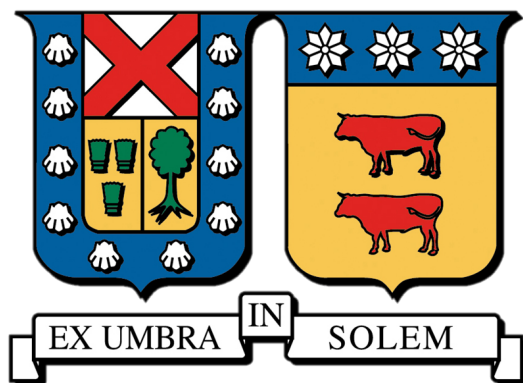


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE FÍSICA



El rol del momento angular en Relatividad General: posibles
implicaciones en la formación de estructuras.

Claudia Álvarez Rojas

TESINA PARA OPTAR AL GRADO DE LA LICENCIATURA EN ASTROFÍSICA

PROFESOR GUÍA: Erick C. Pastén

21 de enero de 2026



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título ☐ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: *El rol del momento angular en Relatividad General: posibles implicaciones en la formación de estructuras.*

Nombre del candidato(a): Claudia Álvarez Rojas.

Carrera / Grado: Licenciatura en Astrofísica

Campus: Casa Central. **Departamento:** Departamento de Física.

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Erick Sebastián Contreras Pasten, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☒ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 15/02/2026 **Firma:** _____

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 04/02/2026 **Firma:** _____

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

Abstract

Este trabajo ofrece una exploración conceptual de las escalas temporales de caída libre en los espacio-tiempos de Schwarzschild y Kerr, con el objetivo de comprender cómo la Relatividad General modifica el colapso gravitacional en comparación con la intuición newtoniana. En lugar de centrarnos en un modelo astrofísico completo, tratamos el caso de los agujeros negros como un escenario controlado en el que el rol de la energía, el momento angular y la rotación del espacio-tiempo puede aislarse e interpretarse físicamente. Al examinar cómo estas cantidades generan distintos regímenes locales atractivos y repulsivos, y cómo alteran el tiempo efectivo de caída integrado hacia distintas órbitas, ponemos de manifiesto mecanismos relativistas capaces de acelerar o retardar el colapso en relación con el comportamiento esperado en el marco newtoniano.

Sostenemos que estos efectos aportan información física relevante a una cuestión más amplia: hasta qué punto la cinemática relativista y la dinámica inducida por el spin pueden acortar las escalas temporales características de crecimiento en sistemas autogravitantes. Si bien nuestro análisis se mantiene en el nivel de la dinámica de partículas de prueba, está motivado por la idea de que la acreción en agujeros negros y la formación de estructuras cósmicas comparten una base conceptual común, arraigada en la caída gravitacional. A la luz de reportes recientes sobre la existencia de estructuras masivas inesperadamente tempranas, y en conexión con estudios que muestran un crecimiento amplificado de velocidades peculiares en contextos relativistas, sugerimos que revisar las escalas temporales de colapso desde una perspectiva de Relatividad General puede constituir una contribución físicamente significativa a las discusiones cosmológicas actuales.

Agradecimientos

Deseo expresar mi más sincero agradecimiento a mi madre, quien ha sido el cimiento sobre el cual he construido cada uno de mis pasos. A mis hermanas, por su amor y apoyo incondicional. Gracias por creer en mí incluso cuando yo no lo hacía, y por impulsarme siempre a seguir adelante.

A mis compañeros de cuatro patas, por ser esa fuerza silenciosa que me sostuvo en los momentos más difíciles.

Al Dr. Erick C. Pastén, mi profesor guía, por aceptar este desafío, superando con creces las responsabilidades de su labor, convirtiéndose en un referente para mí, tanto en lo académico como en su calidad humana.

A mis amigos, cuya compañía durante estos años lejos de mi hogar fue esencial, y a quienes acompañaron este proceso desde distintos lugares con su amistad y comprensión.

A mi gato, Artemis.

Índice general

1. Introducción	1
2. Elementos de Relatividad General	4
2.1. El espacio tiempo	4
2.1.1. Intervalo espacio-temporal	5
2.1.2. Tiempo propio y tiempo coordinado	5
2.2. Geodésicas	6
2.2.1. Formalismo lagrangiano para las geodésicas	7
2.3. Simetrías del espacio-tiempo y vectores de Killing	8
2.4. Curvatura del espacio-tiempo y ecuaciones de Einstein	9
3. Dinámica en la métrica de Schwarzschild	11
3.1. Derivación matemática	11
3.2. El radio de Schwarzschild	12
3.3. Dinámica de partículas en Schwarzschild	13
3.3.1. Constantes de movimiento	13
3.3.2. Geodésicas y ecuación radial	15
3.3.3. Potencial efectivo	16
3.4. Órbitas circulares y estabilidad	16
3.4.1. La órbita circular más interna estable (ISCO)	17
3.5. Tiempos de caída	19
3.5.1. Tiempo propio	19
3.5.2. Tiempo coordinado	20
3.5.3. Cálculo de escalas temporales y análisis	21
4. Dinámica en la métrica de Kerr	23
4.1. Una solución elegante	23
4.2. Estructura geométrica del espacio-tiempo de Kerr	24

4.2.1.	La métrica en coordenadas de Boyer–Lindquist	24
4.2.2.	Horizontes	25
4.2.3.	La ergosfera	25
4.3.	Dinámica de partículas en el espacio–tiempo de Kerr	26
4.3.1.	Constantes de movimiento	27
4.3.2.	Momento angular y ZAMO	28
4.3.3.	Geodésicas ecuatoriales	30
4.3.4.	El potencial efectivo	31
4.4.	Órbitas circulares e ISCO	31
4.4.1.	La ISCO	32
4.5.	Tiempos de caída	34
4.6.	Complejidades de la dinámica y normalización por observadores ZAMO	34
5.	El rol del momento angular en la dinámica relativista	37
5.1.	Análisis heurístico del potencial efectivo radial en Kerr	37
5.2.	Análisis de casos particulares	38
5.2.1.	Agujero negro de Schwarzschild ($a = 0$)	39
5.2.2.	Partícula sin momento angular intrínseco ($L = 0$)	39
5.2.3.	Partícula en movimiento críticamente ligado ($E = 1$)	40
5.3.	Análisis del caso general	42
5.4.	Análisis de tiempos de caída	47
5.5.	Origen energético y rotacional, de la reducción de τ	54
5.6.	Relación entre régimen local y tiempo de caída	57
5.7.	Casos astrofísicos reales de interés	61
5.7.1.	Discos de acreción alrededor de agujeros negros	61
5.7.2.	Agujeros negros semilla en halos protogalácticos	62
5.7.3.	EMRIs	63
5.8.	Relación con otros efectos relativistas y con el formalismo $1 + 3$ covariante	63
6.	Conclusiones	65
7.	Ciencia e Innovación	67
	Bibliografía	69

Capítulo 1

Introducción

Las observaciones realizadas por el *James Webb Space Telescope* (JWST) han extendido de manera significativa el censo de galaxias y núcleos compactos a altos redshifts ($z \gtrsim 7\text{--}10$). En particular, estos datos han revelado no solo una abundancia de galaxias brillantes mayor a la esperada, sino también una población de fuentes extremadamente compactas y rojas, conocidas como *little red dots* (LRDs). El muestreo CEERS en el rango $z \sim 8,5\text{--}14,5$ muestra que la abundancia de galaxias brillantes en este intervalo excede de forma considerable las predicciones de la mayoría de los modelos teóricos utilizados como referencia (Labbé et al., 2023; Naidu et al., 2022; Boylan-Kolchin, 2023). Estos sistemas parecen haber alcanzado estados altamente compactos y masivos en escalas temporales muy cortas desde el Big Bang, lo que plantea interrogantes directas sobre los tiempos característicos de colapso y ensamblaje gravitacional en el Universo temprano.

De forma complementaria, análisis recientes de funciones de masa estelar basados en datos de JWST han identificado la aparición de una población denominada “UV-roja”, poco representada en selecciones previas con el *Hubble Space Telescope* y dominante en el extremo masivo del catálogo al menos hasta $z \sim 6$ (Weibel et al., 2024). Este resultado tiene implicancias directas para la inferencia de masas, densidades y tasas de formación estelar en épocas tempranas. En conjunto, estos hallazgos vuelven más exigente la estimación de tiempos de formación, ya que la presencia de objetos muy masivos y altamente compactos a redshifts elevados sugiere que los procesos de crecimiento deben operar con eficiencias particularmente altas. Alternativamente, es posible que las conversiones observacionales entre luminosidad y masa presenten sesgos relevantes, o bien que la dinámica efectiva utilizada para estimar dichos tiempos esté omitiendo efectos capaces de alterarlos de forma significativa.

Numerosos trabajos recientes han explorado posibles explicaciones para la naturaleza física de los *little red dots*. Observaciones espectroscópicas y análisis de selección fotométrica indican que estos objetos constituyen una población abundante a $z \gtrsim 4\text{--}6$, caracterizada por tamaños extremadamente pequeños y distribuciones espectrales peculiares, con colores óptico–NIR muy rojos y, en algunos casos, emisión UV relativamente azul (Matthee et al., 2024). Estas propiedades han abierto un debate central sobre su interpretación física, en particular sobre si corresponden mayoritariamente a núcleos activos de galaxias oscurecidos por polvo, o bien a sistemas estelares ultracompactos capaces de imitar observacionalmente firmas típicas de AGN.

En los últimos años han surgido además evidencias directas de agujeros negros masivos tempranos asociados a sistemas compactos rojos. Un ejemplo destacado es la detección de un LRD a $z = 7,3$ con una masa de agujero negro del orden de $M_{\text{BH}} \sim 5 \times 10^8 M_{\odot}$, lo que ejerce una fuerte

presión sobre escenarios de crecimiento lento si se interpreta como un agujero negro supermasivo ya presente en una etapa temprana del Universo (Schindler et al., 2025). En esta misma línea, otros estudios han discutido la posibilidad de episodios de acreción super-Eddington como un canal relevante para explicar la población de AGN jóvenes detectados por JWST (Suh et al., 2024). Por otro lado, bajo una interpretación puramente estelar de los LRDs, se ha mostrado que estos sistemas residen en un régimen dinámico extremo, en el cual los tiempos de colisión entre estrellas pueden ser más cortos que los tiempos de relajación, favoreciendo inestabilidades y la formación temprana de agujeros negros masivos (Escala et al., 2025).

Desde un punto de vista conceptual, la tensión que emerge no constituye una contradicción directa del modelo Λ CDM, sino una dificultad práctica asociada al intervalo temporal disponible. El tiempo transcurrido entre recombinación y $z \sim 10$ es corto, y cualquier incremento en las masas o densidades inferidas endurece de manera considerable los requisitos sobre enfriamiento del gas, eficiencia de formación estelar, retroalimentación y crecimiento temprano de agujeros negros. Esta problemática ha sido discutida en la literatura como un problema de *assembly timescales* y de interpretación física del censo temprano de galaxias (Boylan-Kolchin, 2023; Mason et al., 2023). Una fracción importante de los trabajos ha buscado aliviar estas tensiones revisando los supuestos astronómicos utilizados en la inferencia de propiedades físicas, por ejemplo mediante variaciones en la función inicial de masa estelar, el contenido de polvo o las historias de formación estelar, lo que puede modificar de manera sustancial las masas estelares inferidas a partir de fotometría JWST (Woodrum et al., 2024; Cueto, Elie R. et al., 2025).

Desde el punto de vista teórico, la formación de estructuras cosmológicas se describe mayoritariamente mediante el crecimiento jerárquico de perturbaciones de densidad sobre un fondo FLRW en expansión, utilizando dinámicas newtonianas o aproximaciones relativistas válidas en el régimen de campo débil (Peebles, 1980; Springel et al., 2005). Este enfoque ha demostrado ser altamente exitoso en la descripción estadística de la estructura a gran escala del Universo, pero no está diseñado para explorar regímenes no perturbativos en los que la cinemática relativista, en particular los acoplamientos entre energía, momento angular y rotación del espacio-tiempo, pueda alterar cualitativamente trayectorias y tiempos de infall. En este contexto, aunque la Relatividad General está presente en muchos modelos cosmológicos modernos, el estudio explícito de sus efectos cinemáticos sobre los tiempos característicos de caída permanece relativamente inexplorado.

Con el objetivo de contribuir conceptualmente a esta problemática, en este trabajo estudiamos la caída libre de partículas de prueba en los espacio-tiempos de Schwarzschild y Kerr como laboratorios teóricos controlados. Estos espacio-tiempos permiten aislar de manera clara mecanismos relativistas capaces de acelerar o retardar procesos de colapso gravitacional en comparación con la intuición newtoniana. Mientras que Schwarzschild describe el campo gravitacional exterior de un objeto no rotante, el espacio-tiempo de Kerr incorpora efectos genuinamente relativistas asociados a la rotación, como el arrastre de referencia (*frame dragging*). En este contexto, el análisis del movimiento radial y de los tiempos de caída libre proporciona información clave sobre la forma en que la curvatura del espacio-tiempo modula la dinámica de partículas de prueba en el régimen de campo fuerte.

El análisis desarrollado se basa en el formalismo del potencial efectivo, que permite separar de manera transparente las contribuciones atractivas y repulsivas al movimiento radial. En el espacio-tiempo de Kerr emergen acoplamientos no triviales entre la energía E , el momento angular L de la partícula y el parámetro de rotación a , incluyendo la modificación, e incluso inversión, del rol clásico de la barrera centrífuga. En particular, se clasifican los regímenes atractivos y repulsivos

del potencial efectivo radial en función de estos parámetros conservados, y se construyen mapas globales del signo de la barrera de potencial normalizada, (V_{bar}/L^2) , como función del radio adimensional r/M . Esta representación permite identificar dominios en los cuales las correcciones relativistas asociadas a la rotación modifican cualitativamente la dinámica, favoreciendo o ralentizando la caída según la combinación de parámetros. Este análisis heurístico se complementa con el cálculo explícito de tiempos de caída, mostrando que dichos tiempos responden a una integración de la dinámica al atravesar distintos regímenes locales de atracción y repulsión. Por simplicidad, el análisis se restringe al plano ecuatorial del espacio-tiempo de Kerr, donde la constante de Carter se anula, con el objetivo de mantener un control analítico claro del problema. Esta elección se entiende como un primer paso exploratorio, y se discuten como proyección natural extensiones a trayectorias fuera del plano ecuatorial.

Finalmente, con el fin de conectar esta clasificación con consecuencias dinámicas cuantificables, se discute la relevancia física de los distintos regímenes en escenarios astrofísicos idealizados. En particular, se considera su posible impacto en flujos cuasi-radiales, discos de acreción radiativamente ineficientes (ADAFs) y contextos de colapso con bajo soporte centrífugo, contrastándolos con situaciones en las que estos efectos no se espera que dominen, como discos delgados relativistas o inspirales de razón de masas extrema. Desde esta perspectiva, los resultados se conectan conceptualmente con trabajos previos que han mostrado que efectos relativistas puramente cinemáticos pueden modificar la dinámica efectiva del colapso respecto de predicciones newtonianas ([Tsagas, 2010b](#)), contribuyendo a una reflexión más amplia sobre el rol de la geometría del espacio-tiempo en la determinación de tiempos característicos asociados a procesos de formación de estructuras gravitacionalmente ligadas.

Capítulo 2

Elementos de Relatividad General

La teoría de la Relatividad General (RG), propuesta por Albert Einstein en 1916, describe la gravedad no como una fuerza en el sentido newtoniano, sino como una consecuencia geométrica de la curvatura del espacio-tiempo inducida por la presencia de masa y energía, descritas por el tensor energía-momento ([Einstein, 1916](#)). En este contexto, el campo gravitatorio queda completamente caracterizado por la métrica del espacio-tiempo, la cual es determinada dinámicamente a través de las ecuaciones de campo de Einstein.

De este modo, el movimiento de las partículas de materia y la luz está determinado por la forma en que el espacio-tiempo está curvado y no por la acción de una fuerza gravitatoria externa. Las trayectorias de estas partículas libres corresponden a geodésicas de la métrica del espacio-tiempo, cuya forma depende de la solución particular de las ecuaciones de Einstein que se considere. Una vez fijada una solución, la dinámica gravitacional se describe completamente a través del tensor métrico, que permite definir intervalos espacio-temporales, la estructura causal y el concepto de movimiento inercial. Así, el estudio del movimiento se reduce a analizar las geodésicas asociadas a una métrica específica y sus simetrías geométricas.

En este capítulo se presentan los elementos formales necesarios para abordar el problema principal de este trabajo, los cuales serán utilizados en los capítulos siguientes para estudiar la dinámica de partículas en las métricas de Schwarzschild y Kerr.

2.1. El espacio tiempo

En RG, el campo gravitatorio se describe mediante la geometría del espacio-tiempo, la cual, en términos matemáticos, se entiende como una variedad diferenciable cuadridimensional cuya estructura está determinada por el tensor métrico $g_{\mu\nu}$ ([Wald, 1984](#)). El tensor métrico, es un tensor simétrico no degenerado de rango dos, que permite definir productos internos entre vectores tangentes, y por lo tanto distancias, ángulos y la estructura causal del espacio-tiempo. En coordenadas locales x^μ , sus componentes dependen del sistema de coordenadas elegido, pero g es independiente de dicha elección. En este trabajo se utiliza la convención de signos

$$(-, +, +, +), \tag{2.1}$$

de modo que la componente temporal contribuye con un signo negativo al intervalo. Así mismo, se identificará $x^0 \equiv t$ como una coordenada temporal, y se trabajara en unidades geométricas

$G = c = 1$.

Por último, para una partícula masiva con cuadrivelocidad $u^\mu = dx^\mu/d\tau$, se tiene que la condición de normalización es

$$g_{\mu\nu}u^\mu u^\nu = -1 \quad (2.2)$$

2.1.1. Intervalo espacio–temporal

Una vez fijado el tensor métrico del espacio–tiempo, es posible definir el intervalo espacio–temporal entre dos eventos infinitamente próximos. Dado un desplazamiento diferencial dx^μ , el intervalo viene dado por

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (2.3)$$

expresión conocida como elemento de línea. Esta cantidad constituye un invariante geométrico, en el sentido de que su valor es independiente del sistema de coordenadas utilizado para describir el espacio–tiempo.

La forma explícita del elemento de línea depende, por tanto, de la métrica considerada y del sistema de coordenadas empleado, pero el intervalo ds^2 representa una propiedad intrínseca de la geometría del espacio–tiempo.

De acuerdo con el signo del intervalo, las separaciones entre eventos se clasifican en tres tipos. Una separación es de tipo temporal (*timelike*) si $ds^2 < 0$, de tipo nula (*lightlike*) si $ds^2 = 0$, y de tipo espacial (*spacelike*) si $ds^2 > 0$. Esta clasificación determina la estructura causal del espacio–tiempo, estableciendo qué eventos pueden estar causalmente conectados mediante trayectorias físicas.

Para trayectorias temporales, el intervalo permite definir el tiempo propio τ asociado a la trayectoria. En la convención de signos adoptada en este trabajo, se tiene

$$d\tau^2 = -ds^2. \quad (2.4)$$

Como ejemplo simple, en el caso del espacio–tiempo plano de Minkowski, el elemento de línea adopta la forma

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2, \quad (2.5)$$

lo que refleja la ausencia de curvatura gravitacional. En contraste, en métricas no planas como las de Schwarzschild y Kerr, el tensor métrico presenta una dependencia no trivial de las coordenadas, representando la curvatura del espacio–tiempo asociada a la presencia de un objeto compacto. Sin embargo, el concepto de intervalo espacio–temporal y su interpretación geométrica permanecen válidos en todos los casos.

2.1.2. Tiempo propio y tiempo coordinado

Como se mencionó antes, para una trayectoria de tipo temporal, el intervalo espacio–temporal permite introducir el tiempo propio τ como una magnitud invariante asociada a la trayectoria de una partícula masiva. El tiempo propio corresponde al tiempo que medido por un reloj ideal que acompaña al observador a lo largo de su movimiento ([Hartle, 2003](#)). Por otro lado, el tiempo

coordenado $t \equiv x^0$ es una de las coordenadas utilizadas para parametrizar el espacio–tiempo y, en general, no posee carácter invariante. En un sistema de coordenadas dado, la coordenada temporal se define como el tiempo medido por un reloj situado en una posición espacial fija respecto a dichas coordenadas (Carroll, 2019). En espacios–tiempos curvos, distintos observadores pueden asignar valores diferentes al tiempo coordenado asociado a un mismo intervalo de tiempo propio.

Para trayectorias nulas, como las seguidas por la luz, el intervalo satisface $ds^2 = 0$, por lo que el tiempo propio no está definido. En este caso, la trayectoria se parametriza mediante un parámetro afín λ , el cual preserva la forma de las ecuaciones de las geodésicas y permite describir consistentemente la propagación de señales luminosas en el espacio–tiempo.

2.2. Geodésicas

En Relatividad General, el movimiento de partículas libres se describe mediante geodésicas del espacio–tiempo. Desde un punto de vista geométrico, una geodésica es una curva cuya tangente es transportada paralelamente a lo largo de sí misma. En coordenadas locales $x^\mu(\lambda)$, las geodésicas satisfacen la ecuación

$$\frac{d^2 x^\mu}{d\lambda^2} + \Gamma^\mu_{\alpha\beta} \frac{dx^\alpha}{d\lambda} \frac{dx^\beta}{d\lambda} = 0, \quad (2.6)$$

donde $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$ denota la conexión de Levi–Civita asociada al tensor métrico, y λ es un parámetro definido a lo largo de la curva (Carroll, 2019; Wald, 1984). El parámetro λ se denomina parámetro afín cuando preserva la forma de la ecuación geodésica. De acuerdo con la naturaleza del vector tangente $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$, las geodésicas se clasifican en temporales (*timelike*), nulas (*lightlike*) y espaciales (*spacelike*), de manera análoga a la clasificación de intervalos espacio–temporales. Las geodésicas temporales describen el movimiento de partículas masivas, mientras que las geodésicas nulas describen la propagación de señales luminosas.

Las geodésicas pueden caracterizarse como curvas que extreman el intervalo espacio–temporal entre dos eventos infinitamente próximos, constituyendo la generalización relativista del concepto de línea recta en un espacio plano (Carroll, 2019). Para trayectorias de tipo temporal, las geodésicas corresponden a curvas que extreman el tiempo propio τ entre dos eventos fijos.

Para trayectorias nulas, asociadas a la propagación de la luz, el intervalo satisface $ds^2 = 0$, por lo que el tiempo propio no está definido. En este caso, las trayectorias se parametrizan necesariamente mediante un parámetro afín, el cual queda determinado, excepto cuando se aplican transformaciones afines, y permite describir de manera consistente la propagación de señales luminosas en un espacio–tiempo curvo.

La identificación entre geodésicas y movimiento de caída libre constituye una manifestación del *principio de equivalencia*. En un entorno suficientemente pequeño, es siempre posible introducir un sistema de coordenadas localmente inercial en el cual, a lo largo de la trayectoria de una partícula libre, los efectos gravitatorios se anulan localmente y el movimiento se aproxima al de una partícula no acelerada (Carroll, 2019). No obstante, a escalas finitas, la curvatura del espacio–tiempo se manifiesta en la desviación entre geodésicas inicialmente cercanas, reflejando la presencia del campo gravitatorio.

2.2.1. Formalismo lagrangiano para las geodésicas

La ecuación de la geodésica puede obtenerse a partir de un principio variacional. El movimiento de una partícula libre en un espacio-tiempo curvo se describe como una trayectoria que extrema una acción construida a partir de la geometría del espacio-tiempo. Este enfoque constituye la generalización relativista del principio variacional de la mecánica clásica y permite formular las ecuaciones de movimiento de manera sistemática e independiente del sistema de coordenadas utilizado (Carroll, 2019; Hartle, 2003).

En mecánica clásica, la dinámica de una partícula puntual se obtiene a partir de una acción funcional de la forma

$$S = \int dt L(q, \dot{q}), \quad (2.7)$$

donde L es el Lagrangiano del sistema, $q(t)$ denota una coordenada generalizada del sistema y $\dot{q} \equiv dq/dt$ su derivada temporal. Las trayectorias físicas corresponden a aquellas para las cuales la primera variación de la acción se anula bajo deformaciones arbitrarias de la trayectoria que mantienen fijos los extremos, lo que conduce a las ecuaciones de Euler-Lagrange (Hartle, 2003). Este principio puede extenderse al caso relativista, reemplazando el tiempo coordenado por un parámetro a lo largo de la trayectoria y construyendo el Lagrangiano a partir del tensor métrico.

En el contexto de la Relatividad General, la acción asociada al movimiento de una partícula libre se construye a partir del intervalo espacio-temporal. Para una curva parametrizada como $x^\mu(\lambda)$, el Lagrangiano geodésico puede escribirse como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} \frac{dx^\nu}{d\lambda}, \quad (2.8)$$

donde λ es un parámetro a lo largo de la trayectoria. El factor $1/2$ es convencional y no afecta las ecuaciones de movimiento, por lo que distintas elecciones del lagrangiano geodésico son dinámicamente equivalentes.

La extremización de la acción

$$S = \int d\lambda \mathcal{L} \quad (2.9)$$

conduce a las ecuaciones de movimiento asociadas a las coordenadas $x^\mu(\lambda)$ (Wald, 1984). Para el lagrangiano geodésico, la extremización de la acción conduce a una ecuación de movimiento que coincide con la ecuación de la geodésica, estableciendo la equivalencia entre el enfoque geométrico y el variacional (Wald, 1984; Carroll, 2019).

Aplicando el cálculo de variaciones y exigiendo que la primera variación de la acción se anule para trayectorias con extremos fijos, se obtiene

$$\frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial x^\mu} = 0, \quad (2.10)$$

donde $\dot{x}^\mu \equiv dx^\mu/d\lambda$.

Una ventaja fundamental del formalismo lagrangiano es que, cuando el Lagrangiano no depende

explícitamente de una coordenada x^μ , la cantidad conjugada

$$p_\mu \equiv \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{x}^\mu} \quad (2.11)$$

se conserva a lo largo de la geodésica. Esta propiedad permite identificar constantes de movimiento asociadas a simetrías del espacio-tiempo y resulta central para el análisis de la dinámica de partículas en métricas estacionarias y axisimétricas.

2.3. Simetrías del espacio-tiempo y vectores de Killing

En mecánica clásica, las leyes de conservación se encuentran estrechamente ligadas a la presencia de simetrías. Análogamente, en Relatividad General las simetrías de un espacio-tiempo se entienden como transformaciones que preservan su estructura geométrica. Dichas simetrías se caracterizan mediante campos vectoriales cuyas acciones dejan invariante al tensor métrico. Es decir, si la métrica es independiente de una coordenada dada, entonces el espacio-tiempo es invariante bajo traslaciones a lo largo de dicha coordenada. De manera más general, estas simetrías se caracterizan mediante campos vectoriales que generan isometrías del espacio-tiempo (Hartle, 2003; Misner et al., 1973). El estudio de estas simetrías resulta fundamental, ya que se asocian directamente con la existencia de cantidades conservadas a lo largo de las geodésicas (Wald, 1984; Carroll, 2019).

Sea ξ^μ un campo vectorial definido sobre el espacio-tiempo. Este campo se denomina vector de Killing si satisface la ecuación de Killing

$$\nabla_{(\mu} \xi_{\nu)} = 0, \quad (2.12)$$

donde ∇_μ denota la derivada covariante asociada a la conexión de Levi-Civita y los paréntesis indican simetrización de índices. Esta condición expresa que el campo vectorial ξ^μ genera una isometría del espacio-tiempo, es decir, una transformación bajo la cual el tensor métrico permanece invariante (Misner et al., 1973).

La relevancia física de los vectores de Killing radica en su relación con las cantidades conservadas a lo largo de las geodésicas. Si ξ^μ es un vector de Killing y u^μ es el vector tangente a una geodésica, entonces la cantidad escalar

$$\xi_\mu u^\mu \quad (2.13)$$

se mantiene constante a lo largo de la trayectoria (Wald, 1984).

Como se discutió en la sección anterior, este resultado puede obtenerse de manera equivalente a partir del formalismo lagrangiano, donde la independencia del Lagrangiano respecto de una coordenada implica la conservación de la cantidad conjugada asociada.

Las simetrías más relevantes en problemas gravitacionales corresponden a invariancia temporal y rotacional. Un vector de Killing temporal se asocia a una simetría bajo traslaciones temporales y permite definir una cantidad conservada identificada con la energía específica de la partícula. De manera análoga, un vector de Killing axial se asocia a una simetría de rotación y conduce a la conservación del momento angular alrededor del eje correspondiente (Misner et al., 1973).

Los espacios-tiempos estacionarios poseen al menos un vector de Killing temporal, mientras que

los espacios–tiempos axisimétricos admiten un vector de Killing axial. Las métricas de Schwarzschild y Kerr presentan ambas simetrías, lo que permite reducir significativamente el problema de las geodésicas y obtener ecuaciones efectivas de movimiento en términos de constantes de movimiento bien definidas.

2.4. Curvatura del espacio–tiempo y ecuaciones de Einstein

Como se mencionó anteriormente, en RG el campo gravitatorio se identifica con la curvatura del espacio–tiempo. Esta curvatura se manifiesta en la forma en que los vectores se transportan paralelamente y en la desviación entre geodésicas inicialmente cercanas. Matemáticamente, la descripción de la curvatura se construye a partir de la conexión de Levi–Civita asociada al tensor métrico y de los tensores derivados de ella (Wald, 1984; Carroll, 2019). La conexión de Levi–Civita, denotada por $\Gamma^\mu_{\alpha\beta}$, es la única conexión compatible con la métrica y libre de torsión (Carroll, 2019). Si bien sus componentes dependen del sistema de coordenadas elegido, los objetos geométricos construidos a partir de ella permiten caracterizar de manera invariante la curvatura del espacio–tiempo. El transporte paralelo alrededor de curvas cerradas conduce a la definición del tensor de curvatura de Riemann, dado por

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu}, \quad (2.14)$$

el cual mide la no conmutatividad de las derivadas covariantes (Wald, 1984).

A partir del tensor de Riemann se definen el tensor de Ricci,

$$R_{\mu\nu} = R^\rho_{\mu\rho\nu}, \quad (2.15)$$

y el escalar de Ricci,

$$R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}, \quad (2.16)$$

que contienen información sobre la curvatura local del espacio–tiempo. Estas cantidades juegan un rol central en la formulación dinámica de la teoría.

Las ecuaciones de campo de Einstein establecen la relación entre la curvatura del espacio–tiempo y el contenido material que lo genera. En unidades geométricas $G = c = 1$, dichas ecuaciones se escriben como

$$G_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.17)$$

donde $T_{\mu\nu}$ es el tensor energía–momento de la materia y los campos no gravitatorios, y

$$G_{\mu\nu} = R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R \quad (2.18)$$

es el tensor de Einstein. Estas ecuaciones constituyen el núcleo de la Relatividad General y determinan la métrica del espacio–tiempo a partir de la distribución de energía y momento (Carroll, 2019; Wald, 1984).

En ausencia de materia y radiación, el tensor energía–momento se anula y las ecuaciones de Einstein se reducen al caso vacío,

$$R_{\mu\nu} = 0. \tag{2.19}$$

Las soluciones de estas ecuaciones describen la geometría del espacio–tiempo en regiones donde el campo gravitatorio es generado únicamente por fuentes externas, como ocurre en el exterior de objetos compactos. En este contexto, las métricas de Schwarzschild y Kerr constituyen soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein en el vacío, correspondientes a cuerpos compactos no rotantes y rotantes, respectivamente.

En los capítulos siguientes se estudiarán en detalle estas soluciones y se analizará la dinámica de partículas en dichos espacios–tiempos, haciendo uso de los conceptos desarrollados en este capítulo.

Capítulo 3

Dinámica en la métrica de Schwarzschild

La solución de Schwarzschild fue la primera solución exacta no trivial de las ecuaciones de Einstein, obtenida en enero de 1916 unas semanas después de la formulación de la relatividad general. Karl Schwarzschild, entonces físico y astrónomo sirviendo en el frente ruso durante la Primera Guerra Mundial, derivó la solución y la envió a Einstein poco antes de morir a causa de una enfermedad contraída en campaña. Su trabajo ([Schwarzschild, 1916](#)) es importante pues representa el espacio-tiempo más general compatible con el vacío, la estaticidad y la simetría esférica. Estas condiciones reducen considerablemente la complejidad de las ecuaciones de campo, permitiendo una derivación directa de la métrica a partir de argumentos puramente geométricos.

A pesar de su aparente simplicidad, la métrica de Schwarzschild manifiesta fenómenos relativistas, como la presencia de un horizonte de eventos en $r = 2M$, la distinción entre singularidades físicas y aparentes clarificada en la extensión maximal de [Kruskal \(1960\)](#), y la diferencia entre el tiempo propio de un observador en caída libre y el tiempo coordinado para un observador estático en el infinito.

3.1. Derivación matemática

En el trabajo de [Schwarzschild \(1916\)](#) la solución fue obtenida bajo un sistema de coordenadas motivado por la formulación original de Einstein. Sin embargo, en análisis modernos, como el de [Dorojan \(2024\)](#), presentan una derivación conceptualmente similar, pero utilizando el formalismo actual de tensores.

Para derivar la solución de Schwarzschild partimos de un espacio-tiempo en vacío que sea estático y esféricamente simétrico. La condición de estaticidad implica que el campo gravitatorio no depende del tiempo y que la métrica no contiene términos cruzados del tipo $dt d\phi$, mientras que la simetría esférica reduce la dependencia de las funciones métricas a una única coordenada radial r .

Bajo estas hipótesis, la forma más general de la métrica puede escribirse como

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.1)$$

donde $A(r)$ y $B(r)$ son funciones positivas por determinar, y $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ es el elemento de área de la esfera unitaria.

Para determinar las funciones imponemos las ecuaciones de campo en vacío

$$R_{\mu\nu} = 0. \quad (3.2)$$

El cálculo explícito del tensor de Ricci conduce a un sistema de ecuaciones diferenciales para $A(r)$ y $B(r)$. Al resolver estas ecuaciones, y exigiendo que la solución sea asintóticamente plana en el límite $r \rightarrow \infty$, se obtiene que

$$B(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1}, \quad (3.3)$$

donde M es una constante de integración que representa la masa del objeto central. Además, las ecuaciones de Ricci implican que el producto $A(r)B(r)$ debe ser constante, luego se tiene que

$$A(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (3.4)$$

Sustituyendo estas expresiones en la expresión del elemento de línea inicial se llega a la métrica de Schwarzschild,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2. \quad (3.5)$$

Esta solución describe el espacio-tiempo exterior a una masa puntual o a una distribución esférica en reposo, y constituye el punto de partida para el estudio de las geodésicas, órbitas circulares y tiempos de caída que desarrollaremos en las siguientes secciones.

3.2. El radio de Schwarzschild

La solución de Schwarzschild obtenida en la sección anterior presenta una estructura singular en la coordenada radial. Los coeficientes métricos asociados a las componentes temporal (g_{tt}) y radial (g_{rr}) del elemento de línea muestran un comportamiento característico en el radio

$$r_s \equiv 2M, \quad (3.6)$$

donde g_{tt} se anula y g_{rr} diverge. Este valor, conocido como radio de Schwarzschild, define una superficie de relevancia causal fundamental dentro del espacio-tiempo descrito por esta métrica ([Misner et al., 1973](#)).

En el sistema de coordenadas utilizado, el comportamiento de los coeficientes métricos en $r = r_s$ podría interpretarse inicialmente como la presencia de una singularidad del espacio-tiempo. Sin embargo, este comportamiento no corresponde a una irregularidad geométrica intrínseca, sino a una singularidad asociada a la elección de coordenadas. Los invariantes construidos a partir del tensor de curvatura permanecen finitos en $r = 2M$, lo que demuestra que la geometría está bien definida en dicha superficie ([Misner et al., 1973](#)).

La singularidad física de la solución de Schwarzschild se localiza en $r = 0$, donde los invariantes de curvatura divergen y la estructura geométrica del espacio-tiempo deja de estar bien definida. Esta anomalía es intrínseca y no puede eliminarse mediante un cambio de coordenadas, a diferencia del comportamiento observado en el radio de Schwarzschild.

La hipersuperficie definida por $r = r_s$ constituye el horizonte de eventos del agujero negro de Schwarzschild. Geométricamente corresponde a una superficie nula generada por geodésicas nulas salientes que permanecen confinadas a dicho radio. El horizonte divide el espacio-tiempo en dos regiones causalmente distintas. En la región exterior ($r > r_s$), las trayectorias causales pueden extenderse hasta el infinito, mientras que en la región interior ($r < r_s$), todas las curvas temporales y nulas están orientadas hacia radios decrecientes, lo que imposibilita cualquier comunicación con observadores externos (Carroll, 2019).

Para un observador estacionario situado en la región exterior, el cruce de una partícula a través del horizonte ocurre en un tiempo coordenado infinito. El objeto para ralentizarse progresivamente al aproximarse a r_s , su señal se desplaza al rojo y su intensidad decae hasta desaparecer de la vista. Por otro lado, un observador en caída libre alcanza el horizonte en un tiempo propio finito y, para agujeros negros lo suficientemente masivos, atraviesa la superficie $r = 2M$ sin experimentar ningún efecto local singular en ese instante.

Distinguir entre singularidades de coordenadas y físicas es necesario para el correcto análisis de la dinámica de partículas en la métrica de Schwarzschild. Esto permite interpretar adecuadamente el comportamiento de las geodésicas en las cercanías del horizonte y establecer que propiedades del movimiento responden a efectos puramente geométricos y cuales dependen de la estructura causal del espacio-tiempo.

3.3. Dinámica de partículas en Schwarzschild

Para estudiar el movimiento de partículas en la geometría de Schwarzschild utilizamos el formalismo lagrangiano. En coordenadas de Schwarzschild, el Lagrangiano tiene la forma

$$\mathcal{L} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\phi}^2. \quad (3.7)$$

Debido a la simetría esférica del espacio-tiempo, el movimiento puede restringirse sin pérdida de generalidad al plano ecuatorial. Imponiendo $\theta = \pi/2$, el Lagrangiano se reduce a

$$\mathcal{L} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2. \quad (3.8)$$

Este Lagrangiano, al depender únicamente de t , r y ϕ , permite identificar de manera inmediata las constantes de movimiento asociadas a las simetrías temporales y axiales del espacio-tiempo, que derivaremos en la siguiente sección.

3.3.1. Constantes de movimiento

Debido a que la métrica es estática y esféricamente simétrica, admite dos vectores de Killing relevantes para el movimiento de partículas en el plano ecuatorial, uno asociado a traslaciones

temporales y otro asociado a rotaciones alrededor del eje z (Carroll, 2019). El vector de Killing temporal esta dado por

$$\xi_{(t)}^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad (3.9)$$

mientras que el vector de Killing axial en torno al eje z es

$$\xi_{(\phi)}^\mu = (0, 0, 0, 1). \quad (3.10)$$

A partir del Lagrangiano en el plano ecuatorial, las constantes de movimiento pueden obtenerse empleando las ecuaciones de Euler-Lagrange. En primer lugar, como el Lagrangiano no depende explícitamente de t , la ecuación

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0. \quad (3.11)$$

se reduce a

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = 0, \quad (3.12)$$

lo que indica que su momento conjugado es constante a lo largo de la geodésica:

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = -2 \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}, \quad (3.13)$$

Por otro lado, como el Lagrangiano tampoco depende explícitamente de ϕ , se tiene

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0 \quad (3.14)$$

de donde se obtiene

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = 2r^2 \dot{\phi}, \quad (3.15)$$

que también es constante.

Definimos la energía por unidad de masa como

$$E \equiv \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}, \quad (3.16)$$

de esta forma, la invarianza de p_t se traduce en la conservación de E a lo largo de la trayectoria. Asimismo, al definir el momento angular específico como

$$L \equiv r^2 \dot{\phi}, \quad (3.17)$$

la constancia de p_ϕ implica la conservación de L a lo largo de la geodésica.

3.3.2. Geodésicas y ecuación radial

A partir de las constantes de movimiento obtenidas en la sección anterior, es posible utilizarlas para analizar la dinámica radial de partículas masivas.

Para estas partículas, las geodésicas son temporales (timelike), y satisfacen la condición de normalización

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -1. \quad (3.18)$$

En la métrica de Schwarzschild, restringida al plano ecuatorial, esta condición se escribe como

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2 = -1. \quad (3.19)$$

Utilizando las expresiones obtenidas a partir del Lagrangiano para E y L , podemos escribir

$$\dot{t} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}}, \quad \dot{\phi} = \frac{L}{r^2}. \quad (3.20)$$

Sustituyendo estas expresiones en la condición de normalización, se obtiene

$$-\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{E}{1 - \frac{2M}{r}}\right)^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + r^2 \left(\frac{L}{r^2}\right)^2 = -1. \quad (3.21)$$

Esto es,

$$-\frac{E^2}{1 - \frac{2M}{r}} + \left(1 - \frac{2M}{r}\right)^{-1} \dot{r}^2 + \frac{L^2}{r^2} = -1. \quad (3.22)$$

Multiplicando por el factor $\left(1 - \frac{2M}{r}\right)$, se obtiene

$$-E^2 + \dot{r}^2 + \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{L^2}{r^2} = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (3.23)$$

reordenando los términos:

$$\dot{r}^2 = E^2 - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (3.24)$$

Esta es la ecuación radial para el movimiento de una partícula masiva en el espacio-tiempo de Schwarzschild.

3.3.3. Potencial efectivo

La ecuación radial obtenida en la sección anterior puede escribirse en la forma

$$\dot{r}^2 = E^2 - V_{\text{eff}}(r), \quad (3.25)$$

lo que permite realizar la interpretación de

$$V_{\text{eff}}(r) \equiv \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right) \quad (3.26)$$

como un potencial efectivo para el movimiento radial. Su estructura puede analizarse expandiendo los términos

$$V_{\text{eff}}(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{L^2}{r^2} - \frac{2ML^2}{r^3}. \quad (3.27)$$

El término constante ($mc^2 = 1$) representa la energía en reposo de una partícula situada en el infinito, mientras que el término $-2M/r$ reproduce el potencial gravitatorio newtoniano en el régimen $M/r \ll 1$. El término L^2/r^2 corresponde a la barrera centrífuga asociada al momento angular, responsable de impedir que partículas con $L \neq 0$ alcancen directamente el centro. Sin embargo, la Relatividad General introduce además el término $-2ML^2/r^3$, que constituye una corrección puramente relativista, ausente en la mecánica newtoniana, que aumenta la atracción gravitatoria a pequeños radios y modifica cualitativamente la estructura de las órbitas.

En conjunto, estos términos muestran que en RG el momento angular cumple un papel doble, introduce una barrera repulsiva proporcional a L^2/r^2 , pero simultáneamente genera una contribución atractiva de orden $1/r^3$, de origen relativista. Cerca del horizonte estas dos contribuciones pueden competir entre sí, mientras que para $r \gg M$ domina la barrera centrífuga clásica.

3.4. Órbitas circulares y estabilidad

La ecuación radial en el espacio-tiempo de Schwarzschild, permite estudiar la existencia de órbitas circulares. Una órbita circular de radio constante $r = r_0$ requiere que la coordenada radial permanezca fija a lo largo del movimiento. Esto impone simultáneamente las condiciones

$$\dot{r}(r_0) = 0, \quad (3.28)$$

$$\left. \frac{d\dot{r}^2}{dr} \right|_{r=r_0} = 0. \quad (3.29)$$

Estas condiciones son equivalentes a exigir que el potencial efectivo satisfaga

$$E^2 = V_{\text{eff}}(r_0), \quad (3.30)$$

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}}{dr} \right|_{r=r_0} = 0. \quad (3.31)$$

La primera fija el valor de la energía E requerida para una órbita circular de radio r_0 , mientras que la segunda impone la condición de equilibrio radial, estableciendo la relación entre el momento angular L y el radio orbital. Al aplicar estas condiciones a la forma explícita del potencial y resolver el sistema resultante para E y L_z , se obtiene que el momento angular para una órbita circular de radio r_0 es

$$L^2 = \frac{M_0^2}{r_0 - 3M}, \quad r_0 > 3M, \quad (3.32)$$

y la energía asociada es

$$E = \frac{r_0 - 2M}{\sqrt{r_0(r_0 - 3M)}}. \quad (3.33)$$

La condición $r_0 > 3M$ surge de al exigir que ambas cantidades sean reales y finitas. El radio $r = 3M$ corresponde al límite en el cual la órbita circular se vuelve nula (lightlike), dando lugar a las órbitas circulares de fotones (Wald, 1984), que es naturalmente inestable.

De la ecuación para el momento angular, se puede obtener una expresión para M

$$Mr^2 - L^2r + 3ML^2 = 0. \quad (3.34)$$

Al resolver para r se tiene

$$r_c^\pm = \frac{L^2}{2M} \left(1 \pm \sqrt{1 - \frac{12M^2}{L^2}} \right) \quad (3.35)$$

Las dos soluciones obtenidas para $r_c^\pm$ muestran que, para un valor dado del momento angular L que satisfaga $L^2 \geq 12M^2$, existen en general dos órbitas circulares posibles. Sin embargo, no todas las órbitas circulares son estables.

3.4.1. La órbita circular más interna estable (ISCO)

Para determinar la estabilidad frente a perturbaciones radiales se estudia la segunda derivada del potencial efectivo. Una órbita circular es estable si

$$\left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} \right|_{r=r_0} > 0, \quad (3.36)$$

mientras que si

$$\left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} \right|_{r=r_0} < 0, \quad (3.37)$$

la órbita es inestable. El caso en el que la segunda derivada se anula representa el límite entre ambos regímenes.

Al aplicar esta condición al potencial efectivo de Schwarzschild, y sustituyendo la relación entre L_z y r_0 encontrada anteriormente, se encuentra que existe un valor crítico del radio orbital dado por

$$r_0 = 6M. \quad (3.38)$$

Este radio define la órbita circular más interna estable, o ISCO (*Innermost Stable Circular Orbit*). Para radios $r > 6M$ existen órbitas circulares estables, mientras que en el intervalo $3M < r_{\text{ISCO}} < 6M$ las órbitas circulares existen, pero son inestables. La presencia del ISCO es un efecto puramente relativista y no tiene análogo en la teoría newtoniana, donde todas las órbitas circulares son estables.

En $r_{\text{ISCO}} = 6M$, la energía y el momento angular asociados a la órbita circular toman los valores particulares:

$$L_{\text{ISCO}} = 2\sqrt{3} M, \quad E_{\text{ISCO}} = \frac{2\sqrt{2}}{3}. \quad (3.39)$$

Para valores del momento angular tales que $L > L_{\text{ISCO}}$, el potencial efectivo presenta un mínimo local, lo que permite la existencia de órbitas circulares estables a radios $r > 6M$. En el caso límite $L = L_{\text{ISCO}}$, dicho mínimo se transforma en un punto de inflexión, por lo que la órbita resulta marginalmente estable, es decir, cualquier perturbación radial, por pequeña que sea, provoca que la partícula se aleje del radio r_{ISCO} . Por el contrario, cuando $L < L_{\text{ISCO}}$, el potencial efectivo deja de presentar extremos y no existen órbitas circulares. En este régimen, una vez superado el punto de retorno radial, la partícula no puede mantenerse en equilibrio y cae inevitablemente hacia el agujero negro (ver [Misner et al. \(1973\)](#)).

En este trabajo, consideramos la ISCO de especial importancia por constituir un límite dinámico bien definido entre trayectorias cuasi-estables y colapso radial inevitable. El tiempo de caída hasta la ISCO proporciona una escala temporal natural para cuantificar cuán eficientemente la geometría del espacio-tiempo puede acelerar o retardar procesos de caída, lo que resulta especialmente relevante al discutir la formación temprana de estructuras compactas en escenarios relativistas.

3.5. Tiempos de caída

Una vez caracterizadas las órbitas circulares y su estabilidad, podemos estudiar la dinámica de caída radial hacia el agujero negro. Para ello, definiremos a continuación el método de cálculo de estas escalas temporales desde una posición radial dada hasta la ISCO.

3.5.1. Tiempo propio

Consideremos una partícula masiva que se mueve en el espacio-tiempo de Schwarzschild. La ecuación radial general puede escribirse como

$$\dot{r}^2 = E^2 - V_{\text{eff}}(r), \quad (3.40)$$

donde el potencial efectivo está dado por

$$V_{\text{eff}}(r) = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(1 + \frac{L^2}{r^2}\right). \quad (3.41)$$

Para trayectorias entrantes, correspondientes a una caída radial hacia radios menores, se tiene $\dot{r} < 0$, por lo que

$$\frac{dr}{d\tau} = -\sqrt{E^2 - V_{\text{eff}}(r)}. \quad (3.42)$$

Invirtiendo esta relación,

$$d\tau = -\frac{dr}{\sqrt{E^2 - V_{\text{eff}}(r)}}. \quad (3.43)$$

Dado que durante la caída el radio disminuye desde un valor inicial r_0 hasta un radio final $r_f < r_0$, el intervalo de tiempo propio transcurrido se obtiene integrando con los límites invertidos:

$$\Delta\tau = \int_{r_f}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{E^2 - V_{\text{eff}}(r)}}. \quad (3.44)$$

Caso $L = 0$.

Para una caída puramente radial ($L = 0$), el potencial efectivo se reduce a

$$V_{\text{eff}}(r) = 1 - \frac{2M}{r}. \quad (3.45)$$

En este caso, si la partícula cae desde un radio inicial r_0 hasta el horizonte de eventos $r_f = 2M$, la integral puede evaluarse de manera exacta.

En [Chandrasekhar \(1983\)](#), la solución se presenta de manera paramétrica como

$$\tau(\eta) = \sqrt{\frac{r_0^3}{8M}}(\eta + \sin \eta) \quad (3.46)$$

donde η es un parámetro auxiliar que se relaciona con el radio (Misner et al., 1973)

$$r = \frac{r_0}{2}(1 + \cos \eta) \quad (3.47)$$

Eliminando el parámetro y evaluando en el horizonte se obtiene

$$\Delta\tau = \sqrt{\frac{r_0^3}{2M}} \left[\arccos \sqrt{\frac{2M}{r_0}} + \sqrt{\frac{2M}{r_0} \left(1 - \frac{2M}{r_0} \right)} \right]. \quad (3.48)$$

Si $r_0 \gg 2M$, se tiene una partícula inicialmente en reposo muy lejos del agujero negro. En este caso la energía específica satisface $E \sim 1$, y la expresión anterior puede aproximarse como (Cardoso et al., 2025)

$$\Delta\tau \approx \frac{\sqrt{2}r_0^{3/2}}{3\sqrt{M}} - \frac{4M}{3}. \quad (3.49)$$

Caso $L \neq 0$.

Para una partícula con momento angular no nulo, la expresión para el tiempo propio hasta alcanzar el horizonte de eventos es

$$\Delta\tau = \int_{2M}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{E^2 - V_{\text{eff}}(r)}}. \quad (3.50)$$

Esta integral no admite, en general, una expresión cerrada en términos de funciones elementales, por lo que su evaluación se realiza numéricamente.

De manera análoga, el tiempo propio requerido para que la partícula alcance la órbita circular más interna estable, $r_{\text{ISCO}} = 6M$, está dado por

$$\Delta\tau_{\text{ISCO}} = \int_{6M}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{E^2 - V_{\text{eff}}(r)}}. \quad (3.51)$$

Dado que el integrando no diverge en el intervalo $6M \leq r \leq r_0$, el tiempo propio necesario para alcanzar la ISCO es finito.

3.5.2. Tiempo coordenado

A partir de la conservación de la energía específica, la componente temporal de la cuadriveleridad es

$$\frac{dt}{d\tau} = \frac{E}{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (3.52)$$

Combinando esta expresión con la ecuación radial, se obtiene

$$\frac{dt}{dr} = \frac{E}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{E^2 - V_{\text{eff}}(r)}}. \quad (3.53)$$

El tiempo coordenado transcurrido durante la caída desde r_0 hasta un radio final $r_f < r_0$ se obtiene entonces como

$$\Delta t = \int_{r_f}^{r_0} \frac{E dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{E^2 - V_{\text{eff}}(r)}}. \quad (3.54)$$

Al aproximarse al horizonte de eventos $r \rightarrow 2M^+$, el factor $(1 - 2M/r)$ en el denominador tiende a cero, lo que hace que el integrando diverja. En consecuencia,

$$\Delta t = \int_{2M}^{r_0} \frac{E dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{E^2 - V_{\text{eff}}(r)}} \rightarrow \infty. \quad (3.55)$$

Esto implica que, para un observador situado en el infinito, la partícula nunca cruza el horizonte de eventos en un tiempo coordenado finito.

Por el contrario, el tiempo coordenado necesario para alcanzar la ISCO viene dado por

$$\Delta t_{\text{ISCO}} = \int_{6M}^{r_0} \frac{E dr}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \sqrt{E^2 - V_{\text{eff}}(r)}}. \quad (3.56)$$

Dado que el integrando no diverge en $r = 6M$, el tiempo coordenado hasta la ISCO es finito, aunque su valor depende de E y L y debe evaluarse numéricamente.

3.5.3. Cálculo de escalas temporales y análisis

La Figura 3.1 compara el tiempo propio y el tiempo coordenado relativista con el tiempo de caída newtoniano para una partícula que cae radialmente partiendo del reposo, desde un radio inicial $r_0 = 10M$ hasta la ISCO ($r_{\text{ISCO}} = 6M$). Se puede ver que el tiempo coordenado relativista resulta mayor que el tiempo propio, lo que corresponde a la dilatación temporal gravitacional.

Por otro lado, la figura 3.2 muestra que, para un mismo valor de momento angular L , **el tiempo de caída newtoniano es mayor que el tiempo propio de caída relativista**. Esto se explica a partir de la estructura del potencial efectivo en Schwarzschild. Aunque el término $L^2/2r^2$ actúa como una barrera centrífuga repulsiva, la corrección puramente relativista $-ML^2/r^3$ introduce una contribución atractiva adicional que atenúa dicha barrera. De este modo, el potencial efectivo toma valores menores que el potencial newtoniano a radios pequeños, reduciendo el tiempo propio de caída en comparación con el caso newtoniano, sin que ello implique una inversión del carácter repulsivo del término asociado al momento angular.

Este análisis se ve reforzado en la Figura 3.2, la cual muestra directamente el cociente entre el tiempo de caída newtoniano y el tiempo propio relativista en función de L . Se puede ver que en el límite $L = 0$, ambos tiempos coinciden, tal como se espera ante la ausencia de contribuciones relativistas asociadas al movimiento orbital. Sin embargo, a medida que L aumenta, la razón entre las magnitudes se incrementa gradualmente, evidenciando como los efectos relativistas del momento

angular reducen el tiempo propio de caída respecto a la predicción newtoniana. Esto actúa como una fuerte motivación para explorar como el momento angular del propio agujero negro podría modificar también los tiempos de caída de partículas.

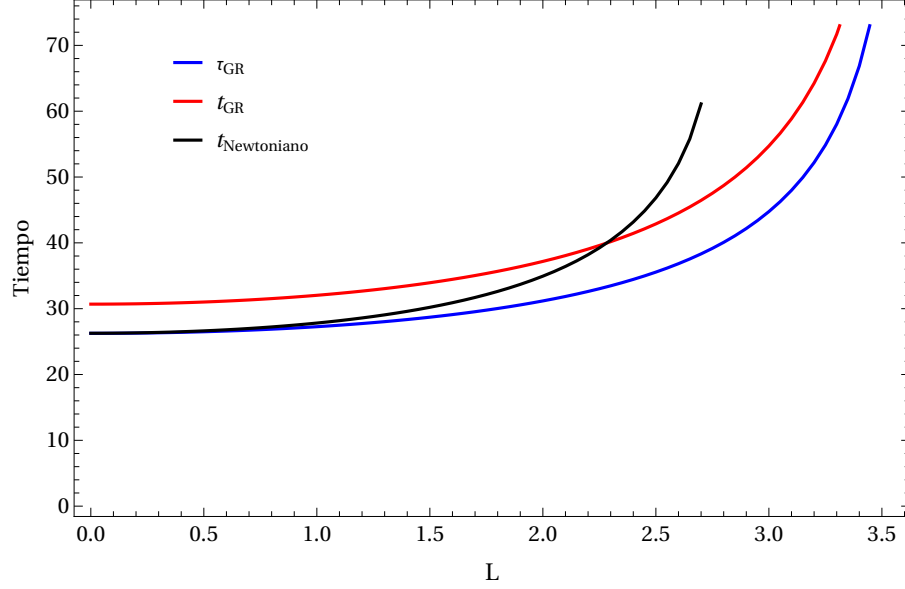


Figura 3.1: Comparación entre el tiempo propio, el tiempo coordenado de RG y el tiempo newtoniano para una partícula que cae radialmente desde $r_f = 10M$ hasta la ISCO, $r_{\text{ISCO}} = 6M$. A altos valores de L , el tiempo newtoniano excede notablemente el tiempo propio relativista. Además, el hecho de que la curva diverja con anterioridad indica que la barrera centrífuga en relatividad general se ve fuertemente atenuada, permitiendo que órbitas con mayor momento angular caigan efectivamente a la ISCO.

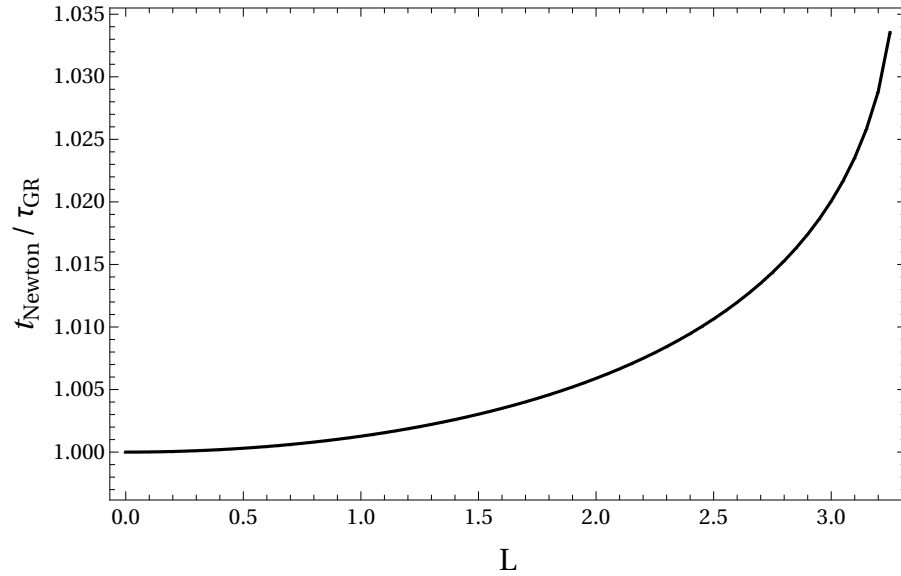


Figura 3.2: Cociente entre el tiempo de caída newtoniano y el tiempo propio relativista para una partícula que cae desde un radio inicial r_0 hasta $r = 6M$, en función del momento angular L . Para valores crecientes de L el cociente se desvía progresivamente de la unidad, evidenciando que la diferencia entre ambas escalas temporales surge de los efectos relativistas asociados al momento angular, ausentes en la dinámica newtoniana.

Capítulo 4

Dinámica en la métrica de Kerr

4.1. Una solución elegante

Las estrellas, los sistemas binarios y los discos de acreción no pueden describirse adecuadamente mediante geometrías estáticas, sino que requieren una métrica estacionaria y axisimétrica capaz de incorporar la rotación. La naturaleza astrofísica de estos objetos compactos hace inevitable la consideración del momento angular como una magnitud gravitacional fundamental, ya que la rotación no solo afecta la dinámica de la materia circundante, sino que también modifica la estructura misma del espacio-tiempo.

Tras la obtención de la solución estática de Schwarzschild, uno de los principales desafíos de la relatividad general durante los años siguientes fue extenderla al caso rotante. Esta tarea resultó particularmente compleja, pues las ecuaciones de campo de Einstein son altamente no lineales, y las simetrías disponibles solo restringen parcialmente su estructura matemática. Uno de los primeros intentos fue realizado por [Lense and Thirring \(1918\)](#), quienes estudiaron los efectos de una rotación lenta en el régimen de campo débil, introduciendo el concepto de arrastre del marco inercial. Décadas más tarde, se desarrollaron formulaciones más generales para geometrías estacionarias y axisimétricas, como las propuestas por [Lewis \(1932\)](#) y [Papaetrou \(1947\)](#), que sentaron las bases matemáticas para la búsqueda de soluciones rotantes del vacío de Einstein.

Sin embargo, fue recién en 1963, cuando Roy P. Kerr obtuvo una solución exacta que describe el espacio-tiempo exterior a una masa rotante en vacío. Este resultado, constituyó un hito comparable al descubrimiento de Schwarzschild, pues reveló una nueva familia de agujeros negros caracterizados no sólo por su masa M , sino también por su momento angular específico $a = J/M$.

La solución de Kerr introdujo por primera vez una descripción completa del arrastre del marco inercial, fenómeno puramente relativista mediante el cual el propio espacio-tiempo es arrastrado por la rotación de la fuente gravitacional. Este efecto, ausente en la gravitación newtoniana, da origen a la ergosfera, región en la cual ningún observador puede permanecer estacionario respecto al infinito. Por otra parte, la métrica de Kerr reveló que el horizonte de eventos y la singularidad ya no son superficies esféricas concéntricas, como se observaba en la solución de Schwarzschild, sino que adquieren una geometría oblatada producto de la rotación de la masa central. Esta característica, no solo evidencia la estructura más compleja del espacio-tiempo rotante, sino que además introduce nuevas propiedades físicas, como la existencia de dos horizontes (ver Figura 4.1) y la posibilidad de extracción de energía desde la ergosfera a través del proceso de Penrose ([Penrose and Floyd, 1971](#)).

A pesar de su elegancia matemática, la obtención de la métrica de Kerr no fue directa. En su trabajo original, [Kerr \(1963\)](#) exploró el problema mediante el formalismo de Newman–Penrose ([Newman and Penrose, 1962](#)) centrado en soluciones algebraicamente especiales de tipo D, en las que las direcciones principales del tensor de Weyl coinciden. Años mas tarde, [Boyer and Lindquist \(1967\)](#) reformularon la solución en un sistema de coordenadas que permitió eliminar los términos cruzados de la métrica original de Kerr, facilitando su interpretación física. Posteriormente, [Carter \(1968\)](#) demostró la separabilidad de la ecuación de Hamilton–Jacobi en esta métrica y estableció la existencia de una tercera constante del movimiento, la contante de Carter, junto con la energía y el momento angular. Estos avances permitieron describir de manera precisa la dinámica de partículas y fotones en el entorno del agujero negro rotante.

4.2. Estructura geométrica del espacio–tiempo de Kerr

4.2.1. La métrica en coordenadas de Boyer–Lindquist

La forma mas general de la métrica de Kerr se escribe en coordenadas de Boyer-Lindquist (t, r, θ, ϕ) como

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) dt^2 - \frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} dt d\phi + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \Sigma d\theta^2 + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta d\phi^2 \quad (4.1)$$

donde las funciones auxiliares se definen como:

$$\Sigma = r^2 + a^2 \cos^2 \theta, \quad \Delta = r^2 - 2Mr + a^2, \quad (4.2)$$

y el parámetro a es el momento angular por unidad de masa del objeto:

$$a = \frac{J}{M} \quad (4.3)$$

En el límite $a \rightarrow 0$, los términos de rotación desaparecen y la métrica se reduce a la forma de Schwarzschild:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r} \right) dt^2 + \left(1 - \frac{2M}{r} \right)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2). \quad (4.4)$$

restaurando la simetría esférica. Esto muestra que Kerr generaliza naturalmente a Schwarzschild, incorporando la rotación como segundo parámetro fundamental del campo gravitacional.

El termino cruzado $g_{t,\phi} = -\frac{4Mar \sin^2 \theta}{\Sigma}$ introduce el acoplamiento entre el tiempo y el ángulo azimutal, manifestando el arrastre del marco inercial.

4.2.2. Horizontes

La función Δ gobierna la posición de los horizontes, pues al anularse determina las superficies donde el componente g^{rr} diverge, es decir, donde las trayectorias radiales dejan de ser causales hacia el exterior. La condición:

$$\Delta(r) = 0 \quad (4.5)$$

es equivalente a resolver la ecuación cuadrática

$$r^2 - 2Mr + a^2 = 0, \quad (4.6)$$

cuyas raíces definen los horizontes interior y exterior:

$$r_{\pm} = M \pm \sqrt{M^2 - a^2} \quad (4.7)$$

El horizonte exterior r_+ corresponde al horizonte de eventos del agujero negro, el cual es mas pequeño que el de un horizonte de eventos típico de un agujero negro de Schwarzschild. Mas allá de esta superficie, ningún observador o rayo de luz puede escapar al infinito. El horizonte interior r_- , también llamado *horizonte de Cauchy*, es una región mas interna donde la estructura causal del espacio-tiempo cambia drásticamente. No tiene análogo en el caso no rotante y es una consecuencia directa del momento angular. Aunque es matemáticamente consistente, se sabe que este horizonte es inestable frente a perturbaciones ([Burko et al., 2016](#)).

En el caso extremo $a = M$, ambos horizontes coinciden en $r_+ = r_- = M$. Si $a > M$, las raíces de la ecuación dejan de ser reales, y la solución carece de horizonte, produciendo una singularidad desnuda, lo que infringe la conjetura de censura cósmica ([Penrose, 1969](#)).

4.2.3. La ergosfera

El comportamiento del componente temporal del tensor métrico g_{tt} refleja la modificación que sufre la geometría temporal del espacio-tiempo a causa de la rotación. La superficie donde este componente se anula,

$$g_{tt} = - \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) = 0, \quad (4.8)$$

define el límite de la ergosfera

$$r_{erg}(\theta) = M + \sqrt{M^2 - a^2 \cos^2(\theta)} \quad (4.9)$$

En los polos ($\theta = 0, \pi$), la ergosfera coincide con el horizonte exterior, mientras que en el ecuador ($\theta = \pi/2$) se extiende hacia afuera. Para un observador estático, $ds^2 = g_{tt}dt^2$ y el universo se vuelve positivo para valores negativos de g_{tt} . Esto provoca que dentro de esta región ningún

observador puede permanecer estacionario respecto al infinito, debido a que el termino cruzado $g_{t\phi}$ obliga a toda partícula a rotar con el agujero negro a través del arrastre del marco inercial. Esta propiedad permite la extracción de energía rotacional mediante el proceso de Penrose (Penrose and Floyd, 1971), en el cual una partícula que ingresa a la ergosfera puede fragmentarse en dos. Mientras una de sus componentes cae al agujero negro con energía negativa, la otra puede escapar con energía mayor a la original, disminuyendo el momento angular del agujero negro.

La Figura 4.1 resume las principales superficies geométricas del espacio-tiempo de Kerr. A diferencia del caso esféricamente simétrico de Schwarzschild, la presencia de rotación divide el horizonte en dos superficies $r_{\pm}$ y genera una región ergosférica donde la métrica cambia de carácter debido al arrastre del marco de referencia. La singularidad adopta la forma de un anillo, reflejando la ruptura de la simetría esférica.

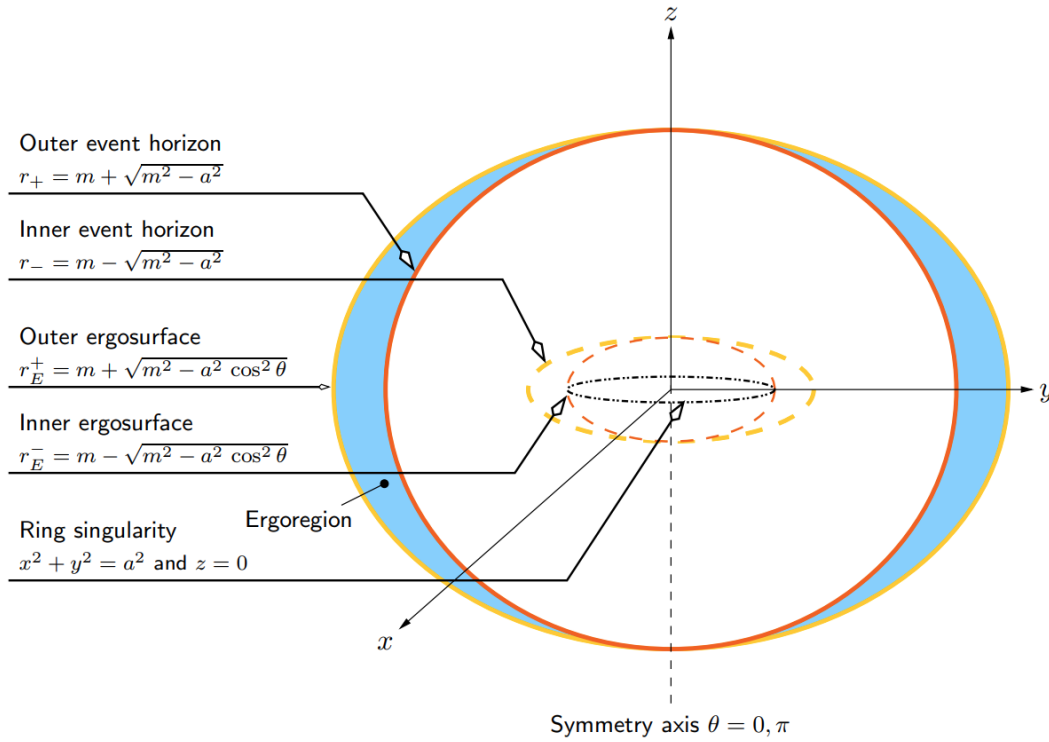


Figura 4.1: Estructura geométrica del espacio-tiempo de Kerr. La figura muestra las dos superficies de horizonte: el horizonte exterior r_+ y el horizonte interior o de Cauchy r_- , junto con las ergosuperficies exterior e interior definidas por la condición $g_{tt} = 0$. La región comprendida entre estas últimas constituye la ergosfera, donde el arrastre del marco de referencia obliga a todo observador a co-rotar con el agujero negro. En el plano ecuatorial se indica además la singularidad en anillo característica de Kerr. Figura tomada de Visser (2007)

4.3. Dinámica de partículas en el espacio-tiempo de Kerr

En la métrica de Kerr en coordenadas de Boyer-Lindquist, la ecuación del Lagrangiano toma la forma

$$\mathcal{L} = g_{tt}\dot{t}^2 + 2g_{t\phi}\dot{t}\dot{\phi} + g_{\phi\phi}\dot{\phi}^2 + g_{rr}\dot{r}^2, \quad (4.10)$$

De manera explícita, se tiene

$$\mathcal{L} = -\frac{1}{2} \left(1 - \frac{2Mr}{\Sigma} \right) \dot{t}^2 - \frac{2Mar \sin^2 \theta}{\Sigma} \dot{t}\dot{\phi} + \frac{1}{2} \frac{\Sigma}{\Delta} \dot{r}^2 + \frac{1}{2} \Sigma \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2 r \sin^2 \theta}{\Sigma} \right) \sin^2 \theta \dot{\phi}^2. \quad (4.11)$$

4.3.1. Constantes de movimiento

Como se discutió en el Capítulo 2, la presencia de simetrías continuas en el espacio-tiempo, se traduce en la existencia de constantes de movimiento. En la métrica de Kerr, la invarianza temporal y la simetría axial implican la existencia de dos vectores de Killing:

$$\xi_{(t)}^\mu = (1, 0, 0, 0), \quad \xi_{(\phi)}^\mu = (0, 0, 0, 1), \quad (4.12)$$

asociados a traslaciones en t y rotaciones en el eje ϕ , respectivamente. Estas simetrías corresponden a la energía específica E y el momento angular azimutal L de la partícula.

El Lagrangiano no depende explícitamente de t , por lo que la ecuación de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial t} = 0 \quad (4.13)$$

se reduce a

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} \right) = 0, \quad (4.14)$$

lo que implica que

$$p_t = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{t}} = g_{tt}\dot{t} + g_{t\phi}\dot{\phi} \quad (4.15)$$

es constante a lo largo de la geodésica. De forma análoga, como $\mathcal{L}$ no depende explícitamente de ϕ , se tiene

$$\frac{d}{d\tau} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} \right) = 0, \quad (4.16)$$

y por tanto

$$p_\phi = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\phi}} = g_{t\phi} \dot{t} + g_{\phi\phi} \dot{\phi} \quad (4.17)$$

es también constante. Entonces, podemos expresar estas cantidades como

$$E = -p_t, \quad L = p_\phi \quad (4.18)$$

En términos de los vectores de Killing, estas constantes pueden escribirse como

$$E = -p_\mu \xi_{(t)}^\mu, \quad L = p_\mu \xi_{(\phi)}^\mu, \quad (4.19)$$

Además de estas dos constantes, el espacio-tiempo de Kerr admite una tercera cantidad conservada, descubierta por [Carter \(1968\)](#). A diferencia de E y L , esta constante se asocia a la existencia de un tensor de Killing de segundo orden y a la separabilidad de la ecuación de Hamilton-Jacobi. Para una partícula masiva, la constante de Carter puede escribirse como

$$Q = p_\theta^2 + \cos^2 \theta \left[a^2 (1 - E^2) + \frac{L^2}{\sin^2 \theta} \right], \quad (4.20)$$

donde $p_\theta = g_{\theta\theta} \dot{\theta} = \Sigma \dot{\theta}$ es el momento conjugado a la coordenada polar. A partir de las ecuaciones de Euler-Lagrange para θ y de la normalización de la cuadrivelocidad, se puede comprobar que Q permanece constante a lo largo de la geodésica. Esta constante cuantifica la amplitud del movimiento fuera del plano ecuatorial.

De esta manera, el movimiento de una partícula de prueba en el espacio-tiempo de Kerr queda completamente descrito por el conjunto de constantes de movimiento

$$(E, L, Q) \quad (4.21)$$

En el plano ecuatorial ($\theta = \pi/2$), donde $\Sigma = r^2$ y $\sin^2 \theta = 1$, el movimiento fuera del plano está suprimido y la constante de Carter se anula ($Q = 0$). En este caso, el Lagrangiano toma la forma

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2} \left[- \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t}^2 - \frac{4Ma}{r} \dot{t} \dot{\phi} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) \dot{\phi}^2 + \frac{r^2}{\Delta} \dot{r}^2 \right]. \quad (4.22)$$

A partir de éste, las constantes de movimiento se obtienen como

$$E = \left(1 - \frac{2M}{r} \right) \dot{t} + \frac{2Ma}{r} \dot{\phi}, \quad L = -\frac{2Ma}{r} \dot{t} + \left(r^2 + a^2 + \frac{2Ma^2}{r} \right) \dot{\phi}. \quad (4.23)$$

4.3.2. Momento angular y ZAMO

Con el fin de describir físicamente los procesos que ocurren en las dinámicas a rededor de agujeros negros rotantes, resulta conveniente explorar el significado físico de estas cantidades conservadas

a profundidad. Típicamente la masa del agujero negro M y el momento angular del agujero negro por unidad de masa a son interpretados como cantidades invariantes que definen de manera única la geometría del espacio al rededor de un agujero negro (Carter, 1971; Robinson, 1975). Estos parámetros se interpretan como cargas geométricas globales del espacio-tiempo, definidas mediante integrales de Komar en el infinito, válidas para una métrica estacionaria y asintóticamente plana (Wald, 1984). En consecuencia, tanto M como a son cantidades físicas intrínsecas y globales que no dependen de ningún observador particular. Por otro lado, la constante de movimiento E típicamente es relacionada con la energía de la partícula y la constante de movimiento L es asociada con el momento angular de la partícula, ambas cantidades *medidas por un observador estático en el infinito*.

Para Schwarzschild, existe una familia de observadores estáticos, los cuales están definidos por una cuatriveelocidad proporcional al vector de Killing temporal, los cuales efectivamente pueden “medir” estos valores de energía y momento angular para la partícula:

$$\mathcal{E}_{stat} = \frac{E}{\sqrt{-g_{tt}}} \quad (4.24)$$

$$\mathcal{L}_{stat} = mL \quad (4.25)$$

donde $\mathcal{E}_{stat}$ y $\mathcal{L}_{stat}$ son las energías y el momento angular medido por el observador estático. La energía medida por un observador estático converge a la cantidad conservada en el infinito ($g_{tt} \rightarrow -1$). Por otro lado, L es el momento angular por unidad de masa medido por cualquier observador estático, no necesariamente en el infinito.

El caso de Kerr es un poco mas complejo, pues no es una métrica estática debido a que tiene elementos cruzados de la forma:

$$d\phi dt. \quad (4.26)$$

Estos términos no permiten la existencia de observadores estáticos, salvo en el infinito. Para dar un significado físico a estas cantidades, podemos invocar al sistema de referencia llamado ZAMO (“Zero Angular Momentum Observer”), el cual tiene velocidad angular:

$$\Omega = \omega = -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}}, \quad (4.27)$$

de modo que su momento angular local es 0. Esto implica que este observador rota junto con el frame dragging y todas las cantidades medidas son puramente propias de la partícula. La energía y momento angular específico medidos por este observador son (Bardeen et al., 1972):

$$\mathcal{E}_{ZAMO} = \frac{E - \omega L}{\alpha} \quad (4.28)$$

$$\mathcal{L}_{ZAMO} = \frac{L}{\sqrt{g_{\phi\phi}}} \quad (4.29)$$

Donde:

$$\alpha = \frac{r\sqrt{\Delta}}{\sqrt{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta \sin^2 \theta}}. \quad (4.30)$$

Para un observador en el infinito, $\omega \rightarrow 0$ y $\alpha \rightarrow 1$, por lo que $\mathcal{E}_{\text{ZAMO}} = E$. De la misma manera, para cualquier ZAMO el momento angular local medido $\mathcal{L}_{\text{ZAMO}}$ por unidad de masa converge a la cantidad L en el infinito.

4.3.3. Geodésicas ecuatoriales

Una vez identificadas las constantes de movimiento y profundizada la interpretación física del momento angular a través del ZAMO, es posible reescribir las ecuaciones de Euler–Lagrange en términos de las cantidades conservadas E y L . En general, las ecuaciones geodésicas pueden separarse en las variables r y θ , sin embargo, como se menciono anteriormente, restringiremos el análisis al caso de movimiento confinado al plano ecuatorial,

$$\theta = \frac{\pi}{2}, \quad Q = 0, \quad (4.31)$$

de modo que $\Sigma = r^2$ y $\sin^2 \theta = 1$.

A partir de la relación general entre la cuadrivelocidad y los momentos conjugados,

$$p_\mu = g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu, \quad (4.32)$$

y usando $p_t = -E$ y $p_\phi = L$, se obtiene un sistema lineal para $\dot{t}$ y $\dot{\phi}$ que puede resolverse de manera explícita. Las soluciones son

$$\dot{t} = \frac{(r^2 + a^2 + 2Ma^2/r)E - (2Ma/r)L}{\Delta}, \quad \dot{\phi} = \frac{(1 - 2M/r)L + (2Ma/r)E}{\Delta}. \quad (4.33)$$

La ecuación radial $r(\tau)$ se obtiene a partir de la normalización de la cuadrivelocidad. Para partículas masivas, cuyas geodésicas son temporales,

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = -1, \quad (4.34)$$

Utilizando las definiciones de E y L , la ecuación radial se escribe como

$$\dot{r}^2 = (E^2 - 1) + \frac{2M}{r} + \frac{a^2(E^2 - 1) - L^2}{r^2} + \frac{2M(aE - L)^2}{r^3}. \quad (4.35)$$

Esta ecuación controla el movimiento alrededor del agujero negro. Su estructura revela la interacción entre la atracción gravitatoria (términos en M/r) y los efectos de la rotación (términos en a). Los signos y magnitudes de E y L determinan si la partícula sigue una órbita circular ligada, cae en el agujero negro o escapa al infinito.

En el límite no rotante ($a \rightarrow 0$), la expresión se reduce al caso de Schwarzschild:

$$\dot{r}^2 = (E^2 - 1) + \frac{2M}{r} - \frac{L^2}{r^2} + \frac{2ML^2}{r^3}. \quad (4.36)$$

4.3.4. El potencial efectivo

La ecuación radial obtenida en la sección anterior, puede reescribirse de forma análoga al movimiento unidimensional de una partícula en presencia de un potencial efectivo. Para ello, separamos la dependencia explícita en E y escribimos

$$\dot{r}^2 = E^2 - V_{\text{eff}}(r), \quad (4.37)$$

lo que permite identificar el potencial efectivo como

$$V_{\text{eff}}(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{L^2 - a^2(E^2 - 1)}{r^2} - \frac{2M(aE - L)^2}{r^3}. \quad (4.38)$$

4.4. Órbitas circulares e ISCO

La ecuación radial, permite estudiar directamente la existencia de órbitas circulares en el plano ecuatorial. Una órbita de circular de radio constante $r = r_0$ requiere que el movimiento satisfaga simultáneamente

$$\dot{r}(r_0) = 0, \quad \left. \frac{d\dot{r}^2}{dr} \right|_{r=r_0} = 0. \quad (4.39)$$

La primera condición determina que la energía cumple

$$E^2 = V_{\text{eff}}(r_0), \quad (4.40)$$

mientras que la segunda fija la relación entre E y L que permite mantener el radio contante. Dado que $\dot{r}^2 = E^2 - V_{\text{eff}}(r)$, la condición $\frac{d\dot{r}^2}{dr} = 0$ es equivalente a imponer

$$\left. \frac{dV_{\text{eff}}}{dr} \right|_{r_0} = 0, \quad (4.41)$$

es decir, que la órbita se localice en un extremo del potencial efectivo.

Aplicando estas condiciones y resolviendo para E y L se obtiene (ver [Bardeen et al. \(1972\)](#))

$$E(r) = \frac{r^{3/2} - 2Mr^{1/2} \pm a\sqrt{M}}{r^{3/4}\sqrt{r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2a\sqrt{M}}}, \quad (4.42)$$

$$L(r) = \pm \frac{\sqrt{M} \left(r^2 \mp 2a\sqrt{Mr} + a^2 \right)}{r^{3/4}\sqrt{r^{3/2} - 3Mr^{1/2} \pm 2a\sqrt{M}}}. \quad (4.43)$$

Los signos indican la dirección de rotación de la partícula en relación con la rotación del agujero negro. El signo superior hace referencia a las órbitas corrotantes, en las que el momento angular L es positivo ($L > 0$), mientras que el signo inferior corresponde a las órbitas contrarrotantes, en las que L es negativo ($L < 0$). De estas expresiones, podemos ver que la rotación del agujero negro altera tanto la energía como el momento angular requerido para mantener una órbita circular.

4.4.1. La ISCO

Como se mencionó en la sección 3, la estabilidad de una órbita requiere

$$\frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} > 0. \quad (4.44)$$

El límite en el cual esta desigualdad se anula define el radio de la órbita circular más interna estable o ISCO, para el cual se cumple

$$\left. \frac{d^2 V_{\text{eff}}}{dr^2} \right|_{r=r_{\text{ISCO}}} = 0. \quad (4.45)$$

Al resolver esta condición se obtiene (Bardeen et al., 1972)

$$r_{\text{ISCO}}^{\pm} = M \left\{ 3 + Z_2 \mp \sqrt{(3 - Z_1)(3 + Z_1 + 2Z_2)} \right\}, \quad (4.46)$$

donde

$$Z_1 = 1 + (1 - a^2/M^2)^{1/3} \left[(1 + a/M)^{1/3} + (1 - a/M)^{1/3} \right], \quad (4.47)$$

$$Z_2 = \sqrt{3a^2/M^2 + Z_1^2}. \quad (4.48)$$

La rama “+” corresponde a órbitas corrotantes, mientras que “−” corresponde a órbitas contrarrotantes. Podemos notar que el radio de la ISCO depende explícitamente del parámetro de rotación a . Para un agujero negro no rotante ($a = 0$), se obtiene $r_{\text{ISCO}} = 6M$, como en el caso de Schwarzschild, mientras que para un agujero negro rotante extremo ($a = M$) se tiene

$$r_{\text{ISCO}}^{\text{cor}} = M, \quad r_{\text{ISCO}}^{\text{con}} = 9M. \quad (4.49)$$

Esto implica que la rotación permite que una partícula pueda acercarse mucho más al horizonte si se mueve en la misma dirección que el espín del agujero negro, mientras que ocurre lo contrario para órbitas contrarrotantes. Esta marcada asimetría es una manifestación directa del arrastre del marco inercial.

La Figura 4.2 muestra la dependencia del radio de la órbita circular más interna estable (ISCO) con el parámetro de rotación adimensional a/M . Para valores positivos de a , correspondientes a órbitas corrotantes, la ISCO disminuye monótonamente desde $6M$ hasta $r_{\text{ISCO}} = M$ en el caso extremo $a = M$. Esta disminución evidencia el arrastre del marco de referencia, es decir, una partícula que órbita en la misma dirección del giro del agujero negro requiere un momento angular menor para mantenerse en equilibrio, lo que le permite acceder a regiones más profundas del

potencial gravitacional antes de volverse inestable. Por otro lado, para órbitas contrarrotantes la ISCO crece con a , alcanzando valores superiores a $9M$ cuando la rotación es cercana al límite extremo. Esto demuestra que la rotación actúa como una barrera efectiva para partículas que se mueven en sentido contrario al giro del agujero negro. Además, se incluye el horizonte exterior r_+ , que disminuye al aumentar a , y el borde de la ergosfera r_{erg} . La región gris representa la extensión de esta última, mientras que la región roja corresponde al interior del horizonte de eventos. Al mismo tiempo, el hecho de que el radio de la ISCO dependa de a introduce una sutileza importante desde el punto de vista dinámico. Al comparar tiempos de caída hacia la ISCO para distintos valores del espín, no solo se está modificando la cinemática de la partícula, sino también el radio final de integración. Como consecuencia, la variación de los tiempos de infall puede reflejar tanto efectos relativistas locales asociados a la rotación del espacio-tiempo como cambios puramente geométricos en la posición del umbral de estabilidad, lo que dificulta una interpretación directa de las tendencias observadas.

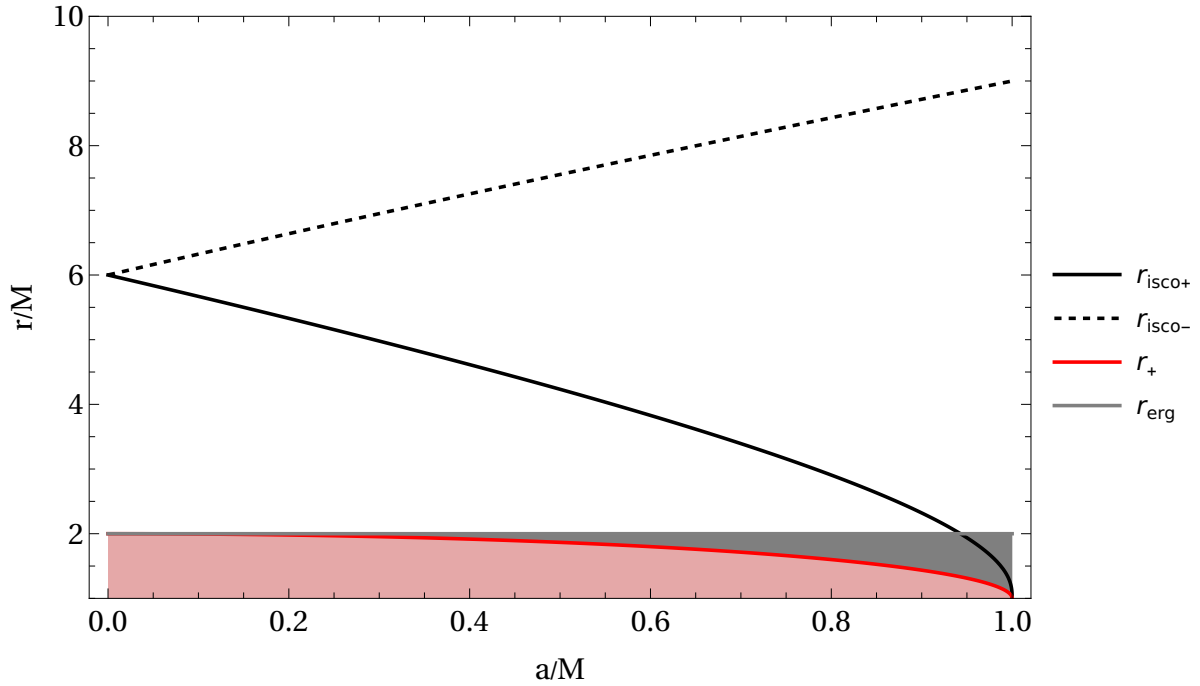


Figura 4.2: Dependencia del radio de la órbita circular más interna estable (ISCO) con el parámetro de rotación adimensional a/M . La curva continua muestra la ISCO corrotante r_{ISCO}^- , mientras que la curva segmentada corresponde al ISCO contrarrotante r_{ISCO}^+ . Se incluyen también el horizonte exterior r_+ (curva roja) y el borde ecuatorial de la ergosfera r_{erg} (curva gris). La región gris representa la extensión de la ergosfera, mientras que la región rosada corresponde al interior del horizonte de eventos. Notar que la rotación del agujero negro reduce significativamente la ISCO corrotante, alcanzando $r_{ISCO} = M$ para un agujero negro extremo ($a = M$), mientras que la ISCO contrarrotante se desplaza hacia radios mayores.

4.5. Tiempos de caída

Al reescribir la ecuación radial de la forma

$$\frac{dr}{d\tau} = \pm \sqrt{(E^2 - 1) + \frac{2M}{r} + \frac{a^2(E^2 - 1) - L^2}{r^2} + \frac{2M(aE - L)^2}{r^3}}, \quad (4.50)$$

es posible obtener de manera directa el tiempo propio τ requerido para que una partícula caiga desde un radio inicial r_0 hasta un radio final r_f . De esta expresión se obtiene

$$d\tau = \frac{dr}{\sqrt{(E^2 - 1) + \frac{2M}{r} + \frac{a^2(E^2 - 1) - L^2}{r^2} + \frac{2M(aE - L)^2}{r^3}}}, \quad (4.51)$$

y, por tanto, el tiempo propio transcurrido entre r_0 y r_f está dado por la integral

$$\tau = \int_{r_f}^{r_0} \frac{dr}{\sqrt{(E^2 - 1) + \frac{2M}{r} + \frac{a^2(E^2 - 1) - L^2}{r^2} + \frac{2M(aE - L)^2}{r^3}}}. \quad (4.52)$$

Esta integración, permite estudiar la dependencia de los tiempos de caída con la energía E , el momento angular L , y el parámetro de rotación del agujero negro a . La forma del denominador del integrando muestra que el comportamiento de estos movimientos se encuentra determinado por la competencia entre la atracción gravitacional, dada por el término $2M/r$, la barrera centrifuga asociada a L y la contribución relativista del término $a^2(E^2 - 1)$ y el acoplamiento $(aE - L)^2$, que refleja el frame dragging de Kerr.

En el límite $a \rightarrow 0$, la integral se reduce a la expresión correspondiente al espacio-tiempo de Schwarzschild, y recupera los tiempos propios del colapso radial newtoniano relativista. La comparación entre Kerr y Schwarzschild permite aislar el efecto neto de la rotación sobre las escalas temporales del movimiento.

4.6. Complejidades de la dinámica y normalización por observadores ZAMO

Si bien el tiempo propio τ proporciona una medida físicamente bien definida del intervalo temporal experimentado por una partícula en caída libre, su interpretación directa puede resultar ambigua en regímenes donde la dinámica presenta una estructura espacial compleja. En particular, en el espacio-tiempo de Kerr, las trayectorias con momento angular no nulo pueden desarrollar fases prolongadas de movimiento casi azimutal, conocidas como *whirl*, durante las cuales la partícula permanece orbitando a radios casi constantes antes de continuar su caída radial. Estas fases contribuyen de manera significativa al tiempo propio total, aun cuando no estén asociadas a un avance radial efectivo hacia el agujero negro.

Desde el punto de vista de los tiempos característicos de colapso o ensamblaje gravitacional, este tipo de contribuciones puede enmascarar la dinámica radial dominante y dificultar la comparación entre distintos regímenes de energía, momento angular o rotación del espacio-tiempo. Debido a

esto, es conveniente introducir una normalización que permita distinguir entre un aumento del tiempo asociado a efectos geométricos acumulativos y una ralentización genuina de la dinámica radial.

Para este propósito, consideramos observadores localmente no rotantes, conocidos como *Zero Angular Momentum Observers* (ZAMOs). Estos observadores están definidos de tal manera que poseen momento angular nulo con respecto al infinito y, por lo tanto, corrotan con el arrastre del marco inercial inducido por la rotación del agujero negro. Desde su punto de vista local, la descomposición del movimiento de la partícula separa de forma natural las contribuciones radiales y azimutales, proporcionando una referencia física bien adaptada a la geometría de Kerr.

A lo largo de una trayectoria dada, puede definirse una longitud propia s_{ZAMO} medida por estos observadores, que cuantifica la distancia espacial recorrida por la partícula en la geometría local del espacio-tiempo (Bardeen et al., 1972). Usando la descomposición 3+1 para proyectar la longitud sobre la familia de observadores ZAMO (Gourgoulhon, 2007), esta longitud se puede calcular como:

$$s_{\text{ZAMO}}(r_0 \rightarrow r_f; E, L, a) = \int_{r_f}^{r_0} \sqrt{\gamma_{rr}(r) + \gamma_{\phi\phi}(r) \left(\frac{\dot{\phi} - \omega(r)\dot{t}}{\dot{r}} \right)^2} dr. \quad (4.53)$$

Donde:

$$\gamma_{rr}(r) = \frac{r^2}{\Delta}, \quad (4.54)$$

$$\gamma_{\phi\phi}(r) = \frac{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta}{r^2}, \quad (4.55)$$

$$\omega(r) = \frac{2aMr}{(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta}. \quad (4.56)$$

Si la trayectoria es radial, el segundo término dentro de la raíz se anula y la integración directa entrega:

$$s_{\text{ZAMO}}^{(\text{rad})}(r_0 \rightarrow r_f; a) = \left[\sqrt{r^2 - 2Mr + a^2} + M \ln \left(r - M + \sqrt{r^2 - 2Mr + a^2} \right) \right]_{r_f}^{r_0}. \quad (4.57)$$

Al normalizar el tiempo propio total por esta longitud,

$$\frac{\tau}{s_{\text{ZAMO}}}, \quad (4.58)$$

se obtiene una cantidad con dimensiones de tiempo por longitud, que podría interpretarse como una escala inversa de velocidad media efectiva a lo largo de la trayectoria.

Esta normalización cumple dos objetivos conceptuales importantes. Por un lado, atenúa la influencia de fases de movimiento casi circular o altamente dilatadas geométricamente, permitiendo aislar la contribución dominante asociada al transporte radial. Por otro, facilita la comparación entre trayectorias con diferentes longitudes geométricas, eliminando en parte el efecto trivial de

que una partícula que recorre un camino más largo tarde necesariamente más tiempo en completar su caída. En este sentido, mientras que el tiempo propio τ refleja el intervalo temporal total acumulado por la partícula, la razón τ/s_{ZAMO} proporciona una medida más directamente asociada a la eficiencia dinámica del infall. Ambas cantidades contienen información física relevante, pero responden a preguntas distintas. La primera caracteriza el tiempo absoluto de colapso, mientras que la segunda permite identificar regímenes en los que la rotación del espacio-tiempo acelera o ralentiza el movimiento efectivo de la partícula, más allá de efectos puramente geométricos.

Capítulo 5

El rol del momento angular en la dinámica relativista

En los capítulos anteriores analizamos las bases matemáticas para analizar la dinámica relativista y el tiempo de caída libre de partículas en distintas órbitas alrededor de agujeros negros de Schwarzschild y Kerr. En este capítulo exploraremos numéricamente la relación directa entre la dinámica relativista de las partículas y los parámetros físicos involucrados. Para ello, analizaremos el potencial efectivo radial en Kerr y su descomposición en términos de contribuciones atractivas y repulsivas, asociadas directamente a los parámetros conservados E y L y al parámetro de rotación del agujero negro a . Con base en esta descomposición, mostraremos cómo es posible explicar de manera heurística las tendencias observadas en los resultados numéricos obtenidos de la integración de los tiempos de caída, ya sea normalizados o no normalizados por s_{ZAMO} .

5.1. Análisis heurístico del potencial efectivo radial en Kerr

La ecuación radial que gobierna el movimiento de una partícula en el plano ecuatorial de Kerr es

$$\dot{r}^2 = \frac{R(r)}{r^4}, \quad (5.1)$$

donde

$$R(r) = \left[E(r^2 + a^2) - aL \right]^2 - \Delta \left[r^2 + (L - aE)^2 \right]. \quad (5.2)$$

Escribiremos esta ecuación en una forma “mecánica” como

$$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + V_{\text{eff}}(r; M, L, a, E) = \frac{E^2 - 1}{2}, \quad (5.3)$$

donde el potencial efectivo es:

$$V_{\text{eff}}(r; M, L, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} + \frac{a^2(1 - E^2)}{2r^2} - \frac{M(L - aE)^2}{r^3}. \quad (5.4)$$

La ecuación (5.3) admite una interpretación directamente análoga a la mecánica newtoniana. El primer término a la izquierda representa la *energía cinética* radial, mientras que V_{eff} actúa como un potencial gravitatorio efectivo que resume todos los efectos geométricos del espacio-tiempo. El término del lado derecho, $(E^2 - 1)/2$, determina si la órbita es ligada o no. Para una partícula de masa $m = 1$, este término representa la desviación entre la energía total y la energía en reposo. Órbitas con $E < 1$ son ligadas, mientras que $E > 1$ corresponde a órbitas no ligadas o trayectorias de dispersión.

El potencial efectivo en la forma (5.4) es especialmente útil porque permite separar la contribución gravitacional neta en Kerr en cuatro términos de significado físico claro:

1. **Gravedad clásica:** el término $-M/r$ reproduce la atracción gravitatoria newtoniana asociada a la masa del agujero negro.
2. **Barrera centrífuga:** el término $L^2/(2r^2)$ corresponde a la barrera centrífuga clásica asociada al momento angular orbital de la partícula. Actúa de manera repulsiva e inhibe la caída radial.
3. **Acoplamiento spin-energía:** el término $a^2(1 - E^2)/(2r^2)$ es puramente relativista y no aparece en Schwarzschild. Su signo depende de si la órbita es ligada ($E < 1$) o no ($E > 1$), modificando la estructura del potencial a distancias intermedias. Este término crece en magnitud cuando el agujero negro tiene mayor valor de a .
4. **Acoplamiento spin-órbita-energía:** el término $-M(L - aE)^2/r^3$ incorpora el efecto atractivo producido por el momento angular de la partícula pero corregido por un factor aE . Puede entenderse introduciendo el *momento angular efectivo*

$$L_{\text{eff}} = L - aE, \quad (5.5)$$

que mide la diferencia entre el momento angular propio de la partícula y el momento angular “inducido” por la rotación del agujero negro.

De manera directa, se puede ver que un aumento del potencial efectivo tiende a disminuir la velocidad radial de la partícula $\dot{r}$. Este efecto ha sido explorado previamente en [Das and Chakrabarti \(2008\)](#), donde se muestra que la rotación del agujero negro puede incrementar la velocidad radial del flujo, particularmente en configuraciones con bajo momento angular y alto spin. En este trabajo mostraremos cómo la modificación del potencial efectivo inducida por la rotación se traduce, al integrarse a lo largo de trayectorias completas, en una reducción sistemática del tiempo propio de caída bajo cierto espacio de parámetros, dando una explicación geométrica y energética a dichos efectos.

5.2. Análisis de casos particulares

Para entender a profundidad los términos en el potencial efectivo podemos analizar algunos casos extremos.

5.2.1. Agujero negro de Schwarzschild ($a = 0$)

En ausencia de rotación, el potencial efectivo se reduce a

$$V_{\text{eff}}(r; M, L, a = 0, E) = -\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}. \quad (5.6)$$

En este caso el momento angular de la partícula no solo actúa como una barrera centrífuga, representada por el término $L^2/(2r^2)$, sino que también contribuye a la atracción gravitacional mediante el término $-ML^2/r^3$. Este último es completamente relativista y no posee análogo en la dinámica newtoniana. Su origen está en la curvatura del espacio-tiempo de Schwarzschild: en relatividad general la energía asociada al movimiento orbital contribuye de forma efectiva a la gravitación, lo que modifica la dinámica radial incluso para una partícula de prueba. La contribución neta del momento angular L sobre la dinámica relativista puede ser descrita en términos de la función

$$V_L(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{ML^2}{r^3}, \quad (5.7)$$

el cual puede reescribirse como

$$V_L(r) = \frac{L^2}{2r^2} \left(1 - \frac{2M}{r} \right). \quad (5.8)$$

Para $r > 2M$, el factor entre paréntesis es estrictamente positivo, de modo que $V_L(r) > 0$ en toda la región exterior al horizonte de eventos. Por lo tanto, el efecto neto del momento angular L continúa siendo una barrera centrífuga en relatividad general, aunque atenuada por la corrección relativista atractiva proporcional a $-ML^2/r^3$. Esta contribución relativista no llega a invertir el signo de V_L fuera del horizonte, pero sí reduce su magnitud comparada con la barrera puramente newtoniana. En Schwarzschild, a diferencia de Kerr, no existe posibilidad de que la contribución efectiva asociada a L invierta su signo fuera del horizonte.

5.2.2. Partícula sin momento angular intrínseco ($L = 0$)

Una partícula sin momento angular intrínseco se mueve sometida al potencial efectivo

$$V_{\text{eff}}(r; M, L = 0, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{a^2(1 - E^2)}{2r^2} - \frac{Ma^2E^2}{r^3}. \quad (5.9)$$

Notemos que, además del término newtoniano $-M/r$, aparecen dos contribuciones exclusivamente relativistas. El término proporcional a Ma^2E^2/r^3 es negativo y, por lo tanto, siempre incrementa la atracción gravitacional. De este modo volvemos a encontrar el efecto de que el movimiento también “gravita”, pero ahora asociado a la rotación del agujero negro a través del parámetro a y de la energía de la partícula.

Por otro lado, el término $a^2(1 - E^2)/(2r^2)$ cambia de signo según la energía. Para órbitas ligadas

($E < 1$) es positivo y actúa como una contribución repulsiva, mientras que para órbitas no ligadas ($E > 1$) se vuelve negativo y por lo tanto atractivo. El efecto global de las correcciones relativistas debidas al spin puede analizarse agrupando ambos términos en la función

$$V_a(r; E) = a^2 \left(\frac{1 - E^2}{2r^2} - \frac{ME^2}{r^3} \right), \quad (5.10)$$

que representa la parte del potencial efectivo que desaparece al apagar la rotación ($a = 0$). El signo de V_a determina si la contribución relativista total debida al spin es netamente repulsiva ($V_a > 0$) o atractiva ($V_a < 0$).

Nótese que este es un diagnóstico local del potencial en un radio dado.

Definiendo la energía crítica

$$E_a(r) \equiv \sqrt{\frac{r}{r + 2M}}, \quad (5.11)$$

podemos resumir el comportamiento como

$$E < E_a(r) \implies V_a(r; E) > 0 \quad (\text{corrección relativista neta repulsiva}), \quad (5.12)$$

$$E > E_a(r) \implies V_a(r; E) < 0 \quad (\text{corrección relativista neta atractiva}). \quad (5.13)$$

De las ecuaciones se observa que $E_a(r) < 1$ para todo $r > 0$, y que $E_a(r) \rightarrow 1$ cuando $r \rightarrow \infty$. En particular, para partículas con $E > 1$ (órbitas no ligadas) se tiene siempre $E^2 > r/(r + 2M)$, por lo que $V_a(r; E)$ es estrictamente negativo y la contribución relativista asociada al spin del agujero negro es netamente atractiva a cualquier radio. Por otro lado, al ser $E_a(r)$ una función decreciente, para radios cercanos al horizonte de eventos del agujero negro es posible obtener un efecto neto atractivo de la rotación del agujero negro incluso para órbitas ligadas (ver tabla 5.1).

Cuadro 5.1: Valores de la energía crítica $E_a(r) = \sqrt{r/(r + 2M)}$ para distintos radios (con $M = 1$). Para $E > E_a(r)$ la contribución relativista debida al spin del agujero negro (V_a) es netamente atractiva.

r/M	$E_a(r)$
100	0,9950
20	0,9535
10	0,9129
6	0,8452
5	0,8165
4	0,7746
3	0,7071

5.2.3. Partícula en movimiento críticamente ligado ($E = 1$)

Para una partícula con energía críticamente ligada ($E = 1$), el potencial efectivo se reduce a

$$V_{\text{eff}}(r; M, L, a, E = 1) = -\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} - \frac{M(L-a)^2}{r^3}. \quad (5.14)$$

En esta expresión volvemos a encontrar el término newtoniano $-M/r$ junto con una barrera centrífuga clásica, representada por $L^2/(2r^2)$, pero ahora corregida por un término atractivo puramente relativista proporcional a $-(L-a)^2/r^3$. Este último puede interpretarse como un *acoplamiento spin-órbita*, en el que la combinación $L_{\text{eff}} = L - a$ actúa como un momento angular efectivo en presencia de arrastre de marcos.

La contribución neta del momento angular sobre la dinámica radial para $E = 1$ queda entonces contenida en la función

$$V_{L,a}(r) = \frac{L^2}{2r^2} - \frac{M(L-a)^2}{r^3}. \quad (5.15)$$

Su signo determina si el efecto global del momento angular resulta predominantemente repulsivo ($V_{L,a} > 0$) o atractivo ($V_{L,a} < 0$). Escribiendo

$$V_{L,a}(r) = \frac{1}{2r^3} \left[rL^2 - 2M(L-a)^2 \right], \quad (5.16)$$

la condición $V_{L,a} = 0$ se traduce en la ecuación:

$$r - 2M \left(1 - \frac{a}{L} \right)^2 = 0. \quad (5.17)$$

Es útil definir la razón entre los momentos angulares como $\lambda = \frac{a}{L}$, donde un valor positivo de λ indica una órbita corrotante, mientras que uno negativo indica una órbita contrarrotante. De la misma manera, un valor de $|\lambda| \ll 1$ indica una rotación baja del agujero negro comparado con la partícula, mientras un valor alto de $|\lambda| \gg 1$ indica lo contrario. Además, debido a que $a < M$ por la conjetura de censura cósmica, entonces $\lambda < M/L$ en todos los casos. Para $r > 2M$ esta ecuación admite dos soluciones reales para el valor crítico:

$$\lambda_c^\pm(r) = 1 \pm \sqrt{\frac{r}{2M}} \quad (5.18)$$

Valores de λ dentro del intervalo $[\lambda_c^-(r), \lambda_c^+(r)]$ producen un término neto repulsivo, mientras valores fuera de dicho intervalo incrementan la atracción gravitacional. De la tabla 5.2 se puede inferir que a radios altos se necesitaría una fuerte dominancia de $|a|$ sobre $|L|$ para producir un efecto atractivo, disminuyendo esta necesidad para radios más pequeños. Por otro lado, las órbitas contrarrotantes tienen más espacio de volverse atractivas que las corrotantes, pues los intervalos en los cuales la repulsividad domina están levemente desplazados hacia valores positivos de λ . El frame dragging aporta un término efectivo que desplaza el balance entre los términos de momento angular, rompiendo la simetría corrotante-contrarrotante que existe en Schwarzschild. Nótese que

en las cercanías del horizonte de eventos, la atracción domina en todas las órbitas contrarrotantes.

Cuadro 5.2: Valores de $\lambda_c^\pm(r)$ para $M = 1$. Para $\lambda_- < \lambda < \lambda_+$ la contribución combinada del momento angular sobre el potencial efectivo ($V_{L,a}$) es netamente repulsiva, mientras para $\lambda < \lambda_-$ o $\lambda > \lambda_+$ es netamente atractiva.

r/M	λ_-	λ_+
2	0	2
3	-0,2247	2,2247
4	-0,4142	2,4142
5	-0,5811	2,5811
6	-0,7321	2,7321
10	-1,2361	3,2361
20	-2,1623	4,1623
100	-6,0711	8,0711

A partir de estos tres casos límite, podemos ver que la relatividad general introduce una dinámica mucho más compleja que la newtoniana. La interacción entre la barrera centrífuga clásica y los términos relativistas dependientes del momento angular a producen regímenes atractivos y repulsivos muy dependientes de la relación entre los parámetros de la partícula.

5.3. Análisis del caso general

El potencial efectivo para el caso más general es:

$$V_{\text{eff}}(r; M, L, a, E) = -\frac{M}{r} + \frac{L^2}{2r^2} + \frac{a^2(1 - E^2)}{2r^2} - \frac{M(L - aE)^2}{r^3}. \quad (5.19)$$

Desde el punto de vista del potencial efectivo, la energía específica E cumple un doble papel en Kerr. En primer lugar, controla el signo del término puramente asociado al spin,

$$\frac{a^2(1 - E^2)}{2r^2}, \quad (5.20)$$

que es repulsivo para órbitas ligadas ($E < 1$), desaparece en el caso crítico ($E = 1$) y se vuelve atractivo para órbitas no ligadas ($E > 1$). En segundo lugar, E entra en la combinación $L - aE$ que aparece en el término de acoplamiento spin-órbita,

$$-\frac{M(L - aE)^2}{r^3}, \quad (5.21)$$

de modo que la razón adimensional

$$\mu \equiv \frac{aE}{L} \quad (5.22)$$

determina cuán eficazmente la rotación del agujero negro puede competir con la barrera centrífuga

clásica. Para $|\mu| \ll 1$ se recupera un régimen cercano a Schwarzschild, dominado por $L^2/(2r^2)$, mientras que valores $|\mu| \gg 1$ corresponden a un régimen relativista en el que el término $\propto (L - aE)^2$ puede hacer más atractiva la dinámica que en el caso no rotante, especialmente a radios pequeños. En este sentido, energías crecientes amplifican el impacto del spin sobre la dinámica orbital, expandiendo el dominio de parámetros en el que las correcciones relativistas se manifiestan como un refuerzo neto de la atracción gravitacional.

Para aislar exclusivamente la contribución inducida por la rotación de Kerr, es conveniente analizar la diferencia entre el potencial efectivo de Kerr y el de Schwarzschild, definida como:

$$V_{\Delta}(r) \equiv V_{\text{eff}}^{\text{Kerr}} - V_{\text{eff}}^{\text{Schw}}. \quad (5.23)$$

Usando la expresión general del potencial efectivo, esta diferencia puede escribirse como

$$V_{\Delta}(r) = \frac{a^2(1 - E^2)}{2r^2} - \frac{M[(L - aE)^2 - L^2]}{r^3}. \quad (5.24)$$

Expresando este término en función de la razón adimensional $\lambda = a/L$ y normalizando por L^2 , se obtiene

$$\frac{V_{\Delta}(r; \lambda, E)}{L^2} = \frac{\lambda^2(1 - E^2)}{2r^2} + \frac{2M\lambda E - M\lambda^2 E^2}{r^3}. \quad (5.25)$$

Este potencial V_{Δ} cuantifica de manera directa si, a un radio dado, la rotación del agujero negro hace que la dinámica sea más atractiva o más repulsiva que en el caso de Schwarzschild.

Podemos entonces definir una energía crítica $E_{\text{crit},\Delta}^{\Delta}(r, \lambda)$ imponiendo la condición:

$$V_{\Delta}(r; \lambda, E) = 0, \quad (5.26)$$

lo que conduce a una ecuación cuadrática en la energía, cuya solución física es:

$$E_{\text{crit},\Delta}(r, \lambda) = \frac{2Mr + \sqrt{r(4M^2r + \lambda^2r(r + 2M))}}{\lambda(r + 2M)}. \quad (5.27)$$

Para $E > E_{\text{crit},\Delta}$, el potencial de Kerr resulta más atractivo que el de Schwarzschild a ese radio, mientras que para $E < E_{\text{crit},\Delta}$ el efecto neto del spin es repulsivo.

Algunos valores ilustrativos de la energía crítica $E_{\text{crit},\Delta}$ se presentan en la Tabla 5.3. Notamos que, para valores pequeños de $|\lambda|$ ($L \gg a$) para órbitas corrotantes, la energía crítica se sitúa en el régimen no ligado, indicando que la rotación no logra compensar la barrera centrífuga. En cambio, para valores grandes de $|\lambda|$ ($a \gtrsim L$), $E_{\text{crit},\Delta}$ descende, ampliando el dominio de energías para el cual Kerr es más atractivo que Schwarzschild.

Además, para órbitas contrarrotantes ($\lambda < 0$) se obtienen valores sistemáticamente menores de $E_{\text{crit},\Delta}$, lo que implica un espacio de parámetros más amplio en el que la rotación del agujero negro refuerza la atracción gravitacional.

Cuadro 5.3: Valores representativos de la energía crítica $E_{\text{crit},\Delta}(r, \lambda)$ para $M = 1$, distintos radios r/M y razones adimensionales $\lambda = a/L$. Para $E > E_{\text{crit},\Delta}$ el potencial de Kerr es más atractivo que el de Schwarzschild a ese radio.

r/M	$\lambda = -2$	$\lambda = -1$	$\lambda = 1$	$\lambda = 2$
3	0,53	0,20	1,18	0,97
4	0,62	0,33	1,16	0,99
5	0,67	0,43	1,15	1,01
6	0,71	0,50	1,14	1,02
10	0,81	0,67	1,11	1,05
20	0,90	0,82	1,08	1,07

Para una energía fija puede definirse un radio crítico r_{crit} que separa los regímenes atractivo y repulsivo. Imponiendo nuevamente $V_{\Delta}(r_{\text{crit}}) = 0$ y despejando el radio, se obtiene

$$\frac{r_{\text{crit}}}{M} = \frac{2(E\lambda - 2)}{\lambda(1 - E^2)}. \quad (5.28)$$

Esta expresión define la frontera radial entre las regiones en las que la rotación de Kerr hace que el potencial efectivo sea más atractivo o más repulsivo que el de Schwarzschild, frontera que se manifiesta explícitamente en los diagramas presentados en la Figura 5.1. De manera complementaria, podemos también explorar el signo de la barrera de potencial normalizada por el factor L^2 (ver fig 5.2) definida por:

$$\frac{V_{\text{bar}}(r; \lambda, E)}{L^2} = \frac{1}{2r^2} + \frac{\lambda^2(1 - E^2)}{2r^2} - \frac{M(1 - \lambda E)^2}{r^3}. \quad (5.29)$$

Esta cantidad representa la parte del potencial que es completamente producida por el momento angular, ya sea del agujero negro o la partícula, a diferencia de V_{Δ} en donde incluimos la contribución del momento angular del agujero negro aisladamente.

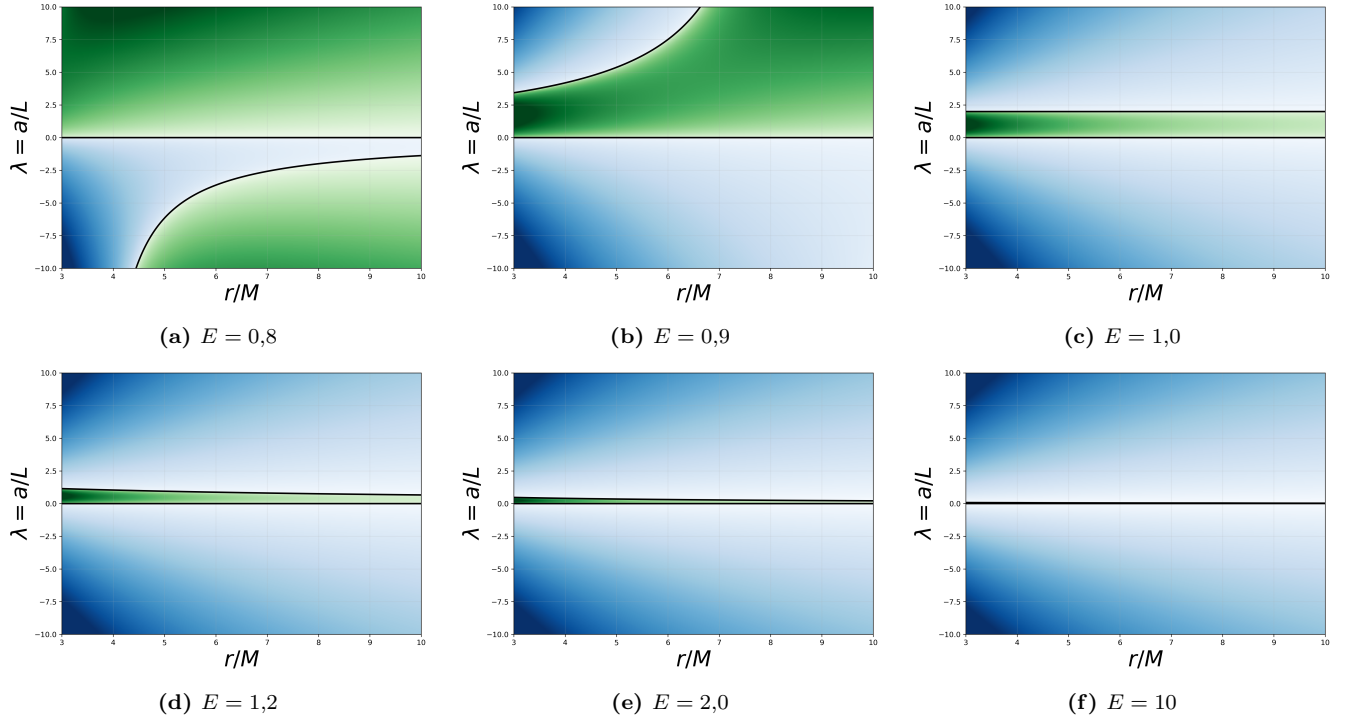


Figura 5.1: Diagramas de la variación del potencial efectivo respecto de Schwarzschild $V_{\Delta}(r; \lambda)/L^2$ en función del radio adimensional r/M (eje horizontal) y del parámetro $\lambda = a/L$ (eje vertical), para distintos valores de la energía E . Las zonas azules muestran un régimen más atractivo que Schwarzschild, mientras que las verdes muestran un régimen más repulsivo. Notar la abrupta transición entre órbitas corrotantes y contrarrotantes en el caso límite $\lambda = 0$, en el que el régimen pasa de ser repulsivo a atractivo. Para altas energías, la rotación de Kerr provoca un régimen más atractivo que Schwarzschild en prácticamente todo el espacio de parámetros.

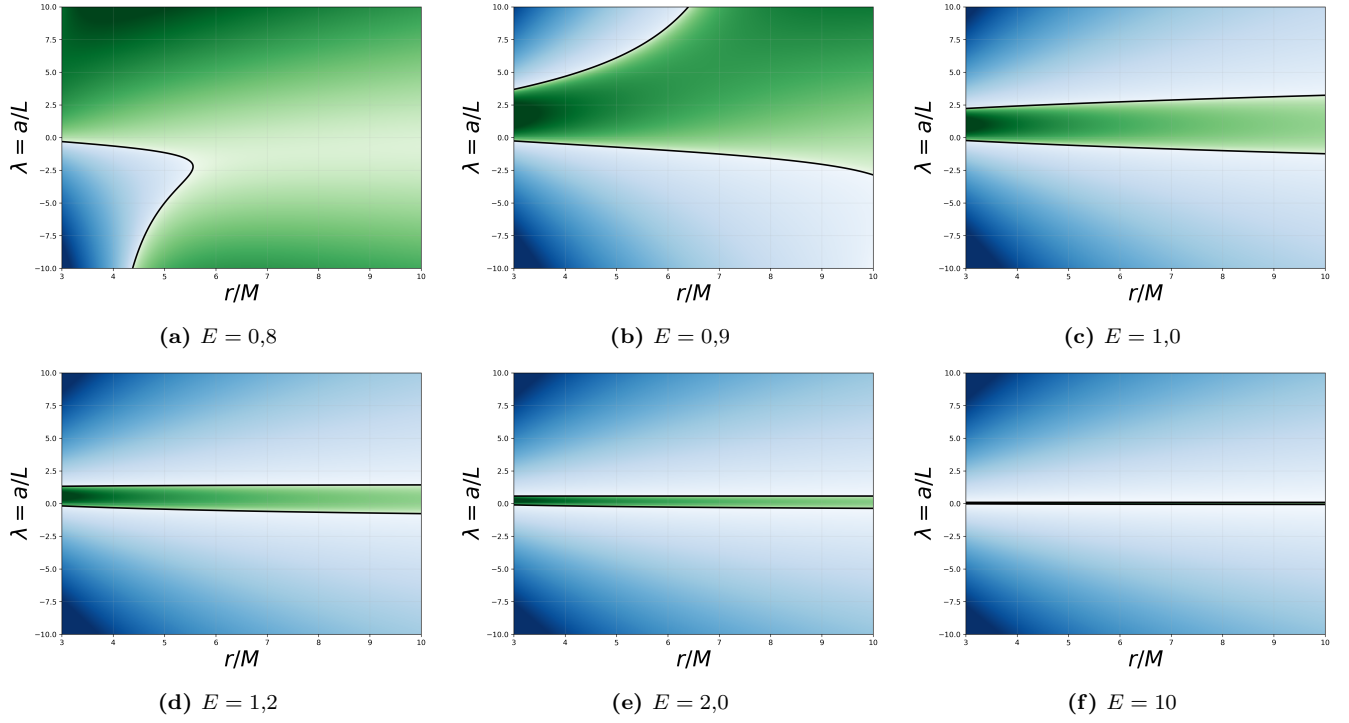


Figura 5.2: Diagramas de la barrera de potencial normalizada $V_{\text{bar}}(r; \lambda)/L^2$ en función del radio adimensional r/M (eje horizontal) y del parámetro $\lambda = a/L$ (eje vertical), para distintos valores de la energía E . En cada panel se colorean las regiones de efecto neto repulsivo con $V_{\text{bar}}/L^2 > 0$ (en color verde) y regiones de efecto neto atractivo $V_{\text{bar}}/L^2 < 0$ (azul). A medida que aumenta la energía, la región atractiva se expande hacia valores más amplios de λ y hacia radios mayores, mostrando cómo el spin del agujero negro puede invertir el papel clásico de la barrera centrífuga en el régimen relativista.

5.4. Análisis de tiempos de caída

El análisis heurístico presentado en la sección anterior proporciona una caracterización local del carácter atractivo o repulsivo del potencial efectivo en el espacio-tiempo de Kerr, en función del radio y de los parámetros dinámicos del sistema. Sin embargo, una partícula en caída libre no permanece confinada a un único régimen local, sino que atraviesa una sucesión de regiones con distinto comportamiento efectivo, cuya contribución acumulada determina la dinámica global del movimiento. En consecuencia, para evaluar el efecto neto de estos regímenes locales es necesario considerar tiempos de caída integrados a lo largo de trayectorias completas.

Con este objetivo, utilizamos la ecuación (4.52) para calcular el tiempo propio requerido para que una partícula caiga desde un radio inicial fijo $r_0 = 10M$ hasta distintos radios finales r_f , explorando cómo los parámetros físicos del sistema impactan en la dinámica integrada. En particular, consideramos tres elecciones complementarias para el radio final: valores fijos $r_f = 6M$ y $r_f = 3M$, así como el radio de la órbita circular más interna estable $r_f = r_{\text{ISCO}}(a)$.

El uso de radios finales fijos permite eliminar el efecto puramente geométrico asociado a la variación de r_f con el parámetro de rotación a , aislando de este modo el impacto dinámico directo de la rotación del espacio-tiempo sobre el tiempo de caída. Este enfoque resulta especialmente útil para evaluar si la rotación modifica de manera significativa las escalas temporales de colapso incluso a distancias relativamente grandes del horizonte. Por otro lado, la elección de $r_f = r_{\text{ISCO}}(a)$ introduce un escenario dinámicamente más motivado desde el punto de vista astrofísico, ya que la ISCO marca el límite interno de estabilidad orbital y separa regiones de movimiento cuasi-ligado de un régimen de caída inevitable. Adicionalmente, reportamos tanto los tiempos propios τ sin normalizar como las cantidades normalizadas τ/s_{ZAMO} , donde s_{ZAMO} corresponde a la distancia propia recorrida medida por un observador localmente no rotante (ZAMO). Esta normalización permite remover efectos puramente geométricos asociados a la dilatación o contracción espacial a lo largo de la trayectoria, facilitando la comparación entre caídas que ocurren en regiones del espacio-tiempo con distinta geometría efectiva.

Los resultados correspondientes a partículas que caen hasta la ISCO se muestran en las Figuras 5.3 y 5.4, para órbitas corrotantes y contrarrotantes, respectivamente. En el caso corrotante, se observa que el tiempo de caída normalizado, τ/s_{ZAMO} , decrece sistemáticamente al aumentar el parámetro de rotación a . Sin embargo, esta tendencia se invierte cuando se considera el tiempo propio total sin normalización, el cual aumenta con a . El comportamiento opuesto se encuentra para órbitas contrarrotantes. El tiempo normalizado crece con la rotación del agujero negro, mientras que el tiempo total disminuye al eliminar la normalización. Este contraste se explica de manera directa por la dependencia del radio de la ISCO con el spin. Para órbitas corrotantes el radio r_{ISCO} disminuye al aumentar a , lo que extiende el intervalo radial integrado y fuerza a la partícula a penetrar en regiones más internas del campo fuerte. En cambio, para órbitas contrarrotantes, r_{ISCO} crece con a , reduciendo el intervalo radial integrado hacia una órbita final más externa. La normalización por s_{ZAMO} permite aislar este efecto puramente geométrico y revelar el comportamiento dinámico local de la caída. Desde esta perspectiva, los resultados indican que, en promedio, la dinámica local favorece una caída más eficiente en el caso corrotante, mientras que en el régimen contrarrotante la rotación del espacio-tiempo tiende a ralentizar el proceso, aun cuando el tiempo total pueda verse reducido por efectos puramente geométricos.

Para radios finales fijos, los tiempos de caída, tanto normalizados como no normalizados, se muestran en las Figuras 5.5, 5.6, 5.7 y 5.8. En este caso, la interpretación resulta más directa,

ya que el efecto puramente geométrico asociado a la variación del radio final queda eliminado. Se observa que el tiempo de caída disminuye sistemáticamente con el parámetro de rotación a para órbitas contrarrotantes, mientras que aumenta con a en el caso corrotante, independientemente de si el tiempo se normaliza o no. Este comportamiento es plenamente consistente con los regímenes atractivos y repulsivos identificados previamente en el espacio paramétrico, confirmando que la dinámica integrada refleja de manera fiel la estructura local del potencial efectivo.

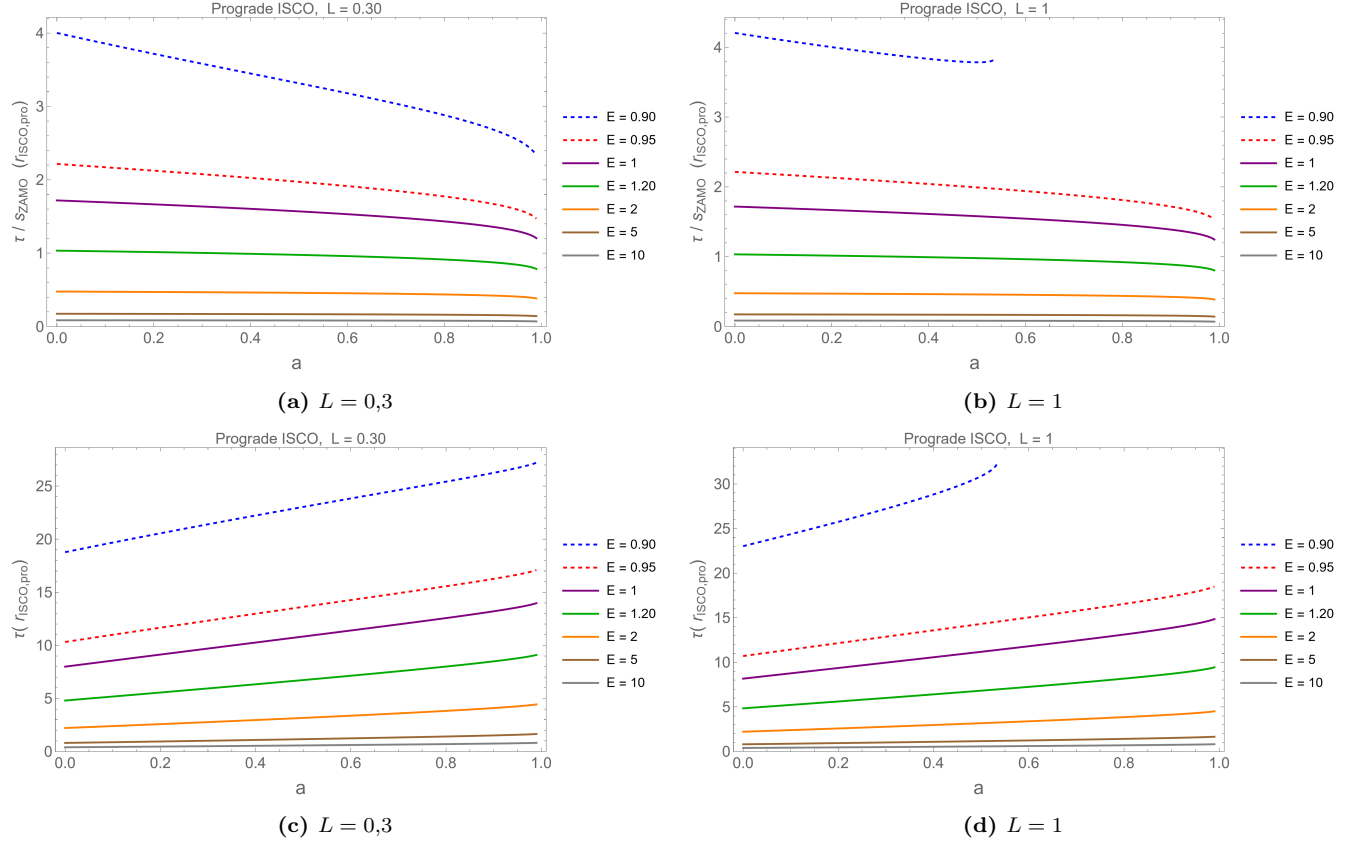


Figura 5.3: Curvas de τ/s_{ZAMO} y τ en función de a para órbitas corrotantes hacia la ISCO. Se grafican distintos valores de energía E y dos valores representativos de momento angular $L = 0,3, 1$. El tiempo sin normalizar aumenta a medida que aumenta la rotación del agujero negro, reflejando el hecho de que el valor de la ISCO decrece y el trayecto es más largo. Sin embargo, la dinámica local se ve aumentada con la rotación del agujero negro, lo que se visualiza en la tendencia opuesta que se produce al normalizar el tiempo por s_{ZAMO}

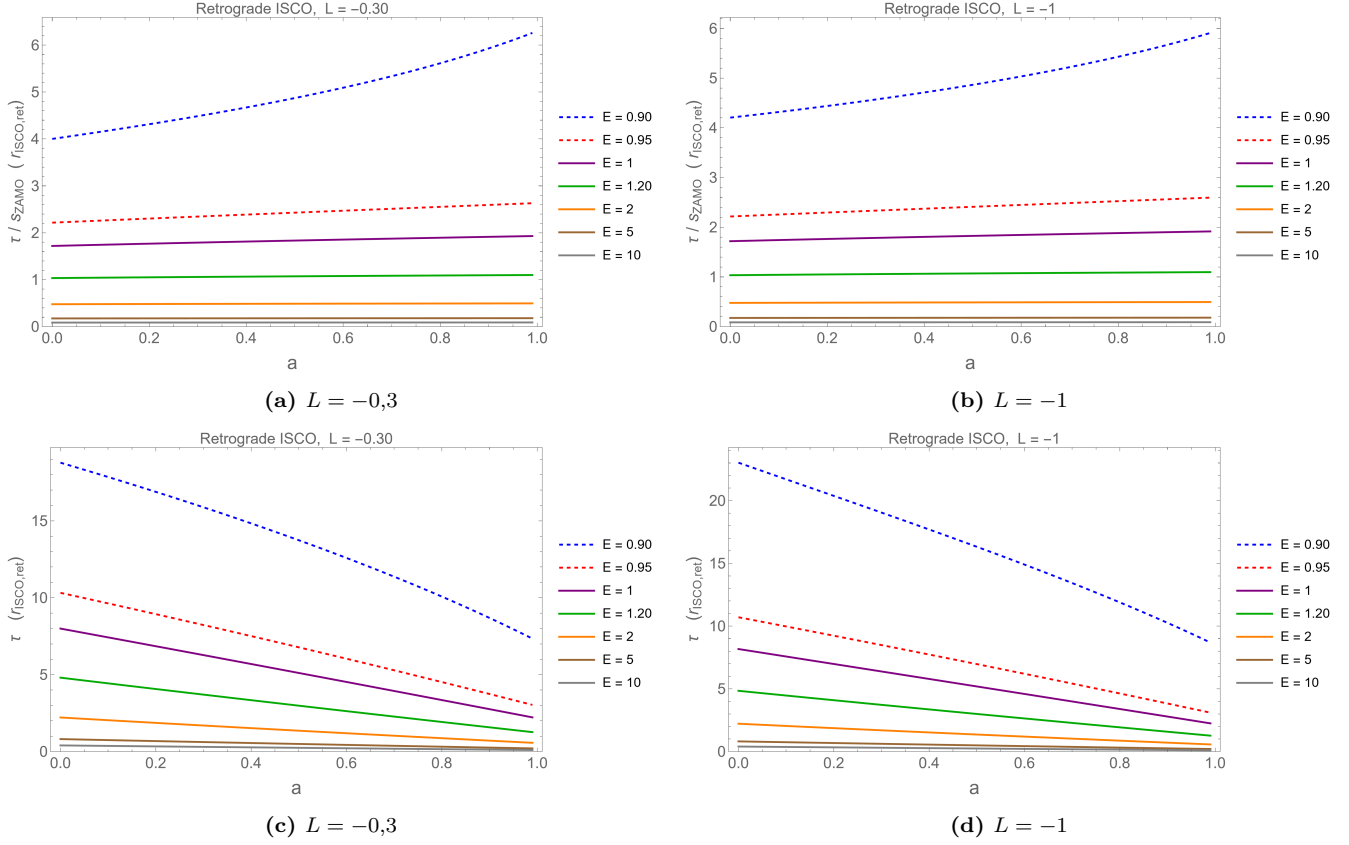


Figura 5.4: Curvas de τ y τ/s_{ZAMO} en función de a para órbitas contrarrotantes hacia la ISCO. Se grafican distintos valores de energía E y dos valores representativos de momento angular $L = -0,3, -1$. El tiempo sin normalizar disminuye a medida que aumenta la rotación del agujero negro, reflejando el hecho de que el valor de la ISCO crece y el trayecto es más corto. Sin embargo, la dinámica local se ve disminuida con la rotación del agujero negro, lo que se visualiza en la tendencia opuesta que se produce al normalizar el tiempo por s_{ZAMO}

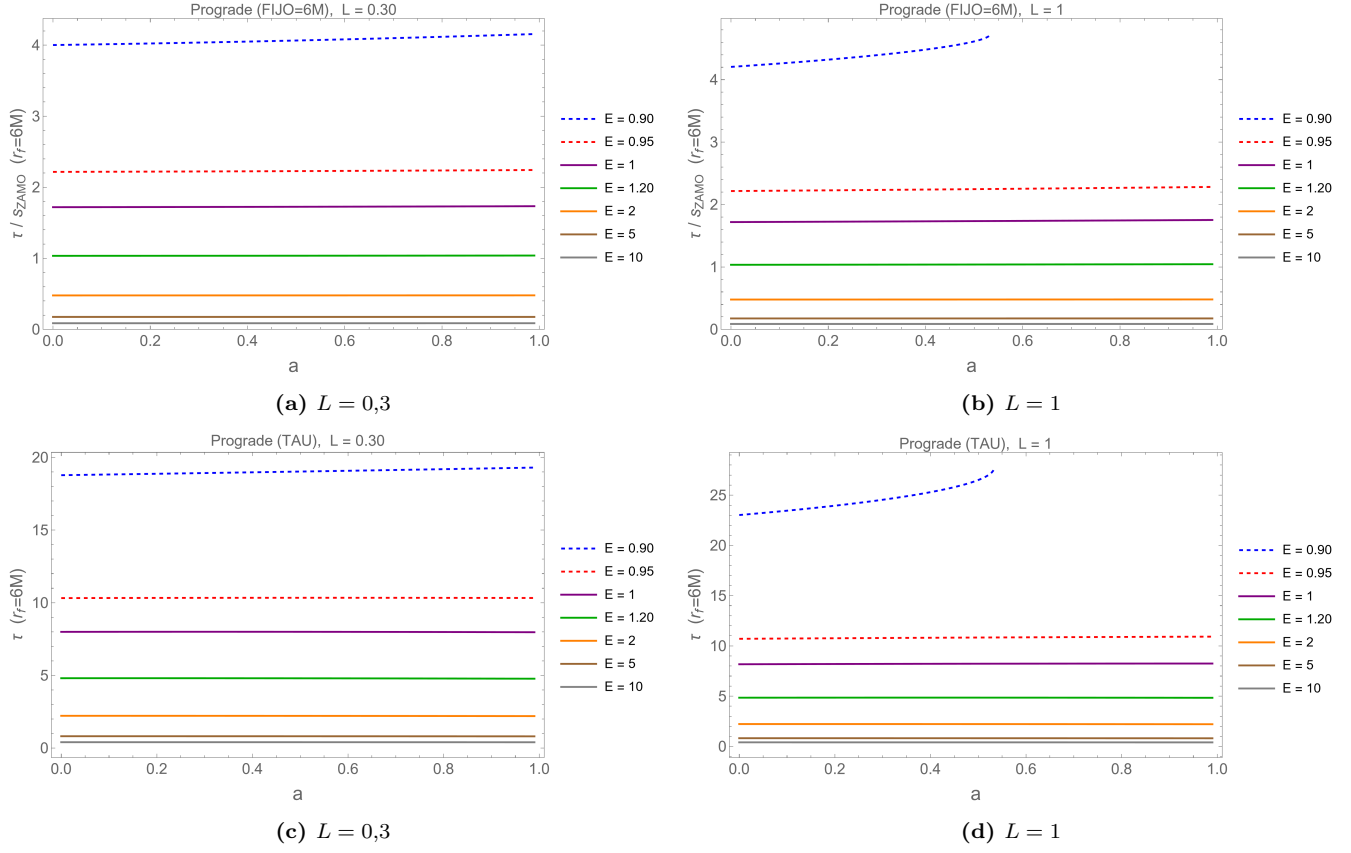


Figura 5.5: Curvas de τ y τ/s_{ZAMO} en función de a para órbitas corrotantes hacia $r_f = 6M$. Se grafican distintos valores de energía E y dos valores representativos de momento angular $L = 0,3, 1$. Los tiempos aumentan notoriamente con a para bajas energías. A altas energías, el tiempo de caída es menor en general, pero se mantiene casi constante al variar a .

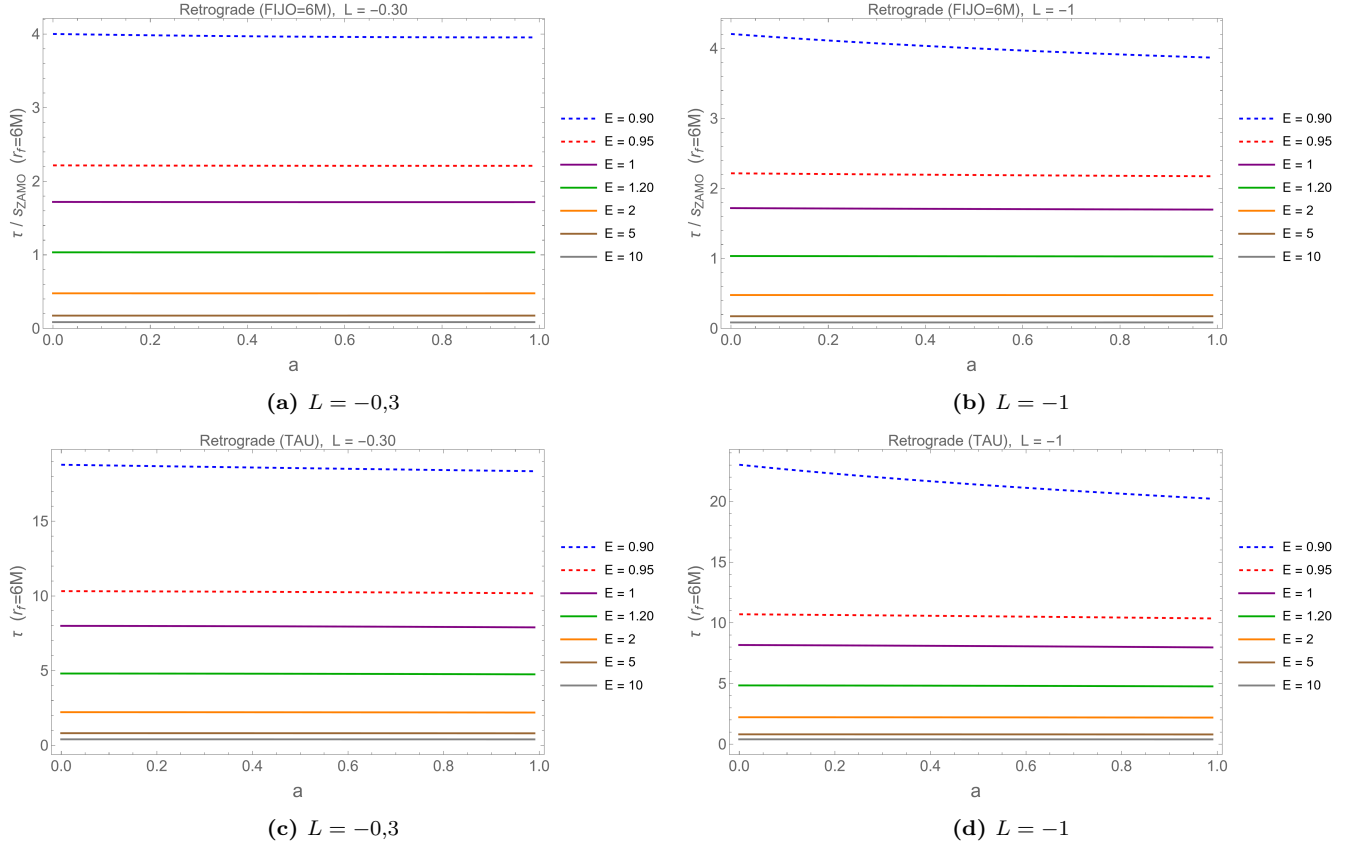


Figura 5.6: Curvas de τ y τ/s_{ZAMO} en función de a para órbitas contrarrotantes hacia $r_f = 6M$. Se grafican distintos valores de energía E y dos valores representativos de momento angular $L = -0,3, -1$. Los tiempos disminuyen notoriamente con a para bajas energías. A altas energías, el tiempo de caída es menor en general, pero se mantiene casi constante al variar a .

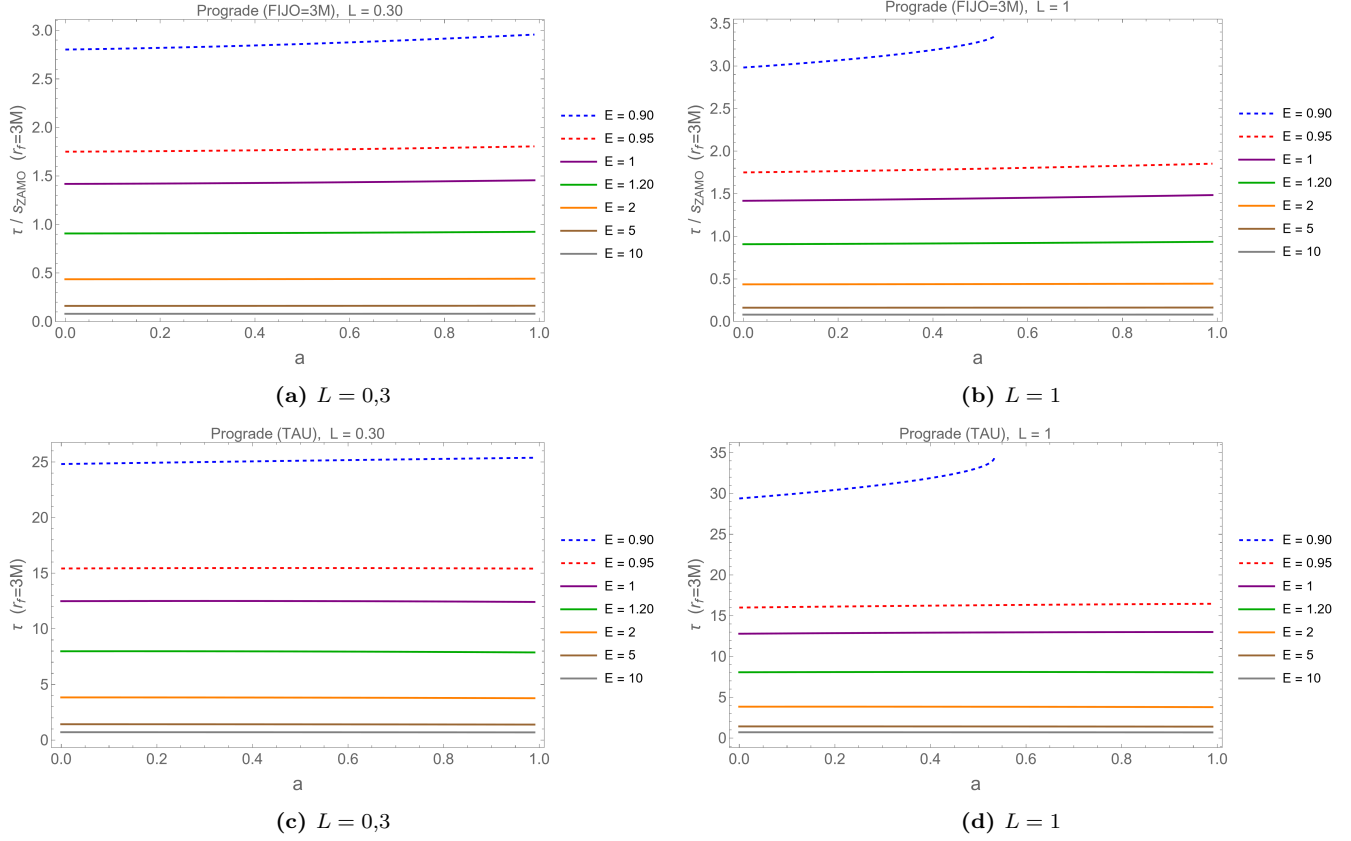


Figura 5.7: Curvas de τ y τ/s_{ZAMO} en función de a para órbitas corrotantes hacia $r_f = 3M$. Se grafican distintos valores de energía E y dos valores representativos de momento angular $L = 0,3, 1$. Los tiempos aumentan notoriamente con a para bajas energías. A altas energías, el tiempo de caída es menor en general, pero se mantiene casi constante al variar a .

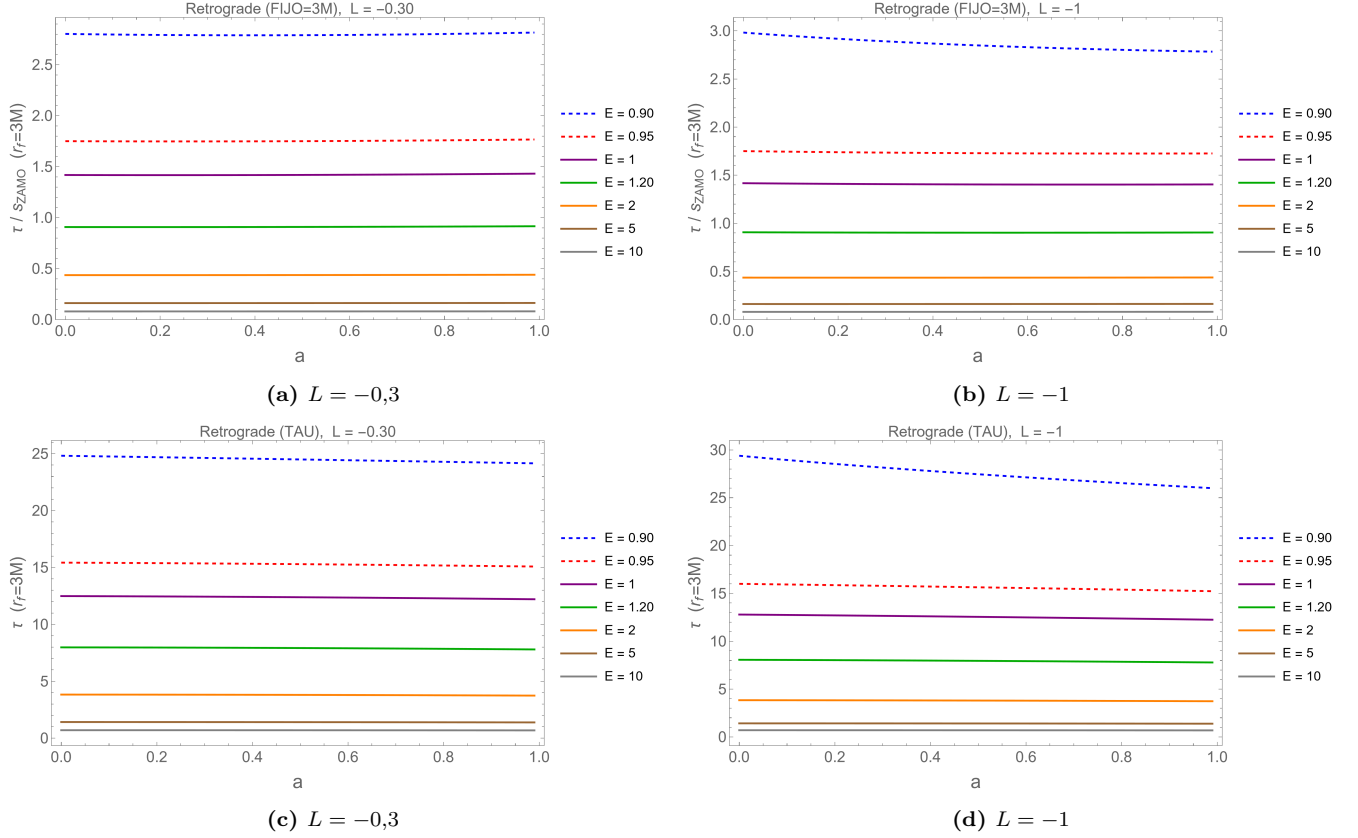


Figura 5.8: Curvas de τ y τ/s_{ZAMO} en función de a para órbitas contrarrotantes hacia $r_f = 3M$. Se grafican distintos valores de energía E y dos valores representativos de momento angular $L = -0,3, -1$. Los tiempos disminuyen notoriamente con a para bajas energías. A altas energías, el tiempo de caída es menor en general, pero se mantiene casi constante al variar a .

5.5. Origen energético y rotacional, de la reducción de τ

En la sección anterior se observó que los tiempos propios de caída disminuyen de manera significativa al aumentar la energía específica E de la partícula. Este efecto está presente ya en Schwarzschild (y, de forma análoga, en el régimen newtoniano) y se debe al hecho de que, al aumentar E , el término dominante en la ecuación radial $\dot{r}^2$ crece, reduciendo el integrando $1/\sqrt{\dot{r}^2}$ en la expresión del tiempo propio. Por lo tanto, una parte sustancial de la disminución de τ observada en los análisis previos tiene un origen puramente energético. Este comportamiento plantea una cuestión fundamental: ¿en qué medida la reducción de los tiempos de caída observada en Kerr es un efecto genuinamente rotacional, y no simplemente una consecuencia del incremento de la energía que entra explícitamente en la ecuación radial?

Para responder a esta pregunta, se compararon directamente los tiempos de caída en Kerr y Schwarzschild para radios inicial y final fijos ($r_0 = 10M$ y $r_f = 3M$), manteniendo constante el momento angular L y variando únicamente la energía E (figuras 5.9 y 5.10). Se analizaron los cocientes $\tau_{\text{Kerr}}/\tau_{\text{Schw}}$ y $(\tau/s_{\text{ZAMO}})_{\text{Kerr}}/(\tau/s_{\text{ZAMO}})_{\text{Schw}}$, lo que permite aislar la contribución asociada a la rotación del agujero negro. Para energías suficientemente grandes, el cociente $\tau_{\text{Kerr}}/\tau_{\text{Schw}}$ no tiende a la unidad, sino que se estabiliza en un valor constante menor que uno, dependiente del parámetro de rotación a . Este comportamiento indica que la rotación introduce una corrección sistemática, subdominante respecto del efecto energético, pero físicamente real, que reduce aún más el tiempo propio de caída en comparación con el caso no rotante. Este efecto aparece tanto en órbitas corrotantes como contrarrotantes y persiste incluso cuando la dependencia explícita con el signo de L se vuelve secundaria a altas energías.

El comportamiento cambia al considerar los tiempos normalizados por la longitud espacial efectiva medida por observadores localmente no rotantes. En este caso, el cociente se estabiliza en valores mayores que la unidad. Esta inversión no contradice la reducción observada en el tiempo propio, sino que refleja el hecho de que la distancia espacial efectiva recorrida en Kerr es menor que en Schwarzschild para las trayectorias consideradas. Al normalizar por s_{ZAMO} se introduce un factor geométrico que ya contiene el efecto de la rotación, de modo que dicha normalización puede ocultar o incluso revertir la señal asociada a la reducción del tiempo propio.

En conjunto, estos resultados muestran que la disminución de los tiempos de caída tiene un origen mixto. Por un lado, existe un efecto energético universal, presente ya en Schwarzschild, que domina la dependencia con E . Por otro, la rotación del agujero negro introduce una corrección adicional que acorta el tiempo propio de caída y que se manifiesta de manera robusta al comparar directamente Kerr con Schwarzschild. Desde este punto de vista, el principal efecto dinámico de la rotación no es únicamente acelerar localmente la caída, sino reducir la longitud espacial efectiva recorrida por la partícula, lo que conduce a una jerarquía natural de tiempos

$$\tau_{\text{Kerr}} < \tau_{\text{Schw}} < \tau_{\text{Newt}}, \quad (5.30)$$

para radios fijos y parámetros dinámicos comparables, en los regímenes numéricos explorados donde la integral converge.

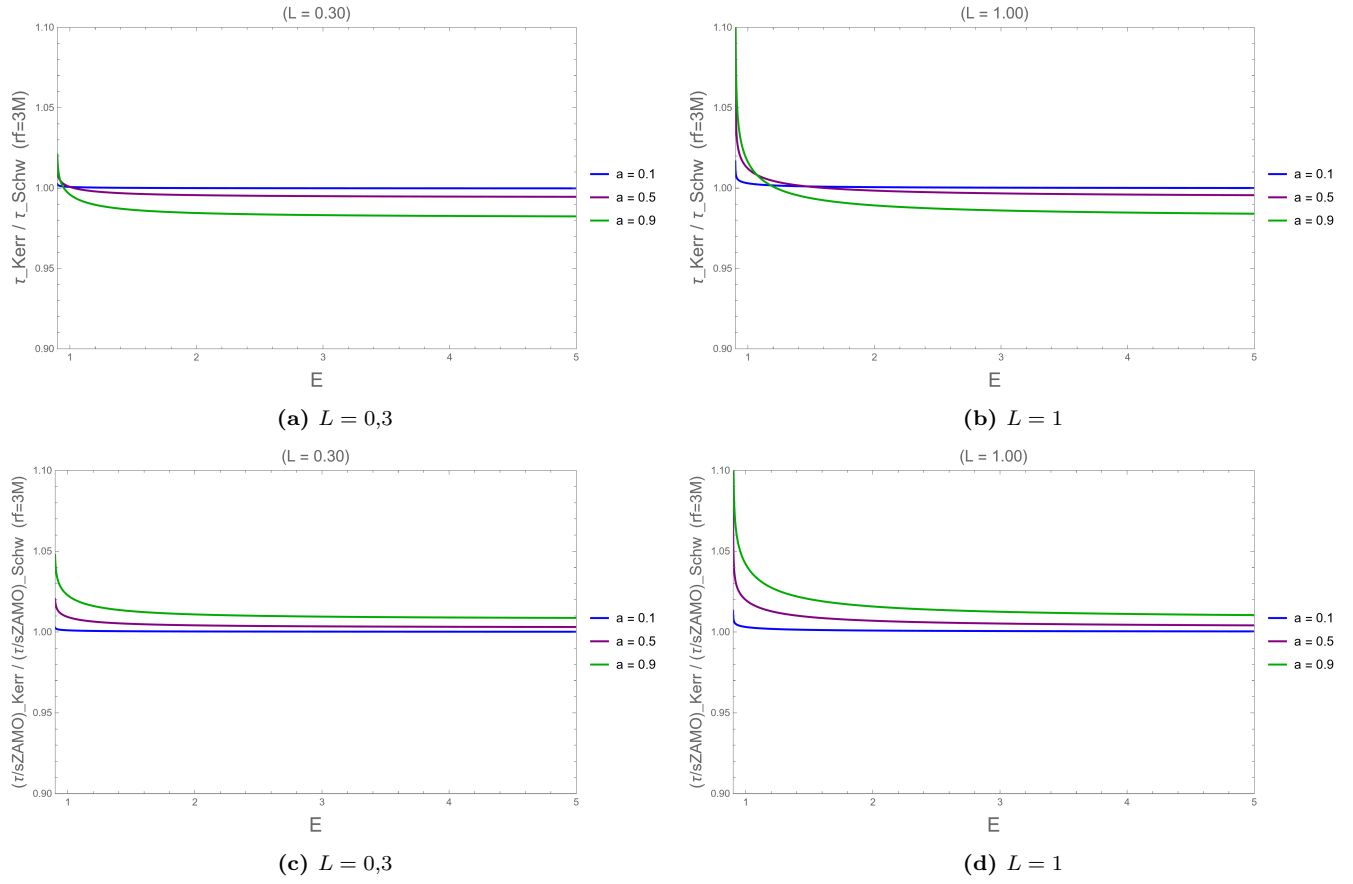


Figura 5.9: Razón entre los valores de τ y τ/s_{ZAMO} entre dinámicas de Kerr y Schwarzschild para partículas que caen desde $r_0 = 10M$ hasta $r_f = 3M$ en órbitas corrotantes.

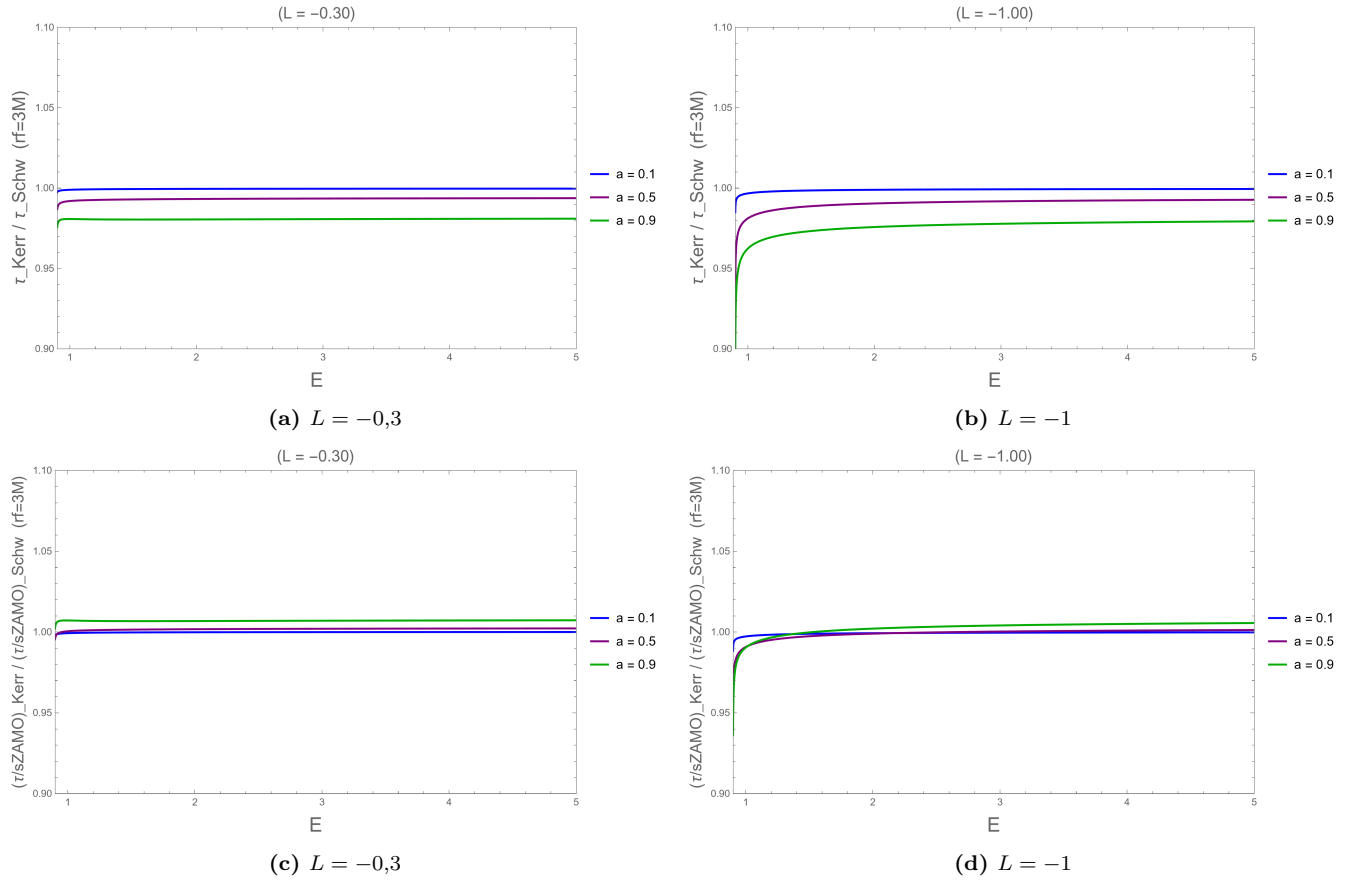


Figura 5.10: Razón entre los valores de τ y τ/s_{ZAMO} entre dinámicas de Kerr y Schwarzschild para partículas que caen desde $r_0 = 10M$ hasta $r_f = 3M$ en órbitas contrarrotantes.

5.6. Relación entre régimen local y tiempo de caída

Los resultados numéricos presentados en las secciones anteriores pueden entenderse de manera coherente a la luz del análisis heurístico del potencial efectivo. Sin embargo, es importante enfatizar que dicho análisis es de carácter local, es decir, identifica para cada punto del espacio de parámetros y localización radial, si la contribución efectiva al movimiento radial de la barrera de potencial es atractiva o repulsiva. En contraste, los tiempos de caída corresponden a cantidades integradas a lo largo de trayectorias completas, las cuales atraviesan sucesivamente distintos regímenes locales.

Esta idea se ilustra de forma explícita en la Figura 5.11, donde se representan mapas del signo y magnitud de la barrera de potencial normalizada en el plano $(r/M, \lambda = a/L)$, junto con trayectorias representativas (líneas punteadas negras) correspondientes a partículas que caen desde $r_0 = 10M$ hasta distintos radios finales. En cada panel se indican además el horizonte de eventos (línea roja continua), la ISCO corrotante o contrarrotante (línea roja discontinua), y los radios fijos $r_f = 3M$ y $r_f = 6M$ (líneas blancas discontinuas). Un diagrama similar, pero en donde aparece la variación del potencial efectivo con respecto al caso de Schwarzschild, se encuentra graficado en la Figura 5.12.

Un primer resultado relevante es que una trayectoria con valores crecientes del parámetro de rotación a no permanece confinada a un único régimen dinámico. Por el contrario, al aumentar a una misma trayectoria horizontal en el diagrama puede atravesar regiones localmente atractivas y repulsivas antes de alcanzar el radio final. Como resultado, la tendencia global del tiempo de caída no está determinada únicamente por la presencia de un régimen atractivo o repulsivo, sino por cuánto tiempo y en qué región espacial la partícula permanece en cada uno de ellos. Esto resulta particularmente claro en los casos de baja energía y momento angular moderado o alto. Por ejemplo, para $E = 0,9$ y $L = 0,3$, las trayectorias corrotantes ($\lambda > 0$) atraviesan una fracción creciente del régimen repulsivo al aumentar a , lo que se traduce en un aumento de los tiempos de caída integrados, como se puede observar en las figuras 5.7 y 5.5. En cambio, para órbitas contrarrotantes ($\lambda < 0$), las trayectorias pueden intersectar regiones atractivas incluso para valores relativamente grandes de $|a|$, dando lugar a una dinámica distinta y, en algunos casos, a tiempos de caída menores, lo cual se observa claramente en las figuras 5.8 y 5.6. A medida que la energía aumenta, como en los paneles con $E = 5$, el régimen atractivo se expande y domina una mayor fracción del espacio de parámetros. En este caso, las trayectorias atraviesan regiones mayoritariamente atractivas independientemente del valor de a , lo que explica por qué los tiempos de caída muestran una dependencia mucho más débil con la rotación del agujero negro y tienden a estabilizarse en valores bajos. Además, para un valor alto moderado de $L = 1$ en órbitas corrotantes, se observa que valores crecientes de a hacen que la partícula atravesase regiones del potencial fuertemente repulsivas, haciendo que muchas veces la partícula no sea ni siquiera capaz de llegar hasta el radio final propuesto y produciendo una divergencia en el cálculo de τ en los gráficos numéricos.

La lectura de estos diagramas debe hacerse un poco más fina cuando el radio final coincide con la ISCO. A diferencia de los radios fijos, el radio de la ISCO depende explícitamente del parámetro de rotación a , disminuyendo para órbitas corrotantes y aumentando para órbitas contrarrotantes. Esto implica que, al variar a , no solo cambia la dinámica local de la partícula, sino también la región espacial que es integrada al calcular el tiempo de caída.

En el caso corrotante, al aumentar a la ISCO se desplaza hacia radios cada vez menores, lo que fuerza a la partícula a atravesar regiones de campo gravitacional más intenso y de repulsión relativista más pronunciada. Como consecuencia, el tiempo propio total de caída τ tiende a aumentar

con a , reflejando un colapso menos eficiente hacia radios más internos. Sin embargo, cuando el tiempo propio se normaliza por la longitud propia medida por observadores ZAMO, se observa la tendencia opuesta: τ/s_{ZAMO} disminuye con a . Esto indica que, la velocidad efectiva promedio de la partícula aumenta cuando se elimina el efecto puramente geométrico asociado a la contracción espacial del recorrido. Por otro lado, para órbitas contrarrotantes la ISCO se desplaza hacia radios mayores al aumentar a . En este caso, el tiempo propio τ tiende a disminuir, reflejando que la partícula colapsa hacia una órbita final más externa. No obstante, al normalizar por s_{ZAMO} , la tendencia se invierte y τ/s_{ZAMO} aumenta con a , indicando que la dinámica local efectiva se vuelve menos eficiente incluso cuando el colapso ocurre a radios mayores. Este comportamiento aparentemente contradictorio pone de manifiesto que los tiempos de caída hacia la ISCO combinan dos efectos distintos. Por un lado, la modificación puramente espacial del radio final, y por otro, la dinámica local inducida por la rotación del espacio-tiempo. La normalización por s_{ZAMO} permite separar ambos efectos, mostrando que la tendencia observada en τ no siempre refleja un cambio dinámico genuino, sino que puede estar dominada por la variación geométrica del recorrido integrado.

Los diagramas permiten entonces comprender por qué no existe una correspondencia directa entre un régimen localmente atractivo o repulsivo y una aceleración o ralentización global del colapso. El tiempo de caída resulta de una integración de la dinámica a lo largo del radio, y depende críticamente de la localización espacial de los distintos regímenes, del radio final considerado y de cómo las trayectorias muestrean el espacio de parámetros al variar el spin del agujero negro.

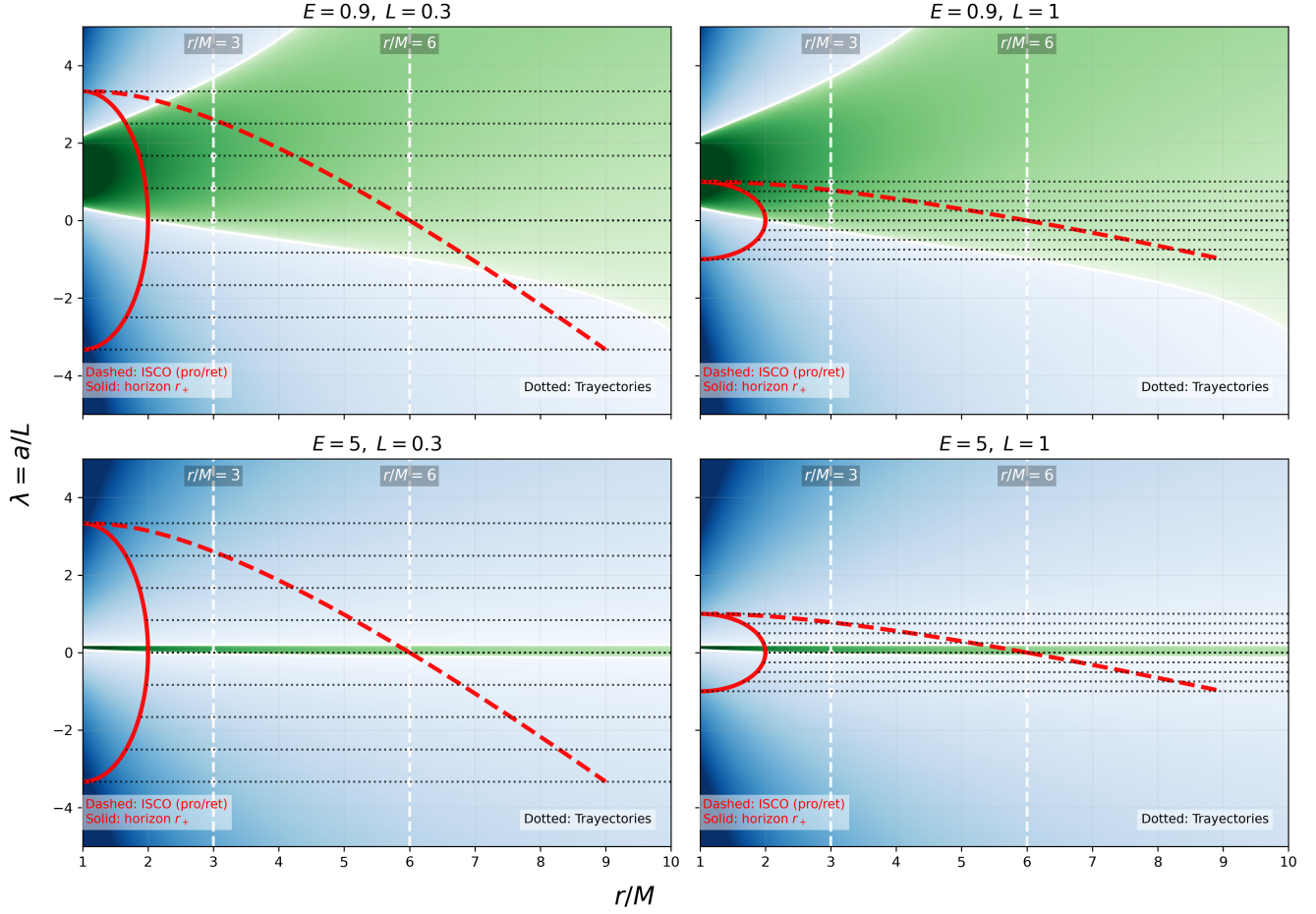


Figura 5.11: Mapas paramétricos de la barrera de potencial normalizada en el plano $(r/M, \lambda = a/L)$ para cuatro combinaciones representativas de energía E y momento angular L . Las regiones verdes (azules) corresponden a contribuciones localmente repulsivas (atractivas) de la barrera de potencial al potencial efectivo radial. Las líneas punteadas negras indican trayectorias representativas de caída desde $r_0 = 10M$ hacia radios menores. El horizonte de eventos r_+ se muestra como una curva roja continua, mientras que las ISCO corrotante y contrarrotante se indican mediante curvas rojas discontinuas. Los radios finales fijos $r_f = 3M$ y $r_f = 6M$ están marcados con líneas verticales blancas discontinuas. La Figura ilustra cómo una trayectoria individual puede atravesar múltiples regímenes dinámicos locales, lo que explica por qué el tiempo de caída integrado no se deduce directamente del carácter atractivo o repulsivo local del potencial.

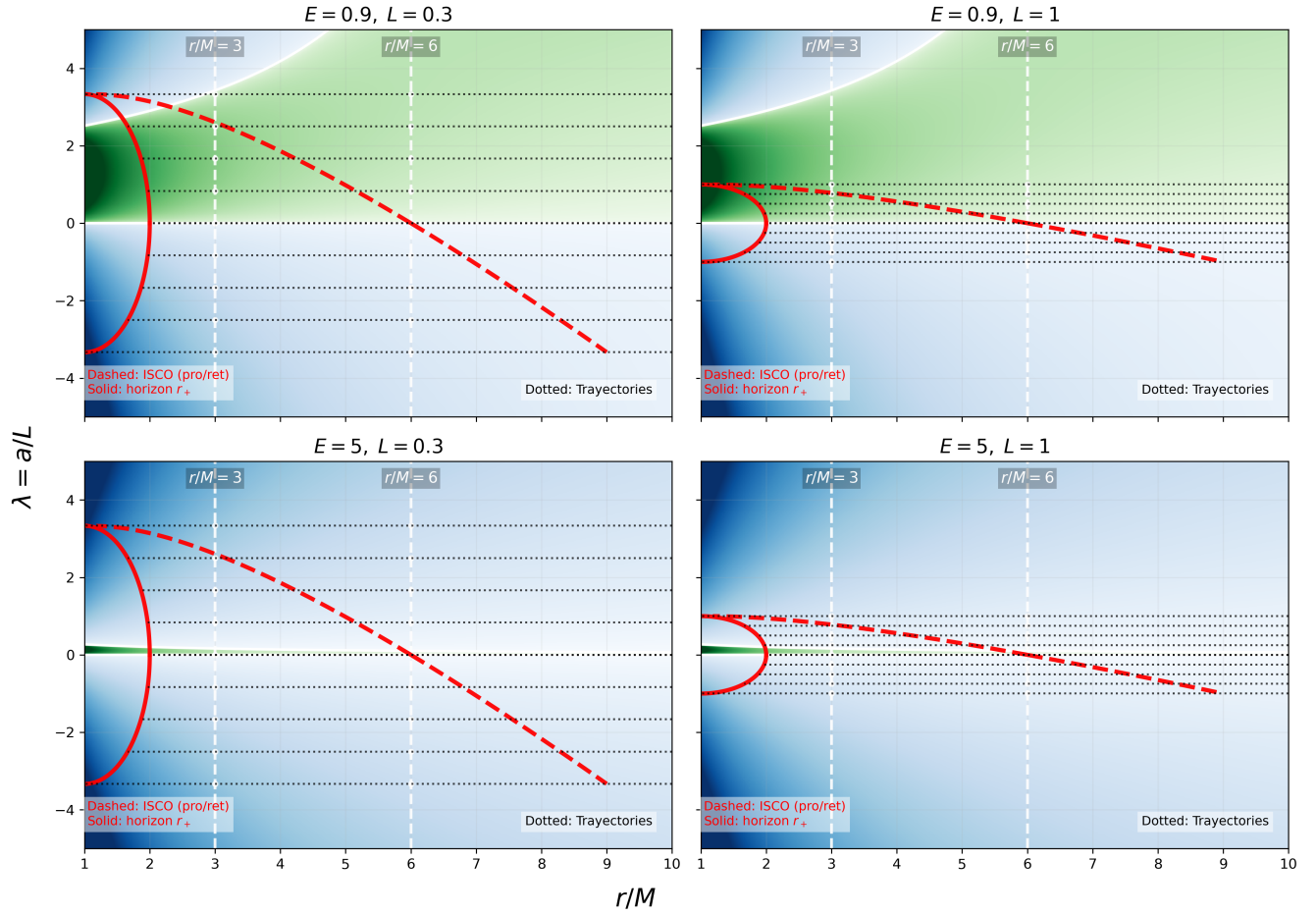


Figura 5.12: Mismos diagramas que en la Figura 5.11, pero esta vez en el plano paramétrico de la variación del potencial efectivo de Kerr con respecto al de Schwarzschild.

5.7. Casos astrofísicos reales de interés

La interpretación heurística del potencial efectivo realizada en la sección anterior, así como el análisis numérico de las escalas de tiempo de caída en Kerr permite identificar regímenes donde la rotación del agujero negro puede incrementar o disminuir la atracción gravitacional experimentada por partículas con distintos valores de energía y momento angular. Para evaluar la relevancia física de estas observaciones es necesario contrastarlos con escenarios astrofísicos concretos, en los cuales la dinámica de la materia está dominada por diferentes combinaciones de energía orbital, momento angular específico y distancia al objeto compacto. De los resultados numéricos obtenidos para radios fijos, se observa que el efecto rotacional introduce una reducción relativa del tiempo propio de caída del orden de

$$\frac{\Delta\tau}{\tau_{\text{Schw}}} \equiv \frac{\tau_{\text{Kerr}} - \tau_{\text{Schw}}}{\tau_{\text{Schw}}} \sim 10^{-2}\text{--}10^{-1}, \quad (5.31)$$

dependiendo del valor del parámetro de rotación a , del momento angular L y del régimen energético considerado. Aunque esta corrección es subdominante frente al efecto energético global, su carácter sistemático sugiere que puede acumularse en procesos prolongados o repetidos.

Para ilustrar el orden de magnitud, consideremos un agujero negro supermasivo de masa $M \sim 10^8 M_\odot$, para el cual la escala temporal gravitacional es

$$t_M = \frac{GM}{c^3} \sim 500 \text{ s}. \quad (5.32)$$

Una caída libre desde decenas de radios gravitacionales corresponde típicamente a tiempos propios del orden de días a semanas. Una corrección relativa del 1 %–10 % se traduciría entonces en diferencias absolutas del orden de horas hasta días en los tiempos característicos de caída.

En contextos astrofísicos, estas escalas temporales son pequeñas en comparación con los tiempos cosmológicos globales, pero pueden resultar relevantes para procesos locales como la eficiencia de transporte de masa, la sincronización de episodios de acreción o la estructura temporal de estallidos energéticos. En escenarios donde la dinámica está dominada por trayectorias de bajo momento angular y alta energía, el efecto rotacional identificado en este trabajo podría contribuir a una aceleración efectiva del colapso respecto al caso no rotante.

En esta sección revisaremos diversos sistemas astrofísicos en los que el efecto gravitacional relativista del spin podría desempeñar un papel importante. Cabe enfatizar que una evaluación realista del impacto cosmológico de este mecanismo requiere incorporar efectos adicionales ausentes en el presente análisis, tales como hidrodinámica relativista, retroalimentación radiativa, distribuciones realistas de momento angular y geometrías no ecuatoriales. Por esta razón, la cuantificación precisa del efecto en simulaciones astrofísicas completas queda fuera del alcance de esta tesina y se deja como una línea natural de trabajo futuro.

5.7.1. Discos de acreción alrededor de agujeros negros

En sistemas de acreción alrededor de agujeros negros de masa estelar y supermasivos, tanto en binarias de rayos X como en núcleos activos de galaxias, la estructura dinámica del gas en el disco interno se describe, en primera aproximación, mediante los modelos de disco delgado de Shakura–Sunyaev y Novikov–Thorne ([Shakura and Sunyaev, 1973](#); [Novikov and Thorne, 1973](#)).

En estos modelos, el gas orbita en trayectorias casi keplerianas, con momento angular elevado y energía correspondiente a órbitas ligadas, especialmente en la región exterior a la ISCO, donde se concentra la mayor parte de la masa del disco.

En el marco de nuestro análisis, esto implica que el cociente adimensional μ es típicamente pequeño ($|\mu| \ll 1$), debido a que L domina sobre aE para órbitas cuasi-circulares. En los discos delgados keplerianos, los valores típicos de μ se encuentran profundamente dentro del intervalo intermedio de los valores críticos, para radios desde la ISCO hasta varias decenas de M . En este régimen, la contribución neta del momento angular sigue siendo predominantemente repulsiva, aun cuando se ve reducida por las correcciones relativistas. Por lo tanto, el término atractivo proporcional a $(L - aE)^2/r^3$ no llega a superar a la barrera centrífuga en la mayor parte del disco.

Esto es coherente con la interpretación estándar de la acreción en Kerr según la cual el spin afecta al disco principalmente mediante el desplazamiento del radio de la ISCO y la modificación de la eficiencia radiativa global (Bardeen et al., 1972). El mecanismo relativista de “refuerzo gravitacional” identificado en el análisis heurístico solo se vuelve relevante en configuraciones con momento angular específico bajo, como los flujos cuasi-esféricos o las soluciones de acreción dominadas por advección (ADAFs), donde el gas se aproxima más a un régimen radial y el efecto atractivo del momento angular puede competir eficazmente con la barrera centrífuga (Narayan and Yi, 1994).

5.7.2. Agujeros negros semilla en halos protogalácticos

Un escenario ampliamente estudiado para explicar la presencia de agujeros negros supermasivos (SMBHs) a altos redshift es la formación de agujeros negros semilla masivos por *colapso directo* de gas primordial en halos protogalácticos (Begelman et al., 2006; Bromm and Loeb, 2003; Latif and Ferrara, 2016; Volonteri, 2010). En estos escenarios, la fragmentación estelar se ve inhibida y una fracción significativa de la masa bariónica del halo puede fluir hacia el centro, formando un agujero negro semilla de masa $\sim 10^4$ – $10^6 M_\odot$ (Begelman et al., 2006; Bromm and Loeb, 2003).

En estos modelos, la estructura global del halo sí posee momento angular, pero el transporte de momento angular a bajas escalas no es perfectamente kepleriano. Tanto simulaciones numéricas como modelos analíticos indican la posible existencia de regiones donde el gas que se mueve con momento angular específico bajo, siguiendo trayectorias no keplerianas e incluso cuasi-radiales, especialmente durante las fases de colapso más violentas (Begelman et al., 2006; Latif and Ferrara, 2016).

Desde el punto de vista del potencial efectivo en Kerr derivado en este capítulo, este tipo de configuraciones resulta particularmente interesante. Cuando el momento angular específico L del gas que cae es reducido, la barrera centrífuga clásica $L^2/(2r^2)$ se debilita y la dinámica radial queda controlada por una competencia más estrecha entre el término newtoniano $-M/r$ y los términos relativistas asociados al spin. En particular, el término dependiente de $L - aE$ puede volverse comparativamente importante e incluso superar la contribución centrífuga en ciertos regímenes de energía E y radio r . Como se discutió en las secciones anteriores, para $E > E_a(r)$ y valores suficientes de $\mu = aE/L$, el efecto neto del spin es incrementar la atracción gravitacional efectiva y, por lo tanto, acortar los tiempos de infall o incrementar la velocidad radial promedio en comparación con el caso no rotante. A diferencia de los discos delgados clásicos, en los cuales el momento angular domina y la influencia del spin se manifiesta principalmente a través del desplazamiento de la ISCO y la eficiencia radiativa global, aquí la rotación del agujero negro puede contribuir de

manera directa a incrementar la tasa efectiva de acreción en fases tempranas de la formación de SMBHs. Este efecto ofrece un canal adicional, de naturaleza puramente gravitacional y relativista, que puede complementar los mecanismos hidrodinámicos ya propuestos en los modelos de colapso directo para explicar el rápido crecimiento de agujeros negros supermasivos observados a altos redshifts.

Cabe destacar que en este tipo de sistemas, la distribución inicial de momento angular es baja y dominada por modos aleatorios en lugar de un momento angular orbital coherente. Desde el punto de vista de las geodésicas, esto corresponde a configuraciones donde la mayor parte de las partículas poseen valores modestos de L y una distribución aproximadamente isótropa de la constante de Carter Q , asociada al movimiento fuera del plano ecuatorial. Aunque el análisis desarrollado en este trabajo se ha restringido a órbitas ecuatoriales ($Q = 0$), el carácter cuasi-radial del colapso sugiere que las conclusiones cualitativas obtenidas deberían mantenerse para órbitas con $Q \neq 0$, dado que dichos términos aparecen en la ecuación radial de forma análoga y se vuelven dominantes cuando el momento angular específico es bajo. Un tratamiento completo que incorpore geodésicas con $Q \neq 0$ sería necesario para describir con mayor detalle el proceso de acreción fuera del plano ecuatorial, pero su desarrollo excede el alcance del presente trabajo el cual es de carácter principalmente exploratorio.

5.7.3. EMRIs

Los *Extreme mass ratio inspiral* (EMRIs) (Barack and Cutler, 2004; Amaro-Seoane et al., 2007), en los cuales un objeto compacto de masa estelar orbita y cae en un agujero negro supermasivo, constituyen un ejemplo de dinámica relativista en un espacio-tiempo de Kerr. En un EMRI típico, la órbita del objeto ligero permanece en un régimen de alto momento angular en toda su evolución. El momento angular L permanece siempre grande en comparación con la escala fijada por el spin del agujero negro, de modo que la barrera centrífuga domina completamente la dinámica radial. Incluso en las fases finales del trayecto, la partícula no entra en un régimen cuasi-radial, sino que cruza la ISCO todavía con un momento angular significativo. Por esta razón, los EMRIs no exhiben el refuerzo gravitacional identificado en este capítulo.

5.8. Relación con otros efectos relativistas y con el formalismo $1 + 3$ covariante

En el contexto de relatividad general, la masa que en gravedad newtoniana era la única responsable de la fuerza gravitacional es reemplazada por el tensor energía-momento, compuesto por la energía en reposo, la presión, el flujo de energía y el estrés. Es notable que todos los términos que no corresponden a energía en reposo están asociados, en última instancia, a distintas formas de movimiento. A nivel microscópico, esta interpretación se hace explícita en la teoría cinética: la presión de un gas relativista o no relativista puede escribirse como (Weinberg, 1972):

$$p = \frac{1}{3} \int f(\mathbf{p}) \frac{p^2}{E} d^3p, \quad (5.33)$$

donde $f(\mathbf{p})$ es la función de distribución en el espacio de momentos, $p = \|\mathbf{p}\|$ es el módulo del momento lineal y E la energía de cada partícula. Esta expresión muestra que la presión no es más que un efecto dinámico asociado al movimiento microscópico. En este sentido, presión, flujo de energía y momento angular reforzando la gravedad son manifestaciones de la misma idea: *el movimiento también gravita*.

Este principio aparece en múltiples contextos físicos. En cosmología relativista, las ecuaciones de Friedmann muestran que la presión contribuye a la dinámica gravitacional mediante la combinación $\rho + 3p$, responsable de la desaceleración de la expansión cósmica (Misner et al., 1973; Ellis et al., 2012). De manera análoga, en el modelo de Tolman–Oppenheimer–Volkoff para estrellas compactas, la presión interna incrementa la atracción gravitacional efectiva, reforzando la tendencia al colapso (Oppenheimer and Volkoff, 1939; Wald, 1984).

Otra manifestación aparece en los trabajos de Tsagas y colaboradores (Tsagas, 2010b; Tsaprazi and Tsagas, 2020; Filippou and Tsagas, 2021; Tsagas, 2010a), quienes estudian modelos cosmológicos con velocidades peculiares y observadores “tilted”, es decir, moviéndose con velocidad peculiar respecto al flujo de Hubble. En estos marcos, el flujo de energía q_a inducido por el movimiento peculiar aparece en las ecuaciones de conservación y en las ecuaciones de perturbaciones como una fuente adicional del campo gravitacional. En palabras de Tsaprazi and Tsagas (2020), “en cierto sentido, el flujo a gran escala también gravita”, produciendo tasas de crecimiento de las velocidades peculiares y de las inhomogeneidades más fuertes que en los tratamientos newtonianos o cuasi-newtonianos. El término q_a en la descomposición $1 + 3$ del tensor energía–momento representa un flujo neto de energía a través de hipersuperficies espaciales, reforzando nuevamente la idea de que todo movimiento genera campos gravitacionales. El efecto neto observado en ciertos regímenes del potencial efectivo en Kerr es una manifestación más de este principio general. En RG, el movimiento, ya sea térmico, colectivo, orbital o asociado al spin—también gravita y puede reforzar (o debilitar) la atracción gravitacional efectiva. En escenarios de formación temprana de estructuras, donde los flujos peculiares pueden crecer de manera significativa (Tsagas, 2010b; Tsaprazi and Tsagas, 2020), la acción combinada de (i) geometrías rotantes a pequeña escala (como objetos compactos semilla) y (ii) flujos de energía inducidos por velocidades peculiares a gran escala podría, en principio, amplificar la tasa efectiva de colapso o de transporte de momento. Aunque estos mecanismos operan en regímenes físicos distintos, ambos ilustran cómo efectos puramente relativistas asociados al movimiento pueden modificar la dinámica de crecimiento de estructuras en comparación con la teoría newtoniana o cuasi-newtoniana tradicional. Un análisis conjunto que incorpore ambos contribuyentes dinámicos (spin local + flujos peculiares cosmológicos) podría ser relevante para entender ciertos entornos de formación temprana de estructuras, y constituye una posible línea futura de investigación.

Capítulo 6

Conclusiones

En este trabajo se ha analizado de manera sistemática cómo la Relatividad General modifica la dinámica de caída libre en comparación con la descripción newtoniana, utilizando los espacios-tiempo de Schwarzschild y Kerr como escenarios teóricos controlados. El foco del estudio ha estado puesto en las escalas temporales de colapso gravitacional y en el rol que desempeñan el momento angular de la partícula y la rotación del agujero negro en la eficiencia de la caída, con el objetivo de identificar regímenes en los cuales emergen efectos puramente relativistas sin análogo clásico directo.

A partir del análisis del potencial efectivo radial, se ha mostrado que en Relatividad General la dinámica no puede entenderse únicamente como una competencia entre una atracción gravitacional newtoniana y una barrera centrífuga clásica. En el espacio-tiempo de Schwarzschild, aunque el momento angular continúa introduciendo un efecto predominantemente repulsivo, la corrección relativista proporcional a $-ML^2/r^3$ reduce de manera apreciable la altura efectiva de la barrera centrífuga. Esto provoca que trayectorias con momento angular distinto de cero experimentan una caída más eficiente que en el marco newtoniano, lo que se traduce en tiempos propios de caída más cortos incluso cuando el momento angular no llega a generar una contribución netamente atractiva.

El panorama se enriquece significativamente al considerar el espacio-tiempo de Kerr. En este caso, la aparición del término relativista dependiente de la combinación $(L - aE)$ introduce un acoplamiento directo entre el momento angular de la partícula, su energía y el spin del agujero negro. Este acoplamiento modifica de forma sustancial la interpretación clásica del efecto centrífugo. Dependiendo del signo y magnitud relativa de L y a , así como del régimen energético de la trayectoria, la contribución asociada al momento angular puede reforzar la atracción gravitacional en lugar de oponerse a ella. A energías suficientemente altas y bajos momentos angulares orbitales, se favorece el acceso a regiones más atractivas del potencial efectivo cuando se considera la rotación del agujero negro, facilitando el colapso radial y reduciendo las escalas temporales de caída con respecto a aun agujero negro no rotante.

El análisis numérico de los tiempos propios confirma que estas modificaciones del potencial efectivo tienen consecuencias dinámicas claras cuando se consideran trayectorias completas. Para órbitas corrotantes en Kerr, se observa que el tiempo propio total de caída puede aumentar al incrementarse el spin del agujero negro, especialmente cuando el radio final de la trayectoria depende de a , como en el caso de la ISCO. Este aumento no corresponde a una ralentización dinámica genuina, sino al hecho de que el radio de la ISCO se desplaza hacia valores menores, obligando a la partícula a recorrer una región espacial más extensa y geoméricamente más profunda. Al nor-

malizar el tiempo propio por la distancia propia medida por observadores localmente no rotantes (ZAMO), se evidencia que τ/s_{ZAMO} aumenta con el spin, revelando una aceleración dinámica local que queda enmascarada cuando se considera únicamente el tiempo total. Para trayectorias contrarrotantes, el comportamiento es cualitativamente distinto. En este caso, el acoplamiento entre el momento angular de la partícula y la rotación del agujero negro incrementa la resistencia dinámica a la caída radial. Aunque el tiempo propio total puede disminuir debido al desplazamiento de la ISCO hacia radios mayores, lo que acorta el recorrido integrado, el tiempo normalizado τ/s_{ZAMO} aumenta sistemáticamente.

Con el fin de aislar los efectos que tiene un radio final dependiente del parámetro de rotación, realizamos el estudio considerando radios finales fijos. Para órbitas corrotantes el tiempo de caída tanto normalizado como no normalizado aumentan con la rotación del agujero negro, lo cual se invierte en el caso contrarrotante, en donde la caída suele ser más rápida a mayor valor de a . Este fenómeno está en plena concordancia con el análisis heurístico realizado. Además, comprobamos que la disminución del tiempo propio de caída a medida que la energía aumenta es un efecto que está contenido tanto en el término constante añadido en la integral (presente ya en Schwarzschild y en menor medida en Newton) como en un efecto relacionado plenamente a la rotación del agujero negro, exclusivo de la dinámica de Kerr.

Desde una perspectiva conceptual más amplia, los resultados obtenidos refuerzan una idea fundamental de la RG: el movimiento también gravita. El acoplamiento spin-órbita-energía identificado en el espacio-tiempo de Kerr puede interpretarse como una manifestación concreta de este principio, análoga al rol gravitacional de la presión en estrellas compactas o a la contribución de flujos de energía en contextos cosmológicos. En todos estos casos, no solo la energía en reposo, sino también la energía cinética, el momento angular y los flujos asociados al movimiento participan activamente en la generación del campo gravitacional y pueden modificar las escalas temporales de colapso.

En relación con la formación de estructuras, los resultados de este trabajo no pretenden constituir una explicación completa de procesos complejos como la formación temprana de galaxias o de agujeros negros supermasivos, los cuales dependen de múltiples mecanismos físicos adicionales. Sin embargo, el análisis realizado muestra que existen regímenes bien definidos en los cuales efectos puramente relativistas asociados al spin pueden modificar de manera sistemática las escalas temporales de colapso gravitacional respecto de predicciones newtonianas o cuasi-newtonianas. En escenarios idealizados caracterizados por bajo soporte centrífugo, flujos cuasi-radiales o acreción radiativamente ineficiente, estos efectos podrían actuar como un factor complementario que favorezca el crecimiento temprano de agujeros negros semilla.

Finalmente, este trabajo debe entenderse como un primer paso exploratorio con limitaciones claras. El análisis se ha restringido a la dinámica de partículas de prueba en el plano ecuatorial, omitiendo efectos hidrodinámicos, viscosos y de retroalimentación. Como extensiones naturales se propone la inclusión de trayectorias fuera del plano ecuatorial mediante la constante de Carter, la incorporación de estos efectos en formalismos de hidrodinámica relativista y la exploración del impacto conjunto del spin local y de flujos cosmológicos en simulaciones de formación de estructuras. En este sentido, el estudio de las escalas temporales de colapso desde la Relatividad General permite identificar mecanismos cinemáticos puramente gravitacionales que pueden influir en el ensamblaje de estructuras, aportando una perspectiva teórica necesaria para interpretar observaciones recientes del Universo temprano.

Capítulo 7

Ciencia e Innovación

La formación científica, particularmente en áreas de investigación fundamental, se orienta en la realización de trabajos experimentales o teóricos para obtener nuevos conocimientos sobre los fundamentos de fenómenos y hechos observables, sin buscar una aplicación o uso particular inmediato. Este proceso académico prioriza el desarrollo de marcos conceptuales y herramientas analíticas necesarias para formular y probar hipótesis o leyes universales. No obstante, el Manual de Frascati de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OECD, por sus siglas en inglés) ([OECD, 2015](#)) reconoce que la creación de conocimiento es un motor esencial para el bienestar social, cuyas aplicaciones pueden transformar la vida de las personas y el entorno natural. Por ello, la formación del investigador se ve fortalecida cuando se integra una reflexión sobre el rol social de la ciencia, permitiendo que el conocimiento no solo aumente el acervo cultural de la humanidad, sino que también nutra un debate público mejor informado sobre la innovación.

Desde una perspectiva epistemológica, la actividad científica se define principalmente como un modo de conocer y explicar el mundo, más que como un proceso orientado a la obtención de aplicaciones inmediatas. En este sentido, [Maturana Romesín and Varela García \(2009\)](#) conciben la ciencia como una operación explicativa cuya validez se sustenta en su coherencia interna dentro de un dominio consensual, y no en su utilidad instrumental. Asimismo, la OECD reconoce que la investigación básica constituye un componente esencial del sistema científico, aun cuando sus resultados no se traduzcan directamente en procesos de innovación o desarrollo tecnológico ([OECD, 2015](#)).

Instancias formativas orientadas a la reflexión sobre la relación entre ciencia y sociedad pueden entenderse como espacios de ampliación conceptual del quehacer científico. En este contexto, resulta oportuno mencionar y agradecer la participación en el Programa Internacional Entrepreneurship & Innovation Bootcamp 2025, organizado por ChileMass y financiado a través del proyecto Ciencia e Innovación 2030 de la Universidad de Valparaíso y la Universidad Técnica Federico Santa María. Este programa, desarrollado en la ciudad de Boston, Estados Unidos, tuvo como propósito fortalecer competencias transversales vinculadas a innovación, liderazgo y trabajo colaborativo en un entorno internacional.

La experiencia del Bootcamp no se concibe como una extensión directa de esta investigación ni como un componente que determine sus resultados científicos. Sin embargo, constituyó un espacio formativo complementario que permitió reflexionar críticamente sobre la relación entre ciencia, sociedad y procesos de innovación, así como sobre la diversidad de trayectorias que puede seguir el conocimiento científico a lo largo del tiempo. En este trabajo, la innovación no se entiende como

un objetivo explícito, sino como un marco de reflexión que contribuye a una formación científica integral, en concordancia con el rol fundamental que la investigación básica cumple en el ecosistema del conocimiento, aun cuando sus aplicaciones no sean inmediatas ni predefinidas. El rol de un científico o científica no se limita a la producción de conocimiento, sino que también involucra su comunicación y retribución social. Oportunidades formativas como esta resultan fundamentales en el desarrollo profesional, por ello valoro la posibilidad de haber participado en dicha instancia.

Bibliografía

- Amaro-Seoane, P., Gair, J. R., Freitag, M., Miller, M. C., Mandel, I., Cutler, C. J., and Babak, S. (2007). Intermediate and extreme mass-ratio inspirals—astrophysics, science applications and detection using lisa. *Classical and Quantum Gravity*, 24(17):R113–R169.
- Barack, L. and Cutler, C. (2004). Lisa capture sources: Approximate waveforms, signal-to-noise ratios, and parameter estimation accuracy. *Physical Review D*, 69(8).
- Bardeen, J. M., Press, W. H., and Teukolsky, S. A. (1972). Rotating black holes: Locally nonrotating frames, energy extraction, and scalar synchrotron radiation. *The Astrophysical Journal*, 178:347–370.
- Begelman, M. C., Volonteri, M., and Rees, M. J. (2006). Formation of supermassive black holes by direct collapse in pre-galactic haloes. , 370(1):289–298.
- Boyer, R. H. and Lindquist, R. W. (1967). Maximal Analytic Extension of the Kerr Metric. *Journal of Mathematical Physics*, 8(2):265–281.
- Boylan-Kolchin, M. (2023). Stress-testing λ cdm with high-redshift galaxy candidates. *Nature Astronomy*, 7:731–743.
- Bromm, V. and Loeb, A. (2003). Formation of the First Supermassive Black Holes. , 596(1):34–46.
- Burko, L. M., Khanna, G., and Zenginoğlu, A. (2016). Cauchy-horizon singularity inside perturbed kerr black holes. *Physical Review D*, 93(4).
- Cardoso, V., Biswas, S., and Sarkar, S. (2025). The physics of black holes and their environments: Consequences for gravitational wave science.
- Carroll, S. M. (2019). *Spacetime and Geometry: An Introduction to General Relativity*. Cambridge University Press.
- Carter, B. (1968). Global Structure of the Kerr Family of Gravitational Fields. *Physical Review*, 174(5):1559–1571.
- Carter, B. (1971). Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom. *Physical Review Letters*, 26(6):331–333.
- Chandrasekhar, S. (1983). *The Mathematical Theory of Black Holes*. Oxford University Press.

- Cueto, Elie R., Hutter, Anne, Dayal, Pratika, Gottlöber, Stefan, Heintz, Kasper E., Mason, Charlotte, Trebitsch, Maxime, and Yepes, Gustavo (2025). *Astraeus - ix. impact of an evolving stellar initial mass function on early galaxies and reionisation (corrigendum)*. *AA*, 697:C2.
- Das, S. and Chakrabarti, S. K. (2008). Dissipative accretion flows around a rotating black hole. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 389(1):371–378.
- Dorojan, V. (2024). An analysis of the proof that derives the schwarzschild metric. Available at SSRN. SSRN ID: 5177969.
- Einstein, A. (1916). Die Grundlage der allgemeinen Relativitätstheorie. *Annalen der Physik*, 354(7):769–822.
- Ellis, G. F. R., Maartens, R., and MacCallum, M. A. H. (2012). *Relativistic Cosmology*. Cambridge University Press.
- Escala, A., Zimmermann, L., Valdebenito, S., Vergara, M. C., Schleicher, D. R. G., and Liempi, M. (2025). On the fate of little red dots.
- Filippou, K. and Tsagas, C. G. (2021). Large-scale peculiar velocity fields: Newtonian vs relativistic treatment. , 366(1):4.
- Gourgoulhon, E. (2007). 3+1 formalism and bases of numerical relativity.
- Hartle, J. B. (2003). *Gravity : an introduction to Einstein’s general relativity*.
- Kerr, R. P. (1963). Gravitational Field of a Spinning Mass as an Example of Algebraically Special Metrics. , 11(5):237–238.
- Kruskal, M. D. (1960). Maximal extension of schwarzschild metric. *Phys. Rev.*, 119:1743–1745.
- Labbé, I. et al. (2023). A population of red candidate massive galaxies ~ 600 myr after the big bang. *Nature*, 616:266–269.
- Latif, M. A. and Ferrara, A. (2016). Formation of supermassive black hole seeds. *Publications of the Astronomical Society of Australia*, 33.
- Lense, J. and Thirring, H. (1918). Über den Einfluß der Eigenrotation der Zentralkörper auf die Bewegung der Planeten und Monde nach der Einsteinschen Gravitationstheorie. *Physikalische Zeitschrift*, 19:156.
- Lewis, T. (1932). Some Special Solutions of the Equations of Axially Symmetric Gravitational Fields. *Proceedings of the Royal Society of London Series A*, 136(829):176–192.
- Mason, C. A., Trenti, M., and Treu, T. (2023). The brightest galaxies at cosmic dawn. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 521(1):497–503.

- Matthee, J., Naidu, R. P., Brammer, G., Chisholm, J., Eilers, A.-C., Goulding, A., Greene, J., Kashino, D., Labbe, I., Lilly, S. J., Mackenzie, R., Oesch, P. A., Weibel, A., Wuyts, S., Xiao, M., Bordoloi, R., Bouwens, R., van Dokkum, P., Illingworth, G., Kramarenko, I., Maseda, M. V., Mason, C., Meyer, R. A., Nelson, E. J., Reddy, N. A., Shivaee, I., Simcoe, R. A., and Yue, M. (2024). Little Red Dots: An Abundant Population of Faint Active Galactic Nuclei at $z \sim 5$ Revealed by the EIGER and FRESCO JWST Surveys. , 963(2):129.
- Maturana Romesín, H. and Varela García, F. (2009). *El árbol del conocimiento: las bases biológicas del entendimiento humano*. Disponible en repositorio digital.
- Misner, C. W., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A. (1973). *Gravitation*. W. H. Freeman.
- Naidu, R. P. et al. (2022). Two remarkably luminous galaxy candidates at $z \sim 10$ –12 revealed by jwst. *The Astrophysical Journal Letters*, 940:L14.
- Narayan, R. and Yi, I. (1994). Advection-dominated Accretion: A Self-similar Solution. , 428:L13.
- Newman, E. and Penrose, R. (1962). An Approach to Gravitational Radiation by a Method of Spin Coefficients. *Journal of Mathematical Physics*, 3(3):566–578.
- Novikov, I. D. and Thorne, K. S. (1973). Astrophysics of black holes. In DeWitt, C. and DeWitt, B. S., editors, *Black Holes (Les Astres Occlus)*, pages 343–450. Gordon and Breach.
- OECD (2015). *Frascati Manual 2015: Guidelines for Collecting and Reporting Data on Research and Experimental Development*. The Measurement of Scientific, Technological and Innovation Activities. OECD Publishing, Paris.
- Oppenheimer, J. R. and Volkoff, G. M. (1939). On massive neutron cores. *Phys. Rev.*, 55:374–381.
- Papaetrou, A. (1947). A Static solution of the equations of the gravitational field for an arbitrary charge distribution. *Proc. Roy. Irish Acad. A*, 51:191–204.
- Peebles, P. J. E. (1980). *The large-scale structure of the universe*.
- Penrose, R. (1969). Gravitational Collapse: the Role of General Relativity. *Nuovo Cimento Rivista Serie*, 1:252.
- Penrose, R. and Floyd, R. M. (1971). Extraction of Rotational Energy from a Black Hole. *Nature Physical Science*, 229(6):177–179.
- Robinson, D. C. (1975). Uniqueness of the kerr black hole. *Physical Review Letters*, 34(14):905–906.
- Schindler, J.-T., Hennawi, J. F., Davies, F. B., Bosman, S. E. I., Endsley, R., Wang, F., Yang, J., Barth, A. J., Eilers, A.-C., Fan, X., Kakiichi, K., Maseda, M., Pizzati, E., and Nanni, R. (2025). A little red dot at $z=7.3$ within a large galaxy overdensity. *Nature Astronomy*, 9(11):1732–1744.
- Schwarzschild, K. (1916). Über das Gravitationsfeld eines Massenpunktes nach der Einsteinschen Theorie. *Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften*, pages 189–196.

- Shakura, N. I. and Sunyaev, R. A. (1973). Black holes in binary systems. Observational appearance. , 24:337–355.
- Springel, V., White, S. D. M., Jenkins, A., Frenk, C. S., Yoshida, N., Gao, L., Navarro, J., Thacker, R., Croton, D., Helly, J., Peacock, J. A., Cole, S., Thomas, P., Couchman, H., Evrard, A., Colberg, J., and Pearce, F. (2005). Simulations of the formation, evolution and clustering of galaxies and quasars. , 435(7042):629–636.
- Suh, H., Scharwächter, J., Farina, E. P., Loiacono, F., Lanzuisi, G., Hasinger, G., Marchesi, S., Mezcuca, M., Decarli, R., Lemaux, B. C., Volonteri, M., Civano, F., Yi, S. K., Han, S., Rawlings, M., and Hung, D. (2024). Feeding hidden monsters: a super-eddington accreting black hole 1.5 gyr after the big bang.
- Tsagas, C. G. (2010a). Large-scale peculiar motions and cosmic acceleration: Peculiar motions and cosmic acceleration. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, pages no–no.
- Tsagas, C. G. (2010b). Peculiar motions, accelerated expansion and the cosmological axis. *Physical Review D*, 81(4):043501.
- Tsaprazi, E. and Tsagas, C. G. (2020). Relativistic approach to the kinematics of large-scale peculiar motions. *The European Physical Journal C*, 80(8):757.
- Visser, M. (2007). The Kerr spacetime: A brief introduction. *arXiv e-prints*, page arXiv:0706.0622.
- Volonteri, M. (2010). Formation of supermassive black holes. , 18(3):279–315.
- Wald, R. M. (1984). *General Relativity*. University of Chicago Press.
- Weibel, A., Oesch, P. A., Barrufet, L., Gottumukkala, R., Ellis, R. S., Santini, P., Weaver, J. R., Allen, N., Bouwens, R., Bowler, R. A. A., Brammer, G., Carnall, A. C., Cullen, F., Dayal, P., Dickinson, M., Donnan, C. T., Dunlop, J. S., Giavalisco, M., Grogin, N. A., Illingworth, G. D., Koekemoer, A. M., Labbe, I., Marchesini, D., McLeod, D. J., McLure, R. J., Naidu, R. P., Pérez-González, P. G., Shuntov, M., Stefanon, M., Toft, S., and Xiao, M. (2024). Galaxy build-up in the first 1.5 gyr of cosmic history: insights from the stellar mass function at $z = 4-9$ from jwst nircam observations. *Monthly Notices of the Royal Astronomical Society*, 533(2):1808–1838.
- Weinberg, S. (1972). *Gravitation and Cosmology: Principles and Applications of the General Theory of Relativity*. Wiley.
- Woodrum, C., Rieke, M., Ji, Z., Baker, W. M., Bhatawdekar, R., Bunker, A. J., Charlot, S., Curtis-Lake, E., Eisenstein, D. J., Hainline, K., Hausen, R., Helton, J. M., Hviding, R. E., Johnson, B. D., Robertson, B., Sun, F., Tacchella, S., Whitler, L., Williams, C. C., and Willmer, C. N. A. (2024). Using jades nircam photometry to investigate the dependence of stellar mass inferences on the imf in the early universe. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, 121(42):e2317375121.