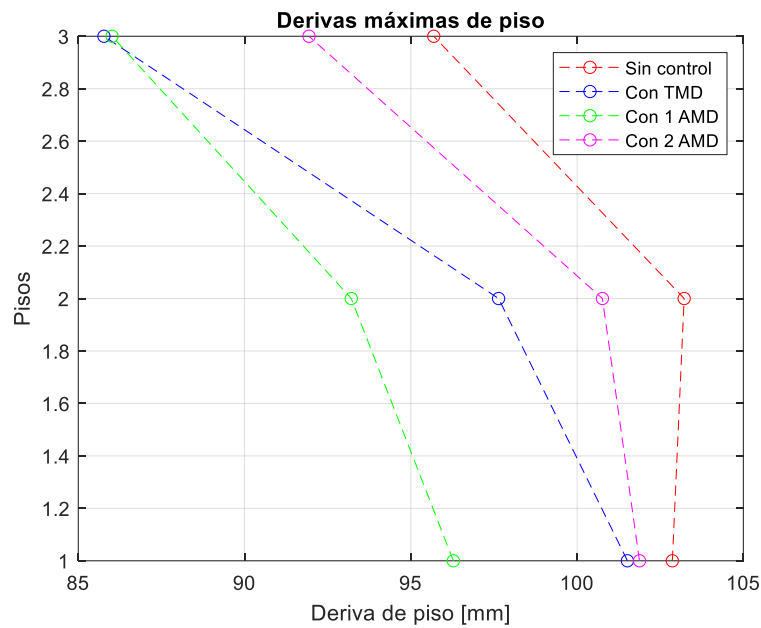


Gráfico 18: Derivas máximas de piso del edificio de 3 pisos, considerando combinación "1 y 2" para los 2 AMDs

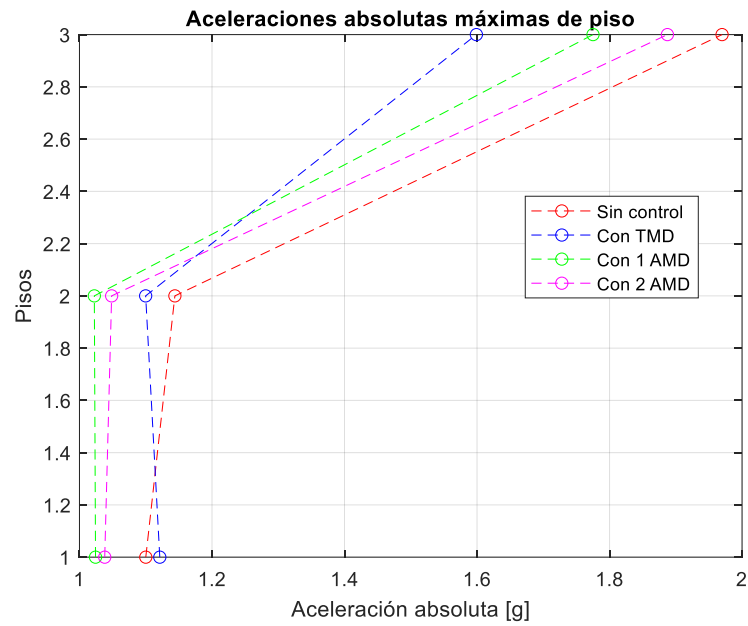


Gráfico 19: Aceleraciones absolutas máximas de piso del edificio de 3 pisos, considerando combinación "1 y 2" para los 2 AMDs

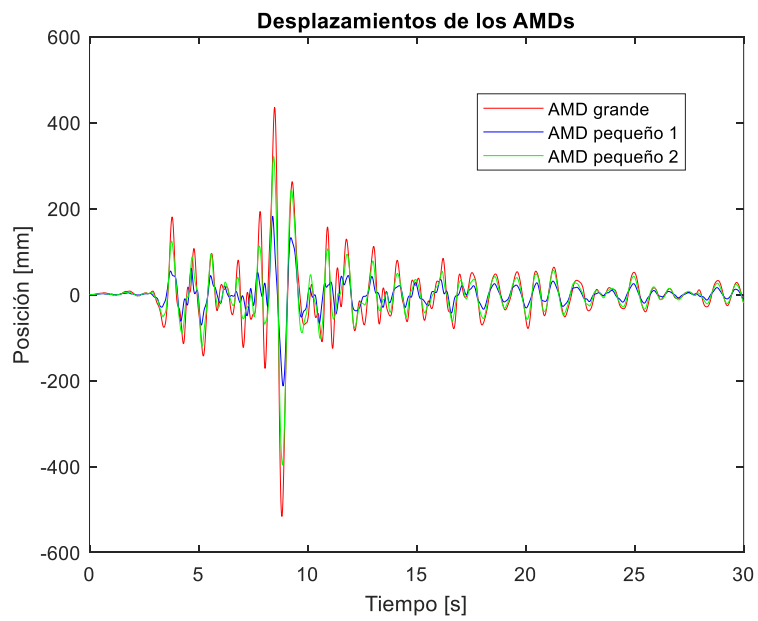


Gráfico 20: Desplazamientos de los AMDs en el edificio de 3 pisos

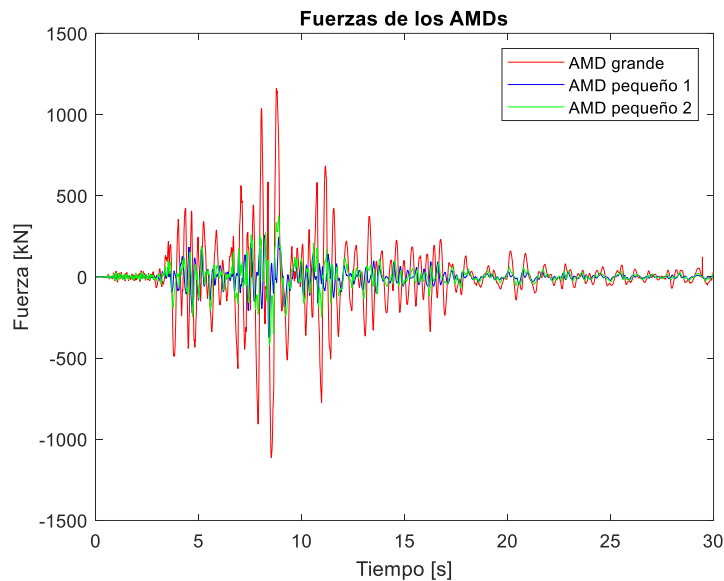


Gráfico 21: Fuerzas de los AMDs en el edificio de 3 pisos

A partir de las tablas y gráficos de reducciones se aprecia que, parecido al caso del terremoto de Concepción, las mayores reducciones las genera el AMD instalado en el último piso, tanto en drifts como en aceleraciones absolutas. Los desplazamientos de los AMDs se encuentran en el rango ± 0.6 metros, por lo que se cumple con el requisito de desplazamiento máximo. En el gráfico de fuerzas, se aprecia un peak que supera los 1000 [kN] en el caso de la masa grande, el cual coincide con el peak de aceleraciones del terremoto de Northridge y que ocurre cerca de los 8 segundos.

Al igual que en el caso del terremoto de Concepción, se analizan las otras dos combinaciones para comparar las reducciones en cada caso:

Reducción del drift (%)		
	Pisos 1 y 3	Pisos 2 y 3
Pisos	Con 2 AMD	Con 2 AMD
1	1.74	3.72
2	4.55	6.42
3	6.61	7.21
Promedio	4.30	5.79

Tabla 21: Reducción porcentual del drift del edificio de 3 pisos, considerando combinaciones "1 y 3" y "2 y 3"

Reducción de aceleración absoluta (%)		
	Pisos 1 y 3	Pisos 2 y 3
Pisos	Con 2 AMD	Con 2 AMD
1	8.96	5.06
2	8.59	9.77
3	5.71	6.28
Promedio	7.76	7.04

Tabla 22: Reducción porcentual de aceleración absoluta del edificio de 3 pisos, considerando combinaciones "1 y 3" y "2 y 3"

Se aprecia que entre los tres casos en donde se utilizan 2 AMDs, aquel que reduce más los drifts es la combinación “2 y 3”, mientras que la combinación “1 y 3” es la que mejor reduce las aceleraciones absolutas. Es decir, se vuelve a dar el caso de que la combinación con mayor traza del gramiano de control no es la que genera las máximas reducciones. A pesar de que las reducciones mejoran al cambiar las combinaciones de piso, estas no superan los resultados obtenidos con el caso de un AMD en el último piso.

4.3.2. Edificio de 9 pisos

Reducción del drift (%)			
	Piso 9	Piso 9	Pisos 2 y 3
Pisos	Con TMD	Con 1 AMD	Con 2 AMDs
1	3.44	10.33	1.33
2	5.01	8.19	5.83
3	5.53	8.70	4.11
4	4.98	10.00	4.72
5	4.95	15.87	3.83
6	6.36	25.64	2.92
7	8.78	31.73	2.23
8	12.37	23.60	1.92
9	18.92	-14.67	6.81
Promedio	7.81	13.27	3.75

Tabla 23: Reducción porcentual del drift del edificio de 9 pisos, considerando combinación "2 y 3" para los 2 AMDs

Reducción de aceleración absoluta (%)			
	Piso 9	Piso 9	Pisos 2 y 3
Pisos	Con TMD	Con 1 AMD	Con 2 AMDs
1	-0.75	-7.09	-19.75
2	-1.30	-13.25	-40.67
3	0.66	9.20	-54.28
4	-3.98	18.32	-5.74
5	-1.25	1.70	13.02
6	3.30	-0.79	9.09
7	-0.70	6.13	3.20
8	4.15	2.91	1.29
9	42.38	-7.11	7.06
Promedio	4.72	1.11	-9.64

Tabla 24: Reducción porcentual de aceleración absoluta del edificio de 9 pisos, considerando combinación "2 y 3" para los 2 AMDs

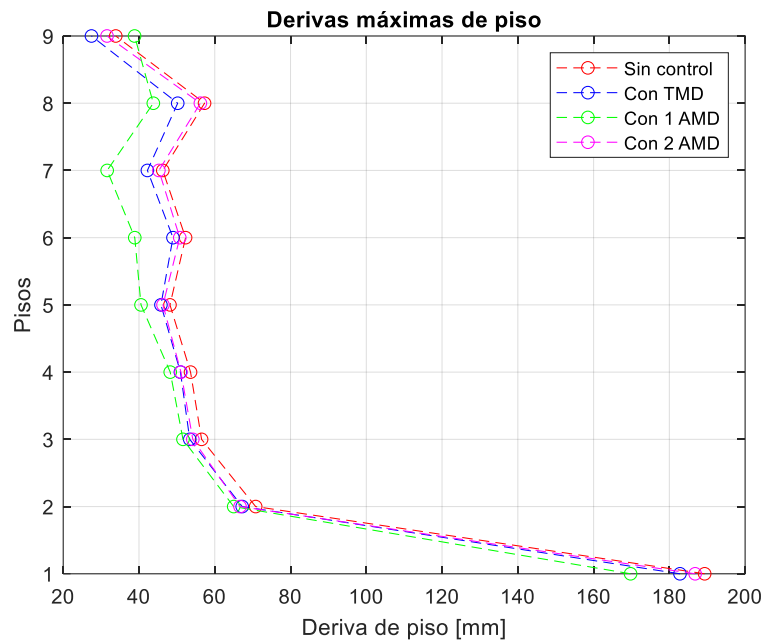


Gráfico 22: Derivas máximas de piso del edificio de 9 pisos, considerando combinación "2 y 3" para los 2 AMDs

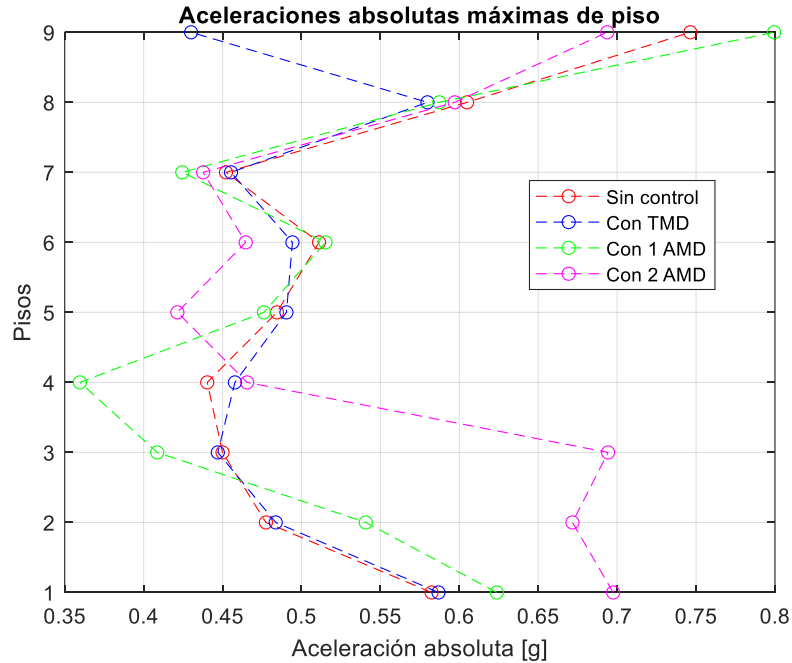


Gráfico 23: Aceleraciones absolutas máximas de piso del edificio de 9 pisos, considerando combinación "2 y 3" para los 2 AMDs

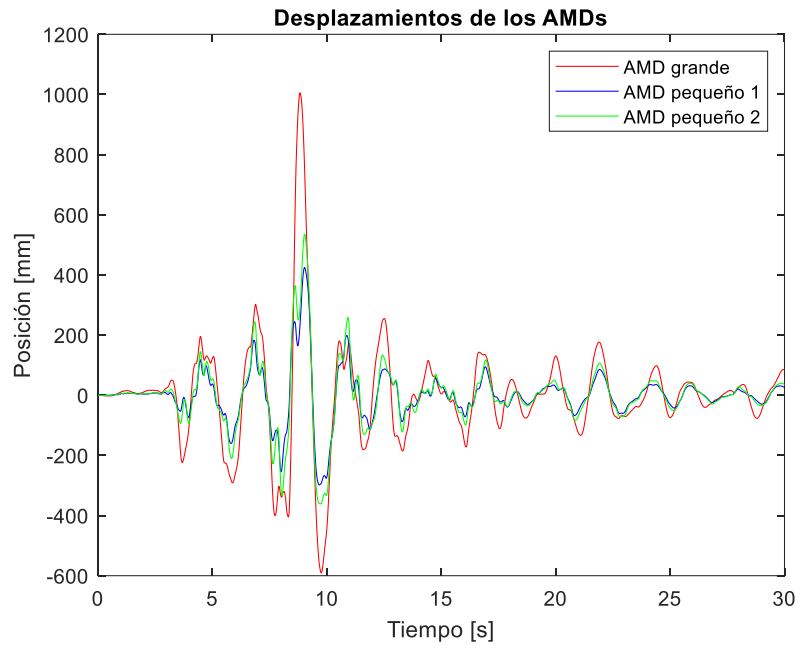


Gráfico 24: Desplazamientos de los AMDs en el edificio de 9 pisos

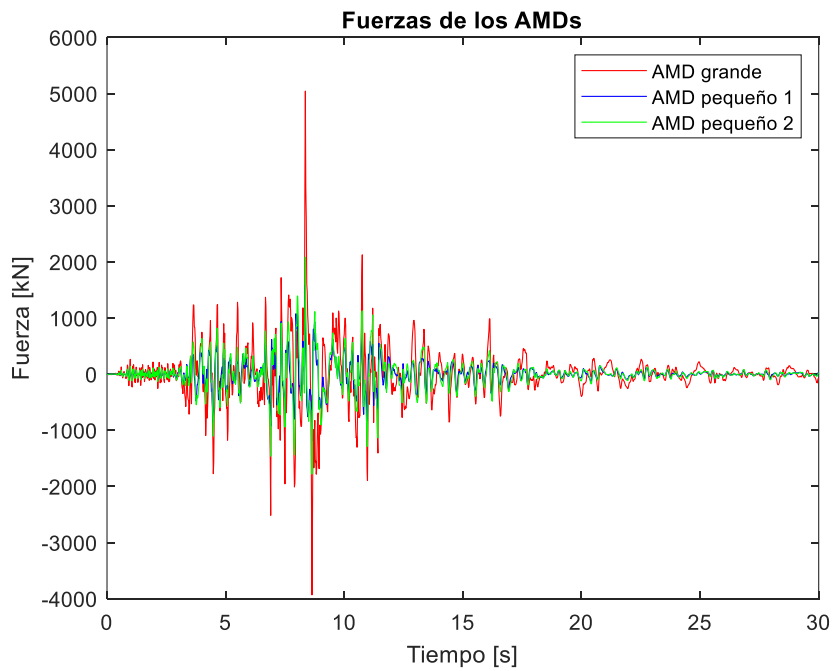


Gráfico 25: Fuerzas de los AMDs en el edificio de 9 pisos

Se aprecia que en este caso la máxima reducción promedio de los drifts de piso también se consigue a partir de 1 AMD en el último piso, mientras que la máxima reducción de aceleraciones absolutas se consigue con el TMD también en el último piso. En el gráfico de desplazamientos se distingue un peak del AMD grande

el cual supera el metro de distancia, con lo cual, no se cumple con el criterio de rango máximo de movimiento. Esto se puede arreglar recalibrando los valores de la matriz Q. En el caso de las fuerzas, se observa un peak de la masa grande que alcanza los 5000 [kN] y que ocurre al mismo tiempo que el peak de aceleración del terremoto de Northridge.

Se analizan las mismas combinaciones que para el caso del terremoto de Concepción (2010) para estudiar la efectividad del gramiano de control y encontrar la combinación que genere las máximas reducciones:

Reducción del drift (%)			
	Pisos 2 y 4	Pisos 3 y 4	Pisos 7 y 9
Pisos	Con 2 AMDs	Con 2 AMDs	Con 2 AMDs
1	3.25	3.75	6.21
2	5.67	6.10	5.18
3	5.47	7.07	3.45
4	0.39	4.55	5.18
5	5.42	7.71	12.61
6	5.43	7.22	16.73
7	3.87	4.57	17.19
8	0.65	-0.17	24.21
9	3.15	0.73	12.59
Promedio	3.70	4.61	11.48

Tabla 25: Reducción porcentual del drift del edificio de 9 pisos, considerando combinaciones "2 y 4", "3 y 4" y "7 y 9"

Reducción de aceleración absoluta (%)			
	Pisos 2 y 4	Pisos 3 y 4	Pisos 7 y 9
Pisos	Con 2 AMDs	Con 2 AMDs	Con 2 AMDs
1	-7.93	2.21	0.23
2	-27.91	-33.82	5.33
3	-22.36	-47.08	8.62
4	-52.09	-49.93	1.71
5	8.96	3.05	14.13
6	16.63	17.29	7.33
7	11.66	14.91	-48.06
8	3.62	4.32	8.91
9	10.60	8.22	21.32
Promedio	-6.53	-8.98	2.17

Tabla 26: Reducción porcentual de aceleración absoluta del edificio de 9 pisos, considerando combinaciones "2 y 4", "3 y 4" y "7 y 9"

De las tablas se aprecia un resultado parecido al caso del terremoto de Concepción, en donde las máximas reducciones tanto de drifts como de aceleraciones absolutas las consigue la combinación "7 y 9", llegando incluso a tener un mejor desempeño que el AMD al momento de reducir las aceleraciones absolutas.

4.3.3. Edificio de 20 pisos

Reducción del drift (%)			
	Piso 20	Piso 20	Pisos 6 y 8
Pisos	Con TMD	Con 1 AMD	Con 2 AMDs
1	-4.90	1.45	5.28
2	-5.14	2.39	3.81
3	-5.47	2.67	3.88
4	-5.75	1.54	6.26
5	-5.72	0.24	9.13
6	-5.22	-0.57	5.04
7	-4.49	-0.19	8.93
8	-3.61	0.66	4.56
9	-2.62	0.91	9.36
10	-2.03	-0.50	7.36
11	-2.13	-2.58	5.72
12	-3.63	-2.03	4.89
13	-6.10	5.41	4.46
14	-6.99	19.12	4.77
15	-5.49	27.30	5.56
16	-2.82	23.56	5.58
17	0.44	12.98	4.44
18	4.29	0.13	2.44
19	9.86	-14.57	0.31
20	25.19	-36.08	1.28
Promedio	-1.62	2.09	5.15

Tabla 27: Reducción porcentual del drift del edificio de 20 pisos, considerando combinación "6 y 8" para los 2 AMDs

Reducción de aceleración absoluta (%)			
	Piso 20	Piso 20	Pisos 6 y 8
Pisos	Con TMD	Con 1 AMD	Con 2 AMDs
1	0.44	-2.01	4.22
2	-0.06	-4.40	-0.39
3	0.01	-6.30	-21.75
4	0.05	-5.69	-33.26
5	-3.47	-10.73	-27.97
6	-4.62	-14.51	-25.19
7	-3.51	-13.97	-30.71
8	-2.10	-8.27	-38.52
9	-5.04	10.12	-0.28
10	-3.97	23.56	14.16
11	-0.90	18.18	17.99
12	4.00	2.12	11.78

13	-9.00	-18.91	-0.73
14	-6.44	-10.51	5.62
15	-1.49	-3.26	12.72
16	4.09	-36.04	17.50
17	-18.84	-43.58	10.78
18	-11.01	17.81	8.46
19	-6.91	12.77	2.12
20	54.37	-6.27	4.36
Promedio	-0.72	-4.99	-3.45

Tabla 28: Reducción porcentual de aceleración absoluta del edificio de 20 pisos, considerando combinación "6 y 8" para los 2 AMDs

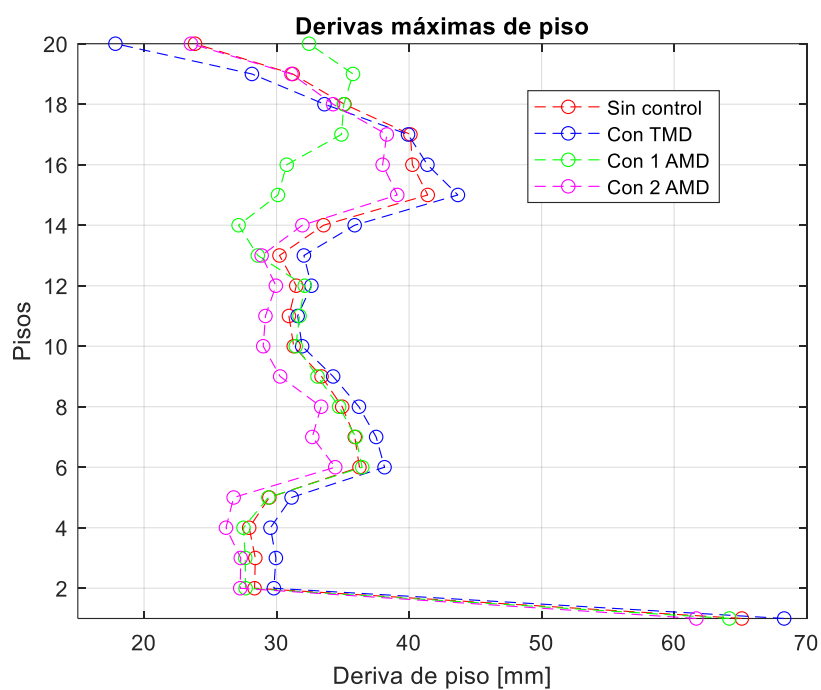


Gráfico 26: Derivas máximas de piso del edificio de 20 pisos, considerando combinación "6 y 8" para los 2 AMDs

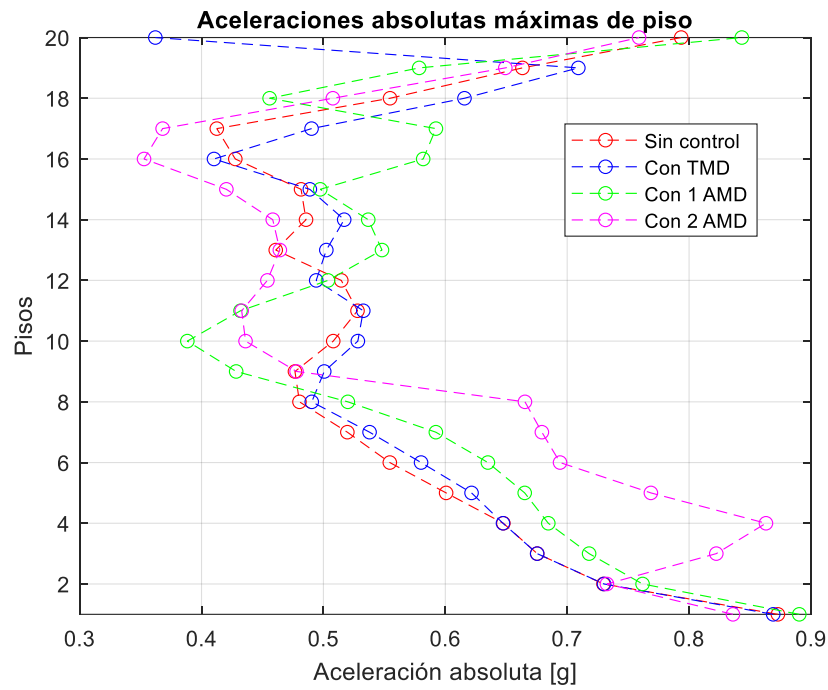


Gráfico 27: Aceleraciones absolutas máximas de piso del edificio de 20 pisos, considerando combinación "6 y 8" para los 2 AMDs

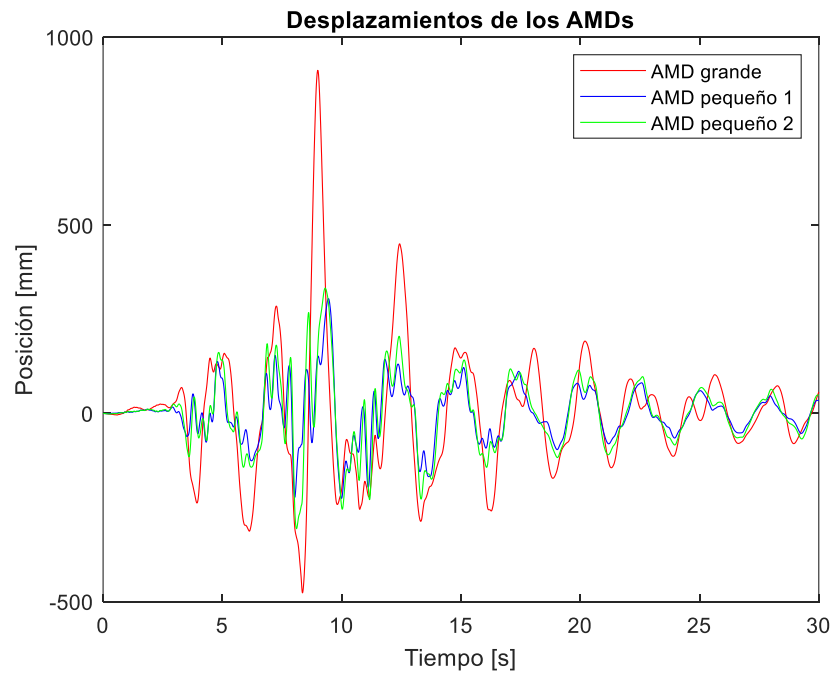


Gráfico 28: Desplazamientos de los AMDs en el edificio de 20 pisos

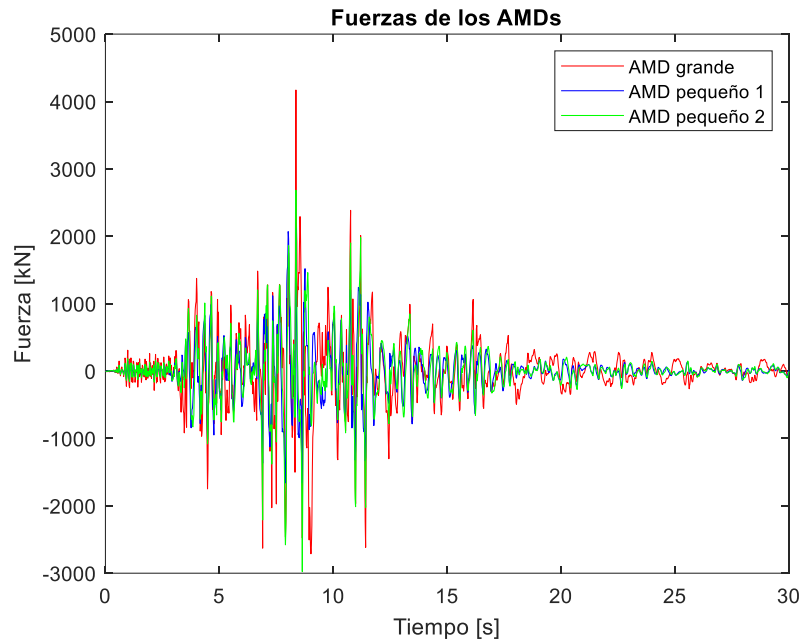


Gráfico 29: Fuerzas de los AMDs en el edificio de 20 pisos

Se aprecia en las tablas de reducciones que el caso con mayores reducciones de derivas de piso es el caso con 2 AMDs en los pisos 6 y 8. En el caso de las aceleraciones absolutas, ninguno de los 3 mecanismos logra reducir la respuesta promedio, sin embargo, el que tiene el mejor desempeño es el TMD en el último piso. Como se puede apreciar del gráfico de desplazamientos, el movimiento de todos los AMDs se encuentran en el rango de ± 1 metro, por lo que si se cumple con el criterio de movimiento máximo. En el gráfico de fuerzas se observan peaks de 4000 [kN] para el AMD grande y de 3000 [kN] en el segundo AMD pequeño. Ambos peaks de fuerza ocurren cercanos al momento de máxima aceleración del suelo. Para finalizar el análisis del edificio de 20 pisos, se simulan las mismas combinaciones que en el caso del terremoto de Concepción:

Reducción del drift (%)			
	Pisos 7 y 8	Pisos 6 y 7	Pisos 15 y 19
Pisos	Con 2 AMDs	Con 2 AMDs	Con 2 AMDs
1	8.78	3.55	-0.69
2	5.71	2.59	-1.20
3	4.25	3.85	-1.00
4	5.12	7.65	-0.23
5	9.33	10.11	1.06
6	9.26	2.98	2.44
7	2.42	5.99	3.82
8	5.43	10.15	5.08
9	9.43	8.24	6.30
10	6.96	6.46	6.58

11	5.08	5.24	5.01
12	4.48	4.69	3.97
13	4.44	4.20	5.34
14	4.85	4.16	3.43
15	5.52	4.77	7.84
16	5.20	4.97	19.14
17	3.52	4.32	19.69
18	0.84	3.10	22.74
19	-1.97	1.93	20.88
20	-1.57	3.73	25.56
Promedio	4.85	5.13	7.79

Tabla 29:Reducciones de drift máximo del edificio de 20 pisos, usando las combinaciones "7 y 8", "6 y 7" y "15 y 19"

Reducción de aceleración absoluta (%)			
	Pisos 7 y 8	Pisos 6 y 7	Pisos 15 y 19
Pisos	Con 2 AMDs	Con 2 AMDs	Con 2 AMDs
1	7.29	1.96	-5.40
2	6.46	-6.19	-9.67
3	-13.43	-32.02	-9.69
4	-35.91	-42.06	-6.69
5	-42.42	-28.62	-4.38
6	-20.49	-29.91	1.72
7	-42.84	-39.33	4.92
8	-48.33	-14.05	-2.51
9	-5.88	-0.97	-1.49
10	11.46	7.45	-1.14
11	14.24	11.33	0.96
12	7.97	13.91	9.45
13	-5.15	5.70	-3.95
14	1.63	8.49	-19.43
15	9.34	13.01	-60.70
16	14.19	16.73	-22.40
17	10.64	9.38	-24.79
18	8.41	7.05	17.88
19	0.52	2.81	6.87
20	1.54	6.66	25.58
Promedio	-6.04	-4.43	-5.24

Tabla 30:Reducciones de aceleración absoluta máxima del edificio de 20 pisos, usando las combinaciones "7 y 8", "6 y 7" y "15 y 19"

A partir de estas tablas se puede observar que la combinación de pisos “15 y 19” es la que provoca las máximas reducciones entre todos los casos analizados con 2 AMDs y, por ende, la que provoca las máximas reducciones de drifts entre todos los casos analizados en general. Sin embargo, al mismo tiempo es de las combinaciones que genera las más grandes amplificaciones de aceleración absoluta promedio, siendo solo superada por la combinación “7 y 8”. De todos los casos analizados, este ha sido el único en el que 2 AMDs posicionados en distintos pisos generan mayores reducciones que el caso con solo 1 AMD en el último piso.

5. Conclusiones

Se modelaron 3 estructuras benchmark de tipo corte utilizando el programa SAP2000 para obtener sus propiedades dinámicas. Estas propiedades fueron definidas en el software MATLAB junto a las propiedades de un amortiguador de masa pasivo con una razón de masa del 3% y 2 amortiguadores de masa activo distintos: uno con razón de masa del 2% y otro del 1%. Las propiedades de masa y amortiguamiento de los amortiguadores fueron calculadas a partir de las ecuaciones de Den Hartog, mientras que las otras propiedades de los AMDs fueron asumidas para el caso de estudio. Para escoger la combinación de amortiguadores “pequeños” a simular se calcula la traza del gramiano de todas las combinaciones posibles para finalmente utilizar aquella con mayor valor para el análisis. A partir de las ecuaciones de movimiento del edificio y de los amortiguadores se arman las matrices state-space de cada uno, como también de los sistemas acoplados (edificio + AMD) para luego definirlos en MATLAB. A partir de estas matrices state-space se modela la interacción sismo-estructura-amortiguador utilizando Simulink. Con los resultados de la simulación se procede a graficar las derivas y aceleraciones absolutas de piso máximas, como también el desplazamiento de los AMDs y las fuerzas que estos aplican sobre la estructura. También se tabularon los valores de reducciones de derivas y aceleraciones máximas y se calcularon sus promedios.

A partir de los gráficos y valores obtenidos, se puede concluir que un AMD de masa mucho menor que un TMD y posicionado en el mismo piso puede generar reducciones mucho mayores que el TMD tanto en las derivas de piso como en las aceleraciones absolutas, dependiendo de cómo se calibre el controlador que lo maneja. Más aun, si se compara el desempeño de 1 AMD en el último piso con el de 2 AMDs dispuestos de manera estratégica, con los resultados obtenidos se puede concluir que 1 AMD en el último piso es más eficiente para reducir las respuestas en los edificios. En el caso de estudio, se escogió la traza del Gramiano como regla principal para escoger las posiciones de los AMDs, sin embargo, los resultados demuestran que existen combinaciones que no tienen la mayor traza pero que si tienen un mejor desempeño en la estructura, con lo cual se concluye que este método no es el mejor para escoger el posicionamiento estratégico de los AMDs si lo que se busca es disminuir las respuestas del edificio (derivas y aceleraciones) a un máximo posible. Respecto al controlador usado en ambos AMDs, se puede observar de los gráficos de desplazamiento que en casi todos los casos analizados las masas se mueven en un rango de ± 1 metro a excepción del caso del edificio de 9 pisos, con lo que el controlador está bien calibrado para los edificios de 3 y 20 pisos y requiere una revisión particular para el caso de 9 pisos. Al ver los gráficos de fuerza aplicada por los amortiguadores, se puede observar casos en que estas rondan magnitudes que llegan hasta los 4500 kN aproximadamente, los cuales son valores considerablemente grandes para que solo 1 AMD los pueda alcanzar por sí solo. Esto se puede deber a que el controlador utilizado es muy pesado, más específicamente la matriz Q del control LQR, al darle mucha más importancia que al término R encargado de moderar la fuerza de control. A pesar de que los valores de fuerza son muy grandes y difíciles de conseguir a partir de solo 1 amortiguador, esto es solucionable a partir de un enfoque distinto: utilizar varias masas pequeñas en reemplazo de la masa grande, todas posicionadas en el mismo piso, tal y como hizo la empresa italiana ISAAC Antisísmica en la Policlínica de San Martino en Génova (Schellino Puccio G. , s.f.). De esta forma, se tienen varias masas que reciben la misma señal de control y generan su propia fuerza en la misma dirección, las cuales se suman para generar la fuerza deseada.

Referencias

- Braz-César, M., & Carneiro De Barros, R. (2013). *Passive Control Of Civil Engineering Structures*.
- Bruant, I., & Proslie, L. (2016). Optimal Location of Actuators and Sensors in Active Vibration Control. *Journal of Intelligent Material Systems and Structures*, 16(3), 197–206. <https://doi.org/10.1177/1045389X05047989>
- Chang, S. (2020). Active mass damper for reducing wind and earthquake vibrations of a long-period bridge. *Actuators*, 9(3). <https://doi.org/10.3390/ACT9030066>
- Dai, J., Yan, X., Xu, Z. D., Shi, Q. X., & Guo, Y. Q. (2024). Active control of earthquake-excited structure using a torsional servomotor active mass driver system. *Structures*, 61. <https://doi.org/10.1016/j.istruc.2024.106011>
- Den Hartog, J. P. (1947). *Mechanical Vibrations*.
- Heidingsfeld, M., Rapp, P., Böhm, M., & Sawodny, O. (2017). *Gramian-based Actuator Placement with Spillover Reduction for Active Damping of Adaptive Structures*. IEEE.
- Koutsoloukas, L., Nikitas, N., & Aristidou, P. (2022). Passive, semi-active, active and hybrid mass dampers: A literature review with associated applications on building-like structures. *Developments in the Built Environment*, 12. <https://doi.org/10.1016/j.dibe.2022.100094>
- Lee, C. L., & Wang, Y. P. (2004). Seismic structural control using an electric servomotor active mass driver system. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 33(6), 737–754. <https://doi.org/10.1002/eqe.373>
- Magliula, E. A., & Sallum, H. (2000). *Vibration Control of a Two Story Building using Active Mass Dampers*.
- Ohtori, Y., Christenson, R. E., Spencer, B. F., & Dyke, S. J. (2004). *Benchmark Control Problems for Seismically Excited Nonlinear Buildings*. <http://quiver.eerc.berkeley.edu:8080/>.
- Rebecchi, G., Calvi, P. M., Bussini, A., Dacarro, F., Bolognini, D., Grottoli, L., Rosti, M., Ripamonti, F., & Cii, S. (2022a). *ISAAC Paper publication-Structural team An active mass damper for seismic protection of structures 220204_R&D_PP_Active-Mass-Damper-for-Seismic-Protection-of-Structures Full-scale shake table tests of a reinforced concrete building equipped with a novel servo-hydraulic active mass damper*.
- Rebecchi, G., Calvi, P. M., Bussini, A., Dacarro, F., Bolognini, D., Grottoli, L., Rosti, M., Ripamonti, F., & Cii, S. (2022b). *ISAAC Paper publication-Structural team An active mass damper for seismic protection of structures 220204_R&D_PP_Active-Mass-Damper-for-Seismic-Protection-of-Structures Full-scale shake table tests of a reinforced concrete building equipped with a novel servo-hydraulic active mass damper*.
- Ripamonti, F., Bussini, A., & Resta, F. (2019). *Active self-tuned mass damper for vibration control and continuous monitoring of civil structures*. 96. <https://doi.org/10.1117/12.2511760>
- Soong, T. T. (1987). *STATE-OF-THE-ART REVIEW Active structural control in civil engineering*.
- Spencer Jr. B. F., & Nagarajaiah S. (2003). *State of the Art of Structural Control*.
- Symans, M. D., & Constantinou, M. C. (1999). Semi-active control systems for seismic protection of structures: a state-of-the-art review. In *Engineering Structures* (Vol. 21).
- Talib, E., Shin, J. H., & Kwak, M. K. (2019). Designing multi-input multi-output modal-space negative acceleration feedback control for vibration suppression of structures using active mass dampers. *Journal of Sound and Vibration*, 439, 77–98. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2018.09.052>
- Venanzi, I., Ierimonti, L., & Ubertini, F. (2017). Effects of control-structure interaction in active mass driver systems with electric torsional servomotor for seismic applications. *Bulletin of Earthquake Engineering*, 15(4), 1543–1557. <https://doi.org/10.1007/s10518-016-0021-6>

- Yamamoto, M., Aizawa, S., Higashino, M., & Toyama, K. (2001). Practical applications of active mass dampers with hydraulic actuator. *Earthquake Engineering and Structural Dynamics*, 30(11), 1697–1717. <https://doi.org/10.1002/eqe.88>
- Yang, D. H., Shin, J. H., Lee, H. W., Kim, S. K., & Kwak, M. K. (2017). Active vibration control of structure by Active Mass Damper and Multi-Modal Negative Acceleration Feedback control algorithm. *Journal of Sound and Vibration*, 392, 18–30. <https://doi.org/10.1016/j.jsv.2016.12.036>
- Yang, F., Sedaghati, R., & Esmailzadeh, E. (2015). Optimal design of distributed tuned mass dampers for passive vibration control of structures. *Structural Control and Health Monitoring*, 22(2), 221–236. <https://doi.org/10.1002/stc.1670>
- Yang, F., Sedaghati, R., & Esmailzadeh, E. (2022). Vibration suppression of structures using tuned mass damper technology: A state-of-the-art review. *JVC/Journal of Vibration and Control*, 28(7–8), 812–836. <https://doi.org/10.1177/1077546320984305>

A. Anexos

A.1. EDM del sistema aumentado con 1 AMD

Despejando la aceleración $\ddot{x}_0$ de la Ecuación (35):

$$(a) \ddot{x}_0(t) = -M_{aum1}^{-1} C_{aum} \dot{x}_0(t) - M_{aum1}^{-1} K x_0(t) - M_{aum1}^{-1} (M\Gamma + m_A r_A) \ddot{x}_g(t) - M_{aum1}^{-1} m_A r_A \ddot{x}_A(t)$$

Despejando la aceleración $\ddot{x}_A$ de la Ecuación (38):

$$(b) \ddot{x}_A(t) = -\frac{c_A}{J} \dot{x}_A(t) - \frac{k_T k_P}{J} \bar{x}_A(t) + \frac{k_T k_P}{J} \bar{x}_C(t) - \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2 J} a_{abs-piso0}(t)$$

Reemplazando (b) en (a):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0(t) &= -M_{aum1}^{-1} C_{aum} \dot{x}_0(t) - M_{aum1}^{-1} K x_0(t) - M_{aum1}^{-1} (M\Gamma + m_A r_A) \ddot{x}_g(t) \\ &\quad - M_{aum1}^{-1} m_A r_A \left[-\frac{c_A}{J} \dot{x}_A - \frac{k_T k_P}{J} \bar{x}_A(t) + \frac{k_T k_P}{J} \bar{x}_C(t) - \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2 J} (r_A^T \ddot{x}_0(t) + \ddot{x}_g(t)) \right] \\ \ddot{x}_0(t) &\left[I - M_{aum1}^{-1} \frac{m_A^2 l_A^2}{4\pi^2 J} r_A r_A^T \right] \\ &= -M_{aum1}^{-1} C_{aum} \dot{x}_0(t) - M_{aum1}^{-1} K x_0(t) + M_{aum1}^{-1} m_A r_A \frac{c_A}{J} \dot{x}_A + M_{aum1}^{-1} m_A r_A \frac{k_T k_P}{J} \bar{x}_A(t) \\ &\quad - M_{aum1}^{-1} m_A r_A \frac{k_T k_P}{J} \bar{x}_C(t) + M_{aum1}^{-1} \left[\frac{m_A^2 l_A^2}{4\pi^2 J} - (M\Gamma + m_A r_A) \right] \ddot{x}_g(t) \end{aligned}$$

Haciendo el reemplazo $H_A = I - M_{aum1}^{-1} \frac{m_A^2 l_A^2}{4\pi^2 J} r_A r_A^T$:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0(t) &= -H_A^{-1} M_{aum1}^{-1} C_{aum} \dot{x}_0(t) - H_A^{-1} M_{aum1}^{-1} K x_0(t) + H_A^{-1} M_{aum1}^{-1} m_A r_A \frac{c_A}{J} \dot{x}_A \\ &\quad + H_A^{-1} M_{aum1}^{-1} m_A r_A \frac{k_T k_P}{J} \bar{x}_A(t) - H_A^{-1} M_{aum1}^{-1} m_A r_A \frac{k_T k_P}{J} \bar{x}_C(t) \\ &\quad + H_A^{-1} M_{aum1}^{-1} \left[\frac{m_A l_A^2}{4\pi^2 J} - (M\Gamma + m_A r_A) \right] \ddot{x}_g(t) \end{aligned}$$

Definiendo $\bar{H}_A = H_A^{-1} M_{aum_1}^{-1}$:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_0(t) = & -\bar{H}_A C_{aum} \dot{x}_0(t) - \bar{H}_A K x_0(t) + \bar{H}_A m_A r_A \frac{c_A}{\bar{J}} \dot{x}_A + \bar{H}_A m_A r_A \frac{k_T k_P}{\bar{J}} \bar{x}_A(t) - \bar{H}_A m_A r_A \frac{k_T k_P}{\bar{J}} \bar{x}_C(t) \\ & + \bar{H}_A \left[\frac{m_A^2 l_A^2}{4\pi^2 \bar{J}} - (M\Gamma + m_A r_A) \right] \ddot{x}_g(t) \end{aligned}$$

Luego, reemplazando (a) en (b):

$$\begin{aligned} \ddot{x}_A(t) = & -\frac{c_A}{\bar{J}} \dot{x}_A(t) - \frac{k_T k_P}{\bar{J}} \bar{x}_A(t) + \frac{k_T k_P}{\bar{J}} \bar{x}_C(t) - \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2 \bar{J}} (r_A^T \ddot{x}_0(t) + \ddot{x}_g(t)) \\ \ddot{x}_A(t) = & -\frac{c_A}{\bar{J}} \dot{x}_A(t) - \frac{k_T k_P}{\bar{J}} \bar{x}_A(t) + \frac{k_T k_P}{\bar{J}} \bar{x}_C(t) \\ & - \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2 \bar{J}} \{ r_A^T [-M_{aum_1}^{-1} C_{aum} \dot{x}_0(t) - M_{aum_1}^{-1} K x_0(t) - M_{aum_1}^{-1} (M\Gamma + m_A r_A) \ddot{x}_g(t)] \\ & + \ddot{x}_g(t) \} \\ \ddot{x}_A(t) \left(1 - \frac{m_A^2 l_A^2}{4\pi^2 \bar{J}} r_A^T M_{aum_1}^{-1} r_A \right) = & -\frac{c_A}{\bar{J}} \dot{x}_A(t) - \frac{k_T k_P}{\bar{J}} \bar{x}_A(t) + \frac{k_T k_P}{\bar{J}} \bar{x}_C(t) + \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2 \bar{J}} r_A^T M_{aum_1}^{-1} C_{aum} \dot{x}_0(t) \\ & + \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2 \bar{J}} r_A^T M_{aum_1}^{-1} K x_0(t) + \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2 \bar{J}} [r_A^T M_{aum_1}^{-1} (M\Gamma + m_A r_A) - 1] \ddot{x}_g(t) \end{aligned}$$

Como $[r_A^T M_{aum_1}^{-1} (M\Gamma + m_A r_A) - 1] = 0$ y haciendo el reemplazo $h_A = 1 - \frac{m_A^2 l_A^2}{4\pi^2 \bar{J}} r_A^T M_{aum_1}^{-1} r_A$, se obtiene lo siguiente:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_A(t) = & -\frac{c_A}{\bar{J} h_A} \dot{x}_A(t) - \frac{k_T k_P}{\bar{J} h_A} \bar{x}_A(t) + \frac{k_T k_P}{\bar{J} h_A} \bar{x}_C(t) + \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2 \bar{J} h_A} r_A^T M_{aum_1}^{-1} C_{aum} \dot{x}_0(t) \\ & + \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2 \bar{J} h_A} r_A^T M_{aum_1}^{-1} K x_0(t) \end{aligned}$$

Finalmente, definiendo $\bar{h}_A = \bar{J} h_A$:

$$\begin{aligned} \ddot{x}_A(t) = & -\frac{c_A}{\bar{h}_A} \dot{x}_A(t) - \frac{k_T k_P}{\bar{h}_A} \bar{x}_A(t) + \frac{k_T k_P}{\bar{h}_A} \bar{x}_C(t) + \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2 \bar{h}_A} r_A^T M_{aum_1}^{-1} C_{aum} \dot{x}_0(t) \\ & + \frac{m_A l_A^2}{4\pi^2 \bar{h}_A} r_A^T M_{aum_1}^{-1} K x_0(t) \end{aligned}$$

A.2. EDM del sistema aumentado con 2 AMDs

Despejando la aceleración $\ddot{x}_0$ de la Ecuación (47):

(c)

$$\ddot{x}_0(t) = -M_{aum_2}^{-1}C_{aum_2}\dot{x}_0(t) - M_{aum_2}^{-1}Kx_0(t) - M_{aum_2}^{-1}(M\Gamma + m_ar_{a1} + m_ar_{a2})\ddot{x}_g(t) \\ - M_{aum_2}^{-1}m_ar_{a1}\ddot{x}_{a1}(t) - M_{aum_2}^{-1}m_ar_{a2}\ddot{x}_{a2}(t)$$

Despejando las aceleraciones $\ddot{x}_{a1}$ y $\ddot{x}_{a2}$ de las Ecuaciones (48) y (49):

$$(d) \ddot{x}_{a1}(t) = -\frac{c_a}{j}\dot{x}_{a1}(t) - \frac{k_t k_p}{j}\bar{x}_{a1}(t) + \frac{k_t k_p}{j}\bar{x}_{c1}(t) - \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 j}a_{abs-piso1}(t)$$

$$(e) \ddot{x}_{a2}(t) = -\frac{c_a}{j}\dot{x}_{a2}(t) - \frac{k_t k_p}{j}\bar{x}_{a2}(t) + \frac{k_t k_p}{j}\bar{x}_{c2}(t) - \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 j}a_{abs-piso2}(t)$$

Reemplazando (d) y (e) en (c):

$$\ddot{x}_0(t) = -M_{aum_2}^{-1}C_{aum_2}\dot{x}_0(t) - M_{aum_2}^{-1}Kx_0(t) - M_{aum_2}^{-1}(M\Gamma + m_ar_{a1} + m_ar_{a2})\ddot{x}_g(t) \\ - M_{aum_2}^{-1}m_ar_{a1}\left[-\frac{c_a}{j}\dot{x}_{a1}(t) - \frac{k_t k_p}{j}\bar{x}_{a1}(t) + \frac{k_t k_p}{j}\bar{x}_{c1}(t) - \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 j}(r_{a1}^T\ddot{x}_0(t) + \ddot{x}_g(t))\right] \\ - M_{aum_2}^{-1}m_ar_{a2}\left[-\frac{c_a}{j}\dot{x}_{a2}(t) - \frac{k_t k_p}{j}\bar{x}_{a2}(t) + \frac{k_t k_p}{j}\bar{x}_{c2}(t) - \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 j}(r_{a2}^T\ddot{x}_0(t) + \ddot{x}_g(t))\right] \\ \ddot{x}_0(t)\left[I - M_{aum_2}^{-1}\frac{m_a^2 l_a^2}{4\pi^2 j}(r_{a1}r_{a1}^T + r_{a2}r_{a2}^T)\right] \\ = -M_{aum_2}^{-1}C_{aum_2}\dot{x}_0(t) - M_{aum_2}^{-1}Kx_0(t) - M_{aum_2}^{-1}(M\Gamma + m_ar_{a1} + m_ar_{a2})\ddot{x}_g(t) \\ + M_{aum_2}^{-1}m_ar_{a1}\frac{c_a}{j}\dot{x}_{a1}(t) + M_{aum_2}^{-1}m_ar_{a1}\frac{k_t k_p}{j}\bar{x}_{a1}(t) - M_{aum_2}^{-1}m_ar_{a1}\frac{k_t k_p}{j}\bar{x}_{c1}(t) \\ + M_{aum_2}^{-1}\frac{m_a^2 l_a^2}{4\pi^2 j}r_{a1}\ddot{x}_g(t) + M_{aum_2}^{-1}m_ar_{a2}\frac{c_a}{j}\dot{x}_{a2}(t) + M_{aum_2}^{-1}m_ar_{a2}\frac{k_t k_p}{j}\bar{x}_{a2}(t) \\ - M_{aum_2}^{-1}m_ar_{a2}\frac{k_t k_p}{j}\bar{x}_{c2}(t) + M_{aum_2}^{-1}\frac{m_a^2 l_a^2}{4\pi^2 j}r_{a2}\ddot{x}_g(t)$$

Haciendo el reemplazo $H_a = \left[I - M_{aum_2}^{-1}\frac{m_a^2 l_a^2}{4\pi^2 j}(r_{a1}r_{a1}^T + r_{a2}r_{a2}^T)\right]$:

$$\ddot{x}_0(t) = -H_a^{-1}M_{aum_2}^{-1}C_{aum_2}\dot{x}_0(t) - H_a^{-1}M_{aum_2}^{-1}Kx_0(t) + H_a^{-1}M_{aum_2}^{-1}m_ar_{a1}\frac{c_a}{j}\dot{x}_{a1}(t) \\ + H_a^{-1}M_{aum_2}^{-1}m_ar_{a1}\frac{k_t k_p}{j}\bar{x}_{a1}(t) - H_a^{-1}M_{aum_2}^{-1}m_ar_{a1}\frac{k_t k_p}{j}\bar{x}_{c1}(t) \\ + H_a^{-1}M_{aum_2}^{-1}m_ar_{a2}\frac{c_a}{j}\dot{x}_{a2}(t) + H_a^{-1}M_{aum_2}^{-1}m_ar_{a2}\frac{k_t k_p}{j}\bar{x}_{a2}(t) \\ - H_a^{-1}M_{aum_2}^{-1}m_ar_{a2}\frac{k_t k_p}{j}\bar{x}_{c2}(t) + H_a^{-1}M_{aum_2}^{-1}\left[M\Gamma + \left(m_a - \frac{m_a^2 l_a^2}{4\pi^2 j}\right)(r_{a1} + r_{a2})\right]\ddot{x}_g(t)$$

Definiendo $\bar{H}_a = H_a^{-1} M_{aum2}^{-1}$:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_0(t) = & -\bar{H}_a C_{aum2} \dot{x}_0(t) - \bar{H}_a K x_0(t) + \bar{H}_a m_a r_{a1} \frac{c_a}{j} \dot{x}_{a1}(t) + \bar{H}_a m_a r_{a1} \frac{k_t k_p}{j} \bar{x}_{a1}(t) \\ & - \bar{H}_a m_a r_{a1} \frac{k_t k_p}{j} \bar{x}_{c1}(t) + \bar{H}_a m_a r_{a2} \frac{c_a}{j} \dot{x}_{a2}(t) + \bar{H}_a m_a r_{a2} \frac{k_t k_p}{j} \bar{x}_{a2}(t) \\ & - \bar{H}_a m_a r_{a2} \frac{k_t k_p}{j} \bar{x}_{c2}(t) + \bar{H}_a \left[M\Gamma + \left(m_a - \frac{m_a^2 l_a^2}{4\pi^2 j} \right) (r_{a1} + r_{a2}) \right] \ddot{x}_g(t)\end{aligned}$$

Luego, reemplazando (c) en (d):

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{a1}(t) = & -\frac{c_a}{j} \dot{x}_{a1}(t) - \frac{k_t k_p}{j} \bar{x}_{a1}(t) + \frac{k_t k_p}{j} \bar{x}_{c1}(t) \\ & - \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 j} \{ r_{a1}^T [-M_{aum2}^{-1} C_{aum2} \dot{x}_0(t) - M_{aum2}^{-1} K x_0(t) - M_{aum2}^{-1} (M\Gamma + m_a r_{a1} \\ & + m_a r_{a2}) \ddot{x}_g(t) - M_{aum2}^{-1} m_a r_{a1} \ddot{x}_{a1}(t) - M_{aum2}^{-1} m_a r_{a2} \ddot{x}_{a2}(t)] + \ddot{x}_g(t) \}\end{aligned}$$

Asumiendo que un AMD no influye en el otro, el término $M_{aum2}^{-1} m_a r_{a2} \ddot{x}_{a2}(t)$ se hace 0, luego:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{a1}(t) \left(1 - \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 j} r_{a1}^T M_{aum2}^{-1} r_{a1} \right) \\ = & -\frac{c_a}{j} \dot{x}_{a1}(t) - \frac{k_t k_p}{j} \bar{x}_{a1}(t) + \frac{k_t k_p}{j} \bar{x}_{c1}(t) + \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 j} r_{a1}^T M_{aum2}^{-1} C_{aum2} \dot{x}_0(t) \\ & + \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 j} r_{a1}^T M_{aum2}^{-1} K x_0(t) + \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 j} [r_{a1}^T M_{aum2}^{-1} (M\Gamma + m_a r_{a1} + m_a r_{a2}) - 1] \ddot{x}_g(t)\end{aligned}$$

Como $[r_{a1}^T M_{aum2}^{-1} (M\Gamma + m_a r_{a1} + m_a r_{a2}) - 1] = 0$ y definiendo $h_{a1} = 1 - \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 j} r_{a1}^T M_{aum2}^{-1} r_{a1}$:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{a1}(t) = & -\frac{c_a}{j h_{a1}} \dot{x}_{a1}(t) - \frac{k_t k_p}{j h_{a1}} \bar{x}_{a1}(t) + \frac{k_t k_p}{j h_{a1}} \bar{x}_{c1}(t) + \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 j h_{a1}} r_{a1}^T M_{aum2}^{-1} C_{aum2} \dot{x}_0(t) \\ & + \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 j h_{a1}} r_{a1}^T M_{aum2}^{-1} K x_0(t)\end{aligned}$$

Definiendo $\bar{h}_{a1} = j h_{a1}$:

$$\begin{aligned}\ddot{x}_{a1}(t) = & -\frac{c_a}{\bar{h}_{a1}} \dot{x}_{a1}(t) - \frac{k_t k_p}{\bar{h}_{a1}} \bar{x}_{a1}(t) + \frac{k_t k_p}{\bar{h}_{a1}} \bar{x}_{c1}(t) + \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 \bar{h}_{a1}} r_{a1}^T M_{aum2}^{-1} C_{aum2} \dot{x}_0(t) \\ & + \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 \bar{h}_{a1}} r_{a1}^T M_{aum2}^{-1} K x_0(t)\end{aligned}$$

Finalmente, realizando el mismo procedimiento con la Ecuación (e):

$$\ddot{x}_{a2}(t) = -\frac{c_a}{\bar{h}_{a2}}\dot{x}_{a2}(t) - \frac{k_t k_p}{\bar{h}_{a2}}\bar{x}_{a2}(t) + \frac{k_t k_p}{\bar{h}_{a2}}\bar{x}_{c2}(t) + \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 \bar{h}_{a2}}r_{a2}^T M_{aum2}^{-1} C_{aum2} \dot{x}_0(t) \\ + \frac{m_a l_a^2}{4\pi^2 \bar{h}_{a2}}r_{a2}^T M_{aum2}^{-1} K x_0(t)$$

A.3. Propiedades de los edificios benchmark

Estructura de 3 pisos:

NOTES	
Beams (248 MPa):	
beam sizes as indicated in figure.	
Columns (345 MPa):	
column sizes same throughout elevation.	
Restraints:	
columns fixed at base;	
Connections:	
→ indicates a moment resisting connection;	
— indicates a simple (hinged) connection.	
Dimensions:	
all measurements are center line;	
floor-to-floor heights	3.96 m (13'-0");
bay widths (all)	9.15 m (30'-0").
Seismic Mass:	
including steel framing, for both N-S MRFs;	
1st–2nd levels	9.57×10 ⁵ kg;
3rd level	1.04×10 ⁶ kg;
entire structure	2.95×10 ⁶ kg.

Estructura de 9 pisos

NOTES	
Beams (248 MPa):	
Ground– 2nd level	W36x160;
3rd – 6th level	W36x135;
7th level	W30x99;
8th level	W27x84;
9th level	W24x68.
Columns (345 MPa):	
column sizes change at splices	
corner columns and interior columns the same,	
respectively, throughout elevation;	
Restraints:	
columns pinned at base;	
structure laterally restrained at 1st level.	
Splices:	
denoted with ‡;	
are at 1.83 m (6 ft) w.r.t. beam-to-column joint	
Connections:	
→ indicates a moment resisting connection.	
— indicates a simple (hinged) connection.	
Dimensions:	
all measurements are center line;	
basement level height	3.65 m (12'-0");
Ground level height	5.49 m (18'-0");
1st – 8th level heights	3.96 m (13'-0");
bay widths (all)	9.15 m (30'-0").
Seismic Mass:	
including steel framing, for both N-S MRFs;	
Ground level	9.65×10 ⁵ kg;
1st level	1.01×10 ⁶ kg;
2nd – 8th level	9.89×10 ⁵ kg;
9th level	1.07×10 ⁶ kg;
entire structure (above ground)	9.00×10 ⁶ kg.

Estructura de 20 pisos

NOTES	
Beams (248 MPa):	
B-2 – 4th level	W30x99;
5th – 10th level	W30x108;
11th – 16th level	W30x99;
17th – 18th level	W27x84;
19th level	W24x62;
20th level	W21x50.
Columns (345 MPa):	
column sizes change at splices	
corner columns and interior columns the same, respectively, throughout elevation;	
box columns are ASTM A500 (15x15 indicates a 0.38 m (15 in) square box column with wall thickness of t).	
Restrains:	
columns pinned at base;	
structure laterally restrained at Ground level.	
Splices:	
denoted with $\pm$;	
are at 1.83 m (6 ft) w.r.t. beam-to-column joint	
Connections:	
→ indicates a moment resisting connection,	
– – indicates a simple (hinged) connection.	
Dimensions:	
all measurements are center line;	
basement level heights	3.65 m (12'-0");
Ground level height	5.49 m (18'-0");
1st– 19th level heights	3.96 m (13'-0");
bay widths (all)	6.10 m (20'-0").
Seismic Mass:	
including steel framing, for both N-S MRFs;	
Ground level	5.32×10^5 kg;
1st level	5.63×10^5 kg;
2nd –19th level	5.52×10^5 kg;
20th level	5.84×10^5 kg.
entire structure (above ground)	
1.11×10^7 kg.	

A.4. Matrices de masa y rigidez de cada estructura

Estructura de 3 pisos:

$$M = \begin{bmatrix} 478500 & 0 & 0 \\ 0 & 478500 & 0 \\ 0 & 0 & 520000 \end{bmatrix} \text{ kg} ; K = 10^8 \begin{bmatrix} 2.84 & -1.39 & 0 \\ -1.39 & 2.45 & -1.06 \\ 0 & -1.06 & 1.06 \end{bmatrix} \text{ N/m}$$

Estructura de 9 pisos:

$$M = 10^5 \begin{bmatrix} 5.05 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4.945 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4.945 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4.945 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4.945 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.945 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.945 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 4.945 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5.35 \end{bmatrix} \text{ kg}$$

$$K = 10^8 \begin{bmatrix} 2.746 & -1.962 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -1.962 & 4.198 & -2.236 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -2.236 & 4.394 & -2.158 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2.158 & 4.453 & -2.295 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2.295 & 4.306 & -2.011 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2.011 & 3.973 & -1.962 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.962 & 3.139 & -1.177 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.177 & 2.305 & -1.128 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1.128 & 1.128 \end{bmatrix} \frac{N}{m}$$