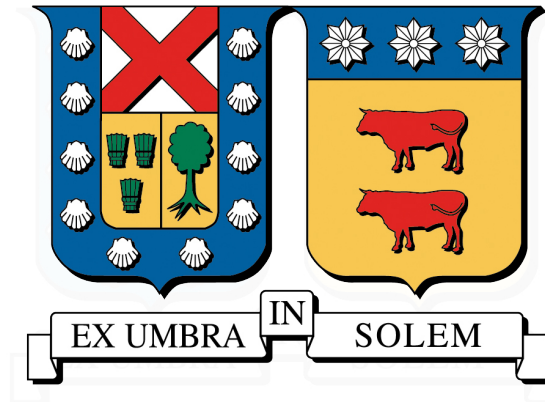


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS
VALPARAÍSO - CHILE



**DISTRITOS DE INSPECCIÓN EN SISTEMAS
DE BUSES URBANOS MEDIANTE ALGORITMOS DE
PARTICIONAMIENTO DE GRAFOS MULTINIVEL**

CONSTANZA MAKARENA MATURANA RAVANAL

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERA CIVIL INDUSTRIAL

PROFESOR GUÍA : DR. PABLO ESCALONA RODRÍGUEZ
PROFESORA CORREFERENTE : DRA. MÓNICA LÓPEZ CAMPOS

ABRIL, 2026



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): Memoria o trabajo de título Tesis de Postgrado

Título del trabajo: DISTRITOS DE INSPECCIÓN EN SISTEMAS DE BUSES URBANOS MEDIANTE ALGORITMOS DE PARTICIONAMIENTO DE GRAFOS MULTINIVEL

Nombre del candidato(a): CONSTANZA MAKARENA MATURANA RAVANAL

Carrera / Grado: INGENIERÍA CIVIL INDUSTRIAL

Campus: CASA CENTRAL VALPARAÍSO Departamento: INDUSTRIAS

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, PABLO ESCALONA, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

El trabajo **NO** contiene información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

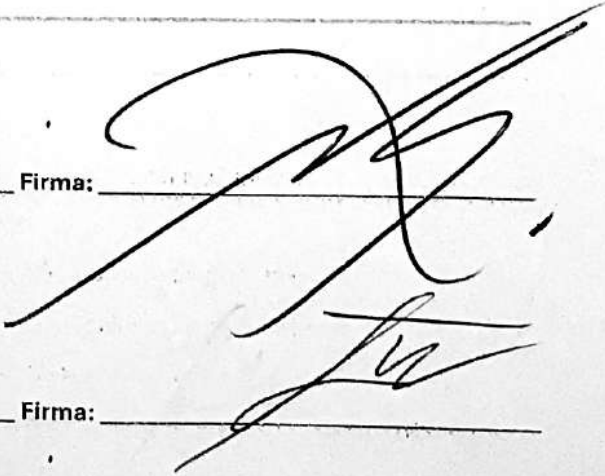
El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (embargo) por (marcar una opción):

6 meses 12 meses 2 años 3 años 5 años 10 años

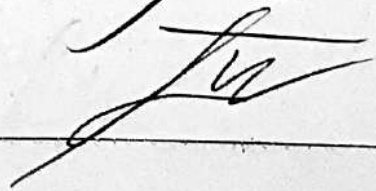
Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

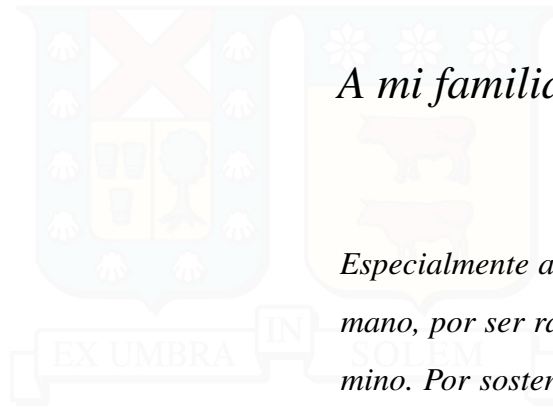
Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 24/04/2026 Firma: 

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 24/04/2026 Firma: 

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.



A mi familia. . .

Especialmente a mis padres y a mi hermano, por ser raíz y refugio en este camino. Por sostenerme incluso en los silencios, por creer en mí cuando yo misma dudaba, y por enseñarme, con amor constante, que siempre es posible avanzar un poco más.

A mi hija Emma y a Eduardo, mi compañero de vida, por ser luz en los días más exigentes. Por acompañarme en cada caída y en cada pequeño triunfo, por su paciencia infinita y por recordarme, con su sola presencia, el verdadero sentido de este recorrido. En ustedes encontré la fuerza, el motivo y el hogar.

A mis profesores, Pablo y Rafael, por aparecer en el momento preciso, guiando con generosidad, sabiduría y humanidad este último tramo. Su apoyo no solo orientó este trabajo, sino que también dio forma a la confianza con la que hoy lo cierro.

Índice de Contenidos

1. Introducción	1
1.1. Problema de Investigación	1
1.2. Objetivos	5
1.2.1. Objetivo General	5
1.2.2. Objetivos Específicos	5
2. Marco Teórico	6
2.1. Transporte público urbano y evasión tarifaria	6
2.1.1. Sistemas de transporte público urbano	6
2.1.2. Evasión tarifaria: definición, causas y consecuencias	7
2.1.3. Evidencia internacional sobre evasión en transporte	7
2.1.4. Evasión en el sistema de buses de Santiago	8
2.2. Fiscalización y patrullaje en sistemas de transporte	9
2.2.1. Conceptos de fiscalización, patrullaje y disuasión	9
2.2.2. Modelos de inspección y juegos de seguridad	12
2.2.3. Fare inspection en redes de buses y metro	12
2.2.4. Limitaciones del proceso de fiscalización en Santiago	13
2.3. Problemas de distritaje y diseño de territorios	16
2.3.1. Definición y clasificación de problemas de distritaje	16
2.3.2. Aplicaciones en seguridad, servicios y transporte	17
2.3.3. Modelos clásicos y enfoques de optimización	17
2.3.4. Criterios de calidad en el distritaje	19
2.3.5. Limitaciones actuales y motivación para nuevas aproximaciones	20
2.4. Particionamiento de grafos y algoritmos de alto rendimiento	21
2.4.1. Definición del problema	22
2.4.2. Esquemas multinivel	22
2.4.3. Algoritmos representativos: METIS, KaHIP y Scotch	23
2.4.4. Limitaciones en redes espaciales: topología versus geografía	25
2.4.5. Motivación: adaptar la representación del grafo	25
3. Formulación del problema	27
4. Solution Approach	31
4.1. Fase I: Generación de instancias (grafos)	31
4.1.1. Codificación de la Instancia (Formato METIS)	31

4.1.2. Modelamiento Topológico: Red Directa vs. Hexagonal	32
4.2. Fase II: Particionamiento de Grafos Multinivel	34
4.2.1. Pipeline de ejecución	34
4.3. Fase III: Selección de Soluciones	35
4.3.1. Definición operacional de indicadores	35
4.3.2. Proceso de selección jerárquica	36
4.3.3. Validación visual	37
5. Experimentos Computacionales	38
5.1. Sobre la Partición de la Red de Buses de Santiago y el cumplimiento de los de Criterios de Diseño	41
5.2. Desempeño computacional	48
5.3. Soluciones seleccionadas con balance relajado	49
5.4. Visualización de soluciones	51
6. Conclusiones	53
Bibliografía	57

Índice de Tablas

2.1. Tasas de evasión estimadas en sistemas de transporte público seleccionados.	8
3.1. Comparación entre unidades de análisis utilizadas en el estudio	30
4.1. Pipeline de particionamiento	34
4.2. Esquema jerárquico de filtrado y selección de soluciones.	37
5.1. Conteo de soluciones con contigüidad ($C = 1$) por configuración.	41
5.2. Conteo de soluciones factibles ($C = 1$ y $\bar{\alpha} \leq \alpha$) por configuración.	42
5.3. Conteo de soluciones con contigüidad completa ($C = 1$) por combinación de α y N	43
5.4. Conteo de soluciones estrictamente factibles ($C = 1$ y $\bar{\alpha} \leq \alpha$) por combinación de α y n (5 semillas).	44
5.5. Conteo de soluciones estrictamente factibles ($C = 1$ y $\bar{\alpha} \leq \alpha$) por combinación de α y n (100 semillas).	44
5.6. Comparación de mejores soluciones factibles y tiempos acumulados de búsqueda: 5 vs. 100 semillas.	46
5.7. Resumen de tiempos de ejecución por solver (Promedio, Mínimo y Máximo).	48
5.8. Tiempo promedio de ejecución (s) según número de distritos k	49
5.9. Mejores soluciones contiguas seleccionadas bajo criterio de balance relajado.	50

Índice de Figuras

2.1. Fare inspection components. (Escalona et al., 2024)	10
2.2. Índice de evasión en Santiago. DTS (2024)	13
2.3. Comparación anual de infracciones cursadas en buses de Santiago. (DTPM, 2025b)	14
4.1. Ejemplo ilustrativo de la codificación fmt 010 utilizada en este trabajo.	32
4.2. Comparación conceptual entre la adyacencia por ruta operativa (a) y la adyacencia espacial por teselación (b).	32
4.3. (1): Teselado.	34
4.4. (2): Asignación.	34
4.5. (3): Relleno.	34
4.6. Proceso de Teselación Hexagonal	34
5.1. Comparación entre contigüidad y factibilidad estricta según número de zonas.	42
5.2. Comparativa desagregada por α : Contigüidad vs Factibilidad Estricta.	45
5.3. Comparación de soluciones relajadas para red directa con $n = 8$ y $\alpha = 10\%$, bajo dinámicas de bajadas y subidas.	51
5.4. Comparación de soluciones para topología hexagonal con $n = 8$ y $\alpha = 10\%$, bajo dinámicas de bajadas y subidas.	52

1 | Introducción

1.1. Problema de Investigación

La evasión tarifaria en el transporte público urbano se ha consolidado como uno de los principales desafíos para la sostenibilidad económica y la legitimidad social de los sistemas de transporte. Diversos estudios muestran que niveles elevados de evasión no solo reducen los ingresos del sistema, sino que también afectan la percepción de equidad entre usuarios cumplidores y evasores, e incrementan la presión sobre los subsidios públicos (Guarda et al., 2016; Cantillo et al., 2022; Ramos and Silva, 2023). En el caso de Santiago, los informes oficiales reportan niveles de evasión persistentemente altos en el componente de buses del sistema Red Movilidad (DTPM, 2025a), lo que ha motivado a la autoridad a explorar múltiples estrategias de control y fiscalización.

La fiscalización en ruta, basada en inspecciones de buses y paraderos, es una de las herramientas más utilizadas a nivel internacional para reducir la evasión (Reddy et al., 2011; Board et al., 2022; Barabino et al., 2024). Sin embargo, su efectividad depende fuertemente de cómo se organizan espacialmente los equipos, de la capacidad de cubrir una red extensa y de mantener un grado suficiente de imprevisibilidad en los patrones de control (Brotcorne et al., 2021; Escalona et al., 2024, 2025). Modelos recientes basados en juegos de Stackelberg han mostrado que una planificación estratégica de patrullajes puede aumentar el *riesgo percibido* por los usuarios de ser fiscalizados y multados (Brotcorne et al., 2021; Escalona et al., 2025).

No obstante, llevar esta planificación a escala real enfrenta una dificultad central: diseñar y actualizar rutas de fiscalización considerando toda la red, y además mantener cobertura

e imprevisibilidad, conduce a un problema de optimización combinatoria que resulta *intratable* a gran escala. En este contexto, una alternativa operativa para volver el problema *tratable* consiste en dividir la red de transporte, es decir, asignar equipos a territorios más acotados y definir, dentro de cada uno, esquemas de inspección impredecibles pero sistemáticos, reduciendo así, el tamaño del espacio de decisión.

Este tipo de decisiones se estudia en la familia de los problemas de distritaje o *districting problems*, ampliamente abordados en contextos electorales, policiales, postales y de provisión de servicios (Kalcsics and Ríos-Mercado, 2019; Ricca et al., 2013). En estos problemas se busca dividir un territorio en distritos que cumplan criterios de *balance*, *contigüidad*, *compactitud* e *integridad* (Kalcsics et al., 2005; Bucarey et al., 2015). En conjunto, estos criterios persiguen *distritos operativamente viables* donde, dentro de este marco, el balance permite una distribución más justa y equitativa de la cantidad de personas a fiscalizar; la contigüidad garantiza que sea posible moverse entre los distintos puntos asignados; la compactitud acota las distancias operativas, evitando, por ejemplo, que al asignar rutas se generen desplazamientos ineficientes desde el centro hacia extremos muy alejados; y la integridad evita que distintos puntos/paraderos pertenezcan a más de un distrito. En consecuencia, un diseño adecuado de distritos puede mejorar la cobertura, reducir tiempos de respuesta y facilitar la planificación en terreno, tal como se ha observado en aplicaciones de seguridad y servicios públicos (Bucarey et al., 2015; Camacho-Collados et al., 2015; Xie and Ouyang, 2016; Farughi et al., 2020; Wang et al., 2021).

Sin embargo, formular un problema de optimización que asegure simultáneamente *balance*, *contigüidad* y *compactitud* al distritar redes de transporte de gran escala conduce, en general, a problemas combinatorios de alta complejidad. Por ello, los métodos exactos, que buscan la solución óptima y pueden entregar un *certificado de optimalidad* al converger, suelen ser aplicables solo a instancias pequeñas, ya que los tiempos de cómputo crecen rápidamente al aumentar el tamaño de la red (Shirabe, 2009; Kassem and Escobedo, 2023). Como alternativa se emplean métodos aproximados, que pueden dividirse en: (i) algoritmos de aproximación con *garantías teóricas de desempeño* (por ejemplo, esquemas de descomposición como *branch-and-cut*) y (ii) enfoques sin garantías teóricas, como heurísticas y metaheurísticas, habituales en problemas altamente combinatorios cuando la

escala vuelve impracticables los enfoques exactos (Bozkaya et al., 2003; Liberatore and Camacho-Collados, 2016; Ríos-Mercado and Escalante, 2016).

Para abordar estos problemas desde un punto de vista computacional, el sistema bajo estudio suele representarse mediante un grafo $G := (V, E)$, donde (V) representa los nodos y (E) los arcos. Los nodos (V) representan las unidades básicas a distritar —que en este caso corresponden a los paraderos de buses—, mientras que los arcos (E) describen las relaciones que hay entre ellos.

Estos arcos no solo conectan paraderos que pertenecen a una misma ruta de bus, sino que también vinculan aquellos que, por su cercanía geográfica, permiten un desplazamiento fluido entre sí. De esta forma, el problema de distritaje se define como la partición del conjunto de paraderos en n subconjuntos disjuntos, buscando que cada zona resultante sea balanceada, esté espacialmente conectada y sea lo más compacta posible.

Desde esta formulación, el distritaje se vincula naturalmente con el problema de particionamiento de grafos, lo que ha motivado el uso de algoritmos desarrollados en ese ámbito. En particular, métodos multilevel como METIS, KaHIP y Scotch han sido ampliamente utilizados por su capacidad para generar particiones balanceadas de forma eficiente y escalable en grafos de gran tamaño (Karypis and Kumar, 1998; Çatalyürek et al., 2023). Estos enfoques priorizan la minimización del corte de aristas (*edge-cut*), y suelen emplearse como una primera aproximación en contextos donde la escala del problema descarta métodos exactos. Esto se debe a que en su formulación estándar, estos métodos utilizan como entrada únicamente nodos, arcos y sus pesos, sin incorporar coordenadas ni distancias en el territorio, por lo que pueden producir particiones balanceadas, pero que no garantizan contigüidad y/o compacidad (Delva et al., 2019a).

No obstante, un aspecto común en el modelamiento de problemas de distritaje —que frecuentemente se adopta de manera implícita en la formulación— es que la construcción del grafo suele estar estrechamente ligada a la estructura espacial del territorio. En la mayoría de las aplicaciones, las aristas describen límites compartidos entre unidades básicas o conexiones en la red vial, de modo que el grafo representa la topología de adyacencias del mapa, es decir, permite georeferenciación (Ricca et al., 2013; Bozkaya et al., 2003; Zoltners and Sinha, 2005; Drexler and Haase, 1999; Perrier et al., 2006).

En este contexto, y de manera consistente con lo observado en múltiples dominios, cuando el grafo codifica relaciones físicas de vecindad, objetivos como minimizar el corte de aristas (*edge-cut*) pueden favorecer regiones más cohesionadas e interpretables en el espacio (Etemadnia et al., 2014). Con ello, el problema deja de ser únicamente *cómo* fiscalizar, y pasa a incluir *dónde* y *sobre qué unidades* organizar la operación, de modo que los planes sean implementables en terreno.

En el contexto de la fiscalización de buses, la mayoría de los trabajos se han concentrado en modelar la interacción estratégica entre evasores e inspectores (Brotcorne et al., 2021; Escalona et al., 2024, 2025), o en el diseño de políticas de inspección a nivel de estaciones y líneas (Delle Fave et al., 2014; Barabino and Salis, 2023; Egu and Bonnel, 2020). Sin embargo, existe un vacío respecto a cómo adaptar métodos escalables de particionamiento para producir distritos con calidad geométrica adecuada sin sacrificar su principal ventaja: la escalabilidad en redes masivas. Se identifica así una brecha metodológica: los modelos exactos aseguran calidad geométrica pero no escalan; los algoritmos de particionamiento escalan, pero requieren una representación que refleje apropiadamente la geometría.

Este estudio se propone evaluar, en el caso de la red de buses de Santiago, hasta qué punto la combinación entre distintas representaciones del grafo (red de paraderos versus teselación hexagonal) y algoritmos de particionamiento genéricos (KaHIP, METIS, Scotch) permite generar distritos de fiscalización que sean simultáneamente balanceados, contiguos y compactos. Para ello, se construirá y analizará un conjunto amplio de particiones, se medirán indicadores de calidad geométrica y de balance, y se diseñará un procedimiento de filtrado que seleccione automáticamente aquellas soluciones que resulten operativamente factibles para la planificación de la fiscalización en terreno.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo General

Construir distritos de fiscalización para la red de buses de Santiago usando métodos basados en particionamiento de grafos, de modo de obtener distritos balanceados, contiguos y compactos en tiempos de cómputo acotados.

1.2.2. Objetivos Específicos

- Modelar la red de buses de Santiago como grafo bajo dos representaciones: red de paraderos y teselación hexagonal.
- Generar distritos aplicando KaHIP, METIS y Scotch en ambas representaciones, variando el número de distritos (n) y la tolerancia de desbalance (α).
- Evaluar la calidad de las particiones generadas mediante métricas de balance, contigüidad y compactitud.
- Diseñar un procedimiento de filtrado que permita identificar automáticamente las soluciones factibles según los criterios operativos de distritaje.

2 | Marco Teórico

2.1. Transporte público urbano y evasión tarifaria

El transporte público urbano constituye una infraestructura esencial para el funcionamiento de las ciudades modernas, al facilitar la movilidad cotidiana, reducir la congestión vehicular y promover la equidad en el acceso a bienes y servicios. Diversos organismos internacionales destacan que los sistemas de transporte público cumplen un rol estratégico en la sostenibilidad económica y ambiental de las metrópolis, siempre que cuenten con niveles adecuados de demanda efectiva y financiamiento estable (Board et al., 2022). Sin embargo, estos sistemas enfrentan múltiples desafíos estructurales, entre los cuales la evasión tarifaria se ha consolidado como uno de los más críticos por su impacto directo sobre los ingresos del sistema y la capacidad de proveer servicios de calidad.

2.1.1. Sistemas de transporte público urbano

Los sistemas de transporte público urbano suelen estar compuestos por múltiples modos —como buses, metro y tranvías— que funcionan de manera integrada bajo políticas tarifarias comunes. Su operación requiere equilibrar eficiencia económica, accesibilidad territorial y confiabilidad operativa. En este contexto, la estabilidad financiera es un componente central, pues determina la capacidad de sostener frecuencias adecuadas, renovar flota y mantener infraestructuras críticas (Schöbel and Urban, 2025). No obstante, dicha estabilidad se ve seriamente afectada cuando una fracción significativa de los usuarios utiliza el sistema sin pagar, fenómeno ampliamente documentado en redes de transporte a nivel global.

2.1.2. Evasión tarifaria: definición, causas y consecuencias

La evasión tarifaria se define como el uso de un servicio de transporte sin pagar la tarifa correspondiente, ya sea eludiendo dispositivos de control, accediendo de manera irregular a estaciones o evitando los puntos formales de validación (Guarda et al., 2016; Cantillo et al., 2022). Este comportamiento puede estar asociado a múltiples factores, entre ellos: percepción de baja fiscalización, normalización social del no pago, condiciones socioeconómicas desfavorables, sensibilidad al nivel tarifario y debilidades en los mecanismos de control (Porath and Galilea, 2020).

Las consecuencias son relevantes en varias dimensiones. En lo financiero, reduce ingresos y puede aumentar la dependencia de subsidios públicos; en lo operativo, dificulta la planificación y puede deteriorar la calidad del servicio; y en lo social, genera inequidad entre quienes pagan y quienes no, afectando la legitimidad institucional (Ramos and Silva, 2023). En consecuencia, abordar la evasión requiere no solo comprender sus determinantes, sino también considerar la efectividad de los mecanismos de fiscalización y de la respuesta institucional.

2.1.3. Evidencia internacional sobre evasión en transporte

La evasión tarifaria es un fenómeno global. En ciudades donde se opera bajo esquemas *proof-of-payment*, como Nueva York, Melbourne o Berlín, las autoridades reportan niveles persistentemente altos de evasión, lo cual motiva la implementación de equipos de inspección móviles y estrategias de fiscalización aleatoria (Reddy et al., 2011; PTV, 2024; MTA, 2025). En sistemas articulados como TransMilenio en Bogotá, informes recientes muestran que las tasas de evasión superan el 15 % incluso con presencia de vigilantes contratados (DTS, 2024). Asimismo, estudios europeos han destacado que la evasión puede generar pérdidas anuales multimillonarias y afectar la percepción pública del sistema (Egu and Bonnel, 2020; Board et al., 2022).

Tabla 2.1: Tasas de evasión estimadas en sistemas de transporte público seleccionados.

Ciudad/País	Sistema	Tasa de Evasión	Fuente
Santiago, Chile	Buses (Red)	37.5 %	(DTPM, 2025a)
Bogotá, Colombia	TransMilenio	~ 15,0 %	(DTS, 2024)
Nueva York, EE.UU.	Buses (MTA)	~ 44,0 %	(MTA, 2025)
Victoria, Australia	Buses	5.1 %	(PTV, 2024)
Londres, UK	Buses	~ 1,5 %	(Barabino et al., 2024)

2.1.4. Evasión en el sistema de buses de Santiago

En Chile, el sistema de transporte público de la ciudad de Santiago presenta niveles históricamente altos de evasión en el componente de buses. Según cifras oficiales del Directorio de Transporte Público Metropolitano, la evasión alcanzó un 37,5 % en 2024, convirtiéndose en una de las tasas más elevadas entre los sistemas de buses de la región (DTPM, 2025a). Investigaciones locales han mostrado que este fenómeno está asociado tanto a factores socioeconómicos como a percepciones de baja probabilidad de fiscalización en ruta (Guarda et al., 2016; Porath and Galilea, 2020).

Nuevas evidencias provenientes del DTPM muestran además importantes limitaciones en la cadena sancionatoria. Según el *Informe Final de Fiscalización* del organismo, solo el 34 % de los infractores paga la multa asociada a la evasión (DTPM, 2025b). Entre quienes no pagan, apenas un 40 % es inscrito en el Registro de Pasajeros Infractores (RPI), y únicamente un 19 % llega a recibir medidas de apremio para la regularización del pago (DTPM, 2025b). Adicionalmente, un 6 % de los RUT entregados durante los controles corresponde a identidades ficticias o inválidas, mientras que un 16 % de los infractores no puede ser notificado al no poseer un domicilio válido (DTPM, 2025b). Estos datos muestran que la evasión no es solo un problema de comportamiento del usuario, sino también un desafío operacional e institucional que afecta la capacidad del sistema para fiscalizar eficazmente.

2.2. Fiscalización y patrullaje en sistemas de transporte

Sobre los antecedentes anteriores, la fiscalización tarifaria constituye una herramienta central en las estrategias de control de evasión en sistemas de transporte público. Su efectividad depende tanto del despliegue territorial de los equipos en ruta como de la capacidad institucional para detectar, registrar y sancionar de manera eficiente a los infractores. Diversos estudios muestran que la fiscalización no solo cumple una función de corrección, sino que también incrementa el *riesgo percibido* de inspección y sanción, lo que puede modificar comportamientos en el tiempo (Reddy et al., 2011; Barabino et al., 2024). Sin embargo, su implementación presenta desafíos importantes, especialmente en redes de gran extensión y alta complejidad operacional, como es el caso de Santiago.

2.2.1. Conceptos de fiscalización, patrullaje y disuasión

En el contexto del transporte público urbano, la *fiscalización* corresponde al conjunto de acciones destinadas a verificar y hacer cumplir la normativa tarifaria y operacional del sistema. En sistemas *proof-of-payment* (POPS) —sin barreras físicas y con validación a bordo o en estación— la fiscalización se basa en inspecciones aleatorias, realizadas con recursos limitados, que deben ser lo suficientemente frecuentes e impredecibles como para desincentivar la evasión (Barabino et al., 2024). La organización espacial y temporal de estas inspecciones, y en particular del *patrullaje*, es por tanto un componente central de la gestión del sistema.

Siguiendo la categorización propuesta en la literatura reciente, un sistema de *fare inspection* se caracteriza por tres dimensiones principales: política de despliegue, política de ubicación y política de inspección (2.1).

Política de despliegue (*deployment policy*)

Determina cómo se posicionan los equipos de inspección en el espacio:

- *Spot*: los equipos se ubican en puntos fijos (paraderos, estaciones o nodos específicos) y controlan a los pasajeros que pasan por ese punto.

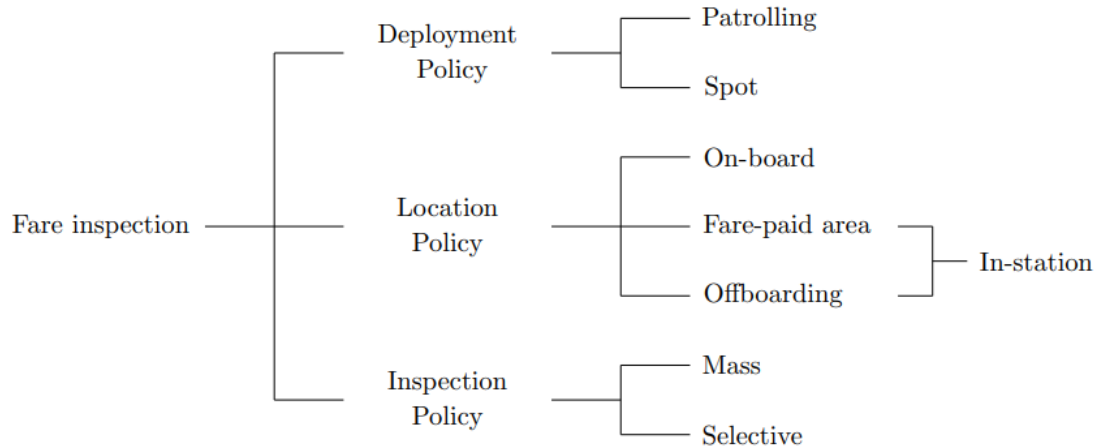


Figura 2.1: Fare inspection components. (Escalona et al., 2024)

- *Patrolling*: los equipos siguen rutas de patrullaje que recorren múltiples puntos de la red. Estas rutas pueden ser deterministas (recorridos fijos repetidos) o estocásticas, seleccionadas aleatoriamente desde un conjunto de *schedules* con probabilidades predefinidas, como en los modelos de juegos de seguridad para fiscalización.

Política de localización (*location policy*)

Define en qué momento del viaje se realiza la inspección:

- *On-board*: control a bordo del bus o tren, mientras el pasajero está viajando.
- *Fare-paid area*: control en áreas de pago restringidas (por ejemplo, zonas validadas dentro de estaciones).
- *Off-boarding / In-station*: control al descender, en andenes o paraderos, donde los equipos observan a los pasajeros que abandonan el vehículo o la estación. Esta tesis se sitúa principalmente en este último caso, coherente con la política de inspección *in-station selective* estudiada por Escalona et al. (2024).

Política de inspección (*inspection policy*)

Establece a quiénes se controla:

- *Mass*: se inspecciona a todos los pasajeros presentes en el punto o vehículo, típico de operativos esporádicos de alto impacto.
- *Selective*: se inspecciona solo a una muestra de los pasajeros, lo que permite operar con recursos acotados y minimizar el impacto operativo. Dado el tamaño de la red de Santiago y la cantidad limitada de equipos, se asume una política de inspección principalmente selectiva.

Dentro de este marco, el *patrullaje* puede caracterizarse como el problema de diseñar y ejecutar rutas de inspección que permitan recorrer el territorio con una distribución equilibrada de la carga de trabajo, manteniendo al mismo tiempo niveles adecuados de cobertura espacial e impredecibilidad. La literatura diferencia entre: (i) patrullajes con rutas fijas, más simples de operar pero fáciles de anticipar por los usuarios; y (ii) patrullajes inciertos, en los que los equipos seleccionan cada día una ruta desde un conjunto de itinerarios óptimos, de acuerdo con probabilidades calculadas mediante modelos de optimización y teoría de juegos de Stackelberg (Brotcorne et al., 2021; Escalona et al., 2024).

Finalmente, la *disuasión* se entiende como el efecto combinado de la presencia de fiscalizadores y del riesgo percibido de sanción sobre la decisión de pago del pasajero. La literatura distingue tres tipos de usuarios: (i) *honestos*, que pagan siempre; (ii) *evasores persistentes*, que casi nunca pagan; y (iii) *evasores oportunistas*, que comparan el beneficio de evadir con el costo esperado de la multa (Barabino et al., 2024; Guarda et al., 2016). Para este último grupo, la probabilidad efectiva de inspección —determinado por la combinación de políticas de despliegue, ubicación e inspección— es la variable clave. Diseñar distritos de fiscalización y patrones de patrullaje que aumenten este riesgo esperado, manteniendo restricciones operativas razonables, es precisamente el objetivo que motiva el problema abordado en esta memoria.

2.2.2. Modelos de inspección y juegos de seguridad

Desde una perspectiva metodológica, la fiscalización en transporte público ha sido estudiada mediante modelos de teoría de juegos, particularmente juegos de Stackelberg. En estos modelos, la autoridad actúa como un líder que define una estrategia de inspección, mientras que los usuarios actúan como seguidores que ajustan su comportamiento dependiendo de la probabilidad percibida de ser controlados. Estudios recientes aplicados a redes de transporte muestran que patrones espaciales y temporales de inspección pueden modificar significativamente la conducta evasora y aumentar la recaudación efectiva (Brotcorne et al., 2021; Escalona et al., 2024, 2025).

A pesar de estos avances, la mayoría de los modelos asume la existencia de zonas o distritos operativos predefinidos para la fiscalización. Sin embargo, la literatura ofrece escasa orientación metodológica sobre cómo construir dichas zonas de manera óptima, especialmente en territorios extensos, con miles de nodos y múltiples servicios simultáneos. Esta ausencia teórica abre un espacio relevante de investigación: el diseño de distritos de fiscalización que permitan mejorar la eficiencia y cobertura del patrullaje.

2.2.3. Fare inspection en redes de buses y metro

La fiscalización en sistemas de transporte público se implementa mediante combinaciones de controles en ruta, inspecciones en estaciones, patrullajes móviles y apoyos basados en información. En distintos contextos internacionales se observa que, más allá del número total de controles, la efectividad de la fiscalización depende de su organización operativa: cómo se distribuyen equipos en el territorio, cómo se programan recorridos y en qué medida se preserva la imprevisibilidad de los controles.

En ciudades como Nueva York y Melbourne, se ha reforzado el uso de unidades móviles de inspección como respuesta a niveles relevantes de evasión (MTA, 2025; PTV, 2024). En Bogotá, el sistema TransMilenio ha mantenido niveles elevados de evasión, sin lograr reducciones sostenidas por debajo del 15 % pese a ampliar la presencia fiscalizadora (DTS, 2024). En conjunto, estos casos sugieren que el problema no se reduce únicamente a aumentar esfuerzos, sino a diseñar estrategias de despliegue territorial que permitan

cobertura efectiva y control operacionalmente viable. Esta dimensión resulta especialmente relevante en redes extensas y heterogéneas, como la de Santiago, donde la planificación espacial de la fiscalización enfrenta restricciones adicionales.

2.2.4. Limitaciones del proceso de fiscalización en Santiago

En Santiago, la evasión en buses se mantiene en niveles elevados, aunque con una tendencia reciente a la baja desde la implementación del Plan Antievasión [\(2.2\)](#).

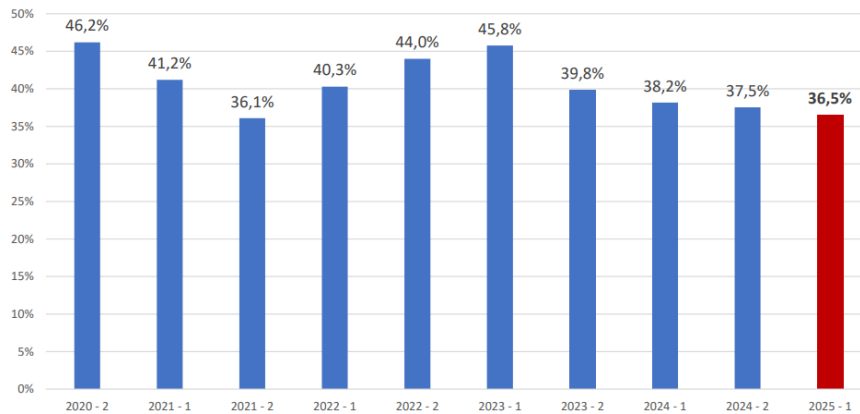


Figura 2.2: Índice de evasión en Santiago. [DTS](#) [\(2024\)](#)

De acuerdo con los informes oficiales del DTPM, el índice de evasión fue 38,2 % en el primer semestre de 2024 y 37,5 % en el segundo semestre de 2024; para el primer semestre de 2025 se reporta un 36,5 %. Los reportes vinculan esta reducción con el período posterior al inicio del Plan Antievasión (primer semestre de 2023), cuantificando una disminución de 8,3 puntos (2024-2S) y de 9,3 puntos (2025-1S) respecto de 2023-1S. En paralelo, los mismos informes reportan aumentos de demanda (p. ej., 17,4 % en buses durante 2024-1S y 13 % durante 2024), lo que refuerza la necesidad de sostener una fiscalización operativamente efectiva en un sistema de alta escala ([DTPM](#), [2024a,b](#)).

Un indicador complementario del reforzamiento de la fiscalización es la evolución de las infracciones registradas por evasión. Según el DTPM, en 2022 se constataron 8.980 infracciones, mientras que en 2023 esta cifra aumentó a 28.356, más que triplicándose en un año [\(2.3\)](#).

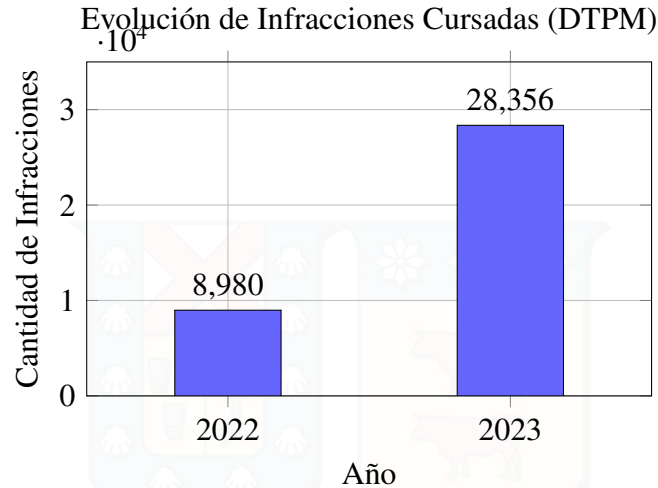


Figura 2.3: Comparación anual de infracciones cursadas en buses de Santiago. (DTPM, 2025b)

Aunque a primera vista este salto podría interpretarse como un aumento real de la evasión, el propio informe institucional atribuye la variación principalmente a (i) la recuperación de la demanda tras la pandemia y, sobre todo, (ii) la implementación del *Plan Antievasión* desde enero de 2023, que incrementó sustantivamente el número de controles y la capacidad de registrar formalmente infracciones (DTPM, 2025b). En este sentido, el aumento de infracciones observadas es consistente con una medición más intensiva del fenómeno y no necesariamente con un deterioro abrupto del comportamiento de pago.

Este cambio se dio, además, en paralelo a un aumento de la capacidad de fiscalización. Por un lado, el DTPM reporta que durante 2022 se realizaron cerca de 128 mil controles a pasajeros, mientras que para 2023 se fijó como meta superar los 256 mil controles (DTPM, 2023b). Por otro lado, en el marco del Plan Antievasión se anunció un incremento de inspectores privados asociados a las operadoras, desde 688 a 900 personas (DTPM, 2023a). En conjunto, estos antecedentes respaldan que parte de la variación observada en infracciones está vinculada a un mayor esfuerzo de fiscalización y registro.

Aun así, persisten restricciones que limitan el impacto de la fiscalización. En primer lugar, como se discutió previamente, la cadena sancionatoria presenta brechas de efectividad (baja proporción de pago y dificultades de identificación y notificación), lo que reduce el efecto esperado de la multa como mecanismo correctivo (DTPM, 2025b). A estas brechas institucionales se suman limitaciones operativas propias de la fiscalización en terreno.

En segundo lugar, los equipos operan con dotación y horarios acotados frente a una red extensa y altamente conectada. En la práctica, esto implica que solo una fracción reducida de los viajes potenciales puede ser controlada en un día determinado. La asignación espacial de los equipos se vuelve, por tanto, estratégica: concentrar controles en pocos puntos puede aumentar la intensidad local, pero deja grandes zonas sin cobertura.

En tercer lugar, la fiscalización debe coordinarse con la operación cotidiana del sistema. Los inspectores se desplazan en transporte público, están sujetos a ventanas horarias específicas (p. ej., inicio y término de turnos) y deben evitar interferir con la regularidad del servicio o generar congestión en paraderos críticos. Estas restricciones reducen el conjunto de rutas factibles de patrullaje y obligan a considerar explícitamente la duración y concatenación de trayectos de inspección.

En cuarto lugar, existe una tensión inherente entre *estabilidad* e *imprevisibilidad*. Desde el punto de vista organizacional, es deseable mantener rutinas relativamente estables; sin embargo, desde la perspectiva del control, los patrones de inspección deben ser suficientemente impredecibles para evitar que los usuarios anticipen dónde y cuándo es más seguro evadir. Diseñar esquemas de patrullaje que equilibren ambas dimensiones no es trivial.

Finalmente, la información usada para planificar la fiscalización proviene de observaciones parciales: los datos de evasión e infracciones se estiman a partir de controles muestrales en ciertos puntos y horarios, no de un registro exhaustivo de todos los viajes (DTPM, 2024a). Esta incertidumbre sobre la distribución espacial real de la evasión refuerza la necesidad de estrategias que cubran el territorio de manera sistemática, pero con flexibilidad.

En conjunto, estas limitaciones sugieren que mejorar la fiscalización en Santiago no depende únicamente de “fiscalizar más”, sino de *organizar mejor* el despliegue territorial de los equipos. En este marco, el diseño de distritos operativos contiguos, balanceados y razonablemente compactos se plantea como una herramienta para estructurar el espacio de decisión del patrullaje y hacer más eficiente el uso de los recursos disponibles.

2.3. Problemas de distritaje y diseño de territorios

El diseño de distritos es un problema clásico en investigación de operaciones que consiste en dividir un territorio en un conjunto de zonas o regiones operativas que cumplan criterios de calidad previamente establecidos. Si bien el distritaje tuvo su origen en la delimitación de circunscripciones electorales, su aplicación se ha extendido ampliamente a ámbitos como seguridad pública, servicios postales, mantenimiento vial, recolección de residuos y, más recientemente, planificación de fiscalización en sistemas de transporte (Kalsics and Ríos-Mercado, 2019; Ricca et al., 2013). El objetivo común es organizar espacialmente la operación para mejorar la eficiencia, reducir desplazamientos improductivos y garantizar una prestación de servicio equitativa. En términos formales, el distritaje busca particionar un conjunto de unidades espaciales en n distritos que sean *balanceados*, *contiguos* y *compactos*, atributos que buscan asegurar zonas operativas funcionales. Sin embargo, estos requisitos conducen a modelos de optimización altamente complejos, usualmente NP-hard (Tavares-Pereira et al., 2007), lo que ha motivado el desarrollo de múltiples enfoques de resolución

2.3.1. Definición y clasificación de problemas de distritaje

Los problemas de distritaje pueden clasificarse según el tipo de unidades espaciales (nodos o arcos), el criterio de balance, las restricciones geométricas y el objetivo de optimización. Una clasificación ampliamente utilizada distingue entre:

- **Distritaje nodal:** cada unidad geográfica (cuadra, zona censal, paradero, hexágono) es modelada como un nodo de un grafo. Este es el enfoque más tradicional en problemas electorales, policiales y de servicios (Kalsics and Ríos-Mercado, 2019; Bucarey et al., 2015).
- **Distritaje por arcos:** las unidades de interés son segmentos o tramos de red, relevantes en aplicaciones de recolección, mantenimiento vial o patrullaje de rutas (García-Ayala et al., 2016; Kassem and Escobedo, 2023).

- **Distritaje mixto:** combina nodos y arcos, especialmente en redes de transporte o logística (Wang et al., 2021).

Asimismo, los modelos pueden incluir objetivos simples (por ejemplo, minimizar la frontera entre distritos) o múltiples criterios simultáneos, como balance, compacidad, equidad o minimización de tiempos de viaje (Kalcsics and Ríos-Mercado, 2019; Alvarez-Miranda et al., 2025).

2.3.2. Aplicaciones en seguridad, servicios y transporte

El distritaje ha demostrado ser particularmente útil en sistemas donde la operación se realiza mediante equipos móviles asignados territorialmente. Por ejemplo, en seguridad pública se han desarrollado modelos que asignan sectores policiales equilibrados para mejorar tiempos de respuesta (Camacho-Collados et al., 2015; Liberatore et al., 2022). En servicios postales y comerciales, el distritaje se emplea para equilibrar cargas de trabajo y reducir costos de desplazamiento (Ríos-Mercado and Fernández, 2009; Ríos-Mercado and Escalante, 2016; Alvarez-Miranda et al., 2025). En redes de transporte, el problema se ha utilizado para diseñar zonas tarifarias, definir sectores de mantenimiento o planificar estrategias de fiscalización.

En este contexto, Kallioras et al. (2015) destacan que el distritaje suele ser solo la primera fase de un problema mayor: primero se definen las zonas (nivel estratégico) para facilitar el posterior enrutamiento de los equipos (nivel operativo). Por lo tanto, la calidad del distrito se vuelve esencial: un mal diseño inicial repercute directamente en rutas de fiscalización ineficientes.

2.3.3. Modelos clásicos y enfoques de optimización

La literatura ofrece diversas formulaciones matemáticas para problemas de distritaje. Una primera familia corresponde a modelos de *set-partitioning* que generan explícitamente un conjunto de distritos candidatos —cada uno balanceado, contiguo y compacto— y luego seleccionan una combinación de ellos que cubra el territorio sin solapamientos (Mehrotra et al., 1998). Este enfoque permite un control muy fino sobre los criterios de calidad,

pero sufre de un crecimiento combinatorial del número de distritos potenciales y requiere técnicas avanzadas como *branch-and-bound* o *branch-and-price*, con un rendimiento limitado en instancias de gran tamaño (Kalcsics and Ríos-Mercado, 2019; Bucarey et al., 2015).

Una segunda familia está dada por modelos de *localización-asignación*, en los que se escogen ciertos “centros” o semillas y posteriormente se asignan las unidades espaciales a dichos centros, formando distritos. Dependiendo de la función objetivo, estos modelos se relacionan con problemas clásicos de localización discretos, como los de tipo cobertura o p -mediana (Bucarey et al., 2015). Esta aproximación ha sido especialmente útil en contextos policiales, donde se busca simultáneamente equidad en la carga y formas geográficas razonables (minimizando la dispersión). Sin embargo, la inclusión explícita de restricciones de contigüidad (como restricciones de *cut-set*) vuelve a introducir una fuerte complejidad computacional, volviéndolos intratables para redes con miles de nodos (Kassem and Escobedo, 2023; Tavares-Pereira et al., 2007).

Debido a estas dificultades, una parte importante de la literatura ha recurrido a enfoques heurísticos y metaheurísticos: búsqueda tabú, GRASP, algoritmos genéticos y particionado espectral (Bozkaya et al., 2003; Ricca and Simeone, 2008; Liberatore and Camacho-Collados, 2016). Otros trabajos utilizan estructuras geométricas como teselaciones de Voronoi para proponer zonas de patrullaje con cargas más equilibradas y formas controladas de manera implícita (Delva et al., 2019a; Hettle et al., 2021).

En general, estos enfoques sacrifican optimalidad garantizada a cambio de escalabilidad y flexibilidad para incorporar múltiples criterios.

En cuanto a la naturaleza del proceso de resolución, es fundamental distinguir entre enfoques deterministas y estocásticos. Los primeros garantizan que, ante una misma instancia y parámetros, el algoritmo seguirá una trayectoria idéntica. En contraste, los enfoques estocásticos incorporan mecanismos de aleatoriedad para diversificar la exploración del espacio de búsqueda y evitar la convergencia prematura en óptimos locales (Talbi, 2009).

Debido a la naturaleza estocástica de estos algoritmos, se requiere el uso de Generadores de Números Pseudoaleatorios (PRNG). Como señalan (Matsumoto and Nishimura, 1998), estos sistemas dependen de un valor inicial denominado semilla (*seed*), el cual

determina de manera unívoca la secuencia de valores generados. Técnicamente, la semilla actúa como el estado inicial del generador; al fijar su valor, se determina la secuencia de decisiones probabilísticas del método —como la selección de una ruta en GRASP o el cruce en un algoritmo genético— transformando un proceso inherentemente aleatorio en uno estrictamente reproducible.

En el contexto de esta investigación, la fijación de la semilla es fundamental para garantizar la reproducibilidad de los experimentos (L'Ecuyer, 2012). Esto permite que las variaciones observadas en los resultados se deban a cambios en los parámetros del modelo o a la configuración de la red de transporte y no a la variabilidad intrínseca del generador aleatorio. De este modo, cada valor de semilla permite realizar una ejecución controlada del método, facilitando tanto el análisis de sensibilidad como la evaluación estadística de la robustez del algoritmo frente a diferentes trayectorias de búsqueda (Gentle, 2003; Talbi, 2009).

2.3.4. Criterios de calidad en el distritaje

De acuerdo con lo planteado por Kalcsics and Ríos-Mercado (2019), los requisitos para diseñar distritos de calidad se pueden dividir en dos grandes grupos: criterios de carga y criterios geográficos. Mientras que los primeros buscan que el trabajo se reparta de forma justa, los segundos aseguran que las zonas resultantes tengan sentido en el mapa y sean fáciles de recorrer.

Criterios de carga: Balance

Este criterio requiere que los distritos tengan cargas de trabajo similares, ya sea medida en población, demanda de servicios o, en este caso, flujo de pasajeros y cantidad de paraderos (Kalcsics and Ríos-Mercado, 2019). El balance permite una distribución más justa y equitativa de las tareas, evitando que unos equipos de fiscalización tengan una carga significativamente mayor que otros. En logística de transporte, autores como Kallioras et al. (2015) sugieren que el balance ideal no solo debe considerar la cantidad de puntos, sino también el tiempo estimado de recorrido, lo que implica que los distritos no deben ser excesivamente grandes en extensión.

Criterios geográficos

Estos criterios se encargan de que la partición sea operacionalmente viable:

- **Contigüidad:** Exige que cada distrito forme un único componente conectado. En términos operativos, la contigüidad garantiza que sea posible moverse entre los distintos paraderos asignados sin tener que salir del sector. Sin embargo, estudios como el de [Delva et al. \(2019a\)](#) distinguen entre la contigüidad en el grafo (topológica) y la geográfica; una zona podría estar conectada por una calle larga que cruza un espacio vacío, lo que en la práctica genera “discontinuidades” que dificultan el patrullaje ([Bucarey et al., 2015](#)).
- **Compactitud:** Se refiere a la forma del distrito, buscando evitar regiones muy alargadas o con fronteras irregulares. Su objetivo es acotar las distancias operativas para que las rutas sean eficientes y no obliguen a desplazamientos inútiles desde un extremo al otro del sector. Existen dos formas de medirla: la *geométrica*, que busca formas circulares o “globulares” minimizando la distancia al centro del distrito ([Kassem and Escobedo, 2023](#)), y la *topológica*, que busca minimizar el número de aristas que conectan con otros distritos (*edge-cut*) ([Karypis, 2013](#)).
- **Integridad de fronteras:** Este criterio establece que los distritos deben respetar, en la medida de lo posible, las divisiones administrativas existentes o las barreras físicas del terreno. En la fiscalización de buses, esto significa evitar fragmentar comunas o zonas de operación de las empresas de transporte. Además, permite considerar obstáculos como autopistas, ríos o vías férreas que, aunque están cerca en el mapa, representan cortes reales en el movimiento de los fiscalizadores por la ciudad.

2.3.5. Limitaciones actuales y motivación para nuevas aproximaciones

Aunque los modelos clásicos ofrecen control detallado sobre balance, contigüidad y compactitud, su complejidad computacional dificulta su aplicación en redes urbanas grandes. Por ello, una línea emergente de investigación propone aprovechar algoritmos de particionamiento de grafos de alto rendimiento —como METIS, KaHIP y Scotch— para

generar particiones rápidas y escalables (Çatalyürek et al., 2023). Sin embargo, la literatura advierte que estos algoritmos, al operar sobre relaciones topológicas (minimizando el corte de aristas), pueden producir soluciones fragmentadas o geoméricamente ineficientes cuando se aplican a redes de transporte (Delva et al., 2019a).

Ante este desafío, trabajos recientes como el de Hettle et al. (2021) sugieren que si el grafo subyacente posee una estructura regular, la minimización del corte de aristas se alinea con la optimización del perímetro geométrico. Esto plantea la oportunidad de explorar cómo la representación del grafo —pasando de paraderos a teselaciones— influye en la calidad de los distritos obtenidos, temática central de esta investigación.

2.4. Particionamiento de grafos y algoritmos de alto rendimiento

El particionamiento de grafos (*Graph Partitioning Problem*, GPP) es un problema clásico en ciencias de la computación, que surge en el contexto de la computación paralela y el diseño de circuitos, y hoy aplicado también al análisis de redes y a diversos problemas de asignación territorial (Karypis and Kumar, 1998; Çatalyürek et al., 2023). Su idea básica es dividir los vértices de un grafo en n subconjuntos de tamaño similar, minimizando al mismo tiempo el número de aristas que los conectan entre sí. Aunque la formulación es sencilla, el problema es NP-hard para $n \geq 2$, por lo que la literatura se ha concentrado en heurísticas eficientes capaces de tratar grafos con cientos de miles o millones de vértices.

En el contexto del distritaje geográfico, estos algoritmos se presentan como una alternativa atractiva a los modelos exactos revisados en la sección anterior: son rápidos, robustos y permiten trabajar directamente sobre la estructura de una red. Sin embargo, fueron diseñados para optimizar métricas computacionales (comunicación entre procesadores, tamaño de separadores), no criterios espaciales como la compacidad geométrica, lo que genera desafíos cuando se los aplica al diseño de distritos territoriales.

2.4.1. Definición del problema

Dado un grafo $G = (V, E)$, cargas nodales $\{w_v\}_{v \in V}$ y parámetros (k, τ) , el problema consiste en encontrar k particiones $V_1, \dots, V_k \subseteq V$ tal que cada subgrafo $G[V_i]$ este conectado, la carga total de cada parte se encuentre entre $1 \pm \tau$ de su carga ideal $\bar{W} = (1/k) \sum_{v \in V} w_v$ y el costo de los cortes sea minimizado:

$$\text{mín} \quad \sum_{i=1}^k \delta(V_i) \quad (2.1)$$

$$\text{s.a.} \quad (1 - \tau) \bar{W} \leq W(V_i) \leq (1 + \tau) \bar{W} \quad \forall i = 1, \dots, k \quad (2.2)$$

$$\bigcup_{i=1}^k V_i = V, \quad \forall i = 1, \dots, k. \quad (2.3)$$

$$V_i \cap V_j = \emptyset \quad (i \neq j) \quad (2.4)$$

$$G[V_i] \text{ es conexo} \quad \forall i = 1, \dots, k. \quad (2.5)$$

Donde (3.1), $\delta(V_i)$ corresponde al numero de *cut edges*, es decir, aristas con un vertice en V_i y otro vertice en V_j tal que $i \neq j$.

$$\delta(V_i) := \sum_{(u,v) \in E} \mathbf{1}\{u \in V_i, v \notin V_i\}.$$

(De manera equivalente, si se dispone de costos por arista $c_{uv} \geq 0$, se puede usar $\delta(V_i) := \sum_{(u,v) \in E} c_{uv} \mathbf{1}\{u \in V_i, v \notin V_i\}$.)

2.4.2. Esquemas multinivel

Dado que resolver el problema de particionamiento de forma exacta es impracticable para grafos de gran escala, las herramientas algorítmicas actuales se basan casi universalmente en el paradigma multinivel (*multilevel graph partitioning*) (Karypis and Kumar, 1998). Este esquema se estructura en tres fases principales:

1. **Fase de reducción (*coarsening*):** se construye una secuencia de grafos G_0, G_1, \dots, G_L , donde G_0 es el grafo original y cada $G_{\ell+1}$ se obtiene fusionando (contrayendo) vértices y aristas adyacentes de G_ℓ . El objetivo es disminuir progresivamente la dimensión

del problema preservando su topología y estructura global.

2. **Partición inicial:** sobre el grafo de menor tamaño o nivel de máxima reducción (G_L), se calcula una partición inicial. Al tratarse de un grafo pequeño, en esta etapa es posible aplicar heurísticas de alta calidad (como Kernighan-Lin o Fiduccia-Mattheyses), las cuales serían computacionalmente prohibitivas si se ejecutaran directamente sobre el grafo original G_0 .
3. **Proyección y refinamiento (*uncoarsening*):** la partición obtenida se proyecta de manera sucesiva hacia los grafos de mayor resolución ($G_L \rightarrow G_{L-1} \rightarrow \dots \rightarrow G_0$). En cada nivel intermedio se aplican algoritmos de refinamiento local que intercambian vértices entre los distritos para mejorar la función objetivo (minimizar el corte) sin violar las restricciones de balance.

Este enfoque permite alcanzar una buena combinación entre calidad de la solución y tiempo de cómputo, y sirve de base para las herramientas METIS, KaHIP y Scotch, utilizadas en esta memoria.

2.4.3. Algoritmos representativos: METIS, KaHIP y Scotch

METIS

METIS es uno de los particionadores más difundidos en la literatura aplicada (Karypis, 2013; Karypis and Kumar, 1998). Implementa el esquema multinivel tanto en modo de bipartición recursiva (*recursive bisection*) como en modo *k-way*, donde se construyen directamente n partes. Sus principales características son:

- optimización del *edge-cut* o variantes como el *volume*, que ponderan también los vértices incidentes;
- control explícito del desbalance a través de un parámetro ε ;
- tiempos de ejecución muy reducidos en grafos de gran tamaño.

Por diseño, METIS opera únicamente sobre la estructura del grafo (vértices, aristas y pesos asociados). La información geométrica de las unidades espaciales, cuando existe, no se utiliza en el proceso de particionamiento.

KaHIP

KaHIP (*Karlsruhe High Quality Partitioning*) es una familia de algoritmos orientada a obtener particiones de mayor calidad —en términos de cortes más pequeños y balances más estrictos— a costa de tiempos de cómputo más altos (Sanders and Schulz, 2013). Además del esquema multinivel estándar, incorpora:

- refinamientos basados en flujos (*flow-based refinement*) para identificar bloques de vértices que pueden moverse en conjunto;
- búsquedas locales multiintento (*multi-try local search*);
- componentes evolutivos que combinan varias particiones iniciales.

KaHIP ofrece distintas configuraciones (*fast*, *eco*, *strong*) que permiten ajustar el compromiso entre tiempo de ejecución y calidad del corte, lo que resulta útil para comparar escenarios con distintas exigencias de precisión.

Scotch

Scotch es un paquete desarrollado originalmente para particionar y mapear grafos en arquitecturas paralelas, con fuerte énfasis en robustez y portabilidad (Pellegrini, 2025). Su módulo `gpart` permite dividir un grafo en n partes usando variantes de bipartición recursiva y heurísticas de refinamiento similares a las de METIS, mientras que otros módulos se encargan de mapear la partición resultante sobre la topología de la máquina. Al igual que los anteriores, Scotch optimiza el corte de arcos (*edge-cut*) y el balance sin utilizar información geométrica de los nodos.

2.4.4. Limitaciones en redes espaciales: topología versus geografía

Cuando estos algoritmos se aplican directamente a redes de transporte urbano, la literatura reporta varios problemas. En primer lugar, al minimizar el *edge-cut* sobre un grafo construido a partir de la operación (paraderos como vértices, servicios como aristas), los particionadores pueden generar distritos alargados o “serpenteantes” que tienen pocos enlaces con el resto de la red pero son poco compactos en el mapa (Delva et al., 2019a).

En segundo lugar, la contigüidad garantizada por el algoritmo es estrictamente topológica: cada parte induce un subgrafo conexo, pero esto no implica necesariamente contigüidad geográfica. Es posible obtener distritos con “islas” de nodos separados por grandes distancias físicas, un diseño que resulta poco práctico para equipos que deben patrullar el territorio a pie o en vehículo ligero.

Estos efectos se explican porque, para el algoritmo, la “distancia” entre nodos está dada por la estructura de la red de servicios (topología), no por su posición en el plano. Desde la perspectiva del distritaje territorial, esta desconexión entre topología y geografía es una limitación central.

2.4.5. Motivación: adaptar la representación del grafo

En problemas de distritaje, la construcción del grafo suele diseñarse para reflejar la estructura espacial del territorio. En particular, las aristas no representan conexiones abstractas, sino relaciones físicas de vecindad.

Por ejemplo, en distritaje político es habitual definir una arista (i, j) si y solo si las unidades i y j comparten frontera, de modo que el grafo captura directamente la topología de adyacencias del mapa (Ricca et al., 2013; Bozkaya et al., 2003). De forma similar, en el diseño de territorios de ventas la adyacencia suele definirse por vecindad geográfica para favorecer territorios contiguos y operativamente manejables (Zoltners and Sinha, 2005; Drexl and Haase, 1999). En servicios urbanos, especialmente en problemas vinculados a *arc routing*, el grafo representa la red de calles, por lo que su conectividad es coherente con la conectividad del espacio físico (Perrier et al., 2013). En esta línea, se han utilizado particionadores de grafos sobre grafos construidos explícitamente desde la infraestructura

vial produciendo particiones contiguas en el mapa (Etemadnia et al., 2014).

En el caso del transporte público, las aristas suelen modelar relaciones *operativas* asociadas al funcionamiento del servicio (por ejemplo, pertenencia a un mismo recorrido, consecutividad de paradas en una línea, o existencia de viajes directos con alta frecuencia entre dos puntos), que no coinciden necesariamente con vecindad física. De este modo, dos unidades pueden estar conectadas en el grafo y, aun así, estar separadas por grandes distancias, o ser vecinas en el territorio sin presentar conexión en E . En estas situaciones, aplicar particionamiento estándar sobre el grafo operativo optimiza la estructura de la red de servicio, pero puede degradar la cohesión espacial requerida para la operación en terreno, tal como se ha reportado en modelamientos de redes de transporte público (Delva et al., 2019b).

En lugar de modificar los algoritmos de particionamiento y con ello perder parte de su eficiencia y escalabilidad, una alternativa es adaptar la *representación* del territorio para que la adyacencia del grafo refleje de mejor manera la proximidad espacial.

En particular, discretizar el espacio en unidades regulares permite controlar mejor la geometría de las regiones resultantes. Hettle et al. (2021) muestran que, cuando el territorio se representa mediante una malla o teselación regular y la adyacencia se define de forma consistente con esa geometría, objetivos como minimizar el *edge-cut* se relacionan directamente con propiedades geométricas de las regiones. En consecuencia, esta memoria considera una teselación hexagonal como unidad básica. Los hexágonos son celdas compactas y con un esquema de adyacencia uniforme, lo que facilita el análisis y la comparación de la compacidad y contigüidad de los distritos.

Así, la estrategia adoptada es comparar dos representaciones (paraderos versus teselación hexagonal) y evaluar cómo la combinación *representación–algoritmo* (KaHIP, METIS, Scotch) afecta la calidad de los distritos en términos de balance, contigüidad y compactitud.

3 | Formulación del problema

Esta sección presenta la definición formal del problema de particionar una red de transporte público en distritos de inspección tarifaria, buscando simultáneamente *balance*, *contigüidad* y *compactitud* en tiempos de cómputo acotados.

Consideramos un sistema de transporte urbano representado por un grafo no dirigido $G := (V, E)$, donde V es el conjunto de nodos que representan unidades básicas y E es el conjunto de aristas que representan la adyacencia entre ellas. En esta aplicación, las unidades básicas corresponden a: (i) paraderos, o bien (ii) celdas de una teselación hexagonal.

Paraderos

Conjuntos:

- $V (v = 1, \dots, |V|)$: Conjunto de nodos, donde cada nodo representa un **paradero**.
- $L (l = 1, \dots, |L|)$: Conjunto de **recorridos/líneas** de buses.
- $\mathcal{V} := \{V_1, \dots, V_k\}$: Distritos (partición de V) a construir.
- $P_l \subseteq V$: conjunto de paraderos atendidos por la línea $l \in L$.
- $E (e = 1, \dots, |E|)$: Conjunto de aristas que representan la adyacencia entre unidades básicas.

Se define una arista entre dos paraderos si existe al menos una línea de buses que pase

por ambos:

$$E := \{(u, v) \in V \times V : \exists l \in L \text{ tal que } u \in P_l \wedge v \in P_l, u \neq v\}.$$

Parámetros

- w_v : carga de fiscalización asociada al paradero $v \in V$, definida como demanda total de pasajeros (subidas/bajadas).
- $W := \sum_{v \in V} w_v$: carga total del sistema.
- n : número de distritos a construir.
- τ : tolerancia máxima de desbalance permitida.
- $\bar{W} := W/n$: carga ideal por distrito.

Restricciones

Integridad (asignación única)

Cada paradero debe pertenecer a exactamente un distrito.

$$\bigcup_{i=1}^k V_i = V, \quad V_i \cap V_j = \emptyset \quad (i \neq j).$$

Balance de carga

La carga total de cada distrito debe aproximarse a la carga ideal $\bar{W} := W/k$, permitiendo una tolerancia τ . Sea $W(V_i) := \sum_{v \in V_i} w_v$ la carga del distrito i . Se exige:

$$(1 - \tau) \bar{W} \leq W(V_i) \leq (1 + \tau) \bar{W} \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Contigüidad

Cada distrito debe ser conexo sobre el grafo de adyacencia. En particular, el subgrafo inducido por V_i debe ser conexo:

$$G[V_i] \text{ es conexo} \quad \forall i = 1, \dots, k.$$

Teselación hexagonal

Conjuntos

- V ($v = 1, \dots, |V|$): conjunto de nodos que representan las unidades básicas.
- E ($e = 1, \dots, |E|$): conjunto de aristas que representan la adyacencia entre unidades básicas.
- $N_v := \{v' \in V : (v, v') \in E\}$: conjunto de vecinos (nodos adyacentes) de $v \in V$.
- $\mathcal{V} := \{V_1, \dots, V_k\}$: colección de distritos (partición de V) a construir.

Enunciado del problema

Dado un grafo $G = (V, E)$, cargas nodales $\{w_v\}_{v \in V}$ y parámetros (k, τ) , el problema consiste en encontrar una partición $\mathcal{D} = \{D_1, \dots, D_k\}$ que minimice la dispersión y cumpla balance y contigüidad:

$$\text{mín} \quad \sum_{i=1}^k \delta(V_i) \tag{3.1}$$

$$\text{s.a.} \quad (1 - \tau) \bar{W} \leq W(V_i) \leq (1 + \tau) \bar{W} \quad \forall i = 1, \dots, k \tag{3.2}$$

$$\bigcup_{i=1}^k V_i = V, \quad \forall i = 1, \dots, k. \tag{3.3}$$

$$V_i \cap V_j = \emptyset \quad (i \neq j) \tag{3.4}$$

$$G[V_i] \text{ es conexo} \quad \forall i = 1, \dots, k. \tag{3.5}$$

Donde (3.1), $\delta(V_i)$ corresponde al número de *cut edges*, es decir, aristas con un vertice en V_i y otro vertice en V_j tal que $i \neq j$.

$$\delta(V_i) := \sum_{(u,v) \in E} \mathbf{1}\{u \in V_i, v \notin V_i\}.$$

$$\delta(V_i) := \sum_{(u,v) \in E} c_{uv} \mathbf{1}\{u \in V_i, v \notin V_i\}.$$

La Tabla 3.1 resume las principales diferencias metodológicas entre ambas unidades.

Tabla 3.1: Comparación entre unidades de análisis utilizadas en el estudio

Criterio	Paraderos	Celdas hexagonales
Número de nodos	Alto (> 11,720)	Medio (~ 500)
Regularidad espacial	Irregular	Regular
Adyacencia	Basada en rutas de buses	Basada en vecindad geométrica
Peso del nodo	Subidas y bajadas por paradero	Agregado de subidas y bajadas
Escalabilidad computacional	Más exigente	Más eficiente
Interpretabilidad territorial	Variable	Alta

4 | Solution Approach

El enfoque de solución se implementa como un flujo de trabajo computacional dividido en tres fases principales:

1. **Construcción de grafos:** Discretización espacial y operativa de los datos.
2. **Particionamiento:** Ejecución de algoritmos multinivel bajo múltiples parámetros.
3. **Selección multicriterio:** Evaluación de factibilidad y calidad de las soluciones.

4.1. Fase I: Generación de instancias (grafos)

En esta etapa, los datos del sistema de transporte se transforman en estructuras de grafos compatibles con los solvers utilizados (METIS/KaHiP). El objetivo es construir representaciones que capturen simultáneamente la conectividad operativa y la carga de trabajo de los fiscalizadores.

4.1.1. Codificación de la Instancia (Formato METIS)

Para que el algoritmo de particionamiento logre un equilibrio en la carga de trabajo de fiscalización, el grafo se exporta utilizando el formato estándar de METIS con pesos en los vértices. En este trabajo se emplea la codificación `fmt 010`, donde el peso de cada nodo representa la demanda operativa.

La Figura 4.1 ilustra esta estructura. La primera línea (encabezado) declara el número de nodos, el número de aristas y el código de formato `010`. Las líneas siguientes detallan cada nodo iniciando con su peso entero (w_i), seguido de la lista de sus nodos adyacentes.

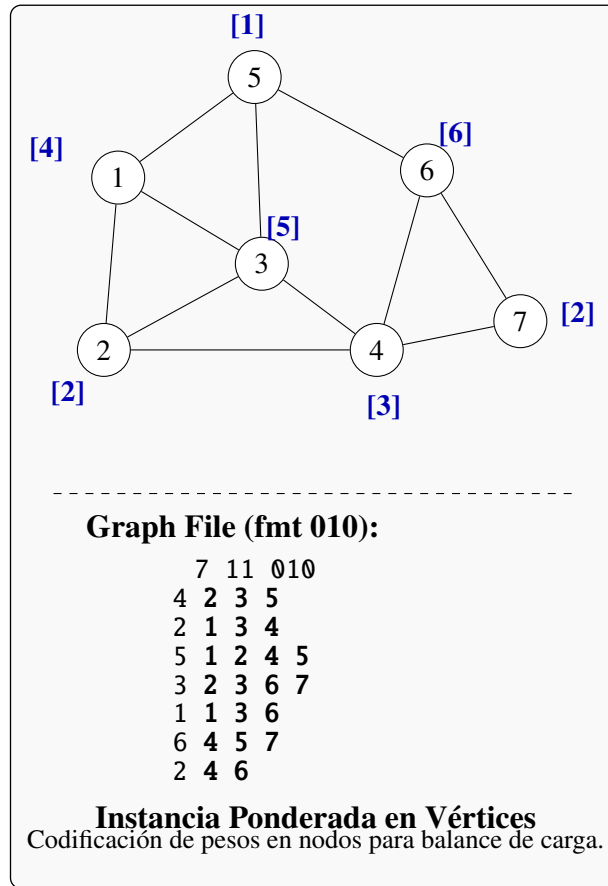


Figura 4.1: Ejemplo ilustrativo de la codificación `fmt 010` utilizada en este trabajo.

4.1.2. Modelamiento Topológico: Red Directa vs. Hexagonal

Para evaluar el impacto de la estructura espacial en la factibilidad operativa de los distritos, se proponen dos paradigmas de modelamiento (ilustrados en la Figura 4.2):

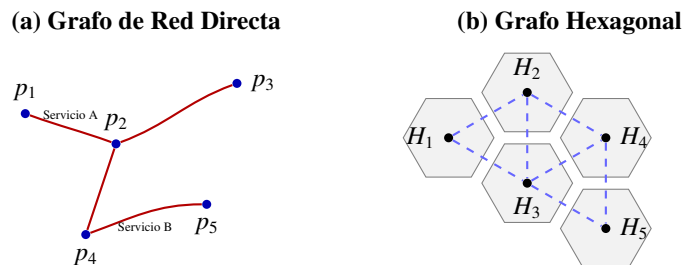


Figura 4.2: Comparación conceptual entre la adyacencia por ruta operativa (a) y la adyacencia espacial por teselación (b).

El procedimiento sistemático computacional utilizado para generar y validar ambas

estructuras se describe a continuación en el Algoritmo **1**.

Algorithm 1 Construcción de Grafos de Inspección

Input: Dataset DTPM (nodos V , demanda, servicios), radio hexagonal λ .

Output: Grafo continuo $G = (W, E)$ ponderado en vértices (fmt **010**).

- 1: **if** Topología == Red Directa **then**
 - 2: $W \leftarrow V$ ▷ Los nodos del grafo son los paraderos
 - 3: $w_i \leftarrow$ Subidas en el paradero i , $\forall i \in W$
 - 4: $E \leftarrow \{(u, v) \mid u, v \text{ comparten al menos un servicio de bus operativo}\}$
 - 5: **else if** Topología == Hexagonal **then**
 - 6: **Etapa 1: Teselación Base**
 - 7: Generar malla hexagonal H de radio λ que cubra las coordenadas de V .
 - 8: **Etapa 2: Unidades Activas y Ponderación**
 - 9: Asignar cada paradero $v \in V$ a su hexágono contenedor $h \in H$.
 - 10: $W_{activos} \leftarrow \{h \in H \mid h \text{ contiene al menos un paradero}\}$
 - 11: $w_i \leftarrow \sum$ subidas en i , $\forall i \in W_{activos}$
 - 12: **Etapa 3: Contigüidad y Relleno de Agujeros**
 - 13: Identificar el conjunto de componentes conexas C en $W_{activos}$.
 - 14: $W_{conectores} \leftarrow$ Hexágonos vacíos añadidos vía *shortest-path* para unir C .
 - 15: $W_{agujeros} \leftarrow$ Hexágonos vacíos encapsulados, identificados vía *flood-fill*.
 - 16: $W \leftarrow W_{activos} \cup W_{conectores} \cup W_{agujeros}$
 - 17: Asignar peso base $w_j \leftarrow 1$, $\forall j \in (W_{conectores} \cup W_{agujeros})$.
 - 18: $E \leftarrow \{(a, b) \mid a, b \in W \text{ comparten frontera física}\}$
 - 19: **end if**
 - 20: Normalizar pesos $w_i \in \mathbb{Z}^+$ ▷ Requerimiento estricto del solver
 - 21: Validar simetría del conjunto de aristas E
 - 22: Exportar grafo $G = (W, E)$ y pesos w en codificación estandarizada fmt **010**
 - 23: **return** G
-

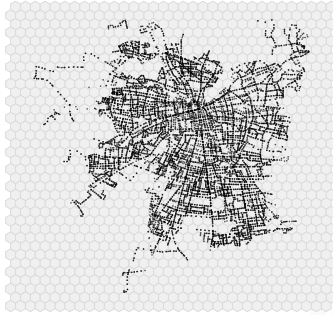


Figura 4.3: (1): Teselado.

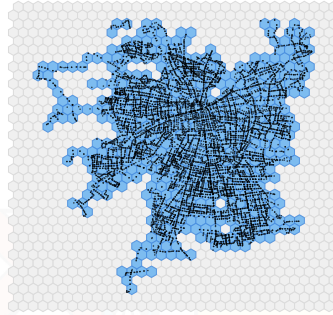


Figura 4.4: (2): Asignación.

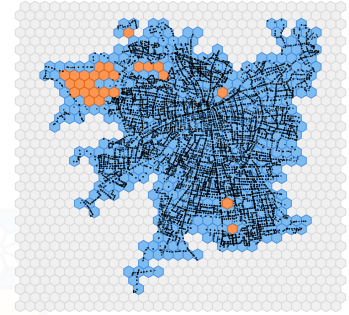


Figura 4.5: (3): Relleno.

Figura 4.6: Proceso de Teselación Hexagonal

4.2. Fase II: Particionamiento de Grafos Multinivel

Esta fase constituye el núcleo computacional del estudio. A partir de cada grafo $G = (V, E)$ generado en la Fase I, se ejecutan algoritmos de particionamiento multinivel con el objetivo de dividir el conjunto de nodos en n distritos balanceados, minimizando el número de aristas cortadas.

Para ello es necesario introducir parámetros de entrada como el balance predefinido (α), la cantidad de distritos que se desean generar (n) y la cantidad de veces que se desean ejecutar las particiones en cada algoritmo (s).

4.2.1. Pipeline de ejecución

El proceso completo se automatiza mediante scripts, permitiendo ejecutar de forma masiva todas las combinaciones de parámetros. Cada ejecución sigue el flujo descrito en la Tabla [4.1](#).

Tabla 4.1: Pipeline de particionamiento

Paso	Descripción
1	Seleccionar grafo de entrada (G)
2	Definir parámetros (n, α, s)
3	Ejecutar algoritmo de particionamiento
4	Obtener vector de asignación de distritos

Este procedimiento genera un conjunto amplio de soluciones candidatas, permitiendo analizar la estabilidad de los algoritmos frente a distintas configuraciones y estructuras de grafo.

4.3. Fase III: Selección de Soluciones

Tras la ejecución masiva descrita en la Fase II, se obtiene un conjunto amplio de soluciones candidatas. Dado que los algoritmos de particionamiento operan bajo lógicas heurísticas, es necesario someter estas salidas a un proceso de validación estructural y evaluación geométrica. En esta fase, las soluciones son filtradas según sus restricciones operativas y, posteriormente, ordenadas para identificar las configuraciones óptimas para el despliegue en terreno.

4.3.1. Definición operacional de indicadores

1. Contigüidad Espacial (C):

C := indicador de conectividad interna de los distritos.

Para que un diseño territorial sea transitable por un fiscalizador, no pueden existir zonas aisladas. Para cada subconjunto de nodos (o hexágonos) $V_i \subseteq V$ asignados a un distrito, se evalúa si el subgrafo inducido $G[V_i]$ es conexo. El indicador se define como:

$$C := \begin{cases} 1 & \text{si todos los } n \text{ distritos son conexos} \\ 0 & \text{en caso contrario} \end{cases}$$

2. Cumplimiento de Balance ($\bar{\alpha}$):

$\bar{\alpha}$:= desviación máxima de la carga operativa respecto al promedio.

Sea $W_i := \sum_{v \in V_i} w_v$ la carga total (subidas o bajadas) del distrito i , y sea $\bar{W} := \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k W_i$ la carga ideal o promedio. El desbalance máximo de la solución se define como:

$$\bar{\alpha} := \max_{i \in \{1, \dots, k\}} \left(\frac{|W_i - \bar{W}|}{\bar{W}} \right)$$

Dado que el algoritmo de particionamiento recibe una tolerancia máxima permitida α

(ej. 5%), este indicador no busca ser minimizado, sino que actúa como una restricción de validación para asegurar que la heurística convergió exitosamente ($\bar{\alpha} \leq \alpha$).

3. Compacidad geométrica (D):

D := medida de dispersión espacial promedio de los nodos respecto del centroide de sus distritos.

Para cada distrito i , se define su centroide geográfico \mathbf{c}_i como el promedio de las coordenadas de los nodos que lo componen. Luego, la dispersión interna del distrito se calcula como la distancia euclidiana promedio de sus nodos al centroide:

$$D_i := \frac{1}{|V_i|} \sum_{v \in V_i} d(v, \mathbf{c}_i)$$

donde V_i es el conjunto de nodos del distrito i , $|V_i|$ es su número de nodos, y $d(v, \mathbf{c}_i)$ es la distancia entre el nodo v y el centroide del distrito.

El indicador global de compacidad de una solución se define como el promedio de las dispersiones distritales:

$$D := \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n D_i$$

donde n es el número total de distritos.

Valores menores de D indican distritos más compactos, es decir, espacialmente más concentrados. Dado que las coordenadas utilizadas están expresadas en longitud y latitud, D debe interpretarse como una medida relativa de dispersión espacial y no como una distancia métrica exacta.

4.3.2. Proceso de selección jerárquica

Para determinar la mejor solución dentro del universo de resultados, se implementa un esquema jerárquico. Este procedimiento prioriza, en primera instancia, el cumplimiento estricto de las restricciones operativas y, en segunda instancia, la optimización del esfuerzo de desplazamiento.

Tabla 4.2: Esquema jerárquico de filtrado y selección de soluciones.

Nivel	Criterio	Tipo de Acción	Condición
1	Contigüidad (C)	Filtro estricto	Descartar si $C = 0$
2	Balance ($\bar{\alpha}$)	Filtro de tolerancia	Descartar si $\bar{\alpha} > \alpha$
3	Compacidad (K)	Criterio de optimización	Seleccionar solución con $\text{mín}(K)$

4.3.3. Validación visual

Como última etapa, las soluciones que logran el mejor resultado de compacidad para cada configuración (n y tipo de grafo) son graficadas, permitiendo observar si dichas soluciones cumplen con los criterios de forma que son necesarios para que sean operativamente viables.

5 | Experimentos Computacionales

En esta sección se describen los experimentos computacionales realizados para la construcción de distritos de fiscalización en la red de buses de Santiago, utilizando métodos basados en particionamiento de grafos. Los resultados se presentan y analizan en función de la calidad de las particiones generadas, considerando criterios de balance, contigüidad y compactitud, así como tiempos de cómputo acotados.

Los experimentos se desarrollan sobre la red de transporte público de Santiago de Chile, la cual forma parte de un sistema integrado que incluye buses, metro y tren urbano. En particular, la red de buses —que constituye el foco de este estudio— cuenta con aproximadamente 11.720 paraderos y 20.705 conexiones entre ellos, cubriendo una extensión superior a los 3.200 km de recorridos. A nivel operacional, el sistema completo de transporte público moviliza del orden de 4,5 millones de pasajeros diarios, de los cuales más de 2,3 millones corresponden a viajes en buses.

En este contexto, la red de buses presenta una alta densidad de uso, registrando un flujo promedio diario de 8.781.325 subidas y 5.927.356 bajadas de pasajeros. Es importante notar que estas magnitudes difieren significativamente del número de pasajeros diarios reportados para el sistema. Mientras que aproximadamente 2,3 millones de usuarios utilizan buses en un día típico, las cifras de subidas y bajadas son considerablemente mayores. Esto se debe a que una misma persona puede realizar múltiples viajes dentro de la jornada, ya sea por transbordos, viajes encadenados o desplazamientos de ida y regreso. En consecuencia, estas variables no representan individuos únicos, sino el número total de eventos de uso del sistema.

En este trabajo, las subidas y bajadas de pasajeros se utilizan como una aproximación de la demanda sobre la red, permitiendo capturar de mejor forma la carga operacional

asociada a cada zona.

El procedimiento completo fue implementado en Python, mediante un flujo computacional propio, definido en la sección anterior, que integra la generación de instancias, la ejecución de algoritmos de particionamiento y la evaluación posterior de las soluciones obtenidas.

En particular, Python fue utilizado para construir los grafos de entrada, exportarlos en formato compatible con METIS, ejecutar de forma automatizada los distintos paquetes de particionamiento y procesar las particiones resultantes. De este modo, el enfoque no corresponde al uso directo de una única herramienta, sino a una implementación experimental construida a partir de bibliotecas y ejecutables especializados de particionamiento de grafos.

Los algoritmos considerados fueron:

- KaHIP, mediante el algoritmo KaFFPa.
- METIS, considerando sus variantes `k-way` y `recursive bisection`.
- SCOTCH.

Cada algoritmo recibe como entrada un grafo ponderado en vértices y retorna un vector de asignación, donde cada nodo queda asociado a un distrito. Posteriormente, dichas particiones son evaluadas mediante los indicadores de contigüidad, balance y compacidad definidos en la Fase III.

El sistema se modeló mediante dos grafos no dirigidos. El primero corresponde al grafo de paraderos, donde cada nodo representa un paradero y cada arco representa una conexión operativa entre paraderos asociada a los servicios de buses.

El segundo corresponde al grafo hexagonal, construido a partir de una teselación espacial de 502 hexágonos. En este grafo, cada nodo representa un hexágono y cada arco representa una relación de adyacencia espacial entre hexágonos vecinos, es decir, hexágonos que comparten frontera.

Se define una **instancia** como una configuración fija del problema dada por el tipo de grafo considerado, el número de distritos n y el parámetro de desbalance permitido α . Un

experimento corresponde a la ejecución de un algoritmo de particionamiento sobre una instancia específica.

Dado que los algoritmos utilizados son no deterministas, se emplean **semillas** para controlar los procesos aleatorios. En términos simples, una semilla fija el estado inicial del algoritmo, determinando la secuencia específica de decisiones que se toman durante su ejecución. De este modo, cada semilla define una ejecución completa del algoritmo y, por lo tanto, una solución particular del problema.

En este contexto, utilizar múltiples semillas equivale a ejecutar el algoritmo varias veces sobre la misma instancia, obteniendo potencialmente distintas soluciones factibles. Por ejemplo, considerar s semillas implica generar s soluciones distintas, por lo que utilizar una mayor cantidad de semillas permite explorar un conjunto mucho más amplio de particiones posibles.

Esta estrategia permite no solo identificar soluciones de mejor calidad, sino también analizar la variabilidad inherente del método. En particular, cada solución puede asociarse directamente a la semilla que la generó, lo que permite su trazabilidad y reproducción exacta. Así, si una solución destacada se obtiene con una semilla específica, esta puede ser replicada posteriormente ejecutando nuevamente el algoritmo bajo la misma configuración.

En este trabajo se consideran dos configuraciones experimentales: una con 5 semillas, utilizada para una exploración inicial del espacio de soluciones, y otra con 100 semillas, que permite una búsqueda más exhaustiva de las soluciones factibles encontradas.

Los parámetros experimentales considerados son:

- Número de distritos: $n \in \{4, 6, 8, 10\}$.
- Desbalance permitido: $\alpha \in [3\%, 5\%, 10\%]$.
- Número de semillas (soluciones): 5 y 100 por instancia.

Todos los experimentos fueron ejecutados en un computador personal equipado con un procesador Intel Core i5-8300H @ 2.30 GHz, 32 GB de memoria RAM y almacenamiento SSD.

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para las distintas configuraciones experimentales, analizando las soluciones generadas y su cumplimiento respecto de los criterios definidos.

5.1. Sobre la Partición de la Red de Buses de Santiago y el cumplimiento de los de Criterios de Diseño

En esta sección se presentan y analizan las particiones obtenidas tras la aplicación de los algoritmos de particionamiento de grafos. El análisis se centra en evaluar el grado de cumplimiento de los criterios de diseño estipulados para el problema de distritaje, fundamentalmente la contigüidad y el balance de carga operativa. Para ello, se contrasta la capacidad de los algoritmos para generar soluciones factibles (Contiguas y Balanceadas) y, posteriormente, se evalúa la calidad geométrica (compacidad) y el costo computacional de las mejores distribuciones encontradas bajo una exploración inicial de 5 semillas (soluciones) y una búsqueda más exhaustiva de 100.

La Tabla 5.1 muestra cuántas de las ejecuciones por configuración lograron cumplir con la contigüidad ($C = 1$). Este constituye el primer filtro de viabilidad territorial, ya que una partición no conexa no resulta operacionalmente funcional para fines de fiscalización.

Tabla 5.1: Conteo de soluciones con contigüidad ($C = 1$) por configuración.

Topología	Criterio de Balance	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$	$n = 20$
Hexagonal	Subidas	60/60	55/60	41/60	23/60	18/60
Hexagonal	Bajadas	59/60	57/60	51/60	32/60	24/60
Red Directa	Subidas	40/60	29/60	25/60	15/60	15/60
Red Directa	Bajadas	42/60	27/60	18/60	16/60	15/60

La Tabla 5.2 refina el análisis anterior, considerando únicamente aquellas soluciones que cumplen simultáneamente contigüidad y balance predefinido, es decir, $C = 1$ y $\bar{\alpha} \leq \alpha$.

Tabla 5.2: Conteo de soluciones factibles ($C = 1$ y $\bar{\alpha} \leq \alpha$) por configuración.

Topología	Criterio de Balance	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$	$n = 20$
Hexagonal	Subidas	52/60	39/60	11/60	7/60	0/60
Hexagonal	Bajadas	55/60	36/60	33/60	14/60	0/60
Red Directa	Subidas	34/60	24/60	11/60	5/60	0/60
Red Directa	Bajadas	13/60	1/60	0/60	0/60	0/60

Los resultados de la Tabla 5.1 muestran que la contigüidad puede alcanzarse en una fracción importante de las ejecuciones, particularmente en la topología hexagonal. En este sentido, la conectividad territorial no parece ser, por sí sola, la principal dificultad del problema.

Ademas, en la Tabla 5.2 se aprecia que al exigir simultáneamente balance dentro del umbral objetivo, el número de soluciones admisibles disminuye de manera significativa.

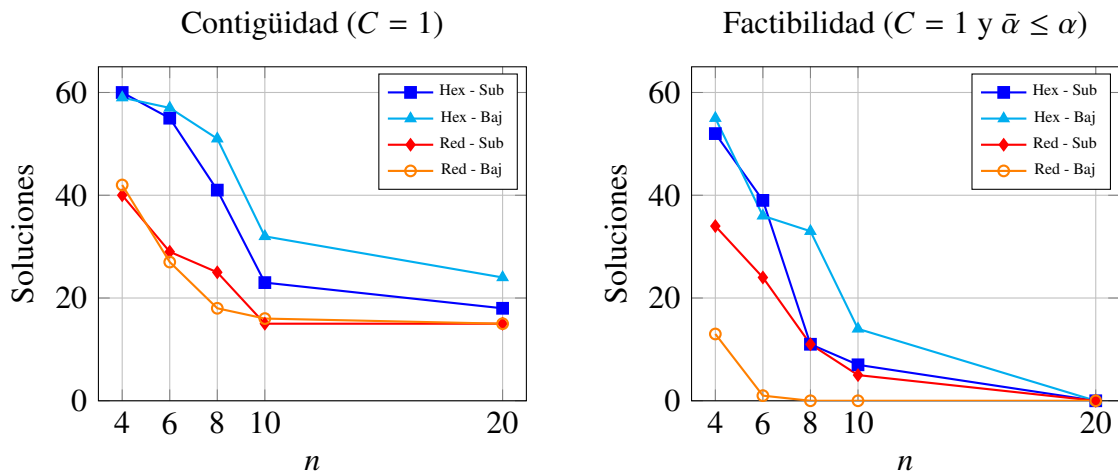


Figura 5.1: Comparación entre contigüidad y factibilidad estricta según número de zonas.

Esta caída es especialmente marcada en escenarios con mayor número de distritos y en la topología de paraderos, donde varias configuraciones no registran ninguna solución estrictamente factible. En particular, todos los casos con $n = 20$ quedaron sin soluciones admisibles bajo el criterio estricto de balance. Asimismo, en la red de paraderos con balance en descenso de pasajeros, no se encontraron soluciones estrictamente factibles para $n = 8$ y $n = 10$. Este fenómeno sugiere que la demanda de inicio de viaje presenta una distribución espacial más concentrada, lo que facilita la construcción de distritos balanceados. En

contraste, los puntos de destino tienden a estar más dispersos en la red, dificultando el cumplimiento simultáneo de las restricciones.

Estos resultados muestran que la dificultad del problema no radica únicamente en garantizar la contigüidad, sino principalmente en satisfacer simultáneamente el balance bajo restricciones espaciales.

Las Tablas 5.3 y 5.4 desagregan los resultados por tolerancia de balance α y número de distritos n . Esta desagregación permite distinguir si la pérdida de factibilidad proviene principalmente del aumento en n , de la exigencia del balance o de la interacción entre ambos factores.

Tabla 5.3: Conteo de soluciones con contigüidad completa ($C = 1$) por combinación de α y N .

α	Topología	Criterio de balance	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$	$n = 20$
3 %	Hexagonal	Ingreso de pasajeros	20/20	16/20	15/20	6/20	5/20
	Hexagonal	Descenso de pasajeros	19/20	20/20	18/20	11/20	8/20
	Red Directa	Ingreso de pasajeros	9/20	9/20	5/20	5/20	5/20
	Red Directa	Descenso de pasajeros	12/20	9/20	6/20	5/20	5/20
5 %	Hexagonal	Ingreso de pasajeros	20/20	20/20	10/20	8/20	6/20
	Hexagonal	Descenso de pasajeros	20/20	19/20	14/20	11/20	7/20
	Red Directa	Ingreso de pasajeros	13/20	8/20	9/20	5/20	5/20
	Red Directa	Descenso de pasajeros	14/20	9/20	5/20	5/20	5/20
10 %	Hexagonal	Ingreso de pasajeros	20/20	19/20	16/20	9/20	7/20
	Hexagonal	Descenso de pasajeros	20/20	18/20	19/20	10/20	9/20
	Red Directa	Ingreso de pasajeros	18/20	12/20	11/20	5/20	5/20
	Red Directa	Descenso de pasajeros	16/20	9/20	7/20	6/20	5/20

En general, se observa que la factibilidad disminuye a medida que aumenta el número de distritos, y que este efecto se intensifica bajo tolerancias de balance más estrictas. En particular, la interacción entre valores altos de n y valores bajos de α reduce considerablemente el espacio de soluciones viables.

Asimismo, se aprecia que la topología hexagonal mantiene consistentemente mayores niveles de factibilidad en comparación con la red directa, lo que sugiere que la regularidad espacial de la teselación favorece la generación de particiones más balanceadas.

Tabla 5.4: Conteo de soluciones estrictamente factibles ($C = 1$ y $\bar{\alpha} \leq \alpha$) por combinación de α y n (5 semillas).

α	Topología	Criterio de balance	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$	$n = 20$
3 %	Hexagonal	Ingreso de pasajeros	18/20	11/20	2/20	3/20	0/20
	Hexagonal	Descenso de pasajeros	18/20	15/20	12/20	5/20	0/20
	Red Directa	Ingreso de pasajeros	8/20	8/20	3/20	1/20	0/20
	Red Directa	Descenso de pasajeros	1/20	0/20	0/20	0/20	0/20
5 %	Hexagonal	Ingreso de pasajeros	16/20	17/20	3/20	1/20	0/20
	Hexagonal	Descenso de pasajeros	19/20	9/20	8/20	5/20	0/20
	Red Directa	Ingreso de pasajeros	13/20	6/20	4/20	1/20	0/20
	Red Directa	Descenso de pasajeros	4/20	0/20	0/20	0/20	0/20
10 %	Hexagonal	Ingreso de pasajeros	18/20	11/20	6/20	3/20	0/20
	Hexagonal	Descenso de pasajeros	18/20	12/20	13/20	4/20	0/20
	Red Directa	Ingreso de pasajeros	13/20	10/20	4/20	3/20	0/20
	Red Directa	Descenso de pasajeros	8/20	1/20	0/20	0/20	0/20

La Tabla 5.5 expande este análisis al experimento de 100 semillas, permitiendo evaluar el impacto de una exploración más exhaustiva del espacio de soluciones.

Tabla 5.5: Conteo de soluciones estrictamente factibles ($C = 1$ y $\bar{\alpha} \leq \alpha$) por combinación de α y n (100 semillas).

α	Topología	Criterio de balance	$n = 4$	$n = 6$	$n = 8$	$n = 10$	$n = 20$
3 %	Hexagonal	Ingreso de pasajeros	355/400	238/400	46/400	51/400	0/400
	Hexagonal	Descenso de pasajeros	348/400	277/400	213/400	59/400	0/400
	Red Directa	Ingreso de pasajeros	216/400	136/400	43/400	23/400	0/400
	Red Directa	Descenso de pasajeros	18/400	0/400	0/400	0/400	0/400
5 %	Hexagonal	Ingreso de pasajeros	325/400	301/400	63/400	57/400	0/400
	Hexagonal	Descenso de pasajeros	353/400	178/400	148/400	72/400	0/400
	Red Directa	Ingreso de pasajeros	239/400	148/400	69/400	35/400	0/400
	Red Directa	Descenso de pasajeros	73/400	2/400	0/400	0/400	0/400
10 %	Hexagonal	Ingreso de pasajeros	338/400	241/400	142/400	76/400	0/400
	Hexagonal	Descenso de pasajeros	343/400	268/400	269/400	79/400	0/400
	Red Directa	Ingreso de pasajeros	246/400	150/400	88/400	33/400	2/400
	Red Directa	Descenso de pasajeros	142/400	26/400	8/400	0/400	0/400

Se observa que el aumento en el número de semillas incrementa significativamente la probabilidad de encontrar soluciones factibles en configuraciones más exigentes. Sin embargo, este efecto es más relevante en escenarios donde la factibilidad es escasa, mientras

que en configuraciones simples la ganancia marginal es limitada.

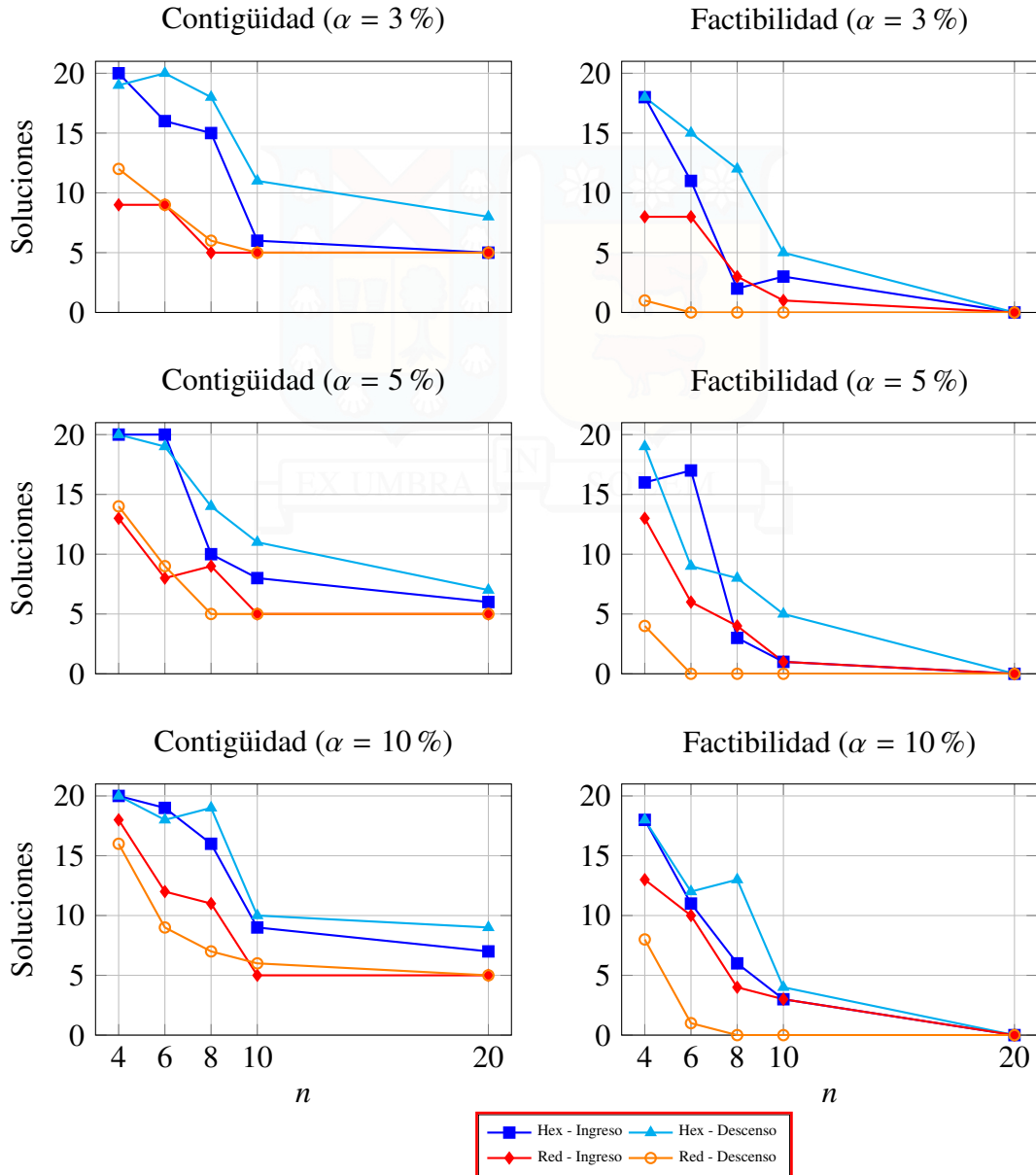


Figura 5.2: Comparativa desagregada por α : Contigüidad vs Factibilidad Estricta.

La Tabla [5.6](#) resume, para cada configuración, las mejores soluciones factibles encontradas y los tiempos acumulados necesarios para alcanzarlas, comparando los experimentos con 5 y 100 semillas.

Para facilitar la interpretación del indicador de compacidad, se reporta una aproximación en kilómetros, considerando $1^\circ \approx 100$ km. Esta conversión tiene carácter referencial y se utiliza únicamente con fines interpretativos.

Tabla 5.6: Comparación de mejores soluciones factibles y tiempos acumulados de búsqueda: 5 vs. 100 semillas.

n	α	Topología	Criterio de Balance	5 Semillas					100 Semillas				
				Solver	Seed	$\bar{\alpha}$	$\bar{d}[km]$	T_{acum} [s]	Solver	Seed	$\bar{\alpha}$	$\bar{d}[km]$	T_{acum} [s]
3	3%	Hexagonal	Descenso de pasajeros	metis-rb	1	0,57%	5,59	0,10	metis-kway	55	2,65%	5,54	21,18
		Hexagonal	Ingreso	metis-kway	5	2,19%	5,58	0,84	kahip	85	2,72%	5,41	9,16
		Red Directa	Descenso	metis-kway	3	2,59%	5,10	1,25	metis-kway	3	2,59%	5,10	7,76
		Red Directa	Ingreso	scotch	1	2,17%	4,92	0,59	scotch	68	2,82%	4,78	53,50
4	5%	Hexagonal	Descenso	metis-rb	1	2,24%	5,58	0,10	metis-kway	20	4,66%	5,50	3,09
		Hexagonal	Ingreso	metis-kway	4	4,77%	5,51	0,46	metis-kway	94	4,97%	5,40	31,10
		Red Directa	Descenso	scotch	5	4,44%	5,13	2,71	scotch	62	3,24%	5,04	40,71
		Red Directa	Ingreso	scotch	3	3,50%	5,07	1,58	kahip	27	4,14%	4,82	31,53
10	10%	Hexagonal	Descenso	metis-kway	2	9,02%	5,57	0,27	metis-kway	95	8,56%	5,47	51,39
		Hexagonal	Ingreso	metis-kway	4	7,02%	5,43	0,48	metis-kway	92	8,52%	5,38	41,61
		Red Directa	Descenso	scotch	1	4,11%	5,19	0,78	metis-rb	79	7,93%	4,95	99,45
		Red Directa	Ingreso	metis-rb	3	6,85%	4,94	2,17	metis-kway	9	5,68%	4,77	8,39
3	3%	Hexagonal	Descenso	kahip	4	2,34%	4,59	0,47	metis-kway	49	2,63%	4,49	18,36
		Hexagonal	Ingreso	scotch	1	2,56%	4,55	0,11	metis-kway	60	2,61%	4,35	9,09
		Red Directa	Ingreso	metis-kway	5	3,00%	4,19	2,90	kahip	57	2,95%	4,10	49,38
6	5%	Hexagonal	Descenso	kahip	1	3,73%	4,44	0,12	kahip	1	3,73%	4,44	91,70
		Hexagonal	Ingreso	scotch	1	3,97%	4,52	0,12	kahip	16	4,79%	4,39	2,59
		Red Directa	Descenso	—	—	—	—	—	scotch	20	4,53%	4,60	20,45
		Red Directa	Ingreso	metis-kway	5	4,44%	4,22	3,54	metis-kway	30	3,75%	4,06	37,35
10	10%	Hexagonal	Descenso	scotch	1	8,56%	4,58	0,16	metis-rb	81	5,34%	4,47	17,88
		Hexagonal	Ingreso	scotch	1	8,79%	4,57	0,14	metis-kway	28	9,66%	4,34	5,74
		Red Directa	Descenso	metis-rb	4	7,76%	4,15	3,68	metis-rb	4	7,76%	4,15	4,11
		Red Directa	Ingreso	metis-kway	5	8,97%	4,24	4,75	metis-kway	93	8,27%	4,11	150,81
3	3%	Hexagonal	Descenso	metis-rb	1	2,56%	3,92	0,12	metis-kway	48	2,91%	3,84	8,94
		Hexagonal	Ingreso	metis-rb	4	2,39%	3,90	0,47	metis-kway	20	2,43%	3,88	9,71
		Red Directa	Ingreso	metis-kway	3	3,00%	4,23	3,01	metis-kway	13	2,92%	3,64	18,72
5	5%	Hexagonal	Descenso	metis-kway	3	4,06%	3,93	0,41	metis-kway	86	4,91%	3,86	22,16
		Hexagonal	Ingreso	metis-kway	1	4,84%	3,89	0,13	kahip	79	3,89%	3,82	39,30
		Red Directa	Ingreso	metis-kway	4	5,00%	3,81	3,28	metis-kway	73	3,45%	3,65	106,67
10	10%	Hexagonal	Descenso	metis-kway	3	9,98%	3,89	0,56	kahip	59	9,29%	3,78	12,93
		Hexagonal	Ingreso	metis-rb	1	9,68%	3,81	0,17	metis-kway	97	9,65%	3,71	40,81
		Red Directa	Descenso	—	—	—	—	—	metis-kway	11	9,96%	3,74	20,04
		Red Directa	Ingreso	scotch	4	9,41%	3,83	5,63	scotch	1	7,56%	3,61	1,61
3	3%	Hexagonal	Descenso	metis-kway	5	2,88%	3,46	0,63	kahip	38	2,79%	3,37	12,13
		Hexagonal	Ingreso	metis-kway	5	2,82%	3,36	0,63	metis-kway	5	2,82%	3,36	0,78
		Red Directa	Ingreso	metis-kway	5	3,00%	3,56	4,81	scotch	58	2,18%	3,21	80,82
5	5%	Hexagonal	Descenso	kahip	5	4,69%	3,42	0,73	kahip	5	4,69%	3,42	0,81
		Hexagonal	Ingreso	metis-kway	3	4,65%	3,58	0,42	metis-kway	39	4,72%	3,31	12,84
		Red Directa	Ingreso	metis-kway	4	5,00%	3,54	4,12	metis-kway	81	4,77%	3,36	136,75
10	10%	Hexagonal	Descenso	metis-kway	5	9,82%	3,41	0,81	metis-kway	69	8,53%	3,38	21,80
		Hexagonal	Ingreso	metis-kway	2	9,95%	3,46	0,31	metis-kway	99	9,09%	3,31	52,35
		Red Directa	Ingreso	metis-kway	4	9,66%	3,20	5,65	scotch	76	9,31%	3,16	132,01
20	10%	Red Directa	Ingreso	—	—	—	—	metis-kway	89	9,99%	2,98	231,57	

En conjunto, los resultados muestran que la factibilidad disminuye a medida que

aumenta el número de distritos n , y que esta caída es especialmente marcada en la topología de paraderos. En particular, a partir de $n = 6$ comienzan a desaparecer soluciones factibles en varias configuraciones, y desde $n = 10$ la búsqueda se vuelve considerablemente más exigente incluso en el grafo teselado.

Un resultado interesante es que, aunque podría esperarse que la red de paraderos ofreciera mayor flexibilidad para balancear carga debido a su mayor granularidad, los resultados muestran que el grafo teselado logra con frecuencia soluciones igualmente o más balanceadas. Esto sugiere que una mayor desagregación no garantiza necesariamente una mejor factibilidad bajo restricciones estrictas, y que la regularidad espacial del modelo hexagonal juega un rol relevante.

La comparación entre 5 y 100 semillas muestra que el principal beneficio de aumentar el número de ejecuciones no está en mejorar sustancialmente la compacidad de las mejores soluciones, sino en aumentar la probabilidad de encontrar al menos una solución factible en configuraciones difíciles. En este sentido, el uso de múltiples semillas actúa principalmente como un mecanismo de exploración del espacio de búsqueda.

Desde una perspectiva práctica, esto implica que en configuraciones simples bastan pocas ejecuciones para encontrar buenas soluciones, mientras que en escenarios más exigentes resulta conveniente aumentar el número de corridas para mejorar la probabilidad de éxito.

Finalmente, se observa que METIS aparece con alta frecuencia entre las mejores soluciones encontradas, lo que sugiere un buen desempeño general en términos de calidad y eficiencia. No obstante, también se identifican soluciones competitivas generadas por KaHIP y SCOTCH, lo que indica que el rendimiento relativo depende de la instancia y refuerza la conveniencia de utilizar múltiples algoritmos en la exploración del problema.

5.2. Desempeño computacional

Además de la calidad de las particiones obtenidas, un aspecto central de esta propuesta es su capacidad para generar soluciones en tiempos reducidos. Esto resulta especialmente relevante en aplicaciones exploratorias o de apoyo a la decisión, donde interesa comparar múltiples configuraciones de particionamiento sin incurrir en los altos costos computacionales de enfoques exactos.

La Tabla 5.7 resume el tiempo de ejecución observado para cada solver, considerando el conjunto de instancias evaluadas. En términos generales, los métodos basados en METIS fueron los más rápidos, seguidos por SCOTCH, mientras que KaHIP presentó los mayores tiempos de cómputo.

Tabla 5.7: Resumen de tiempos de ejecución por solver (Promedio, Mínimo y Máximo).

Solver	Promedio (s)	Mínimo (s)	Máximo (s)
METIS_rb	0.006	0.000	0.020
METIS_kway	0.012	0.000	0.060
SCOTCH	0.033	0.010	0.170
KaHIP	0.535	0.080	2.090

Los resultados muestran que, aunque todos los solvers utilizados generan soluciones en tiempos bajos en términos absolutos, existen diferencias relevantes en desempeño relativo. En particular, METIS_rb y METIS_kway destacan por su rapidez, lo que los vuelve especialmente atractivos en contextos donde se requiere explorar muchas combinaciones de parámetros o generar soluciones candidatas en forma masiva.

La Tabla 5.8 muestra que el tiempo de ejecución tiende a incrementarse a medida que aumenta el número de distritos k , lo que era esperable dado que el espacio de búsqueda se vuelve más fragmentado. No obstante, este aumento se mantiene acotado en todos los casos analizados, especialmente para los solvers basados en METIS.

Tabla 5.8: Tiempo promedio de ejecución (s) según número de distritos k .

n	KaHIP	METIS_kway	METIS_rb	SCOTCH
4	0.3060	0.0055	0.0050	0.0323
6	0.3931	0.0052	0.0050	0.0307
8	0.5375	0.0090	0.0050	0.0313
10	0.5708	0.0153	0.0057	0.0342
20	0.8732	0.0258	0.0092	0.0363

También conviene considerar que el costo computacional relevante no es únicamente el tiempo de una corrida individual, sino el tiempo acumulado necesario para alcanzar una solución factible o la mejor solución seleccionada dentro de una configuración. Esta perspectiva resulta especialmente útil al comparar 5 versus 100 semillas, ya que permite distinguir entre configuraciones donde la factibilidad aparece tempranamente y otras donde se requiere una exploración mucho más extensa. En consecuencia, el análisis temporal no solo complementa la comparación de calidad de las soluciones, sino que también permite evaluar la eficiencia práctica del esfuerzo de búsqueda requerido en cada régimen del problema.

5.3. Soluciones seleccionadas con balance relajado

Si bien el análisis anterior se centra en soluciones estrictamente factibles, resulta relevante explorar qué tipo de estructuras territoriales emergen cuando se relaja parcialmente el criterio de balance.

Dado que el criterio estricto elimina por completo algunas configuraciones de alta fragmentación, se construyó una segunda selección de soluciones en la que la contigüidad se mantiene como requisito excluyente, pero el balance se relaja como criterio de descarte.

En este esquema, para cada combinación de topología, dinámica y número de distritos n , se seleccionó la mejor solución contigua disponible, privilegiando menor compacidad \bar{d} , y reportando de forma descriptiva el balance efectivo alcanzado.

De este modo, es posible observar configuraciones que, aun excediendo el umbral de desbalance original, presentan estructuras territoriales compactas y potencialmente útiles para el análisis exploratorio, particularmente en los casos con mayor número de distritos.

Tabla 5.9: Mejores soluciones contiguas seleccionadas bajo criterio de balance relajado.

Topología	Criterio de Balance	$\bar{d}[km]$	α	Solver	Seed	$\bar{\alpha}$	$\bar{d}[km]$
Hexagonal	Bajadas	4	5 %	metis-kway	2	9,02 %	5,57
Hexagonal	Bajadas	6	5 %	kahip	1	3,73 %	4,44
Hexagonal	Bajadas	8	10 %	kahip	5	50,96 %	3,77
Hexagonal	Bajadas	10	10 %	kahip	5	30,37 %	3,38
Hexagonal	Bajadas	20	10 %	kahip	5	33,07 %	2,15
Hexagonal	Subidas	4	10 %	kahip	1	20,19 %	5,36
Hexagonal	Subidas	6	10 %	kahip	1	19,99 %	4,51
Hexagonal	Subidas	8	10 %	kahip	2	42,66 %	3,67
Hexagonal	Subidas	10	10 %	kahip	2	38,32 %	3,30
Hexagonal	Subidas	20	10 %	kahip	3	60,55 %	2,04
Red Directa	Bajadas	4	10 %	metis-kway	1	14,40 %	4,86
Red Directa	Bajadas	6	10 %	metis-rb	4	7,76 %	4,15
Red Directa	Bajadas	8	10 %	scotch	1	19,38 %	3,68
Red Directa	Bajadas	10	5 %	metis-kway	5	24,04 %	3,41
Red Directa	Bajadas	20	10 %	metis-kway	5	60,34 %	2,77
Red Directa	Subidas	4	3 %	scotch	1	2,17 %	4,92
Red Directa	Subidas	6	5 %	kahip	2	8,12 %	4,11
Red Directa	Subidas	8	5 %	kahip	5	14,00 %	3,56
Red Directa	Subidas	10	10 %	metis-kway	4	9,66 %	3,20
Red Directa	Subidas	20	10 %	metis-kway	4	32,49 %	2,55

A partir de esta selección, se observa que, incluso en escenarios donde no existen soluciones estrictamente factibles, es posible identificar particiones con buena coherencia espacial y niveles de compactitud competitivos.

En particular, para valores altos de n , como $n = 20$, las soluciones relajadas permiten recuperar configuraciones que mantienen contigüidad y presentan estructuras territoriales interpretables, aunque a costa de un mayor desbalance.

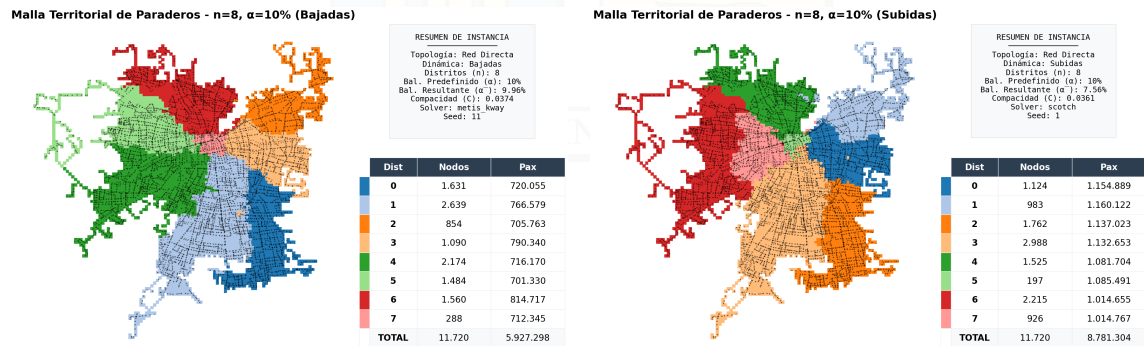
Este resultado refuerza la idea de que la factibilidad estricta puede ser excesivamente restrictiva en ciertos regímenes del problema, y que la exploración de soluciones relajadas constituye una herramienta útil para comprender mejor el comportamiento del modelo y sus limitaciones.

Asimismo, se aprecia que la topología hexagonal continúa mostrando particiones más compactas en comparación con la red directa, incluso bajo criterios relajados, lo que sugiere que la regularidad espacial de esta representación favorece la generación de distritos más consistentes.

5.4. Visualización de soluciones

Con el objetivo de complementar el análisis cuantitativo, en esta sección se presentan visualizaciones de soluciones seleccionadas, permitiendo observar la estructura espacial de los distritos generados bajo distintas configuraciones.

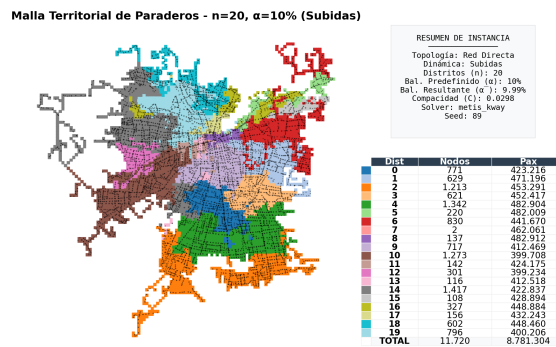
La Figura 5.3 muestra una comparación de soluciones obtenidas en la red directa de paraderos para $n = 8$ y $\alpha = 10\%$, bajo dinámicas de bajadas y subidas.



(a) Red directa, bajadas, $n = 8$, $\alpha = 10\%$.

(b) Red directa, subidas, $n = 8$, $\alpha = 10\%$.

Figura 5.3: Comparación de soluciones relajadas para red directa con $n = 8$ y $\alpha = 10\%$, bajo dinámicas de bajadas y subidas.



(a) Red directa, subidas $n = 20$, $\alpha = 10\%$.

A partir de estas visualizaciones, se observa que la contigüidad en el grafo de paraderos no resulta suficiente para garantizar una partición territorial coherente. En particular, aun cuando los distritos cumplen conectividad entre sus nodos, se producen resultados altamente irregulares, con extensiones alargadas y saltos territoriales que resultan inviables operacionalmente.

Este comportamiento evidencia que la contigüidad definida sobre la red no necesariamente se traduce en continuidad geográfica efectiva, especialmente en redes con geometrías complejas como la de paraderos.

En contraste, la incorporación de criterios de compactitud permite favorecer configuraciones más coherentes espacialmente. La compactitud no solo implica menores distancias internas dentro de cada distrito, sino que también contribuye a generar territorios más continuos, reduciendo fragmentaciones y mejorando su aplicabilidad en contextos reales de fiscalización.

En este sentido, los resultados refuerzan la necesidad de considerar simultáneamente contigüidad y compactitud como criterios fundamentales en la construcción de distritos, ya que cada uno por separado resulta insuficiente para garantizar soluciones territorialmente adecuadas.

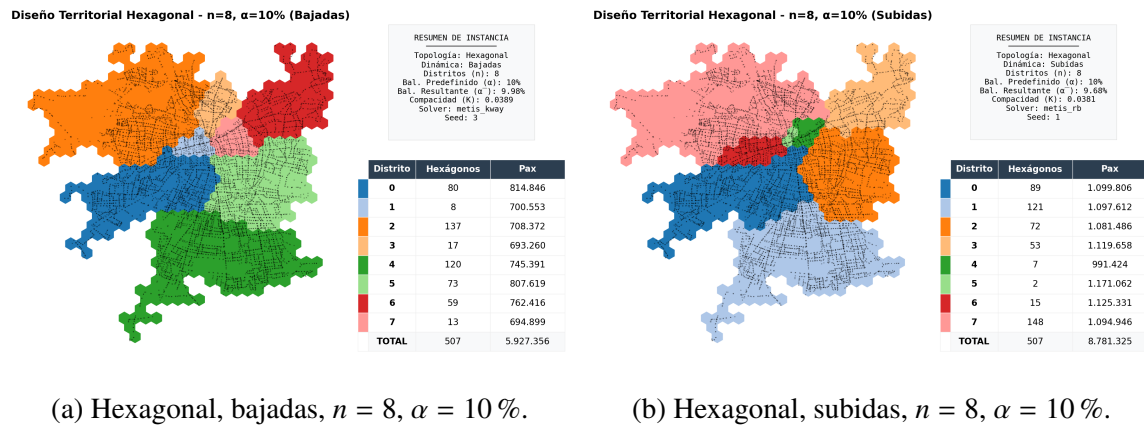


Figura 5.4: Comparación de soluciones para topología hexagonal con $n = 8$ y $\alpha = 10\%$, bajo dinámicas de bajadas y subidas.

En estos casos, se observa que la teselación hexagonal tiende a generar distritos más compactos y homogéneos, debido a la regularidad espacial de las unidades que conforman el grafo. Esta estructura favorece particiones más equilibradas en términos geométricos, evitando las irregularidades observadas en la red de paraderos.

6 | Conclusiones

El presente trabajo abordó el problema de diseño de distritos de inspección para la fiscalización en la red de buses de transporte de la ciudad de Santiago de Chile mediante una aproximación basada en particionamiento de grafos. La propuesta se estructuró en tres etapas: construcción de la red y sus unidades territoriales básicas, generación masiva de particiones mediante algoritmos multinivel y evaluación de dichas soluciones a partir de criterios de contigüidad, balance y compacidad.

Uno de los principales aportes del estudio fue la formulación de un esquema experimental sistemático que permitió comparar múltiples configuraciones de particionamiento bajo diferentes diseños de grafos, criterios de balance y tolerancias de balance. Esto permitió pasar desde una lógica de ejecución aislada a una exploración amplia del espacio de soluciones, haciendo posible evaluar no solo la calidad de una partición específica, sino también la factibilidad relativa de cada escenario.

Los resultados muestran que la contigüidad es un requisito de diseño que es fácil de alcanzar, especialmente bajo el grafo teselado. Sin embargo, al incorporar simultáneamente el balance como restricción, el conjunto de soluciones admisibles disminuye de manera importante. Esta caída se vuelve particularmente evidente a medida que aumenta el número de distritos, lo que confirma lo complejo de obtener simultáneamente contigüidad y balance.

Bajo el criterio estricto de selección, definido como la minimización de la compacidad sujeta a contigüidad y cumplimiento del umbral de balance, fue posible identificar soluciones factibles para un número relevante de instancias. Estas soluciones representan las mejores alternativas factibles desde el punto de vista operativo, ya que satisfacen simultáneamente los criterios considerados esenciales para la aplicación. No obstante, también se observó que varias instancias, especialmente aquellas con alta cantidad de distritos, no

admitieron ninguna solución bajo este esquema, destacando el caso de ($n=20$).

Con el fin de profundizar este hallazgo, se introdujo una segunda regla de selección en la que el balance dejó de operar como restricción excluyente, manteniéndose únicamente la contigüidad como condición dura. Bajo esta lógica relajada, la selección se orientó a minimizar el desbalance efectivo entre las soluciones contiguas disponibles. Este análisis permitió recuperar configuraciones previamente descartadas, evidenciando que la principal dificultad no radica exclusivamente en la conectividad territorial, sino en la exigencia simultánea de equilibrio de carga.

La comparación entre ambas reglas de selección permitió observar con claridad el trade-off central del problema. Cuando se exigen ambos criterios de manera simultánea, se obtienen soluciones operacionalmente más adecuadas, pero se pierde cobertura en escenarios más exigentes. En cambio, al relajar el balance, se amplía el universo de particiones observables, aunque a costa de aceptar soluciones con mayores niveles de desbalance. Este enfoque resulta especialmente útil en contextos exploratorios, donde interesa comprender la estructura espacial de distritos posibles antes de imponer restricciones operativas estrictas.

En general, el grafo teselado generó más soluciones factibles y particiones más fáciles de interpretar espacialmente. Sus particiones tienden a generar fronteras más regulares y una mayor estabilidad frente al aumento de distritos (n). Por su parte, la red directa basada en paraderos como nodos capturó de manera más fiel la estructura efectiva del sistema, pero presentó mayor sensibilidad frente a las restricciones de balance, especialmente en escenarios de mayor fragmentación.

En términos computacionales, los resultados muestran que los algoritmos de particionamiento multinivel permiten generar soluciones en tiempos muy reducidos, incluso cuando se exploran múltiples combinaciones de parámetros. Esto constituye una ventaja importante frente a enfoques exactos, cuya escalabilidad suele deteriorarse rápidamente al incorporar restricciones simultáneas de contigüidad y balance. Así, el trabajo confirma que este tipo de heurísticas no solo entrega soluciones de buena calidad relativa, sino que además permite construir un proceso de análisis iterativo y masivo compatible con necesidades reales de planificación.

Adicionalmente, se observa que al considerar como carga la subida y la bajada de

pasajeros de los buses, se generan configuraciones de particionamiento distintas incluso bajo un mismo valor de distritos (n), lo que confirma que la estructura territorial óptima depende no solo de la geometría de la red, sino también de aquello que se desea balancear.

Finalmente, los resultados evidencian que al utilizar métodos de particionamiento de grafos, la calidad de las particiones dependen fuertemente de la representación utilizada. Al utilizar el mínimo corte de arcos como criterio de compacidad, en lugar de la minimización de distancias al centroide de cada distrito, es necesario que el diseño del grafo represente de alguna forma la georeferenciación, como sucede en el caso del grafo teselado. De otro modo, se obtienen resultados que, aunque contiguos, balanceados y con mínimo corte de arcos, resultan ineficientes desde el punto de vista operativo. Esto se observa, por ejemplo, al modelar el grafo con paraderos de buses como nodos, donde surgen soluciones en las que para desplazarse entre nodos de un mismo distrito es necesario atravesar otro distrito, situación que se busca evitar.

En consecuencia, el diseño del grafo adquiere un rol central en el problema de particionamiento. No basta con disponer de un programa eficiente: también es necesario que la estructura entregada al algoritmo represente adecuadamente la organización espacial del sistema. De lo contrario, pueden obtenerse particiones matemáticamente correctas pero operativamente no viables. En este sentido, los resultados refuerzan la idea de que la calidad de una partición no depende únicamente del método de optimización, sino también de cómo se modela el territorio sobre el cual dicho método opera.

Este trabajo muestra que el particionamiento de grafos multinivel, combinado con una representación adecuada del territorio, constituye una herramienta viable y escalable para la construcción de distritos de fiscalización en sistemas de transporte urbano. Si bien no siempre es posible satisfacer simultáneamente todos los criterios de diseño en escenarios exigentes, el enfoque propuesto permite explorar sistemáticamente el espacio de soluciones y obtener configuraciones operativamente útiles en tiempos de cómputo acotados.

Líneas futuras de trabajo

A partir de los resultados obtenidos, surgen varias extensiones posibles. En primer lugar, sería interesante profundizar el análisis de los escenarios con más de 10 distritos, donde no se lograron producir soluciones contiguas y que cumplieran, a la vez, con el balance predefinido ($\bar{\alpha} \leq \alpha$) dentro del conjunto de ejecuciones realizado. En este trabajo, cada configuración fue evaluada mediante un número acotado de corridas (semillas), por lo que permanece abierta la pregunta de si la ausencia de soluciones factibles responde a una imposibilidad estructural del problema o simplemente a una exploración insuficiente del espacio de búsqueda.

En este sentido, sería valioso estudiar qué ocurre al aumentar el número de ejecuciones por instancia: si comienzan a aparecer soluciones factibles, cuántas corridas adicionales son necesarias para encontrarlas, con qué frecuencia aparecen y qué nivel de confianza puede asociarse a su hallazgo. Del mismo modo, resulta relevante evaluar si dicho esfuerzo adicional se justifica desde el punto de vista computacional, es decir, si el costo en tiempo de procesamiento compensa la ganancia en factibilidad observada. Este tipo de análisis permitiría pasar desde una evaluación puntual de resultados a una caracterización probabilística de la factibilidad, particularmente útil en escenarios donde las soluciones admisibles son escasas.

En otras palabras, una extensión natural del estudio consiste en estimar no solo si una instancia admite soluciones factibles, sino también cuán difícil es encontrarlas en términos de número de corridas, tiempo computacional y probabilidad de éxito.

Finalmente, una extensión natural del trabajo consiste en integrar estas particiones dentro de un problema posterior de asignación o planificación de fiscalización, de manera que los distritos obtenidos no solo sean territorialmente coherentes, sino también directamente utilizables como insumo para decisiones operativas.

Bibliografía

- Alvarez-Miranda, E., Epstein, R., Pereira, J., Sinnl, M., and Urrutia, R. (2025). A multi-criteria districting approach with a lexicographic compactness metric: An application to the chilean postal service. *Computers & Operations Research*, 173:106845.
- Barabino, B., Carra, M., and Currie, G. (2024). Fare inspection in proof-of-payment transit networks: A review. *Journal of Public Transportation*, 26:100101.
- Barabino, B. and Salis, S. (2023). Segmenting fare-evaders by tandem clustering and logistic regression models. *Public Transport*, 15:61–96.
- Board, T. R., National Academies of Sciences, E., and Medicine (2022). *Measuring and Managing Fare Evasion*. The National Academies Press, Washington, DC.
- Bozkaya, B., Erkut, E., and Laporte, G. (2003). A tabu search heuristic and adaptive memory procedure for political districting. *European Journal of Operational Research*, 144:12–26.
- Brotcorne, L., Escalona, P., Fortz, B., and Labbé, M. (2021). Fare inspection patrols scheduling in transit systems using a stackelberg game approach. *Transportation Research Part B: Methodological*, 154:1–20.
- Bucarey, V., Ordóñez, F., and Bassaletti, E. (2015). Shape and balance in police districting. In Eiselt, H. A. and Marianov, V., editors, *Applications of Location Analysis*, pages 329–347. Springer International Publishing, Cham.
- Camacho-Collados, M., Liberatore, F., and Angulo, J. (2015). A multi-criteria police districting problem for the efficient and effective design of patrol sector. *European Journal of Operational Research*, 246(2):674–684.
- Cantillo, A., Raveau, S., and Muñoz, J. C. (2022). Fare evasion on public transport: Who, when, where and how? *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 156:285–295.
- Delle Fave, F. M., Brown, M., Zhang, C., Shieh, E., Jiang, A. X., Rosoff, H., Tambe, M., and Sullivan, J. P. (2014). Security games in the field: Deployments on a transit system. In *Engineering Multi-Agent Systems*, pages 103–126. Springer International Publishing.

Delva, H., Rojas, J. A., Vandenberghe, P.-J., Colpaert, P., and Verborgh, R. (2019a). Geospatial partitioning of open transit data. In *Advances in Conceptual Modeling: ER 2019 Workshops*, pages 1–13. Springer.

Delva, H., Rojas, J. A., Vandenberghe, P.-J., Colpaert, P., and Verborgh, R. (2019b). Geospatial partitioning of open transit data. In *Advances in Conceptual Modeling*, pages 1–13. Springer.

Drexl, A. and Haase, K. (1999). Fast approximation methods for sales force deployment. *Management Science*, 45(10):1307–1323.

DTPM (2023a). Plan antievasión: Red movilidad lanza nueva campaña para incentivar el pago. <https://www.dtpm.cl/index.php/noticias-2/noticias-dtpm/921-plan-antievasion-red-movilidad-alcanzara-el-mayor-numero-de-zonas-pagas-e> Noticia institucional, 18 de mayo de 2023.

DTPM (2023b). Transportes triplica controles antievasión y alcanza lo realizado en todo 2022. <https://www.dtpm.cl/index.php/noticias-2/noticias-dtpm/918-transportes-triplica-controles-antievasion-y-alcanza-lo-realizado-en-todo> Noticia institucional, 9 de mayo de 2023.

DTPM (2024a). Índice de evasión en buses del sistema de transporte público metropolitano: 1^{er} semestre 2024. Presentación institucional. Archivo: Presentacion Evasion 2024-1.pdf.

DTPM (2024b). Índice de evasión en buses del sistema de transporte público metropolitano: 2^{do} semestre 2024. Presentación institucional. Archivo: Indice Evasion 2024-2.pdf.

DTPM (2025a). Índice de evasión en buses del sistema de transporte público metropolitano. <https://www.dtpm.cl/index.php/documentos/indice-de-evasion>.

DTPM (2025b). Informe final: Estudio de resultado de denuncias por evasión cursadas por el programa nacional de fiscalización. Informe final, CIS Transporte Consultores. Preparado para DTP Metropolitano.

DTS (2024). Informe de evasión en el componente troncal de transmisión. <https://www.transmilenio.gov.co/publicaciones/153766/este-2023-la-linea-base-de-evasion-disminuyo-hasta-ubicarse-en-1532/>.

Egu, O. and Bonnel, P. (2020). Can we estimate accurately fare evasion without a survey? results from a data comparison approach in lyon using fare collection data, fare inspection data and counting data. *Public Transport*, 12:1–26.

Escalona, P., Brotcorne, L., Fortz, B., and Ramírez, M. (2024). Fare inspection patrolling under in-station selective inspection policy. *Annals of Operations Research*, 332:191–212.

- Escalona, P., Brotcorne, L., Fortz, B., and Wolf, N. (2025). Spot-fare inspection in urban bus transportation systems: strategy and unpredictability under a stackelberg game approach. *Public Transport*.
- Etemadnia, H., Abdelghany, K., and Hassan, A. (2014). A network partitioning methodology for distributed traffic management applications. *Transportmetrica A: Transport Science*, 10(6):518–532.
- Farughi, H., Tavana, M., Mostafayi, S., and Arteaga, F. J. S. (2020). A novel optimization model for designing compact, balanced, and contiguous healthcare districts. *Journal of the Operational Research Society*, 71(11):1740–1759.
- García-Ayala, G., González-Velarde, J. L., Ríos-Mercado, R. Z., and Fernández, E. (2016). A novel model for arc territory design: promoting eulerian districts. *International Transactions in Operational Research*, 23(3):433–458.
- Gentle, J. E. (2003). *Random Number Generation and Monte Carlo Methods*. Springer.
- Guarda, P., Galilea, P., Paget-Seekins, L., and Ortúzar, J. (2016). What is behind fare evasion in urban bus systems? an econometric approach. *Transportation Research Part A: Policy and Practice*, 84:55–71.
- Hettle, C., Zhu, S., Gupta, S., and Xie, Y. (2021). Balanced districting on grid graphs with provable compactness and contiguity. *arXiv preprint arXiv:2102.05028*.
- Kalcsics, J., Nickel, S., and Schröder, M. (2005). Towards a unified territorial design approach. *Top*, 13:1–56.
- Kalcsics, J. and Ríos-Mercado, R. Z. (2019). Districting problems. In Laporte, G., Nickel, S., and Saldanha da Gama, F., editors, *Location Science*, pages 705–743. Springer.
- Kallioras, N. A., Kepaptsoglou, K., and Lagaros, N. D. (2015). Transit stop inspection and maintenance scheduling: A gpu accelerated metaheuristics approach. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 55:246–260.
- Karypis, G. (2013). Metis: A software package for partitioning unstructured graphs, partitioning meshes, and computing fill-reducing orderings of sparse matrices (version 5.1.0). Technical report, Department of Computer Science & Engineering, University of Minnesota.
- Karypis, G. and Kumar, V. (1998). A fast and high quality multilevel scheme for partitioning irregular graphs. *SIAM Journal on Scientific Computing*, 20(1):359–392.
- Kassem, Z. and Escobedo, A. (2023). The edge-based contiguous p-median problem with connections to logistics districting. *Available at SSRN*.
- L’Ecuyer, P. (2012). Random number generation. In *Handbook of Computational Statistics*, pages 35–71. Springer.

- Liberatore, F. and Camacho-Collados, M. (2016). A comparison of local search methods for the multicriteria police districting problem on graph. *Mathematical Problems in Engineering*, 2016:3690474.
- Liberatore, F., Camacho-Collados, M., and Quijano-Sánchez, L. (2022). Equity in the police districting problem: Balancing territorial and racial fairness in patrolling operations. *Journal of Quantitative Criminology*, 38(1):1–25.
- Matsumoto, M. and Nishimura, T. (1998). Mersenne twister: A 623-dimensionally equidistributed uniform pseudo-random number generator. *ACM Transactions on Modeling and Computer Simulation*, 8(1):3–30.
- Mehrotra, A., Johnson, E. L., and Nemhauser, G. L. (1998). An optimization based heuristic for political districting. *Management Science*, 44(8):1100–1114.
- MTA (2025). Bus fare evasion. <https://metrics.mta.info/?bus/fareevasion>.
- Pellegrini, F. (2025). Scotch and libscotch 7.0 user's guide (version 7.0.10). Technical report, Université de Bordeaux & LaBRI, INRIA Bordeaux Sud-Ouest.
- Perrier, N., Agard, B., Baptiste, P., Frayret, J.-M., Langevin, A., Pellerin, R., Riopel, D., and Trépanier, M. (2013). A survey of models and algorithms for emergency response logistics in electric distribution systems. part i: Reliability planning with fault considerations. *Computers & Operations Research*, 40:1895–1906.
- Perrier, N., Langevin, A., and Campbell, J. F. (2006). A survey of models and algorithms for winter road maintenance. part i: system design for spreading and plowing. *Computers & Operations Research*, 33(1):209–238.
- Porath, K. and Galilea, P. (2020). Temporal analysis of fare evasion in transantiago: A socio-political view. *Research in Transportation Economics*, 83:100958.
- PTV (2024). Victorian official fare compliance series october 2024. <https://www.vic.gov.au/sites/default/files/2025-06/Victorian-Official-Fare-Compliance-Report-Oct-2024.pdf>.
- Ramos, R. and Silva, H. (2023). Fare evasion in public transport: How does it affect the optimal design and pricing? *Transportation Research Part B: Methodological*, 176:1–26.
- Reddy, A. V., Kuhls, J., and Lu, A. (2011). Measuring and controlling subway fare evasion: Improving safety and security at new york city transit authority. *Transportation Research Record*, 2216(1):85–99.
- Ricca, F., Scozzari, A., and Simeone, B. (2013). Political districting: from classical models to recent approaches. *Annals of Operations Research*, 204:271–299.
- Ricca, F. and Simeone, B. (2008). Local search algorithms for political districting. *European Journal of Operational Research*, 189(3):1409–1426.

- Ríos-Mercado, R. Z. and Escalante, H. J. (2016). Grasp with path relinking for commercial districting. *Expert Systems with Applications*, 44:102–113.
- Ríos-Mercado, R. Z. and Fernández, E. (2009). A reactive grasp for a commercial territory design problem with multiple balancing requirements. *Computers & Operations Research*, 36(3):755–776.
- Sanders, P. and Schulz, C. (2013). Kahip v0.6 - karlsruhe high quality partitioning user guide. Technical report, Karlsruhe Institute of Technology (KIT).
- Schöbel, A. and Urban, R. (2025). Fare structure design in public transport.
- Shirabe, T. (2009). Districting modeling with exact contiguity constraints. *Environment and Planning B: Planning and Design*, 36(6):1053–1066.
- Talbi, E.-G. (2009). *Metaheuristics: From Design to Implementation*. John Wiley & Sons.
- Tavares-Pereira, F., Figueira, J. R., Mousseau, V., and Roy, B. (2007). Multiple criteria districting problems: The public transportation network pricing system of the paris region. *Annals of Operations Research*, 154(1):69–92.
- Wang, D., Zhao, J., D’Ariano, A., and Peng, Q. (2021). Simultaneous node and link districting in transportation networks: Model, algorithms and railway application. *European Journal of Operational Research*, 292(1):73–94.
- Xie, S. and Ouyang, Y. (2016). Railroad caller districting with reliability, contiguity, balance, and compactness considerations. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 73:65–76.
- Zoltners, A. A. and Sinha, P. (2005). The 2004 isms practice prize winner—sales territory design: Thirty years of modeling and implementation. *Marketing Science*, 24(3):313–331.
- Çatalyürek, , Devine, K., Faraj, M., Gottesbüren, L., Heuer, T., Meyerhenke, H., Sanders, P., Schlag, S., Schulz, C., Seemaier, D., and Wagner, D. (2023). More recent advances in (hyper)graph partitioning. *ACM Comput. Surv.*, 55(12):38.