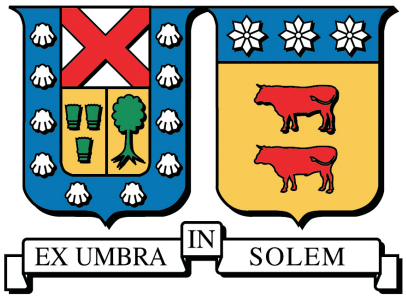
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE OBRAS CIVILES
VALPARAÍSO - CHILE



USO DEL SISTEMA GLOBAL DE NAVEGACIÓN POR SATÉLITE (GNSS) PARA EL MONITOREO DE DEFORMACIONES EN TRANQUES DE RELAVES

Memoria de Titulación presentada por:
VALERIA PATRICIA PONCE CANALES

Como requisito parcial para optar al título de:
Ingeniero Civil

Profesor Guía
Gonzalo Suazo Fuentealba

Octubre de 2019

Agradecimientos

Agradezco a mi madre, Elizabeth, por su constante preocupación y apoyo incondicional, a mi padre Mario, por facilitarme las herramientas que fueron imprescindibles, y a Francis, por su ayuda y paciencia durante esta larga etapa.

A Javier, quien ha sido mi compañero y fundamento durante esta última década.

A mis amigos, por su compañía, apoyo y enseñanzas durante los diversos momentos que compartimos; sobre todo a Evelyn, Lorenzo, Francisco, José Miguel, Claudio, Diego, Cristian, José y Matías.

Al profesor Gonzalo y a Víctor, por darme esta oportunidad y entregar la ayuda y confianza que fueron esenciales para realizar este trabajo.

A Eleazar, cuya ayuda desinteresada contribuyó a la comprensión y al desarrollo de este tema.

Finalmente, agradezco a los memoristas del laboratorio, por hacer más ameno este periodo.

Resumen

Debido a la gran producción creciente de relaves en Chile, existe en la actualidad la necesidad de realizar un manejo eficaz de estos residuos, minimizando su impacto al medio ambiente y reduciendo los riesgos asociados a fallas catastróficas. La identificación temprana de posibles deslizamientos o deformaciones de muros principales en tranques de relaves requiere de un monitoreo continuo y con un alto nivel de precisión.

En este contexto, la implementación de varios receptores GNSS permite la determinación de coordenadas con una alta precisión y resolución temporal. Sin embargo, el precio de los receptores clásicos de alta precisión (o "geodésicos") es bastante elevado, lo que limita el número de puntos a monitorear en tranques con extensiones kilométricas y en particular en la pequeña y mediana minería nacional. Afortunadamente, mediante ciertas técnicas es posible alcanzar la precisión del centímetro con receptores de bajo costo, lo que permite, eventualmente, el desarrollo de una red de receptores GNSS en tranques de relaves.

En este trabajo se evalúa la factibilidad del uso de receptores GNSS de bajo costo en el monitoreo de desplazamientos. Se seleccionan sensores marca *u-blox* modelo NEO-M8P, los cuales son puestos a prueba mediante el posicionamiento RTK. Esta técnica consiste en el uso de un receptor base, el cual envía sus datos de navegación a los receptores móviles o *rovers* y éstos calculan su posición mediante la técnica de diferencia doble de medidas de fase portadora. Se realizan pruebas, tanto con el receptor estático como en movimiento, comprobando la capacidad que tienen de obtener niveles de precisión del orden del centímetro en las mediciones de posicionamiento, siempre y cuando se resuelvan las ambigüedades como número entero.

Por otro lado, para probar el nivel de exactitud de las mediciones absolutas de estos receptores, se comparan éstas con las de un receptor geodésico marca *Trimble* modelo R9s, resultando una diferencia del orden de un par de metros entre la distancia "real" y la "calculada" por estos receptores. Con el fin de mejorar el nivel de exactitud en las coordenadas de la estación o receptor base, se utiliza el método PPP en postproceso, gracias al servicio gratuito del *Natural Resources Canada*.

Finalmente, se desarrolla un prototipo basándose en el receptor de bajo costo NEO-M8P, capaz de funcionar de manera autónoma, utilizando energía solar, lo cual permitirá implementar una red de sensores en un talud y así monitorear los desplazamientos y deformaciones que se producen.

Acrónimos

CDMA	:	Code Division Multiple Access
CEP	:	Circular Error Pobable
CTRS	:	Conventional Terrestrial Reference System
DOP	:	Dilution Of Precision
DRMS	:	Distance Root Mean Square
ECEF	:	Earth-Centered, Earth-Fixed
ECI	:	Earth-Centered Inertial
ENU	:	East, North, Up
FARA	:	Fast Ambiguity Resolution Approach
FASF	:	Fast Ambiguity Search Filter
GDOP	:	Geometric Dilution Of Precision
GLONASS	:	GLObal'naya NAvigatsionnaya Sputnikovaya Sistema
GNSS	:	Global Navigation Satellite System
GPS	:	Global Positioning System
GPST	:	GPS Time
GRS	:	Geodetic Reference System
HDOP	:	Horizontal Dilution Of Precision
ISA	:	Industry Standard Architecture
IERS	:	International Earth Rotation and Reference Systems Service
ITRF	:	International Terrestrial Reference Frame
ITRS	:	International Terrestrial Reference System
LAMBDA	:	Least-square AMBiguity Decorrelation Adjustment
LTP	:	Local Tangent Plane
MCS	:	Master Control Station
NAVSTAR	:	NAVigation Satellite Timing And Ranging
N-RTK	:	Network RTK
NED	:	North, East, Down
NMEA	:	National Marine Electronics Association
OCS	:	Operational Control System
OTF	:	On The Fly
PDOP	:	Position Dilution Of Precision
PPS	:	Precise Positioning Service
PRN	:	Pseudo Random Noise
RF	:	Radio Frequency
RMS	:	Root Mean Square
RTCM	:	Radio Technical Commission for Maritime Services
RTK	:	Real Time Kinematic
SA	:	Selective Availability
SPS	:	Standard Positioning Service
TTFA	:	Time To Fix Ambiguities
UERE	:	User Equivalent Range Error
UHF	:	Ultra High Frequency
USNO	:	US Naval Observatory
UTC o TUC	:	Temps Universel Coordonné
VDOP	:	Vertical Dilution Of Precision
VHF	:	Very High Frequency
WGS	:	World Geodetic System

Índice General

1. Introducción **1**

1.1. Motivación 1
1.2. Definición del Problema de Estudio 3
1.3. Objetivos 6

2. Fundamentos del Sistema de Navegación Global por Satélite **7**

2.1. Generalidades 7
2.1.1. La Idea Básica 7
2.1.2. Segmentos GNSS 10
2.2. Sistemas de Referencia 14
2.2.1. Escalas de Tiempo 14
2.2.2. Sistemas de Coordenadas Cartesianas 15
2.2.3. Conceptos Geodésicos 17
2.2.4. Sistema de Coordenadas Geodésico 20
2.2.5. Sistemas de Referencia en Chile 22
2.3. Fundamentos de la Órbita del Satélite 22
2.3.1. Mecánica de la Órbita 23
2.3.2. Determinación de la Órbita 24
2.4. Señal, Observables y Distancia Receptor-Satélite 28
2.4.1. Estructura de la Señal del Satélite 28
2.4.2. Posicionamiento mediante Códigos PRN 30
2.4.3. Posicionamiento mediante las Fases de las Portadoras 32
2.5. Fuentes de Error y Retrasos en Señales GNSS 34
2.5.1. Errores Relacionados con los Satélites 34
2.5.2. Errores Producidos en la Propagación de la Señal 35
2.5.3. Errores Relacionados con el Receptor 38
2.5.4. Efectos Relativistas 39
2.5.5. Configuración Geométrica de los Satélites 39

3. Métodos de Posicionamiento GNSS **41**

3.1. Técnicas Principales 41
3.2. Posicionamiento Absoluto 42
3.3. Posicionamiento Relativo o Diferencial 43
3.3.1. Técnicas de Diferenciación 45
3.3.2. Niveles de Precisión 45
3.3.3. Posicionamiento Relativo Cinemático en Tiempo Real (RTK) 46
3.3.4. Resolución de Ambigüedades 48
3.4. Posicionamiento en Base a Redes GNSS 50
3.4.1. Posicionamiento Absoluto de Precisión 50
3.4.2. Estaciones de Referencia de Operación Continua 50

4. Técnicas y Equipos Utilizados **52**
4.1. Técnica Escogida . . . 52
4.2. Formatos y Transmisión de Datos . . . 53
4.2.1. Formato RTCM . . . 53
4.2.2. Formato NMEA . . . 53
4.2.3. Formato RINEX . . . 54
4.3. Receptor Seleccionado: NEO-M8P (*U-blox*) . . . 55
4.3.1. Funcionamiento en RTK . . . 56
4.3.2. Formato UBX . . . 57
4.3.3. Software U-center . . . 58
4.3.4. Configuración de Módulos y Conversión a Formato RINEX . . . 59

5. Pruebas de Posicionamiento Diferencial **60**
5.1. Pruebas con Receptor Estático . . . 60
5.1.1. Comparación entre Métodos de Posicionamiento . . . 60
5.1.2. Mediciones en RTK . . . 63
5.2. Pruebas con Receptor en Movimiento . . . 69

6. Pruebas de Posicionamiento Absoluto **73**
6.1. Comparación con Receptor de Alto Costo . . . 73
6.1.1. Instrumentación . . . 73
6.1.2. Resultados de Mediciones Simultáneas . . . 73
6.2. Posicionamiento con PPP en Postproceso . . . 78

7. Diseño de Prototipo **80**
7.1. Instrumentación . . . 80
7.2. Suministro de Energía . . . 81
7.2.1. Prueba de Autonomía Energética . . . 81
7.3. Futura Prueba en Talud . . . 83

8. Conclusiones **84**

Bibliografía **87**

Apéndice **91**

A. Sistemas de Referencia y Posición del Satélite **91**

B. Fundamentos Físicos de la Señal **103**

C. Técnicas de Posicionamiento **105**

D. Conceptos de Estimación **117**

E. Bandas de Frecuencia **126**

F. Módulos NEO-M8P **128**

Índice de Figuras

1.1. Tranque de relaves El Torito. (Foto: Comunidad de Ambientalistas de Nogales) . . . 2
1.2. Residuales en las componentes Norte, Este y Vertical, estimadas por dos softwares. (Biagi et al., 2016) . . . 4
1.3. Estaciones GNSS en la zona central de Chile. (CSN - Centro Sismológico Nacional) . 5

2.1. Principio básico de un sistema GNSS. (Seeber, 2003) . . . 8
2.2. Trilateración satelital. (Casanova, 2002) . . . 8
2.3. Segmentos GNSS. (Modificado de Olson (2018)) . . . 11
2.4. Proyección de la constalación GPS. (Kaplan y Hegarty, 2006) . . . 12
2.5. Principales componentes del receptor GNSS. (Modificado de Hofmann-Wellenhof et al., 1994) . . . 13
2.6. Escalas de tiempo en geodesia satelital. (Seeber, 2003) . . . 15
2.7. Ejes del sistema ECI. (Modificado de Petrovski y Tsujii, 2012) . . . 16
2.8. Ejes del sistema ECEF. (Modificado de Petrovski y Tsujii, 2012) . . . 17
2.9. (a) Relación entre la superficie de la Tierra, el geoide y el elipsoide; (b) parámetros elipsoidales. (Modificado de El-Rabbany, 2002) . . . 19
2.10. Anomalías del campo gravitacional terrestre, en miligal (1 cm/s) respecto del valor estimado. [Misión GRACE (NASA)] . . . 19
2.11. Relaciones entre la superficie terrestre, el geoide y el elipsoide. (Hofmann-Wellenhof et al., 1994) . . . 20
2.12. Modelo elipsoidal de la Tierra. (Kaplan y Hegarty, 2006; Leick et al., 2015) . . . 21
2.13. Un satélite moviéndose alrededor de la Tierra de acuerdo a las leyes de Kepler (no a escala). (Petrovski y Tsujii, 2012) . . . 24
2.14. Los tres elementos orbitales keplerianos que definen la forma de la órbita del satélite (a, e y τ). (Modificado de Kaplan y Hegarty, 2006) . . . 25
2.15. Los tres elementos orbitales keplerianos que definen la orientación de la órbita. (Petrovski y Tsujii, 2012) . . . 26
2.16. Modulación PSK de la onda portadora (Hofmann-Wellenhof et al., 1994). . . . 29
2.17. Ubicación de las bandas de frecuencia de las señales GNSS. (Modificado de Leick et al., 2015) . . . 30
2.18. Uso de la réplica del código para determinar el tiempo de propagación de la señal. (Modificado de Kaplan y Hegarty, 2006) . . . 31
2.19. Relaciones de tiempo en la medición de pseudodistancia. (Modificado de Kaplan y Hegarty, 2006) . . . 32
2.20. Interpretación geométrica del desfase. (Hofmann-Wellenhof et al., 1994) . . . 33
2.21. Clasificación de fuentes de error en posicionamiento GNSS. . . . 35
2.22. Contenido total de electrones, en TECU, del 18 de febrero del 2018 (cortesía de NASA/JPL-Caltech). . . . 36

2.23. Geometría relativa y dispersión de precisión: (a) geometría con bajo DOP, y (b) geometría con alto DOP (El-Rabbany, 2002). 40

3.1. Estación base y *rover*. 44
3.2. Posicionamiento relativo. (Hofmann-Wellenhof et al., 1994) 44
3.3. Niveles de precisión estimados para diferentes métodos de posicionamiento. (Seeber, 2003) 46
3.4. Resolución OTF de ambigüedad. (El-Rabbany, 2002) 49
3.5. Método LAMBDA: espacio de búsqueda de ambigüedad antes (izquierda) y después (derecha) de la descorrelación. (Seeber, 2003) 49

4.1. Kit de evaluación C94-M8P. 56
4.2. Estructura de paquetes UBX. (u-blox, 2018a) 57
4.3. Visualización del programa u-center. 58

5.1. Residuales en coordenadas NED, con receptor independiente. 61
5.2. Residuales en coordenadas NED, RTK modo flotante. 62
5.3. Residuales en coordenadas NED, RTK modo fijo. 62
5.4. Mapa de dispersión, mediciones de 4 horas (a) independiente, (b) RTK modo flotante y (c) RTK modo fijo. 63
5.5. Medición en RTK: (a) Residuales en coordenadas NED y (b) Número de satélites. . 64
5.6. Satélites observados durante medición. 65
5.7. Desviaciones de mediciones RTK en diferentes tiempos de observación, con datos flotantes (izquierda) y sólo datos fijos (derecha). 66
5.8. Desviación estándar de una medición en modo RTK fijo. 66
5.9. Medición en RTK: a) Residuales en coordenadas NED, b) Parámetros DOP. 67
5.10. Riel para imponer pequeños desplazamientos, junto con la antena del rover (sobre el soporte) y la antena de la base (extremo derecho). 70
5.11. Desplazamientos relativos a la posición inicial de la antena en coordenadas NED, con cambios de 5 [cm]. 71
5.12. Desplazamientos relativos a la posición inicial de la antena en coordenadas NED, con cambios de 2 [cm]. 72

6.1. Ubicación de antenas GNSS en edificio GEOCOM. 74
6.2. Vista al cielo desde el receptor (a) u-blox M8P y (b) Trimble R9s. 75
6.3. Coordenadas NED de ambos receptores, con respecto al receptor R9s. 76
6.4. Coordenadas NED de ambos receptores, con respecto al receptor R9s. 77
6.5. Mapa de dispersión con respecto a la ubicación del receptor R9s. 77
6.6. Coordenadas geodésicas absolutas. 78
6.7. Coordenadas geodésicas absolutas corregidas. 79

7.1. Compornentes del prototipo. 80
7.2. Diagrama de conexión. 82
7.3. Variación de voltaje que entrega la batería durante prueba. 82

Índice de Tablas

2.1. Estabilidad de los relojes. (Leick, 1995) 10
2.2. Estado de constelaciones GNSS a la fecha (2019). (https://kb.igs.org) 12
2.3. Ejemplos de sistemas de referencias y sus elipsoides. (Leick et al., 2015) 20
2.4. Definiciones de datos de efemérides GPS. (Kaplan y Hegarty, 2006) 27
2.5. Frecuencias de las portadoras de los GNSS. (Leick et al., 2015) 29

3.1. Errores típicos de posición del servicio de posición estándar (SPS) GPS. (Kaplan y Hegarty (2006); Bernhard Hofmann-Wellenhof (2007) 43
3.2. Errores típicos de posición mediante código, posicionamiento absoluto y diferencial. (Bernhard Hofmann-Wellenhof, 2007) 46

4.1. Comparación entre principales técnicas de posicionamiento GNSS. 52
4.2. Algunas secuencias del formato de datos NMEA. (Bernhard Hofmann-Wellenhof, 2007) 54
4.3. Nombres de archivos RINEX recomendados: tipos de archivos. (Gurtner, 2009) . . . 55

5.1. Estadísticas de mediciones de 4 horas. 63
5.2. Valores promedio de mediciones de 4 horas. 63
5.3. Valores promedio de parámetros DOP. 68
5.4. Estadísticas de mediciones de 24 horas (con datos flotantes). 68
5.5. Porcentaje de tiempo en modo fijo. 69
5.6. Estadísticas de residuales, prueba de desplazamientos de 5 [cm]. 70
5.7. Estadísticas de residuales, prueba de desplazamientos de 2 [cm] 71

6.1. Comparación de navegación mediante ambos receptores. 75
6.2. Estadísticas posicionamiento absoluto según ambos receptores. 76
6.3. Coordenadas estimadas por ambos receptores. 77
6.4. Nivel de precisión de ambas estimaciones. 79
6.5. Coordenadas geodésicas estimadas. 79

Capítulo 1

Introducción

1.1. Motivación

La minería es una de las actividades que más perjudica el medio ambiente y también es una de las principales actividades económicas en Chile. Desde el siglo XIX el país ha tenido un papel importante en la producción de cobre y otros minerales, siendo actualmente el principal productor de este metal a nivel mundial.

Producto de la explotación intensiva de minerales, se han generado enormes cantidades de desechos mineros, entre los que se encuentran los relaves[1]. Según el último catastro publicado por el Servicio Nacional de Geología y Minería (SERNAGEOMIN), a marzo de 2018 en Chile hay un total de 740 depósitos, entre tranques[2] (600), embalses (118) y otros, repartidos en 10 de las 16 regiones del país, siendo las regiones de Coquimbo (52.1 %) y Atacama (21.7 %) las que tienen la mayor parte de los depósitos, seguidas por la región de Valparaíso (10.9 %). De estos 740 depósitos, 101 (13.6 %) están activos, 469 (63.4 %) están inactivos[3], y 170 (23 %) se encuentran abandonados. Estas cifras sitúan al país como el tercero con más depósitos de relaves en el mundo, después de China y Estados Unidos (Programa Tranque, 2018).

Una vez depositados en el tranque, los sólidos en suspensión (30 - 35 %), se separan del agua por gravedad, decantando al fondo del tranque, mientras que el agua (agua clara) se acumula en la superficie formando una laguna. Una vez que los depósitos de relaves cumplen su ciclo de vida útil, entran en una etapa post-operativa. Bajo las condiciones climáticas mediterráneas áridas y semiáridas imperantes en la zona norte-centro del país, los relaves se secan y quedan expuestos a diversas fuerzas físicas, como el viento y las lluvias intensas producidas en los años con influencia del fenómeno El Niño, siendo dispersados al medio ambiente donde pueden ocasionar riesgos ambientales (Ginocchio y Santibáñez, 2009), con los consecuentes problemas para la salud humana, los ecosistemas naturales y el sector agropecuario.

Debido a los problemas que trae la creciente producción de relaves, existe en la actualidad la necesidad de realizar un manejo eficaz de estos residuos. La estabilidad física de los depósitos de relaves es uno de los aspectos fundamentales que se debe considerar para minimizar su impacto al medio ambiente y reducir los riesgos asociados a fallas catastróficas. Uno de los mecanismos de falla que afectan a los depósitos es la inestabilidad de taludes, que se caracteriza por un desprendimiento importante del volumen del muro de contención debido a que, en términos generales, el muro pierde equilibrio, pudiendo producir desplazamientos y deformaciones importantes en el mismo, comprometiendo la contención de los relaves (Programa Tranque, 2018).

Uno de los casos emblemáticos de falla de contención en Chile es el que ocurrió durante el terremoto

[1] El relave es una suspensión de sólidos en líquidos que se generan y desechan en las plantas de concentración húmeda de especies minerales que han experimentado una o varias etapas en circuito de molienda fina (D.S. 248/2007).

[2] El tranque de relave es un depósito en el cual el muro es construido por la fracción más gruesa del relave (arenas) compactado. La parte fina, denominada lama, se deposita en la cubeta del depósito (SERNAGEOMIN).

[3] Es decir, han completado su vida útil pero no han tenido un plan de cierre de acuerdo a la ley.

de La Ligua de 1965 en la Región de Valparaíso. En la localidad de El Melón, comuna de Nogales, el tranque de relaves "El Cobre" de la mina El Soldado (perteneciente a la compañía minera "Disputada de Las Condes"), cedió originando una avalancha de líquidos tóxicos de 10 millones de metros cúbicos que sepultó al poblado minero casi en su totalidad, bajo una capa de entre dos y cinco metros. Más de 350 personas murieron (aunque se estima que la cifra real es mucho mayor) y cientos de kilómetros de terrenos fueron contaminados con éstos relaves. El depósito no contaba con las mínimas normas de seguridad. Y hoy la zona del valle de Aconcagua está siendo remecida por la ampliación del tranque "El Torito" (Figura 1.1) de la transnacional "Anglo American Sur S.A.", que actualmente afecta a un área de 2.5 [km^2] (según datos de ICOLD Chile).



Figura 1.1: Tranque de relaves El Torito. (Foto: Comunidad de Ambientalistas de Nogales)

Si bien la solución más factible a los problemas que conllevan los depósitos de relaves es la regulación y limitación de las operaciones mineras, los ánimos del desarrollo minero parecen no cesar, por lo que el enfoque en estos momentos en el país es el manejo de estos desechos, tratando de minimizar su impacto ambiental a través de una gestión basada en la estabilidad física y química de éstos.
Debido a todo lo anterior es necesario el desarrollo de nuevas tecnologías, no sólo en el diseño y construcción de tranques, sino también en el monitoreo de la estructura. Es importante mencionar que los depósitos de relaves, a diferencia de otro tipo de estructuras, se construyen en periodos que podrían superar una década. En este sentido, los sistemas de monitoreo deben ser capaces de medir las variables que definen la estabilidad de los depósitos, como el contenido de agua, las aceleraciones del suelo, la granulometría de las arenas de relave y las deformaciones del talud. Con respecto a las deformaciones de la estructura, es necesario detectar los cambios en su geometría, tanto a nivel local como general. Durante su vida, el tranque puede sufrir procesos de deformación, los cuales pueden alterar las condiciones iniciales. Los deslizamientos pueden desplazarse lentamente por un largo periodo de tiempo, por lo que pueden acelerar y colapsar. La identificación temprana de posibles deslizamientos o deformaciones de muros principales requiere de un monitoreo continuo y un alto nivel de precisión en las mediciones.
En los últimos años se han desarrollado varias técnicas que permiten monitorear las deformaciones de estructuras. Por ejemplo, las técnicas de teledetección como los radares de apertura sintética

SAR[4], permiten conocer la deformación superficial de una extensa área mediante imágenes con una alta resolución espacial, sin embargo poseen un alto costo de instrumentación y algunos tipos de radares poseen una baja resolución temporal. Por otro lado, también están las estaciones totales y los sensores o receptores GNSS[5], que permiten mediciones de desplazamientos 3D con una alta precisión y frecuencia de observación, pero entregan sólo mediciones locales (Scaioni et al., 2018). En este contexto, la implementación de varios receptores GNSS, formando una red, permite la determinación de coordenadas con una alta precisión y resolución temporal. Al conocer los desplazamientos y las deformaciones que se producen en un muro, se pueden tomar las medidas preventivas que podrían evitar un posible colapso del depósito.

1.2. Definición del Problema de Estudio

Para el monitoreo de desplazamientos locales y deformaciones en obras de ingeniería civil y en fenómenos como deslizamientos de talud, se puede utilizar una red de receptores GNSS, posicionados en el área de interés. Por ejemplo, Li y Wang (2011) utilizaron receptores GNSS geodésicos, o de alto nivel de precisión (milimétrico), ubicados en 27 puntos en un tranque de relaves, obteniendo desplazamientos del orden del centímetro, es decir, la operación del tranque era estable. En el estudio concluyeron que estos receptores pueden entregar coordenadas 3D con una precisión de 1.5 [mm].

Los receptores GNSS son relativamente fáciles de mantener y automatizar; sin embargo, las mediciones hechas con estos sensores están afectas a errores y el precio de los receptores geodésicos es bastante elevado (entre 5000 y 15000 USD aproximadamente) lo que limita el número de puntos a monitorear en tranques con extensiones kilométricas y en particular en la pequeña y mediana minería nacional. Además, el riesgo de daño y pérdidas desincentiva el uso de estos sensores.

Afortunadamente, es posible alcanzar buenos niveles de precisión con receptores de bajo costo. Tsakiri et al. (2017) compararon mediciones de receptores geodésicos con las de receptores de bajo costo, resultando diferencias absolutas entre sus coordenadas del orden de 1 - 2 [cm]. Para mediciones con líneas base[6] de extensa longitud, la relación entre las desviaciones estándar de las mediciones con el receptor geodésico (σ_{geod}) y las de las mediciones con el receptor de bajo costo ($\sigma_{low-cost}$) es del orden de 0.1 ($\sigma_{geod} \approx 2$ [mm] y $\sigma_{low-cost} \approx 20$ [mm]). Por lo tanto, este tipo de receptores (de bajo costo) puede utilizarse en actividades donde se requieran niveles de exactitud de 1 - 2 [cm] (con un 95 % de confianza) como en topografía y control geodésico, aunque se espera que para requerimientos de mayor precisión, el mercado de los receptores GNSS continúe innovando y responda a una comunidad de usuarios más exigente. Por su parte, Biagi et al. (2016) también realizaron pruebas con receptores de bajo costo, mediante una técnica llamada RTK, comparando las estimaciones de posición mediante el uso de dos softwares, resultando las residuales[7] de la Figura 1.2, obteniendo precisiones bajo el nivel centimétrico para pruebas con el receptor estático.

Por otro lado, Cina y Piras (2015) también comparan mediciones hechas con estas dos clases de

[4] *Synthetic Aperture Radar.*

[5] Sistema de Navegación Global por Satélite.

[6] La línea base es la distancia entre el receptor GNSS que realiza mediciones de su posición y un receptor o estación base, en una técnica de posicionamiento denominada RTK (*Real Time Kinematic*), donde la base envía correcciones al receptor.

[7] Diferencias entre las posiciones estimadas y la posición de referencia del receptor.

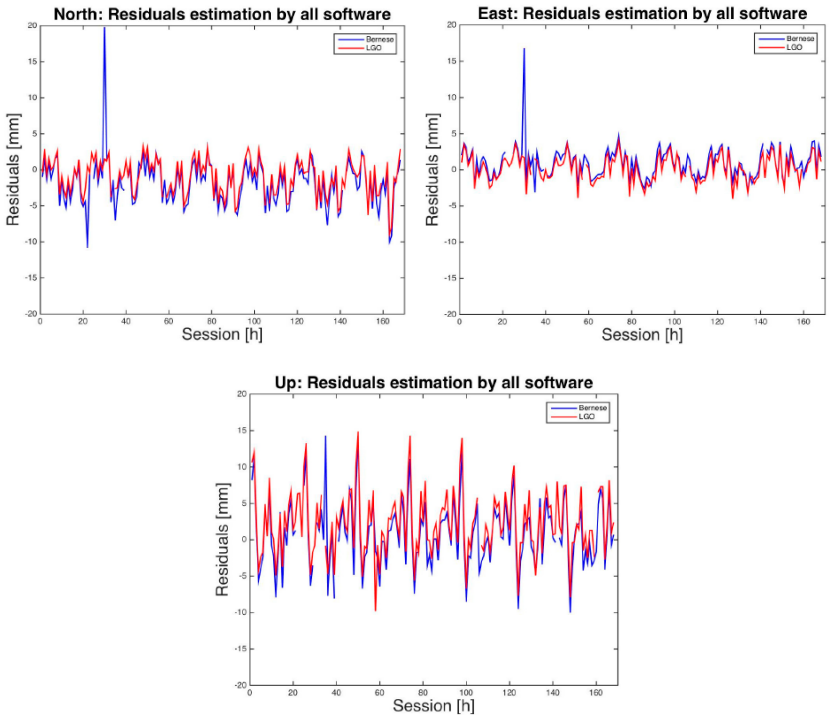


Figura 1.2: Residuales en las componentes Norte, Este y Vertical, estimadas por dos softwares. (Biagi et al., 2016)

receptores GNSS, y además utilizan otros métodos de posicionamiento, donde se demuestra que es posible alcanzar la precisión milimétrica con los receptores de bajo costo, bajo ciertas condiciones y mediante la técnica de virtualización, lo que permite realizar un correcto monitoreo de desplazamientos y deformaciones. Esta técnica de virtualización se basa en una red de estaciones permanentes GNSS continuamente conectadas a un servidor o centro de control; el receptor del usuario envía su posición aproximada a este centro de control, el cual "crea" una estación virtual a partir de la cual el receptor recibe correcciones en tiempo real.
Chile posee una red de estaciones GNSS, perteneciente al Centro Sismológico Nacional (CSN). Con el fin de seguir las deformaciones de la corteza terrestre, las primeras estaciones comenzaron a operar a principios de los años 90's, gracias a la colaboración con organismos internacionales. Actualmente, hay más de 130 estaciones geodésicas distribuidas desde Putre hasta la base antártica chilena, las que funcionan 24/7 y desde diciembre de 2017, el CSN publica el acceso a su base de datos (http://gps.csn.uchile.cl), observaciones que pueden ser utilizadas como referencia para estudios de geolocalización. Sin embargo, actualmente la técnica de virtualización no es factible de realizar mediante esta red. La Figura 1.3 muestra un mapa con parte de la red de estaciones del CSN. Aquí se ubican las estaciones GNSS y aquellas que cuentan con el servicio de corrección RTX (de Trimble), el cual tiene un costo asociado para los usuarios.

Dado lo anterior, se puede decir que los sistemas GNSS son factibles de utilizar para monitorear deformaciones. Por lo tanto, en este trabajo se estudiarán las técnicas de posicionamiento aplicables

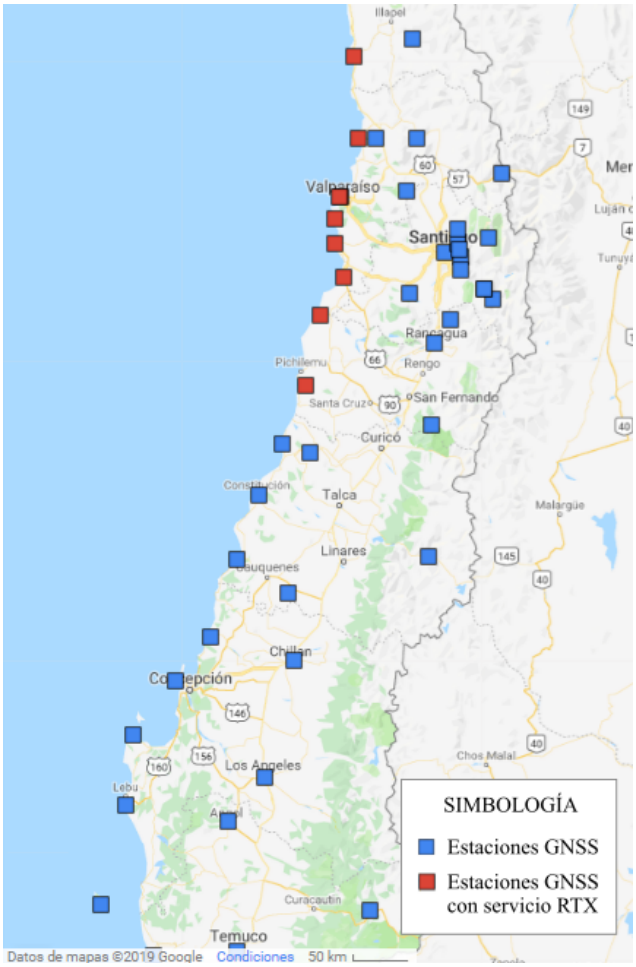


Figura 1.3: Estaciones GNSS en la zona central de Chile. (CSN - Centro Sismológico Nacional)

en nuestro país y región.

1.3. Objetivos

El propósito principal de este trabajo es implementar una red de receptores GNSS de bajo costo que permita obtener una precisión de nivel centimétrico en la medición de desplazamientos de un depósito de relaves.

Como objetivos específicos se tienen:

- Estudiar los fundamentos del Sistema de Navegación por Satélite, sus principales fuentes de errores y las técnicas de posicionamiento utilizadas para la caracterización de desplazamientos y deformaciones.
- Identificar los diferentes tipos de receptores disponibles en el mercado y las diversas técnicas de posicionamiento que se puedan utilizar en la zona, para así seleccionar aquellos que se ajusten a los niveles requeridos.
- Validar la capacidad que tiene el sensor seleccionado de entregar coordenadas con un buen nivel de precisión, mediante la realización de pruebas de medición bajo diferentes escenarios.
- Si el nivel de precisión es el adecuado, emplear los elementos necesarios para el monitoreo de varias unidades de estos receptores en un tranque de relaves.

Capítulo 2

Fundamentos del Sistema de Navegación Global por Satélite

2.1. Generalidades

Un sistema de navegación por satélite es aquel que se basa en el uso de satélites artificiales, los cuales permiten determinar las coordenadas geográficas y la altitud de un punto dado en la Tierra, mediante receptores electrónicos, para fines de navegación, transporte, geodésicos, hidrográficos, agrícolas, y otras actividades afines.
Aquel sistema de navegación por satélite que posee cobertura global se denomina **Sistema de Navegación Global por Satélite** (GNSS). Para el 2020, habrá cuatro sistemas GNSS completamente operativos con cobertura mundial: el europeo **Galileo** y el chino **Beidou** (Compass), que a fines del 2018 comenzó a proveer servicios globales, se han unido al estadounidense **GPS**, que desde julio de 1995 está plenamente operativo, y al ruso **GLONASS** que ha sido finalizado y entró en pleno funcionamiento en octubre de 2011 (Lemmens, 2014).
Los GNSS están formados por tres segmentos:

- **El segmento espacial**: compuesto por satélites artificiales que transmiten señales de radio, cuyos relojes poseen buena precisión.
- **El segmento de control**: formado por estaciones terrestres de monitoreo y control de las órbitas de los satélites. Están distribuidas por todo el planeta.
- **El segmento de usuario**: englobado por los receptores que reciben las señales del segmento espacial y determinan la posición en la que se encuentran.

2.1.1. La Idea Básica

El funcionamiento de los sistemas de navegación por satélite se basa en la medición de las distancias existentes entre receptor y satélite. Un conjunto de satélites artificiales, cuya órbita se conoce con gran precisión, transmiten señales de radio, las que son captadas y decodificadas por receptores ubicados en puntos cuya posición se desea determinar. La posición de cada uno de los satélites es conocida a cada instante a través de sus efemérides[1]. Si se miden las distancias de al menos cuatro satélites diferentes, a un punto sobre la Tierra, es posible determinar la posición de dicho punto por un proceso conocido como trilateración inversa (también llamada trilateración satelital).
Por lo tanto, para entender el funcionamiento de los GNSS, se deben considerar los siguientes principios involucrados: (1) la estimación de la posición, mediante trilateración inversa, (2) la estimación

[1] Las efemérides son conjunto de parámetros que permiten calcular la órbita de cada satélite y su posición dentro de la misma, es decir, sus coordenadas.

de la distancia entre receptor y satélite, (3) la sincronización de relojes, (4) la órbita de cada satélite y (5) los errores y retrasos en las señales GNSS.

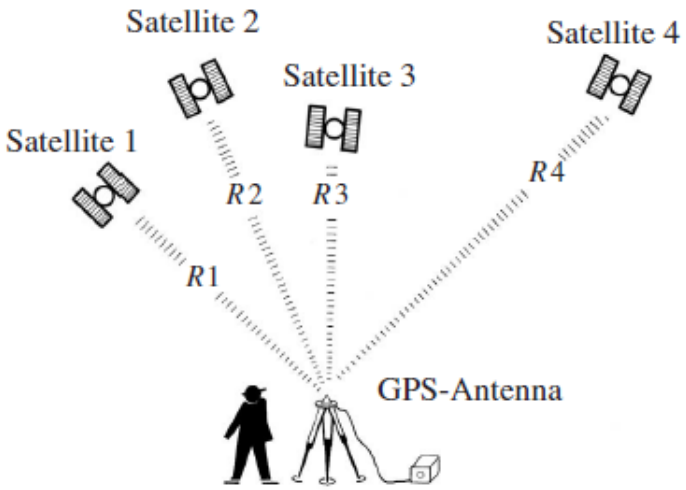


Figura 2.1: Principio básico de un sistema GNSS. (Seeber, 2003)

Estimación de la Posición: Trilateración Satelital

La trilateración es un proceso para determinar posiciones absolutas o relativas mediante la medición de distancias, usando la geometría de círculos (en el caso 2-D) o esferas (en el caso 3-D), a diferencia de la triangulación que se basa en mediciones de ángulos.
Los satélites de un GNSS se encuentran girando alrededor de la Tierra en órbitas predefinidas a una altura aproximada de 20000 [km], siendo posible conocer la ubicación de un satélite en un instante de tiempo dado. Por lo tanto, los satélites son puntos de referencia en el espacio.

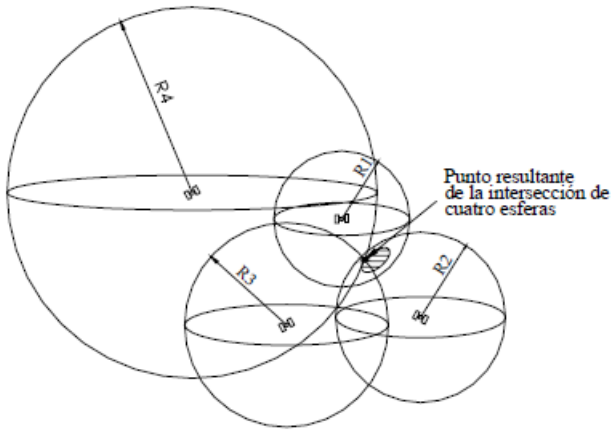


Figura 2.2: Trilateración satelital. (Casanova, 2002)

Si un receptor en la Tierra capta la señal de un primer satélite, determinando la distancia entre ambos, esto sólo indica que el receptor puede estar ubicado en un punto cualquiera dentro de la superficie de una esfera de radio R1. Si se mide la distancia de un segundo satélite al mismo receptor,

se genera una superficie esférica de radio R2, que al intersectarse con la primera esfera se forma un círculo en cuyo perímetro puede estar ubicado el punto a medir. Si se agrega una tercera medición, la intersección de la nueva esfera con las dos anteriores se reduce a dos puntos sobre el perímetro del círculo descrito. Matemáticamente es necesario determinar una cuarta medición a otro satélite (Figura 2.2), con el fin de poder calcular las cuatro incógnitas de posición x, y, z y tiempo.

Estimación de la Distancia entre Receptor y Satélite

En un sistema de navegación por satélite, la distancia geométrica entre un satélite de una constelación GNSS y un receptor en la superficie terrestre se determina mediante la técnica **ToA** (*Time of Arribal*) o tiempo de arribo, que es el tiempo que tarda una señal (en este caso de una onda electromagnética), emitida desde un lugar conocido, en este caso por el satélite, en llegar al receptor.
El tiempo de propagación de la señal $\Delta t = (t_a - t_e)$, es decir, la diferencia entre el tiempo de llegada t_a y el tiempo de emisión t_e, se multiplica por la velocidad de la señal (en este caso la velocidad de la luz) c, para obtener la distancia (o *pseudodistancia*[2]) entre la posición del satélite x_s, y_s, z_s y la posición del receptor x_r, y_r, z_r. Del teorema de Pitágoras se tiene que:

$$c \cdot (t_a - t_e) = \sqrt{(x_r - x_s)^2 + (y_r - y_s)^2 + (z_r - z_s)^2}$$

Midiendo el tiempo de propagación de la señal emitida por múltiples emisores (es decir, satélites) cuyas posiciones se conocen, el receptor puede determinar su posición.
Para determinar el tiempo que tarda la señal emitida por el satélite en llegar al receptor, éste puede utilizar la información de tiempos sobre el **código binario pseudoaleatorio**, o bien, directamente la **fase de la onda portadora**, también llamada fase portadora (ver Sección 2.4). La técnica de medición de la fase, mucho más compleja de construir, es la que se suele usar en geodesia y geodinámica, por su alto grado de precisión en la medida.

Posicionamiento de la Órbita del Satélite

Las **efemérides** corresponden a los parámetros orbitales de alta precisión de un satélite y el subconjunto de parámetros con precisión reducida se llama **almanaque** del satélite. Las efemérides se evalúan para calcular la posición y desviación del reloj del receptor, mientras que el almanaque se utiliza para comprobar qué satélites están visibles para un receptor en una determinada posición y en un momento concreto. Cada satélite transmite su propio conjunto de efemérides y almanaque.

Sincronización de Relojes

La medición precisa del tiempo de viaje es una actividad difícil de realizar. Debido a la gran velocidad de las señales de radio y a las distancias relativamente cortas entre los satélites y la Tierra, los tiempos de viaje son extremadamente cortos. El tiempo promedio que una señal tarda en viajar de un satélite orbitando a 20200 [km] de la Tierra, es de 0.067 segundos. Esto hace necesario el uso de relojes muy precisos.
Para asegurar la estabilidad de los relojes, los satélites están equipados con dos o cuatro osciladores atómicos[3], para garantizar el perfecto funcionamiento, en todo momento, de uno de ello. Estos

[2] Se denomina pseudodistancia debido a los errores de sincronización de los relojes.

[3] Un reloj atómico utiliza una frecuencia de resonancia natural de los átomos para alimentar su contador, en vez de resortes o péndulos de los relojes comunes.

relojes pueden ser de rubidio, de cesio o de hidrógeno. Sobre la frecuencia fundamental de estos osciladores se articula toda la emisión del satélite. En el caso de los receptores, se utilizan relojes de cuarzo, mucho más económicos y con una estabilidad más baja, por lo que las mediciones pueden contener errores.En la Tabla 2.1 se muestran las estabilidades de los diferentes relojes, la que se caracteriza por $\Delta f/f$, donde Δf indica la variación de frecuencia posible en un periodo dado (por ejemplo un día) y f indica la frecuencia propia del reloj.

Tabla 2.1: Estabilidad de los relojes. (Leick, 1995)

Tipo de reloj	**Estabilidad diaria** $\left(\frac{\Delta f}{f}\right)$	**Tiempo que tarda en desviarse un segundo**
Cristal de cuarzo	10^{-9}	30 años
Rubidio	10^{-12}	30 000 años
Cesio	10^{-13}	300 000 años
Hidrógeno	10^{-15}	30 000 000 años

Errores y Retrasos en Señales GNSS

Las mediciones de pseudodistancia y de fase portadora están afectas a distintos tipos de errores y retrasos, los cuales limitan la precisión de la posición de los receptores. Estos errores se pueden clasificar en aquellos originados en los satélites, los que se originan en el receptor y aquellos que se producen en la propagación de la señal. En la Sección 2.5 se explican las diferentes fuentes de error que pueden afectar la calidad del posicionamiento.

Los **errores originados en los satélites** son los que tienen que ver con sus efemérides, sus órbitas, errores en los relojes y los efectos de la disponibilidad selectiva[4] (o *SA*). Esto último se creó con fines militares, pero se eliminó por completo en mayo del 2000 (Shaw y Turner, 2000). Por otro lado, la precisión de la posición GNSS se ve afectada también por la geometría de los satélites, con respecto al receptor. Mientras más extendidos se encuentran los satélites en el cielo, en el momento de la medición, mejor es la precisión obtenida.

Los **errores del receptor** incluyen los del reloj, el efecto *multipath* (o trayectoria múltiple), los ruidos del receptor y las variaciones de centro de fase de la antena.

Los **errores producidos por la propagación de la señal** incluyen los retrasos de ésta al pasar por la ionósfera y la tropósfera. Como la señal viaja con la velocidad de la luz sólo en el vacío, se producen refracciones de ésta al pasar por la atmósfera.

Además de estos errores, la señal que proviene del satélite está influenciada por los efectos relativistas.

2.1.2. Segmentos GNSS

La Figura 2.3 muestra un esquema de los tres segmentos de un GNSS: el espacial, el segmento de control y el segmento de usuario.

[4]La disponibilidad selectiva o *selective availability* fue una degradación intencional de las señales públicas GPS, causada por el Departamento de Defensa de los Estados Unidos con el fin de limitar la precisión de los usuarios civiles.

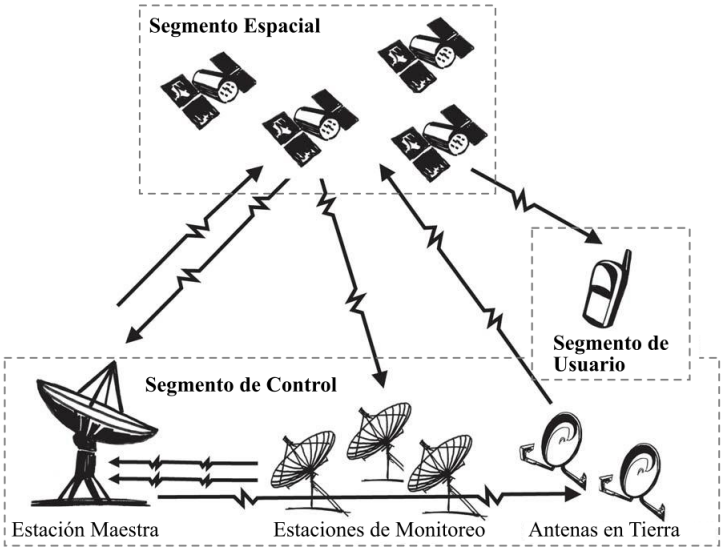


Figura 2.3: Segmentos GNSS. (Modificado de Olson (2018))

Segmento Espacial

El segmento espacial está conformado por la constelación de satélites. Cada satélite transmite una señal que consiste en ondas sinusoidales, conocidas como **portadoras**, además de códigos digitales o **códigos PRN**[5] y un **mensaje de navegación**. Los códigos y el mensaje de navegación son añadidos a las portadoras mediante modulación binaria (ver Sección 2.4.1). Las portadoras y los códigos son usados principalmente para determinar la distancia entre un receptor y un satélite. El mensaje de navegación contiene, entre otra información, las coordenadas de los satélites en función del tiempo.

Como ya se mencionó, las señales transmitidas están controladas por relojes atómicos (de alta precisión), a bordo de los satélites.

Con respecto a la constelación GPS, a la fecha (agosto 2018) existe un total de 31 satélites, repartidos en seis planos orbitales: 24 que aseguran una cobertura mundial y 7 adicionales que se emplean para ofrecer redundancia y un mejor rendimiento. El periodo orbital nominal de un satélite GPS es de medio día sideral u 11 horas y 58 minutos (Kaplan y Hegarty, 2006). Las órbitas son casi circulares e igualmente espaciadas sobre el ecuador cada 60°, con una inclinación nominal relativa al plano ecuatorial de 55°. El radio orbital, es decir, la distancia nominal desde el centro de masa de la Tierra y el satélite, es de aproximadamente 26 600 [km]. La Figura 2.4 muestra las órbitas de los satélites proyectadas en un plano, referenciadas a la época 0000h del 1 de julio, 1993 UTC (USNO) (ver Apéndice A.2.2). Si se piensa en una órbita como un anillo, que se abre y queda plano, de forma similar, el ecuador es colocado en una superficie plana. La pendiente de cada órbita representa la inclinación con respecto al plano ecuatorial. Las ubicaciones de los planos orbitales con respecto a la Tierra se definen por la longitud del nodo ascendente, mientras que la ubicación de los satélites en el plano orbital es definida por la anomalía media (ver Sección 2.3.2).

Actualmente hay cinco bloques de satélites GPS en uso que corresponden a diferentes generaciones

[5] *Pseudo-random noise.*

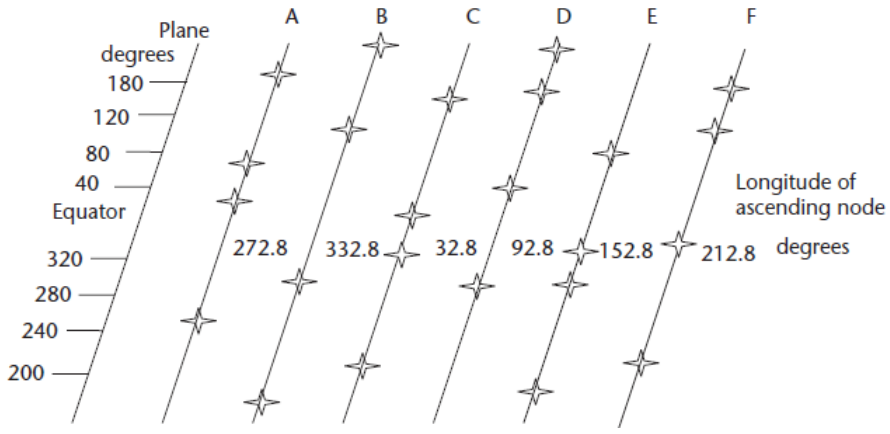


Figura 2.4: Proyección de la constalación GPS. (Kaplan y Hegarty, 2006)

tecnológicas. Estos bloques son: IIA, IIR, IIR (M) y IIF y recientemente el GPS III. Cada bloque tiene diferentes capacidades y diseños, de acuerdo al fabricante del satélite y la evolución de la tecnología, pero el principio de funcionamiento del sistema es básicamente el mismo para todos los bloques.
En la Tabla 2.2 se muestran las principales características de las órbitas de las demás constelaciones.

Tabla 2.2: Estado de constelaciones GNSS a la fecha (2019). (https://kb.igs.org)

	GPS	**GLONASS**	**BeiDou**	**Galileo**
N° Satélites operacionales	31	24	33 (*)	22
Altitud [km]	20 180	19 130	21 150	23 220
Periodo de navegación	11h58m	11h15m40s	12h38m	14h
Señales (portadoras)	L1, L2, L5	L1, L2, L3	B1, B2, B3	E1, E5a, E5b, E6

(*) 5 geoestacionarios.

Segmento de Control

(A continuación, se describe sólo el segmento de control del sistema GPS, considerando que los demás sistemas GNSS funcionan de manera análoga.)
El segmento de control es el Sistema de Control Operacional (OCS), el cual consiste en una estación maestra de control (MCS), varias estaciones de monitoreo alrededor del mundo (MS), y antenas en Tierra (GA), las que emiten los datos a los satélites (Figura 2.3). Las tareas del segmento de control son (Misra y Enge, 2006):

- el monitoreo y control continuo de los satélites,
- determinar el sistema de tiempo GPS (ver Apéndice A.2.3),
- predecir las efemérides de los satélites y los parámetros de los relojes,
- emitir periódicamente el mensaje de navegación para cada satélite, y

- controlar pequeñas maniobras para mantener la órbita, y reubicar para sustituir algún satélite defectuoso si se necesita.

Las estaciones de monitoreo y las antenas operan a distancia de la estación maestra. Las estaciones de monitoreo reciben las señales de los satélites y transmiten los datos recibidos mediante un enlace a la estación maestra. A partir de estos datos la MCS calcula las efemérides de los satélites y el comportamiento de los relojes de los satélites y formula el mensaje de navegación. Este mensaje es transmitido a las antenas y enviado a los satélites mediante enlace de banda S (ver Tabla E.1).

Segmento de Usuario

El segmento de usuario incluye los diferentes tipos de receptores, los cuales calculan su posición en cualquier parte del mundo, mediante el procesamiento de las señales transmitidas desde los satélites. Los primeros receptores (años 70's) fueron hechos con fines militares, los cuales eran pesados y abultados. Hoy en día existen varios tipos de receptores, los cuales están incorporados en algunos objetos de uso diario, como teléfonos celulares, computadoras personales y automóviles. Vienen en varias formas, incluyendo *chipset* (circuito integrado auxiliar), unidades de bolsillo y tarjetas compatibles con la Arquitectura Industrial Estándar (ISA)[6]. La selección del receptor GNSS depende de la aplicación requerida por el usuario.
En la Figura 2.5 se muestra un diagrama de bloque del sistema de recepción. Éste generalmente consiste en los siguientes componentes:

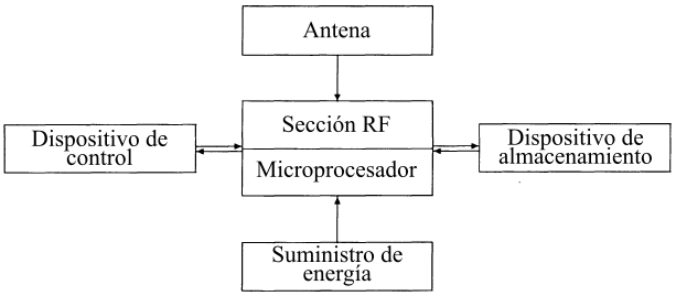


Figura 2.5: Principales componentes del receptor GNSS. (Modificado de Hofmann-Wellenhof et al., 1994)

1. **Antena**: La antena detecta las ondas electromagnéticas que llegan desde los satélites, convierte la energía electromagnética en corriente eléctrica, amplifica la intensidad de la señal y entrega las señales al receptor. La antena tiene que ser sensible a las señales débiles de los satélites y la ganancia[7] debe permitir la recepción de la señal desde todas las elevaciones y azimuts del hemisferio visible (Seeber, 2003).

[6] El estándar de 8 bits llamado ISA (siglas en inglés de Industry Standard Architecture) consistió en un diseño para poder conectar Tarjetas de Expansión a la Placa Madre de las primeras IBM PC (computadora personal), que se comercializaban a principios de los años '80, llevando también el nombre de *XT Bus Architecture*.

[7] La ganancia de una antena es la relación entre la potencia que entra en una antena y la potencia que sale de ésta. Esta ganancia es comúnmente referida en dBi's, y se refiere a la comparación de cuánta energía sale de la antena en cuestión, comparada con la que saldría de una antena isotrópica. Una antena isotrópica es aquella que cuenta con un patrón de radiación esférico perfecto y una ganancia lineal unitaria.

Uno de los criterios de diseño que más importa es la sensibilidad al centro de fase (ver Sección 2.5.3). El centro electrónico debe estar cerca del centro geométrico y debe ser insensible a la rotación e inclinación. Esto adquiere particular importancia en aplicaciones cinemáticas, donde la antena se mueve mientras opera.

2. **Sección de radiofrecuencia**: La sección de radiofrecuencia (RF) es el "corazón" del receptor. Luego de la entrada de la señal desde la antena, la sección RF transforma las señales que llegan en canales. Los receptores monofrecuencia procesan sólo un tipo de señal (o una frecuencia), mientras que los instrumentos multifrecuencia procesan más de una señal. Una característica importante de la sección RF es el número de canales y, por lo tanto, el número de satélites que pueden ser rastreados simultáneamente. La mayoría de los receptores asigna a cada satélite un canal físico, donde los satélites son rastreados simultáneamente (Hofmann-Wellenhof et al., 1994).

3. **Procesador**: El procesador (o microprocesador) es necesario para controlar la operación del receptor, incluyendo la adquisición de la señal, su procesamiento y la decodificación del mensaje enviado. Otras capacidades del microprocesador son el cálculo de las posiciones y velocidades, la conversión a un *datum* determinado (ver Sección 2.2.3) o la inclusión de correcciones diferenciales (ver Sección 3.3.1).

4. **Dispositivo de Control (Entrada/Salida)**: El dispositivo de control proporciona la comunicación interactiva con el receptor. Los comandos pueden ser tecleados y los mensajes pueden ser visualizados. Por ende, este dispositivo puede ser designado como una unidad de visualización de control.

5. **Suministro de Energía**: El suministro de energía fue un problema bastante crítico para las primeras generaciones de receptores GNSS, debido a su alto consumo. Los receptores modernos usan energía de bajo voltaje de corriente directa y están diseñados para consumir la menor energía posible. Los *chipset* modernos tienen un consumo de energía igual o menor a 1 [*Watt*]. Muchos receptores tienen un suministro de energía interno (opcional) como baterías recargables, pero generalmente hay una provisión para baterías externas u otros suministros de energía.

6. **Dispositivo de Almacenamiento**: Los datos de pseudodistancia, fase, tiempo y el mensaje de navegación (que se verán más adelante) deben ser grabados. Para propósitos de post-proceso los datos deben ser guardados en una memoria (interna o externa). Adicionalmente, el receptor puede estar interconectado a un computador externo.

2.2. Sistemas de Referencia

Como se mencionó, para determinar la posición del receptor, así como también la distancia satélite-receptor se necesita conocer con precisión el tiempo y la órbita de los satélites. Para esto es necesario definir conceptos relacionados con la geodesia satelital y los sistemas de referencia que se utilizan en el cálculo de las coordenadas de un punto sobre la Tierra.

2.2.1. Escalas de Tiempo

Para la geodesia satelital son importantes tres grupos básicos de escalas de tiempo (Seeber, 2003):

1. El tiempo que depende de la orientación de la Tierra con respecto a un sistema inercial; para relacionar las observaciones terrestres con un sistema de referencia fijo en el espacio. Las escalas de tiempo apropiadas están relacionadas con la rotación diurna de la Tierra y se llaman **tiempo sideral**, y **tiempo universal**.

2. La medida exacta de los tiempos de viaje de una señal requiere una escala de tiempo uniforme y fácilmente accesible con gran resolución. La medición apropiada está relacionada con fenómenos de la física nuclear y se llama **tiempo atómico**.

3. Para describir el movimiento del satélite se necesita una medición de tiempo estrictamente uniforme, la cual puede ser usada como la variable independiente en las ecuaciones de movimiento. Una escala de tiempo apropiada puede derivarse del movimiento orbital de los cuerpos celestes alrededor del sol; como el **tiempo de efemérides**, **tiempo dinámico**, o **tiempo terrestre**.

Todas estas escalas de tiempo están basadas en la observación de fenómenos astronómicos o físicos, uniformes y repetitivos. En el Apéndice A.2 se describen las escalas de tiempo mencionadas.
El instante en que ocurre alguna observación puede relacionarse con una cierta lectura en una escala de tiempo particular y da la "datación" del evento. En astronomía a este evento se le denomina **época** de la observación.
Con el fin de satisfacer los diversos requerimientos, la relación entre las distintas escalas de tiempo debe establecerse con la mayor precisión posible. En la Figura 2.6 se muestra un esquema de las escalas de tiempo de interés en la geodesia satelital.

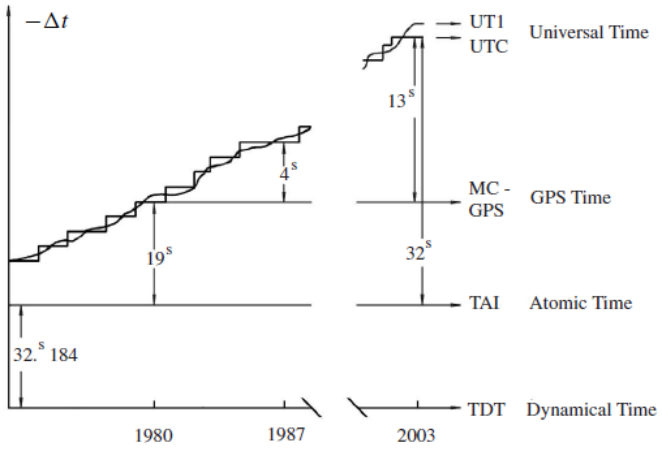


Figura 2.6: Escalas de tiempo en geodesia satelital. (Seeber, 2003)

2.2.2. Sistemas de Coordenadas Cartesianas

Para formular los modelos matemáticos del problema de navegación por satélite, es necesario escoger un sistema de referencia en el cual los satélites y receptores puedan ser representados. Es común describir al satélite y al receptor en términos de posición y velocidad, medidos en un sistema de coordenadas cartesianas. Existen dos sistemas de coordenadas cartesianas principales: el inercial y el rotacional.

Sistema de Coordenadas Inercial Centrado en la Tierra

Para determinar las órbitas de los satélites, es conveniente usar un sistema o marco de coordenadas **inercial centrado en la Tierra** o **ECI**[8], en el cual el origen está en el centro de masa de la Tierra y cuyos ejes están ubicados en direcciones fijas con respecto a las estrellas. Un satélite obedece las leyes de movimiento y gravedad de Newton en un sistema de coordenadas ECI. En este sistema, el plano xy coincide con el plano ecuatorial de la Tierra. El eje $+x$ está fijo en una dirección particular relativa a al cuerpo celeste, específicamente hacia el equinoccio vernal (ver Apéndice A.1). El eje $+z$ es normal al plano xy en la dirección del polo norte celeste (eje de rotación), y el eje y sigue la regla de la mano derecha en el sistema de coordenadas (Kaplan y Hegarty, 2006), como se muestra en la Figura 2.7.

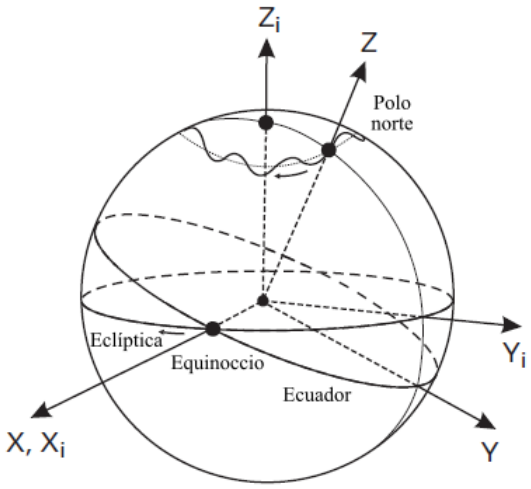


Figura 2.7: Ejes del sistema ECI. (Modificado de Petrovski y Tsujii, 2012)

Debido a que el eje x es definido relativo al cuerpo celeste y el eje z es definido relativo al plano ecuatorial, las irregularidades en el movimiento de la Tierra pueden provocar que el marco ECI no sea verdaderamente inercial. La solución a este problema es definir la orientación de los ejes en un instante particular, o época.

Sistema de Referencia Terrestre Convencional

Para calcular la posición de un receptor GNSS, es más conveniente usar un sistema de coordenadas que rote junto con la Tierra, conocido como **sistema de coordenadas centrado y fijado en la Tierra**, o **ECEF**[9]. También recibe el nombre de sistema de referencia terrestre convencional o CTRS[10]. Como en el sistema ECI, en el sistema de coordenadas ECEF el plano xy coincide con el plano ecuatorial. Sin embargo, en el sistema ECEF, el eje $+x$ apunta en la dirección longitud 0° (meridiano de Greenwich), y el eje $+y$ apunta en la dirección longitud 90°E (Figura 2.8). En este sistema, el eje z es normal al plano ecuatorial en la dirección del polo norte geográfico (es decir, donde las líneas de longitud (o meridianos) se encuentran en el hemisferio norte) (Kaplan y

[8] *Earth-centered inertial.*
[9] *Earth-centered, Earth-fixed*
[10] *Conventional Terrestrial Reference System*

Hegarty, 2006).

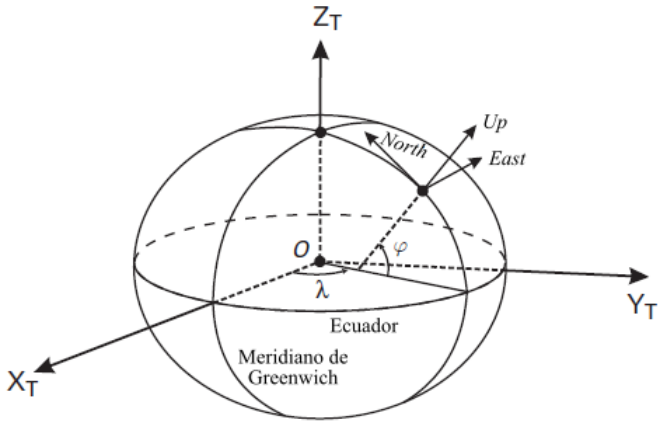


Figura 2.8: Ejes del sistema ECEF. (Modificado de Petrovski y Tsujii, 2012)

El sistema CTRS debe ser posicionado respecto a la Tierra para el uso práctico en posicionamiento GNSS. Esto se hace asignando valores de coordenadas a un seleccionado número de estaciones de referencia bien distribuidas (Sección 2.1.2). Uno de los más importantes sistemas CTRS es el Sistema de Referencia Terrestre Internacional (ITRS), el cual define el **Marco de Referencia Terrestre Internacional** (ITRF). El marco ITRF, mantenido por el Servicio Internacional de Rotación de la Tierra y Sistemas de Referencia IERS, se basa en las mediciones de las estaciones GNSS globalmente distribuidas. Es considerado como el sistema de coordenadas más exacto (Boucher y Altamimi, 1996) y es el *datum* (ver Sección 2.2.3) escogido por la comunidad científica.
Por lo que se refiere al GNSS, las coordenadas se definen en uno de los marcos ECEF. La elección del marco ECEF depende de en qué marco se dan las órbitas del satélite. Los satélites GPS transmiten sus órbitas en el elipsoide WGS-84 (ver Sección 2.2.4), los GLONASS en el PZ-90, y Galileo usará ITRF (Petrovski y Tsujii, 2012).

Sistema de Referencia Local

En un sistema de referencia local el punto de referencia (es decir, el origen del sistema de referencia) es colocado en un punto cercano al observador, generalmente sobre o cerca de la superficie terrestre, en vez del centro de la Tierra. Comúnmente, el origen de este sistema se escoge como la posición del receptor en la superficie terrestre (Acharya, 2015). El eje x del sistema apunta hacia el este y el eje y apunta hacia el norte. El eje z completa la regla de la mano derecha, apuntando perpendicular al elipsoide de referencia (Sección 2.2.3), hacia arriba o hacia abajo.
Cuando el eje z apunta hacia arriba, el sistema es conocido como ENU (*east, north, up*, ver Figura 2.8), y cuando el eje z apunta hacia abajo se le conoce como sistema NED (*north, east, down*), también llamado plano tangente local (LTP).
Estos sistemas se caracterizan por ser más intuitivos que las coordenadas ECEF o las geodésicas.

2.2.3. Conceptos Geodésicos

Para definir la forma y dimensiones de la Tierra, la geodesia plantea modelos que pueden recoger la complejidad natural de la superficie terrestre y expresarla de una forma más simple. Para esto

se establece un sistema de referencia y se define un conjunto de puntos, conocidos como **vértices geodésicos** cuyas coordenadas en dicho sistema sean conocidas con una precisión elevada. En base a estos puntos, los cuales forman una **red geodésica**, se pueden calcular las coordenadas de cualquier punto en el sistema de referencia definido.
Para determinar un modelo que asimile la forma de la Tierra, existen dos conceptos básicos: el **elipsoide de referencia** y el **geoide**.

El Elipsoide de Referencia

El intento más básico de establecer un modelo de la forma de la Tierra es asimilar ésta a una figura geométrica simple, la cual pueda expresarse mediante una ecuación matemática. En realidad, la Tierra no es una esfera perfecta, ya que su propia rotación ha modificado esa forma y ha provocado un achatamiento en los polos. Por esto se trata de asimilar la forma de la Tierra a la de un elipsoide biaxial (Figura 2.9). Sobre un elipsoide, el radio de la Tierra ya no es constante, sino que depende del emplazamiento.
El elipsoide biaxial, o simplemente elipsoide, es una superficie de revolución que se obtiene a partir de la elipse cuando se rota sobre su eje menor (Vanicek y Krakiwsky, 1986). Similar a una elipse, el elipsoide puede ser definido por el **semieje mayor** o ecuatorial, a, y el **semieje menor** o polar, b. La relación existente entre estos dos parámetros define el grado de achatamiento del elipsoide; medido por el factor de achatamiento, f, según:

$$f = 1 - \frac{b}{a}$$

Otros parámetros son la excentricidad, e, y la segunda excentricidad, e', que indican el grado de desviación de una órbita elíptica respecto de una órbita circular según:

$$e^2 = 1 - \frac{b^2}{a^2} = 2f - f^2$$

$$e' = \sqrt{\frac{a^2}{b^2} - 1} = \frac{a}{b}\, e$$

Debido a la evolución histórica de la idea de elipsoide de referencia, las medidas de los semiejes que lo definen no son únicas. Es decir, no en todos lugares y en todas las circunstancias se emplea un mismo elipsoide caracterizado por unos valores a y b idénticos.

El Geoide

El geoide es la superficie tridimensional en cuyos puntos la atracción gravitatoria es constante. Se trata de una superficie equipotencial sobre el nivel medio del mar, que resulta de suponer los océanos en reposo[11] y prolongar éstos por debajo de la superficie terrestre. La particularidad del geoide reside en que en todos sus puntos la dirección de la gravedad es perpendicular a su superficie. Como se ve en la Figura 2.10, la densidad de la Tierra no es constante en todos sus puntos, y ello da lugar a que el geoide sea una superficie irregular.
Al igual que en el caso de los elipsoides, existen diversos geoides de referencia, y éstos no son constantes en el tiempo, sino que evolucionan para adaptarse a las modificaciones de la superficie

[11] El nivel del mar es en realidad variable como consecuencia de las mareas, corrientes y otros fenómenos

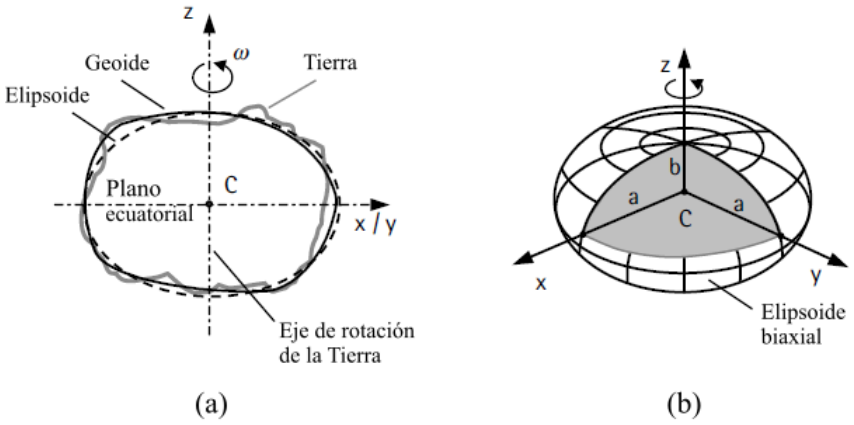


Figura 2.9: (a) Relación entre la superficie de la Tierra, el geoide y el elipsoide; (b) parámetros elipsoidales. (Modificado de El-Rabbany, 2002)

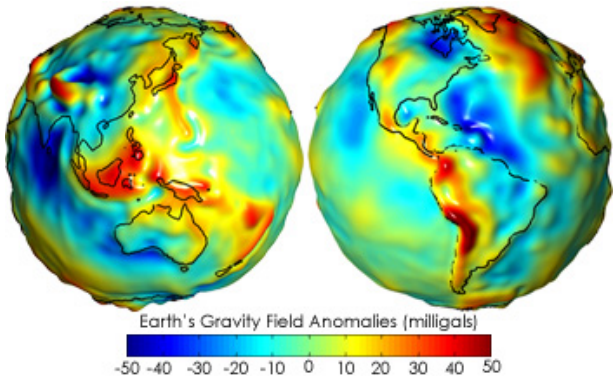


Figura 2.10: Anomalías del campo gravitacional terrestre, en miligal (1 cm/s) respecto del valor estimado. [Misión GRACE (NASA)]

terrestre.

En la Figura 2.9(a) se comparan el elipsoide, el geoide y la superficie física de la Tierra, las cuales presentan diferencias. Las diferencias entre el elipsoide y el geoide se conocen como **alturas geoidales**, N, cuyo valor máximo es del orden de 100 [m] (Olaya, 2011). Las alturas relativas al geoide se denominan **alturas ortométricas**, H. La **altura elipsoidal**, h, es la altura en un punto en la Tierra (puede ser sobre y debajo de la superficie del terreno). La relación entre las distintas alturas es: $h = H + N$. Nótese que en la Figura 2.11 los puntos G y/o P pueden estar bajo el punto E, por lo que los valores de h, H y N pueden ser positivos o negativos.

El Datum Geodésico

El datum geodésico es una superficie matemática, o un elipsoide de referencia, con un origen (centro) y orientación bien definido. Un datum geodésico es determinado por ocho parámetros específicos: dos parámetros que definen la dimensión del elipsoide de referencia (a, f), tres parámetros que definen la posición del origen, y tres que definen la orientación de los tres ejes con respecto a la Tierra. En la Tabla 2.3 se muestran algunos ejemplos de sistemas de referencia y sus respectivos

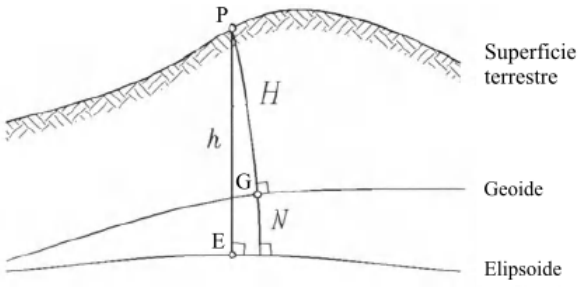


Figura 2.11: Relaciones entre la superficie terrestre, el geoide y el elipsoide. (Hofmann-Wellenhof et al., 1994)

Tabla 2.3: Ejemplos de sistemas de referencias y sus elipsoides. (Leick et al., 2015)

Sistema de coordenadas (*datum*)	**Elipsoide de referencia**	**a** [m]	**1/f**
WGS-84	WGS-84	6378137.0	298.257223563
NAD-83	GRS-80	6378137.0	298.257222101
WGS-72	WGS-72	6378135.0	298.26
NAD-27	Clarke 1866	6378206.4	294.9786982

elipsoides.

En geodesia se utilizan dos tipos de datum, el vertical y el horizontal. El datum horizontal, corresponde a la posición adecuada del elipsoide de referencia en la cual las coordenadas horizontales ϕ, λ (ver Sección 2.2.4) son calculadas (Vanicek y Krakiwsky, 1986). El datum vertical es la superficie de referencia que permite el cálculo de alturas; normalmente esta superficie es el geoide. Para determinar la orientación del elipsoide de referencia se define el **punto fundamental** (para su cálculo se emplean métodos astronómicos), en donde el elipsoide es tangente al geoide; es decir, la altura geoidal en este punto es cero. Para un mismo elipsoide pueden utilizarse distintos puntos fundamentales, que darán lugar a distintos datum y a distintas coordenadas para un mismo punto (Olaya, 2011).

2.2.4. Sistema de Coordenadas Geodésico

Sistemas de Referencia en los GNSS

El modelo estándar de la Tierra usado para aplicaciones GPS es el **Sistema Geodésico Mundial de 1984**, o WGS-84[12], desarrollado por el Departamento de Defensa de U.S., es un sistema de referencia terrestre convencional (CTRS). Este sistema es realizado mediante estaciones GPS globalmente distribuidas. Las efemérides que transmiten los satélites GPS están en este sistema de coordenadas. El sistema WGS-84 ha sido actualizado varias veces para ser alineado lo más posible con el ITRF , coincidiendo con éste con una diferencia de menos de 10 centímetros (Petrovski y Tsujii, 2012).

El modelo del geoide del sistema WGS-84 actual es el Modelo de Gravedad de la Tierra de 1996,

[12] *World Geodetic System.*

o EGM-96[13] y tiene 130676 coeficientes que definen la altura geoidal y el potencial gravitacional (Malys et al., 1997).
El marco **Parámetros de la Tierra[14] de 1990**, o PZ-90, es el sistema de de coordenadas utilizado por GLONASS (Petrovski y Tsujii, 2012). La última versión del PZ-90 también ha sido alineado con el sistema ITRF.
Para propósitos de navegación basta con definir las coordenadas en ITRF, WGS-84 o PZ-90.

Coordenadas Geodésicas: Latitud, Longitud y Altura

El sistema de coordenadas ECEF está fijado al elipsoide de referencia WGS-84, como se muestra en la Figura 2.12(a). El punto **O** corresponde al centro de la Tierra. Se pueden definir los parámetros latitud, longitud y altura con respecto al elipsoide de referencia. Cuando se define de esta manera, estos parámetros se llaman "geodésicos".

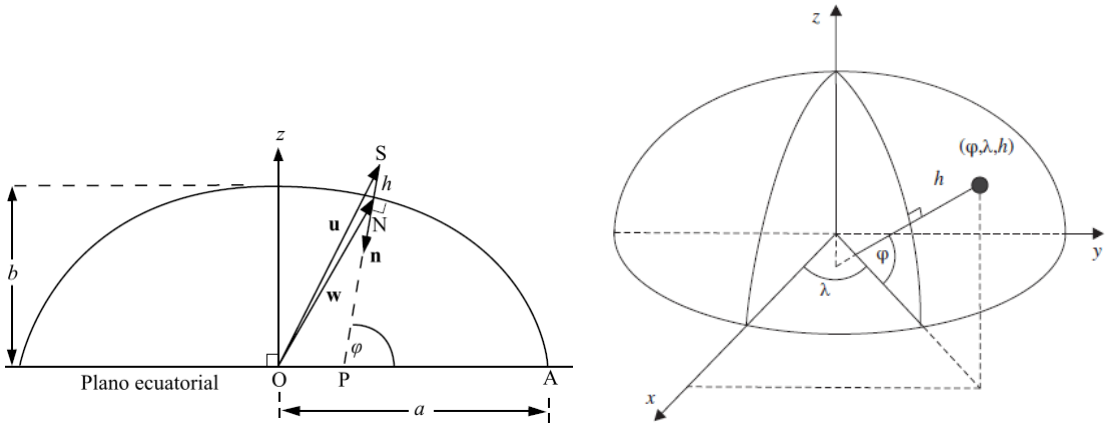


Figura 2.12: Modelo elipsoidal de la Tierra. (Kaplan y Hegarty, 2006; Leick et al., 2015)

Los parámetros geodésicos latitud (ϕ) y altura (h) están definidos en términos de la normal (del elipsoide) al receptor; esta normal es representada por el vector $\mathbf{n}$[15] de la Figura 2.12(a). La **altura geodésica**, h, es simplemente la mínima distancia entre el receptor (al final del vector $\mathbf{u}$) y el elipsoide de referencia[16]. La **latitud geodésica**, ϕ, es el ángulo entre el vector $\mathbf{n}$ y la proyección de $\mathbf{n}$ en el plano ecuatorial xy. Convencionalmente, ϕ es positivo si $z > 0$ (es decir, si el usuario se encuentra en el hemisferio norte), y ϕ es negativo si $z < 0$.
La coordenadas "geocéntricas" difieren con las "geodésicas" por la latitud (geocéntrica), la cual corresponde al ángulo entre la línea que une el centro del elipsoide y un punto sobre el elipsoide sobre el plano xy (o plano del ecuador). Con respecto a la Figura 2.12(a), la latitud geodésica es el ángulo **NPA**, donde **N** es el punto más cercano al receptor en el elipsoide de referencia, **P** es

[13] *Earth Gravity Model.*
[14] *Zemlya* en ruso.
[15] Nótese que, a menos que el receptor se encuentre en algún polo o el ecuador, la normal del elipsoide no apuntará exactamente al centro de la Tierra.
[16] Nótese que la dirección de mínima distancia entre el receptor y el elipsoide de referencia será en la dirección del vector $\mathbf{n}$.

el punto donde un línea en la dirección de **n** intersecta el plano ecuatorial, y **A** es el punto más cercano a **P** en el ecuador. La **longitud geodésica** (λ), por lo tanto, corresponde al ángulo entre el receptor y el eje x, medido en el plano xy (Figura 2.12(b)).
La coordenadas geodésicas (ϕ, λ, h) pueden ser transformadas al sistema de coordenadas cartesiano. Para hacer esto, se deben conocer los parámetros del elipsoide (a y f). También es posible transformar las coordenadas geodésicas (ϕ y λ) a coordenadas rectangulares o locales, por ejemplo, Norte y Este. En el Apéndice A.3 se detallan estas conversiones entre sistemas de coordenadas.

2.2.5. Sistemas de Referencia en Chile

En Chile diversos sistemas geodésicos de referencia han sido adoptados como oficiales. En las últimas décadas la Red Geodésica Nacional (RGN) ha sido establecida por dos sistemas clásicos locales simultáneamente, Datum Provisorio Sudamericano de 1956 (PSAD56) y Datum Sudamericano de 1969 (SAD69). Actualmente, el Instituto Geográfico Militar de Chile (IGM) promueve la adopción del **Sistema de Referencia Geocéntrico para las Américas** (SIRGAS) en su realización año 2000, época 2002.0 (IGM - Instituro Geográfico Militar, 2008).
SIRGAS como sistema de referencia se define idéntico al Sistema Internacional de Referencia Terrestre ITRS y su realización es la densificación regional del marco global de referencia terrestre ITRF en América Latina y El Caribe. La extensión del marco de referencia SIRGAS está dada a través de densificaciones nacionales, las cuales a su vez sirven de marcos de referencia local (SIRGAS, 2018).
La densificación de SIRGAS en Chile, la realiza el IGM, mediante la combinación de observaciones de vértices activos y vértices pasivos; y se denomina Red Geodésica Nacional SIRGAS-CHILE. Está conformada por tres redes fundamentales (IGM - Instituro Geográfico Militar, 2008):

- Red de estaciones activas fijas, que consiste en diez estaciones GNSS, es la que permite calcular continuamente coordenadas para apoyar cualquier medición diferencial GNSS y además monitorear el desplazamiento de las placas tectónicas determinando velocidades y desplazamientos.
- Red básica, compuesta por pilares que se utilizan para el cálculo de variaciones periódicas de sus coordenadas.
- Red de densificación.

2.3. Fundamentos de la Órbita del Satélite

Como se mencionó anteriormente, para determinar su posición, el usuario GNSS necesita información precisa sobre la posición de los satélites, dado que no tienen órbitas geoestacionarias. De allí la importancia de entender cómo se caracterizan las órbitas GNSS y las fuerzas que actúan sobre los satélites.
Los parámetros orbitales, enviados por los satélites en el mensaje de navegación, definen las características de sus órbitas.

2.3.1. Mecánica de la Órbita

El movimiento de la órbita de un satélite es el resultado de la atracción gravitacional de la Tierra, y de otras fuerzas que actúan sobre el satélite; por ejemplo, la atracción del Sol y de la Luna o el impacto de las partículas de radiación solar.

Movimiento Kepleriano

Si la Tierra fuese perfectamente esférica y con densidad uniforme, entonces la gravitación terrestre podría comportarse como si la Tierra fuera una masa puntual. Al colocar un objeto de masa m en la posición del vector $\vec{\mathbf{r}}$ en un sistema de coordenadas ECI, si G es la constante de gravedad universal, M es la masa de la Tierra, y la gravitación de la Tierra actúa como una masa puntual, entonces, de acuerdo con las leyes de Newton, la fuerza F que actúa sobre el objeto está dada por (Kaplan y Hegarty, 2006):

$$\vec{F} = m\vec{\mathbf{a}} = -G\frac{mM}{r^3}\vec{\mathbf{r}} \tag{2.1}$$

donde $\vec{\mathbf{a}}$ es la aceleración del objeto, y $r = |\mathbf{r}|$. El signo menos al lado derecho de la ecuación (2.1) resulta del hecho de que la fuerza gravitacional siempre es de atracción.
Para un satélite se puede asumir que su masa es muy pequeña en comparación con la de la Tierra ($m << M$).
Dado que la aceleración es la segunda derivada temporal de la posición, (2.1) puede reescribirse como:

$$\frac{d^2\vec{\mathbf{r}}}{dt^2} = -\frac{\mu}{r^3}\vec{\mathbf{r}} \tag{2.2}$$

donde $\mu = GM$. En el sistema WGS-84, el valor original de μ fue $3986005{\cdot}10^8$ $[m^3/s^2]$[17]. La ecuación (2.2) es la expresión del denominado movimiento de los dos cuerpos o **movimiento Kepleriano**, en el cual la única fuerza actuando en el satélite es la masa puntual de la Tierra. Las soluciones para esta ecuación pueden ser órbitas elípticas, parabólicas, o hiperbólicas, dependiendo de las condiciones iniciales, las que consisten, en términos prácticos, en la velocidad inicial del satélite.
En general, las leyes de Kepler describen cualquier movimiento de dos masas puntuales debido a la atracción gravitacional mutua. Para el caso de los satélites GNSS se observan sólo órbitas elípticas, aunque en general son secciones cónicas.
Las tres leyes de Kepler (aplicadas a los satélites) son las que se enuncian a continuación.

1) **Primera ley**. Los satélites se desplazan alrededor de la Tierra describiendo órbitas elípticas. El centro de masa la Tierra se encuentra en uno de los focos de la elipse (Figura 2.13).

2) **Segunda ley**. El radio vector que une los centros de masa de un satélite y la Tierra recorre áreas iguales en tiempos iguales (Figura 2.13).

3) **Tercera ley**. La suma de las masas de la Tierra y el satélite multiplicada por el cuadrado de su período orbital (T) es directamente proporcional al cubo de la distancia media entre ellos (a); es decir:

$$(m + M)\, T^2 = \frac{4\pi^2}{G}\, a^3$$

[17] Posteriormente, este valor fue actualizado a $3986604.418 \cdot 10^8$ $[m^3/s^2]$, pero para mantener la compatibilidad con el mensaje de navegación, el valor original aún está en uso.

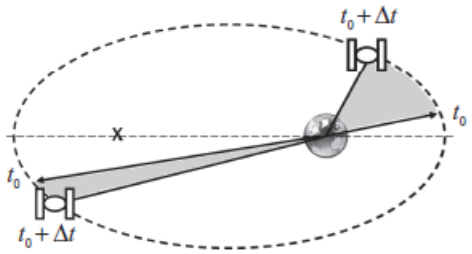


Figura 2.13: Un satélite moviéndose alrededor de la Tierra de acuerdo a las leyes de Kepler (no a escala). (Petrovski y Tsujii, 2012)

Debido a que la Tierra no es esférica y tiene una distribución irregular de masa, (2.2) no modela la verdadera aceleración debido a la gravitación terrestre. Si la función V mide el verdadero potencial gravitacional de la Tierra en un punto arbitrario en el espacio, entonces (2.2) se puede reescribir como:

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla V \tag{2.3}$$

Movimiento Perturbado

Además de la fuerza gravitatoria de la Tierra, existe otra fuerza que actúa en los satélites: la gravitación de los tres cuerpos, producida por el Sol y la Luna. Modelar esta fuerza requiere conocer las posiciones del Sol y la Luna en el sistema de coordenadas ECI en función del tiempo. Otra fuerza que actúa sobre los satélites es la presión de la radiación solar, que resulta de la transferencia de fotones, y depende de a posición del Sol, el área del satélite proyectada en el plano normal a la línea de visión del Sol, y la masa y reflectividad del satélite. Otras fuerzas adicionales que actúan sobre el satélite incluyen: la desgasificación (es decir, la lenta liberación de gases atrapados en la estructura del satélite), las variaciones de marea de la Tierra, y las maniobras orbitales. Para modelar la órbita del satélite con exactitud, todas estas perturbaciones del campo gravitacional de la Tierra deben ser modeladas. Para simplificar, se representarán estas perturbaciones (o aceleraciones) con el término a_d, por lo que la ecuación de movimiento puede reescribirse como (Kaplan y Hegarty, 2006):

$$\frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \nabla V + a_d \tag{2.4}$$

Sólo la ecuación de movimiento de los dos cuerpos (2.2) tiene una solución analítica, e incluso en este caso más simple, la solución puede no ser llevada a cabo completamente en forma cerrada. El cálculo de los parámetros orbitales provenientes de las ecuaciones de movimiento perturbado (2.4) requieren integración numérica.

2.3.2. Determinación de la Órbita

La determinación de la órbita significa esencialmente la determinación de los parámetros o elementos orbitales y los sesgos del reloj del satélite.
A partir de seis parámetros de movimiento y un tiempo inicial (t_0), se pueden encontrar los vectores de posición (r_0) y velocidad (v_0) de un satélite. En el caso de la ecuación de movimiento perturbado, (2.4), es posible caracterizar la órbita en términos de los seis parámetros del movimiento de los

dos cuerpos, pero estos parámetros no serán constantes. En un tiempo de referencia exacto, los parámetros orbitales de referencia describirán los verdaderos vectores de posición y velocidad del satélite, pero mientras el tiempo avanza después (o antes) del tiempo de referencia, la verdadera posición y velocidad del satélite se desviará cada vez más de la posición y velocidad descritos por los seis parámetros de los dos cuerpos. Esta es la aproximación hecha en la formulación del mensaje de efemérides del sistema GPS, el cual incluye no sólo los seis parámetros del movimiento de los dos cuerpos, sino también el tiempo de su aplicación (tiempo de referencia) y una caracterización de cómo estos parámetros cambian en el tiempo. Con esta información, un receptor puede calcular los parámetros "corregidos" del movimiento para un satélite en el momento en que se resuelve el problema de navegación.

Elementos o Parámetros Orbitales

Existen varias formulaciones posibles para la solución del problema de los dos cuerpos, y el sistema GPS adopta la notación de la solución clásica, la cual usa un grupo particular de los parámetros orbitales de movimiento, conocidos como **elementos orbitales keplerianos**. Los tres primeros elementos orbitales keplerianos mostrados en la Figura 2.14, definen la forma elíptica de la órbita:

a: semieje mayor del elipsoide.

e: excentricidad del elipsoide.

τ: tiempo en el cual el satélite pasa por el perigeo

Los otros tres definen la orientación de la órbita (Figura 2.15), que serán explicados más adelante.

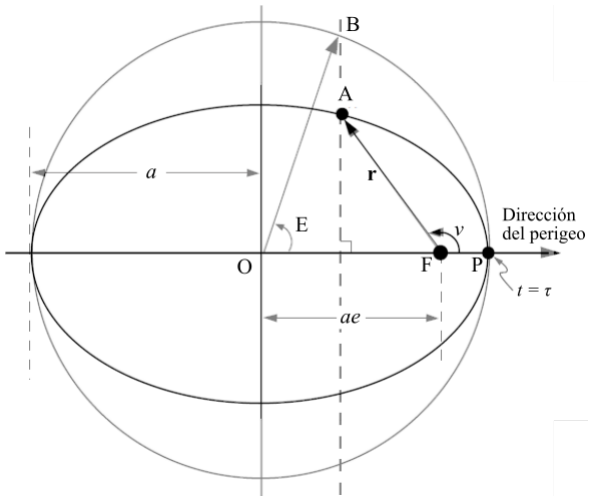


Figura 2.14: Los tres elementos orbitales keplerianos que definen la forma de la órbita del satélite (a, e y τ). (Modificado de Kaplan y Hegarty, 2006)

En la Figura 2.14, el punto **P** es el perigeo (donde el satélite se encuentra más cerca del centro de la Tierra). La **anomalía verdadera** es el ángulo en el plano orbital medido en sentido antihorario desde la dirección del perigeo al satélite ($\nu = \angle\mathbf{PFA}$). De las leyes de Kepler se sabe que la anomalía verdadera no varía linealmente en el tiempo para órbitas no circulares. Por esto se transforma la

anomalía verdadera a la **anomalía media** (M), un parámetro que sí varía linealmente con el tiempo.
Para relacionar ambos parámetros se debe definir la **anomalía excéntrica** (E), cuya relación con E viene dada por:

$$M = E - e \sin E \tag{2.5}$$

Como se mencionó, la importancia de transformar la anomalía verdadera a la media radica en su variación lineal con el tiempo. Esta relación lineal es la siguiente:

$$M - M_0 = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} (t - t_0) \tag{2.6}$$

donde M_0 es la anomalía media en la época t_0, y M es la anomalía media en el tiempo t.

La Figura 2.15 muestra los otros tres elementos orbitales keplerianos, los cuales definen la orientación de la órbita. En el caso del GPS, los parámetros keplerianos se definen en relación al sistema de coordenadas ECEF (descrito en la Sección 2.2.2). En este caso, el plano xy es siempre el plano ecuatorial terrestre. Los siguientes elementos keplerianos definen la orientación de la órbita en el sistema de coordenadas ECEF:

i : inclinación orbital.

Ω : longitud o ascensión recta del nodo ascendente.

ω : argumento del perigeo.

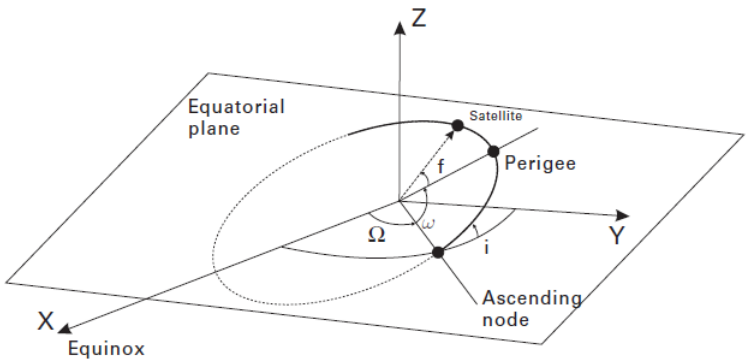


Figura 2.15: Los tres elementos orbitales keplerianos que definen la orientación de la órbita. (Petrovski y Tsujii, 2012)

La **inclinación** es el ángulo diedro[18] entre el plano ecuatorial terrestre y el plano de la órbita del satélite. Los otros dos elementos se definen en relación al **nodo ascendente**, que es el punto en la órbita del satélite donde ésta cruza el plano ecuatorial con una componente $+z$ de velocidad (es decir, yendo del hemisferio sur al hemisferio norte). El parámetro que define el ángulo entre el eje x y la dirección del nodo ascendente se denomina la **ascensión recta del nodo ascendente**. Debido a que el eje x está fijo en la dirección del primer meridiano (longitud 0°) en el sistema de

[18] Un ángulo diedro es el menor ángulo entre dos planos intersectados.

coordenadas ECEF, la ascensión recta del nodo ascendente es la longitud del nodo ascendente, Ω. El último elemento, conocido como el **argumento del perigeo**, ω, mide el ángulo desde el nodo ascendente hacia la dirección del perigeo en la órbita. Nótese que Ω se mide en el plano ecuatorial, mientras que ω es medido en el plano orbital.
En el caso de los satélites GPS, las órbitas son casi circulares, con excentricidades de no más de 0.02 y semiejes mayores de aproximadamente 26 560 [km] (Kaplan y Hegarty, 2006). Las inclinaciones orbitales son de aproximadamente 55° para la constelación GPS. Los demás parámetros varían dependiendo del satélite, así la constelación entrega una cobertura para toda la Tierra.

Cálculo de la Órbita del Satélite

En la Tabla 2.4 se resumen los parámetros contenidos en el mensaje de efemérides del sistema GPS. Estos parámetros fueron determinados en la IS-GPS-200[19] (ARINC Research Corporation, 2004), la cual es la interfaz de especificación entre el segmento espacio y el segmento usuario GPS. Como se puede ver, los primeros siete parámetros del mensaje de efemérides son el tiempo de la época, y esencialmente, los elementos orbitales keplerianos en el tiempo de la época, con excepción de que el semieje mayor es expresado como su raíz cuadrada y de que la anomalía media es usada en vez del tiempo de paso por el perigeo. Los otros nueve parámetros permiten las correcciones de los elementos keplerianos como funciones del tiempo después de la época.

Tabla 2.4: Definiciones de datos de efemérides GPS. (Kaplan y Hegarty, 2006)

Parámetro	**Definición**
t_{0e}	Tiempo de referencia de efemérides
$\sqrt{a}$	Raíz cuadrada del semieje mayor
e	Excentricidad
i_0	Ángulo de inclinación (en el tiempo t_{0e})
Ω_0	Longitud del nodo ascendente (en la época semanal)
ω	Argumento del perigeo (en el tiempo t_{0e})
M_0	Anomalía media (en el tiempo t_{0e})
di/dt	Tasa de cambio de la inclinación
$\dot{\Omega}$	Tasa de cambio de la longitud del nodo ascendente
Δn	Corrección del movimiento medio
C_{uc}	Amplitud de la corrección del coseno al argumento de latitud
C_{us}	Amplitud de la corrección del seno al argumento de latitud
C_{rc}	Amplitud de la corrección del coseno al radio orbital
C_{rs}	Amplitud de la corrección del seno al radio orbital
C_{ic}	Amplitud de la corrección del coseno al ángulo de inclinación
C_{is}	Amplitud de la corrección del seno al ángulo de inclinación

El algoritmo mediante el cual un receptor GPS calcula el vector posición de un satélite se muestra en la Tabla A.2 (Apéndice A.5).

[19] *Interface Specification*

2.4. Señal, Observables y Distancia Receptor-Satélite

Las distancias receptor-satélite se deducen a partir de la medición del tiempo o diferencias de fase basadas en una comparación entre las señales recibidas y las señales generadas por los receptores. Los GNSS utilizan un "concepto de un sentido" donde se utilizan dos relojes, uno en el satélite y otro en el receptor. Así, las distancias están sesgadas por los errores de los relojes del satélite y del receptor y, por esto, éstas son llamadas *pseudodistancias*. Las pseudodistanicas y las fases portadoras son las observaciones (observables) básicas del GNSS usadas para determinar posición y tiempo.

2.4.1. Estructura de la Señal del Satélite

Cada satélite GNSS transmite una o más señales de radio microonda compuestas por:

- Ondas portadoras[20] moduladas[21] por
- Códigos pseudoaleatorios (o códigos PRN[22]) y
- Un mensaje de navegación.

Los códigos son secuencias fijas de dígitos binarios (ceros y unos, o +1 y -1), conocidos como *bits* o *chips*[23], los cuales aparentan tener caracteres aleatorios, pero pueden ser identificados inequívocamente usando un algoritmo matemático. Cada satélite tiene su propio y único código pseudoaleatorio, esto permite que el receptor pueda distinguir entre señales de diferentes satélites, los cuales usan la misma frecuencia de portadora.
Las señales transmitidas por los satélites utilizan una **modulación de espectro ensanchado**, que se basa en utilizar una banda de transmisión mucho mayor que la de la señal de información. El aumento o ensanchamiento de la banda se realiza gracias a estos códigos pseudoaleatorios de anchos de banda mucho mayores que el de la señal de información. A este método se le conoce como la técnica de **acceso múltiple por división de código** o CDMA[24].
Existen diferentes métodos de modulación, uno de ellos es la **modulación por desplazamiento de fase** o PSK. En esta modulación la fase portadora es desplazada 180° cuando el valor del código cambia de -1 a +1 o de +1 a -1. La Figura 2.16 muestra cómo el código modula la portadora.

Portadoras
La señal portadora es una onda sinusoidal en banda L (ver Tabla E.1 en Apéndice), cada una con una frecuencia distinta. En la Tabla 2.5 se resumen las frecuencias de las portadoras de los principales sistemas GNSS (las cuales se basan en los osciladores de los satélites, que generan una frecuencia fundamental $f_0 = 10.23\ [MHz]$).

[20] La onda se llama "portadora" porque se utiliza como medio para transportar información.
[21] La modulación es la técnica usada para transportar información sobre una onda portadora de baja frecuencia, típicamente una onda sinusoidal.
[22] *Pseudorandom noise.*
[23] Los códigos pseudoaleatorios, por sí mismos, no llevan ninguna información, por lo que se utiliza el término chip en lugar del término bit para referirse a sus elementos.
[24] La multiplexación por división de código, acceso múltiple por división de código o CDMA es un término genérico para varios métodos de control de acceso al medio basados en la tecnología de espectro expandido.

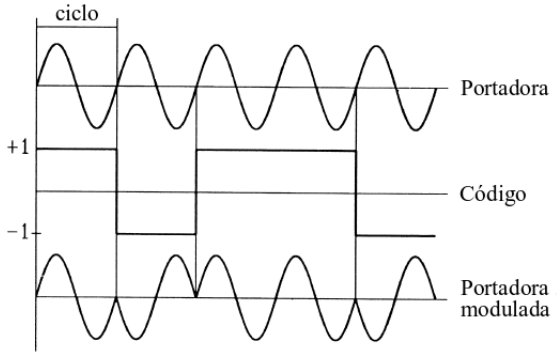


Figura 2.16: Modulación PSK de la onda portadora (Hofmann-Wellenhof et al., 1994).

Tabla 2.5: Frecuencias de las portadoras de los GNSS. (Leick et al., 2015)

Sistema	Portadora	Frecuencia [MHz]
GPS	L1	1575.42
	L2	1227.60
	L5	1176.45
GLONASS	L1	1601.72
	L2	1245.78
	L3	1202.03
Galileo	E1	1 575.42
	E5a	1176.45
	E5b	1207.14
	E6	1278.75
BeiDou	B1	1561.10
	B2	1207.14
	B3	1268.52

Códigos del sistema GPS

En el caso del sistema GPS, la política actual del gobierno de Estados Unidos es hacer que éste esté disponible en dos servicios. El servicio de posicionamiento preciso (PPS) está disponible sólo para militares y otros usuarios privilegiados. El servicio de posicionamiento estándar (SPS) está disponible para cualquier persona (Leick et al., 2015). Los usuarios SPS pueden observar los códigos públicos C/A, L1C, L2C y L5. Estos últimos tres códigos se comenzaron a emitir con la modernización del sistema GPS.

La capacidad de posicionamiento de los usuarios SPS fue degradada por los efectos de la disponibilidad selectiva (*SA*), que implicó una alteración intencional de los relojes satelitales y la falsificación del mensaje de navegación.

La encriptación del código P(Y) es conocida como *AS* o *Anti spoofing*. Cuando el AS está activado implica cambiar el código P (conocido) al código Y encriptado, expresado por la notación P(Y). El propósito de la AS es hacer que los códigos P estén disponibles sólo para usuarios militares. El código C/A (*Coarse Adquisition*), en cambio, no está sujeto a las medidas AS.

El mensaje de navegación

El tercer componente de la señal es el mensaje de navegación. El mensaje es enviado a una tasa bastante lenta de 50 [bps], y se repite cada 30 segundos.

El mensaje de navegación contiene, junto con otra información, las coordenadas de los satélites como una función del tiempo, el estado de salud del satélite, las correcciones del reloj del satélite, el almanaque del satélite y los datos atmosféricos.

Resumen de señales GNSS

En la Figura 2.17 se muestran las frecuencias de las portadoras en la banda L de radiofrecuencia de las diferentes señales GNSS, además de los códigos que son modulados sobre cada portadora.

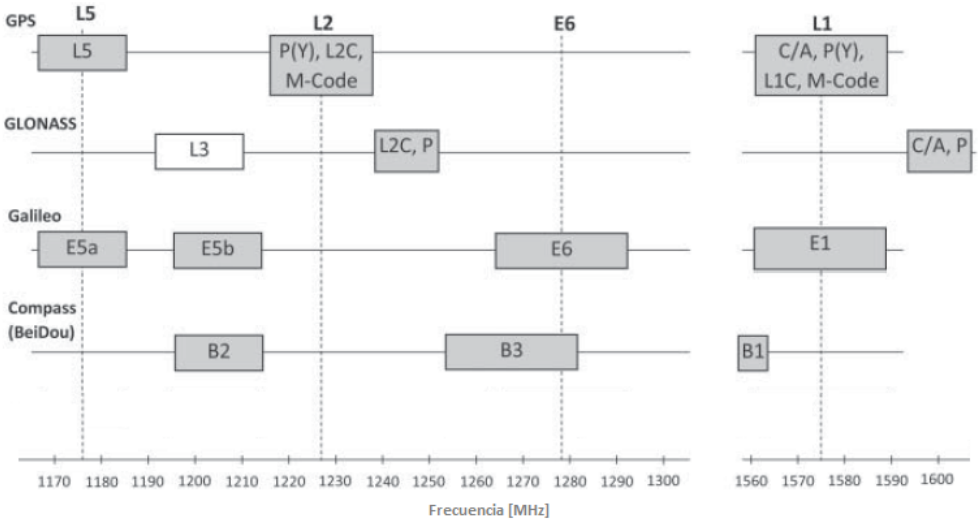


Figura 2.17: Ubicación de las bandas de frecuencia de las señales GNSS. (Modificado de Leick et al., 2015)

A continuación se explican los métodos de cálculo de la distancia receptor-satélite mediante los códigos PRN y también mediante las fases de las portadoras.

2.4.2. Posicionamiento mediante Códigos PRN

La distancia entre el receptor y el satélite, r, se calcula midiendo el tiempo de propagación requerido para que la señal emitida por el satélite llegue a la antena del receptor. El proceso de medición del tiempo de propagación se muestra en la Figura 2.18.

Para calcular el tiempo que tarda la señal del satélite hasta el receptor, el satélite emite un código, en un tiempo t_1, el cual llega al receptor en el tiempo t_2; el tiempo de propagación es representado por Δt. Mientras, el receptor genera una réplica exacta (dado que tiene en su memoria la estructura de este código) en el tiempo t, con respecto al reloj del satélite. Entonces, el receptor compara los códigos y empieza a retardar su señal hasta lograr que coincida con la señal proveniente del satélite. Si los relojes del receptor y el satélite estuviesen perfectamente sincronizados, el tiempo de retardo sería igual al tiempo de propagación; y multiplicando este tiempo de propagación Δt por la velocidad de la luz, se podría obtener la distancia geométrica entre el satélite y el receptor. Sin

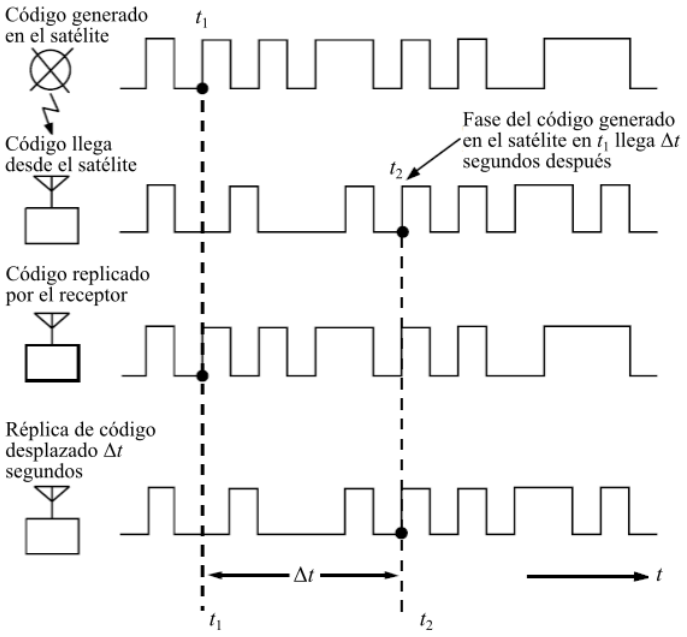


Figura 2.18: Uso de la réplica del código para determinar el tiempo de propagación de la señal. (Modificado de Kaplan y Hegarty, 2006)

embargo, los relojes no están generalmente sincronizados.
A la distancia determinada por este proceso de retardo se le conoce como **pseudodistancia**, ρ, ya que ésta se determina multiplicando la velocidad de la luz c, por una diferencia de tiempo entre dos relojes no sincronizados (del receptor y del satélite). Esta medición incluye: (1) la distancia geométrica satélite-receptor, (2) un desfase atribuido a la diferencia entre el tiempo del sistema y el reloj del receptor y (3) un desfase entre el tiempo del sistema y el reloj del satélite. Las relaciones de tiempo se muestran en la Figura 2.19, donde:

T_s : tiempo del sistema en el que se emite la señal desde el satélite

T_r : tiempo del sistema en el que la señal llega al receptor

t_s : desfase del reloj del satélite (adelantado si es postivo, retraso si es negativo)

t_r : desfase del reloj del receptor

$T_s + t_s$: tiempo en que se emite la señal desde el satélite, según el reloj del satélite

$T_r + t_r$: tiempo en que la señal llega al receptor, según el reloj del receptor

La distancia geométrica (r) y la pseudodistancia (ρ) vienen dadas por las siguientes expresiones, respectivamente:

$$r = c\ (T_r - T_s) = c \cdot \Delta t \tag{2.7}$$

$$\begin{aligned} \rho &= c\ [(T_r + t_r) - (T_s + t_s)] \\ &= c\ (T_r - T_s) + c\ (t_r - t_s) \\ &= r + c\ (t_r - t_s) \end{aligned} \tag{2.8}$$

Donde c es la velocidad de la luz.

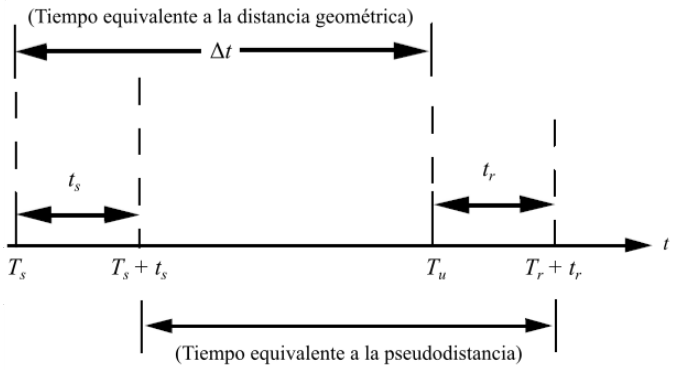


Figura 2.19: Relaciones de tiempo en la medición de pseudodistancia. (Modificado de Kaplan y Hegarty, 2006)

2.4.3. Posicionamiento mediante las Fases de las Portadoras

Otra forma de determinar la distancia satélite-receptor es mediante las fases de las portadoras. Las mediciones hechas con las portadoras son más precisas que aquellas obtenidas con código. Esto se debe a que la longitud de onda de la portadora (19 [cm] en el caso de L1) es mucho menor que la de los códigos (300 [m] en el caso del C/A). Sin embargo, las portadoras son sólo ondas sinusoidales, lo que significa que todos los ciclos lucen iguales, por lo que un receptor no puede diferenciar un ciclo de otro. Éste sólo puede medir la fracción de ciclo (número no entero) con bastante precisión, mientras que el número entero de ciclos permanece desconocido, o ambiguo; por esto, este número entero de ciclos es comúnmente llamado **ambigüedad**. Afortunadamente, el receptor tiene la capacidad de hacer un seguimiento de los cambios de fase luego de ser encendido. Esto significa que la ambigüedad no cambia en el tiempo, mientras la señal no se pierda, ni ocurran deslizamientos de ciclo[25] (Wells et al., 1987).

La fase de la portadora $\phi_s(t)$ con frecuencia f_s y la fase de la portadora generada en el receptor $\phi_r(t)$ con frecuencia f_r, se obtienen mediante la ecuación (2.9), obtenida a partir de (B.5) (ver Apéndice B). Aquí el parámetro t es una época en el sistema de tiempo GPS calculado desde una época inicial $t_0 = 0$.

$$\begin{aligned} \phi_s(t) &= f_s\, t - f_s\, \frac{r}{c} + \phi_{s0} \\ \phi_r(t) &= f_r\, t + \phi_{r0} \end{aligned} \tag{2.9}$$

Recordar que r representa la distancia entre el satélite (en el tiempo de emisión T_s) y el receptor (en el tiempo de recepción T_r). Las fases iniciales ϕ_{s0} y ϕ_{r0} son causadas por los errores en los relojes y equivalen a:

$$\begin{aligned} \phi_{s0} &= f_s\, t_s \\ \phi_{r0} &= f_r\, t_r \end{aligned} \tag{2.10}$$

t_s y t_r corresponden a los desfases de los relojes del satélite y del receptor, respectivamente.
Por lo tanto, el desfase (también llamado fase *beat*) está dado por:

$$\phi_b\,(t) = \phi_s(t) - \phi_r(t) = f_s\, \left(t_s - \frac{r}{c}\right) - f_r\, t_r + (f_s - f_r)\, t \tag{2.11}$$

[25] Un deslizamiento de ciclo es un salto espontáneo de un número entero de ciclos en una observable de portadora de fase, causado por la pérdida de fijación de un bucle fijo de fase del receptor.

La desviación de las frecuencias f_s y f_r con respecto a la frecuencia nominal f es del orden de una pequeña parte fraccional de Hz, es decir, estas frecuencias difieren por muy poco. Esto se pude verificar considerando, por ejemplo, una estabilidad de corto plazo $df/f = 10^{-12}$ en las frecuencias. Con una frecuencia nominal de la portadora (L1) $f \approx 1.5$ [GHz], el error es de $df = 1.5 \cdot 10^{-3}$ [Hz]. Este error puede ser despreciado debido a que durante el tiempo de propagación de la señal (es decir, $\Delta t \approx 0.07$ [s]) se genera un error máximo de 10^{-4} ciclos en el desfase, el cual es menor que el nivel de ruido. Los errores de los relojes están en el rango de milisegundos y son, por ende, menos efectivos. En resumen, la ecuación (2.11) puede ser reescrita en una forma más simplificada (Asumiendo $f_s \approx f_r \approx f$):

$$\phi_b(t) = f\ (t_s - t_r) - f\,\frac{r}{c} \tag{2.12}$$

Al encender un receptor en la época t_0, se mide la parte fraccional del desfase instantáneo. El número entero inicial N de ciclos entre el satélite y el receptor es desconocido. Sin embargo, con un rastreo continuo, sin pérdida de señal, el número N, también llamada ambigüedad, permanece constante y el desfase en la época t está dada por:

$$\phi_b(t) = \Delta\phi_b|_{t_0}^{t} + N \tag{2.13}$$

donde $\Delta\phi_b$ denota la parte fraccional "medible" del desfase en la época t, aumentada por el número de ciclos enteros desde la época inicial t_0. La Figura 2.20 muestra una interpretación geométrica de la ecuación (2.13), donde $\Delta\phi_i$ es la notación para $\Delta\phi_b|_{t_0}^{t_i}$ y , por simplicidad, la fase *beat* fraccional inicial $\Delta\phi_0$ se asume igual a cero. Reemplazando la ecuación (2.13) en la ecuación (2.12) y denotando $\phi = -\Delta\phi_b$, se obtiene la expresión para la distancia en función de la fase:

$$\phi = \frac{c}{\lambda}(t_r - t_s) + \frac{r}{\lambda} + N \tag{2.14}$$

donde λ es la longitud de onda.

Nótese que la convención de signos de la ecuación (2.14) es arbitrario, ya que a menudo la fase ϕ y la distancia r muestran signos distintos. En realidad, el signo depende del receptor, ya que el desfase es generado en el receptor y la combinación de la señal entre el satélite y el receptor difiere para cada tipo de receptor.

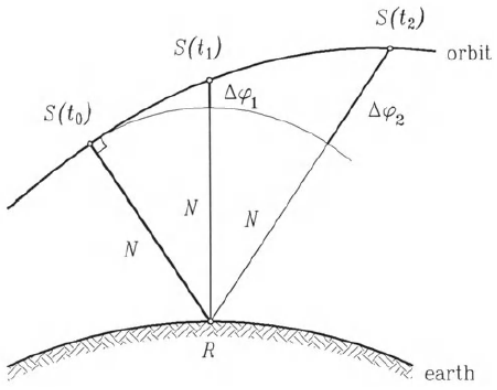


Figura 2.20: Interpretación geométrica del desfase. (Hofmann-Wellenhof et al., 1994)

Deslizamientos de Ciclo

Un deslizamiento (también llamado corrimiento o salto) de ciclo se define como una discontinuidad o un salto espontáneo en la ambigüedad N, causado por la pérdida temporal de la señal. Esta pérdida de señal puede ocurrir por: la obstrucción de edificios, puentes, árboles, u otros objetos, en la señal del satélite; un bajo nivel de SNR[26], debido a las perturbaciones ionosféricas severas, el efecto multipath, un alto nivel de la dinámica del receptor, o a un bajo ángulo de elevación del satélite, puede también causar pérdida de señal; una tercera causa es un mal funcionamiento del receptor, que se traduce en un procesamiento erróneo de la señal (Hofmann-Wellenhof et al., 1994). Los deslizamientos de ciclo pueden ocurrir de manera breve o se pueden mantener por varios minutos o incluso más. Este fenómeno debe ser identificado y corregido para evitar errores considerables en el cálculo de posición. Uno de los métodos de corrección más convenientes es el basado en la diferencia triple (ver Sección).
Varios autores han propuesto métodos para corregir automáticamente posibles deslizamientos de ciclos, como Banville y Langley (2012) o Carcanague (2012).

2.5. Fuentes de Error y Retrasos en Señales GNSS

Como se mencionó anteriormente, las mediciones GNSS están sujetas a errores y sesgos que dependen de los satélites, del receptor y de la propagación de la señal. La Figura 2.21 muestra un esquema en donde se clasifican los diferentes errores en las mediciones GNSS, según la fuente. A continuación, se describen estos errores.

2.5.1. Errores Relacionados con los Satélites

Errores Orbitales o de Efemérides

La posición de cada satélite, en función del tiempo, la cual está incluida en el mensaje de navegación, está pronosticada por observaciones previas en las estaciones de control. Generalmente, se utilizan datos de 4 horas superpuestos por el sistema de control, para predecir las órbitas de los satélites para periodos de 1 hora. Como es de esperarse, la modelación de las fuerzas que actúan sobre los satélites no es perfecta, existiendo errores en la estimación de la posición de cada satélite. Las correcciones de estos errores son generadas usando una curva de ajuste de la mejor predicción del segmento de control para la posición de cada satélite. La posición residual del satélite es un vector que tiene magnitudes típicas en el rango de 1-6 [m] (Taylor y Barnes, 2005).
El error efectivo de pseudodistancia o fase de portadora debido a la predicción de efemérides es del orden de 0.8 [m] (Warren y Raquet, 2003).

Errores en los Relojes de los Satélites

Como ya se mencionó, los satélites contienen relojes atómicos que controlan todas las operaciones de sincronización, incluyendo la emisión de la señal. A pesar de que los relojes son altamente estables, las correcciones en el mensaje de navegación son tales que la desviación entre el tiempo

[26] La relación señal/ruido, o SNR, define la relación entre la potencia de una señal con la potencia del ruido que la corrompe. Ésta se mide en decibelios.

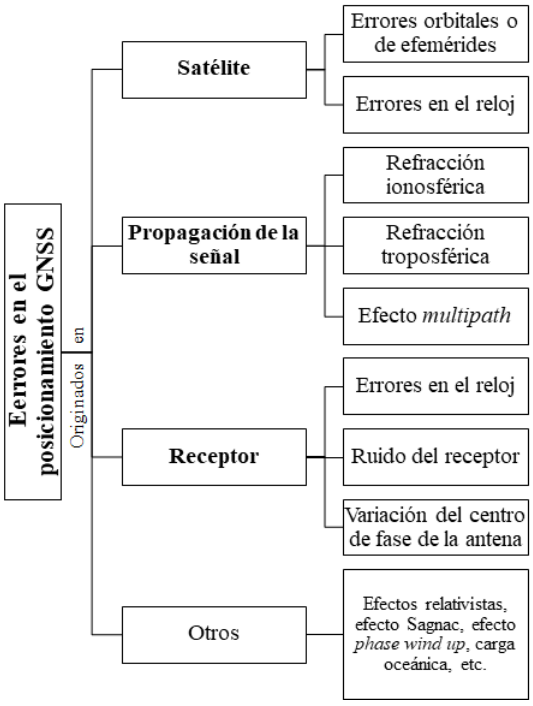


Figura 2.21: Clasificación de fuentes de error en posicionamiento GNSS.

del satélite y el tiempo GPS pueden ser del orden de 1 [ms] (un retardo de 1 [ms] significa un error de pseudodistancia de 300 [km]). La estación de control maestra determina y retransmite los parámetros de corrección del reloj a los satélites en el mensaje de navegación. Ya que estos parámetros son calculados usando una curva de ajuste para estimar los errores del reloj del satélite, algunos errores residuales perduran. Este error residual varía entre 0.3 - 4 [m], dependiendo del tipo de satélite y la época de los datos emitidos (Kaplan y Hegarty, 2006).

2.5.2. Errores Producidos en la Propagación de la Señal

Error Ionosférico

En la parte más alta de la atmósfera terrestre, la radiación ultravioleta y los rayos X que provienen desde el sol interactúan con las moléculas y átomos de gas. Estas interacciones resultan en la ionización: un gran número de electrones libres "cargados negativamente" y átomos y moléculas "cargados positivamente" (Klobuchar, 1991). Esta región de la atmósfera donde toma lugar la ionización se llama ionósfera. Ésta se extiende desde una altitud aproximada de 50 [km] hasta los 1000 [km] o incluso más (el límite máximo de la ionósfera no está claramente definido) (Komjathy, 1997).
Estos electrones libres influyen en la propagación de ondas electromagnéticas, incluyendo las señales emitidas por los satélites, las cuales se refractan, retardando su velocidad. El error ionosférico es proporcional a la densidad de electrones libres, la cual varía según la altura, y se mide mediante el **contenido total de electrones** (TEC). Se expresa en unidades de $electrones/m^2$ u ocasionalmente en unidades TEC (TECU), donde 1 TECU se define como 10^{16} $[electrones/m^2]$.
El TEC depende de varios factores: (1) el tiempo del día (el nivel de densidad de electrones alcanza

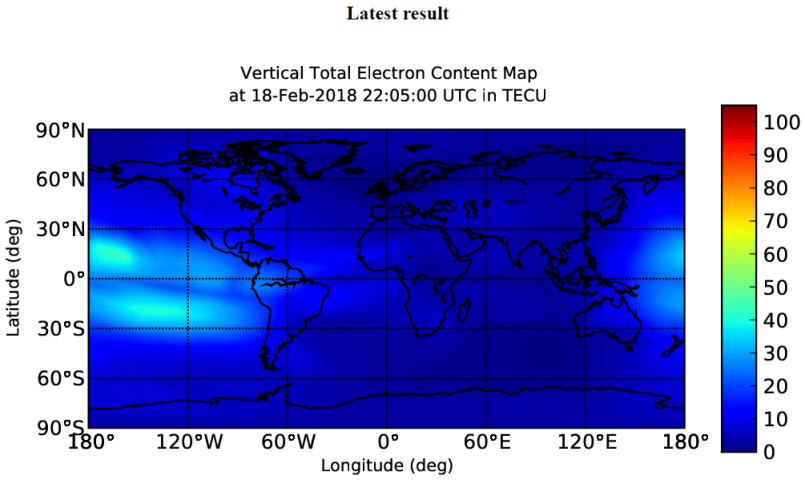


Figura 2.22: Contenido total de electrones, en TECU, del 18 de febrero del 2018 (cortesía de NASA/JPL-Caltech).

el máximo cerca del mediodía y el mínimo durante la medianoche de la hora local), (2) la localización geográfica (la densidad de electrones es mínima en las latitudes medias y altamente irregular en las regiones polar y ecuatorial, como se ve en la Figura 2.22), (3) el ángulo de elevación del satélite, (4) la estación del año (los niveles de electrones son más altos en invierno que en verano), (5) el flujo de iones, (6) la actividad magnética, (7) los ciclos de manchas solares (aproximadamente cada 11 años se alcanza el *peak* de las llamaradas solares, en donde la densidad de electrones alcanza el máximo valor) y (8) el centelleo[27].

La ionósfera es un medio disperso y esto causa un retraso que depende de la frecuencia de la señal. El error ionosférico, α_{iono}, es inversamente proporcional al cuadrado de la frecuencia de la portadora, f, (Kaplan y Hegarty, 2006)

$$\alpha_{iono} = \frac{I_{iono}}{f^2} \tag{2.15}$$

y generalmente está en el orden de 5-15 [m], pero puede alcanzar valores de 150 [m] bajo actividades solares extremas (Wells et al., 1987). En (2.15) I_{iono} es una constante que dependerá de las características de la ionósfera: hora del día, localización del receptor, ángulo de elevación del satélite, estación del año, etc., que puede hacer variar el retardo α_{iono}.

Como el error ionosférico depende de la frecuencia, éste puede ser virtualmente eliminado con un receptor multifrecuencia. Combinando las medidas diferenciales de la fase de la portadora hechas en L1 y L2, se pueden estimar ambos retrasos (sin considerar el efecto *multipath* y los ruidos del receptor), y generar una combinación lineal para ser removidos. Las desventajas de esta combinación lineal, sin embargo, son: (1) tiene un ruido de observación relativamente más alto y (2) no preserva la integridad natural de los parámetros de la ambigüedad.

Por otro lado, los receptores monofrecuencia no pueden tomar ventaja de la naturaleza dispersiva de la ionósfera, pero pueden remover la mayor parte del error ionosférico mediante la **medición diferencial** con una corta separación entre receptores (ver Sección 3.3).

[27] Es un término genérico para las variaciones en el brillo aparente o la posición de un objeto luminoso distante visto a través de un medio.

Por otro lado, el uso de modelos empíricos permite corregir hasta el 60 % del error ionosférico (Klobuchar, 1991).

Error Troposférico

La tropósfera es la capa más baja de la atmósfera, eléctricamente neutral, la cual tiene un comportamiento no dispersivo para frecuencias de hasta 15 [GHz] (Hofmann-Wellenhof et al., 1994). Como resultado, los retardos en la portadora y en el código son idénticos. A diferencia del error ionosférico, este retardo no puede ser removido combinando las observaciones multifrecuencia. Esto se debe principalmente a que el error troposférico no depende de la frecuencia; sino que depende de la temperatura, la presión y la humedad a lo largo del recorrido de la señal, a través de la tropósfera. El error troposférico es mínimo cuando la señal proviene de un satélite en el cenit (justo arriba) del receptor y máximo cuando se encuentra en las cercanías del horizonte. Resultan errores alrededor de 2.3 [m] en el cenit y 20-28 [m] para un ángulo de elevación de 5° (Brunner y Welsch, 1993).
La refracción troposférica puede ser modelada mediante dos componentes: la "seca" (hidrostática) y la "húmeda" (no hidrostática). La componente seca, la cual está relacionada con el aire seco, representa el 90 % del retardo y puede ser pronosticada con bastante precisión usando modelos matemáticos (Leick, 1995). La componente húmeda depende del vapor de agua; a diferencia de la componente seca, ésta no es fácil de predecir. Varios modelos usan las mediciones meteorológicas (presión atmosférica, temperatura, y presión parcial de vapor) para calcular la componente húmeda. Desafortunadamente, la componente húmeda está débilmente correlacionada con los datos meteorológicos, lo que limita la exactitud de la predicción.

Trayectoria Múltiple o *Multipath*

Uno de los errores más significativos durante el proceso de medición es la trayectoria múltiple o *multipath*. Este efecto ocurre cuando la señal llega a la antena del receptor a través de diferentes rutas (Wells et al., 1987). Estas rutas pueden ser la línea de visión directa de la señal y señales reflejadas en objetos cercanos a la antena del receptor, por lo que los errores provocados por el efecto*multipath* varían significativamente en magnitud dependiendo del entorno en el cual se encuentre el receptor, del ángulo de elevación del satélite, el procesamiento de la señal que tenga el receptor, el tipo de antena y las características de la señal.
La trayectoria múltiple distorsiona la señal original mediante la perturbación de la señal reflejada que llega a la antena. Esto afecta tanto a las mediciones de fase como a las mediciones de pseudodistancia; sin embargo, la influencia es más grande en estas últimas mediciones. El error *multipath* en las mediciones de fase puede alcanzar valores máximos igual a un cuarto de ciclo (cerca de 4.8 [cm] para la portadora L1). El efecto *multipath* en la pseudodistancia teóricamente puede alcanzar varias decenas de metros para mediciones con el código C/A (El-Rabbany, 2002).
Existen varias opciones para reducir el efecto *multipath*, la más sencilla consiste en seleccionar un sitio sin objetos cercanos a la antena del receptor que puedan reflejar la señal. Otra opción es usar una antena "chock ring", un dispositivo que tiene varios anillos metálicos concéntricos, los cuales atenúan las señales reflejadas.

2.5.3. Errores Relacionados con el Receptor

Errores en el Reloj del Receptor

Los receptores, a diferencia de los satélites, usan relojes económicos de cristal de cuarzo, los cuales son mucho menos precisos. Los errores del reloj del receptor son mucho mayores que los del satélite (Kleusberg y Langley, 1990), sin embargo éstos pueden ser removidos mediante técnicas diferenciales (diferenciación entre satélites) (ver Sección 3.3.1) o pueden ser tratados como un parámetro desconocido adicional en el proceso de estimación.

Ruido del Receptor

El ruido del receptor proviene del hecho de que las observables de fase y código no pueden ser medidas perfectamente, sino que están sujetas a influencias aleatorias.
La resolución de la observación de receptores clásicos, es cerca del 1 % de la longitud de onda de la señal (Seeber, 2003). Para las señales del sistema GPS, se obtiene:

Código C/A	$\lambda \approx 300$ [m],	ruido ≈ 3 [m],
Código P	$\lambda \approx 30$ [m],	ruido ≈ 30 [cm],
Portadora	$\lambda \approx 20$ [cm],	ruido ≈ 2 [mm].

El ruido del receptor proviene de las limitaciones electrónicas del receptor. La contribución del ruido del receptor al error de la distancia dependerá de la calidad del receptor. Un buen sistema debiese tener un nivel de ruido mínimo.
Generalmente, en un receptor se realiza una prueba cuando se enciende. Dos pruebas se pueden realizar para evaluar un receptor: la **prueba de línea base cero** y la **prueba de línea base corta** (Nolan et al., 1992).
La prueba de línea base cero es usada para evaluar el desempeño del receptor. Esta prueba involucra usar una antena conectada mediante un bifurcador a dos o más receptores GNSS. Como se usa sólo una antena, la línea base debe ser cero; es decir, cualquier valor distinto de cero es atribuido al ruido del receptor. Según Shaw y Turner (2000) los valores típicos para el error debido al ruido del receptor están en el orden de 0.6 [m] (1σ).
Para evaluar el desempeño real de un GNSS, es necesario considerar el ruido de la antena. Esto se puede hacer usando una línea base corta (de unos pocos metros), midiendo durante dos días consecutivos. En este caso, las residuales de diferencia doble (ver Sección 3.3.1) entre dos días consecutivos eliminan los errores del efecto *multipath* y dejan sólo los ruidos del sistema (El-Rabbany, 2002).

Variación del Centro de Fase de la Antena

La antena del receptor GNSS recibe la señal del satélite y convierte la energía en corriente eléctrica, la cual puede ser manejada por el receptor. El punto en el cual la señal es recibida se llama **centro de fase de la antena** (Hofmann-Wellenhof et al., 1994). Generalmente, el centro de fase de la antena no coincide con el centro físico (geométrico) de la antena. Esta variación depende de la elevación y el azimut del satélite, y de la intensidad de la señal observada.
El error causado por la variación del centro de fase de la antena depende del tipo de antena, y está en el orden de unos pocos centímetros. Sin embargo, es difícil modelar esta variación y, por

ende, se debe tener cuidado en seleccionar el tipo de antena (Kleusberg y Langley, 1990). Para líneas base cortas con el mismo tipo de antena (en cada caso), el error de centro de fase puede ser cancelado si las antenas están orientadas en la misma dirección (Schupler y Clark, 1991). Mientras se utilice diferentes tipos de antenas o diferentes orientaciones, el error no se cancelará. Debido a que es bastante pequeño, generalmente este error es ignorado en la práctica.

2.5.4. Efectos Relativistas

Las teorías de Einstein (general y especial) de relatividad son factores que influyen en los procesos de medición de pseudodistancia y fase portadora (Ashby y Spilker, 1996). La necesidad de las correcciones de relatividad especial surgen cada vez que la fuente de la señal (en este caso el satélite) o el receptor de la señal, se muevan con respecto al marco de referencia escogido de la velocidad de la luz, el cual, en este caso es el marco de referencia inercial centrado en la Tierra, ECI. La necesidad de las correcciones de la relatividad general surgen debido a que la fuente y el receptor de la señal se encuentran en diferentes potenciales gravitacionales.
El reloj del satélite se ve afectado por la relatividad general y la relatividad especial. Para compensar estos efectos, la frecuencia del reloj se ajusta a 10.22999999543 [MHz] antes del lanzamiento (ARINC Research Corporation, 2004). La frecuencia observada por el usuario al nivel del mar será de 10.23 [MHz]; por lo que el usuario no tiene que corregir este efecto.
Cuando el satélite está en su perigeo[28], la velocidad del satélite es mayor y el potencial gravitacional es menor, ambos efectos causan que el reloj del satélite corra más lento. Cuando el satélite está en su apogeo[29], la velocidad del satélite es menor y el potencial gravitacional mayor, lo que causa que el reloj del satélite corra más rápido (Ashby y Spilker, 1996). Según Seeber (1993) el efecto relativista puede alcanzar un máximo de 70 [ns] (21 [m] de error de distancia). Corrigiendo el reloj del satélite para este efecto resulta una estimación más precisa del tiempo de transmisión para el usuario.

2.5.5. Configuración Geométrica de los Satélites

La geometría satelital, la cual representa la ubicación de los satélites desde la perspectiva del(los) receptor(es), juega un papel importante en la precisión de la posición. Una buena geometría satelital se obtiene cuando los satélites están dispersos (o extendidos) por el cielo. En general, mientras mayor es la dispersión de los satélites, mejor es la geometría satelital, y viceversa. En la Figura 2.23 se muestra una representación gráfica simple del efecto de la geometría satelites usando dos satélites (asumiendo un caso 2D). En cada caso, el receptor se encuentra en la intersección de los dos arcos con radio igual a la distancia receptor-satélite. Como las mediciones contienen errores, esta distancia no es exacta y se presenta una región de incertidumbre (zona sombreada), donde se puede decir que el receptor se encontrará en algún lugar de esa área. Mientras más pequeño es el tamaño del área de incertidumbre, el cálculo de la posición del receptor será más preciso. Por el contrario, si ambos satélites están más cercanos [Figura 2.23(b)], el tamaño del área sombreada será mayor, resultando una geometría satelital pobre.
El efecto de la geometría satelital se puede medir mediante parámetros adimensionales llamados **dispersión de precisión** (DOP). Mientras menor sea el valor de DOP, mejor es la geometría, y

[28] Punto de la órbita de un satélite en el que existe menos distancia con respecto al centro de la Tierra.
[29] Punto de la órbita un satélite en el que existe mayor distancia con respecto al centro de la Tierra.

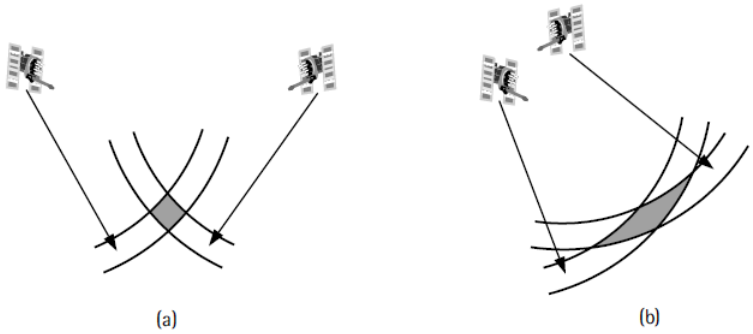


Figura 2.23: Geometría relativa y dispersión de precisión: (a) geometría con bajo DOP, y (b) geometría con alto DOP (El-Rabbany, 2002).

viceversa (Hofmann-Wellenhof et al., 1994). El número DOP es calculado en base a la geometría relativa receptor-satélite en cualquier instancia, por lo que requiere la disponibilidad de las coordenadas tanto del receptor como de los satélites.
En la práctica, se usan varios parámetros DOP, dependiendo de la necesidad del usuario. El parámetro PDOP representa la contribución de la geometría satelital a la precisión del posicionamiento 3D. El parámetro PDOP se puede dividir en dos componente: la dispersión de precisión horizontal (HDOP) y la dispersión de precisión vertical (VDOP). El primero representa el efecto de la geometría satelital en la precisión de la posición en el plano, mientras que el segundo representa el efecto de la geometría satelital en la precisión de la componente vertical. Debido a que los receptores sólo pueden rastrear los satélites que están por encima del horizonte, el valor de VDOP siempre será mayor que el de HDOP. Por lo tanto, la medición de la altura será menos precisa que la medición horizontal de una cierta posición.
Otros parámetros DOP comúnmente usados son la dispersión de precisión temporal (TDOP) y la dispersión de precisión geométrica (GDOP), la cual representa la combinación de PDOP y TDOP. En el Apéndice C.2 se describe el cálculo de estos parámetros DOP y la relación entre ellos.

Capítulo 3

Métodos de Posicionamiento GNSS

3.1. Técnicas Principales

En general, para el posicionamiento GNSS se pueden considerar varias técnicas, las cuales dependen de: (1) la observable utilizada, (2) la inmediatez del procesamiento de datos, (3) si se utilizan técnicas diferenciales, (4) la movilidad del receptor y (5) la capacidad del receptor de rastrear una o más frecuencias. La Tabla resume estas opciones a considerar al momento de realizar mediciones con receptores GNSS.
A continuación, se definen y comparan estas técnicas (Hofmann-Wellenhof et al., 1994).

1. **Código versus Fase de Portadora**
   Usualmente, las observables son pseudodistancias obtenidas a partir de mediciones de código o de fase de portadora. En general, la precision de las mediciones con código está en el orden del metro, mientras que la precisión obtenida con la fase de la portadora está en el nivel milimétrico. Sin embargo, la precisión de la distancia obtenida por códigos puede ser mejorada mediante técnicas de suavizamiento. A diferencia de las fases de portadora, las mediciones con códigos, virtualmente, no son ambiguas. Esto las hace inmune a los deslizamientos de ciclo.

2. **Procesamiento en Tiempo Real versus Postproceso**
   Para calificar como tiempo real, la posición debe estar disponible en inmediatamente o mientras se esté midiendo. Los resultados son denotados como "instantáneos" si las observables de una época son usados para el cálculo de la posición y el tiempo de procesamiento es despreciable. Una definición diferente y menos restrictiva es la medición en "tiempo real", en donde los resultados se calculan después de una época de observación.
   El postproceso ocurre cuando los datos son recolectados y procesados después de la medición. Generalmente, los datos no son procesados en campo (*in situ)* y se combinan mediciones provenientes de diferentes lugares.

3. **Posicionamiento Absoluto versus Posicionamiento Relativo**
   Las coordenadas de un punto único se pueden determinar mediante posicionamiento absoluto usando sólo un receptor, el cual mide las distancias a los (generalmente cuatro o más) satélites. En cambio, en el posicionamiento relativo se utilizan dos (o más) receptores, los cuales miden (mediante código o fase de portadora), a partir de los mismos satélites, desde varios lugares simultáneamente. La precisión es mejor que en el caso del posicionamiento absoluto debido al procesamiento de los datos obtenidos desde ambos sitios. Normalmente, las coordenadas de un sitio son conocidas y la posición del otro sitio se determina a partir del primero, es decir, se determina el vector entre ellos.

4. **Estático versus Cinemático**
   Estático quiere decir un lugar de observación estacionario, mientras que cinemático implica

movimiento. Una pérdida temporal de la señal en modo estático no es tan crítica como en un modo cinemático[1].

Los términos "estático" y "cinemático" deben considerarse en el contexto del posicionamiento absoluto o relativo. Ejemplos típicos de estos modos son:

- **Posicionamiento estático absoluto**: es útil si se necesita una precisión moderada. Después de un corto tiempo de observación, se puede alcanzar una precisión de unos 10 [m].
- **Posicionamiento cinemático absoluto**: puede ser usado para determinar trayectorias de vehículos en función del tiempo.
- **Posicionamiento estático relativo** mediante fases de portadoras: es el método más usado por topógrafos. Se basa en determinar el vector entre dos receptores, llamado "línea base". En este método se pueden alcanzar precisiones de 1 a 0.1 ppm[2], lo que es equivalente a una precisión milimétrica para líneas base de hasta algunos kilómetros.
- **Posicionamiento cinemático relativo**: involucra un receptor estacionario y otro móvil. Ambos realizan observaciones simultáneamente. Las aplicaciones posibles son las mismas que con el posicionamiento cinemático absoluto pero las precisiones son mejores. Éstas están en el nivel del metro, para mediciones con código, y en el nivel del centímetro, para mediciones con fases de portadoras (Cannon et al., 1986).

5. Monofrecuencia versus Multifrecuencia

Existen receptores capaces de rastrear sólo una frecuencia portadora (por ejemplo, L1 en el caso del sistema GPS), a éstos se les llama receptores monofrecuencia; y también se encuentran los receptores que pueden utilizar más de una frecuencia (L1, L2, L5, etc.), es decir, receptores multifrecuencia, con lo cual se pueden obtener mejores niveles de precisión, pero con el inconveniente de que tienen un mayor costo.

3.2. Posicionamiento Absoluto

En la Sección 2.4 se describen los métodos para calcular la distancia receptor-satélite, mediante los códigos PRN y también mediante las fases de portadoras.

Como se mencionó, el posicionamiento absoluto se realiza mediante sólo un receptor, el cual calcula su posición en base a cuatro o más satélites. En los Apéndices C.1 y C.3 se describe el proceso de estimación de la posición del receptor, considerando los errores mostrados en la Sección 2.5.

Estimación de Errores de Pseudodistancia

El error de la posición depende de los errores que afectan la medición de pseudodistancia y de la geometría receptor-satélites (dispersión de la precisión o DOP).

La estimación del error de distancia equivalente al usuario (UERE[3]) se puede descomponer según

[1] Nótese la diferencia entre los términos "cinemático" y "dinámico". El concepto "dinámico" requiere el conocimiento de las fuerzas que actúan en el movimiento, mientras que el concepto "cinemático" tiene que ver con la medición del movimiento en un sistema de coordenadas tridimensional. El modelamiento de la órbita de un satélite es un procedimiento dinámico. Como las posiciones de los satélites se asumen como conocidas, el posicionamiento de un receptor puede ser considerado como un procedimiento cinemático.

[2] ppp: partes por millón.

[3] *User equivalent range errors.*

cada fuente. Se asume que las componentes del error son normalmente distribuidas. Para calcular el error de distancia equivalente al usuario se utiliza el método de la raíz de la suma de los cuadrados (RSS), donde se asume que los errores pueden ser considerados como variables aleatorias independientes, de modo que la suma de las desviaciones, o el error total $1\sigma_{total}$ es:

$$1\sigma_{total} = \sqrt{\sum (1\sigma)^2} \tag{3.1}$$

donde 1σ son los valores individuales.
La Tabla 3.1 muestra los valores de error (1σ) en distancia producidos por las diferentes fuentes, y el valor del UERE total calculado por RSS en las mediciones de código C/A, según dos referencias diferentes[4].

Tabla 3.1: Errores típicos de posición del servicio de posición estándar (SPS) GPS. (Kaplan y Hegarty (2006); Bernhard Hofmann-Wellenhof (2007)

Fuente de error	**Error (1σ) [m]** (Kaplan y Hegarty, 2006)	**Error (1σ) [m]** (Bernhard Hofmann-Wellenhof, 2007)
Efemérides	0.8	2.1
Reloj del satélite	1.1	2.1
Efecto ionosférico	7.0	4.0
Efecto troposférico	0.2	0.7
Multipath	0.2	1.4
Ruido del receptor	0.1	0.5
UERE Total	7.1	5.3

3.3. Posicionamiento Relativo o Diferencial

El posicionamiento relativo, también llamado posicionamiento diferencial, implica el uso de mínimo dos receptores que rastreen los mismos satélites para determinar sus coordenadas relativas (Figura 3.1). De los dos receptores, uno es seleccionado como la estación de referencia, o **base**, el cual permanece en un lugar cuyas coordenadas se conocen con precisión. Y el otro receptor, conocido como el móvil, o ***rover***, se ubica en el lugar donde se quieren conocer las coordenadas. El rover puede o no ser estacionario, dependiendo del tipo de operación que se quiera llevar a cabo.
La determinación del posicionamiento absoluto es, en general, mucho menos precisa que el posicionamiento relativo entre dos receptores. Esto es debido a que la mayoría de los errores (o sesgos) están altamente correlacionados. Los errores de efemérides y de propagación son casi los mismos para receptores cercanos, y por lo tanto pueden ser eliminados, siempre y cuando los receptores estén los suficientemente cerca. Para minimizar los efectos de estos errores, a diferencia de las coordenadas absolutas, las coordenadas diferenciales se determinan con respecto a una estación de referencia. Para esto se pueden utilizar varios métodos; los principales son el uso de:

1. Observaciones de código en la estación de referencia en tiempo real,

[4]Nótese que estos valores dependen de muchas variables, por lo que se deben tomar como un ejemplo

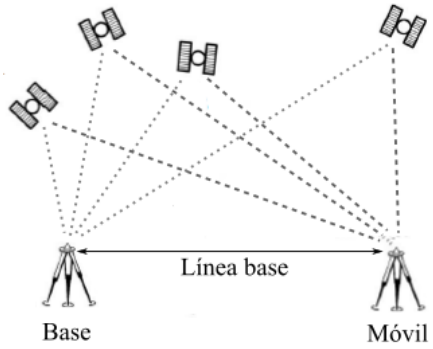


Figura 3.1: Estación base y *rover*.

2. Observaciones de código y fase portadora desde la estación de referencia en tiempo real,
3. Datos referenciales a partir de una "red" de estaciones de referencia en tiempo real, y
4. El uso de una o varias estaciones de referencia para post-proceso.

El método (1) es comúnmente llamado **DGNSS** (GNSS Diferencial). La opción (2) es llamada **PD-GNSS** (DGNSS Precisa) o más usualmente conocida como posicionamiento "cinemático en tiempo real" o **RTK**[5]. La opción (3) es conocida con el concepto de "red RTK" o NRTK (*Network* RTK). Aunque esta nomenclatura en algunos casos puede no ser la misma.

El objetivo del posicionamiento relativo es determinar las coordenadas de un punto desconocido, con respecto a uno conocido, el cual, para la mayoría de las aplicaciones, está inmóvil. Es decir, el posicionamiento relativo permite conocer el vector entre estos dos puntos, llamado **línea base**.

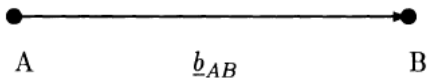


Figura 3.2: Posicionamiento relativo. (Hofmann-Wellenhof et al., 1994)

En la Figura 3.2, **A** representa el punto de referencia "conocido", **B** es el punto desconocido y b_{ab} es el vector línea base. Los vectores de posición X_a y X_b se definen como:

$$X_b = X_a + b_{ab} \tag{3.2}$$

y las componentes del vector línea base son:

$$b_{ab} = \begin{bmatrix} x_b - x_a \\ y_b - y_a \\ z_b - z_a \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \Delta x_{ab} \\ \Delta y_{ab} \\ \Delta z_{ab} \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

El posicionamiento relativo es más efectivo si se realizan observaciones simultáneas (el tiempo de observación es el mismo) para ambos receptores, la referencia y el punto desconocido. Asumiendo esta simultaneidad de observación desde los puntos A y B a los satélites j y k, se pueden formar combinaciones lineales mediante diferencias simples, diferencias dobles, y diferencias triples.

[5] *Real Time Kinematic* (ver Sección 3.4.2).

3.3.1. Técnicas de Diferenciación

Como las mediciones GNSS están afectas a errores y retrasos, los cuales son difíciles de modelar, la precisión de la posición del receptor se ve limitada. Afortunadamente, los receptores GNSS que se encuentran próximos entre sí, comparten un alto grado de similitud en los errores; es decir, son casi los mismos. Así que, para estos receptores, una gran parte de los errores pueden simplemente ser removidos combinando sus observables (ver Apéndice C.5).
En un principio, existen tres grupos de errores: los del satélite, los del receptor y los atmosféricos (o de propagación). La medición con dos receptores simultáneamente, que rastrean un satélite en particular, poseen más o menos los mismos errores de satélite y atmosféricos. Mientras más corta sea la separación entre ambos receptores, los errores son más similares. Por lo tanto, si se toman las diferencias entre las mediciones de estos dos receptores, los sesgos del reloj del satélite y los errores atmosféricos serán reducidos significativamente. Esta combinación lineal se conoce como **diferencia simple entre receptores**.
Cuando dos receptores rastrean dos satélites simultáneamente, se llama **diferencia doble** (Wells et al., 1987). Esta combinación elimina los errores de los relojes del receptor y de los satélites. Los otros errores son reducidos en gran medida. Adicionalmente, esta observable preserva el número entero natural de la ambigüedad; es por esto que se ocupa para mediciones de posición precisas basadas en la fase portadora.
Otra combinación lineal importante es la **diferencia triple**, la cual resulta de la diferenciación de dos observables de diferencia doble, en dos épocas. Como se mencionó anteriormente, los parámetros de la ambigüedad permanecen constantes en el tiempo, mientras no hayan deslizamientos de ciclo. Por lo que, al formar la diferencia triple, los parámetros de la ambigüedad constante desaparecen. Sin embargo, si hay deslizamientos de ciclo, esto afecta sólo a una observable diferencia triple, y éstos aparecerán en la serie de datos. Es por esto que la combinación lineal de diferencia triple se usa para detectar los deslizamientos de ciclo.
Todas estas combinaciones lineales se pueden realizar con datos monofrecuencia, con la fase portadora o por pseudodistancia. Si se tienen datos multifrecuencia se pueden obtener otras combinaciones útiles, como la combinación lineal para eliminar los efectos ionosféricos (ver Apéndice 3.3.1).

3.3.2. Niveles de Precisión

La Tabla 3.2 compara el efecto que tiene el aplicar técnicas diferenciales mediante código (DGNSS), en los valores de error en distancia, con respecto a posicionamientos absolutos, en donde se ve que los errores son mayores en este último caso. Nótese que los valores de error para el caso absoluto difieren al compararlos con los de la Tabla 3.1, ya que estos valores deben ser tomados como un ejemplo. Las fuentes de error pueden variar notoriamente dependiendo de, por ejemplo, la ubicación en el planeta, el tipo de receptor, la vista al cielo, entre otros.
El nivel de precisión de los métodos diferenciales dependen de la longitud de la línea base. A mayor distancia entre base y rover, menor es el nivel de precisión en las mediciones de posicionamiento. Según la observable utilizada, se pueden alcanzar diferentes nivel de precisión (Seeber, 2003):

- Correcciones con código: precisiones entre 1 y 3 metros.
- Correcciones con código suavizado: se utilizan además observaciones de fase portadora para suavizar las observaciones gruesas con código, mediante un filtro (sin resolver ambigüedades).

Tabla 3.2: Errores típicos de posición mediante código, posicionamiento absoluto y diferencial. (Bernhard Hofmann-Wellenhof, 2007)

Fuente de error	**Error (1σ) [m] Absoluto**	**Error (1σ) [m] Diferencial**
Efemérides	2.1	0.1
Reloj del satélite	2.1	0.1
Efecto ionosférico	4.0	0.2
Efecto troposférico	0.7	0.2
Multipath	1.4	1.4
Mediciones del receptor	0.5	0.5
UERE	5.3	1.5

Precisiones menores a 0.5 metros.

- Correcciones con fase portadora: la base transmite al rover las observaciones para resolver las ambigüedades.
  En la Figura 3.3 se muestran las precisiones estimadas para las diferentes opciones.

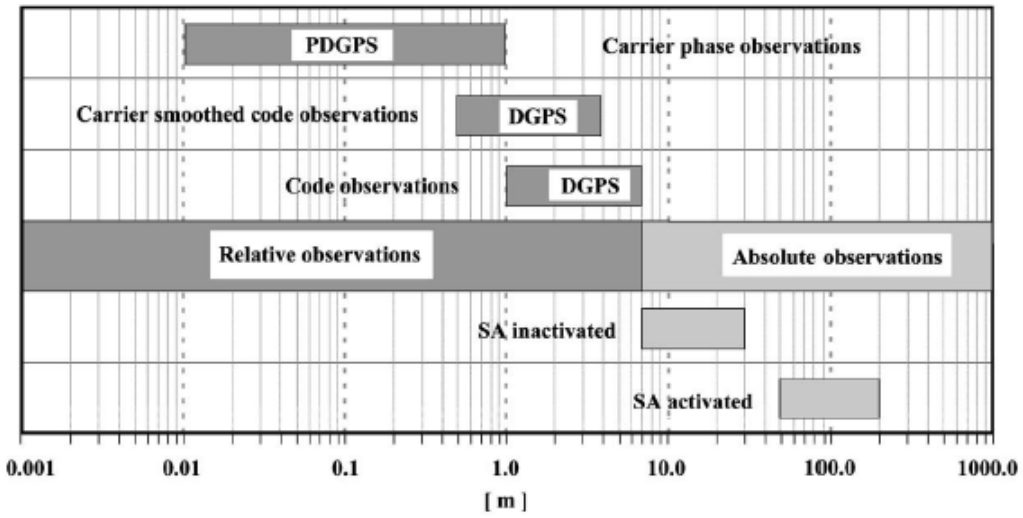


Figura 3.3: Niveles de precisión estimados para diferentes métodos de posicionamiento. (Seeber, 2003)

3.3.3. Posicionamiento Relativo Cinemático en Tiempo Real (RTK)

El RTK es otro nombre para el posicionamiento diferencial basado en la fase portadora (Opción (2) en la Sección 3.3). La característica más distinguida es que se pueden obtener precisiones centimétricas en el posicionamiento en tiempo real, en distancias cortas, con una instrumentación fácil de utilizar y altamente integrada. Como es un método de posicionamiento relativo, la técnica RTK está basada en los siguientes aspectos (Seeber, 2003):

- Transmisión de datos de pseudodistancia y fase portadora desde una estación de referencia (base) a una estación de usuario (rover) en tiempo real,
- Resolución de ambigüedades en la estación rover y
- Determinación del vector línea base en tiempo real (o casi real) con un alto nivel de confianza.

En una configuración RTK típica, un receptor de referencia (generalmente estacionario) transmite los datos de pseudodistancia y fase portadora, mediante un radio enlace, a un receptor móvil. Se pueden utilizar tanto receptores monofrecuencia como multifrecuencia. El software en el rover (que puede funcionar en el receptor o en un procesador externo) combina y procesa las mediciones GNSS rastreadas por la base y por el rover, para obtener las coordenadas de éste último.

Niveles de Precisión Típicos

Para obtener un buen nivel de precisión es necesaria la ubicación de los receptores en una zona a cielo abierto, ya que los errores comunes para ambos receptores (retardos atmosféricos, efecto *multipath*, sesgo de relojes y errores orbitales de satélites) se pueden anular mediante el posicionamiento diferencial, específicamente, mediante la técnica de diferencia doble.
Una limitación de las soluciones RTK es el hecho de que los errores y el TTFA (tiempo para determinar ambigüedades) crecen a medida que aumenta la distancia entre la base y el rover. Los niveles típicos de exactitud son: 10 [mm] + 1-2 ppm para coordenadas horizontales, y 15-20 [mm] + 2 ppm para la componente vertical (Seeber, 2003).
Las aplicaciones RTK están además limitadas a un rango de unos pocos kilómetros con un TTFA de algunos segundos. Sólo en tiempos con un bajo disturbio ionosférico puede llegar a unos 10 [km]; sin embargo, el TTFA aumenta (Seeber, 2003).
Por lo tanto, dentro de las principales limitaciones de la técnica RTK se encuentran:

- La longitud de la línea base, ya que una estación base cubre un radio de unos 10 [km] aprox. (según las condiciones ambientales),
- El requerimiento de un canal de comunicación en tiempo real para permitir la transmisión de datos entre la base y el rover, y
- La precisión de un tiempo de convergencia para determinar las ambigüedades, el cual puede variar entre varios segundos y algunos minutos, dependiendo del algoritmo utilizado en el cálculo de posición; además de un rastreo continuo de las señales provenientes de los satélites por parte de ambos receptores.

Radio Enlace

En las operaciones diferenciales como el RTK, para la transmisión de datos desde la base al rover se requiere un enlace de radio. Una variedad de radio enlaces, que utilizan diferentes partes del espectro electromagnético, están disponibles para soportar estas operaciones. Los más usados son las bandas LF/MF (frecuencia baja/media, es decir, 30 [kHz] a 3 [MHz]), y las bandas VHF/UHF (frecuencia muy alta/ultra alta, es decir, 30 [MHz] a 3 [GHz]) (ver Tabla E.2).
Los radio enlaces dedicados a los GNSS están mayormente establecidos usando la banda VHF/UHF. Los radio enlaces en esta banda proporcionan una cobertura de línea de mira (o alcance visual) con

la capacidad de penetrar en edificaciones y otros obstáculos.
Para incrementar la cobertura de un radio enlace, se puede emplear un amplificador de potencia o cables coaxiales de alta calidad, o se puede aumentar la altura de la antena de radio de transmisión/recepción. Si un usuario utiliza un amplificador de potencia, sin embargo, se debe tener cuidado con la sobrecarga de la señal, que generalmente ocurre cuando los radios de transmisión y recepción están muy cerca entre sí (Langley, 1993).
También se puede incrementar la cobertura de la señal usando una estación de repetición. En este caso, es recomendable usar una antena unidireccional en la estación base y una antena omnidireccional en la estación de repetición (El-Rabbany, 2002).

3.3.4. Resolución de Ambigüedades

Para alcanzar el nivel centimétrico en la precisión de mediciones con las observables de fase portadora en el posicionamiento relativo, es necesaria la determinación de las ambigüedades iniciales (más específicamente, la ambigüedad de diferencia doble). Este proceso en comúnmente conocido como resolución de ambigüedad.
Las ambigüedades se determinan inicialmente como parte de una solución de mínimos cuadrados, o de filtro de Kalman (Leick, 1995) (ver Apéndices D.3 y D.4). Sin embargo, desafortunadamente ninguno de estos métodos puede directamente determinar los números enteros de las ambigüedades. Lo que se puede obtener solamente son valores reales con sus respectivos parámetros de incertidumbre (también llamados matriz de covarianza).
Mientras la ambigüedad se determine como un valor entero, se dice que la ambigüedad está resuelta o en modo "***fixed***" (Counselman & Abbot, 1989). De lo contrario, si la ambigüedad se determina como un valor real no entero, se dice que está flotante o en modo "***float***", y se obtienen exactitudes de nivel métrico a decimétrico (dependiendo del tiempo de rastreo) en vez de centimétrico en las mediciones.

Resolución *On-the-fly*

Un factor clave para la técnica RTK es la capacidad del rover de resolver ambigüedades mientras la antena del receptor está en movimiento. Esta característica se denomina resolución de ambigüedad "*on the fly*" (OTF), lo que significa que no se requiere una inicialización estática para resolver ambigüedades. Su filosofía es que en un área pequeña se mantiene la misma constelación de satélites y por tanto, las ambigüedades permanecen constantes en el tiempo, facilitándose así la ejecución de técnicas móviles. Esta técnica puede ser aplicada tanto con datos monofrecuencia, como con datos multifrecuencia; sin embargo, con estos últimos se resuelven las ambigüedades más rápido y con un mayor nivel de confianza.
Como se mencionó, el uso de técnicas como los mínimos cuadrados o el filtro de Kalman permite obtener los parámetros de incertidumbre de la ambigüedad, es decir, la **matriz de covarianza**. Ésta se puede representar geométricamente por una región, llamada **región de confianza**, que contiene los valores estimados de ambigüedad (Teunissen et al., 1995). Mientras mayores sean los valores de incertidumbre y/o del nivel de probabilidad, mayor es el tamaño de la región de confianza. Cuando el número de satélites es mayor a cuatro, la región de confianza es un hiperelipsoide. Como se sabe que la ambigüedad debe ser un número entero, se pueden "dibujar" grillas que se intersectan con los valores enteros dentro del hiperelipsoide. Si el espaciamiento entre líneas es igual a un ciclo

de portadora, entonces la ambigüedad probable podría estar representada por uno de estos puntos de intersección. La Figura 3.4 ejemplifica esto con un caso 2D. Sólo un punto es seleccionado como el candidato más probable para el valor entero de la ambigüedad. Una vez que las ambigüedades son resultas correctamente, se realiza un ajuste para obtener las coordenadas del rover.

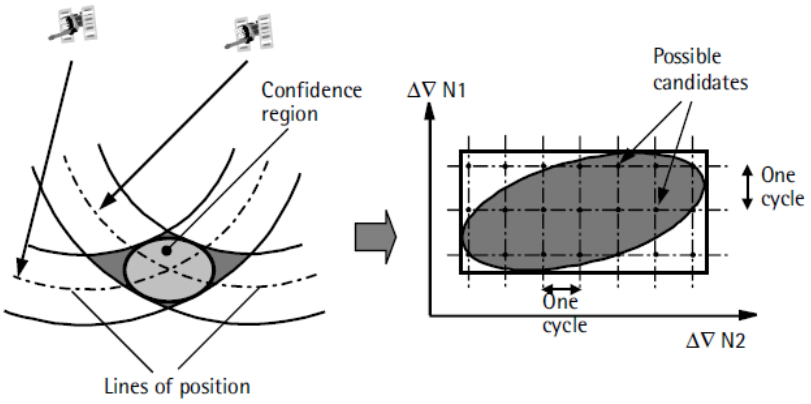


Figura 3.4: Resolución OTF de ambigüedad. (El-Rabbany, 2002)

Método LAMBDA

Una técnica bastante poderosa es el método LAMBDA (Ajuste de descorrelación de ambigüedad de mínimos cuadrados), desarrollado en la Universidad Tecnológica de Delft. La idea básica es transformar los valores reales originales de ambigüedades de diferencia doble, los cuales están altamente correlacionados, en valores reales de ambigüedades descorrelacionados[6]. Así, el número de soluciones posibles es reducido considerablemente. Mediante este procedimiento el espacio de búsqueda original alargado se transforma en un espacio de búsqueda similar a una esfera con el mismo volumen, el cual permite una identificación mucho más eficiente del valor entero de ambigüedad (Figura 3.5) (Seeber, 2003).

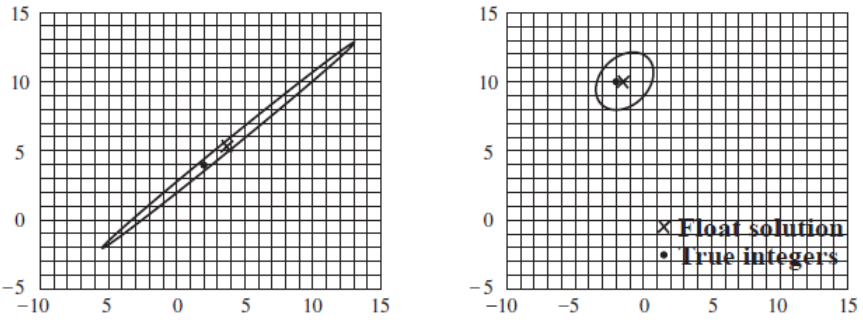


Figura 3.5: Método LAMBDA: espacio de búsqueda de ambigüedad antes (izquierda) y después (derecha) de la descorrelación. (Seeber, 2003)

[6]El término descorrelación es un término general para cualquier proceso que puede ser utilizado para reducir el grado de autocorrelación de una señal, o correlación cruzada entre diferentes señales de un grupo, mientras se preservan otros aspectos de la señal.

Existen otras técnicas de resolución de ambigüedades como la resolución rápida aproximada de la ambigüedad (o FARA), la LSAST (Técnica de búsqueda de ambigüedad por mínimos cuadrados), y la FASF (Filtro de búsqueda de ambigüedad rápida). Para saber más sobre estas técnicas ver Fernández (2005).

3.4. Posicionamiento en Base a Redes GNSS

Hasta ahora se han visto dos modos de posicionamiento: (1) independiente o absoluto, donde un receptor rastrea los satélites para calcular su propia posición, y (2) diferencial o relativo, donde es necesario un receptor más (la estación base) para determinar la posición del receptor móvil, mediante el cálculo de la línea base que los separa. Existen otras alternativas para el cálculo de la posición del receptor del usuario, que se basa en el uso de varias estaciones, las cuales forman una red de receptores GNSS.

3.4.1. Posicionamiento Absoluto de Precisión

El posicionamiento absoluto de precisión (PPP) es una técnica establecida por Zumberge et al. (1997) que utiliza las mediciones de código y/o fase de un solo receptor (no diferenciales). El principio de la técnica PPP es corregir o mitigar los errores, mediante la red global del Servicio Internacional GNSS (IGS), cuyas observaciones se usan para modelar las efemérides de forma precisa y los errores del reloj de los satélites (Kaplan y Hegarty, 2006), junto con modelaciones atmosféricas y correcciones de fase, aportados por servicios de corrección. En los sistemas PPP el receptor usa estos datos en vez de las efemérides y relojes que él mismo rastrea.
Los datos de los relojes y de órbitas son usados por un receptor GNSS multifrecuencia en una ubicación arbitraria. Además de estimar su posición en coordenadas ECEF y el sesgo del reloj, el receptor también estima el retraso troposférico cenital (se asume que es el mismo para todos los satélites visibles) y el error entre la medida de pseudodistancia y la medida de fase de portadora para cada satélite visible. Un filtro secuencial (por ejemplo, el filtro de Kalman) es empleado para estimar estos parámetros iterativamente mientras se obtienen nuevas mediciones. Para obtener resultados de posicionamiento de nivel decimétrico, el receptor del usuario debe tener en cuenta una serie de fuentes de error que son insignificantes para la mayoría de las otras aplicaciones GNSS independientes o diferenciales.
Usando esta técnica, los posicionamientos son determinados con una precisión mejor que 5 [cm] en cada coordenada (Kouba y Héroux, 2001). Son requeridos aproximadamente 30 minutos de procesamiento de datos antes de obtener convergencia de precisión a estos niveles.

3.4.2. Estaciones de Referencia de Operación Continua

Una red de estaciones de referencia de operación continua (CORS) es una red de receptores capaces de transmitir correcciones, usualmente mediante conexión a Internet. El nivel de precisión aumenta con el uso de una red CORS, ya que utiliza observaciones de diferencia doble para eliminar los errores del reloj y los retrasos del hardware. La técnica RTK es parte de esta solución y se aplica la clásica corrección diferencial a las observaciones del usuario.
Las CORS transmiten sus observaciones de pseudodistancia y fase de portadora en tiempo real a

un centro de procesamiento. El centro calcula las correcciones, tales como el efecto ionosférico y troposférico y posibles correcciones orbitales, y las transmite junto a las observaciones originales de una estación de referencia maestra a los usuarios. El usuario combina esta información con las observaciones recolectadas por su receptor para determinar su posición. Este concepto aplica a una estación CORS o una red de estaciones y a uno o varios usuarios (Leick et al., 2015).
Mediante estas redes, también llamadas N-RTK[7], es posible alcanzar posicionamientos de nivel centimétrico, cuando las estaciones base están a no más de 70-100 [km] de distancia (Lemmens, 2014). Generalmente este beneficio tiene un costo: a menudo se necesita una suscripción de pago para acceder a correcciones N-RTK. Sin embargo, las redes manejadas por agencias públicas, como el Sistema de Guardia Costera de EE.UU., son usualmente ofrecidas de forma gratuita, particularmente para propósitos de navegación.
Existen diversos servicios que generan correcciones RTK basados en diferentes conceptos. Los métodos más predominantes son: Estación de Referencia Virtual (VRS) y Correcciones de Maestro-Auxiliar (MAC).

Estación de Referencia Virtual (VRS)

Las estaciones base (CORS) y los receptores móviles (usuario) rastrean las señales GNSS provenientes de aquellos satélites comunes a ambas observaciones. La observación principal es la fase de la portadora, las ambigüedades entre las estaciones de base tienen que ser resueltas en un servidor de red. El receptor envía su localización inicial al servidor que transmitirá las correcciones. El método VRS crea una estación de base virtual en el entorno de la ubicación inicial del móvil, por lo que las correcciones son calculadas utilizando la información de toda la red, que consta de al menos tres estaciones de base. Estas correcciones se transmiten al móvil, el cual requiere una comunicación bidireccional. Sin embargo, el móvil no tiene que llevar a cabo cálculos complejos y utiliza las correcciones como si se hubieran originado a partir de una estación de base real (Lemmens, 2014).

Correcciones de Maestro-Auxiliar (MAC)

En el método MAC, el móvil tiene mucha más flexibilidad en la determinación de la solución RTK; ya que puede utilizar una interpolación simple de las correcciones de red o realizar cálculos más exactos. En principio, el método MAC sólo tiene una vía de comunicación; por lo que el móvil simplemente tiene que recoger aquellos datos de corrección calculados y difundidos por el servidor de red.

[7] *Network* RTK.

Capítulo 4

Técnicas y Equipos Utilizados

4.1. Técnica Escogida

Luego de estudiar los fundamentos de los GNSS y las posibles fuentes de errores en la posición de los receptores, se comparan las diferentes técnicas de posicionamiento que podrían llegar a conseguir un buen nivel de precisión en las mediciones.
En la Tabla 4.1 se resumen las características de los principales métodos de posicionamiento presentados anteriormente. Se debe tener en cuenta que el rango de precisión depende del tipo de receptor, el tiempo de observación, los factores ambientales, entre otros.

Tabla 4.1: Comparación entre principales técnicas de posicionamiento GNSS.

Técnica	**Precisión**	**Ventajas**	**Desventajas**
Posicionamiento absoluto, con receptor multifrecuencia.	$\sim$ 1 - 5 [m]	No se requiere estación base o algún servicio externo.	Costo elevado del equipo, generalmente. Para mejor nivel de precisión se recomienda uso de diferenciación o modelos de corrección.
DGNSS (posicionamiento relativo, mediciones de código).	$\sim$ 0,5 - 5 [m]	Como no se resuelven las ambigüedades, no es susceptible a deslizamientos de ciclo.	Se requiere estación base a una distancia menor que 10 [km].
RTK (posicionamiento relativo, mediciones de fase).	$\sim$ 0.01 - 1 [m]	Muy buenos niveles de precisión, incluso con receptores monofrecuencia.	Se requiere estación base a una distancia menor que 10 [km]. Susceptible a deslizamientos de ciclo.
PPP (uso de observaciones de la red global del IGS).	$\sim$ 1 - 5 [cm]	Muy buenos niveles de precisión, incluso con receptores monofrecuencia.	Se requiere servicio externo y un tiempo de observación mínimo para obtener buena precisión.
VRS con N-RTK (Estación de referencia virtual).	$\sim$ 1 [cm]	Excelente precisión, incluso con receptores monofrecuencia.	Se requiere una densa red de estaciones permanentes. No es aplicable en Chile.

Como se quiere obtener una precisión del orden del centímetro en la medición de desplazamientos, para este caso se descartan el posicionamiento absoluto y la técnica DGNSS (diferenciación de có-

digo), además de la virtualización (VRS), ya que no se dispone de una red lo suficientemente densa en la región.
Finalmente, para estimar los desplazamientos ocurridos en un muro de contención, se escoge la técnica de diferenciación de fase o RTK. Y para definir las coordenadas absolutas de la(s) estación(es) base(s) se estudiará la posibilidad de aplicar la técnica PPP.

4.2. Formatos y Transmisión de Datos

La transmisión de correcciones diferenciales, las mediciones brutas, o las soluciones de posición desde o al receptor pueden basarse en varios medios de comunicación. Varios formatos de datos han sido especificados para el intercambio de datos de navegación. A continuación se describen tres formatos, que han sido aceptados internacionalmente y generalmente son soportados por todos los fabricantes de receptores. El formato de datos definido por la Comisión Técnica de Radiocomunicaciones para Servicios Marítimos (RTCM) se utiliza para la transmisión en tiempo real de mediciones y correcciones diferenciales. El formato de Intercambio Independiente del Receptor (RINEX) se utiliza para intercambio de datos sin procesar, especialmente para aplicaciones de postproceso. La Asociación Nacional de Electrónica Marina (NMEA) definió un formato de datos ASCII que se utiliza especialmente para la transmisión de soluciones de posición.

4.2.1. Formato RTCM

En la comunicación entre la base y el rover, las correcciones se transmiten mediante el protocolo RTCM, propuesto por la Comisión Técnica de Radiocomunicaciones para Servicios Marítimos (RTCM), del mismo nombre, organismo creado en 1947 para investigar asuntos relacionados con las telecomunicaciones marítimas. El Comité Especial Nº 104 (SC-104) fue establecido en 1983 para desarrollar un formato estándar para la transmisión de mensajes de correcciones diferenciales a los usuarios de GPS (El-Rabbany, 2002).
Desde la creación de los formatos RTCM se han desarrollado nuevas versiones con el fin de mejorar cada vez más el envío de datos y la integridad de los mismos. Éstas varían en los mensajes que contienen. La especificación de este protocolo se encuentra en http://www.rtcm.org.
La última versión corresponde al formato RTCM3: RTCM 3.2 (o 10403.2) (febrero, 2013) y RTCM 3.3 (o 10403.3) (octubre, 2016), diseñadas para difundir grandes cantidades de información, incluyendo datos de parámetros de antena, datos de sistemas GNSS, y correcciones diferenciales de portadora y código para altos niveles de precisión.

4.2.2. Formato NMEA

La Asociación Nacional de Electrónica Marina (NMEA) es la organización que creó el formato NMEA 0183 para la interconexión de dispositivos electrónicos. Los mensajes NMEA 0183 son flujos de datos en formato ASCII, transmitidos desde un "hablador", es decir, el receptor GNSS, a un "oyente", en este caso un computador.
Los datos NMEA 0183 incluyen la información de la posición, *datum* y otras variables. Los datos son enviados en forma de cadenas o secuencias de caracteres (máximo 82 caracteres); cada una comienza

con un signo de peso " $ " y termina con un retorno de carro y salto de línea <CR><LF>[1]. El signo " $ " es seguido por cinco caracteres que identifican al receptor, o el hablador (los primeros dos caracteres), el tipo de dato y el formato de la secuencia (últimos tres caracteres). El campo del hablador usa un "GP" para indicar datos GPS y "GL" para indicar información GLONASS. El último campo de la secuencia es un *checksum*[2] (o suma de verificación), que comienza con un carácter delimitador " * ".
La Tabla 4.2 define varios mensajes y su contenido.

Tabla 4.2: Algunas secuencias del formato de datos NMEA. (Bernhard Hofmann-Wellenhof, 2007)

Secuencia	**Descripción**
ALM	Datos del almanaque
GGA	Datos de posición: tiempo, coordenadas elipsoidales, número de satélites, dispersión de precisión, indicador de calidad, altura geoidal.
GLL	Datos reducidos: tiempo UTC, latitud, longitud, estado.
GSA	Satélites activos (usados para el cálculo de la posición) incluyendo parámetros DOP.
GSV	Satélites en vista, acimut, elevación y razones de ruido de la señal (*signal-to-noise*) de cada satélite.
VTG	Datos de navegación: recorrido y velocidad sobre el terreno.
ZDA	Datos de fecha y tiempo.

Un ejemplo de la estructura del mensaje NMEA es el siguiente:

$GPZDA,HHMMSS.00,DD,MM,YYYY,XX,YY*CC

donde HHMMSS.00 indica el tiempo UTC (HrMinSeg), DD,MM,YYYY es el día, mes, año, XX es la hora de la zona local (-13 a 13), YY son los minutos de la zona local (0 a 59) y CC es la suma de verificación.

4.2.3. Formato RINEX

El formato RINEX[3], definido en 1989, consiste en tres tipos de archivos ASCII[4]:

1) El archivo de los datos de observación.

2) El archivo del mensaje de navegación.

3) El archivo de los datos meteorológicos.

Los registros de los archivos tienen longitud variable. Cada archivo está compuesto por una sección de encabezado que contiene la información genérica del archivo y una sección de datos. Los archivos

[1] En informática, CRLF se refiere a la combinación de dos códigos de control: CR (retorno de carro) y LF (salto de línea), uno detrás del otro; normalmente con el objetivo de crear una nueva línea.

[2] Una suma de verificación es una función que tiene como propósito detectar cambios accidentales en una secuencia de datos para proteger la integridad de éstos.

[3] *Receiver Independent Exchange.*

[4] *American Standard Code for Information Interchange* o Código Estándar Estadounidense para el Intercambio de Información, es un código de caracteres basado en el alfabeto latino.

de datos de observación y meteorológicos deben ser creados para cada lugar y cada sesión, mientras que el mensaje de navegación es independiente del lugar, con el fin de no contener información redundante desde varios receptores que rastrean los mismos satélites (Gurtner, 2009). Este formato es generalmente usado para el intercambio de datos brutos, especialmente para aplicaciones en post-proceso.
El formato RINEX usa la convención de nomenclatura de archivos "**ssssdddf.yyt**". Los primeros cuatro caracteres (ssss) identifican al sitio, los siguientes tres (ddd) indican el día del año y el octavo carácter (f) es el número de la sesión. Los primeros dos caracteres de la extensión (yy) denotan los últimos dos dígitos del año actual y el tipo de archivo es dado por el último carácter (t). En la Tabla 4.3 se describen los tipos de archivos RINEX.

Tabla 4.3: Nombres de archivos RINEX recomendados: tipos de archivos. (Gurtner, 2009)

Carácter (t)	**Tipo de archivo**
O	Observación.
N	Mensaje de navegación GPS.
M	Datos meteorológicos.
G	Mensaje de navegación GLONASS.
L	Mensaje de navegación Galileo.
P	Mensajes de navegación de varios GNSS.
H	Mensaje de navegación SBAS.

Cuando los tiempos de transmisión de datos son muy extensos se recomienda comprimir los archivos antes de su almacenamiento o transmisión. El IGS menudo utiliza los programas UNIX para comprimir y descomprimir. Para poder reducir aun más el tamaño de los archivos de observación, Yuki Hatanaka desarrolló un sistema de compresión que forma diferencias de orden superior en el tiempo entre observaciones del mismo tipo y satélite.
Más información de este formato se puede encontrar en ftp://igs.org/pub/data/format/.

4.3. Receptor Seleccionado: NEO-M8P (*U-blox*)

Después de estudiar los posibles métodos de posicionamiento GNSS, se optó por utilizar la técnica diferencial RTK, mediante receptores monofrecuencia de bajo costo. Para esto se compró el kit de evaluación C94-M8P de la marca u-blox, el cual incluye dos placas (o tarjetas) de desarrollo, y cada una incluye:

- Un módulo modelo NEO-M8P-2,
- Una antena GNSS activa, con su respectiva placa de aluminio,
- Una antena UHF, y
- Un cable micro USB a USB

El módulo NEO-M8P-2 puede funcionar como receptor base o como rover, es decir, pueden transmitir correcciones RTK (a diferencia de los módulos NEO-M8P-0, que sólo sirven como receptores

rover). En la Figura 4.1 se muestran los componentes del kit C94-M8P (con excepción de los cables USB).

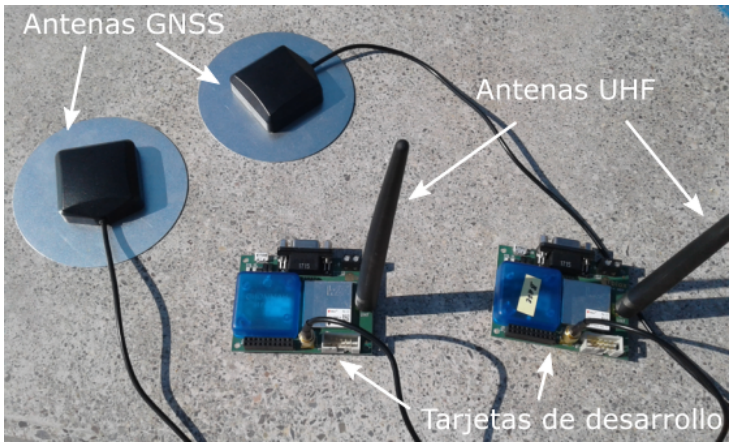


Figura 4.1: Kit de evaluación C94-M8P.

El módulo NEO-M8P es una herramienta para posicionamiento GNSS de alta precisión, que utiliza la tecnología RTK. Dentro de las principales características de este módulo se encuentran:

- Rastrea los satélites de los sistemas GPS, GLONASS y BeiDou, utilizando dos de éstos simultáneamente. Recibe las señales de 72 canales (GPS L1C/A, GLONASS L1OF, BeiDou B1I).
- Puede utilizar tanto las observables de código como de fase portadora.
- La exactitud de la posición horizontal teórica (según el fabricante) es de:
  - Receptor independiente: 2.5 [m] (CEP)
  - RTK: 0.025 [m] + 1 ppm (CEP)
- La base puede estar estática o móvil.

Más información de este módulo se puede encontrar en u-blox (2017b).
Los tipos de conexiones que posee la tarjeta C94-M8P se muestran en Anexo F.1.

4.3.1. Funcionamiento en RTK

Bajo la técnica RTK, los módulos M8P pueden operar como un par: un rover y una base. El rover necesita acceso a mensajes RTCM 3 (Sección 4.2.1) para entrar en modo RTK y alcanzar niveles centimétricos de precisión. Una vez que el rover ha resuelto las ambigüedades de la fase portadora, entrará en modo *fixed*.
Se necesitan alrededor de 60 segundos para que el rover sea capaz de resolver las ambigüedades pasar del modo *float* al modo *fixed* (si es que se tiene una buena vista al cielo). Este lapso de tiempo se le conoce como "tiempo de convergencia".
El rover estará en modo *fixed* cuando cinco o más ambigüedades puedan ser estimadas. Esto significa que, considerando sólo una constelación, se necesita el rastreo continuo de las fases portadoras de

al menos seis satélites, visibles con un ángulo de elevación de al menos 10°. Si se añaden satélites de otra constelación, se requieren de al menos dos más para formar las mediciones con diferencias doble. Por lo tanto, con un rastreo de constelación dual GPS+GLONASS, se necesitan al menos siete satélites. Sin embargo, con el uso adicional de la constelación BeiDou, se requieren ocho satélites como mínimo (por ejemplo, 5 GPS + 3 BeiDou) debido a los dos tipos de satélites BeiDou.
En modo RTK el rover calcula su posición relativa a la posición de la base. Esta posición relativa se describe en coordenadas NED. Si las correcciones RTCM 3 no están disponibles, el rover funcionará como un receptor independiente (disminuyendo el nivel de exactitud en las mediciones).
Los mensajes provenientes del rover pueden ser enviados mediante dos protocolos: el protocolo NMEA, un formato estándar de comunicación (Sección 4.2.2), y el protocolo UBX, desarrollado por u-blox.
Los mensajes NMEA enviados por el receptor M8P están basados en el protocolo NMEA 0183 versión 4.0. Más información de este protocolo se puede encontrar en u-blox (2018a).

4.3.2. Formato UBX

Mediante el formato UBX, desarrollado por u-blox, los datos (binarios de 8 bits) se transmiten en código ASCII. La estructura de los paquetes de bits se muestra en el diagrama de la Figura 4.2.
Cada mensaje comienza con un preámbulo de dos caracteres de sincronización: 0xB5 0x62 (2 bytes). Luego le sigue la clase del mensaje[5], el campo ID, que define el mensaje a seguir, y el campo longitud[6]. Después está el campo de carga, que contiene un número variable de bytes, y finalmente termina con los campos CK_A y CK_B que contienen una suma de verificación.

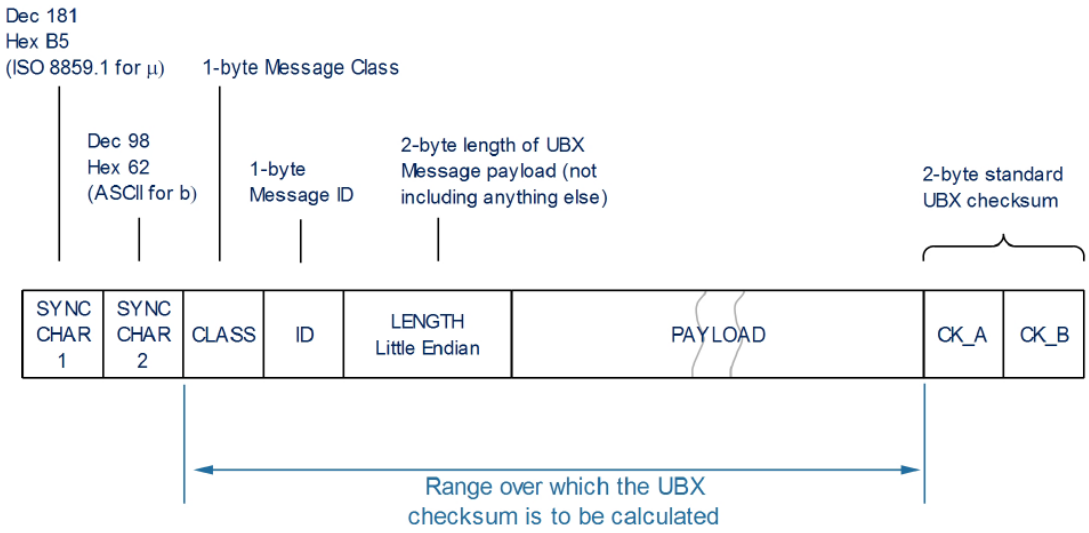


Figura 4.2: Estructura de paquetes UBX. (u-blox, 2018a)

[5]La clase es un grupo de mensajes que están relacionados entre sí.
[6]El formato del número del campo longitud es un entero de 16 bits del tipo *Little-Endian* (el cual es un tipo de orden de los bytes).

4.3.3. Software U-center

U-center es la herramienta de evaluación y visualización GNSS de u-blox para Windows, la cual se puede descargar, sin costos, desde la página www.u-blox.com. El programa capta el envío de datos desde: (1) un puerto de comunicación o (2) un archivo de registro y transforma esta secuencia en mensajes de protocolo. A partir de estos mensajes, se extraen los parámetros relevantes y son insertados en la base de datos utilizada por las funciones de visualización y de análisis de la aplicación. En el conjunto de datos se calculan los valores estadísticos de los parámetros: el promedio, el mínimo, el máximo y la desviación estándar.
U-center entrega varios tipos de visualización. En la Figura 4.3 se muestra un ejemplo. Aquí se pueden ver las siguientes ventanas:

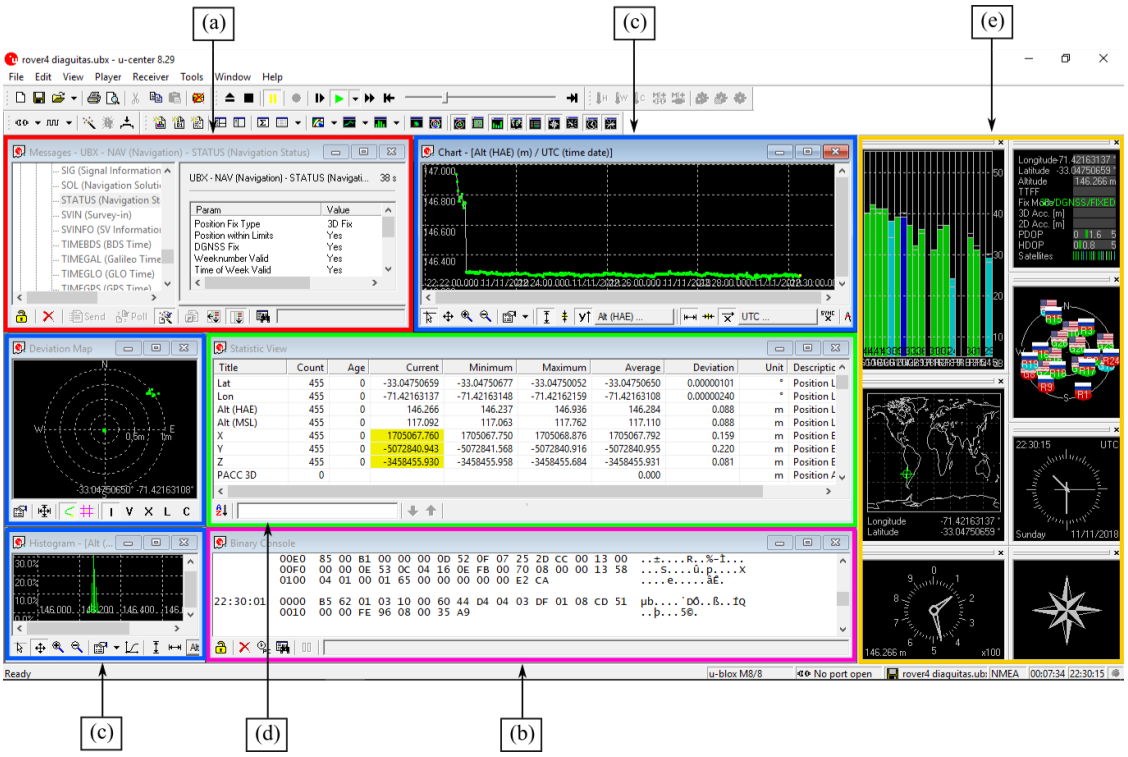


Figura 4.3: Visualización del programa u-center.

a) **Mensajes**. Muestra y decodifica una copia de cada mensaje conocido. Esta ventana permite observar un mensaje en detalle y también se puede usar para configurar el dispositivo GNSS. La **ventana de configuración** es un subconjunto de la ventana de mensajes y solo muestra el mensaje para configurar el receptor.

b) **Consola**. Muestra los mensajes en forma de texto, además de una amplia gama de información disponible para la evaluación y pruebas. Son tres ventanas: la **consola de paquetes**, la **consola binaria** y la **consola de texto**.

c) **Ventanas gráficas**. Muestran los parámetros de la base de datos en forma gráfica. Se pueden crear **gráficos**, **histogramas** y el **mapa**. También están **el mapa de desviación** (en planta)

y la **vista del cielo** (vista de los satélites), que se pueden usar para el rendimiento estadístico y el análisis de patrones de la antena.

d) **Tablas**. Muestran los parámetros de la base de datos en forma tabular. Se pueden configurar para obtener tablas personalizadas. Además está la tabla de **estadísticas**.

e) **Ventanas acopladas**. Se pueden colocar en el marco de u-center: un reloj análogo, una brújula, el mapa mundi, un medidor de altitud y uno de velocidad. También están las ventanas que muestran la constelación de los satélites recibidos por el receptor y un resumen del estado del GNSS.

4.3.4. Configuración de Módulos y Conversión a Formato RINEX

La configuración del receptor base y del receptor móvil, así como la conversión desde formato *ubx* a formato *RINEX* se presentan en Apéndices F.2 y F.3, respectivamente.

Capítulo 5

Pruebas de Posicionamiento Diferencial

En este capítulo se describen las distintas pruebas realizadas en tiempo real con los receptores NEO-M8P, con el fin de conocer el comportamiento que poseen bajo diferentes escenarios.
Para la recolección de datos se utiliza un computador Raspberry Pi Zero W, conectado al rover o receptor encargado de calcular su posición.
Para el reconocimiento y transmisión de datos se utiliza el paquete de programas "RTKLIB" versión 2.4.2, específicamente el servidor de comunicación "STR2STR".
Los siguientes corresponden a los resultados de pruebas de línea base corta.

5.1. Pruebas con Receptor Estático

El objetivo de estas pruebas es conocer los valores de las residuales, es decir, los valores de la posición estimada por el receptor relativos a la posición referencial de éste:

$$\delta x = x_i - \bar{x} \tag{5.1}$$

donde $\bar{x}$ es la posición referencial del rover, x_i es la posición estimada para la época i, y δx es el vector de residuales.
Para las mediciones se utilizaron las constelaciones GPS y GLONASS simultáneamente.

5.1.1. Comparación entre Métodos de Posicionamiento

En primer lugar, se quiere conocer la precisión que pueden alcanzar estos receptores bajo diferentes métodos de posicionamiento, por lo que se impusieron los siguientes escenarios:

- Receptor independiente
- Técnica diferencial RTK, modo flotante
- Técnica diferencial RTK, modo fijo

En el caso del receptor independiente no se utilizó estación base para correcciones. Para el método RTK se utilizaron dos módulos NEO-M8P, uno como base y otro como rover o móvil, ambos estáticos, cuyas antenas se ubican sobre el techo de una casa, separadas por una distancia de cuatro metros aproximadamente. El modo flotante (o *float*) y el modo fijo (o *fixed*), se refieren a los casos en que las ambigüedades resultan ser valores flotantes (o con decimales) y valores enteros, respectivamente.
Se realizaron mediciones en un mismo lugar con vista al cielo despejada, permitiendo utilizar el método RTK en modo fijo. Además, para limitar el número de satélites utilizados se estableció un ángulo de elevación mínimo de 10°, con el fin de minimizar la dispersión de precisión.
Se realizaron mediciones de cuatro horas cada una, sin considerar los primeros 30 minutos de

grabación de datos, ya que los receptores tardan en entrar en modo fijo al tener que recolectar los datos de los satélites y poder converger, resultando las residuales de las Figuras 5.1, 5.2 y 5.3, correspondientes a los tres escenarios definidos, respectivamente. Las residuales corresponden a las componentes medidas con respecto al promedio de los datos. En los gráficos se pueden ver las componentes de las residuales en coordenadas locales NED (*north*, *east*, *down*).

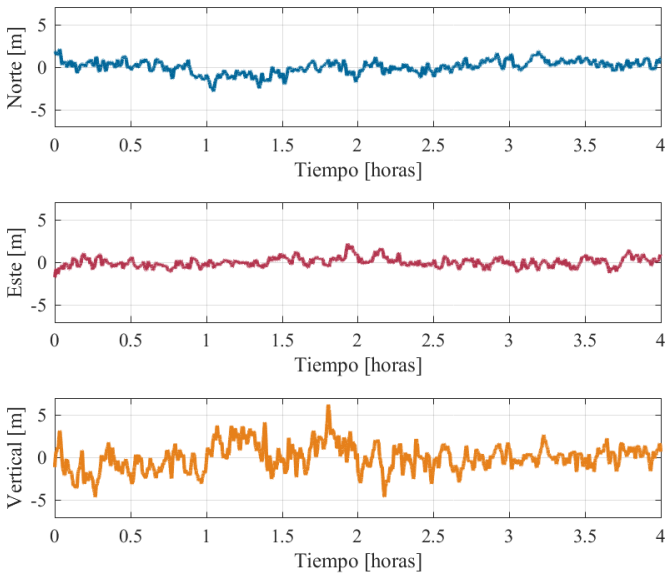


Figura 5.1: Residuales en coordenadas NED, con receptor independiente.

En la Figura 5.4 se muestran los mapas de dispersión para los tres casos. Se observa que en el modo flotante se requiere de un mayor tiempo para la convergencia de coordenadas que en el modo fijo.
Las estadísticas de estas mediciones se muestran en la Tabla 5.1. La medida 2σ corresponde a dos veces la desviación estándar, es decir, el 95 % de los valores se encuentran dentro de la banda con semiancho igual a dos veces la desviación estándar, y CEP es el error circular probable, que corresponde al radio de un círculo que encierra el 50 % de las estimaciones en el plano horizontal.
Se puede ver la diferencia de precisión entre las medidas independientes y diferenciales. El valor de la desviación en el caso independiente llega a ser hasta 100 veces más que la desviación en el caso diferencial; es decir, mediante la técnica RTK se pueden alcanzar precisiones de nivel centimétrico, mientras que sin el método diferencial, la precisión es del orden del metro, para la componente horizontal.
Si se comparan ambas mediciones diferenciales, resultan entre dos a cuatro veces más los valores de las desviaciones en modo flotante que en modo fijo, demostrando la influencia de la resolución de las ambigüedades.
Como era de esperar, en todos los escenarios la dispersión de la componente vertical es mayor que la de la horizontal (2 veces más, aprox.), debido a la configuración geométrica de los satélites.

La Tabla 5.2 muestra los valores promedio de las coordenadas geodésicas, los parámetros de dis-

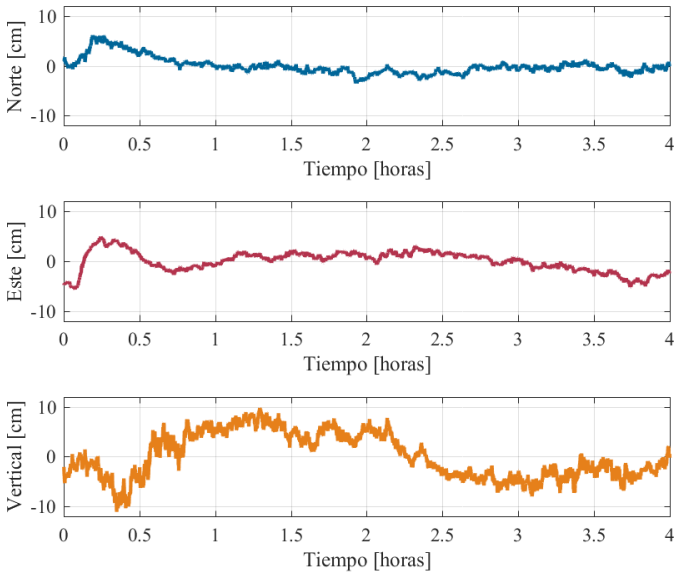


Figura 5.2: Residuales en coordenadas NED, RTK modo flotante.

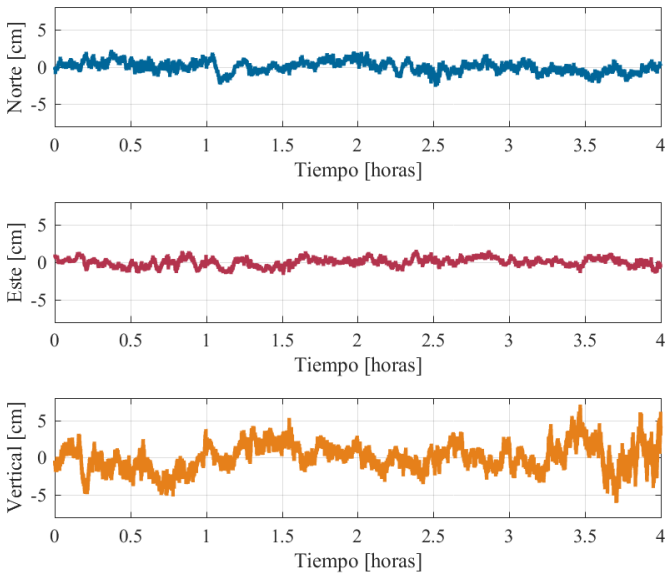
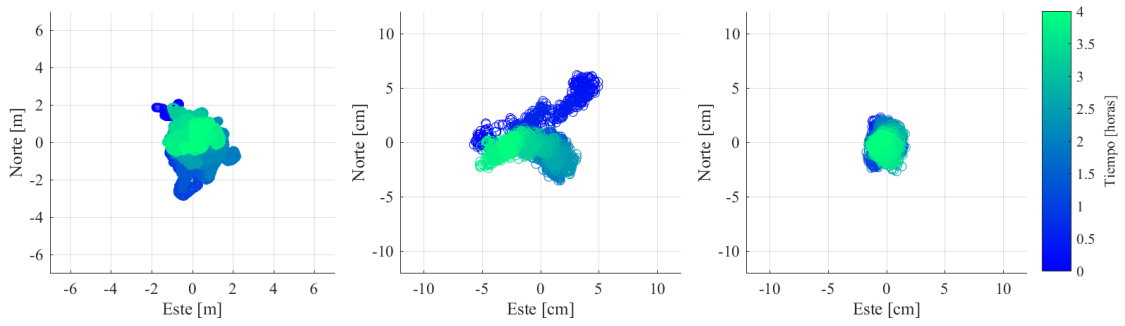


Figura 5.3: Residuales en coordenadas NED, RTK modo fijo.

persión de precisión horizontal (HDOP) y vertical (VDOP) y el número de satélites utilizados. Se puede ver que con la técnica diferencial las coordenadas son casi idénticas, pero con el receptor independiente resultan valores que varían varios metros con respecto a los otros casos. (Nótese que la altitud corresponde a la referida al elipsoide de referencia y no es la altura sobre el nivel del mar).



(a) (b) (c)

Figura 5.4: Mapa de dispersión, mediciones de 4 horas (a) independiente, (b) RTK modo flotante y (c) RTK modo fijo.

Tabla 5.1: Estadísticas de mediciones de 4 horas.

Método	**2σ (95 %) [cm]**			**CEP [cm]**
	Norte	**Este**	**Vertical**	
Independiente	152.7	107.4	303.8	76.2
RTK Flotante	3.4	4.1	9.1	2.2
RTK Fijo	1.5	1.1	3.6	0.8

Con respecto a los parámetros de dispersión, en los tres casos resultan valores bastante aceptables (cercanos a 1).

Tabla 5.2: Valores promedio de mediciones de 4 horas.

Método	**Latitud [°]**	**Longitud [°]**	**Altitud [m]**	**HDOP**	**VDOP**	**Satél. usados (mín. y máx.)**	
Independiente	-33.0488969	-71.4165580	138.68	0.7	1.2	14	16
RTK Flotante	-33.0489085	-71.4165449	144.32	0.7	1.3	12	16
RTK Fijo	-33.0489085	-71.4165449	144.34	0.8	1.3	11	16

5.1.2. Mediciones en RTK

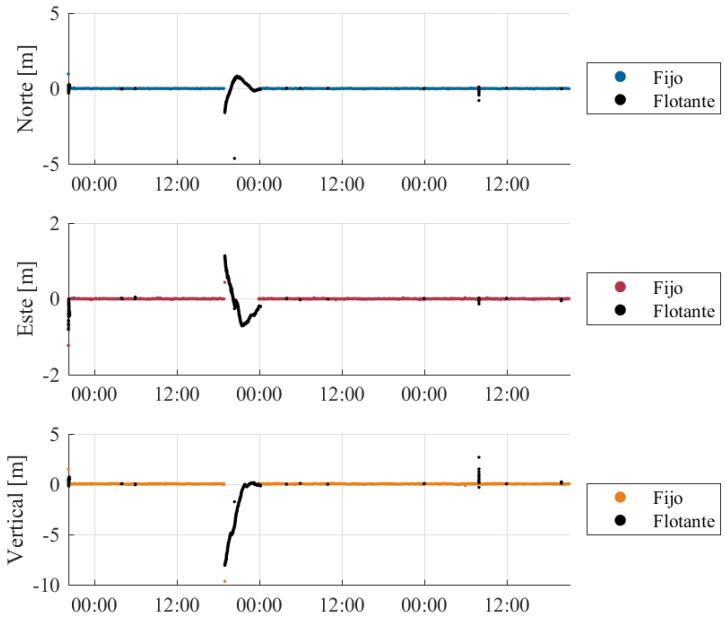
Variación del Tiempo de Medición

La duración de las pruebas mostradas anteriormente es limitada. Por lo tanto, para conocer cómo se comportan los receptores durante un periodo de tiempo mayor, se realizan diferentes mediciones en diferentes lugares con vista despejada, de tal forma que se permita la técnica RTK en modo fijo.

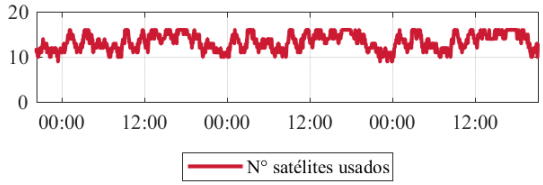
Satélites observados

En mediciones de varias horas, a lo largo del transcurso no siempre se logra el modo fijo, como

se muestra en la Figura 5.5(a), en donde se perciben momentos en que las ambigüedades no se resuelven como valores enteros, es decir, son valores flotantes.



(a)



(b)

Figura 5.5: Medición en RTK: (a) Residuales en coordenadas NED y (b) Número de satélites.

Las Figuras 5.5(b) y 5.6 muestran el número y los satélites observados durante la medición, respectivamente. En ésta última se muestran en color naranjo los instantes en que son utilizadas cada señal y en color rojo los deslizamientos o saltos de ciclo (Sección 2.4.3), es decir, donde existe una pérdida temporal de la señal del satélite. Estos saltos pueden ocurrir por diferentes motivos. En este caso, se producen probablemente por las obstrucciones de los alrededores (árboles, techos, postes, etc.).

Los deslizamientos de ciclo, como se ve en la Figura 5.6, ocurren principalmente cuando el satélite se encuentra en un ángulo de elevación bajo (al comienzo y/o al término de cada avistamiento). Además, se puede apreciar que los saltos de ciclo se producen con más frecuencia en las señales del sistema GLONASS (satélites "RXX") que en las del GPS (satélites "GXX").

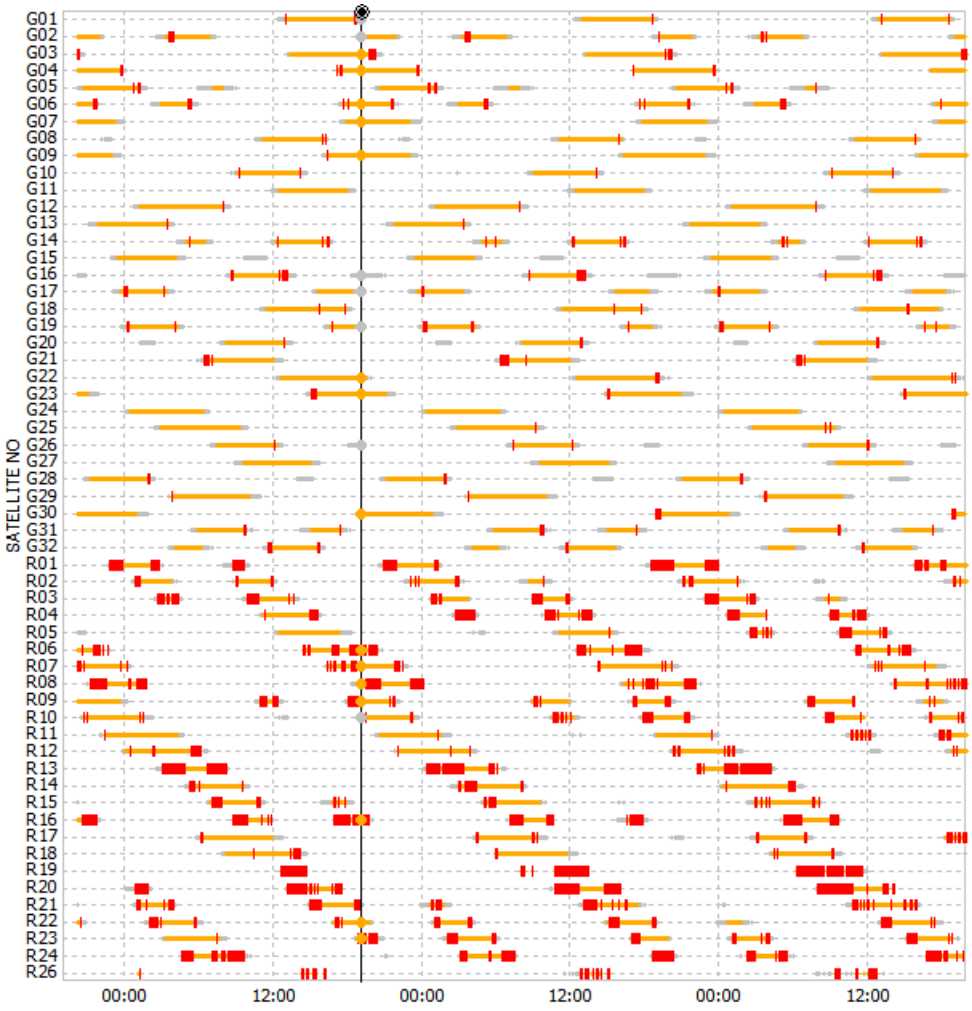


Figura 5.6: Satélites observados durante medición.

Variación de la desviación

Como no en todo momento resultan valores en modo fijo, la Figura 5.7 muestra las desviaciones estándar considerando sólo las mediciones en modo fijo (gráfico derecha) y también aquellas en que hubo mediciones en modo flotante (gráfico izquierda). Se puede ver que existe una tendencia en ambos gráficos, a mayor duración, mayor es la dispersión, aunque en el caso en que sólo se consideran los datos en modo fijo, este aumento de dispersión se estanca a partir de cierto tiempo de observación. En este caso, la desviación estándar no supera el centímetro en la horizontal y los 3 [cm] en la vertical.

En algunos casos, resultan mediciones que superan el día de duración sin tener pérdida de modo fijo, como se muestra en la Figura 5.8. Aquí el valor de la desviación estándar converge a un cierto valor a partir de las dos horas aproximadamente. Al igual que en las demás mediciones RTK modo fijo, los valores de desviación no superan 1 [cm] en la horizontal y 3 [cm] en la vertical.

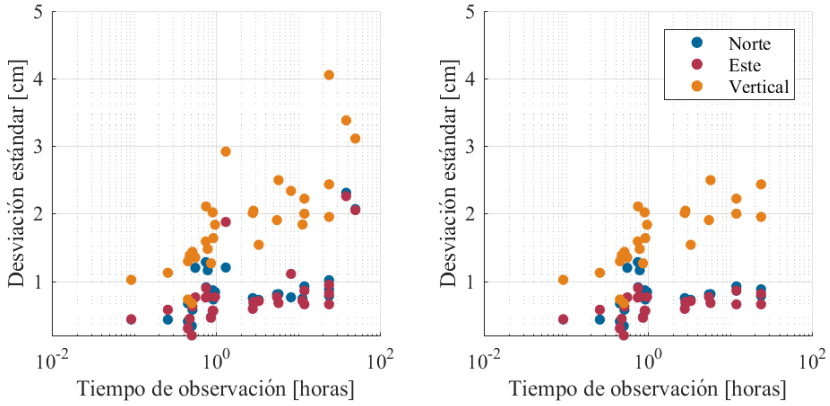


Figura 5.7: Desviaciones de mediciones RTK en diferentes tiempos de observación, con datos flotantes (izquierda) y sólo datos fijos (derecha).

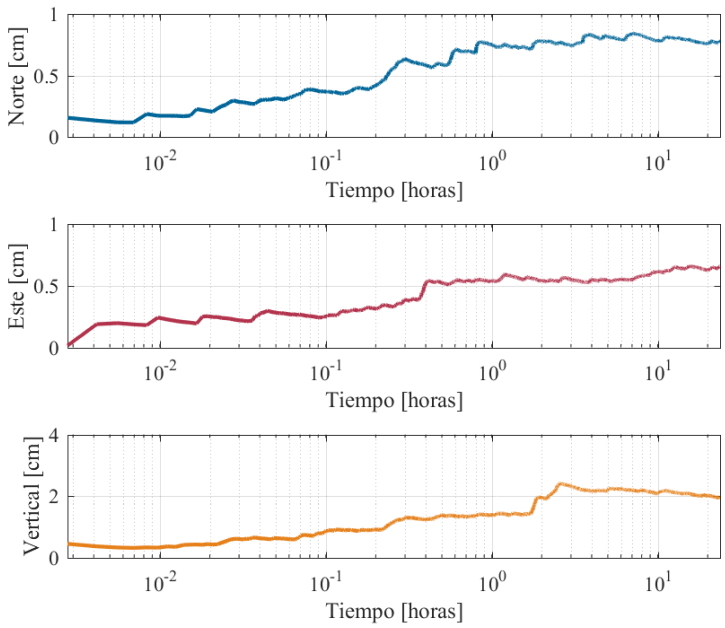


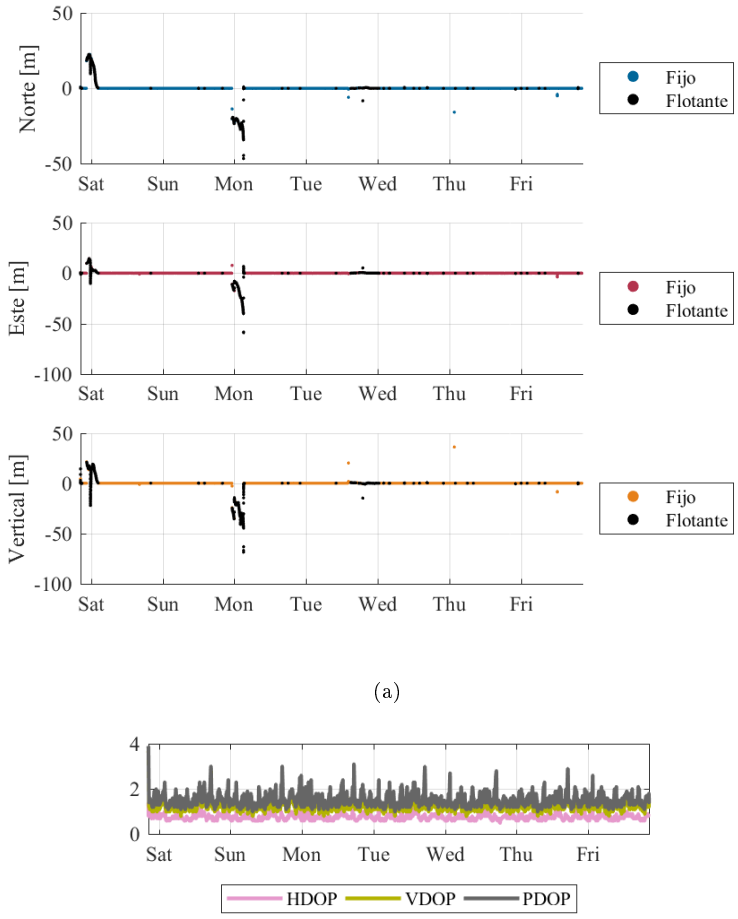
Figura 5.8: Desviación estándar de una medición en modo RTK fijo.

Medición de una semana

La Figura 5.9(a) muestra una medición realizada en RTK durante una semana, señalando aquellos instantes en que la medición fue realizada en modo fijo o en modo flotante. Se puede ver que en aquellos momentos en que se está en modo flotante, resultan valores del orden de decenas de metros. Esta pérdida de precisión puede durar varias horas. En este caso el 90 % del tiempo se estuvo en modo fijo.

Por otro lado, como se ve en la Figura 5.9(b), los momentos en que ocurren valores de ambigüedad

flotantes parecen ser independientes de los parámetros DOP.



(a)

(b)

Figura 5.9: Medición en RTK: a) Residuales en coordenadas NED, b) Parámetros DOP.

A pesar de este inconveniente, los momentos en que ocurre este fenómeno no son prolongados y al volver el modo fijo, la residual vuelve ser del orden en que estaba. Sin embargo, al momento de realizar mediciones de desplazamientos con un alto nivel de precisión, adquiere importancia distinguir las mediciones hechas en modo flotante, con el fin de no tomar en cuenta estos valores y así reconocer falsos positivos.

Influencia del Ángulo Mínimo de Elevación

Una de las variables que se puede controlar en el posicionamiento con estos receptores es el ángulo mínimo de elevación[1] de los satélites. A valores bajos (cercanos a cero) existen problemas con la refracción de la señal al atravesar la atmósfera, por lo que generalmente se utiliza un ángulo de

[1] El ángulo de elevación es el que se mide desde el horizonte local hasta la ubicación del satélite.

elevación mínimo de 10°.
Para comparar el efecto que tiene el ángulo de elevación mínimo de los satélites, se realizan mediciones en RTK con 5; 10; 15; 20 y 25°, donde resultan valores en modo flotante y en modo fijo. Nótese que en estas pruebas sí se consideraron los primeros minutos de medición, con el fin de considerar el tiempo que se tarda en alcanzar el modo fijo.
La Tabla 5.3 muestra los valores DOP promedio para las 48 horas de medición de cada prueba. Como es de esperar, mientras mayor es el ángulo mínimo de elevación, menor es el valor del parámetro DOP, ya que al disminuir la cantidad de satélites, también disminuye la calidad de la configuración satelital.

Tabla 5.3: Valores promedio de parámetros DOP.

Ángulo mínimo de elevación	**HDOP**	**VDOP**
5°	0.7	1.0
10°	0.7	1.2
15°	0.8	1.4
20°	0.9	1.8
25°	1.0	2.3

La Tabla 5.4 muestra las estadísticas de estas mediciones, donde se puede ver que, con excepción de los 5°, a mayor ángulo de elevación mínimo, mayor es la dispersión. Esto se relaciona con la cantidad de datos en modo fijo. En la Tabla 5.5 se muestra el porcentaje de tiempo en que se resolvieron las ambigüedades como número entero, para distintos tiempos de observación y ángulos de elevación mínimos. Se puede ver que estos valores no se relacionan con los parámetros DOP, por lo que un valor de DOP bajo no siempre significa una buena precisión.

Tabla 5.4: Estadísticas de mediciones de 24 horas (con datos flotantes).

Ángulo mínimo de elevación	2σ **(95 %) [cm]**			**CEP [cm]**
	Norte	**Este**	**Vertical**	
5°	1889.3	1263.1	5274.0	813.9
10°	11.3	19.0	29.1	8.7
15°	29.7	26.8	269.3	14.0
20°	122.0	187.4	292.1	76.0
25°	181.5	191.2	357.6	109.7

Se aprecia que, en general, para los ángulos mínimos de elevación 10° y 15° resultan mayores porcentajes de valores en modo fijo y por ende mejores niveles de precisión.
A menores valores de ángulos de elevación aumentan los deslizamientos de ciclo, y a mayores ángulos, aumentan los valores de parámetros DOP. Por lo tanto, no se recomienda el uso de un ángulo mínimo de elevación fuera de este rango de valores.

Tabla 5.5: Porcentaje de tiempo en modo fijo.

Ángulo mínimo de elevación	Modo fijo [%] Tiempo de observación [horas] 2	12	24	48
5°	77.0	95.7	86.9	76.8
10°	82.4	97.1	95.5	95.1
15°	91.1	98.2	93.9	88.8
20°	45.4	57.7	78.7	68.9
25°	66.9	68.5	68.4	83.9

5.2. Pruebas con Receptor en Movimiento

Para conocer el comportamiento que tiene el módulo NEO-M8P en el caso cinemático, se ha registrado su posicionamiento ante pequeños desplazamientos impuestos intencionalmente.
Se definen las residuales (δx) como la diferencia entre el desplazamiento calculado por el rover (x_j) y el desplazamiento impuesto manualmente (x_i):

$$\delta x = x_j - x_i \tag{5.2}$$

Para esto, se ha construido un riel que permite el movimiento controlado de la antena del receptor, tanto en la vertical como en la horizontal. Se ha tomado como ejemplo el dispositivo del *test Como* de Biagi et al. (2016), el cual está compuesto por una barra calibrada de acero para el eje horizontal, con un soporte para la antena en una barra vertical.
Con este instrumento (Figura 5.10) se impusieron distintos desplazamientos verticales y horizontales, de forma manual. Aquí se pueden ver ambas antenas, la del rover en el soporte de la barra vertical, y la antena de la base en un lugar estático. El riel tiene un largo efectivo de 40 [cm] en el eje vertical y 37 [cm] en el horizontal.
El lugar en donde se realizaron las pruebas se trata de una zona suburbana con una vista despejada al cielo en la mayor parte de las direcciones, aunque con algunas casas y un árbol hacia el lado este de la antena.
Se observaron las constelaciones GPS y GLONASS simultáneamente, con un ángulo de elevación mínimo de 10°. La línea base inicial aproximada fue de 1.2 [m]. En todas las mediciones no se consideraron los primeros 10 minutos de grabación de datos, ya que los receptores tardan en alcanzar una precisión aceptable, al tener que recolectar los datos de los satélites y entrar en modo fijo.

A continuación, se muestran los resultados obtenidos de dos mediciones: (1) desplazamientos impuestos de 5 [cm] y (2) desplazamientos de 2 [cm].

Desplazamientos de 5 [cm]

Durante las mediciones, la antena del rover fue moviéndose gradualmente, con cambios de 5 [cm], tanto en la vertical como en la horizontal, de forma intercalada, cada 10 minutos; es decir, cada 5 minutos se realizaba un cambio de posición, primero en el eje horizontal y después de otros 5 minutos en el eje vertical, y así sucesivamente.

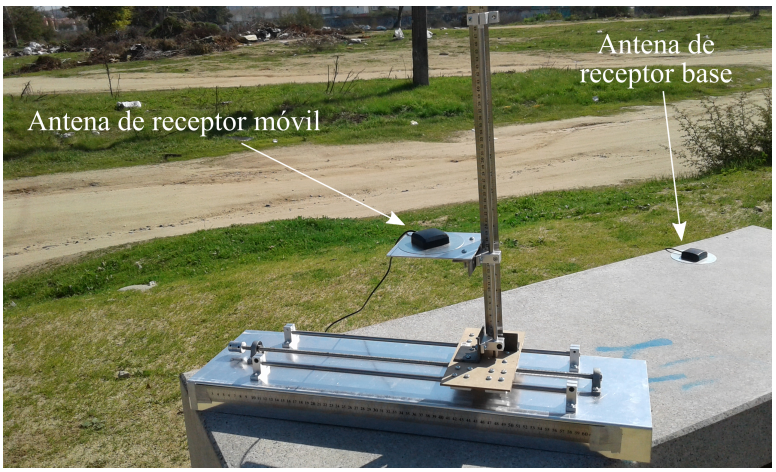


Figura 5.10: Riel para imponer pequeños desplazamientos, junto con la antena del rover (sobre el soporte) y la antena de la base (extremo derecho).

En la Figura 5.11 se muestran los gráficos resultantes de la posición de la antena del rover en coordenadas locales y el desplazamiento horizontal, resultante de las componentes norte y este. Se puede ver que, como el riel estaba más inclinado hacia el norte que hacia el este (N18°E), la magnitud del desplazamiento acumulado de la componente norte resultó mayor.
En la Tabla 5.6 se muestran los valores de residuales (δx en la ecuación 5.2).

Tabla 5.6: Estadísticas de residuales, prueba de desplazamientos de 5 [cm].

	Horizontal [cm]	Vertical [cm]	Norte [cm]	Este [cm]
Promedio	0.2	-2.4	0.8	-0.1
Desviación estándar	0.6	2.2	0.7	0.4
Mínimo	-4.9	-7.7	-4.0	2.3
Máximo	1.9	4.1	2.7	1.3

Es importante mencionar que durante la medición de desplazamientos el receptor cambió de modo fijo a modo flotante en el minuto 50 aproximadamente, en el momento en que se comenzaba a bajar la ubicación del soporte del rover. Estos resultados no se consideraron en los gráficos y valores mostrados, ya que la precisión del modo flotante difiere considerablemente de la precisión del modo fijo. Esto fue debido probablemente a la pérdida de la calidad de recepción de las señales de los satélites, ya que al mover el receptor hacia abajo disminuye el alcance visual (considerando las casas y árboles de alrededor) y aumenta la probabilidad de efecto *multipath*. Es también debido a esto que el nivel de precisión del desplazamiento vertical va disminuyendo a medida que el rover disminuye su altura.

Desplazamientos de 2 [cm]

Análogamente a la prueba anterior, se fue cambiando la posición de la antena del rover gradualmente, pero esta vez con cambios de 2 [cm], tanto en la vertical como en la horizontal.
Esta vez se inclinó el riel de tal forma que los desplazamientos impuestos en las direcciones norte

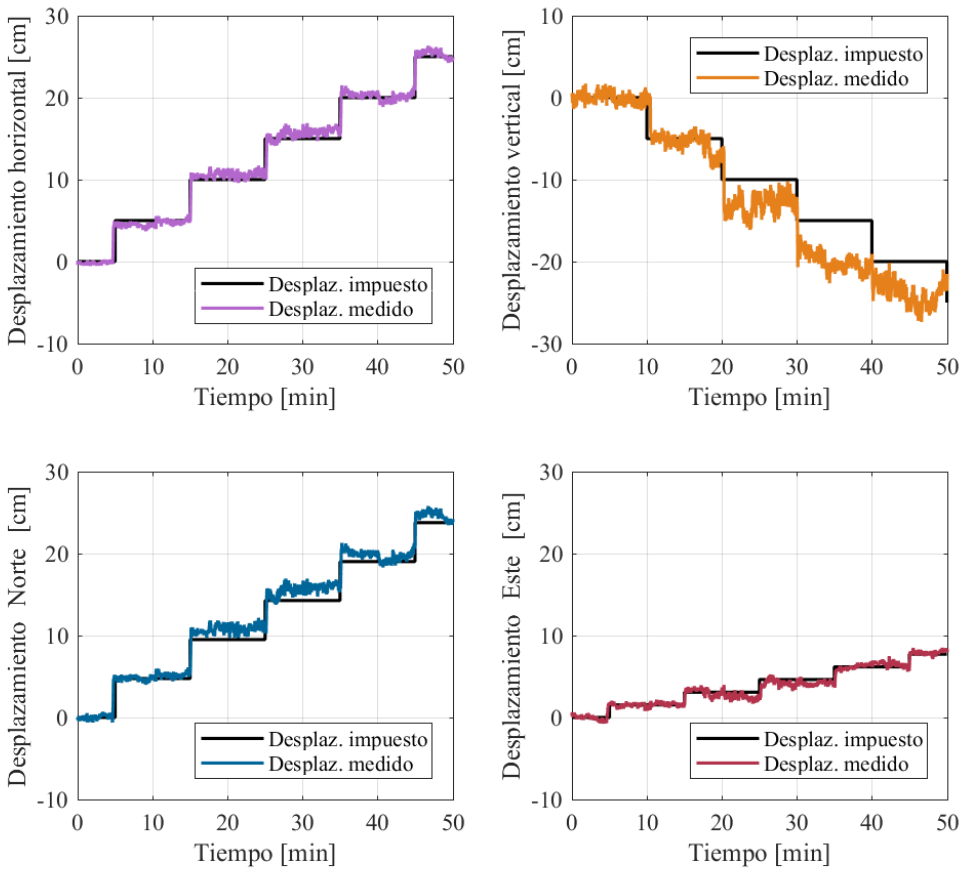


Figura 5.11: Desplazamientos relativos a la posición inicial de la antena en coordenadas NED, con cambios de 5 [cm].

(x_N) y este (x_E) fuesen los mismos; es decir:

$$x_N = x_E = 2\ cm/\sqrt{2} \tag{5.3}$$

En la Figura 5.12 se muestran los gráficos resultantes de la posición de la antena del rover en coordenadas NED y el desplazamiento horizontal.
En la Tabla 5.7 se muestran los valores de residuales (δx en la ecuación 5.2).

Tabla 5.7: Estadísticas de residuales, prueba de desplazamientos de 2 [cm]

	Horizontal [cm]	Vertical [cm]	Norte [cm]	Este [cm]
Promedio	0.6	0.4	0.6	0.7
Desviación estándar	0.5	1.2	0.6	0.4
Mínimo	-1.0	-3.4	-1.1	-0.6
Máximo	2.6	3.8	2.5	1.8

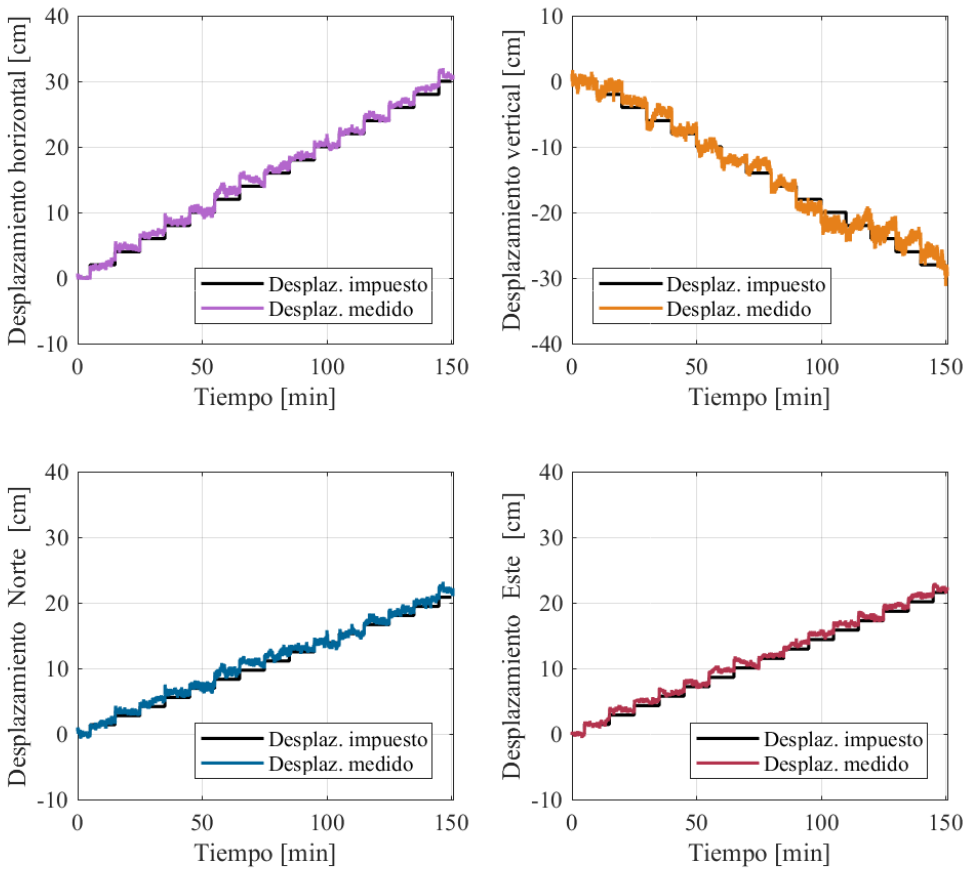


Figura 5.12: Desplazamientos relativos a la posición inicial de la antena en coordenadas NED, con cambios de 2 [cm].

Al igual que en la prueba anterior, a medida que se va disminuyendo la altura del soporte, va disminuyendo el nivel de precisión. En ambos casos se observa un nivel de dispersión parecido, para cada componente.

Finalmente, se puede decir que el módulo NEO-M8P es un receptor capaz de estimar su posición con un nivel de precisión centimétrico mediante el método de posicionamiento diferencial RTK. Además, su exactitud ante cambios de posición está también en el orden del centímetro. Sin embargo, se debe considerar los momentos en que la ambigüedad no se calcula como número entero, es decir, se está en modo flotante, para así poder distinguir falsos desplazamientos.

Capítulo 6

Pruebas de Posicionamiento Absoluto

6.1. Comparación con Receptor de Alto Costo

En el capítulo anterior se evaluó la calidad de las mediciones de posicionamiento relativo hechas con los receptores M8P de bajo costo. En este capítulo se quiere comparar las mediciones de posicionamiento absoluto que realizan estos receptores, con las de algún receptor "geodésico" o de alto costo, con el fin de conocer la calidad de exactitud en la mediciones hechas por el receptor base.

6.1.1. Instrumentación

Para esta prueba, se utilizó el receptor marca *Trimble* modelo R9s, proporcionado por GEOCOM. Las características de este receptor son las siguientes:

- Rastrea los satélites GPS, GLONASS, Galileo y BeiDou. Recibe señales de un total de 440 canales (GPS L1 C/A, L2C, L2E; GLONASS L1 C/A, L2 C/A, L3 CDMA; Galileo L1 CBOC, E5A, E5B, y E5AItBOC; BeiDou B1, B2).
- Puede utilizar tanto las observables de código como de fase portadora.
- La precisión teórica de la posición horizontal (según el fabricante) es de:
  - GNSS diferencial de código: 0.25 m + 1 ppm RMS
  - RTK: 8 mm + 1 ppm RMS
  - Trimble CenterPoint RTX[1]: 4 cm

Ambos receptores son capaces de utilizar las observaciones de código y de fase portadora. Las principales diferencias entre ambos receptores consisten en los tipos de señales y el número de canales que rastrean. Mientras que el u-blox M8P recibe sólo un tipo de frecuencia, proveniente de las señales GPS, GLONASS y BeiDou, el R9s recibe además señales provenientes de los satélites Galileo y dos tipos de frecuencias más.

6.1.2. Resultados de Mediciones Simultáneas

Durante la prueba, ambas antenas, geodésica y de bajo costo, se ubican sobre la azotea del edificio de GEOCOM, separadas por una distancia de cuatro metros, como se muestra en la Figura 6.1. La componente norte de la línea que los separa (línea negra en zoom) es bastante similar a la componente este. Como se aprecia, se dispone de una vista al cielo despejada.
Ambos receptores se configuraron de tal modo que rastrearan sólo los satélites GPS y GLONASS, con un ángulo de elevación mínimo de 10°. En la Figura 6.2 se muestran los satélites rastreados por

[1] Trimble RTX es un servicio de tecnología PPP (*Precise Point Position*) en tiempo real.



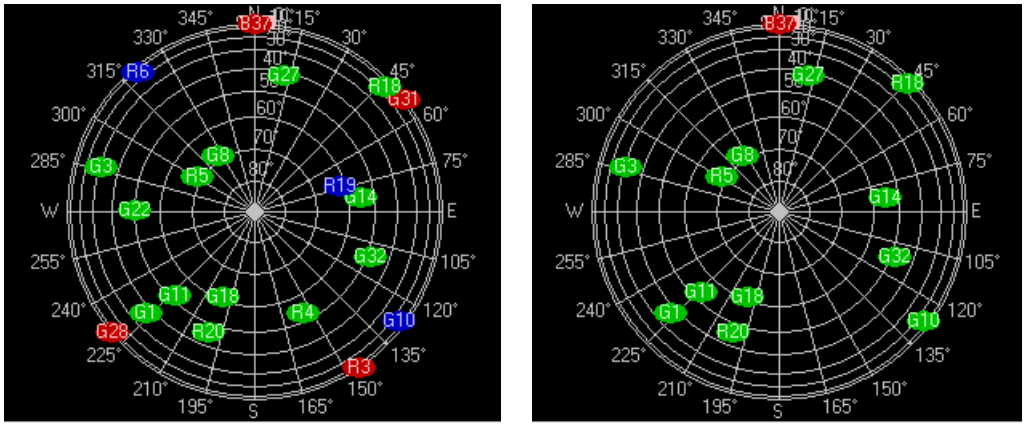
(a)



(b)

Figura 6.1: Ubicación de antenas GNSS en edificio GEOCOM.

ambos receptores en la misma época. En color verde están los satélites usados en la navegación, en azul aquellos cuya señal está disponible, pero no para su uso en la navegación y en rojo los satélites sin señal disponible. Se puede ver que en ambos casos se comparten varios satélites rastreados; mientras que el M8P utiliza trece satélites, el R9s usa doce. La Tabla 6.1 presenta las principales características de la navegación mediante ambos receptores para dos épocas cercanas (separadas por 10 minutos).



(a) (b)

Figura 6.2: Vista al cielo desde el receptor (a) u-blox M8P y (b) Trimble R9s.

Tabla 6.1: Comparación de navegación mediante ambos receptores.

	M8P	**R9s**	**M8P**	**R9s**
UTC	15:55:00 04/12/2019		16:05:00 04/12/2019	
Sistemas	GPS y GLONASS		GPS y GLONASS	
Ángulo de elevación mín.	10°		10°	
Elipsoide de referencia	WGS84		WGS84	
N° de satélites usados (*)	13	12	16	12
- GPS	9	9	10	9
- GLONASS	4	3	6	3
HDOP - VDOP (*)	0.9 - 1.7	0.8 - 1.1	0.8 - 1.1	

(*) Valores para una cierta época.

En la primera época mostrada, los satélites utilizados por los dos receptores son prácticamente los mismos, con excepción del satélite R4 (GLONASS), el cual no es utilizado por el R9s. Por otro lado, al comienzo, los valores de los parámetros DOP son menores con el receptor R9s. Sin embargo, luego de algunos minutos los parámetros DOP según cada receptor convergen a los mismos valores, lo que demuestra la similitud en la metodología del uso de los satélites entre ambos receptores. Nótese que un mayor número de satélites no necesariamente significa una mejor configuración geométrica (o menor dispersión de precisión).

Para comparar las coordenadas locales de estas mediciones absolutas se tomó como referencia, u origen, el promedio de las coordenadas hechas con el receptor geodésico R9s, con el fin de conocer la distancia entre receptores, según sus propias mediciones. Se comparó media hora de datos recibidos por ambos receptores, resultando las coordenadas NED de la Figura 6.3. Recordar que los receptores se encuentran distanciados por aproximadamente 4 [m].

Aunque las coordenadas calculadas por el receptor R9s parecen no tener dispersión, en realidad tomó varios minutos desde encendido en converger la ubicación, tal como se muestra en la Figura 6.4, donde se muestran las coordenadas geodésicas calculadas por ambos receptores, pero claramente

la dispersión de los datos calculados por el M8P es mucho mayor que la de los datos del R9s. Nótese que la altitud corresponde a la altura sobre el elipsoide de referencia (HAE[2]). La Tabla 6.2 muestra las estadísticas de las mediciones hechas por ambos receptores. La desviación estándar de la componente vertical del receptor M8P llega a ser más de 10 veces la de la componente vertical del receptor R9s.

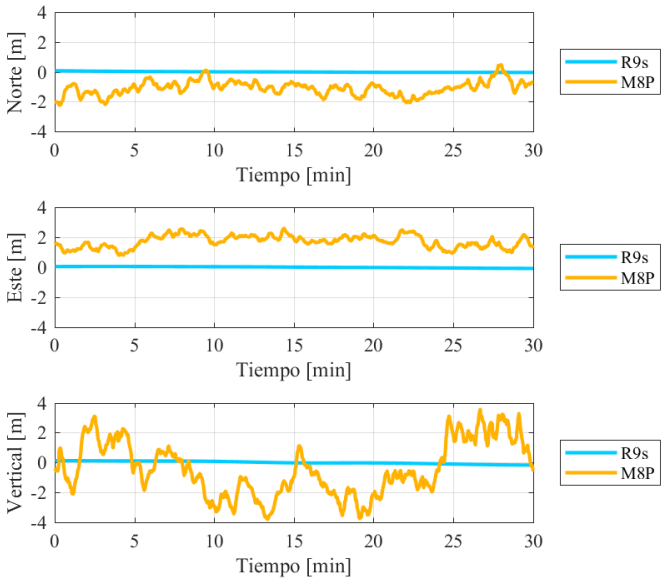


Figura 6.3: Coordenadas NED de ambos receptores, con respecto al receptor R9s.

Tabla 6.2: Estadísticas posicionamiento absoluto según ambos receptores.

Receptor	2σ **(95 %) [cm]**			**CEP [cm]**
	Norte	**Este**	**Vertical**	
M8P	94.9	82.4	366.1	52.1
R9s	16.1	9.6	31.2	7.5

La vista en planta de las coordenadas calculadas por ambos receptores se puede ver en la Figura 6.5. Aquí se muestran las coordenadas locales con respecto al promedio de las mediciones hechas por el receptor R9s. En la Tabla 6.3 se muestran los valores promedio de las coordenadas locales y geodésicas según ambos receptores. Se puede ver que la distancia entre receptores "calculada por ellos" es de 2.13 [m], si se consideran los puntos medios de cada nube, valor que difiere del real (3.9 [m] aprox.). Además, observando la Figura 6.1 se puede ver que los signos de las componentes norte, este y vertical coinciden con la posición real del receptor M8P con respecto al R9s (se encuentra al sureste y más abajo que éste) y las magnitudes no están alejadas de la realidad.
Por otro lado, es importante mencionar que en este caso se utilizó la media aritmética de los datos obtenidos por el receptor R9s como origen del marco de referencia local, lo cual incluye un cierto

[2] *Height above ellipsoid.*

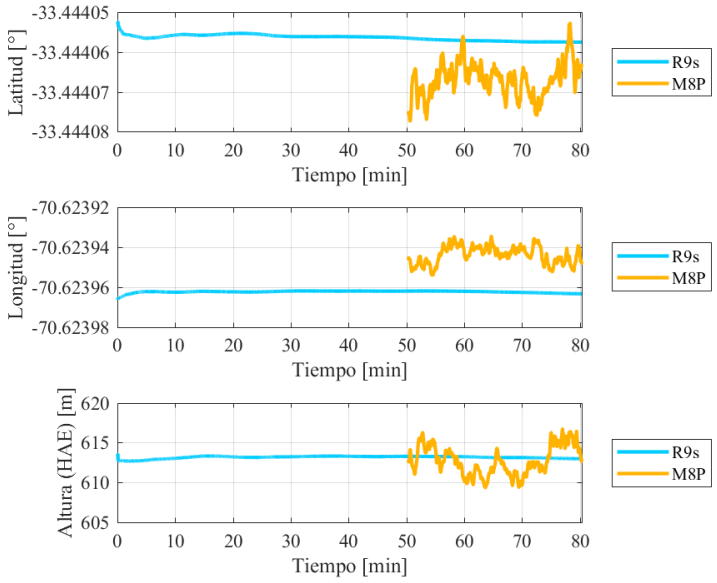


Figura 6.4: Coordenadas NED de ambos receptores, con respecto al receptor R9s.

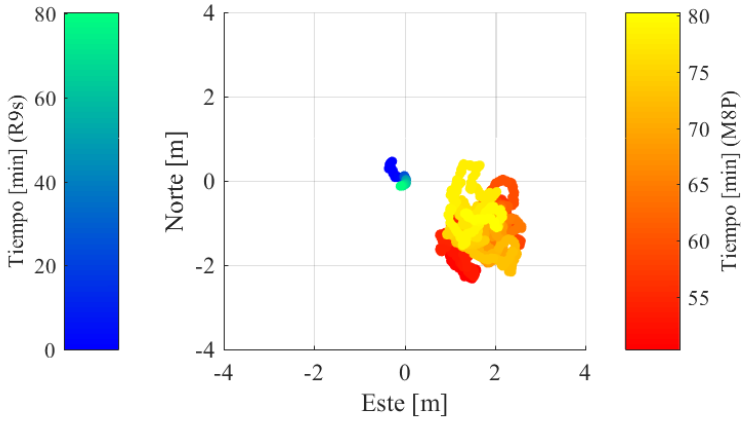


Figura 6.5: Mapa de dispersión con respecto a la ubicación del receptor R9s.

Tabla 6.3: Coordenadas estimadas por ambos receptores.

Receptor	**Norte** [m]	**Este** [m]	**Vertical** [m]	**Latitud** [°]	**Longitud** [°]	**Altitud** (HAE) [m]
M8P	-1.17	1.73	-0.43	-33.4440669	-70.6239438	612.72
R9s	0.00	0.00	0.00	-33.4440564	-70.6239624	613.15

margen de error. Para mejorar la confiabilidad de las mediciones entregadas por el receptor R9s, se

debiese utilizar un periodo más prolongado de toma de datos.
Finalmente, se puede decir que, a pesar de la notoria dispersión de las mediciones receptor M8P de bajo costo, en comparación con el receptor geodésico R9s, la exactitud de las mediciones entre ambos difieren por menos de dos metros, por lo menos en esta prueba. Si bien este valor es considerable, no se le puede atribuir todo el error al receptor M8P, ya que ambos receptores están referidos al mismo marco de referencia y pueden ser tanto las mediciones hechas por el M8P como las del R9s las que difieren de su posición "real".

6.2. Posicionamiento con PPP en Postproceso

Como las mediciones de posicionamiento absolutas de los receptores M8P tienen un grado de error en exactitud, se opta por utilizar la técnica de Posicionamiento Absoluto de Precisión o PPP[3] (Sección 3.4.1) ofrecida por servicios de corrección, en donde no se utilizan técnicas de diferenciación, sino que se posiciona en base a modelos atmosféricos y correcciones de errores.
En este caso se utiliza el servicio gratuito del Departamento de Recursos Naturales de Canadá (NRCan[4]) disponible en su página web (https://www.nrcan.gc.ca). En donde se pueden enviar archivos de observación en formato RINEX y recibir las mediciones corregidas.
Utilizando datos brutos obtenidos con el receptor M8P, cuyas coordenadas se muestran en la Figura 6.6, se obtienen las coordenadas corregidas mostradas en la Figura 6.7. Al comparar ambos casos, se puede ver la notoria diferencia de precisión que hay. La Tabla 6.4 presenta los valores de desviación.

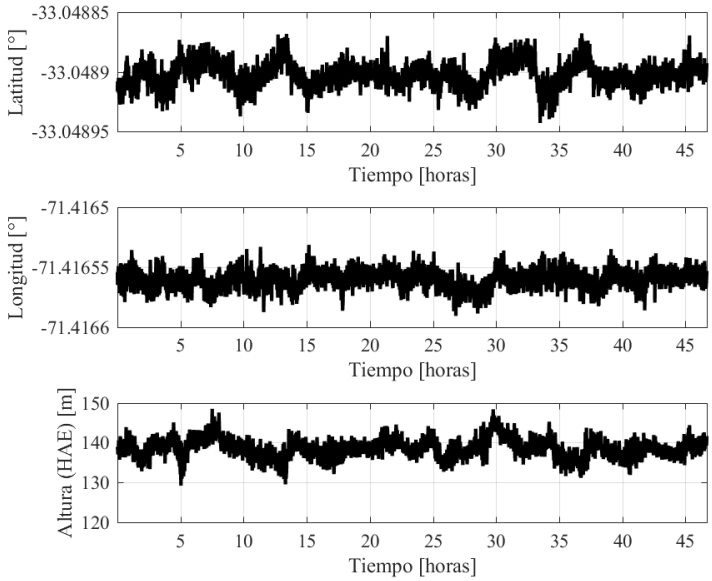


Figura 6.6: Coordenadas geodésicas absolutas.

[3] *Precise Point Positioning.*
[4] *Natural Resources Canada.*

Se puede ver que en las coordenadas corregidas mientras mayor es el tiempo de observación, mejor es el nivel de precisión del posicionamiento, el cual converge a un cierto valor.

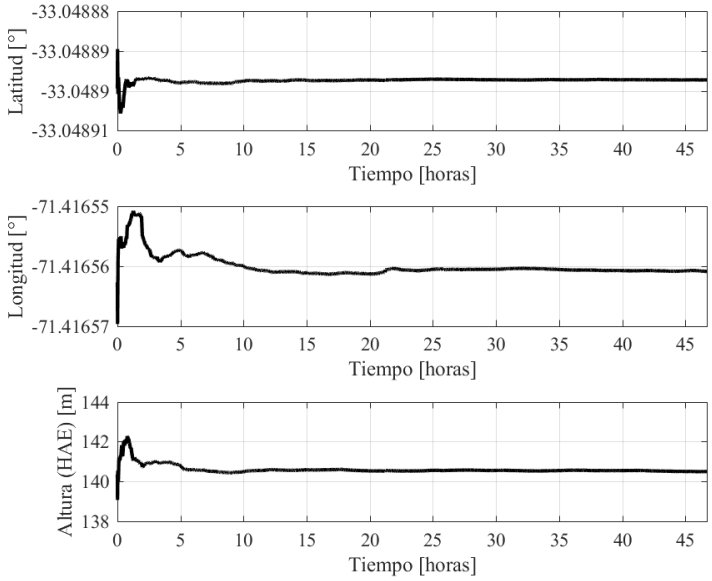


Figura 6.7: Coordenadas geodésicas absolutas corregidas.

Tabla 6.4: Nivel de precisión de ambas estimaciones.

Estimación	2σ **(95 %) [m]**		
	Norte	**Este**	**Altura (HAE)**
A priori	2.238	1.403	4.667
Corregida	0.124	0.162	0.273

Las coordenadas geodésicas estimadas se muestran en la Tabla 6.5. Nótese que estos valores están referidos al sistema ITRF14, cuyo elipsoide de referencia es el GRS80. La distancia absoluta que difiere entre ambas estimaciones (datos brutos y corregidos) es de 4.62 [m].

Tabla 6.5: Coordenadas geodésicas estimadas.

Estimación	**Latitud (+N)**	**Longitud (+E)**	**Altura (HAE) [m]**
A priori	-33.0489323	-71.4165632	142.99
Corregida	-33.0488973	-71.4165609	140.50
Diferencia [m]	3.886	0.215	-2.493

Con el fin de mejorar el nivel de exactitud que posee el receptor M8P, la técnica PPP se puede utilizar para fijar las coordenadas de la estación base, teniendo en cuenta que se requieren varias horas de datos para que la solución converja, por lo que, mientras mayor es el tiempo de observación, mejor es el nivel de precisión.

Capítulo 7

Diseño de Prototipo

7.1. Instrumentación

Luego de probar los sensores NEO-M8P y verificar la capacidad que éstos tienen de medir desplazamientos con una precisión centimétrica, se procede a desarrollar la instrumentación necesaria para implementarlos en terreno. Ésta debe asegurar: (1) la recolección y el envío de datos, (2) el suministro de energía y (3) la protección de los dispositivos contra ambientes agresivos. Para esto, el receptor de prueba está conformado por:

a) Una caja de protección IP65[1] que contiene:

- Una tarjeta con módulo NEO-M8P, con sus respectivas antenas GNSS y de radio UHF.
- Una tarjeta de desarrollo Raspberry Pi Zero W con antena wifi.

b) Un panel solar

c) Una batería

d) Controladores

La Figura 7.1 muestra los componentes del prototipo de presentación.

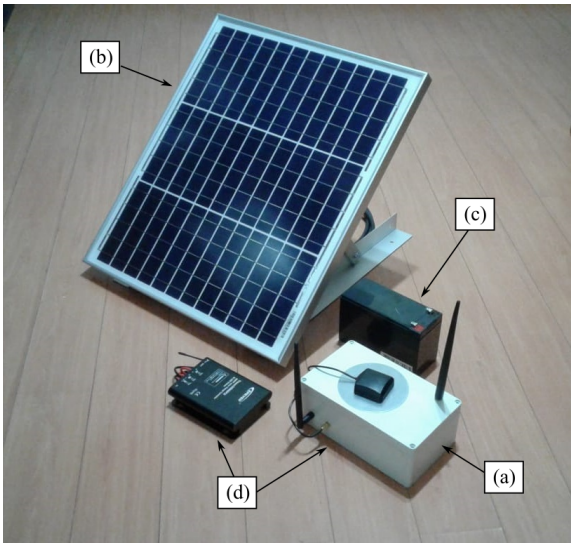


Figura 7.1: Compornentes del prototipo.

[1]El grado de protección IP se utiliza en los datos técnicos de equipamiento electrónico. En este caso las cifras significan: (6) totalmente estanco al polvo y (5) protegido contra chorros de agua en todas las direcciones.

Debido a la adición de estos componentes, el costo del receptor aumenta a $ 300.000 (CLP) aproximadamente, valor que sigue estando muy por debajo del de un receptor geodésico (del orden de los $ 10.000.000). Aunque podrían incluirse elementos que aún no están considerados (como un sistema de enfriamiento), lo que aumentaría este costo inicial.

7.2. Suministro de Energía

Para proveer de poder a las tarjetas de desarrollo, se opta por la energía solar fotovoltaica[2], debido a las ventajas ecológicas y económicas que ésta posee.
Como se mencionó anteriormente se selecciona como fuente de energía los siguientes componentes, considerando un consumo estimado de las tarjetas de 0.3 [A]:

1. **Panel solar**: conformado por celdas fotovoltaicas, capaces de convertir la energía lumínica en energía eléctrica. En este caso el panel utilizado de 36 celdas (de silicio policristalino) posee las siguientes características (según proveedor):
   - Potencia máxima: 30 [W]
   - Voltaje de máxima potencia (V_{mpp}): 18 [V]
   - Corriente de máxima potencia (I_{mpp}): 1.67 [A]
2. **Batería**: de ácido-plomo. Proporciona una tensión de 12 [V] y tiene una capacidad de 7.2 [Ah].
3. **Regulador de carga MPPT**[3]: es un dispositivo que regula la carga entregada a la batería, buscando el punto de potencia óptima en que puede operar el panel.

Además, como las tarjetas funcionan con una tensión de entrada de 5 [V] se emplea un reductor o convertidor *buck*[4], que sirve para obtener a su salida una tensión menor que la de entrada, en este caso de 12 [V] a 5[V].

7.2.1. Prueba de Autonomía Energética

Con el objetivo de conocer la factibilidad del suministro de energía a partir del panel solar, se realiza una prueba con todos los dispositivos mencionados, conectados según la Figura 7.2. El panel se ubica en el techo de una casa, con orientación norte e inclinación aproximada de 30°, dada la pendiente del techo.
Se quiere verificar que la batería no se descargue completamente mientras el receptor esté conectado, para así asegurar su funcionamiento autónomo. Para esto, se midió la tensión de la batería durante varios días, resultando el gráfico de la Figura 7.3.
Como se puede ver, el voltaje que entrega la batería en ningún momento es menor que el voltaje de descarga (11.6 [V] aprox.) incluso durante las horas sin sol.
Los puntos altos de los días sábado 12 y lunes 14 resultaron ser menores que los de los otros días, debido a la nubosidad permanente que se presentó, llegando a haber leves precipitaciones durante

[2] La energía solar fotovoltaica consiste en la transformación directa de la radiación electromagnética del sol en energía eléctrica.
[3] *Maximum Power Point Tracker*.
[4] También llamado *step-down*.

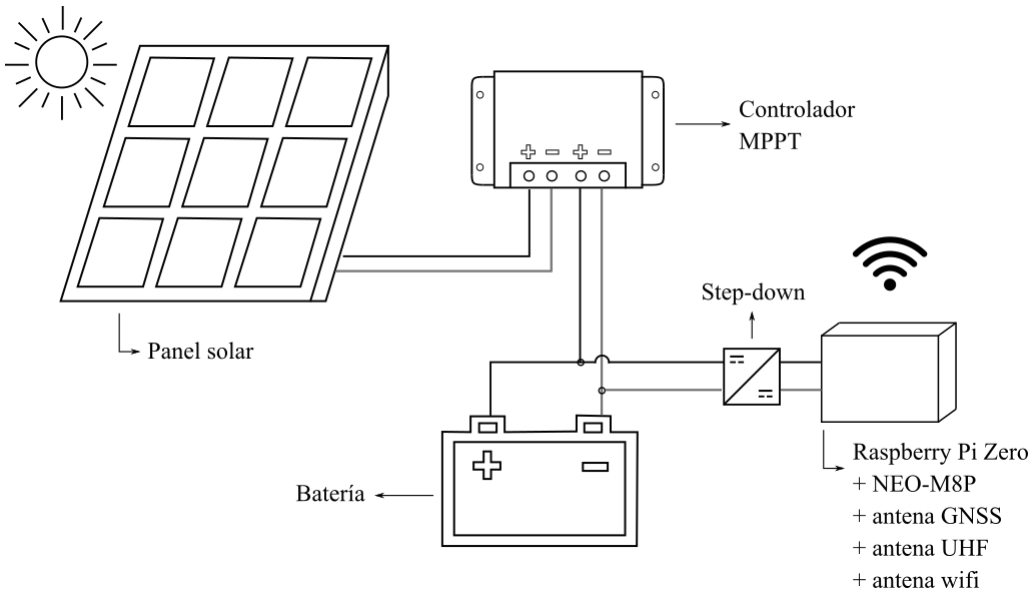


Figura 7.2: Diagrama de conexión.

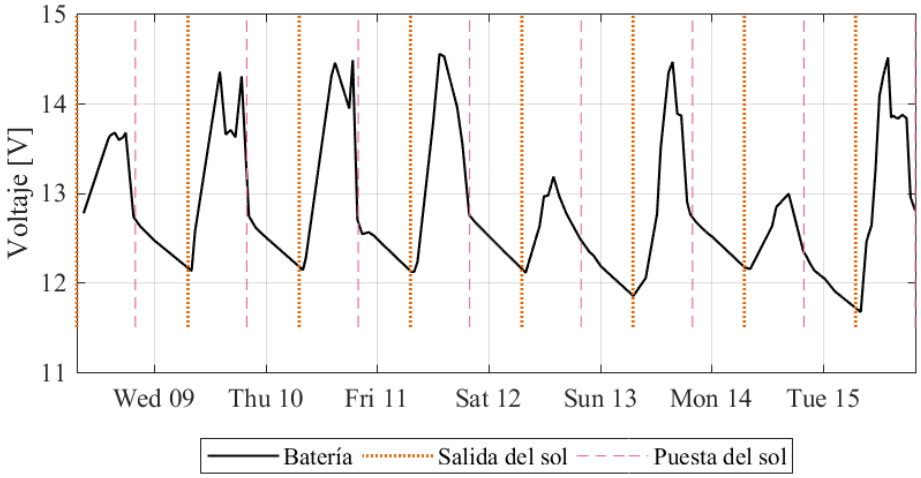


Figura 7.3: Variación de voltaje que entrega la batería durante prueba.

el lunes, lo que disminuyó la energía entregada a la batería, sin embargo, ésta no llegó al voltaje de descarga. Además, durante la prueba no hubo interrupciones en la medición, según los datos grabados; lo que indica que este sistema permite al receptor funcionar de manera autónoma.
Sin embargo, el nivel de irradiancia medio varía durante el año y según el lugar, por lo que se debiese repetir esta prueba durante los meses de menor radiación, en la zona donde se utilizará el panel.

7.3. Futura Prueba en Talud

Como ya se ha desarrollado un primer prototipo de receptor, para la prueba en talud se debe replicar este modelo, considerando que existen diferentes configuraciones dependiendo de si es un receptor base o un receptor móvil o rover. Para el primero se puede prescindir de la tarjeta Raspberry y de la antena wifi, si es que se configura con anterioridad y no se requiere modificar sus coordenadas. Pero para los rovers es necesario un dispositivo y/o interfaz que permita enviar los datos de medición. Durante las mediciones con los receptores se recomienda lo siguiente:

- Instalar la estación o receptor base en un lugar fijo, cercano a los rovers, asegurando un buen alcance visual a los satélites.
- Asegurar un nivel de carga de las baterías sobre los 12 [V].
- Orientar el panel solar hacia el norte geográfico, con una inclinación entre 15° y 40°. Lo óptimo es la latitud geográfica en donde se ubique el panel (por ejemplo, en Quilpué: 33°).
- Instalar un router en una zona cercana, con el fin de captar los datos provenientes de los rovers y enviarlos vía GPRS (o similar) hacia algún computador o centro de monitoreo.

Se debe tener en cuenta además, que las antenas GNSS deben contar con un buen alcance visual al cielo, por lo que se deben instalar lejos de obstáculos en lo posible.

Capítulo 8

Conclusiones

Funcionamiento de los GNSS

Para implementar un sistema de sensores GNSS que permita medir desplazamientos con un buen nivel de precisión y exactitud es necesario tener una idea tanto del funcionamiento de éstos, como el de los segmentos espacial y de control, además de conocer los sistemas y marcos a los cuales están referidos.
Para calcular su posición, un receptor GNSS requiere las señales emitidas de al menos cuatro satélites. Así éste puede estimar la distancia entre él y cada satélite mediante la técnica de tiempo de arribo (ToA). De esta forma se puede conocer su posición mediante trilateración inversa. Para medir la distancia entre el receptor y un satélites se pueden utilizar tanto las mediciones de código como de fase de portadora de la señal, siendo ésta última la observable que permite una mejor precisión de posicionamiento.
Existen varios factores que influyen en el posicionamiento GNSS y que pueden provocar errores en las mediciones. Los principales son: los efectos atmosféricos (al viajar la señal a través de la ionósfera y la tropósfera), los sesgos de los relojes (u osciladores) del receptor y de los satélites, el efecto de ruta múltiple o *multipath*, aquellos referidos a los errores propios del receptor (como el ruido o el centro de fase de la antena) y otros que influyen en menor medida o son corregidos por el segmento de control. Debido a estos errores, es necesario recurrir a ciertas técnicas de posicionamiento que permitan mitigarlos.

Pruebas de Posicionamiento

Luego de estudiar los diferentes métodos aplicables en la zona, se decidió utilizar la técnica diferencial RTK (*Real Time Kinematic*), la cual permite "eliminar" ciertos errores producidos en las mediciones de posición, mediante el uso de una estación base que emite sus propios datos a los receptores móviles o *rovers*, los que corrigen su posición mediante diferenciación. Para comprobar la efectividad de esta técnica, se seleccionaron los receptores de bajo costo marca u-blox modelo NEO-M8P. Estos receptores monofrecuencia rastrean las señales provenientes de los satélites GPS, GLONASS y BeiDou, y son capaces de realizar posicionamiento en RTK mediante doble diferencia de fase portadora.
Se realizaron mediciones en modo diferencial (es decir, se utilizaron ambos receptores M8P, uno como base y otro como rover) con el receptor estático y en movimiento, en donde se evaluaron las residuales de las mediciones. Como resultado de estas pruebas se puede comentar lo siguiente:

- En mediciones con fase portadora la precisión depende de la resolución de las ambigüedades, por lo que existe una diferencia notable entre las mediciones resultantes en modo flotante (ambigüedades como número flotante) y aquellas en modo fijo (ambigüedades como número

entero), resultando desviaciones entre dos a cuatro veces más los valores en modo flotante que en modo fijo.

- Las desviaciones estándar resultantes están en el orden del centímetro en la horizontal y de 2 a 3 [cm] en la vertical, siempre y cuando se esté en modo fijo.
- Para alcanzar el modo fijo y obtener un buen nivel de precisión es necesario que los receptores se ubiquen a cielo abierto, por lo que se deben evitar, en lo posible, obstáculos que reduzcan el alcance visual a los satélites.
- Las pruebas con el receptor en movimiento permiten estudiar la exactitud de las mediciones con respecto a desplazamientos ya conocidos. Las residuales resultantes en promedio no superan el centímetro cuando hay una buena vista al cielo. Sin embargo, si el alcance visual a los satélites se ve obstruido, la calidad de las mediciones disminuye, pudiendo aparecer "falsos positivos", es decir, el receptor "calcula" que hay movimiento, cuando en realidad está estático.
- Aunque se esté en modo fijo durante varias horas, pueden aparecer deslizamientos de ciclos y éstos provocan resultados en modo flotante, por lo que es importante identificar estos valores.
- El ángulo de elevación mínimo a los satélites debe estar entre 10° a 15°, de lo contrario disminuye el tiempo de observación en modo fijo y por lo tanto aumenta la dispersión de los datos.

Las pruebas estáticas en modo diferencial son útiles para evaluar la precisión de las mediciones pero no la exactitud. Es por esto que se realizan las pruebas con el receptor en movimiento, en donde se comparan los resultados referidos a un sistema local.
Las pruebas no diferenciales o absolutas también sirven para evaluar el nivel de exactitud de las mediciones, pero con un marco de referencia global. Para comparar la calidad de la exactitud en las mediciones del receptor de bajo costo, se compararon éstas con las de un receptor "geodésico" o de alto costo: el receptor marca Trimble modelo R9s. Con respecto a esta prueba de posicionamiento absoluto se puede decir que:

- Cuando el receptor M8P está independiente, es decir, no utiliza la técnica de diferencia doble (o RTK), su nivel de dispersión aumenta, llegando al orden del metro (en la horizontal), a diferencia del receptor R9s, cuya desviación estándar está en el orden de los 10 [cm] (en la horizontal).
- Existe una diferencia de 1.8 [m] aproximadamente entre la distancia real y la estimada. Sin embargo, este error no puede atribuirse totalmente al receptor M8P, ya que ambos receptores están referidos al mismo marco de referencia y pueden ser tanto las mediciones hechas por el M8P como las del R9s las que difieren de su posición "real". A pesar de esta diferencia, los signos de las componentes norte, este y vertical coinciden en ambos casos, es decir, el receptor M8P sí se encuentra al sureste y más abajo con respecto al receptor R9s.

El posicionamiento PPP (*Precise Point Positioning*) puede ser utilizada tanto en tiempo real (mediante servicios de corrección) como en postproceso. En este trabajo se compararon las mediciones brutas del receptor M8P con aquellas corregidas mediante esta técnica en postproceso, alcanzando diferencias de más de cuatro metros entre la estimación a priori y la corregida. Para alcanzar niveles

de precisión aceptables se requiere un mínimo tiempo de observación (más de 6 horas aprox. de datos) para que las coordenadas converjan.
Por lo tanto, utilizando los receptores u-blox NEO-M8P, mediante la técnica de posicionamiento diferencial RTK, se obtienen precisiones de nivel centimétrico en las mediciones con los *rovers*. Mientras que la técnica PPP se puede utilizar para corregir las coordenadas definidas para la estación base y así lograr un buen nivel de exactitud con respecto al *datum* o marco de referencia que se utilice.

Trabajos Futuros

En este trabajo se realizó un primer prototipo que servirá para replicar e implementar una red de receptores GNSS en un talud.
Ya que quedan fuera del alcance de este trabajo, como continuación se pueden desarrollar los siguientes temas:

- Utilizar diferentes tarjetas de desarrollo para el módulo NEO-M8P que permitan aplicar otros sistemas de comunicación y corrección, ya que la tarjeta C94-M8P forma parte de un kit de prueba.
- Mientras se realizaba este trabajo salió al mercado el módulo u-blox ZED-F9P capaz de rastrear más de un tipo de frecuencia de las señales provenientes de los satélites GNSS, a diferencia del módulo NEO-M8P que sólo rastrea un tipo de frecuencia, por lo que se pueden obtener mejores niveles de precisión que con este último. Aunque el costo del módulo ZED-F9P es mayor que el del NEO-M8P, sigue estando por muy debajo del costo de receptores geodésicos. Por lo tanto, para obtener mejores precisiones en el posicionamiento se recomienda el uso de este receptor.
- Desarrollar una interfaz en donde se puedan monitorear los receptores distribuidos en el tranque simultáneamente, de manera de poder visualizar las deformaciones que se van produciendo en el transcurso del tiempo.

Bibliografía

Acharya, Rajat (2015). *Understanding satellite navigation.* Academic Press, , Elsevier Inc, 1st ed.

ARINC Research Corporation (2004). Navstar gps space segment/navigation user interfaces. *Interface Specification, IS-GPS-200.*

Ashby, N. y Spilker, J. J., Jr. (1996). *Global Positioning System, Volume 2 - Theory and Applications*, chapter Introduction to Relativity Effects on the Global Positioning System. American Institute of Aeronautics and Astronautics.

Aznar, Á.C.; Roca, L.J.; y Boris, S.B. (2002). *Antenas.* Politecnos Series. Universitat Politècnica de Catalunya.

Banville, Simon y Langley, Richard (2012). Cycle-slip correction for single-frequency ppp. Vol 5.

Bernhard Hofmann-Wellenhof, Herbert Lichtenegger, Elmar Wasle (2007). *GNSS - Global Navigation Satellite Systems: GPS, GLONASS, Galileo, and more.* Springer.

Biagi, Ludovico; Grec, Florin-Catalin; y Negretti, Marco (2016). Low-cost gnss receivers for local monitoring: Experimental simulation, and analysis of displacements. *Sensors (Basel, Switzerland)*, 16.

Boucher, C. y Altamimi, Z (1996). International terrestrial reference frame. *GPS World*, 7, 71–74.

Brunner, F. K. y Welsch, W. M. (1993). Effect of the troposphere on gps measurements. *GPS World*, 4, 42.

Carcanague, Sébastien (2012). Real-time geometry-based cycle slip resolution technique for single-frequency ppp and rtk.

Casanova, Leonardo (2002). *Topografía Plana*, chapter Capítulo 10: Sistemas de Posicionamiento Global. Universidad de Los Andes, Facultad de Ingeniería.

Cina, Alberto y Piras, Marco (2015). Performance of low-cost gnss receiver for landslides monitoring: Test and results. *Geomatics, Natural Hazards and Risk*, 6(5-7), 497–514.

El-Rabbany, Ahmed (2002). *Introduction to GPS: The Global Positioning System.* Artech House Publishers, 1st ed.

Fernández, Unai (2005). *Técnicas de resolución de la ambigüedad de las medidas de fase en sistemas de navegación por satélite.* PhD thesis, Universidad de Málaga.

Ginocchio, Rosanna y Santibáñez, Claudia (2009). Fitoestabilización de depósitos de relaves: Una tecnología basada en el uso de plantas distinta de la forestación. *Ambiente Forestal (Universidad de Chile)*, 7.

Gurtner, Werner (2009). *RINEX: The Receiver Independent Exchange Format, Version 3.01.* Astronomical Institute, University of Bern.

Hofmann-Wellenhof, Bernhard; Lichtenegger, Herbert; y Collins, James (1994). *Global Positioning System: Theory and Practice*. Springer-Verlag, 3rd ed.

IGM - Instituro Geográfico Militar (2008). *Nuevo Marco de Referencia Geodésico. RGN SIRGAS - CHILE*.

Kaplan, Elliott D. y Hegarty, Christopher (2006). *Understanding GPS: principles and applications*. Artech House Publishers, 2nd ed.

Kleusberg, Alfred y Langley, R. B. (1990). The limitations of gps.

Klobuchar, J. A. (1991). Ionospheric effects on GPS.

Komjathy, A. (1997). *Global ionospheric total electron content mapping using the global positioning system*. PhD thesis, Department of Geodesy and Geomatics Engineering, University of New Brunswick (Canada).

Kouba, Jan y Héroux, Pierre (2001). Precise point positioning using igs orbit and clock products. *GPS Solutions*, 5, 12–28.

Krakiwsky, E. J. (1973). Conformal Map Projections in Geodesy. (217).

Lachapelle, G.; Hagglund, J.; Falkenberg, W.; Bellemare, P.; Eaton, RM.; y Casey, M. (1986). Gps land kinematic positioning experiments. *The Hydrographic Journal*.

Langley, Richard B. (1991). Time, Clocks, and GPS. *GPS World*.

Langley, R. B. (1993). Communication links for dgps. *GPS World,*.

Leick, Alfred (1995). *GPS Satellite Surveying*. John Wiley, 2nd ed.

Leick, Alfred; Rapoport, Lev; y Tatarnikov, Dmitry (2015). *GPS Satellite Surveying*. Wiley, 4th ed.

Lemmens, Mathias (2014). Posicionamiento GNSS. *GIM International*, (pp. 16–21).

Li, Wei y Wang, Chang (2011). Gps in the tailings dam deformation monitoring. *Procedia Engineering*, 26, 1648–1657.

Malys, Stephen; Slater, James A.; Smith, Randall W.; Kunz, Larry E.; y Kenyon, Steven C. (1997). Refinements to the world geodetic system 1984. *ION GPS 1997*.

Misra, Pratap y Enge, Per (2006). *Global Positioning System: Signals, Measurements, and Performance*. Ganga-Jamuna Press, 2nd ed.

Muñoz Bollas, Anna (2009). *Geodesia y Cartografía: Fundamentos de los Sistemas de Información Geográfica*. Universitat Oberta de Catalunya.

Nolan, J.; Gourevitch, S.; y Ladd, J. (1992). Geodetic processing using full dual band observables. *Proceedings of the 5th International Technical Meeting of the Satellite Division of The Institute of Navigation (ION GPS 1992)*, (pp. 1033–1041).

Olaya, Víctor (2011). *Sistemas de Información Geográfica*.

Olson, Eric (2018). How does gps works? https://insights.globalspec.com/article/10315/how-does-gps-work.

Palacios, J.E.G. (2005). *Topografia para las tropas.*

Petrovski, Ivan G. y Tsujii, Toshiaki (2012). *Digital satellite navigation and geophysics: A practical guide with gnss signal simulator and receiver laboratory.*

Poch, M.A.C.; de Orús Navarro, J.J.; y de Murga, J.N. (2007). *Astronomía esférica y mecánica celeste.* Universitat (Universitat de Barcelona). Publicacions i Edicions de la Universitat de Barcelona.

Programa Tranque (2018). *Avances y Retos para la Gestión de los Depósitos de Relaves en Chile.* Fundación Chile.

R. Bowring, B (1976). Transformation from spatial to geographical coordinates. 23, 323–327.

Ridpath, Ian (1998). *A Dictionary of Astronomy.* Oxford Paperback Reference. Oxford University Press, USA.

Scaioni, Marco; Marsella, Maria; Crosetto, Michele; Tornatore, Vincenza; y Wang, Jin (2018). Geodetic and remote-sensing sensors for dam deformation monitoring. *Sensors*, 18, 3682.

Schupler, B. R. y Clark, T. A. (1991). How different antennas effect the gps observable. *GPS World*, 2, 32–36.

Seeber, Gunter (1993). *Satellite Geodesy.* Walter de Gruyter.

Seeber, Gunter (2003). *Satellite Geodesy: Foundations, Methods, Applications.* Walter de Gruyter, 2 revised edición.

Shaw, Michael y Turner, David (2000). Modernization of the Global Positioning System1. *GPS World*, 11(9), 19–22.

SIRGAS (2018). Sistema de referencia geocéntrico para las américas. http://www.sirgas.org/es/sirgas-definition/.

Taylor, Jack y Barnes, Eric (2005). Gps current signal-in-space navigation performance. *Proceedings of the 2005 National Technical Meeting of The Institute of Navigation*, (pp. 385–393).

Teunissen, P.J.G.; de Jonge, P.J.; y Tiberius, C.C.J.M. (1995). A new way to fix carrier-phase ambiguities. *GPS World.*

Tsakiri, Maria; Sioulis, Antonis; y Piniotis, George (2017). Compliance of low-cost, single-frequency gnss receivers to standards consistent with iso for control surveying. *Int. J. Metrol. Qual. Eng.*, 8, 11.

u-blox (2017a). C94-m8p. u-blox rtk application board package. https://www.u-blox.com/sites/default/files/C94-M8P-AppBoard_UserGuide_%28UBX-15031066%29.pdf. Accessed: 07-11-2018.

u-blox (2017b). Neo-m8p. data sheet. https://www.u-blox.com/sites/default/files/NEO-M8P_DataSheet_%28UBX-15016656%29.pdf. Accessed: 07-11-2018.

u-blox (2018a). U-blox m8. receiver description, protocol specification. https://www.u-blox.com/sites/default/files/products/documents/u-blox8-M8_ReceiverDescrProtSpec_%28UBX-13003221%29_Public.pdf. Accessed: 07-11-2018.

u-blox (2018b). U-center. gnss evaluation software for windows. https://www.u-blox.com/sites/default/files/u-center_UserGuide_%28UBX-13005250%29.pdf. Accessed: 25-11-2018.

Vanicek, Petr y Krakiwsky, Edzard J. (1986). *Geodesy: The Concepts*. Elsevier Science Publisher, second edition.

Warren, David L. M. y Raquet, John F. (2003). Broadcast vs. precise GPS ephemerides: a historical perspective. *GPS Solutions*, 7(3), 151–156.

Wells, D. et al. (1987). *Guide to GPS Positioning*. Fredericton, New Brunswick, Canadian GPS Associates.

Zumberge, J.F.; V. B. Heflin, M; Jefferson, D.C.; Watkins, Michael; y Webb, Frank (1997). Precise point positioning for the efficient and robust analysis of gps data from large networks. *Journal of Geophysical Research*, 102.

Apéndice A

Sistemas de Referencia y Posición del Satélite

A.1. Conceptos Astronómicos de Posición

La trayectoria aparente del Sol sobre la Tierra es la **eclíptica**. Dado que el Sol describe, aparentemente, una elipse con la Tierra en uno de sus focos, la eclíptica es un círculo máximo cuyo correspondiente plano diametral se denomina **plano de la eclíptica**.
La **oblicuidad de la eclíptica** es el ángulo que forman el plano de la eclíptica y el plano del ecuador (Figura A.1). Se representa por ε y su valor actual es $\varepsilon = 23^\circ\ 26'$ (Poch et al., 2007). La oblicuidad de la eclíptica no es constante, sino que disminuye a razón de $0''47$ por año. El eje de la eclíptica es el diámetro perpendicular al plano de la eclíptica. Sus extremos constituyen los polos de la eclíptica y se denominan norte y sur según su proximidad a los polos celestes[1] norte y sur respectivamente (P_e y P'_e en la Figura A.1).

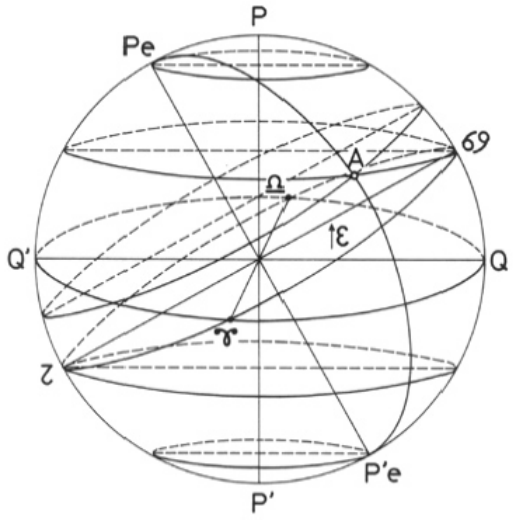


Figura A.1: Planos ecuatorial y de la eclíptica. (Poch et al., 2007)

La **línea de los equinoccios** es el diámetro determinado por la intersección entre el plano del ecuador y el plano de la eclíptica ($\Upsilon\Omega$ en la Figura A.1). Los **equinoccios** son los extremos de la línea de los equinoccios. El punto en el cual el Sol pasa del hemisferio celeste sur al hemisferio celeste norte se denomina **primer punto de Aries**, **equinoccio vernal** o equinoccio de primavera y se representa por Υ. El punto diametralmente opuesto se denomina **primer punto de Libra**, **equinoccio autumnal** o equinoccio de otoño y se representa por Ω. El equinoccio no es un punto fijo, sino que se mueve debido a la precesión y a la nutación. Si sólo se considera la precesión,

[1] Los polos celestes son los dos puntos imaginarios sobre los cuales la esfera celeste aparenta rotar, y se encuentran a 90° desde el ecuador. Éstos yacen sobre la esfera celeste directamente sobre los polos geográficos de la Tierra.

el punto resultante es conocido como "equinoccion medio (o medio de fecha)". Sin embargo, si se incluye la nutación, el punto es conocido como "equinoccio verdadero".

A.1.1. Precesión de los Equinoccios

La rotación de la Tierra experimenta una lenta precesión, debido a la combinación de las fuerzas de atracción gravitatorias del Sol, la Luna, y los planetas. El polo de la Tierra se demora unos 25800 años en describir un círculo completo en el cuerpo celeste; este círculo tiene un radio aproximado de 23°.5, es decir, la inclinación del eje terrestre (Ridpath, 1998).
La precesión de los equinoccios es el movimiento de los equinoccios a lo largo de la eclíptica, producido por la combinación del movimiento del ecuador (precesión lunisolar) y la eclíptica (precesión planetaria); equivale a unos 50".3 (Ridpath, 1998).

A.1.2. Nutación

La nutación es una ocilación periódica del polo de la Tierra sobre un posición media en el cuerpo celeste, debido a las fuerzas de atracción de la Luna y el Sol sobre el abultamiento ecuatorial de la Tierra. Esto causa una pequeña variación periódica en la posición de las estrellas, y se superpone al mucho más grande movimiento de precesión. La principal oscilación tiene una amplitud de unos $\pm$ 9" en un periodo de 18.6 años (equivalente al periodo de revolución de los nodos de la Luna alrededor de la eclíptica). Adicionalmente, existen oscilaciones mucho más pequeñas, algunas con periodos tan pequeños como unos pocos días.

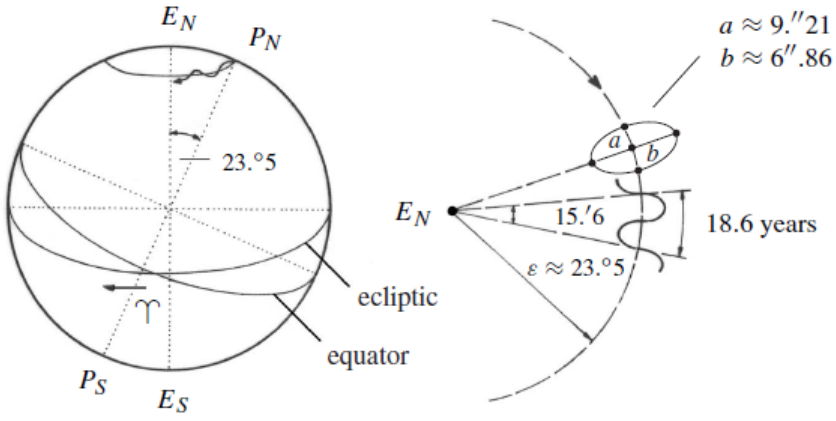


Figura A.2: Precesión y nutación; el eje de rotación terrestre $P_S P_N$ describe un cono sobre los polos eclípticos E_S, E_N. (Seeber, 2003)

A.2. Escalas de Tiempo

A.2.1. Tiempo Sideral y Tiempo Universal

El tiempo sideral y el tiempo universal (UT) están directamente relacionados con la rotación de la Tierra, por lo que son escalas de tiempo equivalentes.
El tiempo sideral es el ángulo horario del equinoccio vernal Υ, y depende de la longitud geográfica

en donde se esté. Dependiendo de si es el "equinoccio verdadero" o el "equinoccio medio" el que se utilice como punto de referencia, la forma resultante del tiempo sideral se conoce como **tiempo sideral aparente** o **tiempo sideral medio**, respectivamente.
En la Figura A.3 se pueden ver estas relaciones. El **Tiempo Sideral Aparente Local** (LAST), es el ángulo horario del equinoccio verdadero vernal, con referencia al meridiano local propio del observador. El **Tiempo Sideral Aparente de Greenwich** (GAST) es el ángulo horario del equinoccio verdadero vernal, con referencia al meridiano de Greenwich.

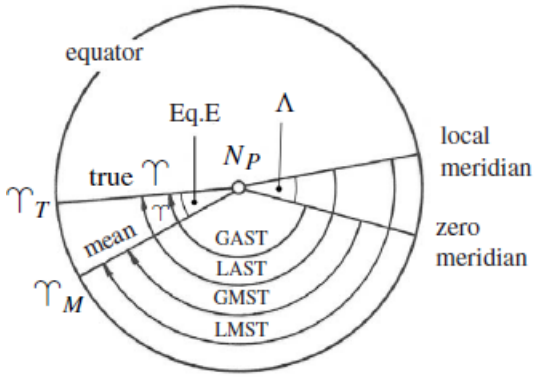


Figura A.3: Definición del tiempo sideral. (Seeber, 2003)

El tiempo sideral aparente está dado por la observación directa de las estrellas. El equinoccio vernal (o primer punto de Aries) no es una dirección sidérea completamente fija, sino que varía debido a la precesión y la nutación (Sección A.1).El tiempo sideral aparente corregido de este efecto se denomina tiempo sideral medio, que, dependiendo del meridiano de referencia, se habla de **Tiempo Sideral Medio Local** (LMST) o **Tiempo Sideral Medio de Greenwich**, si está referenciado al meridiano local o al meridiano de Greenwich, respectivamente.
La diferencia entre el tiempo sideral aparente y el tiempo sideral medio, que raramente excede un segundo, se denomina **ecuación de los equinoccios** (Eq.E):

$$GMST - GAST = \Delta\psi \cos\varepsilon$$

en donde $\Delta\psi$ es la nutación en longitud y ε es la oblicuidad de la eclíptica.
El tiempo sideral aparente es usado para la evaluación de observaciones astronómicas. Sin embargo, para la construcción de una escala de tiempo, se usa el tiempo sideral medio. La unidad fundamental es el **Día Sidéreo Medio**, definido como el intervalo de tiempo comprendido entre dos pasos sucesivos del equinoccio medio por el mismo meridiano. El día sideral medio no es exactamente una vuelta completa de la Tierra sobre su eje, con respecto al espacio inercial, ya que la posición del equinoccio vernal está afecto de precesión. Como resultado, el día sideral es 0.0084 [s] más corto que el periodo de rotación de la Tierra relativo a las estrellas (Ridpath, 1998).
Para fines prácticos, se necesita una escala de tiempo que corresponda al movimiento diurno aparente del Sol. Sin embargo, el ángulo horario del verdadero Sol experimenta variaciones durante el año, debido a los cambios en la declinación del Sol y a la órbita elíptica de la Tierra. Por lo tanto, esta medición no es apropiada para una escala de tiempo uniforme. Es por esto que se reemplaza por un "Sol medio" ficticio, el cual se mueve en el plano del ecuador con velocidad constante. Se

define entonces el **Día Solar Medio** como el intervalo de tiempo entre dos pasos consecutivos del Sol medio ficticio por el meridiano.El **tiempo solar medio** se mide mediante el ángulo horario del Sol medio. El ángulo horario del Sol medio se llama **Tiempo Universal** (UT). Sin embargo, el tiempo solar medio viene afectado por todas las variaciones del movimiento de rotación de la Tierra, por lo que no es uniforme.

El tiempo universal puede ser considerado como una forma especial de tiempo sideral. La diferencia en la longitud del día para ambas definiciones es del orden de $24^h/365 \approx 4^m$ El tiempo universal corregido de las variaciones periódicas de la rotación debidas al desplazamiento del polo y a las fluctuaciones estacionales, se llama **Tiempo Universal 1** (UT1), la cual es la escala de tiempo fundamental en astronomía geodésica y geodesia satelital, ya que define la orientación del sistema terrestre convencional con respecto al espacio (Seeber, 2003). También es la escala de tiempo básica para navegación. Sin embargo, UT1 incluye todas las variaciones de la velocidad de rotación de la Tierra, por lo que no es una escala de tiempo uniforme.

A.2.2. Tiempo Atómico

El **tiempo atómico internacional** TAI (*Temps Atomique International*) es una escala de tiempo uniforme, la cual se basa en escalas de tiempo independientes generadas por relojes atómicos ubicados en varios laboratorios alrededor del mundo (El-Rabbany, 2002). La unidad del tiempo atómico fue seleccionada de tal modo que equivalga a la duración del **segundo de efemérides**[2]. La definición del segundo atómico desde 1967 es la siguiente (según la 13^a conferencia del Comité Internacional de Pesos y Mediciones): "El segundo es la duración de 9 192 631 770 períodos de la radiación correspondiente a la transición entre los dos niveles hiperfinos del estado fundamental del átomo de cesio 133". Esta es también la definición de la unidad de tiempo del Sistema Internacional de Unidades (SI).
El tiempo atómico facilita también el llamado **Tiempo Universal Coordinado** (UTC), tiempo uniforme que emiten las señales horarias de modo que la diferencia entre la escala del UTC y la del TAI es un número exacto de segundos n (A.1) (La diferencia en el año 2003 fue de 32 [s]), y la diferencia entre el UT1 y el UTC no puede exceder de 0.9 segundos (Seeber, 2003).

$$UTC = TAI - n \cdot (1s) \tag{A.1}$$

Dependiendo de la situación, n puede ser cambiada en ciertas fechas, específicamente el 1 de enero o el 1 de julio. Así, la época del UTC se adapta al UT1 incrementando o removiendo los denominados **segundos intercalares** (o segundos bisiestos), manteniendo una diferencia menor a 0.9 segundos. La Figura A.4 muestra la historia de los ajustes del segundo bisiesto[3].

[2] El Tiempo de Efemérides fue la escala de tiempo usada para calcular las órbitas dentro del Sistema Solar desde 1960 a 1984. Su unidad fundamental fue el *segundo de efemérides*

[3] Existe una discusión en la comunidad científica sobre las posibles ventajas en descontinuar los ajustes del segundo intercalar

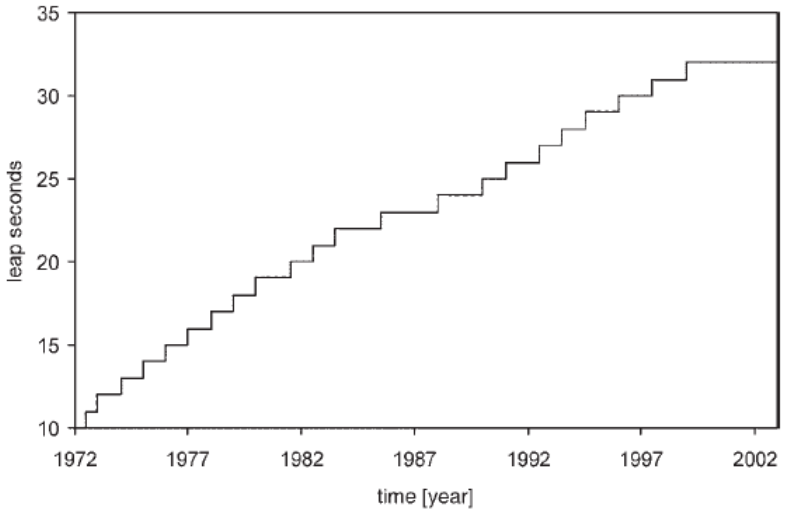


Figura A.4: Ajustes de segundo intercalar. (IERS, 2002)

Varios laboratorios y agencias que operan varios relojes atómicos, producen su propio e independiente tiempo atómico. Por ejemplo, la escala de tiempo del Observatorio Naval de los Estados Unidos se llama UTC (USNO), y el Instituto Nacional de Estándares y Tecnología produce la escala UTC (NIST) (Leick et al., 2015).

A.2.3. Tiempo GPS

El Sistema de Posicionamiento Global (GPS) utiliza su propia escala de tiempo: el **Tiempo GPS** (GPST). En el tiempo GPS no se introducen segundos intercalares, lo que significa que el tiempo GPS es una escala de tiempo continua (El-Rabbany, 2002). Esta escala fue equivalente con el UTC el 6 de enero de 1980 (Langley, 1991) (época inicial del GPST). Sin embargo, debido a los segundos intercalares introducidos en la escala UTC, el tiempo GPS difiere con ésta por un número casi entero de segundos. La diferencia entre las escalas GPST y UTC están dadas en el mensaje de navegación GPS (ver Sección 2.4.1). En el 2003 la diferencia entre ambas escalas fue de 13 segundos (Seeber, 2003).
La unidad del tiempo GPS es el segundo definido por el Sistema Internacional de Unidades. Sin embargo, el tiempo GPS es únicamente derivado de los relojes atómicos que forman parte del sistema GPS. Por lo tanto, es una escala de tiempo atómico "libre" y puede mostrar diferencias leves en comparación con la escala TAI. En la época inicial del GPST, la diferencia entre el GPST y el UTC fue la misma que entre el TAI y el UTC, de 19^s (Figura 2.6).
Es importante mencionar que los relojes del satélite y del receptor están desfasados del tiempo GPS, como resultado de los errores en los relojes (ver Sección 2.5.1).
Nótese que tanto el UTC y el GPST así como el tiempo de GLONASS son escalas de tiempo atómico.

A.2.4. Tiempo de Efemérides, Tiempo Terrestre y Tiempo Dinámico Baricéntrico

El **Tiempo de Efemérides** (ET) se introdujo con el fin de representar el movimiento orbital dentro del Sistema Solar, permitiendo el cálculo de la posición de un cuerpo en cualquier instante de tiempo. Con el fin de contemplar la existencia de efectos relativistas como la deflexión gravitacional de la luz, el ET fue reemplazado en 1984 por dos nuevas escalas dinámicas de tiempo: el tiempo terrestre y el tiempo dinámico baricéntrico.
El **Tiempo Terrestre** (TT), conocido originalmente como Tiempo Dinámico Terrestre (TDT), se utiliza para calcular posiciones geocéntricas de los cuerpos del Sistema Solar, como las publicadas en *The Astronomical Almanac*[4] (Ridpath, 1998). La unidad de esta escala coincide con un múltiplo del segundo del SI (1 día = 86 400 segundos) (Poch et al., 2007). Por definición:

$$TT = TAI + 32^s.184 \tag{A.2}$$

Esta diferencia entre el TT y el TAI se ha establecido para evitar discontinuidades en las tablas de las Efemérides que se han publicado anteriormente a 1984 con argumento ET, y las que se publican, a partir de 1984, con argumento TT.
Para las ecuaciones del movimiento de los astros referidos al baricentro del sistema solar se emplea la escala del **Tiempo Dinámico Baricéntrico** (TDB), utilizándose fundamentalmente en las teorías relativistas. Esta escala es una forma de tiempo coordinado, pero reescalado de manera que tenga sólo diferencias periódicas con respecto al TT.

A.3. Conversión entre Sistemas de Coordenadas

A.3.1. Conversión desde Coordenadas Geodésicas a Coordenadas Cartesianas en el Sistema ECEF

Las transformaciones desde las coordenadas geodésicas a las coordenadas cartesianas en el sistema ECEF se muestran a continuación. Dados los parámetros geodésicos λ, ϕ y h, se puede calcular el vector $\mathbf{u} = (x,\ y,\ z)$ como sigue (Kaplan y Hegarty, 2006):

$$x = (N + h)\cos\phi\cos\lambda \tag{A.3}$$

$$y = (N + h)\cos\phi\sin\lambda \tag{A.4}$$

$$z = \left[N\left(1 - e^2\right) + h\right]\sin\phi \tag{A.5}$$

en donde N es el radio de curvatura normal (o del primer vertical) y equivale a:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2\sin^2\phi}}$$

[4] El Almanaque Astronómico es la publicación anual que contiene información (o tablas) del Sol, la Luna, los planetas y sus satélites, y otros datos astronómicos. Es compilada y publicada en conjunto por el Observatorio Naval de los Estados Unidos y el Real Observatorio de Greenwich.

A.3.2. Determinación de las Coordenadas Geodésicas: Latitud, Longitud y Altura desde el Sistema ECEF

La solución inversa, es decir, expresar (λ, ϕ, h) en función de (x, y, z) involucra una relación no lineal. Dado el vector de posición de un receptor $\mathbf{u} = (x, y, z)$ en el sistema ECEF, se puede calcular la longitud geodésica (λ) como:

$$\lambda = \begin{cases} \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x \geq 0 \\ 180^\circ + \arctan\left(\frac{y}{x}\right) & x < 0 \ ; \ y \geq 0 \\ -180^\circ + \arctan\left(\frac{y_u}{x}\right) & x < 0 \ ; \ y < 0 \end{cases} \tag{A.6}$$

En la ecuación (A.6) los ángulos negativos corresponden a los grados de latitud al oeste (del meridiano de *Greenwich*).
La latitud geodésica se obtiene de la ecuación (A.5) usando un proceso iterativo. Para esto, es conveniente reescribir esta ecuación como (Leick et al., 2015):

$$\tan\phi = \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2}} \left(1 + \frac{e^2 N \sin\phi}{z}\right) \tag{A.7}$$

y usar:

$$\phi_{inicial} = \tan^{-1}\left[\frac{z}{(1 - e^2)\sqrt{x^2 + y^2}}\right] \tag{A.8}$$

como valor inicial de la iteración, para el lado derecho de la ecuación (A.7). Se itera hasta producir cambios insignificantes en la latitud geodésica. Luego de la convergencia, se calcula la altura geodésica como:

$$h = \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{\cos\phi} - N \tag{A.9}$$

Nótese que el parámetro N es el radio de curvatura normal y no se refiere a la altura geoidal.
Varias soluciones han sido creadas para el cálculo de coordenadas geodésicas curvilíneas (ϕ, λ, h) desde las coordenadas cartesianas (x, y, z). Otro método iterativo es el de *Bowring* (R. Bowring, 1976), que se describe en la Tabla (A.1). Aquí a, b, e^2 y e'^2 son los parámetros geodésicos descritos anteriormente[5].

A.3.3. Conversión desde Coordenadas Cartesianas en el Sistema ECEF a Coordenadas Locales

Para la transformación de una posición desde el marco ECEF ($\mathbf{P}_e = [X, Y, Z]$) al marco NED ($\mathbf{P}_n = [N, E, D]$) se requiere también la transformación desde el sistema geodésico al marco ECEF. Específicamente, se tiene que:

$$\mathbf{P}_n = \mathbf{R}_{n/e}\left(\mathbf{P}_e - \mathbf{P}_{e,ref}\right) \tag{A.10}$$

[5]Nótese que el parámetro N es el usado por R. Bowring (1976) y no se refiere a la altura geoidal.

Tabla A.1: Determinación de la altura geodésica y la latitud en términos de los parámetros ECEF. (Kaplan y Hegarty, 2006)

$$p = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$\tan u = \left(\frac{z}{p}\right)\left(\frac{a}{b}\right)$$

Iteración:

$$\cos^2 u = \frac{1}{1 + \tan^2 u}$$

$$\sin^2 u = 1 - \cos^2 u$$

$$\tan \phi = \frac{z + e'^2 b \sin^3 u}{p - e^2 a \cos^3 u}$$

$$\tan u = \left(\frac{b}{a}\right) \tan \phi$$

hasta que $\tan u$ converge, entonces:

$$N = \frac{a}{\sqrt{1 - e^2 \sin^2 \phi}}$$

$$h = \frac{p}{\cos \phi} - N \text{ (con } \phi \neq \pm 90°)$$

si no:

$$h = \frac{z}{\sin \phi} - N + e^2 N \text{ (con } \phi \neq 0°)$$

donde $\mathbf{P}_{e,ref}$ es la posición del origen del marco local NED en el sistema de coordenadas ECEF y $\mathbf{R}_{n/e}$ es la matriz de rotación desde el marco ECEF al marco local NED, la cual está dada por:

$$\mathbf{R}_{n/e} = \begin{bmatrix} -\sin\phi_{ref}\ \cos\lambda_{ref} & -\sin\phi_{ref}\ \sin\lambda_{ref} & \cos\phi_{ref} \\ -\sin\lambda_{ref} & \cos\lambda_{ref} & 0 \\ -\cos\phi_{ref}\ \cos\lambda_{ref} & -\cos\phi_{ref}\ \sin\lambda_{ref} & -\sin\phi_{ref} \end{bmatrix} \tag{A.11}$$

donde λ_{ref} y ϕ_{ref} son la longitud y la latitud correspondientes a $\mathbf{P}_{e,ref}$.

En el Apéndice A.4 se definen las proyecciones cartográficas, las cuales difieren de los sistemas de referencias ya vistos.

A.4. Proyecciones Cartográficas

La proyección cartográfica es definida, desde un punto de vista geométrico, como la transformación de las características físicas de la superficie curva de la Tierra en una superficie plana llamada mapa. También se define, desde el punto de vista matemático, como la transformación de coordenadas geodésicas (ϕ, λ) en coordenadas rectangulares (en forma de malla), comúnmente llamadas este y norte (Vanicek y Krakiwsky, 1986; Leick, 1995); es decir, la proyección cartográfica es una

representación sistemática de los paralelos y meridianos de una superficie tridimensional en una bidimensional.
Dado que una superficie plana no puede ajustarse a una esfera sin estirarse o encogerse, es imposible representar las características del globo terráqueo en un mapa sin producir distorsiones.

A.4.1. Tipos de Proyecciones

Como es imposible conservar todas las propiedades al mismo tiempo, hay que concentrarse en qué tipo de mapa se quiere realizar, ya que cada proyección puede conservar alguna de sus propiedades geométricas: la forma, el área, la distancia o la dirección. Considerando estas propiedades geométricas, las proyecciones se pueden clasificar en: (1) **conformes**, conservan la forma, es decir, no se distorsionan las relaciones angulares, la condición para que un mapa sea conforme es que meridianos y paralelos se corten en ángulo recto, (2) **equivalentes**, conservan el área[6], (3) **equidistantes**, conservan las distancias, sólo desde el centro de la proyección o a lo largo de los círculos máximos (meridianos), pasando por un punto (Snyder, 1987)[7], (4) **acimutales**, conservan las direcciones (ángulos o acimuts, no necesariamente distancias) de todos los puntos del mapa con respecto a un punto de referencia: el centro del mapa (Snyder, 1987)[8] y (5) proyecciones de **compromiso**, en donde se trata de conseguir un balance entre propiedades diferentes. A pesar de los problemas relativos a la distorsión, todas las proyecciones mantienen una característica importante: la exactitud del posicionamiento.
Por otra parte, las proyecciones se pueden clasificar según la superficie sobre la que se proyecta. La proyección puede realizarse sobre una superficie tridimensional que sea "desenrollable" o "desplegable", a diferencia de la esfera[9]. Según la superficie geométrica de la que derivan, podemos establecer una clasificación de las proyecciones en **cónicas**, **cilíndricas** o **planas** (azimutales o cenitales).
Dentro de las proyecciones cilíndricas, en su concepción más simple, el cilindro se sitúa de forma tangente al ecuador (proyección normal o simple), aunque puede situarse secante y hacerlo a los meridianos (proyección transversal) o a otros puntos (proyección oblicua).
Uno de los mapas más populares es la proyección universal transversal de Mercator.

A.4.2. Proyección Universal Transversal de Mercator (UTM)

La proyección universal transversal de Mercator (UTM) es una proyección conforme, en donde se utiliza un cilindro secante (Figura A.6). Con esta proyección, la Tierra (es decir, el elipsoide) es dividido en 60 zonas, o husos, de igual tamaño; cada huso tiene su propio meridiano central, el cual se ubica exactamente en la mitad del huso (Krakiwsky, 1973). Esto implica que cada huso cubre 6° de longitud, 3° a cada lado del meridiano central. Cada huso es proyectado separadamente, es decir, el cilindro imaginario rota alrededor de la Tierra, con el fin de minimizar la distorsión. A cada huso se le asigna un número del 1 al 60, comenzando por la longitud $\lambda = 180°\text{W}$, e incrementándose

[6] Para conseguir la equivalencia, hay que deformar los ángulos originales; por lo tanto, una proyección no puede ser al mismo tiempo equivalente y conforme.
[7] No es posible representar todas las distancias de manera correcta.
[8] Como en el caso de las distancias, no todas las relaciones angulares pueden representarse correctamente en un mismo mapa, pero sí es posible representar correctamente todas las relaciones angulares con respecto a un punto.
[9] Una superficie no desplegable es aquella que no importa cómo se divida, es imposible de desenrollar para que sea plana, como una esfera o un elipsoide.

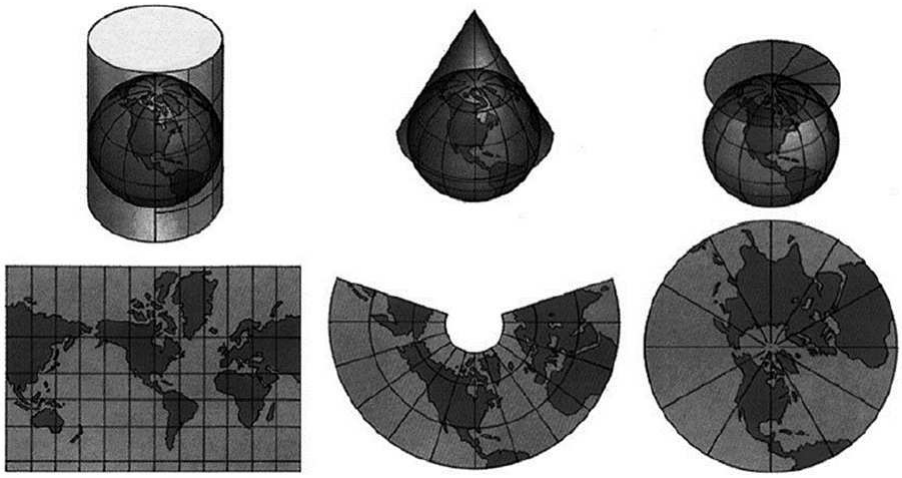


Figura A.5: Proyecciones cartográficas, de izquierda a derecha, cilíndrica, cónica y plana. (Palacios, 2005)

hacia el este (es decir, el huso 1 comienza en el 180°W y termina en el 174°W con su meridiano central en 177°W).

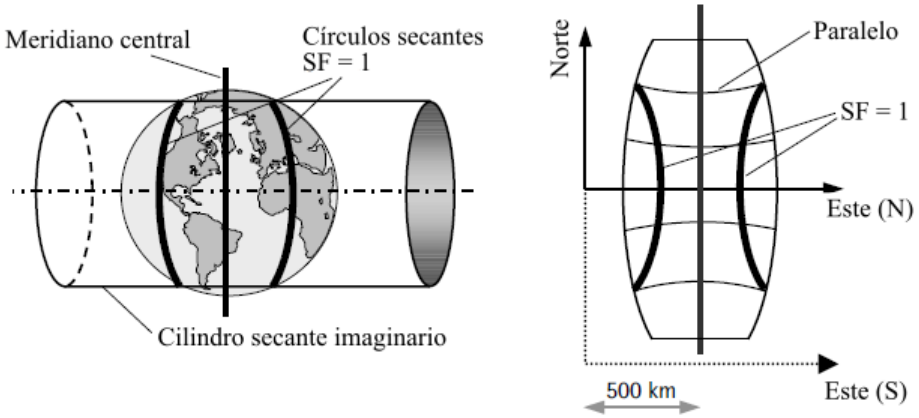


Figura A.6: Proyección UTM. (El-Rabbany, 2002)

Cada uno de los sesenta husos se divide en veinte zonas latitudinales que empiezan en los 80°S y se denotan con las letras C a X, con la omisión de las letras I, LL y O. Cada una tiene 8° de sur a norte, menos la zona X, que tiene 12°.

Con el fin de reducir la distorsión en el área que recubre cada huso, se aplica un factor de escala (SF) de 0.9996 al meridiano central (Figura A.6). Por ejemplo, en el ecuador, el factor de escala cambia de 0.9996 en el meridiano central a 1.00097 en el borde del uso, mientras que en la latitud $\phi = 45$°N, el factor de escala cambia desde 0.9996 en el meridiano central a 1.00029 en el borde del uso. Esto muestra cómo la distorsión se mantiene al mínimo con la proyección UTM.

Para evitar coordenadas negativas, en el origen del sistema de coordenadas (es decir, donde el ecuador se encuentra con el meridiano central del huso) se introducen los llamados **falso norte** y **falso este**. Éstos toman diferentes valores, dependiendo de si se está en el hemisferio norte o en el

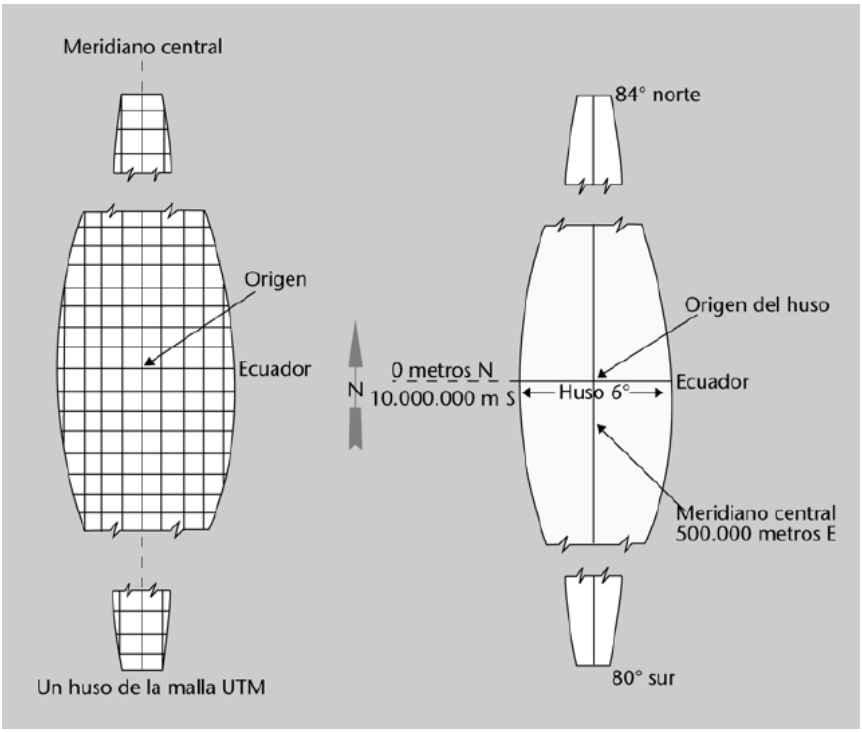


Figura A.7: Esquema de un huso UTM. (Muñoz Bollas, 2009)

hemisferio sur. Para el hemisferio norte, el falso norte y el falso este están en el 0.0 [km] y en el 500 [km], respectivamente; mientras que para el hemisferio sur, están en el 10 000 [km] y en el 500 [km], respectivamente (Figura A.7).
Es importante mencionar que la proyección UTM no es apropiada para las regiones polares; debido principalmente a los muchos husos que se ven involucrados cuando se proyecta una pequeña área polar. En estas regiones se utilizan otros sistemas como la proyección polar estereográfica universal (UPS).

A.5. Cálculo de Posición del Satélite

La Tabla A.2 entrega el algoritmo mediante el cual un receptor GPS calcula el vector posición de un satélite (x_s, y_s, z_s) en el sistema de coordenadas ECEF, a partir de los elementos orbitales de la Tabla 2.4.
Para el cálculo (3) de la Tabla A.2, t representa el tiempo del sistema GPS en el cual la señal fue transmitida. En la notación, el subíndice k que aparece a partir del cálculo (3) significa que la variable es medida en el tiempo t_k, el tiempo (en segundos) desde la época al tiempo GPS de la transmisión de la señal.

Tabla A.2: Cálculo del vector posición de un satélite en el sistema ECEF. (Kaplan y Hegarty, 2006)

	Ecuación	**Descripción**
(1)	$a = (\sqrt{a})^2$	Semieje mayor
(2)	$n = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} + \Delta n$	Movimiento medio corregido, $\mu = 398600.5 \cdot 10^8\ [m^3/s^2]$
(3)	$t_k = t - t_{0e}$	Tiempo desde la época de efemérides
(4)	$M_k = M_0 + n\,(t_k)$	Anomalía media
(5)	$M_k = E_k - e \sin E_k$	Anomalía excéntrica (debe resolverse iterativamente para E_k)
(6)	$\sin \nu_k = \frac{\sqrt{1-e^2}\sin E_k}{1 - e\cos E_k}\ \cos \nu_k = \frac{\cos E_k - e}{1 - e\cos E_k}$	Anomalía verdadera
(7)	$\phi_k = \nu_k + \omega$	Argumento de latitud
(8)	$\delta\phi_k = C_{us}\sin(2\phi_k) + C_{uc}\cos(2\phi_k)$	Corrección del argumento de latitud
(9)	$\delta\phi_k = C_{rs}\sin(2\phi_k) + C_{rc}\cos(2\phi_k)$	Corrección del radio
(10)	$\delta\phi_k = C_{is}\sin(2\phi_k) + C_{ic}\cos(2\phi_k)$	Corrección de la inclinación
(11)	$u_k = \phi_k + \delta\phi_k$	Argumento de latitud corregido
(12)	$r_k = a\,(1 - e\cos E_k) + \delta r_k$	Radio corregido
(13)	$i_k = i_0 + (di/dt)\,t_k + \delta i_k$	Argumento de latitud corregido
(14)	$\Omega_k = \Omega_0 + \left(\dot{\Omega} - \dot{\Omega}_e\right) t_k - \dot{\Omega}_e t_{0e}$	Longitud del nodo corregida
(15)	$x_p = r_k \cos u_k$	Posición de x en el plano
(16)	$y_p = r_k \sin u_k$	Posición de y en el plano
(17)	$x_s = x_p\cos\Omega_k - y_p\cos i_k \sin\Omega_k$	Coordenada x en el sistema ECEF
(18)	$y_s = x_p\sin\Omega_k - y_p\cos i_k \cos\Omega_k$	Coordenada y en el sistema ECEF
(17)	$z_s = y_p \sin i_k$	Coordenada z en el sistema ECEF

Apéndice B

Fundamentos Físicos de la Señal

La geodesia satelital está basada en la transmisión de datos desde el satélite al receptor, mediante ondas electromagnéticas. Algunos de los factores que describen el comportamiento físico de estas ondas se muestran en la Tabla B.1. Una constante fundamental es la velocidad de la luz en el vacío y su valorestá dado por:

$$c = 299\,792\,458 \ \left[m\,s^{-1}\right] \tag{B.1}$$

Nótese que los ciclos enteros son equivalentes a múltiplos de 2π radianes. Otra unidad para los ciclos

Tabla B.1: Parámetros físicos. (Hofmann-Wellenhof et al., 1994)

Parámetro	**Símbolo**	**Dimensión**
Frecuencia circular	f	$ciclo\,s^{-1}$
Fase	ϕ	$ciclo$
Longitud de onda	λ	$m\,ciclo^{-1}$
Periodo	T	s
Velocidad de la luz	c	$m\,s^{-1}$

por segundo ($ciclo\,s^{-1}$) es el *Hertz* (Hz). La ecuación (B.2) relaciona los parámetros mostrados en la Tabla B.1.

$$f = \frac{2\pi}{T} = \frac{c}{\lambda} \tag{B.2}$$

La frecuencia circular instantánea f es también definida como la derivación de la fase ϕ con respecto al tiempo:

$$f = \frac{d\phi}{dt} \tag{B.3}$$

Por ende, la fase se obtiene de integrando la frecuencia entre las épocas t_0 y t

$$\phi = \int_{t_0}^{t} f\,dt \tag{B.4}$$

Asumiendo una frecuencia constante, definiendo la fase inicial $\phi\,(t_0) = 0$, y tomando en cuenta el lapso de tiempo δt que la señal se demora en viajar una distancia r desde el emisor al receptor, se obtiene la ecuación de fase para ondas electromagnéticas en el receptor:

$$\phi = f\,(t - \Delta t) = f\left(t - \frac{r}{c}\right) \tag{B.5}$$

En el caso de un emisor o receptor en movimiento, la frecuencia recibida se ve afectada por el efecto Doppler. Esto significa que la frecuencia recibida f_r difiere de la frecuencia emitida f_s, una cantidad Δf la cual, despreciando los efectos relativistas, es proporcional a la velocidad radial $v_r = dr/dt = \dot{r}$ del emisor (satélite) con respecto al receptor (Hofmann-Wellenhof et al., 1994):

$$\Delta f = f_r - f_s = -\frac{1}{c} v_r\, f_s \tag{B.6}$$

Los satélites GPS se encuentran orbitando con una velocidad media $\dot{r} \approx 3.9\ [km\, s^{-1}]$. La velocidad radial máxima sucede cuando el satélite cruza el horizonte y es de $0.9\ [km\, s^{-1}]$. Asumiendo una frecuencia transmitida $f_s \approx 1.5\ [GHz]$ (Portadora L1), el cambio en la frecuencia por efecto Doppler es $\Delta f = 4.5 \cdot 10^3\ [Hz]$. Este cambio de frecuencia se traduce en un cambio de fase de 4.5 ciclos después de un milisegundo, el cual corresponde a un cambio en la distancia de 90 [cm]. Este valor puede ser verificado multiplicando la velocidad radial por el lapso de tiempo de un milisegundo.

Apéndice C

Técnicas de Posicionamiento

C.1. Estimación de la Posición mediante Códigos PRN

Como se vio en la Sección 2.5, las medidas de pseudodistancia se ven afectadas por varias fuentes de error. De éstas, la más significativa es la deriva del reloj del receptor. Se asumirá que el resto de las fuentes tienen media nula y no se considerarán en el cálculo. Por lo tanto, a partir de la ecuación (2.8), la medida de pseudodistancia para un satélite i es

$$\rho_i = r_i + c\, t_r \tag{C.1}$$

con r_i la distancia geométrica al satélite i:

$$\begin{aligned} r_i &= \sqrt{(x_i - x_r)^2 + (y_i - y_r)^2 + (z_i - z_r)^2} \\ &\equiv f\,(x_r, y_r, z_r) \end{aligned} \tag{C.2}$$

x_r, y_r, z_r corresponden al punto de coordenadas (real) desconocido del receptor (incógnitas). Asumiendo valores aproximados para la posición del receptor, denotados por $\hat{x}_r$, $\hat{y}_r$, $\hat{z}_r$, una distancia aproximada puede ser calculada como:

$$\begin{aligned} \hat{r}_i &= \sqrt{(x_i - \hat{x}_r)^2 + (y_i - \hat{y}_r)^2 + (z_i - \hat{z}_r)^2} \\ &\equiv f\,(\hat{x}_r, \hat{y}_r, \hat{z}_r) \end{aligned} \tag{C.3}$$

y su relación con la posición real del receptor viene dada por

$$\begin{aligned} x_r &= \hat{x}_r + \Delta x_r \\ y_r &= \hat{y}_r + \Delta y_r \\ z_r &= \hat{z}_r + \Delta z_r \end{aligned} \tag{C.4}$$

donde Δx_r, Δy_r, Δz_r son las nuevas incógnitas. Esto significa que las incógnitas originales han sido divididas en una parte conocida (representada por los valores aproximados $\hat{x}_r$, $\hat{y}_r$, $\hat{z}_r$) y una parte desconocida (representada por Δx_r, Δy_r, Δz_r). La ventaja de esto es que al reescribir la función (C.2) se tiene que

$$f\,(x_r, y_r, z_r) \equiv f\,(\hat{x}_r + \Delta x_r,\ \hat{y}_r + \Delta y_r,\ \hat{z}_r + \Delta z_r)$$

Esta última función se puede expandir sobre la posición aproximada usando una serie de Taylor:

$$\begin{aligned} f\,(\hat{x}_r + \Delta x_r\,, \hat{y}_r + \Delta y_r\,, \hat{z}_r + \Delta z_r\,) = f\,(\hat{x}_r\,, \hat{y}_r\,, \hat{z}_r) + \frac{\partial f\,(\hat{x}_r\,, \hat{y}_r\,, \hat{z}_r)}{\partial \hat{x}_r}\Delta x_r \\ + \frac{\partial f\,(\hat{x}_r\,, \hat{y}_r\,, \hat{z}_r)}{\partial \hat{y}_r}\Delta y_r + \frac{\partial f\,(\hat{x}_r\,, \hat{y}_r\,, \hat{z}_r\,, \hat{t}_r)}{\partial \hat{z}_r}\Delta z_r + \ ... \end{aligned} \tag{C.5}$$

La expansión ha sido truncada después de las derivadas parciales de primer orden para eliminar los términos no lineales. Evaluando las derivadas parciales de (C.5) se tienen las expresiones

$$\begin{aligned} u_{xi} &= \frac{\partial f\left(\hat{x}_r\,,\hat{y}_r\,,\hat{z}_r\,,\hat{t}_r\right)}{\partial \hat{x}_r} = \frac{x_i - \hat{x}_r}{\hat{r}_i} \\ u_{yi} &= \frac{\partial f\left(\hat{x}_r\,,\hat{y}_r\,,\hat{z}_r\,,\hat{t}_r\right)}{\partial \hat{y}_r} = \frac{y_i - \hat{y}_r}{\hat{r}_i} \\ u_{zi} &= \frac{\partial f\left(\hat{x}_r\,,\hat{y}_r\,,\hat{z}_r\,,\hat{t}_r\right)}{\partial \hat{z}_r} = \frac{z_i - \hat{z}_r}{\hat{r}_i} \end{aligned} \tag{C.6}$$

las cuales son las componentes del vector de unitario $\mathbf{u_i}$ desde la posición aproximada del receptor hacia la dirección del satélite i. La Figura C.1 representa la relación geométrica entre r_i, $\hat{r}_i$ y $\mathbf{\Delta r} = (\Delta x_r,\, \Delta y_r,\, \Delta z_r)$

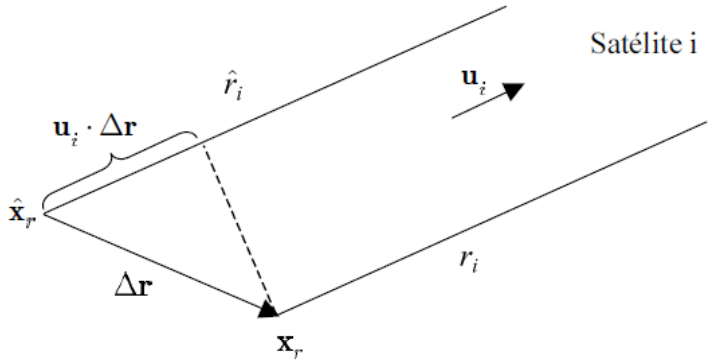


Figura C.1: Linealización en un punto aproximado. (Fernández, 2005)

Reemplazando (C.3) y (C.6) en (C.5) resulta

$$r_i = \hat{r}_i - \frac{x_i - \hat{x}_r}{\hat{r}_i}\Delta x_r - \frac{y_i - \hat{y}_r}{\hat{r}_i}\Delta y_r - \frac{z_i - \hat{z}_r}{\hat{r}_i}\Delta z_r \tag{C.7}$$

donde se ha usado la equivalencia de $f\left(x_r, y_r, z_r\right)$ con r_i en el lado izquierdo de la ecuación. Esta ecuación es ahora lineal con respecto a las incógnitas Δx_r, Δy_r, Δz_r.

Reemplazando (C.7) en (C.1) se obtiene

$$\hat{r}_i - \rho_i = \frac{x_i - \hat{x}_r}{\hat{r}_i}\Delta x_r + \frac{y_i - \hat{y}_r}{\hat{r}_i}\Delta y_r + \frac{z_i - \hat{z}_r}{\hat{r}_i}\Delta z_r - c\,t_r \tag{C.8}$$

Como se deben resolver cuatro incógnitas, las tres coordenadas de la posición del receptor y la deriva del reloj t_r, se necesitan al menos cuatro ecuaciones. Denotando $\Delta\rho_i = \hat{r}_i - \rho_i$ y suponiendo que se cuenta con las medidas de s satélites, con $s \geq 4$, el sistema de ecuaciones que se forma es

$$\begin{aligned} \Delta\rho_1 &= \frac{x_1 - \hat{x}_r}{\hat{r}_1}\Delta x_r + \frac{y_1 - \hat{y}_r}{\hat{r}_1}\Delta y_r + \frac{z_1 - \hat{z}_r}{\hat{r}_1}\Delta z_r - c\,t_r &&= u_{x1}\,\Delta x_r + u_{y1}\,\Delta y_r + u_{z1}\,\Delta z_r - c\,t_r \\ \Delta\rho_2 &= \frac{x_2 - \hat{x}_r}{\hat{r}_2}\Delta x_r + \frac{y_2 - \hat{y}_r}{\hat{r}_2}\Delta y_r + \frac{z_2 - \hat{z}_r}{\hat{r}_2}\Delta z_r - c\,t_r &&= u_{x2}\,\Delta x_r + u_{y2}\,\Delta y_r + u_{z2}\,\Delta z_r - c\,t_r \\ &\ldots \\ \Delta\rho_s &= \frac{x_s - \hat{x}_r}{\hat{r}_s}\Delta x_r + \frac{y_s - \hat{y}_r}{\hat{r}_s}\Delta y_r + \frac{z_s - \hat{z}_r}{\hat{r}_s}\Delta z_r - c\,t_r &&= u_{xs}\,\Delta x_r + u_{ys}\,\Delta y_r + u_{zs}\,\Delta z_r - c\,t_r \end{aligned} \tag{C.9}$$

Definiendo los siguientes formatos matriciales

$$\mathbf{\Delta\rho} = \begin{bmatrix} \Delta\rho_1 \\ \Delta\rho_2 \\ \vdots \\ \Delta\rho_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \begin{bmatrix} u_{x1} & u_{y1} & u_{z1} & 1 \\ u_{x2} & u_{y2} & u_{z2} & 1 \\ \vdots & & & \\ u_{xs} & u_{ys} & u_{zs} & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta x_r \\ \Delta y_r \\ \Delta z_r \\ -c\,t_r \end{bmatrix}$$

se obtiene, finalmente,

$$\mathbf{\Delta\rho} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Delta x} \tag{C.10}$$

el cual es un sistema de ecuaciones sobredeterminado (ver Apéndice D.3.1). La solución de mínimos cuadrados ordinaria viene dada por

$$\mathbf{\Delta x} = (\mathbf{H}^T\,\mathbf{H})^{-1}\,\mathbf{H}^T\,\mathbf{\Delta\rho} \tag{C.11}$$

Del sistema lineal de la ecuación (C.10), resultan las diferencias de coordenadas Δx_r, Δy_r, Δz_r y el desfase del reloj del receptor t_r. El punto de coordenadas deseado x_r, y_r, z_r es finalmente obtenido mediante (C.4).

C.2. Cálculo de la Dispersión de Precisión

En la Sección 2.5.5 se describió la importancia de la geometría de los satélites con respecto al receptor, la cual cambia con el tiempo, y de los parámetros de dispersión de precisión (DOP) que caracterizan la geometría particular de los satélites. A continuación se describe el cálculo de estos parámetros.

Los parámetros DOP relacionan la covarianza de las observaciones con la covarianza de la posición estimada. Asumiendo que los errores que afectan a las medidas son independientes y de igual varianza σ_c^2, entonces la covarianza de las observaciones $\mathbf{\Delta\rho}$ se puede expresar como (Fernández, 2005)

$$\mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta\rho}} = \mathbf{I}\,\sigma_c^2 \tag{C.12}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad. De esta forma la covarianza de la posición y de la deriva del reloj del receptor estimados (ver Apéndice D.3.2) viene dada por

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta}\boldsymbol{x}} &= \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta\rho}}\mathbf{H}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1} \\ &= \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\,\mathbf{I}\,\sigma_c^2\,\mathbf{H}\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1} \\ &= \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\sigma_c^2 \end{aligned} \tag{C.13}$$

La ecuación (C.13) muestra que la covarianza de la estimación $\mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta}\boldsymbol{x}}$ depende de los vectores unitarios a los satélites. Los parámetros DOP se definen a partir de la matriz $\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}$, por lo que conviene expandir la covarianza $\mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta}\boldsymbol{x}}$ como

$$\left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1} = \begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & D_{13} & D_{14} \\ D_{21} & D_{22} & D_{23} & D_{24} \\ D_{31} & D_{32} & D_{33} & D_{34} \\ D_{41} & D_{42} & D_{43} & D_{44} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{Q}_{\mathbf{\Delta}\boldsymbol{x}} = \begin{bmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy}^2 & \sigma_{xz}^2 & \sigma_{xt}^2 \\ \sigma_{xy}^2 & \sigma_y^2 & \sigma_{yz}^2 & \sigma_{yt}^2 \\ \sigma_{xz}^2 & \sigma_{yz}^2 & \sigma_z^2 & \sigma_{zt}^2 \\ \sigma_{xt}^2 & \sigma_{yt}^2 & \sigma_{zt}^2 & \sigma_t^2 \end{bmatrix} \tag{C.14}$$

donde tres componentes son contribuidas por la posición x, y, z y un componente por el reloj del receptor. Los elementos de la diagonal se usan para expresar los parámetros de dispersión

de precisión: geométrico (GDOP), de posición (PDOP) y temporal (TDOP) según las siguientes expresiones (Kaplan y Hegarty, 2006):

$$\begin{aligned} GDOP &= \frac{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2+\sigma_t^2}}{\sigma_c} = \sqrt{D_{11}+D_{22}+D_{33}+D_{44}} \\ PDOP &= \frac{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2+\sigma_z^2}}{\sigma_c} = \sqrt{D_{11}+D_{22}+D_{33}} \\ HDOP &= \frac{\sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2}}{\sigma_c} = \sqrt{D_{11}+D_{22}} \\ VDOP &= \frac{\sigma_z}{\sigma_c} = \sqrt{D_{33}} \\ TDOP &= \frac{\sigma_t}{\sigma_c} = \sqrt{D_{44}} \end{aligned} \tag{C.15}$$

Los parámetros DOP horizontal (HDOP) y vertical (VDOP) son dependientes del sistema de coordenadas usado. Para corresponder al plano horizontal y la vertical local, x, y y z debiesen denotar las posiciones en algún sistema de coordenadas local (NED o ENU).

Varios parámetros se utilizan para caracterizar la magnitud del error horizontal. El DRMS[1] es definido por (Kaplan y Hegarty, 2006):

$$DRMS = \sqrt{\sigma_x^2+\sigma_y^2} = HDOP \cdot \sigma_c \tag{C.16}$$

Dos veces DRMS (ver Apéndice D.2.1) está dado por:

$$2\,DRMS = 2\,HDOP \cdot \sigma_c \tag{C.17}$$

y la probabilidad de que el error horizontal esté en un círculo de radio $2DRMS$ está en un rango de entre 95 a 98 %. Otra medición común de errores horizontales es el CEP[2], el cual tiene una relación aproximada

$$CEP \approx 0.75\,DRMS = 0.75 \cdot HDOP \cdot \sigma_c \tag{C.18}$$

Para aplicaciones de tres dimensiones, una medida comúnmente utilizada para distribuciones de error es el SEP[3] (ver Apéndice D.2.1).

C.3. Estimación de la Posición mediante la Fase de la Portadora

Realizando el mismo procedimiento de linealización que en la sección anterior, y usando la relación $c = \lambda\, f$, la ecuación (2.14) se convierte en

$$\phi_i = \hat{d}_i - \frac{1}{\lambda}\left(\frac{x_i-\hat{x}_r}{\hat{r}_i}\Delta x_r + \frac{y_i-\hat{y}_r}{\hat{r}_i}\Delta y_r + \frac{z_i-\hat{z}_r}{\hat{r}_i}\Delta z_r\right) + N_i + f\,(t_r - t_{si}) \tag{C.19}$$

[1] *Distance root mean square.*
[2] *Circular error probable.*
[3] *Spherical error probable.*

donde $\hat{d}_i = \hat{r}_i/\lambda$ es la distancia aproximada al satélite i expresada en ciclos, f y λ son la frecuencia y longitud de onda de la portadora, respectivamente, N_i es la ambigüedad de la señal del satélite i y t_r y t_{si} corresponden a los sesgos en los relojes del receptor y del satélite i respectivamente. Comparando con el posicionamiento mediante códigos, el número de incógnitas ha incrementado debido a las ambigüedades. Considerando s satélites y definiendo $\Delta\phi_i = \phi_i - \hat{d}_i - f\, t_{si}$, el sistema queda como

$$\mathbf{\Delta\phi} = \mathbf{H} \cdot \mathbf{\Delta x} \tag{C.20}$$

donde, ahora:

$$\mathbf{\Delta\phi} = \begin{bmatrix} \Delta\phi_1 \\ \Delta\phi_2 \\ \vdots \\ \Delta\phi_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{H} = \frac{1}{\lambda} \begin{bmatrix} -u_{x1} & -u_{y1} & -u_{z1} & \lambda & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -u_{x2} & -u_{y2} & -u_{z2} & 0 & \lambda & \dots & 0 & 1 \\ \vdots & & & & & \ddots & & \vdots \\ -u_{xs} & -u_{ys} & -u_{zs} & 0 & 0 & \dots & \lambda & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{\Delta x} = \begin{bmatrix} \Delta x_r \\ \Delta y_r \\ \Delta z_r \\ N_1 \\ N_2 \\ \vdots \\ N_s \\ -c\, t_r \end{bmatrix} \tag{C.21}$$

La solución de este sistema sobredeterminado es obtenida mediante el ajuste de mínimos cuadrados, proceso descrito en el Apéndice D.3.2.

C.4. Combinaciones de Datos

A continuación se mostrará cómo se desarrollan las combinaciones lineales para receptores doble-frecuencia y cómo las mediciones de pseudodistancia por códigos se mejoran mediante las fases de las portadoras.

C.4.1. Combinaciones Lineales de Fase

Estas combinaciones se pueden realizar en receptores que rastrean dos o más frecuencias portadoras. Generalmente, la combinación lineal de dos fases ϕ_1 y ϕ_2 es definida por:

$$\phi = n_1\, \phi_1 + n_2\, \phi_2 \tag{C.22}$$

donde n_1 y n_2 son números arbitrarios. La sustitución de las relaciones $\phi_i = f_i\, t$ para las correspondientes frecuencias f_1 y f_2 da:

$$\phi = n_1\, f_1\, t + n_2\, f_2\, t = f\, t \tag{C.23}$$

Por lo tanto, la frecuencia es:

$$f = n_1\, f_1 + n_2\, f_2 \tag{C.24}$$

En el caso de GPS, la combinación lineal de las fases de las portadoras L1 y L2, ϕ_{L1} y ϕ_{L2}, los casos no triviales más simples de la ecuación (C.22) son: $n_1 = n_2 = 1$, lo que resulta en la suma:

$$\phi_{L1+L2} = \phi_{L1} + \phi_{L2} \tag{C.25}$$

y $n_1 = 1$, $n_2 = -1$, resultando la diferencia:

$$\phi_{L1-L2} = \phi_{L1} - \phi_{L2} \tag{C.26}$$

Las longitudes de onda correspondientes son: $\lambda_{L1+L2} = 10.7$ [cm] y $\lambda_{L1-L2} = 86.2$ [cm], donde los valores de las frecuencias de las portadoras f_{L1} y f_{L2} de la Tabla 2.5 han sido sustituidos.
Otra combinación un poco más compleja resulta de los valores $n_1 = 1$ y $n_2 = -\frac{f_{L2}}{f_{L2}}$, la cual se denomina como "señal L3":

$$\phi_{L3} = \phi_{L1} - \frac{f_{L2}}{f_{L2}}\,\phi_{L2} \tag{C.27}$$

La combinación L3 es usada para reducir los efectos ionosféricos (Sección 2.5.2).

C.4.2. Combinación de Medidas de Código y Fase

Otra alternativa para aproximar la posición de un receptor es combinar las medidas de fase con las medidas de código de un época. Esta técnica se le conoce como medida de pseudodistancia suavizada.
Asumiendo mediciones doble-frecuencia para la época t_1, se obtienen las pseudodistancias a partir de códigos $\rho_{L1}(t_1)$, $\rho_{L2}(t_1)$ y las pseudodistancias a partir de fases de las portadoras $\phi_{L1}(t_1)$, $\phi_{L2}(t_1)$. Usando ambas frecuencias, f_{L1} y f_{L2}, se define la combinación formada para las pseudodistancias por códigos (Hofmann-Wellenhof et al., 1994)

$$\rho(t_1) = \frac{f_{L1}\,\rho_{L1}(t_1) - f_{L2}\,\rho_{L2}(t_1)}{f_{L1} + f_{L2}} \tag{C.28}$$

y por las fases de la portadora:

$$\phi(t_1) = \phi_{L1}(t_1) - \phi_{L1}(t_1) \tag{C.29}$$

De la ecuación (C.28) se puede ver que el ruido de la pseudodistancia combinada $R(t_1)$ se reduce por un factor de 0.7 en comparación con el ruido de la medición simple de código. Estas combinaciones están formuladas para una época. Adicionalmente, para épocas t_i después de t_1, los valores extrapolados de las pseudodistancias de códigos $\rho(t_i)_{ex}$ pueden ser calculados como:

$$\rho(t_i)_{ex} = \rho(t_1) + [\phi(t_i) - \phi(t_1)] \tag{C.30}$$

El valor corregido (o suavizado) $\rho(t_i)_{sm}$ se obtiene finalmente promediando:

$$\rho(t_i)_{sm} = \frac{1}{2}\,[\rho(t_i) - \rho(t_i)_{ex}] \tag{C.31}$$

Generalizando las fórmulas anteriores para una época arbitraria t_i (con la época precedente t_{i-1}), resulta el siguiente algoritmo:

$$\rho(t_i) = \frac{f_{L1}\,\rho_{L1}(t_i) - f_{L2}\,\rho_{L2}(t_i)}{f_{L1} + f_{L2}}$$

$$\phi(t_i) = \phi_{L1}(t_i) - \phi_{L2}(t_i)$$

$$\rho(t_i)_{ex} = \rho(t_{i-1}) + [\phi(t_i) - \phi(t_{i-1})]$$

$$\rho(t_i)_{sm} = \frac{1}{2}\,[\rho(t_i) - \rho(t_i)_{ex}]$$

el cual tiene las condiciones iniciales $\rho(t_1) = \rho(t_1)_{ex} = \rho(t_1)_{sm}$ para todo $i > 1$. Este algoritmo asume datos libres de grandes errores. Sin embargo, la fase de la portadora es sensible a cambios en la ambigüedad (es decir, los deslizamientos de ciclos). Para evitar este problema, Lachapelle et al. (1986) entrega una variación del algoritmo. Usando la misma notación para la época t_i, la pseudodistancia por códigos **suavizada** se obtiene por:

$$\rho(t_i)_{sm} = w\,\rho(t_i) + (1-w)\,[\rho(t_{i-1})_{sm} + \phi(t_i) - \phi(t_{i-1})] \tag{C.32}$$

donde w es un factor dependiente del tiempo. Para la primera época $i = 1$, el factor de peso se establece como $w = 1$; así, se define todo el peso en la medición de pseudodistancia por código. Para épocas consecutivas, el factor se reduce continuamente y, por ende, se enfatiza la influencia de las fases de las portadoras. Para estimar el factor de reducción, Lachapelle et al. (1986) propuso un valor de 0.01 de época a época, para un experimento cinemático con una tasa de muestreo de 1 [Hz]. Luego de 100 segundos, sólo el valor suavizado de la época anterior (aumentado por la diferencia de fase de la portadora) es tomado en cuenta. Nuevamente, en el caso de deslazamientos de ciclo, el algoritmo podría fallar. Después de un deslizamiento de ciclo, el factor es reseteado a $w = 1$, el cual elimina la influencia de datos de fase de portadora erróneos.

C.5. Posicionamiento Diferencial

C.5.1. Técnicas Diferenciales para Mediciones con Código

Utilizando las medidas de pseudodistancia se puede estimar la posición de un receptor móvil con las técnicas diferenciales.
Si se consideran las principales fuentes de error que afectan las mediciones con fase de portadora: retardo ionosférico, retardo troposférico, el ruido del receptor y el efecto multipath, a partir de la ecuación (2.8), la expresión para la medida de pseudodistancia, en unidades de longitud, es

$$\rho = r + c\,(t_r - t_s) + \alpha_{iono} + \beta_{tropo} + w_r + w_{mu} \tag{C.33}$$

donde α_{iono} y β_{tropo} representan los efectos de la atmósfera, expresados en ciclos, y w_r y w_{mu} modelan el ruido del receptor y el efecto multipath.

Diferencia Simple

En las diferencias simples se consideran dos puntos (receptores) y un satélite. Denotando los puntos por A y B y el satélite por j, y denotando además $w = w_r + w_{mu}$ y usando la ecuación (C.33), las expresiones de medida de pseudodistancia para los dos puntos, en ciclos, son:

$$\begin{aligned} \rho_A^j &= r_A^j + c\left(t_A - t^j\right) + \alpha_{iono}^j + \beta_{tropo}^j + w_A^j \\ \rho_B^j &= r_B^j + c\left(t_B - t^j\right) + \alpha_{iono}^j + \beta_{tropo}^j + w_B^j \end{aligned} \tag{C.34}$$

Si ambos puntos A y B se encuentran relativamente cercanos, bajo las mismas condiciones atmosféricas, los errores ionosféricos y troposféricos pueden considerarse iguales para ambos receptores, por lo que la diferencia entre estas últimas dos ecuaciones viene dada por:

$$\rho_B^j - \rho_A^j = r_B^j - r_A^j + c\,(t_B - t_A) + w_B^j - w_A^j \tag{C.35}$$

Se introducen las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} \rho^j_{AB} &= \rho^j_B - \rho^j_A \\ r^j_{AB} &= r^j_B - r^j_A \\ t^j_{AB} &= t^j_B - t^j_A \\ w^j_{AB} &= w^j_B - w^j_A \end{aligned} \tag{C.36}$$

Por lo tanto, se obtiene la expresión de medida de pseudodistancia con diferencia simple:

$$\rho^j_{AB} = r^j_{AB} + c\, t_{AB} + w^j_{AB} \tag{C.37}$$

Comparando con la ecuación (C.34), los sesgos del reloj del satélite y los errores atmosféricos han sido cancelados (asumiendo que ambos receptores se encuentran cercanos, bajo las mismas condiciones atmosféricas).

Diferencia Doble

Asumiendo los dos puntos A y B, pero ahora considerando dos satélites j y k, a partir de la ecuación (C.37) se tiene que:

$$\begin{aligned} \rho^j_{AB} &= r^j_{AB} + c\, t_{AB} + w^j_{AB} \\ \rho^k_{AB} &= r^k_{AB} + c\, t_{AB} + w^k_{AB} \end{aligned} \tag{C.38}$$

Para conseguir una diferencia doble, estas diferencias únicas se deben restar:

$$\phi^k_{AB} - \phi^j_{AB} = d^k_{AB} - d^j_{AB} + N^k_{AB} - N^j_{AB} + v^k_{AB} - v^j_{AB} \tag{C.39}$$

Usando un método análogo con las notaciones de (C.36) para los satélites j y k, la ecuación de la diferencia doble es:

$$\rho^{jk}_{AB} = r^{jk}_{AB} + w^{jk}_{AB} \tag{C.40}$$

La cancelación de los sesgos de los relojes de los receptores es la razón del uso de las diferencias dobles. Esta cancelación resulta de asumir observaciones simultáneas e iguales frecuencias de la señal del satélite.

Para obtener la posición del receptor B a partir de ecuaciones como la (C.40), se requiere resolver un sistema no lineal. Para su resolución es necesario hacer una linealización, en este caso, en torno a la posición del receptor fijo A.
En esas condiciones, las relaciones geométricas entre los distintos valores se pueden ver en la Figura C.2. Como se observa, las dos simples diferencias geométricas r^j_{AB} y r^k_{AB} están relacionadas con el vector $\mathbf{b}$, denominado línea de base, que une los dos receptores. De hecho, r^j_{AB} es la proyección del vector $\mathbf{b}$ sobre la dirección del satélite j y r^k_{AB} en la dirección del satélite k, es decir,

$$\begin{aligned} r^j_{AB} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^j \\ r^k_{AB} &= \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^k \end{aligned} \tag{C.41}$$

donde $\mathbf{u}^j$ y $\mathbf{u}^k$ son los vectores unitarios en las direcciones de los satélites j y k. De esta forma, la diferencia doble se puede expresar como

$$\rho^{jk}_{AB} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^{jk} + w^{jk}_{AB} \tag{C.42}$$

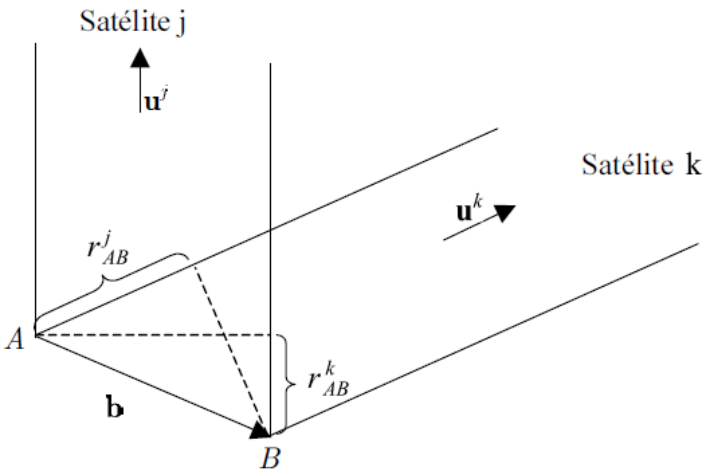


Figura C.2: Representación geométrica de las dobles diferencias. (Fernández, 2005)

donde $\mathbf{u}^{jk}$ es la diferencia de los dos vectores unitarios. Dado que la posición del receptor A es conocida, para obtener la posición del receptor B se requiere calcular las componentes del vector de la línea de base $\mathbf{b}$. Ello es posible si se cuenta con un mínimo de tres medidas en diferencias dobles. Para que dichas medidas sean linealmente independientes son necesarios cuatros satélites como mínimo. El sistema de ecuaciones, para un caso general de s satélites, en formato matricial es:

$$\mathbf{y} = \begin{bmatrix} \rho^{12}_{AB} \\ \rho^{13}_{AB} \\ \vdots \\ \rho^{1s}_{AB} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u^{12}_x & u^{12}_y & u^{12}_z \\ u^{13}_x & u^{13}_y & u^{13}_z \\ \vdots & & \\ u^{1s}_x & u^{1s}_y & u^{1s}_z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} w^{12}_{AB} \\ w^{13}_{AB} \\ \vdots \\ w^{1s}_{AB} \end{bmatrix} = \mathbf{H}\,\mathbf{b} + \mathbf{w} \tag{C.43}$$

Asumiendo que el vector error $\mathbf{w}$ tiene media nula y covarianza conocida, la solución por mínimos cuadrados (ver Apéndice D.3.3) es

$$\mathbf{b} = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H}\right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \tag{C.44}$$

donde $\mathbf{Q}_y$ es la covarianza de las observaciones, igual a la covarianza de su error $\mathbf{Q}_w$ que viene dada por

$$\mathbf{Q}_w = 2\,\sigma_c^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \tag{C.45}$$

donde se asume que los errores tienen igual varianza σ_c^2.

C.5.2. Técnicas Diferenciales para Mediciones con Fase

Análogo a las mediciones con código, si se consideran las principales fuentes de error que afectan las mediciones con fase de portadora: retardo ionosférico, retardo troposférico, el ruido del receptor y el efecto multipath, y usando $c = \lambda\, f$, la expresión para la medida de fase, en ciclos, la ecuación

(2.14) se convierte en

$$\phi = \frac{r}{\lambda} + N + f\,(t_r - t_s) - \alpha_{iono} + \beta_{tropo} + v_r + v_{mu} \tag{C.46}$$

donde α_{iono} y β_{tropo} representan los efectos de la atmósfera, expresados en ciclos (nótese que el efecto de la ionósfera α_{iono} lleva un signo negativo, pues en el caso de las medidas de fase la ionósfera provoca un avance de la portadora), y v_r y v_{mu} modelan el ruido del receptor y el efecto *multipath*.

Diferencia Simple

Al igual que en la Sección C.5.1, se denotan ambos receptores por A y B y el satélite por j, y denotando además $v = v_r + v_{mu}$ y usando la ecuación (C.46), las expresiones de medida de fase para los dos puntos, en ciclos, son:

$$\begin{aligned} \phi_A^j &= d_A^j + N_A^j + f^j\, t_A - f^j\, t^j - \alpha_{iono}^j + \beta_{tropo}^j + v_A^j \\ \phi_B^j &= d_B^j + N_B^j + f^j\, t_B - f^j\, t^j - \alpha_{iono}^j + \beta_{tropo}^j + v_B^j \end{aligned} \tag{C.47}$$

Si ambos puntos A y B se encuentran relativamente cercanos, bajo las mismas condiciones atmosféricas, los errores ionosféricos y troposféricos pueden considerarse iguales para ambos receptores, por lo que la diferencia entre estas últimas dos ecuaciones viene dada por:

$$\phi_B^j - \phi_A^j = d_B^j - d_A^j + N_B^j - N_A^j + f^j\ (t_B - t_A) + v_B^j - v_A^j \tag{C.48}$$

Un sistema con estas ecuaciones presenta un grado de deficiencia. Esto se puede ver en los coeficientes de ambigüedades y los sesgos de los relojes de los receptores. En ambos casos, los valores absolutos para ambos puntos son los mismos. Esto significa que la matriz de ajuste tiene columnas linealmente dependientes. Por lo tanto, se introducen los parámetros relativos:

$$\begin{aligned} N_{AB}^j &= N_B^j - N_A^j \\ t_{AB} &= t_B - t_A \end{aligned} \tag{C.49}$$

y usando las siguientes notaciones:

$$\begin{aligned} \phi_{AB}^j &= \phi_B^j - \phi_A^j \\ d_{AB}^j &= d_B^j - d_A^j \\ v_{AB}^j &= v_B^j - v_A^j \end{aligned} \tag{C.50}$$

se obtiene la expresión de medida de fase con diferencia simple:

$$\phi_{AB}^j = d_{AB}^j + N_{AB}^j + f^j t_{AB} + v_{AB}^j \tag{C.51}$$

Comparando con la ecuación (C.47), los sesgos del reloj del satélite y los errores atmosféricos han sido cancelados (asumiendo que ambos receptores se encuentran cercanos, bajo las mismas condiciones atmosféricas).

Diferencia Doble

Asumiendo los dos puntos A y B, pero ahora considerando dos satélites j y k, a partir de la ecuación (C.51) se tiene que:

$$\begin{aligned} \phi_{AB}^j &= d_{AB}^j + N_{AB}^j + f^j t_{AB} + v_{AB}^j \\ \phi_{AB}^k &= d_{AB}^k + N_{AB}^k + f^k t_{AB} + v_{AB}^k \end{aligned} \tag{C.52}$$

Para conseguir una diferencia doble, estas diferencias únicas se deben restar. Asumiendo que para las señales de los satélites las frecuencias son iguales $\left(f^j = f^k\right)$ se tiene:

$$\phi^k_{AB} - \phi^j_{AB} = d^k_{AB} - d^j_{AB} + N^k_{AB} - N^j_{AB} + v^k_{AB} - v^j_{AB} \tag{C.53}$$

Usando un método análogo con las notaciones de (C.49) para los satélites j y k, la ecuación de la diferencia doble es:

$$\phi^{jk}_{AB} = d^{jk}_{AB} + N^{jk}_{AB} + v^{jk}_{AB} \tag{C.54}$$

La cancelación de los retrasos de los relojes de los receptores es la razón del uso de las diferencias dobles. Esta cancelación resulta de asumir observaciones simultáneas e iguales frecuencias de la señal del satélite.

La linealización de la ecuación (C.54) permite relacionar la doble diferencia geométrica $d^{jk}_{AB} = r^{jk}_{AB}/\lambda$ con la línea base $\mathbf{b}$ (ver Figura C.2) y expresar la medida de fase en doble diferencia como

$$\phi^{jk}_{AB} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{u}^{jk} + N^{jk}_{AB} + v^{jk}_{AB} \tag{C.55}$$

donde $\mathbf{u}^{jk}$ es la diferencia de los vectores unitarios a los satélites, expresada en ciclos. Si se cuenta con medidas de fase de s satélites se pueden obtener $s-1$ ecuaciones de este tipo, que agrupadas matricialmente de la misma forma a como se hizo con la ecuación (C.43) dan lugar a

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\,\mathbf{b} + \mathbf{N} + \mathbf{v} \tag{C.56}$$

En ocasiones los dos receptores no son muy próximos, es decir, la línea de base es larga, y la linealización en la posición del receptor fijo introduce demasiado error. En estos casos es más conveniente linealizar el sistema de ecuaciones en torno a la posición aproximada del receptor B_0 (Figura C.3) que se obtiene con las medidas de pseudodistancia (Sección C.5.1). Por lo tanto, la ecuación (C.56) se convierte en

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\,\mathbf{x} + \mathbf{N} + \mathbf{v} \tag{C.57}$$

donde ahora la matriz $\mathbf{H}$ contiene las diferencias de vectores unitarios entre la posición B_0 y los satélites y $\mathbf{x}$ es una nueva línea de base, mucho más corta, entre B_0 y la posición del receptor móvil B. La resolución del sistema de ecuaciones (C.57) es mucho más costosa que la del sistema

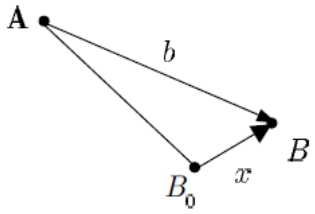


Figura C.3: Linealización en torno a una posición más aproximada. (Fernández, 2005)

(C.43), puesto que además de las incógnitas de posición $\mathbf{x}$ se debe resolver las incógnitas enteras de ciclos de portadora $\mathbf{N}$, las ambigüedades. La resolución de las ambigüedades es muy costosa porque, en general, requiere ensayar todas las posibles combinaciones de enteros hasta dar con la solución (Fernández, 2005). Una vez resuelta la ambigüedad, dado que se asume que el vector error $\mathbf{v}$ tiene

media nula y covarianza conocida, la solución de mínimos cuadrados (Apéndice D.3.3) de la línea de base es

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{H}^T \mathbf{Q}_y^{-1} \mathbf{H}\right)^{-1} \mathbf{H}^T \mathbf{y} \left(\mathbf{y} - \mathbf{N}\right) \tag{C.58}$$

donde $\mathbf{Q}_y$ es la covarianza de las observaciones, igual a la covarianza de su error $\mathbf{Q}_v$ que viene dada por

$$\mathbf{Q}_v = 2\,\delta_f^2 \begin{bmatrix} 2 & 1 & \cdots & 1 \\ 1 & 2 & \cdots & 1 \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & 2 \end{bmatrix} \tag{C.59}$$

donde se asume que los errores tienen desviación típica δ_f.

Diferencia Triple

Hasta aquí sólo una época ha sido considerada. Las ambigüedades N no varían de época en época. Para eliminar la independencia del tiempo de las ambigüedades, se sugiere diferenciar diferencias dobles entre dos épocas (Hofmann-Wellenhof et al., 1994), denotadas t_1 y t_2, entonces:

$$\begin{aligned} \phi_{AB}^{jk}(t_1) &= d_{AB}^{jk}(t_1) + N_{AB}^{jk} + v_{AB}^{jk} \\ \phi_{AB}^{jk}(t_2) &= d_{AB}^{jk}(t_2) + N_{AB}^{jk} + v_{AB}^{jk} \end{aligned} \tag{C.60}$$

son las dos diferencias dobles. Por lo que la diferencia triple es:

$$\phi_{AB}^{jk}(t_2) - \phi_{AB}^{jk}(t_1) = d_{AB}^{jk}(t_2) - d_{AB}^{jk}(t_1) \tag{C.61}$$

y puede ser reescrita en una forma más simplificada como:

$$\phi_{AB}^{jk}(t_{12}) = d_{AB}^{jk}(t_{12}) \tag{C.62}$$

Existen dos principales ventajas de las diferencias triples, las cuales están relacionadas; éstas son la cancelación de las ambigüedades y, por ende, la inmunidad a los cambios en las ambigüedades. Estos cambios son los llamados "deslizamientos de ciclo" (Sección 2.4.3).

Apéndice D

Conceptos de Estimación

D.1. Parámetros Estadísticos

D.1.1. Medidas de Posición Central

Suponiendo que un receptor entrega una serie de posiciones fijas (x_i), las cuales son levemente diferentes entre sí. Se escoge una **media** o **promedio**, o una **expectativa matemática** como una estimación de la posición buscada ($\hat{x}, \hat{y}, \hat{z}$) según:

$$\hat{x} = \frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} \tag{D.1}$$

Similar para las coordenadas $\hat{y}, \hat{z}$, donde n es el número de posiciones. Sin embargo, puede ser que la media no sea representativa. En estos casos la **mediana** entrega una mejor representación de la muestra, la cual representa el valor central de las muestras reordenadas.
La mediana coincide con la media si la población tiene una **distribución normal**. El **teorema del límite central** explica por qué se puede encontrar una distribución normal con bastante frecuencia. Éste dice que si un número de valores casi independientes con distribución similar aumenta, entonces la distribución de su suma se aproxima a una distribución normal. Esto ocurre cuando la suma de estas variables es lo suficientemente grande (Petrovski y Tsujii, 2012).

D.1.2. Distribución Normal

La distribución normal o distribución gaussiana es aquella cuya función de densidad es (Leick et al., 2015)

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2} \qquad -\infty < x < \infty \tag{D.2}$$

donde μ y σ^2 denotan la media y la varianza. Si una variable x sigue una distribución normal, se utiliza la notación $x \sim \mathcal{N}\left(\mu,\, \sigma^2\right)$. La Figura D.1 muestra la función de densidad normal.

D.1.3. Varianza y Covarianza

Variables Aleatorias Discretas

Dada una variable aleatoria discreta X con valores posibles x_1, x_2, ..., x_n el **valor esperado** se define como

$$\mu_x = \mathbb{E}\left[X\right] = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot p\left(x_i\right) \tag{D.3}$$

donde $p\left(x_i\right)$ es la probabilidad de cada suceso x_i. Si todos los sucesos son de igual probabilidad la esperanza es la media aritmética.

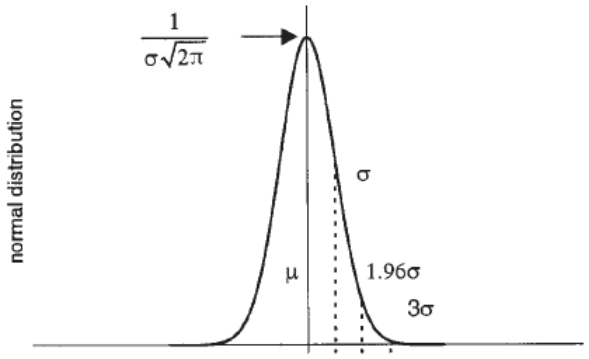


Figura D.1: Función de densidad normal. (Kaplan y Hegarty, 2006)

La **varianza** de una variable aleatoria X se define como

$$\sigma_x^2 = \mathbb{E}\left[(X-\mu_x)^2\right] = \sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_x)^2 \cdot p(x_i) \tag{D.4}$$

Vector de Variables Aleatorias

Si se tiene el vector

$$\mathbf{X} = [X_1 \ \cdots \ X_n]^T \tag{D.5}$$

donde X_i son variables aleatorias, entonces el valor esperado para la entrada i-ésima del vector $\mathbf{X}$ se define como $\mu_{x_i} = \mathbb{E}[X_i]$ En notación vectorial, los valores esperados de todos los parámetros vienen dados por el vector

$$\mathbb{E}(\mathbf{X}) = [\mathbb{E}(X_1) \ \cdots \ \mathbb{E}(X_n)]^T \tag{D.6}$$

La varianza de la entrada i-ésima del vector $\mathbf{X}$ es

$$\sigma_{x_i}^2 = \mathbb{E}\left[(X_i-\mu_{x_i})^2\right] \tag{D.7}$$

Para distribuciones multivariables, otra medida que toma importancia es la **covarianza**, que describe la relación estadística entre dos variables aleatorias. La covarianza se define como

$$\sigma_{x_i,x_j} = \mathbb{E}\left[(X_i-\mu_{x_i})\left(X_j-\mu_{x_j}\right)\right] \tag{D.8}$$

También se define el coeficiente de correlación de dos variables aleatorias como

$$\rho_{x_i,x_j} = \frac{\sigma_{x_i,x_j}}{\sigma_{x_i}\,\sigma_{x_j}} = \frac{\mathbb{E}\left[(X_i-\mu_{x_i})\left(X_j-\mu_{x_j}\right)\right]}{\sigma_{x_i}\,\sigma_{x_j}} \tag{D.9}$$

Considerando el vector aleatorio

$$\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}_x = [X_1-\mu_{x_1} \ \cdots \ X_n-\mu_{x_n}]^T \tag{D.10}$$

entonces la **matriz de varianzas y covarianzas**, $\boldsymbol{\Sigma}_x$, y la **matriz de correlación**, $\mathbf{C}$, son (Leick et al., 2015)

$$\boldsymbol{\Sigma}_x = \mathbb{E}\left[(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}_x)(\mathbf{X}-\boldsymbol{\mu}_x)^T\right] = \begin{bmatrix} \sigma_{x_1}^2 & \sigma_{x_1,x_2} & \cdots & \sigma_{x_1,x_n} \\ & & \cdots & \sigma_{x_2,x_n} \\ & & \ddots & \vdots \\ sim & & & \sigma_{x_n}^2 \end{bmatrix} \tag{D.11}$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} 1 & \rho_{x_1,x_2} & \cdots & \rho_{x_1,x_n} \\ & & \cdots & \rho_{x_2,x_n} \\ & & \ddots & \vdots \\ sim & & & 1 \end{bmatrix} \tag{D.12}$$

D.2. Exactitud y Precisión

Uno de los principales parámetros en la especificación de los receptores GNSS en general es la exactitud. Es necesario distinguir el concepto de exactitud del de precisión.
La exactitud define cuán cerca está la posición estimada (valor medio) de la posición real. Por otro lado, la precisión se refiere a la cercanía de repetidas observaciones con el valor medio de éstas (Leick et al., 2015).

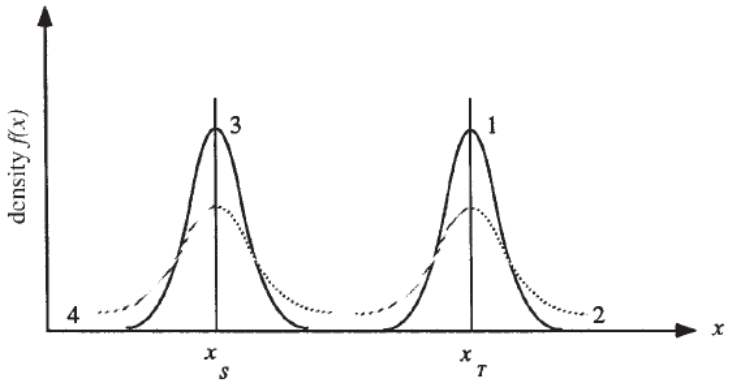


Figura D.2: Exactitud y precisión. (Leick et al., 2015)

La Figura D.2 muestra cuatro funciones de densidades que representan cuatro diferentes procesos de medición para la misma cantidad. Las curvas 1 y 2 son simétricas con respecto al valor verdadero x_T. Estas mediciones tienen una alta exactitud, ya que el promedio de la muestra coincide (o es muy cercano) con el valor real. Sin embargo, la forma de ambas curvas son diferentes. La curva 1 es más alta y angosta que la curva 2, es decir, las observaciones del proceso 1 están más cerca del valor promedio (valor real en este caso). En el proceso 2 ocurren desviaciones con respecto al valor real con mayor frecuencia que en el proceso 1; esto quiere decir que el proceso 1 es más preciso que el proceso 2, pero ambos tienen igual exactitud. Las curvas 3 y 4 son simétricas con respecto al valor medio x_S, lo cual difiere del valor real x_T. Ambas secuencias tienen la misma baja exactitud, pero la precisión del proceso 3 es más alta que la del proceso 4. La diferencia $x_T - x_S$ es causada por un error sistemático. Un aumento en el número de observaciones no reduce esta diferencia.

D.2.1. Medidas de Precisión

A continuación se describen algunas medidas de precisión (Petrovski y Tsujii, 2012), donde las tres primeras corresponden a parámetros usados en el caso 2D y la última se aplica al caso 3D.

A. **Media cuadrática** (RMS)

El RMS es la raíz cuadrada de la media aritmética de los cuadrados de los errores:

$$RMS = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (r_i - r_{real})^2}{n}} \tag{D.13}$$

donde $r_i = \sqrt{x_i^2 + y_i^2}$. Si, en vez de la verdadera posición, se considera la media, entonces se define el valor de la **desviación estándar** σ_x (expresión similar para σ_y) como:

$$\sigma_x = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n} (x_i - \hat{x})^2}{n}} \tag{D.14}$$

Se puede estimar qué porcentaje de error estará dentro del círculo RMS midiendo el área bajo la curva de densidad espectral.
En el caso de una distribución normal, el círculo RMS contiene el 68.27 % de todos los errores ($= 2\sigma$).

B. **Dos veces la distancia de la media cuadrática** (2DRMS)
El 2DRMS es dos veces el valor RMS de los errores en la horizontal. En el caso de una distribución normal, un círculo 2DRMS contiene el 95.45 % de los errores. Nótese que $\pm 3\sigma$ contiene el 99.73 % de los errores.

C. **Error circular probable** (CEP)
El CEP se define como el radio de un círculo (centrado en la verdadera posición) que encierra el 50 % de todas las estimaciones de posición horizontal.

D. **Error esférico probable** (SEP)
El SEP se define como el radio de una esfera (centrado en la verdadera posición) que encierra el 50 % de todas las estimaciones de posición.

D.3. Ajuste por Mínimos Cuadrados

El ajuste por mínimos cuadrados es útil para estimar parámetros y llevar a cabo un control de calidad en las mediciones, procesando observaciones acorde a un modelo matemático y reglas definidas. Las soluciones por mínimos cuadrados requieren observaciones redundantes, es decir, más observaciones de las requeridas para determinar una serie de incógnitas de forma exacta.
Se denota el vector de observaciones con l y el número de observaciones por n. Las observaciones son variables aleatorias y en geodesia siguen una distribución normal, por lo que el vector de observaciones tiene una distribución normal multivariante. Se utiliza la notación

$$l \sim \mathcal{N}(l_T,\, \Sigma_l) \tag{D.15}$$

donde l_T es el vector de medias de la población y Σ_l es la matriz de varianzas y covarianzas. Se introducen las definiciones: **matriz de cofactores** de las observaciones

$$\mathbf{Q}_l = \frac{1}{\sigma_0^2}\, \mathbf{\Sigma}_l \tag{D.16}$$

y **matriz de peso**

$$\mathbf{P} = \mathbf{Q}_l^{-1} = \sigma_0^2\, \mathbf{\Sigma}_l^{-1} \tag{D.17}$$

donde σ_0^2 es la varianza de peso unitario (también llamada varianza a priori). Una capacidad del ajuste por mínimos cuadrados es la estimación de σ_0^2 a partir de las observaciones. Se denota esta estimación por $\hat{\sigma}_0^2$ y se le llama varianza a posteriori de peso unitario. Si las varianzas a priori y posteriori son estadísticamente iguales, se dice que el ajuste es correcto. En generla, la varianza a priori de peso unitario σ_0^2 se iguala a 1, es decir, la matriz de peso es igual a la inversa de la matriz de varianzas y covarianzas.

D.3.1. Sistemas Sobredeterminados

En aplicaciones, los sistemas lineales son usados a menudo como modelos de relaciones entre variables observables o de "respuesta", y otro grupo de variables, las "variables predictoras" (o incógnitas). Es poco probable que el modelo se ajuste exactamente a cualquier conjunto de valores observados de respuestas y variables predictoras. Esto es debido a los efectos de otras variables predictoras que no están incluidas en el modelo, los errores de medición, la relación entre las variables no lineales, o alguna aleatoriedad inherente en el sistema. En tales aplicaciones, generalmente se toma un mayor número de observaciones que de variables en el sistema; así, con cada conjunto de observaciones sobre la respuesta y las predictoras asociadas que componen una ecuación, se tiene un sistema con más ecuaciones que variables.
Un sistema sobredeterminado puede escribirse como

$$\mathbf{y} \approx \mathbf{H}\,\mathbf{x} \tag{D.18}$$

donde $\mathbf{y}$ es el **vector de observaciones**, $\mathbf{H}$ es la matriz del sistema y $\mathbf{x}$ es el **vector de incógnitas**. El problema está en determinar los valores de $\mathbf{x}$.
Asumiendo m observaciones y j parámetros desconocidos que conducen a la matriz $\mathbf{H}$ con m filas y j columnas. Para $m > j$, el sistema (D.18) es sobredeterminado y, por lo general, inconsistente[1], debido a los errores de observación o el ruido. Para asegurar consistencia, se agrega un vector $\mathbf{e}$ (de error o ruido) al vector de observaciones y la ecuación (D.18) se convierte en

$$\mathbf{y} = \mathbf{H}\,\mathbf{x} + \mathbf{e} \tag{D.19}$$

De dicho error se asume que su media es nula y su covarianza es $\mathbf{Q}_e$. Por lo tanto, las observaciones tendrán una covarianza $\mathbf{Q}_y = \mathbf{Q}_e$.
Para una posible solución aproximada $\hat{\mathbf{x}}$, el **vector residuo** $\mathbf{r}$, definido como la diferencia entre las observaciones aproximadas y lo que se observaría en ausencia de error, queda expresado por

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{H}\,\hat{\mathbf{x}} \tag{D.20}$$

La solución para este sistema es única y se puede obtener mediante el principio de los mínimos cuadrados.

D.3.2. Solución por Mínimos Cuadrados Ordinarios

La solución por el métodos de mínimos cuadrados ordinarios define R como la norma cuadrática del vector residuo (Fernández, 2005):

$$R = ||\mathbf{r}||^2 = \mathbf{r}^T\mathbf{r} = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\,\hat{\mathbf{x}})^2 \tag{D.21}$$

[1] Si un sistema tiene por lo menos una solución, se dice que es consistente.

Para minimizar el vector residuo se iguala a cero el gradiente:

$$\nabla_{\hat{x}}||\mathbf{r}||^2 = -2\mathbf{H}^T\ (\mathbf{y} - \mathbf{H}\,\hat{\mathbf{x}}) = 0 \tag{D.22}$$

y despejando $\hat{\mathbf{x}}$ resulta

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\,\mathbf{y} \tag{D.23}$$

Denotando $\mathbf{A} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T$, se expresa la covarianza de la estimación como

$$\mathbf{Q}_{\hat{x}} = E\left[(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})\,(\hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x})^T\right] = \mathbf{A}\,\mathbf{Q}_y\,\mathbf{A}^T \tag{D.24}$$

D.3.3. Solución por Mínimos Cuadrados con Covarianza de las Observaciones Conocida

Cuando la covarianza de las observaciones $\mathbf{Q}_y$ es conocida, existe una alternativa mejor que la solución de mínimos cuadrados ordinaria. Dicha alternativa consiste en tomar como solución aquella cuyo error esperado sea mínimo. Lo que equivale a minimizar la covarianza de la estimación $\mathbf{Q}_{\hat{x}}$. Hacer esto es equivalente a minimizar la norma cuadrática del residuo, pero ponderada por la inversa de la covarianza de las medidas (Fernández, 2005), es decir

$$R = ||\mathbf{r}||^2_{Q_y^{-1}} = \mathbf{r}^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{r} = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\,\hat{\mathbf{x}})^T\,\mathbf{Q}_y^{-1}\,(\mathbf{y} - \mathbf{H}\,\hat{\mathbf{x}})^T \tag{D.25}$$

que al igualar a cero su gradiente

$$\nabla_{\hat{x}}||\mathbf{r}||^2_{Q_y^{-1}} = -2\mathbf{H}^T\mathbf{Q}_y^{-1}\ (\mathbf{y} - \mathbf{H}\,\hat{\mathbf{x}}) = 0 \tag{D.26}$$

y despejando $\hat{\mathbf{x}}$ resulta

$$\hat{\mathbf{x}} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\,\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{y} \tag{D.27}$$

Esta vez se denota $\mathbf{A} = \left(\mathbf{H}^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\mathbf{H}^T\mathbf{Q}_y^{-1}$ y la covarianza de la estimación minimizada viene dada por

$$\begin{aligned}\mathbf{Q}_{\hat{x}} &= \mathbf{A}\,\mathbf{Q}_y\mathbf{A}^T \\ &= \left(\mathbf{H}^T\mathbf{Q}_y^{-1}\mathbf{H}\right)^{-1}\end{aligned} \tag{D.28}$$

El residuo correspondiente a la solución obtenida será

$$\mathbf{r} = \mathbf{y} - \mathbf{H}\,\hat{\mathbf{x}} = \mathbf{y} - \mathbf{H}\,\mathbf{A}\,\mathbf{y} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}\,\mathbf{A})\ \mathbf{y} \tag{D.29}$$

donde $\mathbf{I}$ es la matriz identidad. La norma cuadrática ponderada que le corresponde, la que se suele denominar residuo cuadrático y denotar como Ω, viene dada por:

$$\Omega = ||\mathbf{r}||^2_{Q_y^{-1}\,min} = (\mathbf{y} - \mathbf{H}\,\hat{\mathbf{x}})^T\,\mathbf{Q}_y^{-1}\,(\mathbf{y} - \mathbf{H}\,\hat{\mathbf{x}}) = \mathbf{y}^T\mathbf{B}\,\mathbf{y} \tag{D.30}$$

con $\mathbf{B}$ definida como

$$\mathbf{B} = (\mathbf{I} - \mathbf{H}\,\mathbf{A})^T\,\mathbf{Q}_y^{-1}\,(\mathbf{I} - \mathbf{H}\,\mathbf{A}) \tag{D.31}$$

D.4. Filtro de Kalman

El filtro de Kalman es una técnica estadística que combina el conocimiento de la naturaleza de los errores con el de sistemas dinámicos, representada como un modelo de espacio de estado[2]. Este modelo puede incluir cualquier número de incógnitas. En un sistema de navegación, usualmente interesa la posición y velocidad. La estimación del estado utiliza una función de ponderación llamada ganancia de Kalman, la cual es optimizada para obtener una varianza de error mínima. Para modelos de sistemas lineales, el filtro de Kalman está estructurado para producir una estimación insesgada (Kaplan y Hegarty, 2006).
Se asume un modelo en el cual para cada medición de tiempo t_n, un nivel de ruido es agregado a la incógnita x, produciendo una observación $y(t_n)$ de la forma

$$y(t_n) = x + \epsilon_m(t_n) \tag{D.32}$$

Se asume que la secuencia de medición de ruido $\{\epsilon_m(t_n)\}$ tiene media nula y varianza σ_m^2 y es blanca, es decir, que los valores sucesivos de $\epsilon_m(t_n)$ son estadísticamente independientes entre sí. La secuencia $\{\epsilon_m(t_n)\}$ no es necesariamente estacionaria.
El filtro de Kalman se describe en dos pasos: predicción y corrección. Se estima el valor de x mediante la estimación a priori de la medición, denotada por $\hat{x}(t_n^-)$. Ya que x es una constante, no hay diferencias entre $\hat{x}\left(t_{n-1}^+\right)$, la estimación justo después de incorporar la medición anterior, y $\hat{x}(t_n^-)$ (Esto no es cierto para modelos de sistemas más generales). La actualización de la medición está dada por:

$$\hat{x}\left(t_n^+\right) = \hat{x}\left(t_n^-\right) + k(t_n)\left[y(t_n) - \hat{x}\left(t_n^-\right)\right] \tag{D.33}$$

donde el parámetro $k(t_n)$ es la ganancia de Kalman. En esta ecuación, la estimación a priori $\hat{x}(t_n^-)$ es corregida por una adición de nueva información contenida en la medición. La estimación del error está dada por:

$$\tilde{x}\left(t_n^+\right) = x - \hat{x}\left(t_n^+\right) \tag{D.34}$$

El parámetro $k(t_n)$ contiene los parámetros estadísticos requeridos para formar la combinación entre la estimación previa y los nuevos datos que resultan en una varianza estimada de error mínima. La calidad de la estimación es caracterizada por la varianza del error, pero dado que la estimación es insesgada, la varianza del error es igual a la varianza de estimación $\sigma_{\hat{x}}^2(t_n)$ y su valor es diferente antes y después de la actualización de la estimación, mediante la incorporación de la medición. La ganancia de Kalman es calculada como

$$k(t_n) = \frac{\sigma_{\hat{x}}^2(t_n)}{\sigma_{\hat{x}}^2(t_n) + \sigma_m^2} \tag{D.35}$$

Nótese que si la medición es menos precisa (es decir σ_m^2 es más grande), la ponderación dada a los nuevos datos es reducida. Luego de la actualización de la medición, la varianza del error es reducida de acuerdo a:

$$\sigma_{\hat{x}}^2\left(t_n^+\right) = \left[1 - k(t_n)\right]\sigma_{\hat{x}}^2\left(t_n^-\right) \tag{D.36}$$

Si se asume que la varianza del ruido de la medición es constante, entonces se puede mostrar que la varianza del error está dada por $\sigma_{\hat{x}}^2(t_n^+) = \sigma_m^2/n$ y se aproxima asintóticamente a cero mientras

[2]El espacio de estado se entiende como todos los posibles estados de un sistema dinámico.

más datos se obtienen.
En aplicaciones reales, el vector de estados contiene varias componentes que no son constantes, sino que evolucionan dinámicamente, tal como la posición y velocidad. También, el modelo del sistema de estados incluye ruidos, los cuales expresan los errores de la modelación. Dado que, en general, el sistema de estados varía dinámicamente entre mediciones, la estimación justo antes de la actualización de la medición $\hat{x}\left(t_n^+\right)$ debe ser extrapolado al siguiente tiempo de medición de acuerdo al modelo del sistema de estados para calcular $\hat{x}\left(t_{n+1}^-\right)$. Además, en el caso de un vector general, el desempeño de la estimación del filtro de Kalman es caracterizada por la matriz de covarianza del error definida como

$$\mathbf{P} = \mathbb{E}\left[\left(\mathbf{x}\left(t_n\right) - \hat{\mathbf{x}}\left(t_n\right)\right)\left(\mathbf{x}\left(t_n\right) - \hat{\mathbf{x}}\left(t_n\right)\right)^T\right] \tag{D.37}$$

Aquí se resumen las ecuaciones del filtro de Kalman para el caso general. El modelo del sistema de estados es dado por

$$\mathbf{x}\left(t_n\right) = \mathbf{\Phi}\left(t_n,\, t_{n-1}\right)\mathbf{x}\left(t_{n-1}\right) + \mathbf{u}\left(t_n\right) \tag{D.38}$$

donde $\mathbf{\Phi}\left(t_n,\, t_{n-1}\right)$ denota la matriz de transición de estados y $\mathbf{u}\left(t_n\right)$ es el vector de ruido de proceso que se asume que es blanco, con media nula y sigue una distribución normal. Esto se representa por $\mathcal{N}\left(0,\, \mathbf{Q}\left(t_n\right)\right)$ con $\mathbf{Q}\left(t_n\right)$ la matriz de covarianza. El modelo de mediciones es

$$\mathbf{y}\left(t_n\right) = \mathbf{H}\left(t_n\right)\, \mathbf{x}\left(t_n\right) + \boldsymbol{\epsilon}_m\left(t_n\right) \tag{D.39}$$

donde $\mathbf{H}\left(t_n\right)$ caracteriza la sensibilidad de las mediciones a cada componente del estado. El vector $\boldsymbol{\epsilon}_m\left(t_n\right)$ es el ruido de las mediciones y es un proceso aleatorio distribuido normalmente como $\mathcal{N}\left(0,\, \mathbf{R}\left(t_n\right)\right)$ con $\mathbf{R}\left(t_n\right)$ la matriz de covarianza. El filtro de Kalman, una vez iniciado el proceso, se alterna entre dos conjuntos de ecuaciones que describen: (1) la extrapolación de la estimación y la covarianza del error entre mediciones, y (2) la incorporación de nuevas mediciones a la estimación. La extrapolación de la estimación de estados está dada por

$$\hat{\mathbf{x}}\left(t_n^-\right) = \mathbf{\Phi}\left(t_n,\, t_{n-1}\right)\, \hat{\mathbf{x}}\left(t_{n-1}^+\right) \tag{D.40}$$

y la extrapolación de la covarianza del error es

$$\mathbf{P}\left(t_n^-\right) = \mathbf{\Phi}\left(t_n,\, t_{n-1}\right)\, \mathbf{P}\left(t_{n-1}^+\right)\, \mathbf{\Phi}^T\left(t_n,\, t_{n-1}\right) + \mathbf{Q}\left(t_{n-1}\right) \tag{D.41}$$

La actualización de medición de la estimación del estado está dada por

$$\hat{\mathbf{x}}\left(t_n^+\right) = \hat{\mathbf{x}}\left(t_n^-\right) + \mathbf{K}\left(t_n\right)\left[\mathbf{y}\left(t_n\right) - \mathbf{H}\left(t_n\right)\, \hat{\mathbf{x}}\left(t_n^-\right)\right] \tag{D.42}$$

donde $\mathbf{K}\left(t_n\right)$ es la matriz de ganancia de Kalman y se calcula como

$$\mathbf{K}\left(t_n\right) = \mathbf{P}\left(t_n^-\right)\mathbf{H}^T\left(t_n\right)\left[\mathbf{H}\left(t_n\right)\, \mathbf{P}\left(t_n^-\right)\, \mathbf{H}^T\left(t_n\right) + \mathbf{R}\left(t_n\right)\right]^{-1} \tag{D.43}$$

La covarianza del error actualizada es

$$\mathbf{P}\left(t_n^+\right) = \left[\mathbf{I} - \mathbf{K}\left(t_n\right)\, \mathbf{H}\left(t_n\right)\right]\mathbf{P}\left(t_n^-\right) \tag{D.44}$$

La Figura D.3 muestra un esquema del proceso del filtro de Kalman.

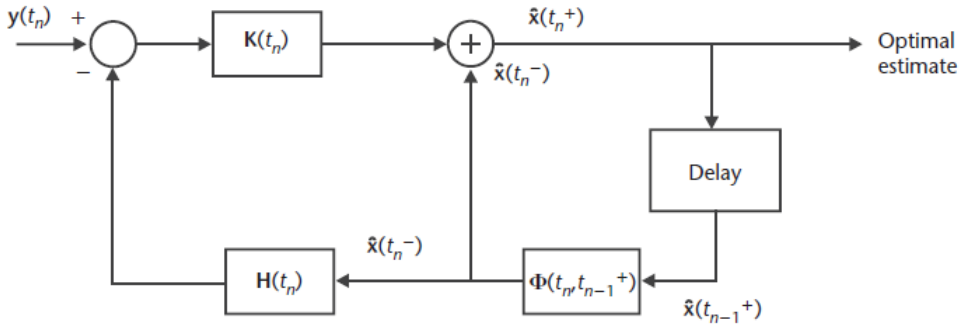


Figura D.3: Esquema del proceso del filtro de Kalman. (Kaplan y Hegarty, 2006)

Apéndice E

Bandas de Frecuencia

Una antena se define como aquella parte de un sistema transmisor o receptor diseñada específicamente para radiar o recibir ondas electromagnéticas, según el IEEE (*Institute of Electrical and Electronics Engineers*).
Existen dos propósitos básicos de una antena: transmitir y recibir, imponiendo cada aplicación condiciones particulares sobre la direccionalidad de la antena, niveles de potencia que debe soportar, frecuencia de trabajo y otros parámetros.
Si bien sus formas son muy variadas, todas las antenas tienen en común el ser una región de transición entre una zona donde existe una onda electromagnética guiada y una onda en el espacio libre, a la que puede además asignar un carácter direccional. La representación de la onda guiada se realiza por voltajes y corrientes (hilos conductores y líneas de transmisión) o por campos (guías de ondas); en el espacio libre, mediante campos (Aznar et al., 2002). El conjunto de todas las frecuencias (espectro de frecuencias) se divide en bandas, cada una de las cuales presenta características específicas que dan origen a diversos tipos de antenas. En las Tablas E.1 y E.2 se muestran las bandas de frecuencias según el IEEE y según según la UIT (Unión Internacional de Telecomunicaciones), respectivamente.

Tabla E.1: Bandas de frecuencias según el IEEE.

Banda	**Rango de frecuencias**
HF	3 – 30 MHz
VHF	30 – 300 MHz
UHF	300 – 1000 MHz
L	1 - 2 GHz
S	2 - 4 GHz
C	4 - 8 GHz
X	8 - 12 GHz
K_u	12 - 18 GHz
K	18 - 27 GHz
K_a	27 - 40 GHz
V	40 - 75 GHz
W	75 - 110 GHz

Tabla E.2: Bandas de frecuencias según la UIT. (Aznar et al., 2002)

Banda	**Rango de frecuencias**	**Longitud de onda**	**Denominación**
ELF	<3 kHz	>100 km	*Extremely Low Frequency*
VLF	3 - 30 kHz	100 – 10 km	*Very Low Frequency*
LF	30 – 300 kHz	10 – 1 km	*Low Frequency*
MF	0,3 – 3 MHz	1000 – 100 m	*Medium Frequency*
HF	3 – 30 MHz	100 – 10 m	*High Frequency*
VHF	30 – 300 MHz	10 – 1 m	*Very High Frequency*
UHF	0,3 – 3 GHz	100 – 10 cm	*Ultra High Frequency*
SHF	3 – 30 GHz	10 – 1 cm	*Super High Frequency*
EHF	30 – 300 GHz	1 – 0,1 cm	*Extremely High Frequency*

Apéndice F

Módulos NEO-M8P

F.1. Conexiones e Interfaces de la Tarjeta C94-M8P

La tarjeta de aplicación C94-M8P posee los componentes de la Figura F.1, donde:

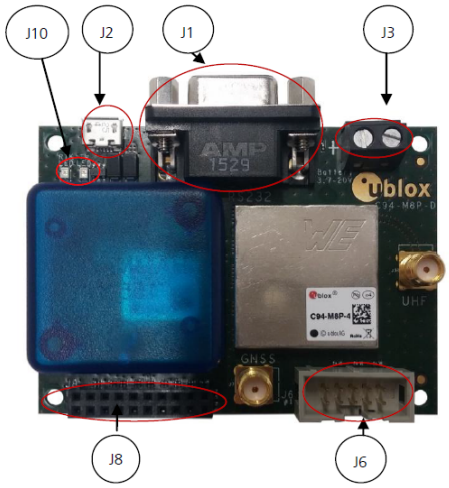


Figura F.1: Tarjeta de aplicación C94-M8P. (u-blox, 2017a)

- J1: Interfaz RS232/UART[1]. La intefaz UART tiene dos propósitos: configurar el módem de radio con comandos AT[2], y para el rover, registrar los datos (mensajes RTCM) enviados desde el módem de radio al módulo GNSS.
- J2: Interfaz USB. Se utiliza para configurar el módulo GNSS NEO-M8P y para registrar los datos enviados desde el módulo GNSS, incluyendo los mensajes UBX y NMEA (ver Secciones 4.3.2 y 4.2.2).
- J3: Batería externa / Conector CC[3]. Hay un conector de batería de 2 pines disponible en el C94-M8P para conectar la placa a una batería externa o fuente DC (de 3.7-20 VCC[4]).
- J6: Interfaz de depurador para módem de radio.

[1] UART, son las siglas en inglés de *Universal Asynchronous Receiver-Transmitter*, en español: Transmisor-Receptor Asíncrono Universal, es el dispositivo que controla los puertos y dispositivos serie. Se encuentra integrado en la placa base o en la tarjeta adaptadora del dispositivo.

[2] Los comandos AT son instrucciones codificadas que conforman un lenguaje de comunicación entre el hombre y un terminal módem.

[3] CC: corriente continua.

[4] VCC: voltaje en corriente continua.

- J8: Interfaz de prueba y producción. El conector J8 es la interfaz combinada para monitorear la salida de estado de la geovalla[5] y la salida de estado RTK, y también es un conector para el UART.
- J10: Indicadores LEDs. El LED azul muestra el pulso de la señal del módulo NEO-M8P-2. El LED comienza a parpadear un pulso por segundo durante una posición GNSS. Si no se está midiendo posición, el LED se encenderá sin parpadear. El LED verde indica el estado RTK; el LED parpadea en modo *float* y se está quieto en modo *fix*. Este LED está apagado si no se está en estado RTK.

F.2. Configuración de Receptores NEO-M8P

A continuación, se resumen los pasos a seguir para configurar los receptores, base y rover, para mediciones en RTK. Es necesario que el receptor a configurar esté conectado al computador al momento de cambiar los parámetros.
Luego de instalar el software u-center, se debe actualizar el *firmware*[6], éste se puede descargar de la página web de u-blox. Para actualizar el firmware, en u-center, se debe hacer click en: *Tools -> Firmware Update*. Y luego se deben seguir los pasos descritos en el punto 8.1 de la guía de usuario de u-center (u-blox, 2018b).
Nota: No se deben tener más de una tarjeta de aplicación conectada al computador mientras se está actualizando el firmware.

F.2.1. Configuración de la Estación Base

Si el receptor a configurar se utilizará como base, se deben considerar los siguientes pasos:

A. Fijar la posición de la base. Esto se puede hacer: (a) buscando sus propias coordenadas, o (b) Ingresando las coordenadas ya definidas.

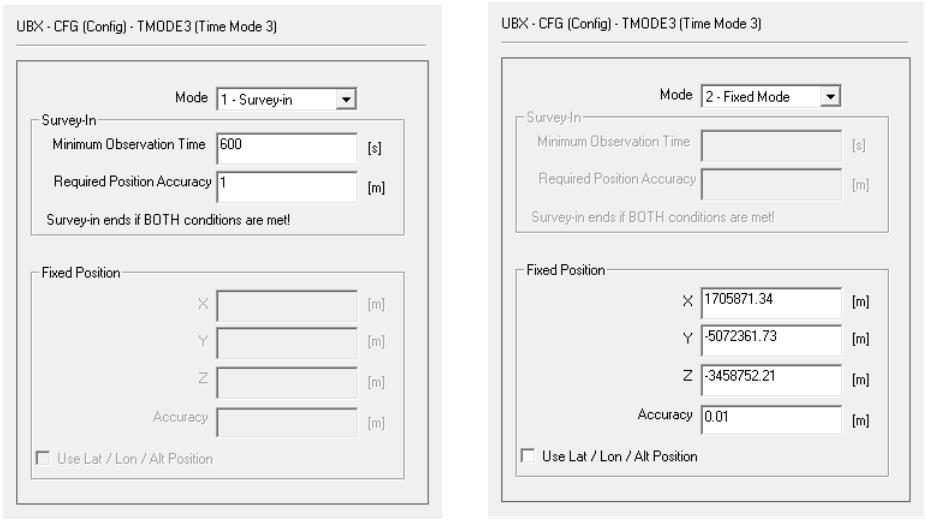
B. Establecer la configuración del puerto para el radio enlace.

C. Seleccionar los mensajes para transmisión.

A. Coordenadas de la Estación Base
Para fijar la posición de la base se debe ir a la ventana de mensajes, UBX-CFG-TMODE3, del programa u-center.
Si se quiere que el mismo receptor "busque" sus coordenadas, se debe seleccionar el modo 1 - *Survey-in*. Aquí se puede definir el nivel de precisión que se quiere alcanzar y el tiempo de observación mínimo [Figura F.2(a)]. (En un buen entorno se puede alcanzar un metro de precisión en unos 10 a 15 minutos). El mensaje UBX-NAV-SVIN permite monitorear el proceso definición de coordenadas. Este proceso termina cuando se cumplen los límites de precisión y de tiempo. Cuando esto sucede el *Fix Mode* cambia a "TIME" en la ventana de datos de u-center (se debe deshabilitar los mensajes NMEA para ver esto).

[5] Una geovalla es un perímetro virtual de un área geográfica.
[6] Un firmware (o soporte lógico inalterable) es un software que maneja físicamente al hardware. Está fuertemente integrado con la electrónica del dispositivo, siendo así el encargado de controlarlo para ejecutar correctamente las instrucciones externas.

Nota: La tasa de navegación (definida en UBX-CFG-RATE) debe ser de 1 Hz durante el modo *Survey-in*.
Por otro lado, si se tiene el dato de la posición del receptor, se puede ingresar en el modo 2 - *Fixed Mode*, en coordenadas ECEF (WGS84) o en coordenadas geodésicas [Figura F.2(b)].



(a) (b)

Figura F.2: Configuración del modo de definición de coordenadas de la estación base en u-center.

B. Radio Enlace

El protocolo utilizado para transmitir las correcciones desde la base al rover es el RTCM3. Para definir esto, se usa el mensaje UBX-CFG-PRT (Figura F.3). Aquí se especifica que sólo estarán saliendo los datos RTCM3 desde la base (*Protocol out*) mediante el puerto UART1. Este puerto se refiere a la conexión entre el módulo NEO-M8P-2 y el módulo de radio UHF en la tarjeta de aplicación. Se debe definir en "*Protocol in*" que no estarán entrando datos (*none*).

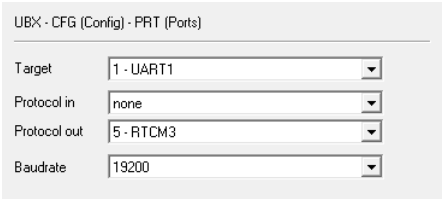


Figura F.3: Configuración del radio enlace de la estación base en u-center.

C. Selección de Mensajes RTCM

Para la estación base se necesita definir los mensajes RTCM que serán enviados mediante el puerto UART1. Para esto se utilizan los mensajes UBX-CFG-MSG mostrados en la Figura F.4. Si se quiere usar el sistema GLONASS (además del GPS) se habilita el mensaje 1087. Si en vez de GLONASS se quiere el sistema BeiDou se habilita el mensaje 1127 en vez del 1087. La Tabla F.1 muestra la descripción de estos mensajes (Los demás mensajes se pueden encontrar en u-blox, 2018a).

Tabla F.1: Algunos mensajes de entrada RTCM 3.2 admitidos.

Mensaje RTCM3.2	**Descripción**
1005	Coordenadas de la estación base.
1077	Mensajes GPS.
1087	Mensajes GLONASS.
1127	Mensajes BeiDou.
1230	Sesgos código-fase GLONASS.

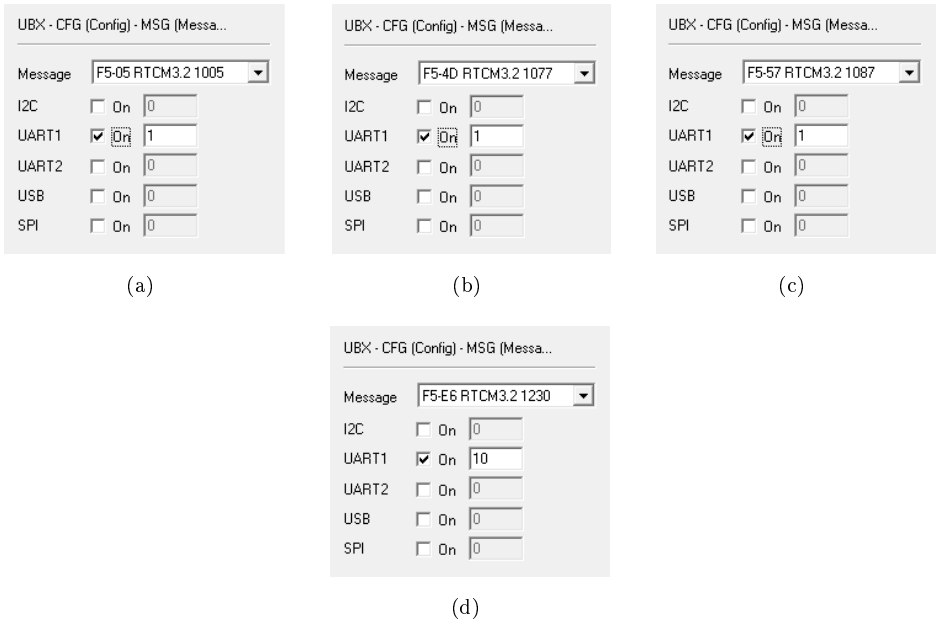


Figura F.4: Selección de los mensajes RTCM3 en u-center.

Configuración del Rover

A diferencia del receptor base, el receptor rover sólo necesita la configuración del radio enlace. Un rover que recibe mensajes RTCM automáticamente entrará en modo RTK.
Mediante el mensaje UBX-CFG-PRT (Figura F.5) se especifica que sólo estarán entrando los datos RTCM3 al rover (*Protocol in*) mediante el puerto UART1. Se debe especificar en "*Protocol out*" que no estarán saliendo datos (*none*).
Si es que posteriormente se quiere convertir a formato RINEX desde el formato UBX, es necesario el mensaje UBX-RXM-RAWX (datos brutos de medición multi-GNSS), que contiene la información requerida para generar un archivo de observación multi-GNSS, y el mensaje RXM-SFRBX, que informa sobre los datos de navegación transmitidos. Por lo que se debe habilitar estas opciones en los mensajes UBX-CFG-MSG (Figura F.6).

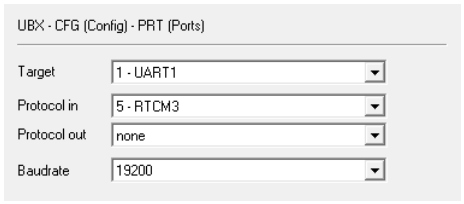
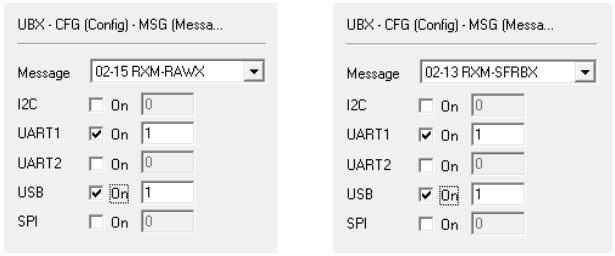


Figura F.5: Configuración del radio enlace del rover en u-center.



(a) (b)

Figura F.6: Selección de los mensajes RXM-RAWX y RXM-SFRBX para conversión a formato RINEX, en u-center.

F.2.2. Guardar Parámetros de Configuración

Para guardar los parámetros de configuración en la memoria no volátil[7] del receptor, se debe ir a UBX-CFG-CFG y seleccionar "guardar la configuración actual" (*save current configuration*). "*SPI-FLASH*"[8] (en "*Devices*") debe estar seleccionado al momento de enviar el mensaje al receptor.
La configuración de los receptores se pueden guardar en archivos de texto.

F.3. Conversión a Formato RINEX

Para convertir de formato ubx a formato RINEX se puede utilizar la aplicación "RTKCONV" del paquete de programas "RTKLIB". La Figura F.7 muestra la ventana en donde se puede ingresar el archivo ubx (input) y los nombres de los archivos RINEX de observación y navegación (output). En "Opciones" se puede seleccionar la versión RINEX, los GNSS utilizados, los tipos de frecuencias, entre otros datos.
Estos archivos RINEX pueden ser utilizados para aplicaciones en postproceso.

[7] Contrario a la memoria volátil, la memoria no volátil es un tipo de memoria que no necesita energía para mantener guardada la información en ella. Un ejemplo es la memoria flash.

[8] SPI (*Serial Peripheral Interface*) es un protocolo serial que puede comunicarse con una variedad de dispositivos.

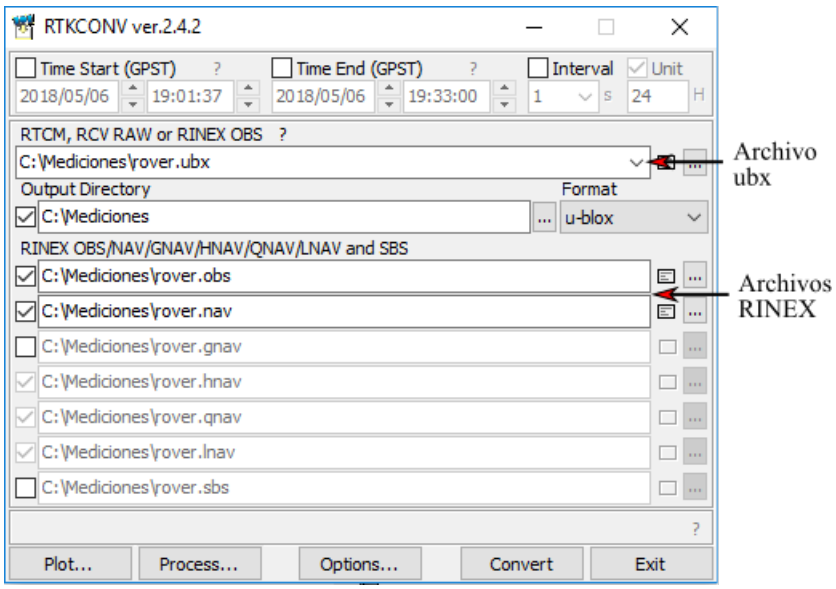


Figura F.7: Ventana del programa RTKCONV.