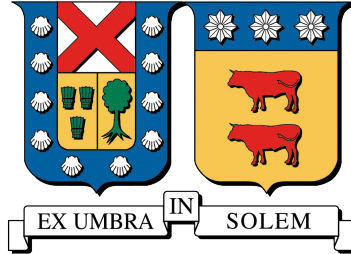


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
VALPARAÍSO - CHILE



**EVALUACIÓN DE OBSERVABLES DE QCD BASADA EN
RENORMALONES COMPATIBLE CON BAJAS ENERGÍAS**

CAMILO NICOLÁS CASTRO ARRIAZA

TESINA PARA OPTAR AL GRADO DE
LICENCIADO EN CIENCIAS, MENCIÓN FÍSICA

PROFESOR GUÍA : DR. GORAZD CVETIČ

**COMITÉ DE REVISIÓN: : DR. WILLIAM BROOKS
DR. HAYK HAKOBYAN
DR. MARAT SIDDIKOV**

MARZO 2022

“Lo mejor a lo que podemos
aspirar la mayoría de nosotros en
Física es simplemente entender
mal a un nivel más profundo”

Wolfgang Pauli

Agradecimientos

Quisiera agradecer primero a mi madre y padre por el constante amor y apoyo que me han dado toda la vida y en especial durante la carrera, y por como me han motivado siempre a perseverar en el desarrollo de este y otros proyectos.

A mi profesor guía, Dr. Gorazd Cvetič, agradezco profundamente por aceptarme en su proyecto de investigación y permitirme trabajar con él, y por todo el apoyo y sobre todo paciencia que tuvo para mi durante el desarrollo de esta tesina, siempre dispuesto a explicarme los pormenores de los complejos tópicos abordados. Un agradecimiento también a los profesores de la comisión revisora a quienes tuve esperando por mis constantes correcciones y revisiones del presente texto.

Finalmente, agradezco a mis queridos amigos y amigas que me han apoyado y soportado durante todo el proceso, en especial a mi generación 2018 de Física por la compañía durante la acontecida odisea de la carrera.

Índice General

1	Introducción	5
1.1	Los límites de pQCD	6
1.2	Función de Adler	7
1.3	Renormalones	8
1.4	Versiones Holomórficas de QCD (AQCD)	8
1.5	Objetivos en la Evaluación de Observables	9
2	El Método Cvetič	10
2.1	Construcción de Cantidades y Transformada de Borel	10
2.2	Construcción de las Transformadas para la Función de Adler	16
2.3	Obtención de $\mathcal{D}(Q^2)$ Mediante Procedimiento de Neubert	17
3	Cálculos y Comparaciones	21
3.1	Aplicando el Método en AQCD	21
3.2	Comparación de Métodos	24
4	Conclusiones, Alcances y Futuro	28

Capítulo 1

Introducción

En el contexto del Modelo Estándar de la Física de Partículas, la Cromodinámica Cuántica (QCD) es la teoría de campo de gauge que describe la interacción fuerte de color entre quarks, siendo esta mediada por gluones.

El desarrollo de una teoría para la interacción fuerte comenzó en los años sesenta con la propuesta de M. Gell-Mann [1] y G. Zweig de la existencia de tres sabores de partículas fundamentales que formarían los hadrones: los quarks. Esto sugería que los objetos fuertemente interactuantes están todos formados por quarks por lo que, luego de encontrarse pruebas experimentales de la existencia de estos, restaba formular una teoría que describiera sus dinámicas y el funcionamiento de su propiedad intrínseca de color. Es así como a principios de la década de los setenta, Fritzsch, Gell-Mann y Leutwyler [2] propusieron una teoría de gauge que cumplía exactamente con tal tarea, la Cromodinámica Cuántica (QCD).

Mucho del trabajo y evaluación de observables en este contexto puede realizarse adecuada y precisamente utilizando técnicas perturbativas (pQCD), dada la libertad asintótica exhibida por la teoría. Esta característica descubierta por D. Gross y F. Wilczek [3], e independientemente por H. Politzer [4], permite

trabajar con cantidades a altas energías, pero representa un severo problema para bajas energías donde la teoría perturbativa falla. Esto fuerza a encontrar métodos no perturbativos para abordar QCD en esas condiciones, entre los que hay desde simulaciones numéricas, como QCD de redes (*lattice*), hasta métodos analíticos que hacen correcciones a los cálculos perturbativos.

En este trabajo exploraremos precisamente un método no perturbativo para la evaluación de observables de QCD, desarrollado por G. Cvetič [5], que se basa en la estructura de renormalón conocida de algunas de estas cantidades. Para esto, primero veremos nociones básicas de los problemas que ocurren con pQCD en bajas energías, además de algunos conceptos que nos ayudarán a comprender la motivación del método a estudiar.

1.1 Los límites de pQCD

La posibilidad de utilizar teoría de perturbaciones al analizar observables de QCD es garantizada (al menos para altas energías) por la libertad asintótica [3, 4] exhibida por la teoría. Esto significa que, en QCD, la interacción entre partículas se hace asintóticamente más y más débil conforme aumenta la escala de energía, lo que se expresa en una constante de acoplamiento $a \equiv \alpha_s/\pi$ progresivamente menor a mayores energías. Con esta característica, podemos realizar buenas predicciones de observables con una cantidad finita de términos.

Esta misma característica significa que a bajas energías ya no nos podemos basar en usar perturbaciones, ya que el acoplamiento es muy grande y tendremos en este singularidades de Landau como polos y cortes en el semieje positivo $0 \leq Q^2$, lo que a su vez nos generará singularidades de Landau al evaluar observables tipo espacio $\mathcal{D}(Q^2)$ (que se evalúan precisamente en ese sector del plano complejo Q^2) en la región de bajas energías $0 < Q^2 \lesssim \Lambda^2 \sim 1 \text{ GeV}^2$. Estas singularidades, sin embargo, no tienen significado físico y son un artefacto del uso de teoría

perturbativa, algo corroborado por simulaciones de QCD de redes muestran que no hay tales singularidades en el acoplamiento $a(Q^2)$. El comportamiento de estas singularidades genera problemas pues los observables generados así no serían holomórficos para Q^2 complejo (y no negativo) como requieren los principios de la teoría cuántica de campos (QFT), y porque no sería posible evaluar las integrales de $a(Q^2)$ y $\mathcal{D}(Q^2)$ por la ambigüedad generada.

Estas características motivan la búsqueda de técnicas no perturbativas para calcular observables en este régimen de energías.

1.2 Función de Adler

La función de Adler [6] corresponde a la derivada del correlador de corrientes de quarks ligeros, y como tal participa en varios procesos de interacción fuerte importantes. Esta función surge de la descripción teórica de la aniquilación de electrón-positrón a hadrones.

La función se define como

$$\mathcal{D}(Q^2) = \frac{d\Pi(-Q^2)}{d \ln Q^2}, \quad (1.1)$$

donde Q^2 representa un momento tipo espacio (i.e. $Q^2 \equiv -q^2$ no negativo) y donde

$$\Pi(q^2) = \Pi(q_0^2) - (q^2 - q_0^2) \int_{4m_\pi^2}^{\infty} \frac{R(s)}{(s - q^2)(s - q_0^2)} ds \quad (1.2)$$

es la función de polarización de vacío hadrónico, definida con $R(s)$, que corresponde a la siguiente razón de secciones eficaces

$$R(s) = \frac{\sigma(e^+e^- \rightarrow \text{hadrones}; s)}{\sigma(e^+e^- \rightarrow \mu^+\mu^-; s)}, \quad (1.3)$$

con $s = q^2 > 0$ la energía del centro de masa al cuadrado. Usaremos esta función $\mathcal{D}(Q^2)$ más adelante pues corresponde a un observable de QCD del que tenemos mucha información, incluyendo importantemente su estructura de renormalón.

1.3 Renormalones

Los renormalones [7] corresponden a ciertos patrones de divergencia en las expansiones perturbativas en teoría cuántica de campos (QFT), que emanan del comportamiento a alto y bajo momento de estas. Un renormalón es una posible fuente de divergencias en el plano complejo de Borel, que ocurre cuando la transformada de Borel usada para sumar una serie divergente de QFT tiene singularidades. Además, su expresión en las expansiones hace que estas diverjan por el crecimiento de los coeficientes.

Estas singularidades pueden servir para hacer correcciones no perturbativas a teorías con libertad asintótica como QCD. Precisamente, el modelo que exploramos en este trabajo está motivado por la estructura de renormalón de cantidades físicas.

Para una descripción completa de los renormalones por sí mismos y las fallas y aciertos de los modelos basados en renormalones para QCD hasta c. 1998, puede consultarse la referencia [8].

1.4 Versiones Holomórficas de QCD (AQCD)

Por lo mencionado en la sección 1.1, para bajo $Q^2 \lesssim \Lambda^2$ necesitamos buscar alternativas al método de pQCD.

Un tipo de alternativa es usar versiones holomórficas (también llamadas

analíticas) de QCD (abreviadas AQCD por “*analytic*”). En estas variantes, el acoplamiento no posee singularidades de Landau sin sentido físico en el semieje positivo; el acoplamiento es diferenciable (n veces, n arbitrario), es decir, es holomórfico, en todos los $Q^2 \in \mathbb{C} \setminus (-\infty, -M_{\text{thr}}^2]$ donde $M_{\text{thr}} \sim 0.1 \text{ GeV}$.

Varios modelos de este tipo han sido propuestos, partiendo por el de mínima analitización de D. V. Shirkov e I. L. Solovstov [9] de 1996. La idea es que aparte de que el acoplamiento sea analítico, en estas variantes podemos construir acoplamientos que cumplan otras condiciones para usar en regímenes de bajo o alto Q^2 , en particular para lograr la evaluación de observables físicamente relevantes, como hace Nesterenko con la función de Adler [10].

Una visión general del área de AQCD, que contiene varios métodos distintos y los compara, puede encontrarse en la referencia [11].

1.5 Objetivos en la Evaluación de Observables

En suma, para lograr evaluar observables en la región $|Q^2| \lesssim 1 \text{ GeV}^2$ sin ambigüedades queremos:

- Que el acoplamiento no tenga singularidades Q^2 complejos fuera del semieje negativo,
- que podamos obtener buenas aproximaciones para los coeficientes de expansión perturbativa partiendo de los pocos que son conocidos;
- y que podamos de alguna manera realizar una evaluación (resumación) que no se vea afectada por la divergencia de las series perturbativas generadas.

Otras características deseables son que el método coincida con los resultados perturbativos para energías más altas, y que podamos evaluar muchos observables distintos y relevantes.

Capítulo 2

El Método Cvetič

Dado los problemas inherentes a pQCD mencionados en el capítulo anterior para abordar QCD en regímenes bajos de energía, estudiaremos un método en particular desarrollado por G. Cvetič [5] que busca una evaluación sin ambigüedades de los observables cuando se aplica en variantes holomórficas de QCD (AQCD).

2.1 Construcción de Cantidades y Transformada de Borel

El método parte por construir una cantidad auxiliar a nuestro observable. Dado un observable de QCD $\mathcal{D}(Q^2)$, si lo expresamos como expansión en potencias del acoplamiento $a(Q^2) \equiv \alpha_s(Q^2)/\pi$ tendremos una forma

$$\mathcal{D}_{\text{exp}}(Q^2) = d_0 a(Q^2) + d_1 a(Q^2)^2 + \cdots + d_n a(Q^2)^{n+1} + \cdots \quad (2.1)$$

donde se denota la expansión perturbativa del observable como $\mathcal{D}_{\text{exp}}(Q^2)$ y se conoce que $d_0 = 1$. La serie obtenida puede ser reorganizada como una serie de derivadas logarítmicas

$$\tilde{a}_{n+1}(Q^2) \equiv \frac{(-1)^n}{\beta_0^n n!} \left(\frac{d}{d \ln Q^2} \right)^n a(Q^2), \quad (2.2)$$

donde $(n = 0, 1, 2, \dots)$ y β_0 corresponde al primer coeficiente de la función beta de la ecuación del grupo de renormalización perturbativa:

$$\frac{da(Q^2)}{d \ln Q^2} \equiv \beta(a(Q^2)) = -\beta_0 a(Q^2)^2 - \beta_1 a(Q^2)^3 - \beta_2 a(Q^2)^4 - \dots \quad (2.3)$$

$$= -\beta_0 a(Q^2)^2 (1 + c_1 a(Q^2) + c_2 a(Q^2)^2 + \dots). \quad (2.4)$$

Ya que se toman esquemas independientes de la masa, conocemos directamente los valores de los primeros dos coeficientes, $\beta_0 = 9/4; \beta_1 = 4$, donde hemos considerado un número de sabores de quark $N_f = 3$ ya que trabajaremos en bajas energías ($|Q^2| \lesssim 1 \text{ GeV}^2$). Además, los coeficientes c cumplen la equivalencia $c_j \equiv \beta_j/\beta_0$ para $(j = 2, 3, \dots)$.

La equivalencia expresada en (2.3) y (2.4) puede utilizarse para reescribir (2.2), con lo que obtenemos la serie

$$\tilde{a}_n(Q^2) = a(Q^2)^n + \sum_{m=1}^{\infty} k_m(n) a(Q^2)^{n+m}, \quad (2.5)$$

que a su vez puede ser invertida para obtener

$$a(Q^2)^n = \tilde{a}_n(Q^2) + \sum_{m=1}^{\infty} \tilde{k}_m(n) \tilde{a}_{n+m}(Q^2). \quad (2.6)$$

Estas expresiones para las potencias de a podemos usarlas para sustituir en (2.1), lo que nos deja una expresión de $\mathcal{D}(Q^2)$ en términos de derivadas

logarítmicas

$$\mathcal{D}_{\log}(Q^2) = \tilde{d}_0 a(Q^2) + \tilde{d}_1 \tilde{a}_2(Q^2) + \tilde{d}_2 \tilde{a}_3(Q^2) + \cdots + \tilde{d}_n \tilde{a}_{n+1}(Q^2) + \cdots, \quad (2.7)$$

donde $\tilde{d}_0 = 1$ y los coeficientes $\tilde{d}_n$ son combinaciones de los originales d_n tal que

$$\tilde{d}_n = \sum_{s=0}^{n-1} \tilde{k}_s (n+1-s) d_{n-s}, \quad (2.8)$$

donde $(n = 1, 2, \dots)$ y los coeficientes $\tilde{k}_s$ corresponden a los que forman parte de la relación (2.6). Es importante conocer los coeficientes $\tilde{d}_n$ explícitamente, por lo que podemos ver que según (2.8) los primeros cinco resultan:

$$\begin{aligned} \tilde{d}_0 &= d_0 = 1, & \tilde{d}_1 &= d_1, & \tilde{d}_2 &= d_2 - c_1 d_1, \\ \tilde{d}_3 &= d_3 - \frac{5}{2} c_1 d_2 + \left(-c_2 + \frac{5}{2} c_1^2 \right) d_1, \\ \tilde{d}_4 &= d_4 - \frac{13}{3} c_1 d_3 + \left(-3c_2 + \frac{28}{3} c_1^2 \right) d_2 + \left(-c_3 + \frac{22}{3} c_1 c_2 - \frac{28}{3} c_1^3 \right) d_1. \end{aligned} \quad (2.9)$$

La relación inversa de los coeficientes tiene la forma

$$d_n = \sum_{s=0}^{n-1} k_s (n+1-s) \tilde{d}_{n-s}, \quad (2.10)$$

donde los coeficientes k_s corresponden a los de la relación (2.5). La manera explícita de encontrar recursivamente estos coeficientes k y $\tilde{k}$ se describe en uno de los apéndices del artículo original, pero no requerimos describirla aquí.

A través de las relaciones (2.8), podemos obtener los coeficientes $\tilde{d}_n$ en base a los posiblemente conocidos d_n de (2.1) y construir con ellos una cantidad auxiliar

$\tilde{\mathcal{D}}(Q^2)$, requiriendo la sustitución $\tilde{a}_n(Q^2) \rightarrow a(Q^2)^n$ en (2.7), lo que queda

$$\tilde{\mathcal{D}}(Q^2) = \tilde{d}_0 a(Q^2) + \tilde{d}_1 a(Q^2)^2 + \tilde{d}_2 a(Q^2)^3 + \cdots + \tilde{d}_n a(Q^2)^{n+1} + \dots \quad (2.11)$$

Cabe notar que $\tilde{\mathcal{D}}$ no es un observable pues posee una dependencia de $\kappa \equiv \mu^2/Q^2$ cuando $\kappa \neq 1$ por lo que, más explícitamente, esto es

$$\tilde{\mathcal{D}}(Q^2; \kappa) = \tilde{d}_0 a(\mu^2) + \tilde{d}_1(\kappa) a(\mu^2)^2 + \tilde{d}_2(\kappa) a(\mu^2)^3 + \cdots + \tilde{d}_n(\kappa) a(\mu^2)^{n+1} + \dots \quad (2.12)$$

con κ como parámetro de la escala de renormalización. De aquí podemos extraer que se cumple entonces para los coeficientes $\tilde{d}_n(\kappa)$:

$$\frac{d}{d \ln \kappa} \tilde{d}_0(\kappa) = 0,$$

$$\frac{d}{d \ln \kappa} \tilde{d}_n(\kappa) = n \beta_0 \tilde{d}_{n-1}(\kappa) \quad (n \geq 1), \quad (2.13)$$

$$\implies \tilde{d}_n(\kappa) = \tilde{d}_n + \sum_{k=1}^n \binom{n}{k} (\beta_0 \ln \kappa)^k \tilde{d}_{n-k} \quad (n \geq 1). \quad (2.14)$$

Luego, podemos expresar la transformada de Borel de la cantidad auxiliar $\tilde{\mathcal{D}}$ de la ecuación (2.12) como

$$\text{B}[\tilde{\mathcal{D}}](u; \kappa) \equiv \tilde{d}_0(\kappa) + \frac{\tilde{d}_1(\kappa)}{1! \beta_0} u + \frac{\tilde{d}_2(\kappa)}{2! \beta_0^2} u^2 + \cdots + \frac{\tilde{d}_n(\kappa)}{n! \beta_0^n} u^n + \dots \quad (2.15)$$

cuya dependencia simple de κ permite escribirla como

$$\text{B}[\tilde{\mathcal{D}}](u; \kappa) = \kappa^u \text{B}[\tilde{\mathcal{D}}](u). \quad (2.16)$$

A continuación, por lo visto hasta ahora, procedemos a presumir que la transformada de Borel de la cantidad auxiliar $\tilde{\mathcal{D}}(Q^2)$ posee una estructura de renor-

malón de tipo *large- β_0* :

$$B[\tilde{\mathcal{D}}](u) = \frac{1}{(p-u)^k}, \frac{1}{(p+u)^k}, \quad (2.17)$$

donde p, k son enteros positivos. La primera opción corresponde al renormalón IR de tipo *large- β_0* en $u = p$, mientras la segunda corresponde al renormalón UV de tipo *large- β_0* en $u = -p$. Notar que más allá de *large- β_0* , las potencias k en general, para IR con $p \geq 3$, no son números enteros. Estos renormalones pueden ser simples o dobles para el observable y, dependiendo del tipo que sean, generarán coeficientes $\tilde{d}_n$ con distinta estructura, que es precisamente de lo que nos valdremos para formar *Ansätze* adecuados. Además de los tipos ya nombrados, también tenemos la posible estructura de renormalón IR y UV subprincipal, caso en el que la estructura queda

$$B[\tilde{\mathcal{D}}](u) = -\ln\left(1 - \frac{u}{p}\right), \ln\left(1 + \frac{u}{p}\right), \quad (2.18)$$

que generan a su vez otra forma para los coeficientes $\tilde{d}_n$.

Para observables tipo espacio de QCD, conocemos los valores exactos de los primeros tres o cuatro coeficientes d_n (y por ende los $\tilde{d}_n$). Con los términos de renormalón de las ecuaciones (2.17) y (2.18), sin embargo, podemos hacer un *Ansatz* físicamente justificado para $B[\tilde{\mathcal{D}}](u)$ como una suma de términos y ajustar el peso de estos de tal manera que el *Ansatz* genere los valores correctos para los coeficientes $\tilde{d}_n$ conocidos, en miras de así poder obtener los coeficientes de orden mayor por extensión, que es precisamente lo que busca el método.

Se espera que los coeficientes cumplan con una estructura de renormalón para la transformada de Borel del observable $\mathcal{D}(Q^2)$ cuya expansión en potencias de

u es

$$\text{B}[\mathcal{D}](u; \kappa) \equiv d_0(\kappa) + \frac{d_1(\kappa)}{1!\beta_0}u + \frac{d_2(\kappa)}{2!\beta_0^2}u^2 + \dots + \frac{d_n(\kappa)}{n!\beta_0^n}u^n + \dots \quad (2.19)$$

Teniendo los términos $\tilde{d}_n$, es esperable que a través de la relación (2.10) podamos obtener así una expansión explícita del observable buscado $\mathcal{D}(Q^2)$.

Para comprobar la coincidencia de la estructura de renormalón teórica de la transformada (2.19) pueden hacerse evaluaciones numéricas para cada uno de los tipos de renormalón y sus contribuciones a los coeficientes.

Se puede comprobar numéricamente que, por ejemplo, para los casos (2.17) (con k entero o no entero) obtenemos

$$\text{B}[\mathcal{D}](u) \sim \frac{1}{(p-u)^{k+p\beta_1/\beta_0^2}}(1 + \mathcal{O}(p-u)), \quad \frac{1}{(p+u)^{k-p\beta_1/\beta_0^2}}(1 + \mathcal{O}(p+u)),$$

donde esta estructura de las potencias obtenidas concuerda con las expectativas teóricas.

Esto ilustra que salvo correcciones menores, los coeficientes numéricamente generados nos dan transformadas que cumplen con la estructura esperada para todos los tipos de polo y con varios esquemas de renormalización.

Considerando esto, el método continua al aplicar el procedimiento de M. Neubert [12, 13], que implica construir la función de distribución característica $G_D(t)$ del observable $\mathcal{D}(Q^2)$ tal que sea la transformada inversa de Mellin de $\text{B}[\tilde{\mathcal{D}}](u)$, con lo que podremos evaluar el *leading-twist* del observable como una integral del producto de $G_D(t)/t$ y el acoplamiento correspondiente según sea el caso. Primero, sin embargo, construiremos las transformadas de Borel de la ya mencionada función de Adler, que proveerá buenos modelos genéricos de *Ansatz* para evaluar observables.

2.2 Construcción de las Transformadas para la Función de Adler

La función de Adler [6], como derivada logarítmica del correlador de corrientes vectoriales de quarks, representa un ejemplo específico de un observable de QCD tipo espacio del que tenemos mucha información para aplicar el método. Para partir, conocemos sus coeficientes d_n hasta $n = 3$ ya que su expansión perturbativa es conocida hasta $\sim a^4$. Además, por los trabajos [8, 14, 15], conocemos explícitamente la expansión de tipo *large- β_0* (LB) de la transformada de Borel de la función de Adler:

$$\text{B}[\mathcal{D}](u; \kappa)^{(\text{LB})} = \frac{32}{3} \frac{\kappa^u e^{\frac{5}{3}u}}{2-u} \sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k k}{(k-1+u)^2 (k+1-u)^2} \quad (2.20)$$

$$= 1 + \frac{\tilde{d}_1^{(\text{LB})}(\kappa)}{1!\beta_0} u + \dots + \frac{\tilde{d}_n^{(\text{LB})}(\kappa)}{n!\beta_0^n} u^n + \dots \quad (2.21)$$

Podemos extraer¹ de esto que tendremos polos de renormalón IR dobles para $p \geq 3$, simple para $p = 2$, y siempre dobles para renormalón UV. Así, y usando datos de coeficientes del mismo trabajo de Beneke, podemos escribir un *Ansatz* físicamente justificado para la transformada de Borel de la cantidad auxiliar $\tilde{\mathcal{D}}$ de la función de Adler. Así, en este *Ansatz* tendremos que considerar renormalones IR principal y sub-principal $p = 2$, junto con principales IR $p = 3$ y UV $p = 1$:

$$\text{B}[\tilde{\mathcal{D}}](u)^{(4\text{P})} = \exp(\tilde{K}u) \pi \left\{ \tilde{d}_{2,1}^{\text{IR}} \left[\frac{1}{(2-u)} + \tilde{\alpha}(-1) \ln \left(1 - \frac{u}{2} \right) \right] + \frac{\tilde{d}_{3,2}^{\text{IR}}}{(3-u)^2} + \frac{\tilde{d}_{1,2}^{\text{UV}}}{(1+u)^2} \right\} \quad (2.22)$$

Como se ve, este *Ansatz* tiene cuatro parámetros: el parámetro de escalamiento $\tilde{K}$ y los parámetros de residuo de renormalón, y las contribuciones de los renor-

¹Revisar sección IIB de Ref. [5]

malones pueden ser encontradas numéricamente como en la sección anterior. No haremos eso en este trabajo, pero nos concentraremos en el hecho de que, ya que la expansión en potencias de $B[\tilde{D}]$ de la ecuación (2.22) genera los coeficientes $\tilde{d}_j$, conociendo los primeros cuatro coeficientes en el esquema de renormalización que queramos ocupar (algo garantizado en nuestro caso por ser la función de Adler) podemos determinar los parámetros libres del *Ansatz*. Las soluciones de estos parámetros nos sirven para predecir el siguiente coeficiente perturbativo $\tilde{d}_4$ y a su vez conocer explícitamente una estimación del coeficiente d_4 hasta ahora no determinado.

En el artículo que desarrolla el método, la ecuación (2.22) fue desarrollada en el esquema de renormalización LMM, con el d_4 encontrado en el esquema $\overline{\text{MS}}$, pero podemos también construir una ecuación para el esquema de renormalización Lambert $c_2 = -4.9$ con el mismo valor de d_4 . Esto nos trae un nuevo parámetro y condición asociada a la ecuación, por lo que el *Ansatz* en este caso queda:

$$B[\tilde{\mathcal{D}}](u)^{(5P)} = \exp(\tilde{K}u)\pi \left\{ \tilde{d}_{2,1}^{\text{IR}} \left[\frac{1}{(2-u)} + \tilde{\alpha}(-1) \ln \left(1 - \frac{u}{2} \right) \right] + \frac{\tilde{d}_{3,2}^{\text{IR}}}{(3-u)^2} + \frac{\tilde{d}_{3,1}^{\text{IR}}}{(3-u)} + \frac{\tilde{d}_{1,2}^{\text{UV}}}{(1+u)^2} \right\} \quad (2.23)$$

Aplicando las cinco condiciones, los parámetros libres de (2.23) pueden ser determinados únicamente.

2.3 Obtención de $\mathcal{D}(Q^2)$ Mediante Procedimiento de Neubert

A continuación, siguiendo el método de Neubert [12, 13], construiremos la función característica $F_D(t)$ de observables $\mathcal{D}(Q^2)$ usando una forma genérica de la trans-

formada de Borel de la cantidad auxiliar correspondiente $\tilde{\mathcal{D}}$. La función característica es aquella que cumple que la cantidad

$$\mathcal{D}(Q^2)_{\text{res}} = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} F_D(t) a(tQ^2) \quad (2.24)$$

corresponde al *leading-twist* del observable $\mathcal{D}(Q^2)$ para $t > 0$ obtenido por resumación (lo que denotamos por ‘res’). Esto significa que, al expandir en series de Taylor el acoplamiento $a(tQ^2)$ respecto a $\ln(tQ^2)$ alrededor de $\ln(\kappa Q^2)$, es decir, en derivadas logarítmicas $\tilde{a}_{n+1}(\kappa Q^2)$, esto nos generará la expansión perturbativa correcta de la ecuación (2.7) para $\mathcal{D}(Q^2)$. Con esto, la función característica también debe satisfacer:

$$(-\beta_0)^n \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} F_D(t) \ln^n \frac{t}{\kappa} = \tilde{d}_n(\kappa) \quad (2.25)$$

donde $(n = 0, 1, 2, \dots)$. Dadas estas condiciones, podemos tomar $\kappa = 1$ y, considerando la expansión de $B[\tilde{\mathcal{D}}](u)$ (2.15), podemos obtener que

$$B[\tilde{\mathcal{D}}](u) = \int_0^{+\infty} \frac{dt}{t} F_D(t) t^{-u}. \quad (2.26)$$

Esto corresponde justamente a la transformada de Mellin de la función característica $F_D(t)$. Así, la transformada inversa de Mellin de (2.26) produce una expresión para la función característica en términos de la transformada de Borel de la cantidad auxiliar:

$$F_D(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{u_0 - i\infty}^{u_0 + i\infty} B[\tilde{\mathcal{D}}](u) t^u du, \quad (2.27)$$

integral que se evalúa en el plano complejo u , con la restricción de que u_0 sea cualquier valor real para el que la integral (2.26) esté definida. Si tomamos

$u_0 = +1$ y reescribimos la integral con $u = 1 - iz$, tendremos:

$$F_D(t) = \frac{t}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} B[\tilde{\mathcal{D}}](u = 1 - iz) e^{-iz \ln t} dz \quad (2.28)$$

Dependiendo de la forma de $B[\tilde{\mathcal{D}}]$, las integrales para $F_D(t)$ podrán ser evaluadas directamente siguiendo algún contorno apropiado. Siguiendo los patrones vistos en la construcción para la función de Adler en la sección anterior, podemos tomar un caso genérico de la transformada de Borel

$$B[\tilde{\mathcal{D}}](u) = \exp(\tilde{K}u) \pi \left\{ \tilde{d}_{2,1}^{\text{IR}} \left[\frac{1}{(2-u)} + \tilde{\alpha}(-1) \ln \left(1 - \frac{u}{2} \right) \right] + \frac{\tilde{d}_{N,2}^{\text{IR}}}{(N-u)^2} + \frac{\tilde{d}_{N,1}^{\text{IR}}}{(N-u)} + \frac{\tilde{d}_{M,2}^{\text{UV}}}{(M+u)^2} + \frac{\tilde{d}_{M,1}^{\text{UV}}}{(M+u)} \right\}, \quad (2.29)$$

podemos encontrar usando (2.24) y (2.28) que para el observable $\mathcal{D}(Q^2)$ se obtiene

$$\mathcal{D}(Q^2)_{\text{res}} = \int_0^\infty \frac{dt}{t} G_D(t) a(te^{-\tilde{K}} Q^2) + \int_0^\infty \frac{dt}{t} G_D^{(\text{SL})}(t) [a(te^{-\tilde{K}} Q^2) - a(e^{-\tilde{K}} Q^2)], \quad (2.30)$$

Donde las funciones características G_D serían

$$G_D(t) = G_D^{(-)}(t) \Theta(1-t) + G_D^{(+)}(t) \Theta(t-1), \quad (2.31)$$

$$G_D^{(-)}(t) = \pi t^2 [\tilde{d}_{2,1}^{\text{IR}} - \tilde{d}_{N,2}^{\text{IR}} t^{N-2} \ln t + \tilde{d}_{N,1}^{\text{IR}} t^{N-2}], \quad (2.32)$$

$$G_D^{(+)}(t) = \frac{\pi}{t^M} [\tilde{d}_{M,2}^{\text{UV}} \ln t + \tilde{d}_{M,1}^{\text{UV}}], \quad (2.33)$$

$$G_D^{\text{SL}}(t) = -\tilde{\alpha} \tilde{d}_{2,1}^{\text{IR}} \frac{\pi t^2}{\ln t} \Theta(1-t), \quad (2.34)$$

donde Θ es la función escalón de Heaviside. La función característica $G_D(t) = F_D(e^{-\tilde{K}} t)$ se obtiene evaluando (2.28) usando un camino de z a través del semi-plano superior o inferior dependiendo si $t < 1$ o $t > 1$ respectivamente. Para

$G_D^{(\text{SL})}$, por otro lado, el camino se cierra por arriba y se integra evitando el corte. Así, (2.30) queda:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(Q^2)_{\text{res}} = & \int_0^1 \frac{dt}{t} G_D^{(-)}(t) a(te^{-\tilde{K}} Q^2) + \int_1^\infty \frac{dt}{t} G_D^{(+)}(t) a(te^{-\tilde{K}} Q^2) \\ & + \int_0^1 \frac{dt}{t} G_D^{(\text{SL})}(t) [a(te^{-\tilde{K}} Q^2) - a(e^{-\tilde{K}} Q^2)]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

En resumen entonces, para evaluar (el *leading-twist* de) un observable $\mathcal{D}(Q^2)$, evaluaríamos (2.35) usando (2.32-2.34) según los parámetros obtenidos de la transformada de Borel (2.29) construida para ese observable con los N, M correspondientes. Ahora bien, aquí es donde nos toparíamos con los problemas de pQCD si quisiéramos ocupar esa técnica, pues la integral (2.30) es ambigua para $Q^2 > 0$ por las singularidades de Landau existentes en el acople de pQCD $a(te^{-\tilde{K}} Q^2)$ para valores bajos de t . Si quisiéramos persistir, deberíamos evaluar con $a(te^{-\tilde{K}} Q^2 + i\epsilon)$ y tomar, por ejemplo, el valor principal

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(Q^2)_{\text{pQCDres}} = & \text{Re} \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t} G_D(t) a(te^{-\tilde{K}} Q^2 + i\epsilon) \right. \\ & \left. + \int_0^\infty \frac{dt}{t} G_D^{(\text{SL})}(t) [a(te^{-\tilde{K}} Q^2 + i\epsilon) - a(e^{-\tilde{K}} Q^2 + i\epsilon)] \right\}, \end{aligned} \quad (2.36)$$

y la ambigüedad sería proporcional a la parte imaginaria:

$$\begin{aligned} \delta \mathcal{D}(Q^2)_{\text{pQCDres}} = & \pm \frac{1}{\pi} \text{Im} \left\{ \int_0^\infty \frac{dt}{t} G_D(t) a(te^{-\tilde{K}} Q^2 + i\epsilon) \right. \\ & \left. + \int_0^\infty \frac{dt}{t} G_D^{(\text{SL})}(t) [a(te^{-\tilde{K}} Q^2 + i\epsilon) - a(e^{-\tilde{K}} Q^2 + i\epsilon)] \right\}. \end{aligned} \quad (2.37)$$

Sin embargo, sabemos que existen variantes de la formulación de QCD (AQCD) que no tienen estas singularidades, ya que sus acoplamientos son holomórficos fuera del semieje negativo, lo que posibilita obtener el observable sin ambigüedades al integrar. A continuación, evaluaremos justamente en dos variantes de AQCD.

Capítulo 3

Cálculos y Comparaciones

3.1 Aplicando el Método en AQCD

Como mencionamos en el primer capítulo, ya que el acoplamiento de pQCD posee singularidades poco convenientes en el semieje positivo, si queremos trabajar en el sector (de bajas energías) cercano a estas singularidades tendremos que optar por versiones holomórficas de QCD (AQCD). En ellas, el acoplamiento $\mathcal{A}(Q^2)$ es holomórfico (es decir que es complejo-diferenciable en la vecindad de cada punto) en el plano complejo Q^2 fuera del semieje negativo.

Exploraremos la aplicación² del método visto en el capítulo anterior en dos variantes de este tipo, $2\delta\text{AQCD}$ [16] y $3\delta\text{AQCD}$ [17], para lograr una resumación sin ambigüedades del *leading-twist* de la función de Adler $\mathcal{D}(Q^2)$. En estas variantes de QCD, la mayoría de las relaciones que vimos en capítulos anteriores se siguen cumpliendo tomando sustituciones de la constante de acoplamiento ($a \rightarrow \mathcal{A}$), salvo que los $\mathcal{A}_n$ involucrados en la expansión de potencias del observable no son simplemente potencias de $\mathcal{A}$. Para la función de Adler tendremos

²También encontrada en la Ref.[5].

$$\mathcal{D}_{\text{AQCD}}(Q^2) = d_0 \mathcal{A}(\mu^2) + d_1(\kappa) \mathcal{A}_2(\mu^2) + d_2(\kappa) \mathcal{A}_3(\mu^2) + \cdots + d_n(\kappa) \mathcal{A}_{n+1}(\mu^2) + \dots (3.1)$$

$$= \tilde{d}_0 \mathcal{A}(\mu^2) + \tilde{d}_1(\kappa) \tilde{\mathcal{A}}_2(\mu^2) + \tilde{d}_2(\kappa) \tilde{\mathcal{A}}_3(\mu^2) + \cdots + \tilde{d}_n(\kappa) \tilde{\mathcal{A}}_{n+1}(\mu^2) + \dots (3.2)$$

donde $\kappa \equiv \mu^2/Q^2$. Las definiciones de los acoplamientos $\mathcal{A}_k, \tilde{\mathcal{A}}_k$ pueden encontrarse en las referencias donde se desarrollan estos esquemas de AQCD, pero de momento notemos que los acoplamientos $\tilde{\mathcal{A}}_k$ son derivadas logarítmicas de $\mathcal{A}$, de manera análoga a la ecuación (2.2). En estas variantes, las series (3.1) y (3.2) no tendrán singularidades de Landau para Q^2 bajo ($0 \leq Q^2 \lesssim 1 \text{ GeV}^2$), al contrario de lo que sucede en pQCD, aunque siguen siendo series divergentes.

Haciendo la resumación de $\mathcal{D}_{\text{AQCD}}(Q^2)$ siguiendo lo visto en la sección 2.3, en particular la ecuación (2.35), obtenemos lo mismo que antes con la simple sustitución del acoplamiento a por $\mathcal{A}$:

$$\begin{aligned} \mathcal{D}(Q^2)_{\mathcal{A} \text{ res}} = & \int_0^1 \frac{dt}{t} G_D^{(-)}(t) \mathcal{A}(te^{-\tilde{K}} Q^2) + \int_1^\infty \frac{dt}{t} G_D^{(+)}(t) \mathcal{A}(te^{-\tilde{K}} Q^2) \\ & + \int_0^1 \frac{dt}{t} G_D^{(\text{SL})}(t) [\mathcal{A}(te^{-\tilde{K}} Q^2) - \mathcal{A}(e^{-\tilde{K}} Q^2)]. \end{aligned} \quad (3.3)$$

Estas integrales, al contrario de las de pQCD, no tienen ambigüedades ya que el acoplamiento en AQCD no tiene singularidades de Landau. Esto significa que podemos evaluar directamente sin necesitar del valor principal y la corrección de ambigüedad mostrada en las expresiones (2.36) y (2.37).

En la figura 3.1, vemos las funciones de Adler $\mathcal{D}(Q^2)_{\mathcal{A} \text{ res}}$ obtenidas [5] usando el método explorado en este trabajo, presentadas en función de Q para Q^2 positivos, y usando las dos variantes de AQCD mencionadas con sus respectivos esquemas de renormalización. En ambos gráficos, además, se representa para comparar la versión pQCD correspondiente, basadas en la resumación de la ex-

presión (2.36) considerando la incerteza de la expresión (2.37), pero solo desde $Q \geq 0.6$ GeV pues para valores más bajos la curva es errática.

Podemos ver que ambas aplicaciones del método Cvetič coinciden con el comportamiento perturbativo para $Q \gtrsim 2$ GeV y relativamente bien entre sí para valores menores, con la gran diferencia existiendo en el comportamiento para $Q < 0.5$ GeV, ya que el caso del modelo $2\delta\mathcal{A}\text{QCD}$ la función de Adler tiende a un valor no nulo, mientras en $3\delta\mathcal{A}\text{QCD}$ tiende a cero. Este comportamiento podría ser contrastado con cálculos de QCD de redes para obtener una idea de cuál de las dos opciones tiene más sentido.

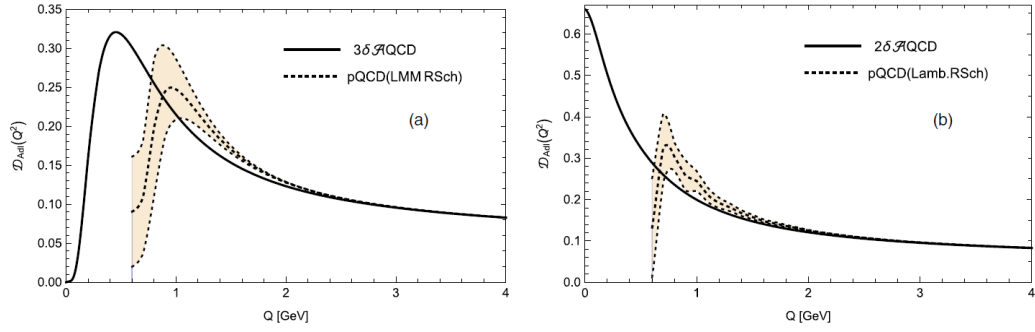


Figura 3.1: Función de Adler resumada según ec. (3.3), como función de Q para Q^2 positivos, para $3\delta\mathcal{A}\text{QCD}$ y $2\delta\mathcal{A}\text{QCD}$ en sus esquemas de renormalización correspondientes (LMM y Lambert, resp.). En ambos casos se inserta también el resultado correspondiente para pQCD según ecs. (2.36) y (2.37). Gráficos obtenidos de Ref. [5].

3.2 Comparación de Métodos

Ahora, veremos algunas curvas obtenidas al evaluar la función de Adler $\mathcal{D}(Q^2)$ con el método estudiado y algunos otros, comentando las características observadas y algunas similitudes y diferencias existentes entre ellos.

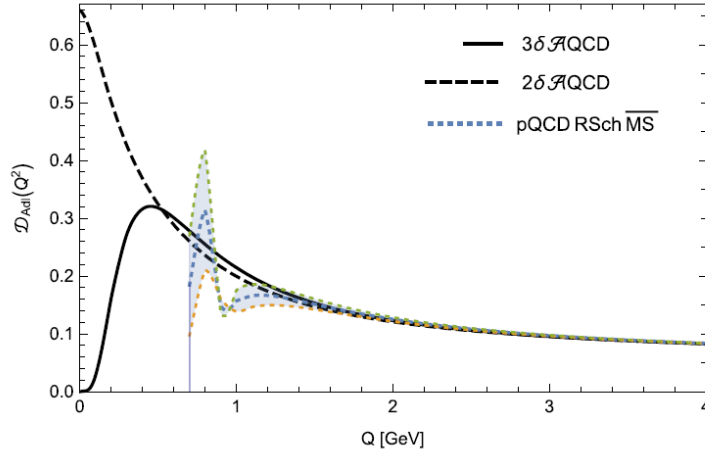


Figura 3.2: Curvas para la Función de Adler obtenidas con AQCD de la figura 3.1. Para comparar, se incluye el resultado de pQCD según ecs. (2.36) y (2.37), pero esta vez solo en el esquema $\overline{\text{MS}}$. Gráfico obtenido de Ref. [5].

En la figura 3.2, podemos estudiar en conjunto las curvas obtenidas para la función de Adler $\mathcal{D}(Q^2)_{\text{Ares}}$ de la figura 3.1 en ambas variantes de AQCD, junto con el resultado para pQCD según las ecuaciones (2.36) y (2.37) esta vez en el esquema $\overline{\text{MS}}$. Aquí se ilustra aún mejor la marcada diferencia entre los métodos de AQCD usados que ocurre para $Q < 0.5$ GeV, con su tendencia opuesta al acercarse a $Q \sim 0$ GeV.

En la figura 3.3, por otro lado, muestra una comparación hecha entre lo obtenido con $3\delta\text{AQCD}$ para la función de Adler $\mathcal{D}(Q^2)_{\text{Ares}}$ de la ecuación (3.3) con lo obtenido por un método alternativo tratado en la sección IV de [5], que es una extensión del método de aproximantes diagonales de Padé (dPA). Como se ve en este y otros gráficos en esa misma sección del artículo, utilizando dPA se

halla una muy cercana coincidencia consistente con lo obtenido por resumación en todos los modelos de AQCD con el método Cvetič. Cabe notar que, al contrario que AQCD, el método dPA genera secuencias convergentes, y *estas* convergen precisamente a los valores del observable obtenidos por resumación.

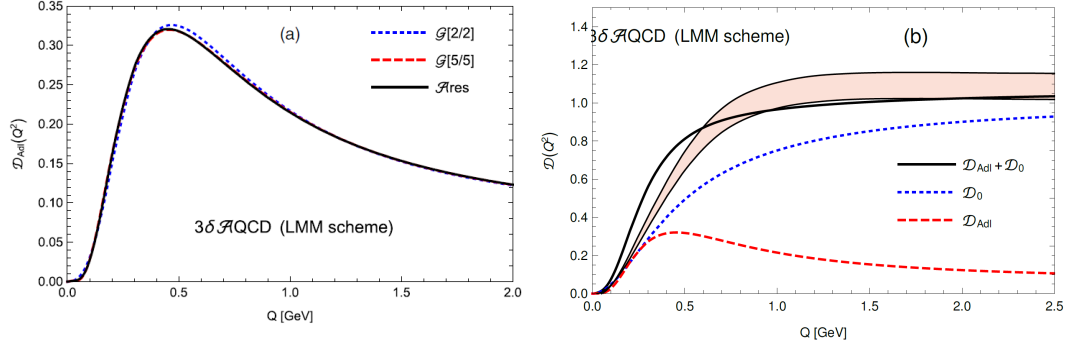


Figura 3.3: (a) Función de Adler resumada según ec. (3.3), como función de Q para Q^2 positivos, para $3\delta\text{AQCD}$ junto con evaluación de la misma con el método dPA extendido para valores $M = 2, 5$. Gráfico obtenido de Ref. [5]. (b) Suma del *leading-twist* $\mathcal{D}_{\text{Adl}}(Q^2)$ de (a) y de la contribución efectiva de *higher-twist* $\mathcal{D}_0(Q^2)$, donde la expresión para $\mathcal{D}_0(Q^2)$ es la usada por Nesterenko [10, 18]. El sector coloreado es la banda experimental.

La figura 3.4, por su parte, corresponde a lo obtenido por Nesterenko para la función de Adler junto con su predicción experimental, aunque el gráfico mostrado es para la versión *masiva* de esta función (distinta a la sin masa utilizada en este trabajo), e incluye la contribución efectiva del *higher-twist* [10, 18]. Es interesante notar que pese a esta diferencia (notar los valores), lo obtenido sí coincide en un aspecto con el método estudiado (al menos para $3\delta\text{AQCD}$), y es en que $\mathcal{D}(Q^2)$ tiende aquí también a cero para $Q \rightarrow 0$ GeV como sucede en las figuras 3.2 y 3.3.

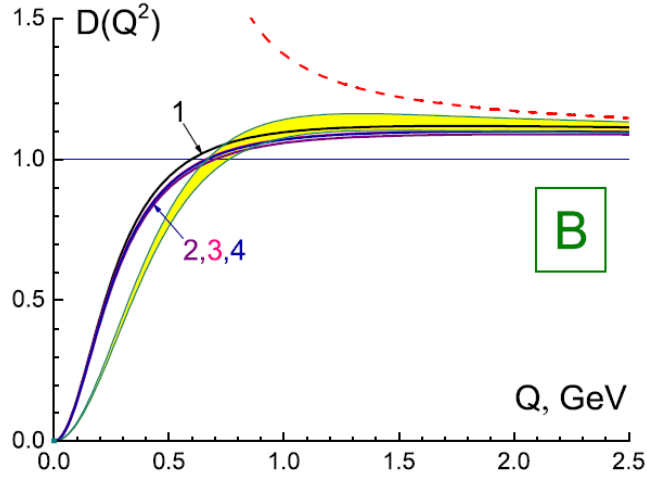


Figura 3.4: Función de Adler calculada usando el método expuesto por Nesterenko [10] para distintos niveles de loop. En amarillo la predicción para $\mathcal{D}(Q^2)$ y en rojo punteado su aproximación perturbativa. Gráfico proveniente del mismo artículo.

Finalmente, en la figura 3.5, vemos la función de Adler obtenida con un método aún más reciente [19] que no se vale de la expansión de productos de operadores como el estudiado por nosotros sino que, también basándose en renormalones, ocupa una técnica de resurgencia para tratar las singularidades en la transformada de Borel e incluye efectos de *higher-twist*. Notemos que hay una gran coincidencia de lo obtenido para la función y los datos experimentales, hasta que se llega a la región de $Q \sim 0.7$ GeV donde rápidamente la aproximación deja de funcionar. De las evaluaciones de la función de Adler mostradas en esta sección, es la única que no llega hasta $Q \sim 0$ GeV por lo que no podemos comparar su comportamiento en esa vecindad con las demás. Claramente predice bien el observable, pero no puede evaluar en valores muy bajos de Q^2 como podríamos requerir.

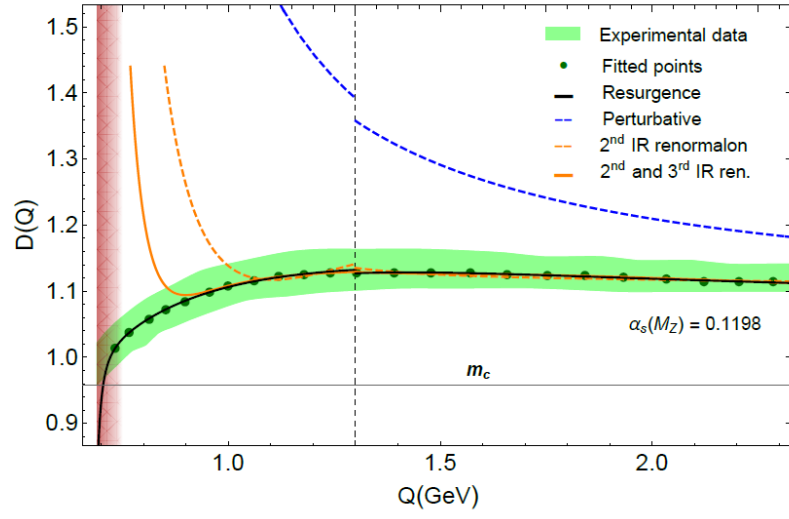


Figura 3.5: Función de Adler obtenida por A. Maiezza y J.C. Vasquez [19] con un método de resurgencia para el rango $\sim 0.7\text{-}2.5$ GeV. En verde la predicción experimental; en azul la predicción perturbativa; en negro el resultado obtenido por resurgencia; los puntos representan el ajuste para fijar parámetros; las líneas anaranjadas son lo obtenido usando solo uno o dos tipos de renormalón; la zona roja corresponde a la región donde el método deja de funcionar. Gráfico obtenido del mismo artículo.

Capítulo 4

Conclusiones, Alcances y Futuro

En este trabajo, conocimos la motivación para buscar alternativas no perturbativas para estudiar QCD en bajas energías, y exploramos en particular un método específico [5] que ocupa renormalones para generar las expresiones de observables de interés, valiéndose también de modelos de AQCD [11, 16, 17] para eliminar ambigüedades.

El método consistió en, primero, construir la transformada de Borel de nuestro observable $\mathcal{D}(Q^2)$ a través de una cantidad auxiliar $\tilde{\mathcal{D}}(Q^2)$ y generando *Ansätze* basados en la estructura de renormalón que suelen tener los observables. Luego, con el método de Neubert [12, 13], obtuvimos las funciones de distribución características que permiten resumar las expresiones para evaluar el observable sin las ambigüedades de la integración en pQCD.

Podemos concluir con lo visto, que el método estudiado cumple con las características que buscábamos para evaluar satisfactoriamente las cantidades $\mathcal{D}(Q^2)$, pues la integración deja de ser ambigua al usar AQCD, el acoplamiento

calza con el comportamiento holomórfico esperado del observable, además de que obtenemos la estructura de renormalón completa para la transformada de este, generando los coeficientes de expansión $d_n, \tilde{d}_n$ desconocidos a partir de los conocidos. También, evaluamos un observable particular (la función de Adler) en dos modelos de AQCD distintos, mostrando que es posible aún si hay divergencia asintótica por el crecimiento de los coeficientes de expansión, que es lo que queríamos lograr.

Por último, comparamos resultados no solo entre los modelos de AQCD probados, sino que también con funciones de Adler generadas por otros métodos ([10, 19]), notando algunas diferencias y similitudes con el comportamiento exhibido, junto con corroborar el comportamiento de nuestro método viendo que coincide muy bien con lo obtenido mediante el de aproximantes diagonales de Padé (dPA), coincidencia que da crédito al modelo propuesto.

Queda entonces, como trabajo futuro, evaluar otros observables de QCD cuya forma de renormalón es conocida (como la regla de suma polarizada de Bjorken) con el método Cvetič, y posiblemente contrastar lo obtenido con datos experimentales de esas cantidades.

Bibliografia

- [1] M. Gell-Mann. A schematic model of baryons and mesons. *Physics Letters*, 8:214–215, 2 1964.
- [2] H. Fritzsche, M. Gell-Mann, and H. Leutwyler. Advantages of the color octet gluon picture. *Physics Letters B*, 47:365–368, 11 1973.
- [3] David J. Gross and Frank Wilczek. Ultraviolet behavior of non-abelian gauge theories. *Physical Review Letters*, 30:1343–1346, 6 1973.
- [4] H. David Politzer. Reliable perturbative results for strong interactions? *Physical Review Letters*, 30:1346–1349, 6 1973.
- [5] Gorazd Cvetič. Renormalon-motivated evaluation of QCD observables. *Physical Review D*, 99:014028, 1 2019.
- [6] Stephen L. Adler. Some simple vacuum-polarization phenomenology: $e^+e^- \rightarrow$ hadrons; the muonic-atom x-ray discrepancy and $g_\mu - 2$. *Physical Review D*, 10:3714–3728, 12 1974.
- [7] G. 't Hooft. Can we make sense out of “quantum chromodynamics”? *The Whys of Subnuclear Physics*, page 943–982, 1979.
- [8] M. Beneke. Renormalons. *Phys. Rept.*, 317:1–142, 1999.
- [9] D. V. Shirkov and I. L. Solovtsov. Analytic QCD running coupling with finite IR behaviour and universal $\{\bar{\alpha}\}_s(0)$ value. 4 1996.

- [10] A. V. Nesterenko. Adler function in the analytic approach to QCD. *eConf*, C0706044:25, 2007.
- [11] Gorazd Cvetič and Cristian Valenzuela. Analytic QCD: A Short review. *Braz. J. Phys.*, 38:371–380, 2008.
- [12] Matthias Neubert. Scale setting in qcd and the momentum flow in feynman diagrams. *Physical Review D*, 51:5924–5941, 5 1995.
- [13] Matthias Neubert. Resummation of renormalon chains for cross-sections and inclusive decay rates. 2 1995.
- [14] D. J. Broadhurst. Large expansion of QED: asymptotic photon propagator and contributions to the muon anomaly, for any number of loops. *Zeitschrift für Physik C Particles and Fields*, 58:339–345, 6 1993.
- [15] D.J. Broadhurst and A.L. Kataev. Connections between deep-inelastic and annihilation processes at next-to-next-to-leading order and beyond. *Physics Letters B*, 315:179–187, 9 1993.
- [16] César Ayala, Carlos Contreras, and Gorazd Cvetič. Extended analytic QCD model with perturbative QCD behavior at high momenta. *Physical Review D*, 85:114043, 6 2012.
- [17] César Ayala, Gorazd Cvetič, Reinhart Kögerler, and Igor Kondrashuk. Nearly perturbative lattice-motivated QCD coupling with zero IR limit. *Journal of Physics G: Nuclear and Particle Physics*, 45:035001, 3 2018.
- [18] Alexander V. Nesterenko. *Strong interactions in spacelike and timelike domains: Dispersive approach*. Elsevier, 2016.
- [19] Alessio Maiezza and Juan Carlos Vasquez. Resurgence of the qcd adler function. *Physics Letters B*, 817:136338, 6 2021.

- [20] A.V. Nesterenko. On the low-energy behavior of the adler function. *Nuclear Physics B - Proceedings Supplements*, 186:207–210, 1 2009.
- [21] G. Parisi. Xi. the borel transform and the renormalization group. *Physics Reports*, 49:215–219, 1 1979.
- [22] David J. Griffiths. *Introduction to elementary particles*. Wiley-VCH, 2017.
- [23] Bogoliubov N. N. and D. V. Shirkov. *Introduction to the theory of Quantized Fields*. John Wiley, 1980.