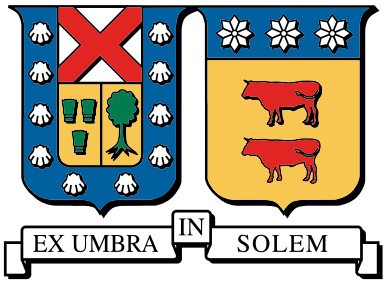
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA
VALPARAÍSO - CHILE



"DISEÑO DE SISTEMA DE ESTANQUES ACOPLADOS MODULAR"

RENÉ A. FREDES VERDUGO

MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL ELECTRÓNICO

PROFESOR GUÍA: **FRANCISCO J. VARGAS PARRA.**

PROFESOR CORREFERENTE: **DANIEL A. ERRAZ LEVAGGI.**

Agradecimientos

Primeramente agradezco a mis padres, cuya fe en mi, sin ninguna razón de origen, siempre me mantuvo firme en los momentos difíciles de la carrera. Agradezco a mis profesores guía: Francisco Vargas Parra, cuyo ingenio y sabios consejos (y patrocinio) sacaron este proyecto adelante; y Daniel Erraz Levaggi cuya guía y enseñanza ha sido uno de los tesoros más valiosos en mi paso por la universidad. Debo agradecer también a dos personas que poco y nada tuvieron que ver con el proyecto, pero cuya ayuda técnica y manual fue imprescindible: Eduardo Piñones Zuleta y Nicolás Hernández Peña.

Resumen

El presente proyecto de título es sobre la síntesis, diseño, estudio y control de un sistema de estanques acoplados con propiedades innovadoras con respecto a plantas similares, como por ejemplo el sistema de estanques acoplados para uso pedagógico del Laboratorio Laplace (B-358), utilizado en la asignatura "Laboratorio de Control Automático" (ELO-371), impartida por el Departamento de Electrónica. Las innovaciones de este proyecto explotan el concepto de "modularidad", que viene a dar varias flexibilidades a la interacción de los estanques que conforman el sistema. Así, con el sistema de estanques modular, es posible pasar de un sistema de control de altura de un único estanque a un sistema de estanques acoplados con dos o más estanques.

Otra característica de modularidad en el sistema es la opción de añadir y reemplazar los sensores del sistema, que, en general, son para medición de altura y están basados en medición de presión estática de una columna de agua, directamente proporcional a la altura de estas columnas. Estos cambios pueden tener distintos propósitos, por ejemplo, el estudio de nuevas estrategias de sensado o la evaluación de otros sensores. También se contempla el reemplazo de actuadores, en este caso, bombas de flujo de agua. Se pueden realizar varias combinaciones de estanques y conexionado para tener diferentes sistemas dinámicos, lo que implica un análisis físico-matemático diferente para cada configuración. El modelado apropiado de algunos de los sistemas que pueden armarse con este proyecto, es explicado algunas secciones más adelante con el propósito de ilustrar las capacidades de esta propuesta.

El proyecto tiene como objetivo principal implementar físicamente el sistema propuesto. Dado que la dinámica del sistema físico cambia de acuerdo a la configuración escogida por el usuario, se identifican algunas formas propuestas de acoplado de estanques. Además el sistema debe ser controlado mediante, algún dispositivo.

Glosario

- **Sistema SISO**: Sistemas (también llamados plantas) de una única entrada y una única salida, *Single Input, Single Output*. Son el tipo de plantas más básico y cuyo análisis en la literatura es extenso [1].
- **Sistema MIMO**: Sistemas de múltiples entradas y múltiples salidas, *Multiple Inputs, Multiple Outputs*.
- **Notación:** Se denota:
  - Derivada de primer orden: $\dot{f}(x) = \dfrac{df}{dx}(x)$,
  - Derivada de segundo orden: $\ddot{f}(x) = \dfrac{d^2f}{dx^2}(x)$.
  - Derivada de orden n: $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^nf}{dx^n}(x)$.
  - La transformada de Laplace: $\mathcal{L}[f(t)](s) = F(s)$, donde por supuesto:

$$\mathcal{L}[f(t)](s) = \int_0^\infty e^{-st} f(t)dt. \tag{0.1}$$

.

Preliminares

- **Realización Mínima:** En sistemas de control (especialmente en el caso MIMO) pueden darse varias maneras de representarlo, ya sea en su matriz de transferencia ($G(s), H(z)$) o en variables de espacio de estados ($\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D}$). Una realización es mínima si los pares $(\mathcal{A}, \mathcal{B})$ y $(\mathcal{C}, \mathcal{A})$ son controlable y observable respectivamente.
- **Ceros de Transmisión y Polos:** En sistemas SISO, siendo la función de transferencia de una planta $G(s)$ un cociente de polinomios de la forma:

$$G(s) = \frac{a_n s^n + a_{n-1}s^{n-1} + \cdots + a_0}{b_m s^m + b_{m-1}s^{m-1} + \cdots + b_0}, \tag{0.2}$$

Con $m \geq n$, se definen como ceros a todos los valores de s que anulen al polinomio numerador de $G(s)$, mientras que los polos son aquellos valores que anulan al denominador. Para el caso MIMO, los polos tienen una connotación similar ya que su implicancia es bastante directa en la estabilidad del sistema, no así con los ceros. Se definen como **ceros de transmisión**, para un sistema multivariado de realización mínima $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, como aquel valor de s que degrada el rango de la matriz de Rosenbrock, R_s, definida como:

$$R_s \triangleq \begin{bmatrix} \mathcal{A} - sI & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} \tag{0.3}$$

- **Control Descentralizado:** Se refiere a la aplicación de controladores de la forma $C(s) = \text{diag}\{C_1(s), C_2(s), \cdots C_n(s)\}$ (ó $C(z)$) sobre una planta MIMO, o también a la aplicación de controladores sobre una planta MIMO previamente aproximada a una forma diagonal, estableciendo una relación uno a uno entre entre entradas y salidas del sistema.

- **Balance de Masa**: Principio básico de la física que se desprende de la ley de conservación de la materia cuya clásica máxima "la materia no se crea ni se destruye" es validada. Así, el caudal (ya sea másico o volumétrico) que entra a un sistema menos el caudal que entra es la razón de cambio del contenido del sistema.

$$\frac{d}{dt} m(t) = q_{in}(t) - q_{out}(t). \tag{0.4}$$

- **Ley de Torriceli**: La ley o teorema de Torriceli propone un acercamiento matemático a velocidad, v, que posee un líquido al salir por un orificio de algún recipiente dado.

$$v = \sqrt{2g\left(h + \frac{v_0^2}{2g}\right)} \tag{0.5}$$

Donde g es la aceleración de gravedad, v_0 una velocidad inicial del líquido (para esta aplicación es nula) y h la altura de la columna de líquido. Esta ecuación propone también una expresión para el caudal que sale por el orificio:

$$Q = k\sqrt{2gh}. \tag{0.6}$$

Con k una constante de proporcionalidad que resume varios efectos a tener en cuenta, como dimensión del orificio y roce de las paredes de éste.

Introducción

Los sistemas de estanques acoplados tienen la gran característica de ser plantas muy didácticas, en el contexto de control. Mucho de lo aprendido en las aulas de control básico puede ser ilustrado en el comportamiento de estanques, como por ejemplo: la evolución de diferentes controladores, mostrando a alumnos el control ON-OFF, pasando a P, luego a PI y finalmente PID, a medida que se repasa como cada uno presenta una mejora sobre el anterior, e incluso desventajas; así también el efecto del fenómeno de enrollamiento; conceptos básicos como la misma concepción de entradas y salidas del sistema, etc. Esto sirve de motivación para desarrollar un proyecto de título con la proyección de que a futuro, con más memoristas, se reemplace la planta de estanques acoplados del laboratorio Laplace, por un sistema modular con aún más propiedades pedagógicas. Adicionalmente, está la posibilidad de aplicar conocimientos de control más avanzado y llevarlos al dominio operacional de un controlador lógico programable (PLC). En el presente se explota un resultado interesante de la conocida técnica LQR. Esta herramienta de control multivariable, adquiere la forma de control PI, para permitir acercar el control óptimo a un dispositivo de limitados recursos de cálculo y programación.

En el primer capítulo se describe el *hardware* utilizado, dándose datos de interés como los voltajes de operación de cada componente, formas de utilización, y sus caracterizaciones en caso de ser necesario. También se describen los elementos de los sistemas de estanques a utilizar, como conectores y recipientes. Los capítulos 2, 3 y 4 detallan diferentes configuraciones de estanques acoplados, sus modelos y experimentos de identificación, así como su posterior control y presentación de resultados respectivos, las señales de interés asociados a cada controlador utilizado, como salidas y actuaciones.

Índice general

1.. Capítulo 1

Estructuración del Sistema 8

1.1. Descripción del Sistema de Estanques Acoplados 8

1.1.1. Estanques (ELO) 9

1.1.2. Bomba de Agua 10

1.1.3. Sensor de Presión 12

1.2. Elementos del Sistema de Control 16

1.2.1. Módulo PLC 17

1.2.2. Fuente DC 20

1.2.3. Circuito de Potencia, nexo PLC-Actuador 21

1.2.4. Selector de Actuador Eléctrico 21

1.2.5. Tablero Final 22

2.. Capítulo 2

Sistema 1: Dos Estanques Acoplados a altura basal 24

2.1. Modelo Fenomenológico 25

2.1.1. Identificación de Parámetros 29

2.2. Simulaciones 31

2.2.1. Planta 31

2.2.2. Controladores 34

2.3. Resultados Experimentales 43

2.3.1. PI Descentralizado 44

2.3.2. PI con Acercamiento LQR 47

2.3.3. Comparación de Resultados 49

3.. Capítulo 3

Sistema 2: Dos Estanques con Acople tipo torre 51

3.1. Modelado Fenomenológico 51

3.1.1. Identificación de Parámetros 54

3.2. Simulaciones 55

3.2.1. Planta 55

3.2.2. Estrategia de Control 58

3.3. Resultados Experimentales 63

3.3.1. PI Descentralizado 64

3.3.2. PI con Acercamiento LQR 66

3.3.3. Comparación de Resultados 68

4.. Capítulo 4

Sistema 3: Tres Estanques Acoplados 70

4.1. Modelado Fenomenológico 70

4.1.1. Identificación de Parámetros 77

4.2. Simulaciones 79

4.2.1. Planta 79

4.2.2. Controladores 81

4.3. Resultados Experimentales 85

4.3.1. Control PI Descentralizado 85

4.3.2. Control PI con Acercamiento LQR 88

4.3.3. Comparación de Resultados 90

5.. Capítulo 5

Conclusiones 92

5.1. Trabajo Futuro 93

6.. Capítulo 6

Apéndice 95

6.1. Estanques (IDP) 95

6.1.1. Recipiente (IDP) 97

ÍNDICE DE FIGURAS

1.1. Estanque final para el sistema. 9
1.2. Conector hidráulico del sistema. 9
1.3. Sistema Final de Estanques Acoplados. 10
1.4. Bomba de Agua del sistema. 10
1.5. Experimento Caracterización Bomba de Agua 1. 11
1.6. Experimento Caracterización Bomba de Agua 2. 12
1.7. Experimento Caracterización Bomba de Agua 3. 12
1.8. Sensores de presión (Ambos modelos son iguales en forma). 13
1.9. Experimento Caracterización Sensor de Presión 1. 14
1.10. Experimento Caracterización Sensor de Presión 2. 14
1.11. Experimento Caracterización Sensor de Presión 3. 15
1.12. Esquema eléctrico simple para accionamiento de las entradas del sistema. 17
1.13. Módulo PLC Schneider Modelo TM221CE. 18
1.14. Fuente DC del sistema. 21
1.15. Controlador de velocidad de motores. 21
1.16. Selector de actuador eléctrico. 22
1.17. Módulo controlador. 23

2.1. Esquema del sistema 1. 25
2.2. Esquema del sistema en diagrama de bloques Simulink. 31
2.3. Simulación Sistema 1, Modelo No Lineal. 32
2.4. Sistema 1, Comparación Modelo Lineal vs. No Lineal. 34

2.5. Respuesta a Escalón de G_{11} en lazo cerrado. 35
2.6. Respuesta a escalón Sistema 1. 37
2.7. Simulación Sistema 1 con control descentralizado. 37
2.8. Señales de interés del lazo de control descentralizado. 38
2.9. Esquema de anti-enrollamiento. 38
2.10. Señales de interés del lazo de control descentralizado. 43
2.11. Experimento 1. Controlador PI Descentralizado. Salidas del sistema. . 45
2.12. Experimento 1. Controlador PI Descentralizado. Actuaciones. 45
2.13. Experimento 1. Controlador PI Descentralizado. Salidas del sistema. . 46
2.14. Experimento 2. Controlador PI Descentralizado. Actuaciones. 47
2.15. Experimento 1. Controlador PI Descentralizado. Salidas del sistema. . 47
2.16. Experimento 1. Controlador PI con Acercamiento LQR. Actuaciones. 48
2.17. Experimento 2. Controlador PI con Acercamiento LQR. Salidas del sistema. 48
2.18. Experimento 2. Controlador PI con Acercamiento LQR. Actuaciones. 49

3.1. Esquema del sistema 2. 51
3.2. Sistema 2 en diagrama de bloques Simulink. 56
3.3. Simulación Sistema 2. 57
3.4. Sistema 2, Comparación Lineal vs. No Lineal. 58
3.5. Respuestas a escalón de interés. 58
3.6. Señales de interés del lazo de control descentralizado. 59
3.7. Señales de interés del lazo de control descentralizado. 61
3.8. Evaluación controlador $C_{LQR_A}(s)$. 63
3.9. Experimento 1. Controlador PI Descentralizado. Salidas del sistema. . 64
3.10. Experimento 1. Controlador PI Descentralizado. Actuaciones. 65
3.11. Experimento 2. Controlador PI Descentralizado. Salidas del sistema. . 66
3.12. Experimento 2. Controlador PI Descentralizado. Actuaciones. 66

3.13. Experimento 1. Controlador PI con Acercamiento LQR. Salidas del sistema. 67
3.14. Experimento 1. Controlador PI con Acercamiento LQR. Actuaciones. 67
3.15. Experimento 2. Controlador PI con Acercamiento LQR. Salidas del sistema. 68
3.16. Experimento 2. Controlador PI con Acercamiento LQR. Actuaciones. 68

4.1. Esquema del Sistema 3. 70
4.2. Esquema del sistema en diagrama de bloques Simulink. 79
4.3. Simulación del Sistema 3, Modelo no Lineal. 80
4.4. Sistema 3, Comparación Modelo Lineal vs. No Lineal. 81
4.5. Sistema 3. Señales de interés del lazo de control descentralizado. . . . 82
4.6. Sistema 3. Señales de interés del lazo de control PI mediante LQR. . . 83
4.7. Sistema 3. Señales de interés del lazo de control descentralizado sin saturaciones. 84
4.8. Sistema 3. Señales de interés del lazo de control PI mediante LQR sin saturaciones. 84
4.11. Respuesta a escalón hipotética. 86

6.1. Estanque tipo del sistema. 96
6.2. Conector del sistema de estanques inicial. 96
6.3. Recipiente base del sistema. 97
6.4. Primer techo del recipiente. 98
6.5. Segundo techo del recipiente. 98

ÍNDICE DE TABLAS

1.1. Entradas Digitales Módulo PLC. 19
1.2. Salidas Digitales Módulo PLC. 19
1.3. Entradas Analógicas Módulo PLC. 20
1.4. Salidas Analógicas Módulo PLC. 20

2.1. Sistema 1. Funcionales de desempeño para cada controlador. 49

3.1. Sistema 2. Funcionales de desempeño para cada controlador. 69

4.1. Constantes del Sistema 3. 78
4.2. Sistema 3. Funcionales de desempeño para cada controlador. 91

1. CAPÍTULO 1
ESTRUCTURACIÓN DEL SISTEMA

En este primer capítulo se detalla el sistema de estanques acoplados modular así como los diferentes elementos que lo componen. También se estudian los dispositivos del sistema de control asociado a los estanques. Así, este primer acercamiento se divide en dos secciones, una para describir las características de la planta y una última para describir el controlador.

1.1. Descripción del Sistema de Estanques Acoplados

Se realiza un análisis de cada elemento asociado al sistema de estanques en el contexto de almacenamiento y flujos de agua, haciéndose referencia a: los estanques propiamente tal, recipiente de agua, mangueras, conectores, etc. En primera instancia se estudia la utilización de un sistema efectuado por el Área de Diseño de Productos del Departamento de Ingeniería en Diseño de la UTFSM, descrito en el apéndice, pero este sistema presenta filtraciones de líquido por sus paredes o conectores y otros desperfectos técnicos que imposibilitan su uso. Para solucionar este gran problema se trabaja en una solución independiente por parte de el equipo de trabajo de este proyecto de título, que resulta dar positivos resultados. Para diferenciar a aquellas componentes realizadas por el área de diseño de productos cada elemento llevará un "(IDP)" al inicio de su sección, mientras que la solución independiente del equipo de trabajo del departamento de electrónica de la misma facultad sentencia su título con "(ELO)". Cada uno de los elementos de la planta y controlador fue cotizado y adquirido con un previo estudio de cada característica y en recomendación de académicos

de la universidad, como los profesores Francisco Vargas, Daniel Erraz, Juan Carlos Agüero y quien escribe.

1.1.1. Estanques (ELO)

Dado que el primer diseño, véase el apéndice, no cumple con los requisitos mínimos para su funcionamiento se realiza una solución independiente que, en conjunto con los elementos de control, resulta ser una implementación exitosa. Esta implementación consiste en la utilización de elementos de menaje comunes adaptados para ser utilizados como un sistema de estanques acoplados válido.



Fig. 1.1: Estanque final para el sistema.



Fig. 1.2: Conector hidráulico del sistema.

En la figura (1.1) puede observarse el estanque diseñado para el sistema. Se adquieren seis envases multipropósito marca Biokips, luego se le realizan orificios de manera de tal de colocar los conectores de la figura (1.2) en tres. Éstos últimos se adquieren en la tienda Tricoma de Puerto Varas y están dimensionados para que entre un tubo de 7[mm] de diámetro, el cual calza de manera idónea, además, en las bombas del sistema. A los otros tres envases se les corta su sección superior para pegarlas a una superficie rígida, mientras que sus correspondientes tapas se pegan a la parte inferior de los recipientes ya adaptados. Así se logra dar la característica modular a los estanques, teniendo la posibilidad de adherirlos en manera estable a una superficie, ó colocarlos uno encima de otro a voluntad. El sistema entonces se observa en

la figura (1.3). Cada estanque tiene un diámetro basal de aproximadamente 6.2[cm] y un diámetro superior de 8.9[cm], mientras que la altura total de operación es de aproximadamente 23[cm].



Fig. 1.3: Sistema Final de Estanques Acoplados.



Fig. 1.4: Bomba de Agua del sistema.

1.1.2. Bomba de Agua

Las bombas de agua que se utilizan en el sistema de estanques acoplados son el modelo `0142YA-12-60` de la marca *Propumps*. Obedecen a una excitación eléctrica continua de 0 a 12[V] regulables, consumiendo una corriente de máximo 5[A] y por tanto una potencia de 60[W]. Se tienen tres de estas bombas funcionando de manera correcta. En la práctica, las bombas comienzan a funcionar a partir de aproximadamente 1[V] hasta 11[V], donde su comportamiento caudal vs. voltaje de entrada se modela como cuadrático y es caracterizado a continuación.

Caracterización Bombas de Agua

- **Bomba de Agua 1**

  A continuación se realiza un experimento para medir la característica Flujo de Agua vs. Voltaje de cada bomba de agua. Utilizando un recipiente simple graduado, de 1.4[l], se mide el tiempo que demora el flujo de agua en trasladar

medio litro de agua. Si se asume que a voltaje de entrada a la bomba constante, entonces el caudal también debe serlo y se tiene, por lo tanto, $Q_m(V) = \frac{500[\text{cm}^3]}{T_m}$. Donde Q_m es el caudal medido y T_m el tiempo de medición en segundos. La medición depende del voltaje de entrada V que se envía directamente las salidas analógicas del PLC. Así, se obtuvieron las siguientes muestras para la bomba de agua #1.

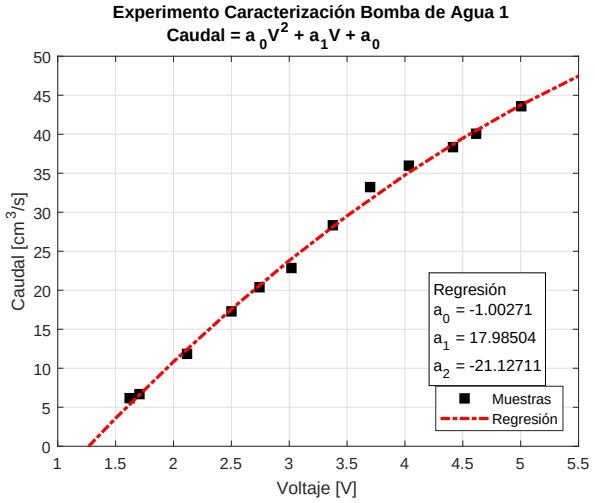


Fig. 1.5: Experimento Caracterización Bomba de Agua 1.

Con los datos obtenidos del experimento propuesto se realiza una regresión cuadrática, mediante "mínimos cuadrados", para hallar los parámetros que definen la curva. Como ya se observa en la figura (1.5) la relación flujo vs. caudal de la bomba 1 es:

$$Q_1(V) = -1.003V^2 + 17.99V - 21.13. \tag{1.1}$$

- **Bomba de Agua 2**

Se realiza una prueba idéntica para la bomba 2, observándose en la figura (1.6). La característica entonces es:

$$Q_2(V) = -0.4584V^2 + 17.37V - 9.521. \tag{1.2}$$

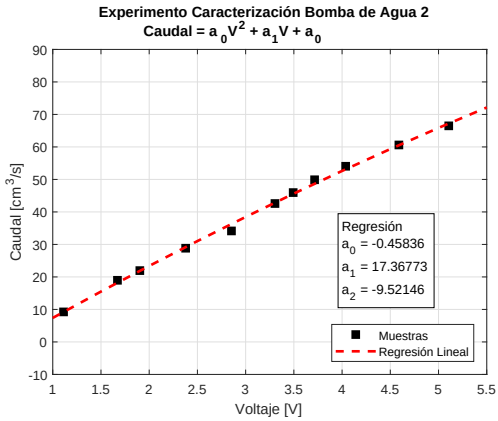


Fig. 1.6: Experimento Caracterización Bomba de Agua 2.

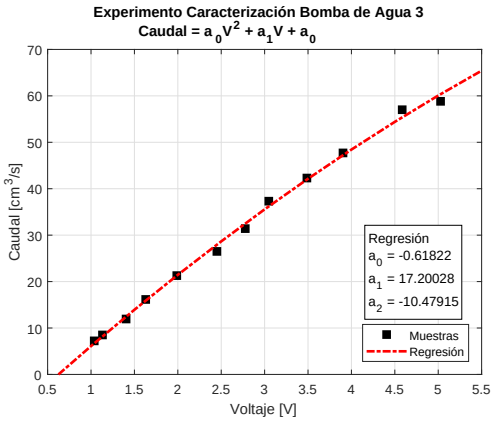


Fig. 1.7: Experimento Caracterización Bomba de Agua 3.

- **Bomba de Agua 3**

  Análogamente, para la bomba 3, se realiza el correspondiente experimento.

$$Q_3(V) = -0.6182V^2 + 17.20V - 10.48 \tag{1.3}$$

Debe aclararse que el comportamiento caudal vs. voltaje de las bombas de agua depende, en manera importante, de la disposición de las mangueras que guían el flujo entre bombas y estanques. La caracterización presentada es para la configuración de tres estanques que se ve en el capítulo 4.

1.1.3. Sensor de Presión

Para medir altura en los estanques se utilizan los sensores de presión marca Omega, modelo PX-164 y PX-163. Este sensor trabaja diferencialmente y mide con precisión del 1 % la presión estática de una columna de agua, alimentándose de 12[V] DC. Dado que se piensa en tres estanques, se obtuvieron dos PX-164 y un PX-163.



Fig. 1.8: Sensores de presión (Ambos modelos son iguales en forma).

El rango de operación de los PX-164 mide una presión que va desde 0 a 10 pulgadas de columna de agua. Mientras que, a su vez, el PX-163 mide la diferencia de presiones de dos columnas de agua desde -5 a 5 pulgadas de altura. La salida de voltaje de operación de éstos va desde los 2 a 8[V] continuos.

La lectura de este dispositivo se conecta a una de las entradas análogas del PLC para su posterior respuesta. Para información más precisa sobre el uso de direcciones de entrada y salidas digitales y analógicas véase el *IO Map* presentado en la tabla (1.3).

Caracterización Sensores de Presión

El experimento a realizar para caracterizar es directo, se deja un estanque a cierta altura de columna de agua y se mide el voltaje en respuesta, realizando entonces una recolección de pares voltaje-altura para su posterior regresión lineal mediante mínimos cuadrados. Recuérdese, si bien el sensor es de presión, ésta es directamente proporcional a la altura de la columna de agua asociada por la clásica fórmula de presión estática en fluidos: $p = \rho g h$ con p la presión, ρ densidad del líquido y h altura.

- **Sensor de Presión 1. PX-164.**

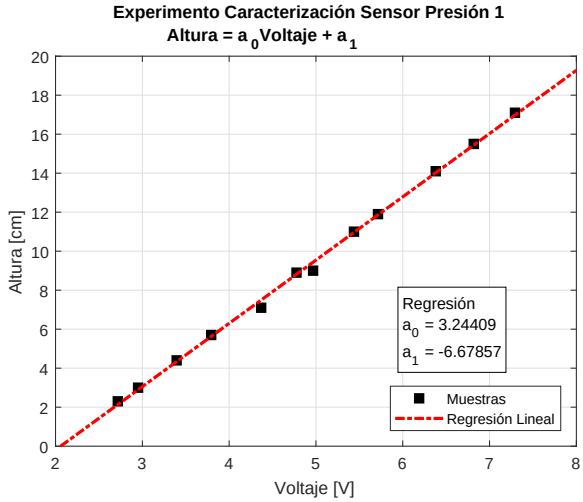


Fig. 1.9: Experimento Caracterización Sensor de Presión 1.

La regresión obtenida es entonces:

$$h(V) = 3.24V - 6.68, \tag{1.4}$$

- **Sensor de Presión 2. PX-164.**

  Experimento para el sensor 2.

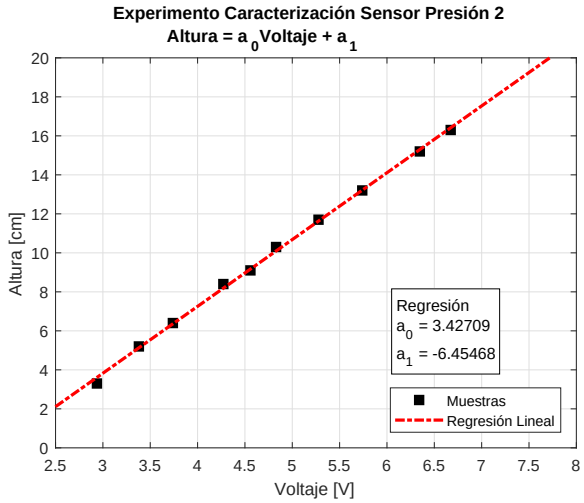


Fig. 1.10: Experimento Caracterización Sensor de Presión 2.

La regresión obtenida es:

$$h(V) = 3.42V - 6.45, \tag{1.5}$$

- **Sensor de Presión 3. PX-163.**

  Este sensor es capaz de medir la diferencia de presiones entre dos columnas de agua, $p_z(t)$:

  $$p_z(t) = p_1(t) - p_2(t), \tag{1.6}$$

  Donde, si se observa la figura (1.8) el sumando $h_1(t)$ va en el conector del lado izquierdo mientras que el sustraendo $h_2(t)$ en el derecho. Así, se logra la siguiente caracterización de la diferencia de alturas $z(t) \propto p_z(t)$ en función del voltaje de medición.

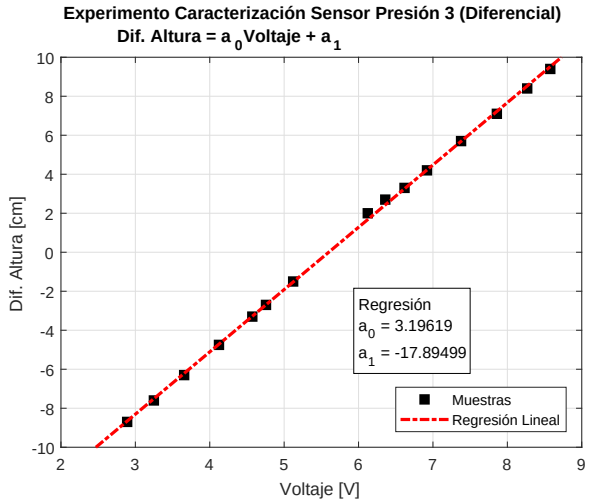


Fig. 1.11: Experimento Caracterización Sensor de Presión 3.

$$z(V) = 3.196V - 17.89, \tag{1.7}$$

La caracterización de sensores de presión es variante en el tiempo, no logrando identificar qué factores interfieren en la descalibración de éstos. Entonces es impor-

tante saber que ninguna de las caracterizaciones propuestas, ni en la etapa de actuación ni en la etapa de medición, son invariantes y deben ser realizadas nuevamente conforme pasa el tiempo.

1.2. Elementos del Sistema de Control

La presente sección detalla cada dispositivo de interés del controlador del sistema de estanques. El sistema de control se encarga de enviar señales eléctricas apropiadas a las entradas del sistema, para este propósito se han determinado dos maneras para manipular los actuadores del sistema de estanques: modo manual y modo automático. Los modos propuestos funcionan de la siguiente manera:

- **Modo Manual**: utiliza un potenciómetro para regular la diferencia de potencial de una fuente DC de 12[V] en las bombas de agua, con un divisor de tensión simple. El usuario puede entonces manipular de manera directa a cada entrada del sistema. Esta configuración, en general, no entrega la potencia apropiada para accionar las bombas, así que debe pasar por un circuito de amplificación de potencia tipo *buffer* (de amplificación de señal unitaria).

- **Modo Automático**: permite, al módulo PLC, controlar mediante algún controlador, como PID u *ON-OFF*, emitir señales eléctricas que permitan seguir una referencia. Al igual que el modo anterior, no se puede emitir una potencia adecuada a las bombas de agua, requiriéndose también un circuito de amplificación de potencia.

Un esquema simple de la interfaz propuesta se presenta en la figura (1.12). Entonces, una señal eléctrica continua es provista por una fuente de alimentación, que puede ser el PLC para el control mediante PID de la planta, ó mediante un regulador manual tipo potenciómetro para el accionamiento directo de cada actuador. Esto se puede seleccionar mediante un *switch*, también ilustrado. Por supuesto este pequeño esquema es meramente ilustrativo y debe interpretarse con un escalamiento apropiado

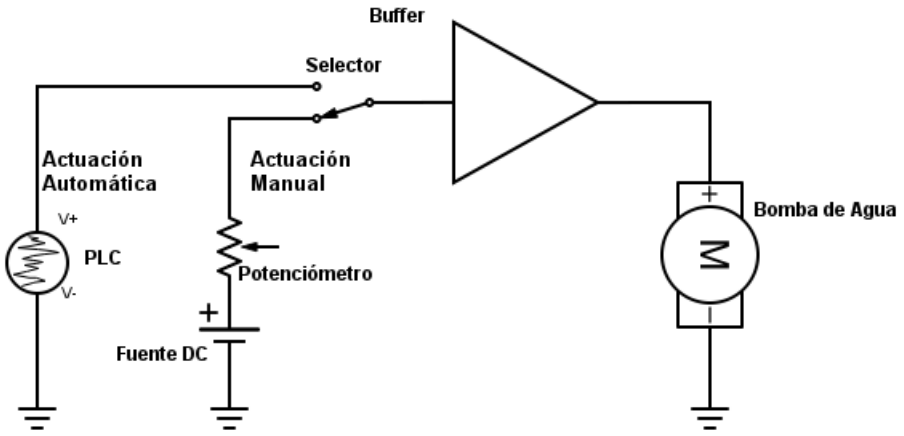


Fig. 1.12: Esquema eléctrico simple para accionamiento de las entradas del sistema.

a las entradas que tenga el sistema. Otro detalle que se pierde en este esquema es que, indirectamente, el PLC también se encarga del accionamiento manual. Esta idea se retoma más adelante pero se adelanta que la razón más importante es el ahorro de dispositivos de potencia y cableado eléctrico. El PLC es el cerebro de toda la operación de control, siendo también el selector del esquema, donde una señal eléctrica binaria se encarga de dar la orden apropiada en una entrada digital del módulo.

1.2.1. Módulo PLC

El cerebro y centro del presente controlador es el Módulo PLC Schneider Modelo TM221CE, que se encarga del control automático del sistema de estanques, e incluso del manual, aunque de una forma indirecta como se adelantaba en párrafos anteriores. Pero además, es capaz de realizar la selección de excitación eléctrica para los actuadores del sistema (bombas de agua), pudiendo decidir si el control será realizado por medio de control PID, ó mediante control manual, todo obedeciendo a código *ladder*. La programación del PLC se realiza en el *software* gratuito `SoMachine Basic`, perteneciente al proveedor del módulo.

El PLC se alimenta con 24[V] DC y posee un total de 9 entradas digitales ubicadas en la línea de tornilleras superior de la figura (1.13), 7 salidas digitales por relé ubi-

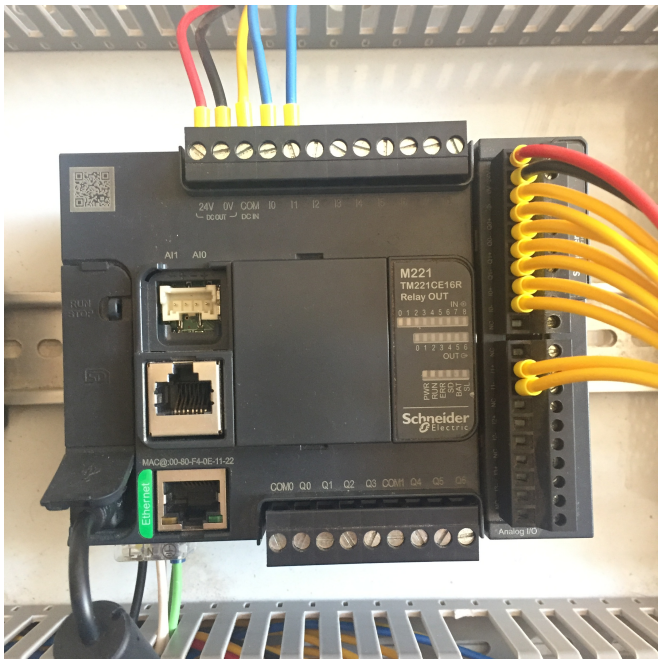


Fig. 1.13: Módulo PLC Schneider Modelo TM221CE.

cadas en la tornillera inferior, un puerto serial localizado en la zona media inferior, 2 entradas análogicas que están por encima del puerto serial y un puerto *ethernet* ubicado por debajo. Nótese que la alimentación del PLC se realiza en tornilleras localizadas en la misma línea que las entradas, en el extremo izquierdo, además, la conexión vía USB a computador se realiza mediante el puerto Micro-USB ubicado en la esquina inferior izquierda del módulo. Además se agregan dos módulo de ampliación, el primero con 4 entradas y 2 salidas analógicas ubicado en el extremo derecho del PLC y anexo, de color blanco, se encuentra el segundo, que es solamente una, necesaria, salida analógica. Se presenta en las tablas (1.1) a (1.4) el mapa de entradas y salidas del PLC (*IO Map*).

Tab. 1.1: Entradas Digitales Módulo PLC.

Dirección Impresa	Dirección PLC	Descripción
I0	%I0.0	On-Off Bomba 1, Sel. Control Bombas
I1	%I0.1	Sel. Señal de Control Bomba 1
I2	%I0.2	Sel. Control Bomba 2
I3	%I0.3	Sel. Control Bomba 3
I4	%I0.4	Disponible
I5	%I0.5	Disponible
I6	%I0.6	Disponible
I7	%I0.7	Disponible
I8	%I0.8	Disponible

Tab. 1.2: Salidas Digitales Módulo PLC.

Dirección Impresa	Dirección PLC	Descripción
Q0	%Q0.0	Disponible
Q1	%Q0.1	Disponible
Q2	%Q0.2	Disponible
Q3	%Q0.3	Disponible
Q4	%Q0.4	Disponible
Q5	%Q0.5	Disponible
Q6	%Q0.6	Disponible

Tab. 1.3: Entradas Analógicas Módulo PLC.

Dirección Impresa	Dirección PLC	Descripción
I0+, I0-	%IW1.0	Potenciómetro Bomba 1
I1+, I1-	%IW1.1	Sensor Altura Estanque 1
I2+, I2-	%IW1.2	Potenciómetro Bomba 2
I3+, I3-	%IW1.3	Sensor Altura Estanque 2
AI0+, AI0-	%IW0.0	Potenciómetro Bomba 3
AI1+, AI1-	%IW0.1	Sensor Altura Estanque 3

Tab. 1.4: Salidas Analógicas Módulo PLC.

Dirección Impresa	Dirección PLC	Descripción
Q0+, Q0-	%QW1.0	Actuación Bomba 1
Q1+, Q1-	%QW1.1	Actuación Bomba 2
Q0+, Q0-	%QW2.0	Actuación Bomba 3

1.2.2. Fuente DC

Para proveer de energía a todo el módulo controlador se utiliza una fuente de corriente continua de tipo *switching*, que es capaz de suministrar 12[V] ó 24[V], y hasta 120[W] de potencia. Esta cantidad es importante puesto que se tiene en cuenta cuanto consume cada componente del sistema, por ejemplo: cada bomba de agua (máximo 60[W]) del sistema, el PLC y en menor medida los sensores. Fueron adquiridas tres de estas fuentes para alimentar tres bombas de agua con holgura de potencia e independizar totalmente su actuación.

La colocación de fuentes se realiza netamente con cables adicionales no incluidos en la compra de las mismas, alambre de cobre de 1.5[mm^2] de sección transversal están correctamente dimensionados a la potencia del sistema. Esta fuente alimenta básicamente a todas las componentes del sistema, ya sea de manera directa (i.e. PLC, convertidores), o indirecta (i.e. Bombas de agua).



Fig. 1.14: Fuente DC del sistema.

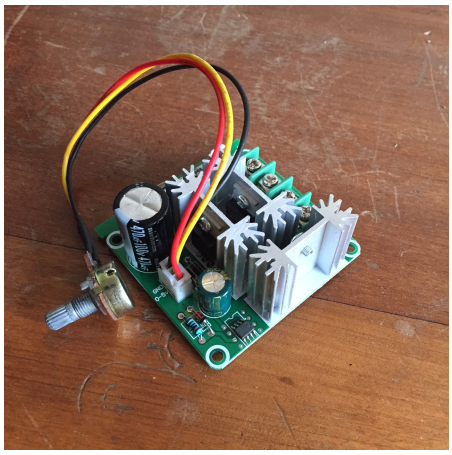


Fig. 1.15: Controlador de velocidad de motores.

1.2.3. Circuito de Potencia, nexo PLC-Actuador

El circuito de potencia que procesa la señal de control del PLC y eleva su potencia para el correcto accionamiento de las bombas de agua, puede observarse en la figura (1.15). Se trata de un circuito controlador de velocidad de motores, un circuito ampliamente comercializado en variadas especificaciones. Se puede notar, además, que el circuito incluye un potenciómetro, éste regula la potencia que se emite hacia las bombas de agua. La señal eléctrica de entrada al circuito, es una señal continua que habita en el intervalo $[0; 5]$[V], lo que está dentro de las capacidades de las salidas analógicas del PLC. Se instala cortando el potenciómetro del conector que lo une al circuito, para extender los cables hacia el PLC. El cable amarillo va hacia el borne positivo de alguna de las salidas analógicas (especificada en la tabla IO Map (1.4)), mientras que el de color negro al borne negativo. El cable rojo queda aislado ya que es una señal constante de 5[V], que sirve de fuente constante para el divisor de tensión provocado por el potenciómetro recién extraído.

1.2.4. Selector de Actuador Eléctrico

La excitación eléctrica que llega al actuador, las bombas de agua, puede ser seleccionada con el selector armado por académicos del departamento mostrado en la

figura (1.16).



Fig. 1.16: Selector de actuador eléctrico.

Mediante sus *switches* es posible encender o apagar todo suministro de energía hacia las bombas, observándose la inscripción "`ON`" y "`OFF`", éste es un puente directo entre la fuente DC y el *dimmer*; mientras que función de selector propiamente tal es llevada a cabo por el *switch* ubicado a la derecha en la figura (1.16), y accionan las entradas digitales tal y como se muestra en la tabla (1.1). Así se decide qué dispositivo se encarga de enviar la señal de control a las bombas, ya sea el PLC con un controlador PID u de otra especie estando en la inscripción homónima, ó al control manual mediante potenciómetro identificable como "`POT`", ó algún modo externo que provea de electricidad que aparece como "`EXT`".

1.2.5. Tablero Final

Finalmente, el tablero completo queda como se observa en la figura (1.17), donde por supuesto, la bomba de agua debe removerse, colocada únicamente con fines ilustrativos.



Fig. 1.17: Módulo controlador.

2. CAPÍTULO 2
SISTEMA 1: DOS ESTANQUES ACOPLADOS A ALTURA BASAL

En este capítulo, y en los dos próximos, se describen los modelados completos de diferentes configuraciones de sistemas de estanques para este proyecto de título, así como también el diseño de controladores y posterior evaluación de éstos. Primeramente, se propone un clásico acercamiento basado en balance de masa para determinar un sistema de ecuaciones en función de las entradas y salidas del sistema. Si se piensa en un sistema de estanques doble interconectado por una manguera, a altura relativa cercana a cero (muy similar a lo que se tiene en el laboratorio Laplace), con una primera entrada el caudal de entrada ($q_1(t)$), y otra de caudal de salida ($q_2(t)$), ambos medidos en [cm^3/s]. Los estanques se relacionan por medio de $q_{12}(t)$, el caudal de interconexión. Entonces, a modo de introducción a los modelos, el sistema se describiría de la siguiente manera:

$$\frac{d}{dt}V_1\left(h_1(t)\right) = q_1(t) - q_{12}(t), \tag{2.1}$$

$$\frac{d}{dt}V_2\left(h_2(t)\right) = q_{12}(t) - q_2(t), \tag{2.2}$$

$$q_{12}(t) = k \cdot \text{sgn}\left(h_1(t) - h_2(t)\right)\sqrt{|h_1(t) - h_2(t)|}. \tag{2.3}$$

Ecuaciones desprendidas de un balance de masa simple. Donde V_i es el volumen de agua del estanque $i-$ésimo, mientras que $h_i(t)$ es la altura del estanque $i-$ésimo, y además, suelen ser las salidas a controlar del sistema, midiéndose en [cm]. k es una constante relativa al tiempo que tardan en igualarse los estanques y está relacionada

con la aceleración de gravedad, el área del orificio de interconexión y roce. Es común utilizar la raíz cuadrada de la diferencia entre alturas, que se desprende de la ecuación de Torricelli para modelar estos sistemas, como en la expresión (2.3). El volumen de cada estanque se modela como cilíndrico por simplicidad, con un radio de aproximadamente 4.45[cm].

Esta introducción refleja el tipo de sistema que se estudian en el presente, el tipo de constantes que se estiman, y el tipo de ecuaciones diferenciales presentes. Más adelante se planea trabajar hasta con sistemas de tres estanques posicionados de diferentes maneras, pensándose también en sistemas multivariados de hasta tres entradas y hasta tres salidas.

2.1. Modelo Fenomenológico

Así, se retoma el sistema propuesto en la introducción con dos estanques a un mismo nivel interconectados por un tubo a altura basal como se muestra en la figura (2.1). Teniendo en cuenta las expresiones (2.1)-(2.3), se identifican dos entradas: un caudal que provee de agua a uno de los estanques y otro que expulsa agua del otro. Además las variables de interés, y salidas del sistema, son las alturas de ambos estanques.

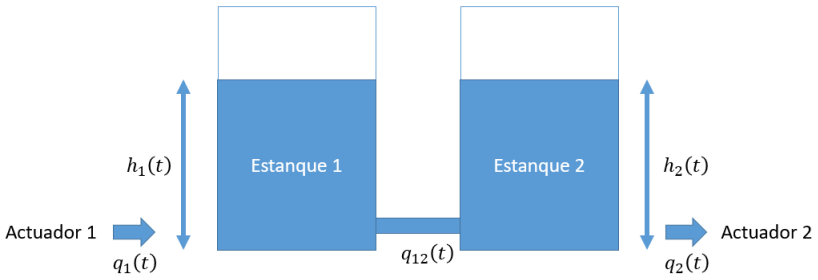


Fig. 2.1: Esquema del sistema 1.

$$\frac{d}{dt}V_1(h_1(t)) = A\frac{d}{dt}h_1(t). \tag{2.4}$$

Si se asume la razonable suposición de que $h_1(t) \geq h_2(t), \forall t$ entonces el sistema de ecuaciones dinámicas queda como:

$$A\frac{d}{dt}h_1(t) = q_1(t) - q_{12}(t), \tag{2.5}$$

$$A\frac{d}{dt}h_2(t) = q_{12}(t) - q_2(t), \tag{2.6}$$

$$q_{12}(t) = k\sqrt{h_1(t) - h_2(t)}. \tag{2.7}$$

Es posible linealizar el sistema en torno a un punto de equilibrio pensando que puede estabilizarse. En pro de obtener un conjunto de ecuaciones LTI y por ende pensar en un controlador lineal y aplicar técnicas de control se realiza el siguiente desarrollo.

En estado estacionario y ante referencias constantes no deberían existir cambios en las variables del sistema, por lo tanto las derivadas se anulan, ello implica:

$$\frac{d}{dt}h_1(t) = \frac{d}{dt}h_2(t) = 0, \tag{2.8}$$

$$q_{1q} = q_{12q} = q_{2q}. \tag{2.9}$$

Sea entonces Δ el operador de variable linealizada, que indica que la variable anexa a él se encuentra en alguna vecindad de puntos con propiedades lineales (i.e. $\Delta z(t) = z(t) - z_q$), entonces:

$$A\Delta\dot{h}_1(t) = \Delta q_1(t) - \Delta q_{12}(t), \tag{2.10}$$

$$A\Delta\dot{h}_2(t) = \Delta q_{12}(t) - \Delta q_2(t), \tag{2.11}$$

$$\Delta q_{12}(t) = \underbrace{\frac{k}{2\sqrt{h_{1q} - h_{2q}}}}_{c} \left[\Delta h_1(t) - \Delta h_2(t)\right]. \tag{2.12}$$

Para terminar el proceso de linealización, se resumen las ecuaciones de la siguiente manera:

$$A\Delta\dot{h}_1(t) = \Delta q_1(t) - c\Delta h_1(t) + c\Delta h_2(t), \tag{2.13}$$

$$A\Delta\dot{h}_2(t) = c\Delta h_1(t) - c\Delta h_2(t) - \Delta q_2(t). \tag{2.14}$$

Luego, utilizando la transformada de Laplace, $\mathcal{L}\{\cdot\}(s)$:

$$As\Delta H_1(s) = \Delta Q_1(s) - c\Delta H_1(s) + c\Delta H_2(s), \tag{2.15}$$

$$As\Delta H_2(s) = c\Delta H_1(s) - c\Delta H_2(s) - \Delta Q_2(s), \tag{2.16}$$

$$\begin{bmatrix}\Delta Q_1(s)\\ \Delta Q_2(s)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}As+c & -c\\ c & -As-c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta H_1(s)\\ \Delta H_2(s)\end{bmatrix}, \tag{2.17}$$

$$\begin{bmatrix}\Delta H_1(s)\\ \Delta H_2(s)\end{bmatrix} = \underbrace{\frac{1}{As(As+2c)}\begin{bmatrix}As+c & -c\\ c & -As-c\end{bmatrix}}_{G(s)}\begin{bmatrix}\Delta Q_1(s)\\ \Delta Q_2(s)\end{bmatrix}. \tag{2.18}$$

Adicionalmente, si se define el estado $x(t) = \begin{bmatrix}\Delta h_1(t) & \Delta h_2(t)\end{bmatrix}^T$, la entrada del sistema $u(t) = \begin{bmatrix}\Delta q_1(t) & \Delta q_2(t)\end{bmatrix}^T$, la salida del sistema como $y(t) = \begin{bmatrix}\Delta h_1(t) & \Delta h_2(t)\end{bmatrix}^T$ se puede representar en variables de espacio de estados, con las matrices $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, 0)$, al sistema de estanques.

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\frac{1}{A}\begin{bmatrix}-c & c\\ c & -c\end{bmatrix}}_{\mathcal{A}}x(t) + \underbrace{\frac{1}{A}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}}_{\mathcal{B}}u(t), \tag{2.19}$$

$$y(t) = \underbrace{I_2}_{\mathcal{C}}x(t). \tag{2.20}$$

Donde I_2 es la matriz identidad de 2×2. El sistema es marginalmente inestable, teniendo un polo en $s = 0$ y un polo estable en $s = -\frac{2c}{A}$. Observe que las constantes k y puntos de operación siempre son cantidades positivas, por ende la constante de

linealización c también lo es. Luego, para determinar los ceros del sistema es necesario observar qué sucede en la matriz de Rosenbrock del sistema definida en la expresión (0.3).

$$R_{s1} = \begin{bmatrix} -\frac{c}{A} - s & \frac{c}{A} & \frac{1}{A} & 0 \\ \frac{c}{A} & -\frac{c}{A} - s & 0 & -\frac{1}{A} \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{2.21}$$

La matriz acusa que el sistema no posee ceros de transmisión, lo cual no se observa directamente a partir de la matriz de transferencia propuesta en (2.18), ya que no es una realización mínima del sistema, al contrario de la representación en espacio de estados. La ausencia de ceros se debe a que la matriz de Rosenbrock de este primer sistema no perderá rango ante ningún valor de s. Por ejemplo, si se evalúa s en valores notables, como $s = 0$ y $s = -\frac{2c}{A}$, se notaría que la submatriz $\mathcal{A} - sI$ no es de rango completo dada la clara dependencia lineal de sus filas y columnas; pero las matrices $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ previenen la caída de rango en la matriz de Rosenbrock, no permitiendo la dependencia lineal entre filas y columnas completas en R_{s1}.

La representación en variables de estado de las expresiones (2.19 - 2.20) es mínima, y por lo tanto los estados de la planta son controlables y observables. Se define ahora el conjunto de polos, directamente observados en la matriz de transferencia de al expresión (2.18), como:

$$P = \begin{pmatrix} P_1 \\ P_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -\dfrac{2c}{A} \end{pmatrix}. \tag{2.22}$$

Las direcciones de entrada y salida del polo $i-$ésimo (u_{P_i}, y_{P_i}) se obtienen a partir de los vectores propios de la matriz $\mathcal{A}^H$, x_{P_i}:

$$\mathcal{A}^H x_{P_i} = P x_{P_i}, \tag{2.23}$$

$$\hat{u}_P = \mathcal{B}^H x_{P_i}, \tag{2.24}$$

$$u_P = \frac{\hat{u_P}}{||\hat{u}_P||}, \tag{2.25}$$

$$\mathcal{A} x_{P_o} = P x_{P_o}, \tag{2.26}$$

$$\hat{y}_P = \mathcal{C} x_{P_o}, \tag{2.27}$$

$$y_P = \frac{\hat{y_{P_i}}}{||\hat{y}_P||}. \tag{2.28}$$

De esta manera, las direcciones de salida y entrada de los polos son:

$$u_{P_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}, y_{P_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \tag{2.29}$$

$$u_{P_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}, y_{P_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}. \tag{2.30}$$

Para concluir, la dirección de entrada del primer polo, u_{P_1}, indica que el estado asociado es afectado con la misma influencia por cada entrada del sistema pero de manera opuesta, su dirección de salida en cambio muestra que la evolución del estado debido a éste afecta a cada salida en igual magnitud y "sentido". Asimismo el segundo polo es inverso, siendo la influencia sobre éste por parte de las entradas idéntica y afectando a la salida contrapuestamente.

2.1.1. Identificación de Parámetros

Del modelo recién descrito resta determinar cuanto vale aquel parámetro k. Para ello se propone el siguiente experimento de identificación escalable a cada caso.

- Colocar inicialmente el Estanque 1 con todos sus orificios tapados y llenarlo a cierta altura $h_1(0) = h_1^0$.

- Apagar todas las bombas de agua del sistema.
- Vaciar el Estanque 2.
- Cronometrar el tiempo que demora en igualarse las alturas de ambos estanques.

  Así, se tienen las siguientes condiciones en el sistema:

  - $h_1(\infty) = h_2(0) = 0$,
  - $h_1(t) + h_2(t) = h_1^0$.

Así, se tiene que en este caso el modelo es:

$$A\frac{dh_1(t)}{dt} = -q_{12}(t), \tag{2.31}$$
$$A\frac{dh_2(t)}{dt} = q_{12}(t), \tag{2.32}$$
$$q_{12}(t) = k\sqrt{h_1(t) - h_2(t)}. \tag{2.33}$$

Sea finalmente $z(t) = h_1(t) - h_2(t)$, y sea la expresión (2.34) la diferencia de las expresiones (2.31) y (2.32).

$$A\frac{dz(t)}{dt} = -2q_{12}(t), \tag{2.34}$$
$$\therefore -\frac{A}{2}\frac{dz(t)}{dt} = k\sqrt{z(t)}, \tag{2.35}$$
$$-\frac{A}{2}\frac{dz(t)}{\sqrt{z(t)}} = kdt, \tag{2.36}$$
$$-\frac{A}{2}\int_{t_0}^{t_f}\frac{dz(t)}{\sqrt{z(t)}} = \int_{t_0}^{t_f} kdt, \tag{2.37}$$
$$-A\left(\cancel{\sqrt{z(t_f)}} - \sqrt{z(t_0)}\right) = k(t_f - t_0), \tag{2.38}$$
$$\therefore k = \frac{A\sqrt{h_1(t_0)}}{t_f - t_0}. \tag{2.39}$$

Donde t_f es el tiempo en que se igualan las alturas de ambos estanques, t_0 es el tiempo inicial de la medición, en general cero. Dado que la diferencia de alturas $z(t_0)$

es con el estanque 2 vacío se tiene que $z(t_0) = h_1(t_0)$ como se muestra en la ecuación (2.39).

Se realiza el experimento para el estanque 1 y 2 donde, tomándose el radio del cilindro como 4.45[cm], la altura inicial de 16.7[cm] y el tiempo total de la medición como 39.19[s]. Entonces $k = 12.97$[cm$^{2.5}$/s].

2.2. Simulaciones

En esta sección se simula el sistema 1 por sí solo y luego con el controlador propuesto. Esto se realiza con programación gráfica Simulink junto con ayuda de su programa padre MATLAB.

2.2.1. Planta

Comportamiento del Sistema No Lineal

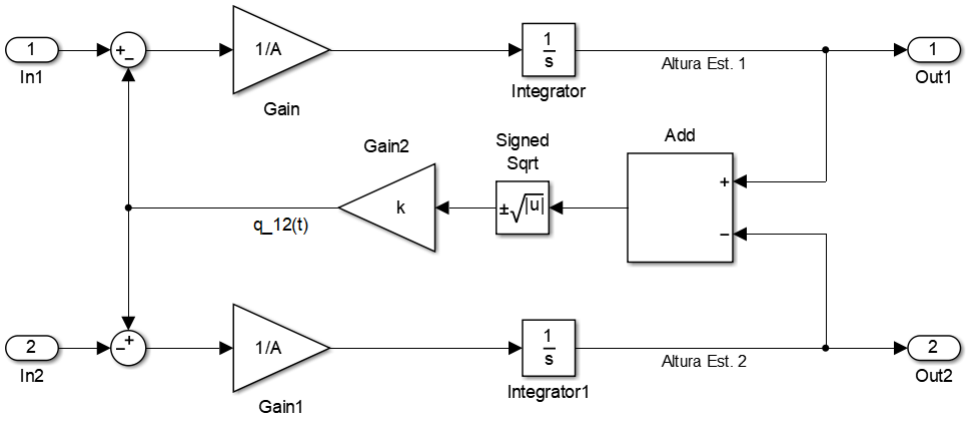


Fig. 2.2: Esquema del sistema en diagrama de bloques Simulink.

Si $k = 12.97$[cm$^{2.5}$/s] y $A = \pi r_1^2 = 62.21$[cm^2] se tiene el comportamiento dinámica destacado en la figura (2.3) en las alturas de cada estanque. Se tienen las siguientes consideraciones:

- La altura inicial del estanque 1, $h_1(0) = 10$[cm] y $h_2(0) = 5$[cm] para el estanque 2,

- Se tiene un comportamiento sin excitaciones a las entradas del sistema durante $t \in [0; 50[$[s],
- Para luego otorgar un caudal de entrada al estanque 1 de 5[cm^3/s] durante el intervalo $t \in [50; 100[$[s],
- Acto siguiente, se mantiene el sistema en reposo en $t \in [100; 150[$[s], donde, al final del intervalo, se otorga el mismo caudal de 5[cm^3/s] a la bomba de salida durante $t \in [150; 200[$[s],
- Finalmente los caudales se igualan a 10[cm^3/s] en $t = 200$[s] hasta el final de la simulación en $t = 250$[s].

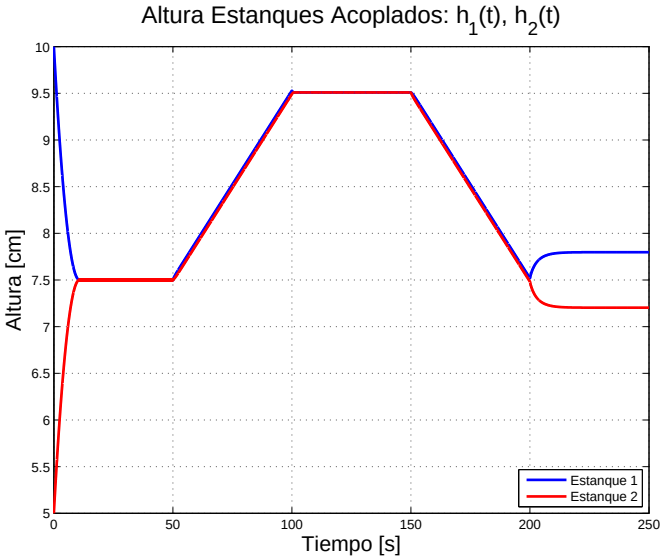


Fig. 2.3: Simulación Sistema 1, Modelo No Lineal.

Inicialmente se observa el comportamiento exponencial clásico en sistemas dinámicos en la igualación de alturas. Mientras que al activar solo uno de los caudales se observa la BIBO inestabilidad del sistema, aumentando incansablemente las salidas del sistema hasta que las excitaciones son apagadas. Contrapuestamente, si los caudales son iguales como al final de la simulación, el sistema es estable y también muestra un comportamiento dinámico exponencial. Lo recién descrito se ve venir en las expresiones de punto de equilibrio expuestas anteriormente en (2.10)-(2.12). Un punto

interesante de la variación de alturas en estos casos es que la diferencia entre éstas es constante, lo que puede observarse al desarrollar de otra manera la diferencia las ecuaciones (2.13) y (2.14), siendo nuevamente $z(t) = h_1(t) - h_2(t)$. Emulando el intervalo de simulación $t \in [50; 100]$[s] se tiene que:

$$A\Delta\dot{z}(t) = \Delta q_1(t) - 2c\Delta z(t), \tag{2.40}$$

$$\therefore \frac{\Delta Z(s)}{\Delta Q_1(s)} = \frac{1}{As + 2c}. \tag{2.41}$$

Se recuerda que $c = \frac{k}{2\sqrt{z_q}}$, normalmente mayor o igual que cero ya que se fuerza una altura 1 de equilibrio superior a la segunda y k es positivo, lo que se sabe empíricamente. Por lo tanto la variable interna de diferencia de alturas $z(t)$ es estable ante referencia constante de $q_1(t)$ y por ello se observa que converge a un valor en la simulación. Esto también es cierto para $q_2(t)$ al final de la simulación, y su demostración es idéntica.

Comparación Sistema Lineal vs. No Lineal

En equilibrio $q_{12q} = k\sqrt{h_{1q} - h_{2q}}$. Se simula una comparación entre el sistema dinámico no lineal y el lineal en el punto de equilibrio:

$$(h_{1q}, h_{2q}, q_{12q}) = (20\text{[cm]}, 10\text{[cm]}, 41.03\text{[cm}^3\text{/s]}) \tag{2.42}$$

Recordando que $q_{1q} = q_{2q} = q_{12q}$. Así, se simulan ambas alturas de ambos sistemas durante 500[s], estando directamente en el punto de equilibrio propuesto durante los primeros 200[s]. En este instante se aumentan los caudales un 33 % de q_{12q} para observar como evoluciona cada sistema.

Ambas respuestas son iguales en el equilibrio y bastante similares al cambiar los caudales a un valor un 33 % más alto que el de equilibrio. Esto garantiza que, en una vecindad razonable, la aproximación lineal propuesta es válida y refleja en buena parte

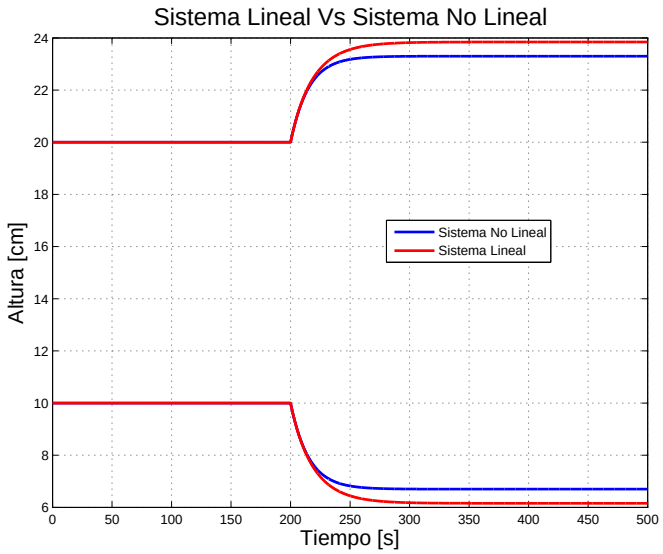


Fig. 2.4: Sistema 1, Comparación Modelo Lineal vs. No Lineal.

el comportamiento dinámico no lineal de la planta.

2.2.2. Controladores

En esta sección se realiza una comparación entre control MIMO PI centralizado y descentralizado en pro de observar sus diferencias, tanto de manera cualitativa, como en simulaciones.

Control PI Descentralizado

Dado el punto de equilibrio anterior, la constante de linealización $c = \frac{k}{2\sqrt{h_{1q}-h_{2q}}} = 2.051$. Se diseña el control de la planta en pro de regular la siguiente aproximación:

$$G(s) \approx \frac{1}{As(As+2c)} \begin{bmatrix} As+c & 0 \\ 0 & -As-c \end{bmatrix} = \text{diag}\{G_{11}(s), G_{22}(s)\}. \qquad (2.43)$$

Dada esta condición diagonal, es razonable pensar en un enfoque SISO para cada función de transferencia de la matriz. El PLC solo permite la programación de un controlador PID, y dado que el parámetro D suele ser conflictivo en sistemas ruidosos,

el control es sintonizado en la forma PI, anulando el error en estado estacionario, o dicho de otra manera, asegurando seguimiento fiel ante referencias constantes:

$$C(s) = P + \frac{I}{s} = K_p \left(1 + \frac{1}{T_i s}\right). \tag{2.44}$$

La dinámica del sistema es antisimétrica, se aclara: si bien la matriz de transferencia es simétrica, este comportamiento no se refleja en su condición de simetría matricial, si no que se habla del comportamiento de cada estanque en términos de sus entradas, denotándose $G_{11}(s) = -G_{22}(s)$. De esta manera se sintonizan controladores con los mismos parámetros y realimentación inversa para $G_{11}(s)$ y directa para $G_{22}(s)$. En lazo cerrado, el sistema $G_{11}(s)$ tiene la respuesta a escalón mostrada en (2.5).

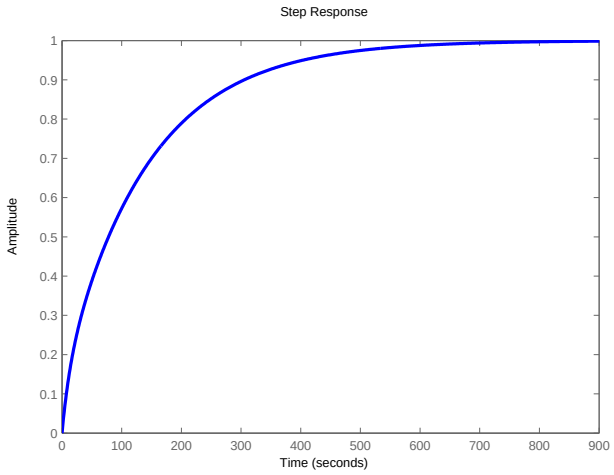


Fig. 2.5: Respuesta a Escalón de G_{11} en lazo cerrado.

Esta respuesta estable tiene una constante de tiempo de aproximadamente 100[s], una constante bastante lenta, siguiendo una referencia ($r(t)$) luego de 6 minutos. Nótese que la aproximación lineal del sistema posee acción integral y sigue perfectamente a la referencia, lo que no necesariamente es cierto en la planta real. Nótese también que esta respuesta acusa que un controlador P con $K_p = 1$ es suficiente para estabilizar e incluso controlar el sistema. Para G_{22} ocurre lo mismo pero debe tenerse en cuenta

que su accionamiento es de "realimentación directa", lo que significa: al aumentar el error entre $r(t) - y(t)$, la actuación del controlador debe disminuir en orden de corregirlo. En general los sistemas suelen realimentarse con "realimentación inversa" en la mayoría de casos como en el sistema $G_{11}(s)$, siendo más natural pensar en aumentar el esfuerzo de los actuadores en pro de disminuir errores. La respuesta a escalón de la figura (2.5) esclarece los dos simples y básicos objetivos del controlador a diseñar: acelerar el seguimiento de referencia y asegurar error en estado estacionario nulo.

Se define A_{CL} como el polinomio característico entre la referencia del lazo de control y la altura 1 del sistema, por tanto directamente relacionada con $G_{11}(s)$. Estrategias como Ziegler-Nichols para sintonización de controladores de esta especie son conocidos y bien utilizados, pero dada la estabilización de esta planta con solamente la realimentación del lazo, indica que no vienen a ser de utilidad en este caso particular. Entonces, parece razonable utilizar otro criterio. MATLAB posee el comando `pidtune` que arroja ganancias dados ciertos requerimientos del usuario. En este caso se busca acelerar el sistema de tal manera que este termine su comportamiento transiente en aproximadamente 20[s]. Así se obtienen los siguientes parámetros para el PI:

$$PI_{DC}(s) = 21.2 + \frac{5.21}{s}, \tag{2.45}$$

Parámetros que pueden parecer un tanto elevados, sobretodo dado que esta es una planta bastante conocida (si se piensa en la asignatura ELO-271), pero el controlador en cuestión sigue otras exigencias. La respuesta a escalón del lazo cerrado del sistema lineal junto al controlador se ilustra en la figura (2.6).

Luego, el controlador descentralizado queda, claramente, como:

$$C_{DC}(s) = \begin{bmatrix} 21.2 + \dfrac{5.21}{s} & 0 \\ 0 & -\left(21.2 + \dfrac{5.21}{s}\right) \end{bmatrix}. \tag{2.46}$$

Se simula el lazo de control presentado en la figura (2.7). La referencia de alturas

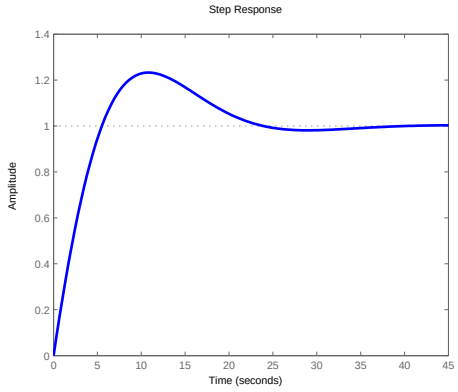


Fig. 2.6: Respuesta a escalón Sistema 1.

para el estanque 1 y 2 es 20 y 10[cm] respectivamente, y las condiciones iniciales son correspondientemente 10 y 5[cm]. Se observa en las figuras (2.8a)-(2.8b) la respuesta del sistema ante este controlador y la respectiva actuación en caudal, pertinentemente saturada. El controlador cumple sus objetivos de seguimiento de referencia y acción integral además de acelerar la respuesta a aproximadamente 20[s].

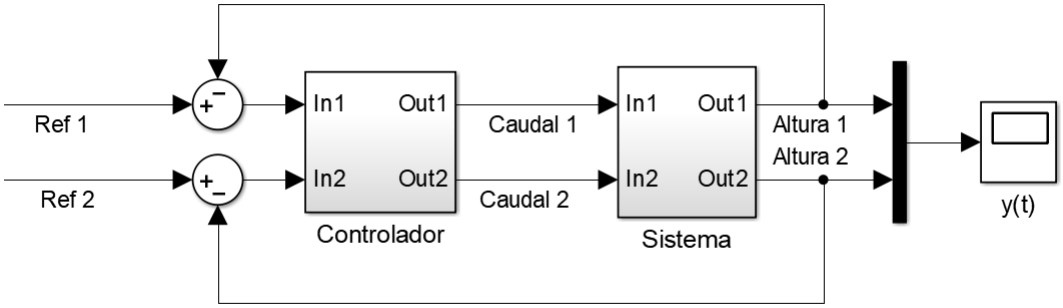
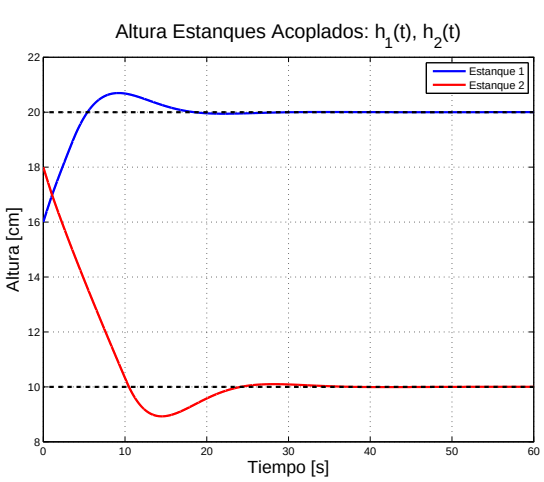
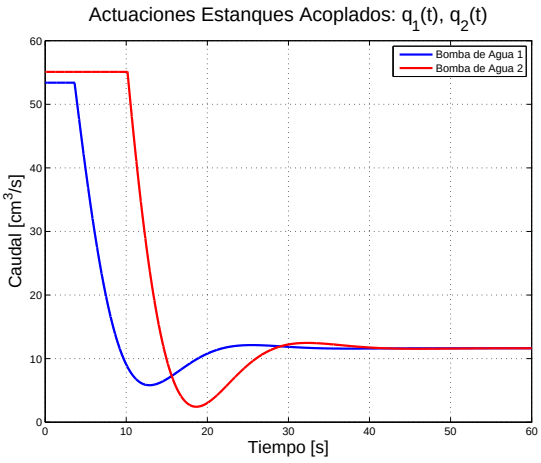


Fig. 2.7: Simulación Sistema 1 con control descentralizado.

Nota: Se debe destacar que este controlador y todos aquellos que se presentan a lo largo de esta memoria están debidamente "anti-enrollados". El "enrollado" es un fenómeno que ocurre en la gran mayoría de los sistemas de control implementados en la realidad, se debe a los límites de saturación que existen en los actuadores, pudiendo ser estos eléctricos o mecánicos. Para solucionar este problema existen varios esquemas donde se rearma el controlador, quedando, en general, en una forma equivalente



(a) Alturas siguiendo la referencia propuesta.



(b) Actuaciones del sistema. Caudales de entrada y salida.

Fig. 2.8: Señales de interés del lazo de control descentralizado.

a la ya diseñada pero con características que permiten al sistema tener noción de la saturación en actuadores. A continuación se presenta el esquema de anti-enrollamiento que utilizado en el presente, siendo $C(s)$ un controlador bipropio de fase mínima (i.e. un PI), $c_\infty = \lim_{s\to\infty} C(s)$, y "Sat" un bloque no lineal que representa la saturación del actuador.

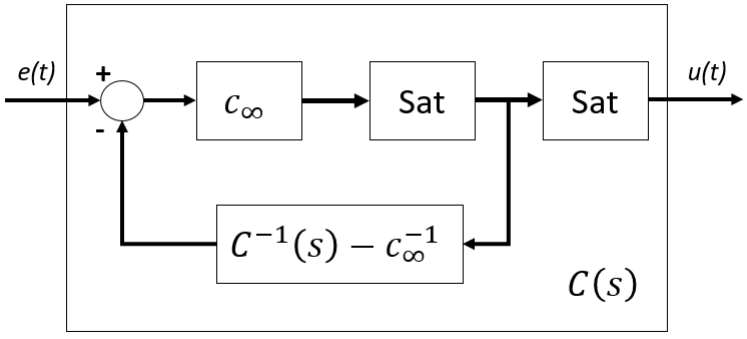


Fig. 2.9: Esquema de anti-enrollamiento.

Control PI con acercamiento LQR

En los controladores propuestos está la constante restricción de estar limitado al uso de controladores PID, y más aún a PI, por lo tanto cualquier estrategia de control para abordar el problema de controlar el sistema debe poder llevarse a una forma de controladores PI. En [3],[4] y [5] se observa la sintonización de PID mediante el regulador cuadrático-lineal, LQR. Este PID es óptimo en el sentido de que minimiza el funcional de costo $J(t)$ definido en la expresión (2.47), con R y Q las matrices de peso para la entrada de un sistema cualquiera, $u(t)$, y el estado de este sistema $x(t)$ respectivamente. Tanto $x(t)$ como $u(t)$ son variables que pertenecen a un sistema lineal $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$ cualquiera, con la restricción de que sea controlable. Se busca entonces, utilizar un acercamiento al regulador cuadrático lineal en pro de sintonizar de manera óptima una serie de PI's. Para ello, se introduce al tema de LQR con las siguientes definiciones.

$$J(t) \triangleq \int_0^\infty \left[x^T(t)Qx(t) + u^T(t)Ru(t)\right] dt, \tag{2.47}$$

$$u_{opt}(t) = \arg\min_{u(t)} J(t), \tag{2.48}$$

$$= -R^{-1}B^TWx(t) = -Fx(t), \tag{2.49}$$

Donde W es la solución de la ecuación algebraica continua de Ricatti, que se presenta a continuación:

$$A^TW + WA - WBR^{-1}B^TW + Q = 0, \tag{2.50}$$

Entonces, recapitulando, se tiene la definición de la técnica LQR y se desea sintonizar un PID óptimo en algún sentido. Inicialmente la primera pregunta a responder es: ¿es posible utilizar el enfoque LQR para esto? Sea un sistema MIMO lineal controlable $(\tilde{\mathcal{A}}, \tilde{\mathcal{B}}, \tilde{\mathcal{C}}, \tilde{\mathcal{D}})$ y su estado $\tilde{x}(t) = \left[\tilde{e}(t) \quad \int_0^t \tilde{e}(\tau)d\tau \quad \frac{d}{dt}\tilde{e}(t)\right]^T$, con $\tilde{e}(t)$ la señal de error entre referencia y salida del sistema. Al utilizar LQR, se obtendría que la entrada

óptima para el sistema, $\tilde{u}_{opt}(t)$, es de la forma:

$$\tilde{u}_{opt}(t) = -\tilde{F}\tilde{x}(t), \tag{2.51}$$

Donde la matriz de ganancia $\tilde{F}$ puede subdividirse de tal manera para que la expresión quede como:

$$\begin{aligned} \tilde{u}_{opt}(t) &= \begin{pmatrix} \tilde{f}_1 & \tilde{f}_2 & \tilde{f}_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{e}(t) \\ \int_0^t \tilde{e}(\tau)d\tau \\ \frac{d}{dt}\tilde{e}(t) \end{pmatrix}, & (2.52) \\ &= \tilde{f}_1\tilde{e}(t) + \tilde{f}_2\int_0^t \tilde{e}(\tau)d\tau + \tilde{f}_3\frac{d}{dt}\tilde{e}(t). & (2.53) \end{aligned}$$

Las submatrices de $\tilde{F}$ son ganancias matriciales constantes para el error del sistema, para su integral y su derivada. Así, $\tilde{u}_{opt}(t)$ tiene la forma clásica de un controlador PID continuo, con la característica de ser óptimo en sentido LQR. Entonces, se planea utilizar este procedimiento para obtener los parámetros de PI's para los diferentes sistemas de estanques acoplados abordados en este proyecto.

Retornando al sistema de estanques acoplados que se está analizando, se procede a redefinir el sistema en variables de estados.

$$x_{Ext}(t) = \begin{pmatrix} \bar{x}_1(t) \\ \bar{x}_2(t) \\ \bar{x}_3(t) \\ \bar{x}_4(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{0^+}^t e_1(\tau)d\tau \\ \int_{0^+}^t e_2(\tau)d\tau \\ e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix}. \tag{2.54}$$

Donde $e(t) = r(t) - h(t)$, es la señal de error del sistema, siendo $e_1(t)$ referida al estanque 1 y respectivamente $e_2(t)$ con el segundo. Claramente $\dot{\bar{x}}_1(t) = \bar{x}_3(t)$ y $\dot{\bar{x}}_2(t) = \bar{x}_4(t)$. Mientras que dada una referencia nula, el error es el inverso aditivo de las alturas. Así, la representación en espacio de estados de (2.19) se transforma a:

$$\dot{x}_{Ext}(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & \mathcal{A} \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}_{Ext}} x_{Ext}(t) + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ -\mathcal{B} \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}_{Ext}} u(t), \tag{2.55}$$

$$y(t) = \underbrace{\begin{bmatrix} 0 & -I \end{bmatrix}}_{\mathcal{C}_{Ext}} x_{Ext}(t). \tag{2.56}$$

Es importante tener en cuenta que dos de los estados, las integrales de error, son estados inestables y por tanto, esta representación podría contener estados no controlables. En la ilustración, se suponía que el sistema poseía todos sus estados controlables, pero en ningún momento se ha establecido controlabilidad para el sistema de estanques. Es posible evaluar esta condición en la matriz de controlabilidad del sistema, definida como $\begin{bmatrix} \mathcal{B} & \mathcal{AB} & \cdots & \mathcal{A}^{n-1}\mathcal{B} \end{bmatrix}$, con n el número de estados. El rango de esta matriz acusa cuantos de sus estados pueden ser controlados.

$$\text{rank}\left\{ \begin{bmatrix} \mathcal{B}_{Ext} & \mathcal{A}_{Ext}\mathcal{B}_{Ext} & \mathcal{A}_{Ext}^2\mathcal{B}_{Ext} & \mathcal{A}_{Ext}^3\mathcal{B}_{Ext} \end{bmatrix} \right\} = 4 \tag{2.57}$$

Nota: Se omite la matriz de controlabilidad explícita dado que solo importa el rango y es una matriz numérica engorrosa, de cuatro filas y seis columnas, se propone entonces su versión recién descrita en función de las matrices de estado del sistema.

Por lo tanto, la integral del error es controlable y es razonable proseguir con el enfoque LQR en pro del control de estos cuatro estados. Respecto a la observabilidad de los estados se puede decir que el controlador PI busca trabajar sólo con el error, no con su integral, aunque si es cierto que eventualmente la genera. Por lo tanto no es de interés saber si las integrales son observables (y, de hecho, no lo son). Luego, trivialmente, los errores de estos sistemas de estanques si son observables, ya que dependen únicamente de la referencia al lazo y de la salida, cuya medición mediante sensores de presión está ya establecida.

Otro punto importante a notar de esta representación extendida es que puede es-

calarse de la misma manera a todos los sistemas de estanques que se proponen en capítulos posteriores, ajustando las dimensiones de cada matriz, pero esencialmente la misma extensión.

Para empezar con la obtención de parámetros, sean las matrices de peso $Q = 2I$ y $R = I$ de tal manera que se priorice la minimización de energía en el estado, esperándose además que la señal de control sea relativamente alta, y por tanto acelerar al sistema. Así la señal de control óptima u_{opt} queda como:

$$u_{opt}(t) = \begin{pmatrix} 1.4142 & 0.0000 & 12.7222 & 0.6180 \\ 0.0000 & -1.4142 & -0.6180 & -12.7222 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{0^+}^{t} e_1(\tau)d\tau \\ \int_{0^+}^{t} e_2(\tau)d\tau \\ e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix} \tag{2.58}$$

$$u_{1_{opt}}(t) = \underbrace{1.41}_{K_i} \int_{0^+}^{t} e_1(\tau)d\tau + \underbrace{12.72}_{K_{p1}} e_1(t) + \underbrace{0.6180}_{K_{p2}} e_2(t), \tag{2.59}$$

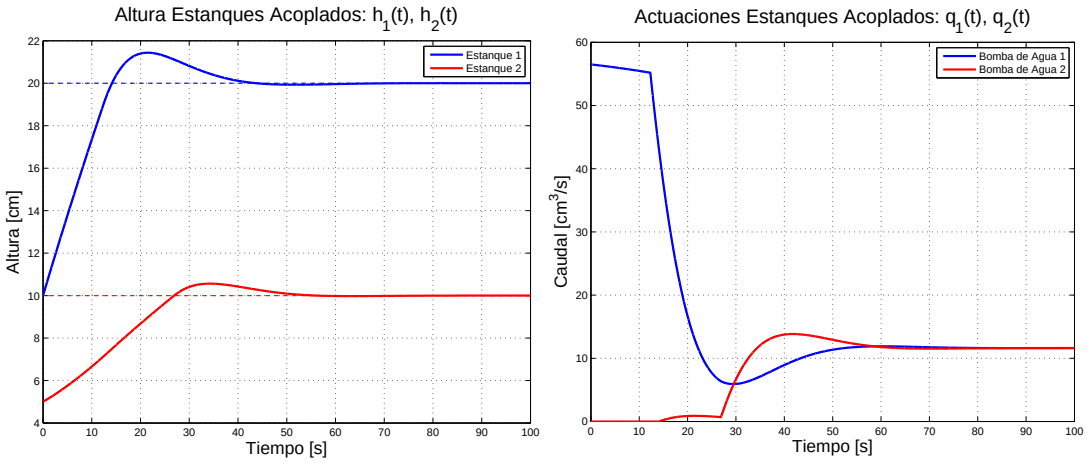
$$u_{2_{opt}}(t) = -K_i \int_{0^+}^{t} e_2(\tau)d\tau - K_{p2}e_1(t) - K_{p1}e_2(t), \tag{2.60}$$

Por lo tanto el control PI óptimo en sentido LQR queda como:

$$C_{LQR}(s) = \begin{bmatrix} K_{p1} + \dfrac{K_i}{s} & K_{p2} \\ -K_{p2} & -\left(K_{p1} + \dfrac{K_i}{s}\right) \end{bmatrix} \tag{2.61}$$

Con el enfoque LQR se obtiene el controlador $C_{LQR}(s)$ presentado anteriormente. Se evalúa el controlador en la misma situación anterior.

Se observa un mayor tiempo de asentamiento en la salida y un *overshoot* similar que en el caso anterior. Pero vale destacar que la síntesis del PI mediante LQR deja al usuario optimizar rápidamente el uso de energía del sistema, pudiendo mostrarse varias variantes dependiendo de las matrices de peso Q y R.



(a) Alturas siguiendo al referencia propuesta del sistema con sintonización PI mediante LQR.

(b) Actuaciones del sistema con sintonización PI mediante LQR. Caudales de entrada y salida.

Fig. 2.10: Señales de interés del lazo de control descentralizado.

2.3. Resultados Experimentales

Con la utilización de la tarjeta de adquisición NI 6221 de 37 pines es posible leer las entradas y salidas analógicas del PLC. Anteriormente se plantearon dos estrategias de síntesis de PI's, primero la configuración descentralizada y luego la sintonización de PI centralizado mediante la utilización de LQR, a continuación se comparan ambos controladores. Se realizan dos experimentos para cada controlador, esperándose un mejor comportamiento en la última implementación mencionada. Los experimentos son:

1. Ambos estanques se encuentran en un estado inicial $\begin{bmatrix} h_1(0) & h_2(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 10 & 10 \end{bmatrix}^T$ [cm], aproximadamente. El sistema debe, solamente, seguir a la referencia $r(t) = \begin{bmatrix} 15 & 5 \end{bmatrix}$ [cm]. Este experimento es una evaluación inicial del comportamiento de cada controlador, así como también un referente para una final comparación en funcionales de costo.

2. Ambos estanques se encuentran sin agua, o sea: $\begin{bmatrix} h_1(0) & h_2(0) \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. Inicialmente, el sistema debe seguir una referencia $r(t) = \begin{bmatrix} 12 & 8 \end{bmatrix}^T$ [cm], pero,

una vez alcanzado un comportamiento estacionario, se le aplicará una perturbación a cada estanque, consistiendo en la aplicación de un volumen aproximado de 200[cm^3] a cada estanque. Por supuesto, para realizar una evaluación congruente del comportamiento del controlador ante perturbaciones, cada una de éstas se aplica por separado, primero en el estanque 2 y una vez superada, al estanque 1. Finalmente se realiza un cambio a la referencia, siendo ahora $r(t) = \begin{bmatrix} 17 & 4 \end{bmatrix}^T$ [cm].

El experimento 2 es claramente más completo que el primero, pero poseen distintos objetivos. El primero, como se adelantaba, es un acercamiento inicial al desempeño de cada controlador. El segundo experimento es una prueba que determina si se ha sintonizado un buen controlador, dado que se pone a prueba su capacidad de seguir una referencia establecida, que en algún instante de tiempo cambia, y su capacidad de solventar perturbaciones.

2.3.1. PI Descentralizado

Experimento 1

El primer experimento resulta en un exitoso seguimiento de referencia. Se presenta en la figuras (2.11)-(2.12b) los resultados obtenidos. Dada la existencia de ruido, los datos de estos gráficos fueron filtrados a través de un filtro pasa-bajos de primer orden, para su correcta ilustración. Se observa que el sistema sigue rápidamente a la referencia en 15 segundos, tiempo que está dentro de lo contemplado en las simulaciones. Además, se observan actuaciones razonables, que trabajan en saturación eléctrica correctamente para superar rápidamente el comportamiento transiente. Finalmente, los caudales se igualan en estado estacionario, lo que también es de esperar.

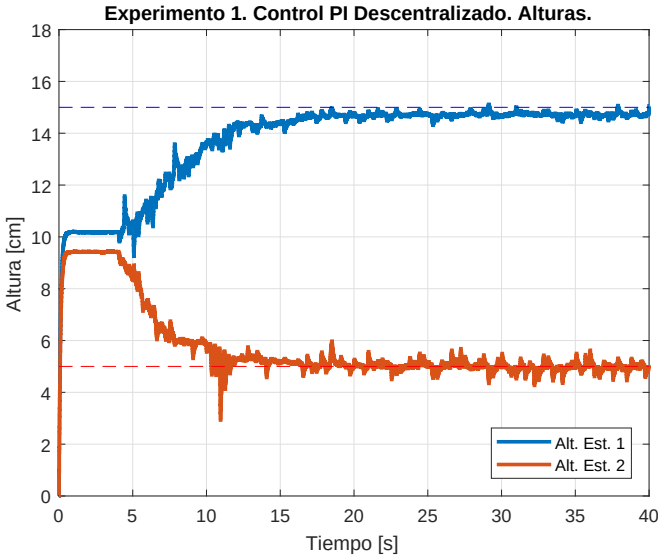
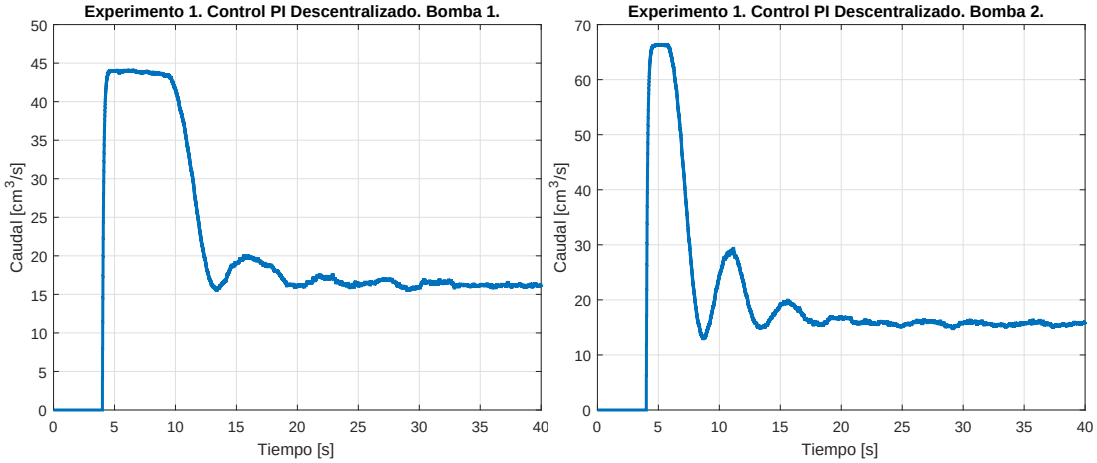


Fig. 2.11: Experimento 1. Controlador PI Descentralizado. Salidas del sistema.



(a) Caudal bomba de agua 1. *(b)* Caudal bomba de agua 2.

Fig. 2.12: Experimento 1. Controlador PI Descentralizado. Actuaciones.

Experimento 2

El experimento 2 también es superado por $C_{DC}(s)$. En las figuras (2.13)-(2.14b) se observan los resultados obtenidos. $h_1(t)$ alcanza su referencia antes que $h_2(t)$ dado que se debe aumentar el volumen de agua en orden de realizar el seguimiento y la orientación del flujo $q_1(t)$ está a favor del aumento de volumen. No así en el caso de $h_2(t)$ donde el seguimiento se produce únicamente por $q_{12}(t)$, una variable interna que

depende de la altura del primer estanque y es el único ingreso de agua al estanque 2, $q_2(t)$ solo actúa en orden de mantener la altura al nivel de referencia. El controlador, además, es capaz de superar dificultades como perturbaciones, que ocurren para el primer estanque en $t \in [40 : 55]$ [s] y para el segundo durante $t \in [60 : 70]$[s]; y el cambio de referencia que ocurre al final de la simulación, $t \geq 85$[s]. La pertubación en el primer estanque, $h_1(t)$, describe la curva del comportamiento de igualación de alturas a medida que se anula el error, esto se debe a que la actuación del estanque 1, al ser un caudal que solo agrega agua al estanque, no fluye, esperando a que naturalmente se vacíe lo suficiente. La perturbación en $h_2(t)$ es corregida con mayor rapidez, ya que $q_2(t)$ puede aumentar en orden de corregir ese error. Finalmente, el seguimiento de nuevas referencias a favor del crecimiento de cada actuación se observa con el clásico comportamiento de respuesta a escalón en el intervalo final de simulación, notándose como las actuaciones son vigorosas inicialmente, para eventualmente precisar con actuaciones leves el seguimiento de $r(t)$ en los instantes finales.

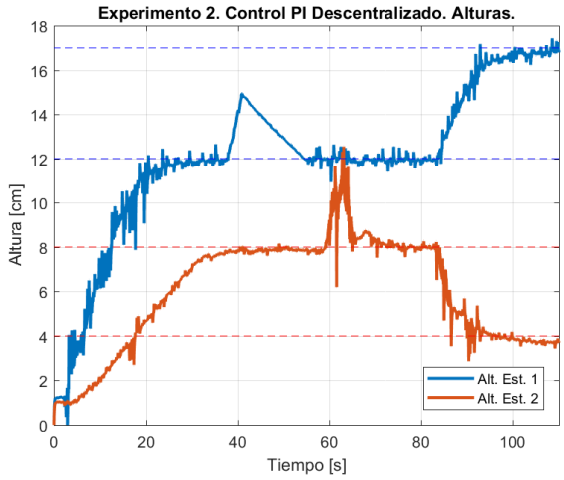
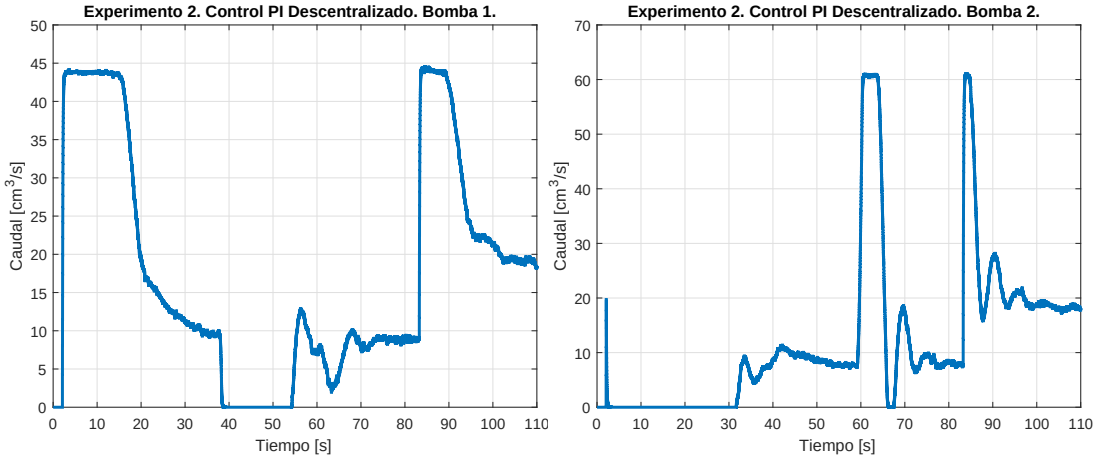


Fig. 2.13: Experimento 1. Controlador PI Descentralizado. Salidas del sistema.



(a) Caudal bomba de agua 1. *(b)* Caudal bomba de agua 2.

Fig. 2.14: Experimento 2. Controlador PI Descentralizado. Actuaciones.

2.3.2. PI con Acercamiento LQR

Experimento 1

Se observan en las figuras (2.15)-(2.16b) los resultados del experimento 1 con el controlador $C_{LQR}(s)$.

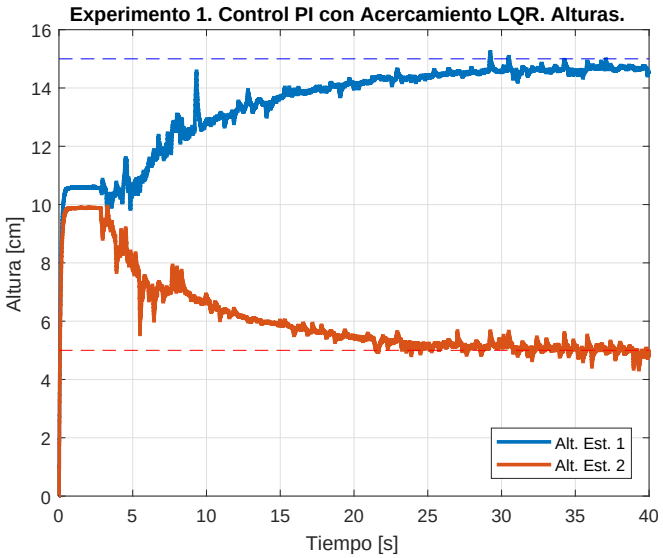
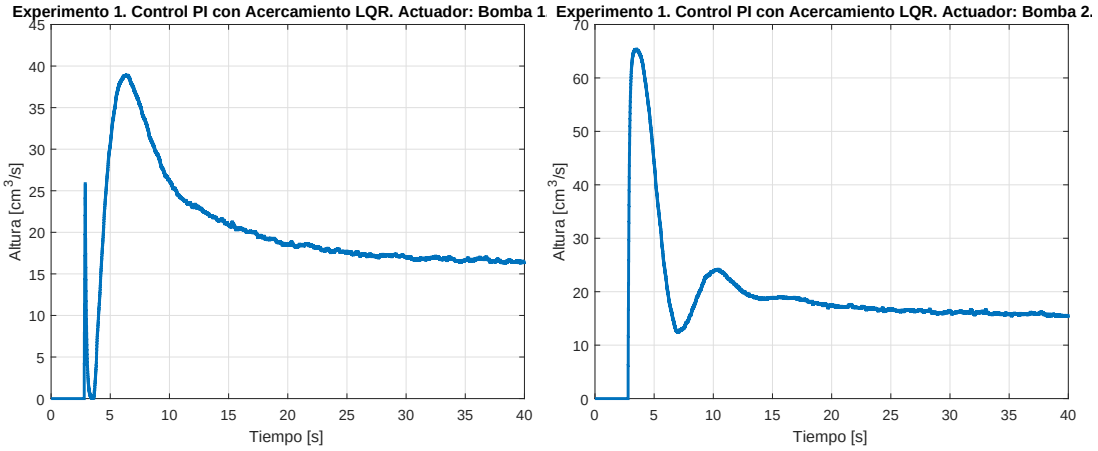


Fig. 2.15: Experimento 1. Controlador PI Descentralizado. Salidas del sistema.



(a) Caudal bomba de agua 1. *(b)* Caudal bomba de agua 2.

Fig. 2.16: Experimento 1. Controlador PI con Acercamiento LQR. Actuaciones.

Al igual que el experimento 1 con el controlador descentralizado, se tiene un seguimiento de referencia preciso y rápido, pero las diferencia más notoria se encuentra en las actuaciones. Las actuaciones en este experimento trabajan menos tiempo en saturación, lo que implica una utilización más eficiente de energía.

Experimento 2

Se repite el experimento 2, esta vez con el controlador $C_{LQR}(s)$, que demuestra robustez ante perturbaciones y cambio de referencia.

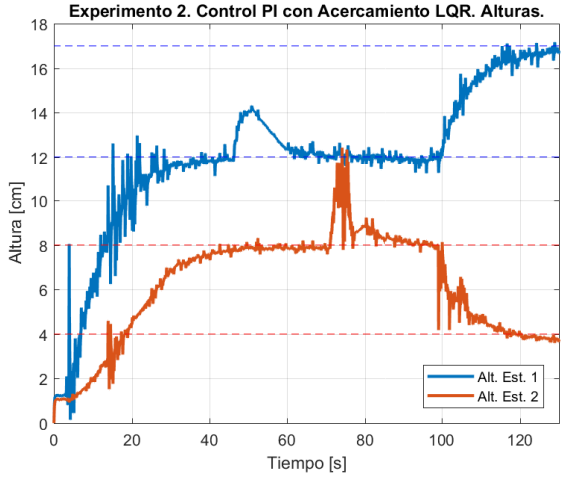
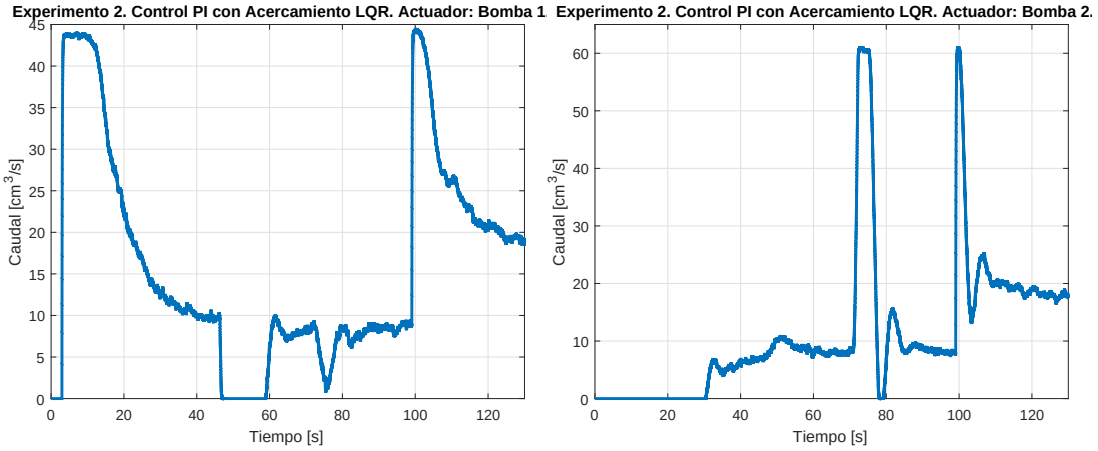


Fig. 2.17: Experimento 2. Controlador PI con Acercamiento LQR. Salidas del sistema.



(a) Caudal bomba de agua 1. *(b)* Caudal bomba de agua 2.

Fig. 2.18: Experimento 2. Controlador PI con Acercamiento LQR. Actuaciones.

2.3.3. Comparación de Resultados

Es posible calcular el error cuadrático medio, $\bar{e}$, para la respuesta de los sistemas en el experimento 1 con cada controlador, así como también la actuación cuadrática media, $\bar{u}$, con los siguientes funcionales:

$$\bar{e} = \frac{1}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} e^T(t) \cdot e(t) dt, \tag{2.62}$$

$$\bar{u} = \frac{1}{t_f - t_0} \int_{t_0}^{t_f} u^T(t) \cdot u(t) dt \tag{2.63}$$

Donde por supuesto t_0 y t_f son dos tiempos de medición, para este caso convenientemente $t_0 = 0$ y $t_f = 40$[s]. Con los datos obtenidos con la tarjeta de adquisición los valores de estos funcionales quedan detallados en la siguiente tabla.

Tab. 2.1: Sistema 1. Funcionales de desempeño para cada controlador.

Controlador	$\bar{e}[\text{cm}^2]$	$\bar{u}\left[\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}\right]^2$
PI Descentralizado	8.3728	1092.4
PI con LQR	8.3516	905.7

Se determina que el controlador LQR es levemente más lento en controlar las salidas que el descentralizado. El error cuadrático medio es marginalmente inferior, de tal manera que el ruido es de mayores magnitudes, no permitiéndose establecer una mejoría. Pero como se adelantaba de lo observado en los gráficos, las actuaciones son menos elevadas.

3. CAPÍTULO 3

SISTEMA 2: DOS ESTANQUES CON ACOPLE TIPO TORRE

3.1. Modelado Fenomenológico

El siguiente sistema también consta de dos estanques, esta vez se propone colocar uno, llámese Estanque 1, en un piso superior proveyendo de agua a un segundo estanque, Estanque 2, ubicado por debajo solamente con caudal gravitacional, sin influencia del estanque inferior. Por supuesto lo recién descrito puede observarse en detalle en la figura (3.1). En este caso también se piensa en dos entradas y dos salidas, siendo las salidas ambas alturas y las entradas serán un caudal de agua ingresando al estanque 1, superior, y otro que expulsa agua del estanque 2, abajo. El balance de masa correspondiente queda expresado en las expresiones (3.1-3.3).

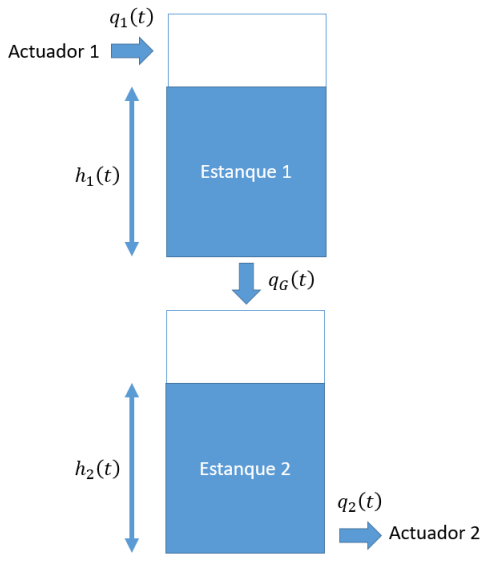


Fig. 3.1: Esquema del sistema 2.

$$
\begin{aligned}
A\frac{dh_1(t)}{dt} &= q_1(t) - q_G(t), && (3.1)\\
A\frac{dh_2(t)}{dt} &= q_G(t) - q_2(t), && (3.2)\\
q_G(t) &= k\sqrt{h_1(t)}, && (3.3)
\end{aligned}
$$

El sistema es muy similar al anterior, pero la única diferencia se encuentra en el caudal de traspaso entre ambos estanques, donde ahora no existe dependencia de uno de los estanques.

Se procede a linealizar. Ante referencia constante y estado estacionario asumiendo estabilización del sistema:

$$
\begin{aligned}
\frac{dh_1(t)}{dt} = \frac{dh_2(t)}{dt} &= 0, && (3.4)\\
\therefore q_{1q} = q_{2q} &= q_{Gq}, && (3.5)
\end{aligned}
$$

Luego:

$$
\begin{aligned}
\Delta q_G(t) &= \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{h_{1q}}}}_{c}\Delta h_1(t), && (3.6)\\
A\Delta\dot{h}_1(t) &= \Delta q_1(t) - c\Delta h_1(t), && (3.7)\\
A\Delta\dot{h}_2(t) &= c\Delta h_1(t) - \Delta q_2(t), && (3.8)\\
\begin{bmatrix}\Delta Q_1(s)\\ \Delta Q_2(s)\end{bmatrix} &= \begin{bmatrix}As+c & 0\\ c & -As\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta H_1(s)\\ \Delta H_2(s)\end{bmatrix}, && (3.9)\\
\therefore \begin{bmatrix}\Delta H_1(s)\\ \Delta H_2(s)\end{bmatrix} &= \frac{1}{As(As+c)}\begin{bmatrix}As & 0\\ c & -As-c\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\Delta Q_1(s)\\ \Delta Q_2(s)\end{bmatrix}, && (3.10)
\end{aligned}
$$

Análogamente al capítulo 2, se escribe su representación en variables de estado

$(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, 0)$ con $x(t) = \begin{bmatrix}\Delta h_1(t) & \Delta h_2(t)\end{bmatrix}^T = y(t)$, y $u(t) = \begin{bmatrix}\Delta q_1(t) & \Delta q_2(t)\end{bmatrix}^T$:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\frac{1}{A}\begin{bmatrix}-c & 0\\ c & 0\end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} x(t) + \underbrace{\frac{1}{A}\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} u(t), \tag{3.11}$$

$$y(t) = \underbrace{I_2}_{\mathcal{C}} x(t). \tag{3.12}$$

Sistema que es matemáticamente muy similar al anterior, manteniendo el mismo tipo de inestabilidad. Teniéndose dos polos, uno estable en $s = -\frac{c}{A}$ y otro marginalmente inestable ($s = 0$). Así también, la matriz de Rosenbrock del sistema, observada en la expresión (3.15), no pierde rango en ningún valor de s y por tanto hay ceros de transmisión en este sistema. Esto último se observa rápidamente, al igual que en el primer sistema, que las submatrices $\mathcal{B}$ y $\mathcal{D} = 0$ son linealmente independientes y ello implica que es de rango completo sin importar cuánto valga s. Otro punto interesante del sistema es que la altura 1 es estable, ya que se cancela su cero en $s = 0$, pero por supuesto esto solo es cierto en esta aproximación lineal, su BIBO inestabilidad se mantiene si se le aplica un caudal suficientemente grande. Las direcciones de entrada y salida son las siguientes:

$$u_{P_1} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}1\\ -1\end{pmatrix}, y_{P_1} = \begin{pmatrix}0\\ 1,\end{pmatrix}, \text{con } P_1\text{: } s = 0 \tag{3.13}$$

$$u_{P_2} = \begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}, y_{P_2} = \frac{\sqrt{2}}{2}\begin{pmatrix}-1\\ 1,\end{pmatrix}, \text{con } P_2\text{: } s = -\frac{c}{A} \tag{3.14}$$

$$R_{S2}(s) = \begin{bmatrix}-\frac{c}{A} - s & 0 & \frac{1}{A} & 0\\ \frac{c}{A} & -s & 0 & -\frac{1}{A}\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\end{bmatrix} \tag{3.15}$$

Lo notable de las direcciones propuestas es la nula interacción que comparten el polo $s = 0$ sobre el primer estado, $h_1(t)$ y el polo $s = -\frac{c}{A}$ con $h_2(t)$.

3.1.1. Identificación de Parámetros

Mediante un experimento similar al del capítulo anterior se procede a estimar el parámetro k.

- Colocar inicialmente el Estanque 1 con todos sus orificios tapados y llenarlo a cierta altura $h_1(0) = h_1^0$.
- Apagar todas las bombas de agua del sistema.
- Vaciar el Estanque 2.
- Cronometrar el tiempo que demora en vaciarse el estanque 1 y por ende llenarse el estanque 2.

  Así, se tienen las siguientes condiciones en el sistema:

  - $h_1(\infty) = h_2(0) = 0$,
  - $h_1(t) + h_2(t) = h_1^0$.

Por lo tanto se prosigue como:

$$
\begin{aligned}
A\frac{dh_1(t)}{dt} &= -q_G(t), && (3.16)\\
A\frac{dh_2(t)}{dt} &= q_G(t), && (3.17)\\
q_G(t) &= k\sqrt{h_1(t)}. && (3.18)\\
\therefore A\frac{dh_1(t)}{dt} &= -k\sqrt{h_1(t)}, && (3.19)\\
A\frac{dh_1(t)}{\sqrt{h_1(t)}} &= -kdt, && (3.20)\\
A\int_{t_0}^{t_f}\frac{dh_1(t)}{\sqrt{h_1(t)}} &= -k\int_{t_0}^{t_f}dt, && (3.21)\\
-\frac{2A}{t_f-\cancel{t_0}}\left(\sqrt{h_1(t_f)}-\sqrt{h_1(t_0)}\right) &= k, && (3.22)\\
\therefore k &= 2A\frac{\sqrt{h_1(t_0)}-\sqrt{h_1(t_f)}}{t_f}. && (3.23)
\end{aligned}
$$

Al realizar el experimento con el estanque 1 en la posición superior y el estanque 3 en la inferior se tiene que, dado que el radio del estanque es de 4.45[cm] su área $A = 62.21$[cm^2], el tiempo de medición es de $t_f = 83$[s] y la altura que alcanza la columna de agua es de 16.9[cm] para terminar en 1.7[cm]. Por lo tanto $k = 4.21$[cm$^{2.5}$/s].

3.2. Simulaciones

3.2.1. Planta

Comportamiento del Sistema No Lineal

En esta sección se simula el sistema 1 por sí solo y luego con el controlador propuesto.

Si $k = 4.21$[cm$^{2.5}$/s] y $A = \pi r_1^2 = 62.21$[cm^2] se tiene el comportamiento dinámica destacado en la figura (3.3) en las alturas de cada estanque. Se tienen las siguientes consideraciones:

- La altura inicial del estanque 1, $h_1(0) = 10$[cm] y $h_2(0) = 5$[cm] para el estan-

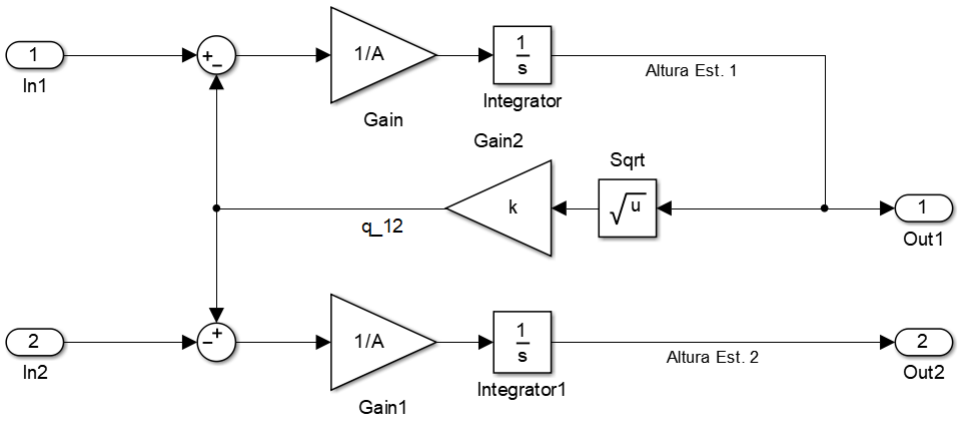


Fig. 3.2: Sistema 2 en diagrama de bloques Simulink.

que 2,

- Se tiene un comportamiento sin excitaciones a las entradas del sistema durante $t \in [0; 200[$[s],
- Luego se le da un caudal de entrada al estanque 1 de 15[cm^3/s] durante el intervalo $t \in [200; 400[$[s],
- Acto seguido, se mantiene el sistema en reposo en $t \in [400; 600[$[s], $q_2(t)$ toma el valor de 5[cm^3/s] en $t \in [600; 800]$[s],
- Finalmente, durante el intervalo $t \in [1000; 1200]$[s] se llevan ambos caudales a 10[cm^3/s] para observar su comportamiento en estabilidad.

La simulación también es ilustrativa, ya que se observa como rápidamente la altura del estanque 2 supera a la del primero, alcanzando su saturación en 30[cm]. Por otra parte el caudal gravitatorio es una variable interna de importante relevancia ya que no permite que $h_1(t)$ suba demasiado. Dado que finalmente la única influencia que tiene el estanque 2 es su actuador, se observa un vaciado completamente lineal.

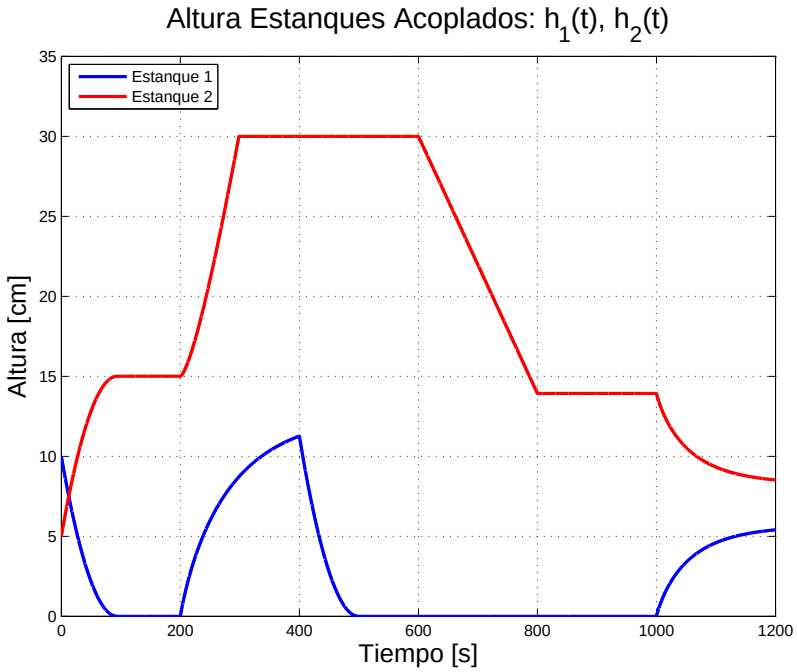


Fig. 3.3: Simulación Sistema 2.

Comparación Sistema Lineal vs. No Lineal

Para estudiar la validez de la aproximación lineal propuesta al sistema de estanques tipo torre se realiza una comparación de ambos en su punto de equilibrio y en las cercanías de éste. Así, al igual que en el caso anterior se simula a ambos sistemas en el siguiente punto de equilibrio:

$$(h_{1q}, h_{2q}, q_{Gq}) = (20[\text{cm}], 10[\text{cm}], 18.82[\text{cm}^3/\text{s}]) \tag{3.24}$$

Si se observa la figura (3.4), durante los primeros 100 segundos ambos sistemas se mantienen en este punto de equilibrio para luego aumentar el caudal de equilibrio en un 33 %. Nuevamente se obtiene un comportamiento muy similar en ambas respuestas, considerando que el cambio en el caudal es relativamente alto. Esta situación acusa una buena aproximación lineal.

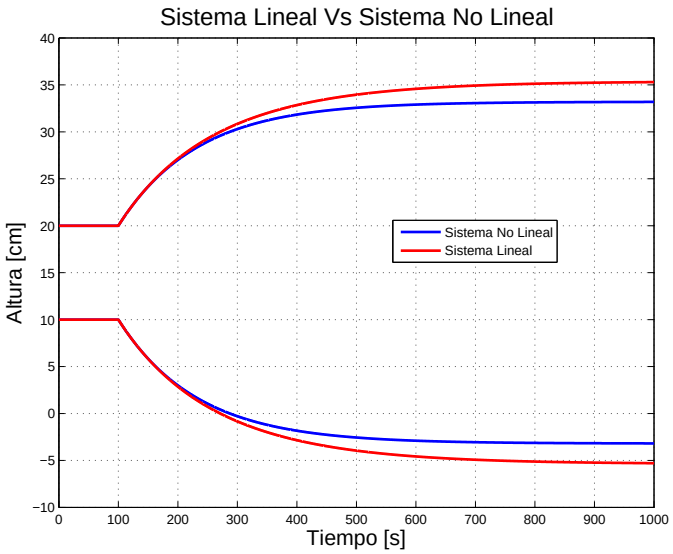
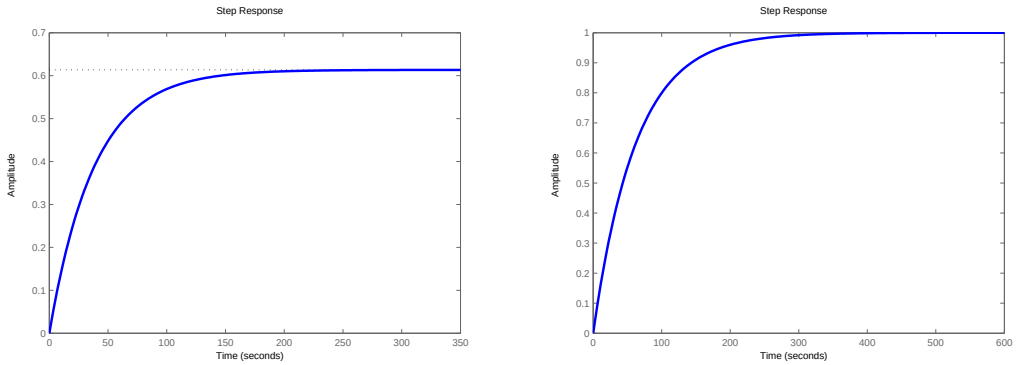


Fig. 3.4: Sistema 2, Comparación Lineal vs. No Lineal.

3.2.2. Estrategia de Control

Inicialmente se presenta la respuesta a escalón del sistema en lazo cerrado, donde se espera una estabilización del sistema y una idea de qué se debe mejorar con los controladores propuestos. Sea entonces el punto de equilibrio $h_{1q} = 15$[cm], entonces la constante de linealización $c = 0.543$.



(a) Transferencia entre $u_1(t)$ y $q_1(t)$. *(b)* Transferencia entre $u_2(t)$ y $q_2(t)$.

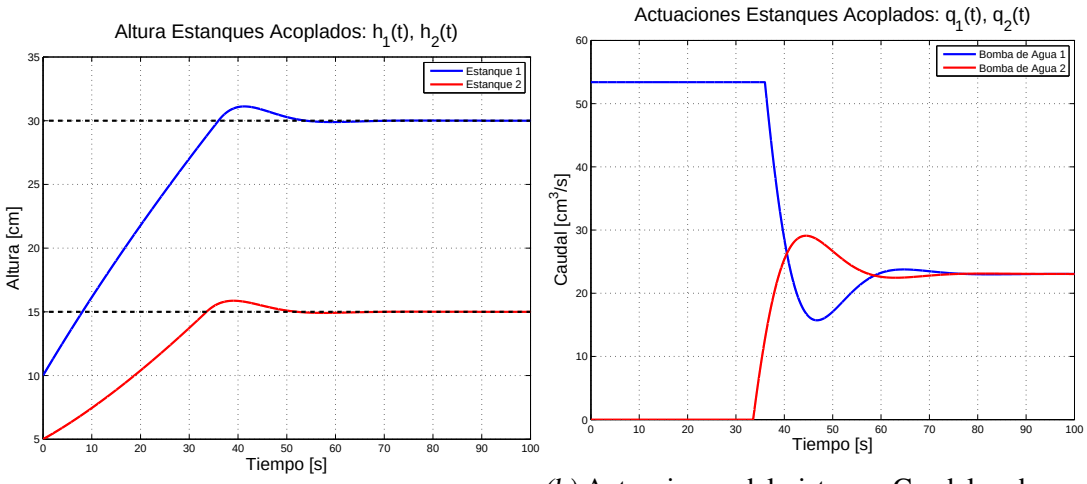
Fig. 3.5: Respuestas a escalón de interés.

Control Descentralizado

Nuevamente el sistema es lento y se buscará acelerar este proceso en el PI descentralizado, sintonizado mediante `pidtune`. El siguiente PI busca acelerar la respuesta del sistema a unos 30[s].

$$C_{DC}(s) = \begin{pmatrix} 15.8 + \dfrac{2.94}{s} & 0 \\ 0 & -\left(16.2 + \dfrac{2.8}{s}\right) \end{pmatrix} \tag{3.25}$$

Sea la referencia de altura 1, $r_1(t) = 30$[cm] y altura 2, $r_2(t) = 15$[cm].



(a) Alturas siguiendo al referencia propuesta.

(b) Actuaciones del sistema. Caudales de entrada y salida.

Fig. 3.6: Señales de interés del lazo de control descentralizado.

Nótese, en las figuras (3.6), que no es posible acelerar más el sistema, esto se observa en los caudales que trabajan en saturación durante gran parte del tiempo de simulación. Esto se debe a que la constante de interconexión k es bastante baja, y representa una situación "cuello de botella" en el sistema.

PI con acercamiento LQR

Sean ahora los estados del sistema los errores e integrales de éste, considerando referencias nulas y mismos supuestos que en el capítulo anterior.

$$x_{Ext}(t) = \begin{pmatrix} \int_{0^+}^{t} e_1(\tau)d\tau \\ \int_{0^+}^{t} e_2(\tau)d\tau \\ e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix} \tag{3.26}$$

Así la representación en variables de estado extendida queda como:

$$\dot{x}_{Ext}(t) = \begin{bmatrix} 0 & I \\ 0 & \mathcal{A} \end{bmatrix} x_{Ext}(t) + \begin{bmatrix} 0 \\ -\mathcal{B} \end{bmatrix} u(t), \tag{3.27}$$

$$y(t) = \begin{bmatrix} 0 & -\mathcal{C} \end{bmatrix} x_{Ext}(t). \tag{3.28}$$

Donde nuevamente los cuatro estados son controlables, ya que el rango de su matriz de controlabilidad es igual a 4. Con ello, la entrada óptima $u_{opt}(t)$ queda como:

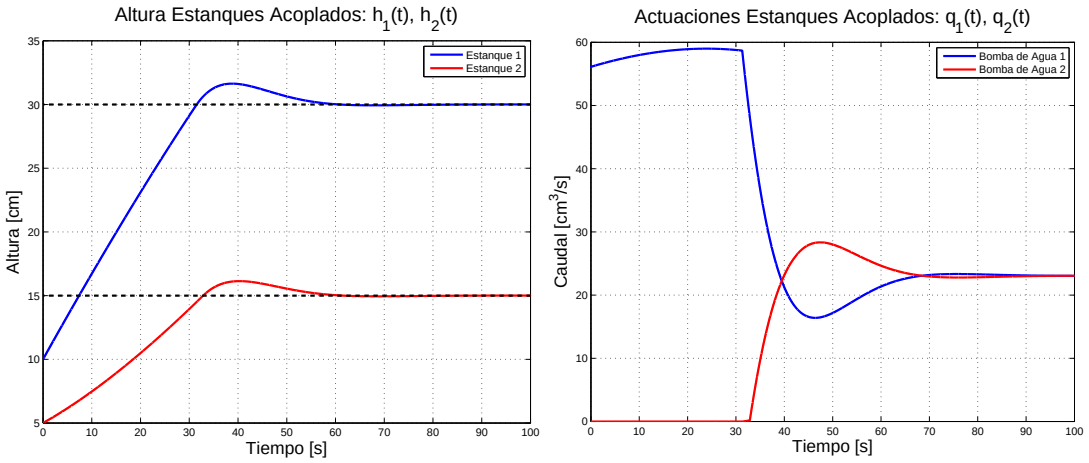
$$u_{opt}(t) = \begin{pmatrix} 1.414 & 0.0334 & 12.73 & 0.315 \\ 0.0334 & -1.414 & -0.315 & -13.33 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \int_{0^+}^{t} e_1(\tau)d\tau \\ \int_{0^+}^{t} e_2(\tau)d\tau \\ e_1(t) \\ e_2(t) \end{pmatrix} \tag{3.29}$$

Finalmente:

$$C_{LQR}(s) = \begin{pmatrix} 12.73 + \dfrac{1.414}{s} & 0.315 + \dfrac{0.0334}{s} \\ -0.315 + \dfrac{0.0334}{s} & -\left(13.33 + \dfrac{1.414}{s}\right) \end{pmatrix} \tag{3.30}$$

Este controlador obtiene una respuesta muy similar al caso descentralizado pero a partir de una actuación que pasa menos parte de su intervalo transiente en saturación.

Lamentablemente, el PLC no admite controladores PID de fase no mínima, como el elemento $(2, 1)$ de $C_{LQR}(s)$. También, dada la presencia de integradores en todos



(a) Alturas siguiendo al referencia propuesta del sistema con sintonización PI mediante LQR.

(b) Actuaciones del sistema con sintonización PI mediante LQR. Caudales de entrada y salida.

Fig. 3.7: Señales de interés del lazo de control descentralizado.

los elementos del controlador, el fenómeno de enrollamiento adquiere importancia, no así como en el caso del controlador centralizado del capítulo 2, donde los elementos del controlador eran dos controladores PI en la diagonal y dos P en la antidiagonal, y por lo demás un P de ganancia muy pequeña. Puede decirse con seguridad que si el sistema de ese capítulo se satura, para luego enrollarse, se debe a los controladores PI. Los controladores PI y PID en el código *ladder* se configuran mediante una macro que se abre mediante la linea de comando `PID`, ésta, luego de indicar mediciones, salidas, y parámetros pertinentes, posee un mecanismo de antienrollamiento pero, lamentablemente, están pensados únicamente para el caso SISO, y este sistema es TITO (*Two Inputs, Two Outputs*). El fenómeno a solucionar sucede cuando una actuación del sistema se satura, dado que los controladores son, en general, sistemas con memoria, influye en ellos los valores de instantes anteriores del error, además del instante presente en el que actúan, esta memoria es particularmente notoria y bien documentada en el caso del integrador de un PID. Así, un integrador, suma los errores de instantes pasados a la actuación, siempre aportando a la actuación, lo que realimenta y, eventualmente, asumiendo estabilización, reduce el error a cero. Pero esta constan-

te suma que se produce en la actuación es un problema cuando existen saturaciones, ya que contribuyen a una sobre actuación que produce un *overshoot* exagerado a las necesidades del lazo de control, produciendo un error negativo que irá anulando el sobrepaso del integrador. Todo este proceso enlentece en sobremanera a un lazo de control, pero hay varios métodos para solucionarla como el visto en la figura (2.9). En un controlador MIMO sin embargo, la actuación es una suma de varias componentes dictadas por los diferentes elementos de la matriz que define al controlador, y la saturación del actuador se produce ahora, además, por la suma de varias actuaciones. La solución de la figura (2.9) no puede utilizarse directamente en el PLC, las limitaciones del código no lo permiten, y está pensado para sistemas SISO. Técnicas para desenrollar controladores MIMO pueden observarse en [6], donde se busca realimentar con una matriz sin memoria Λ la diferencia de las señales por delante y atrás de un bloque de saturación. Una forma conocida de desenrollar PI's es hacer nulo el integrador durante los instantes de tiempo en que la actuación se satura, y se realiza un intento de implementar esta solución al contexto MIMO, donde si una actuación no está en su zona de operación lineal entonces los elementos del controlador asociados a ésta anulan su integración. Esto se traduce a programar controladores P para el caso de actuaciones saturadas, pero no es posible multiplicar ganancias a los errores dado el largo de las direcciones de memoria, 16 bits. Entonces se opta por reducir al controlador a la siguiente forma:

$$C_{LQR_A}(s) = \begin{pmatrix} 12.73 + \dfrac{1.414}{s} & 0.315 \\ -0.315 & -\left(13.33 + \dfrac{1.414}{s}\right) \end{pmatrix}, \tag{3.31}$$

Eliminándose la integración de los elementos fuera de la diagonal principal. En la figura (3.8) se puede observar que este controlador también es capaz de controlar la planta, siguiendo la referencia propuesta.

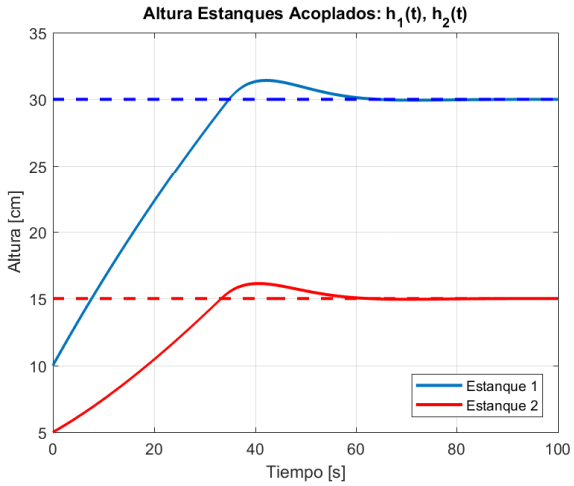


Fig. 3.8: Evaluación controlador $C_{LQR_A}(s)$.

3.3. Resultados Experimentales

Al igual que en el capítulo anterior se realizan dos experimentos para evaluar el comportamiento de cada controlador, $C_{DC}(s)$ y $C_{LQR_A}(s)$. Los experimentos son:

1. Ambos estanques se encuentran en condición inicial $y(0) = \begin{bmatrix} 0 & 13 \end{bmatrix}^T$ [cm]. Este experimento sigue la referencia $r(t) = \begin{bmatrix} 12 & 8 \end{bmatrix}^T$ [cm].

2. Inicialmente los estanques se encuentran vacíos: $y(0) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}^T$. La referencia a seguir es la misma que en el experimento 1 durante el intervalo $\forall t \in [0; 90[$. En el instante $t = 43$[s] se le aplica un volumen de agua de aproximadamente 200[cm^3] que perturba la altura del estanque 1, luego en $t = 70$[s] se le aplica un caudal externo, $q_e(t)$ al estanque 2 durante 5 segundos, siendo este en definitiva otro tipo de perturbación. Finalmente la referencia cambia a $r(t) = \begin{bmatrix} 16 & 4 \end{bmatrix}^T$ [cm], $\forall t \geq 90$[s].

3.3.1. PI Descentralizado

Experimento 1

El primer experimento del controlador C_{DC} se presenta en los gráficos de las figuras (3.9)-(3.10b). Se tiene un rápido seguimiento de aproximadamente 17[s] para el estanque 1, y 11[s] para el segundo. Nuevamente se denota la presencia de ruido en las mediciones de altura. En la sección posterior sobre el experimento 1 de $C_{LQR_A}(s)$ se comparan los funcionales de interés.

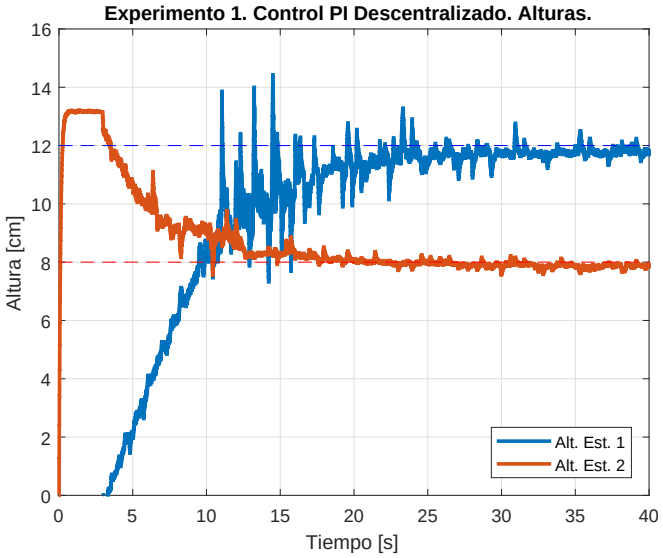
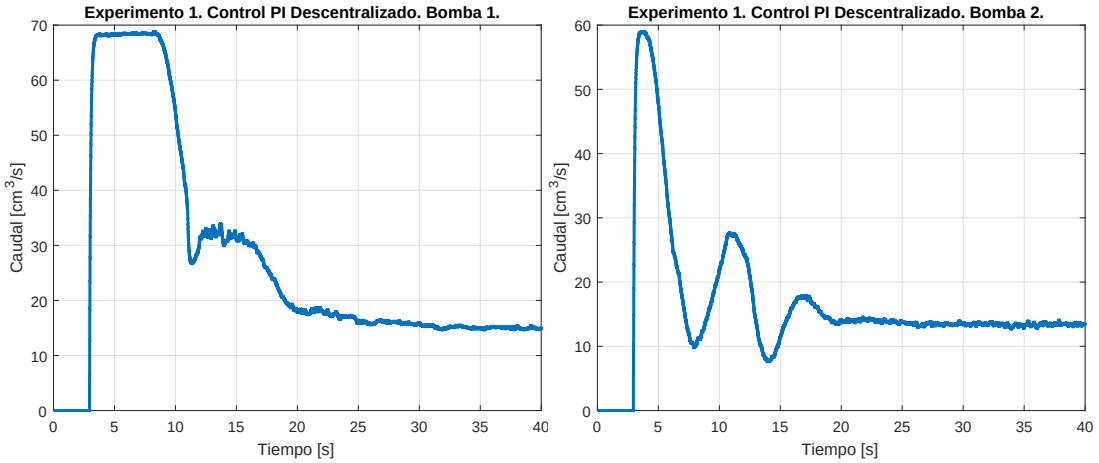


Fig. 3.9: Experimento 1. Controlador PI Descentralizado. Salidas del sistema.



(a) Caudal bomba de agua 1. *(b)* Caudal bomba de agua 2.

Fig. 3.10: Experimento 1. Controlador PI Descentralizado. Actuaciones.

Experimento 2

La referencia del primer estanque se sigue en aproximadamente 20[s], mientras que el segundo estanque se demora más en tener un volumen menor de agua, dado que solamente se llena mediante el caudal dependiente del primer estanque. Luego, la primera perturbación demora 15[s] en corregirse dado que la actuación no tiene una acción correctora, además de anularse y permitir el vaciado natural del estanque. Luego, el caudal externo que perturba al estanque 2 agrega ruido a la medición de $h_1(t)$, y no logra tener mucha influencia en $h_2(t)$ dado que rápidamente $q_2(t)$ aumenta en orden de cancelar el efecto. Finalmente, el sistema sigue correctamente a la nueva referencia, demorando en ambos estanques aproximadamente 10[s].

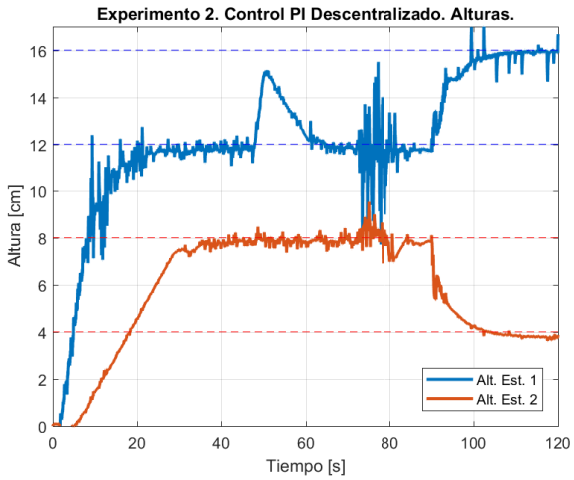
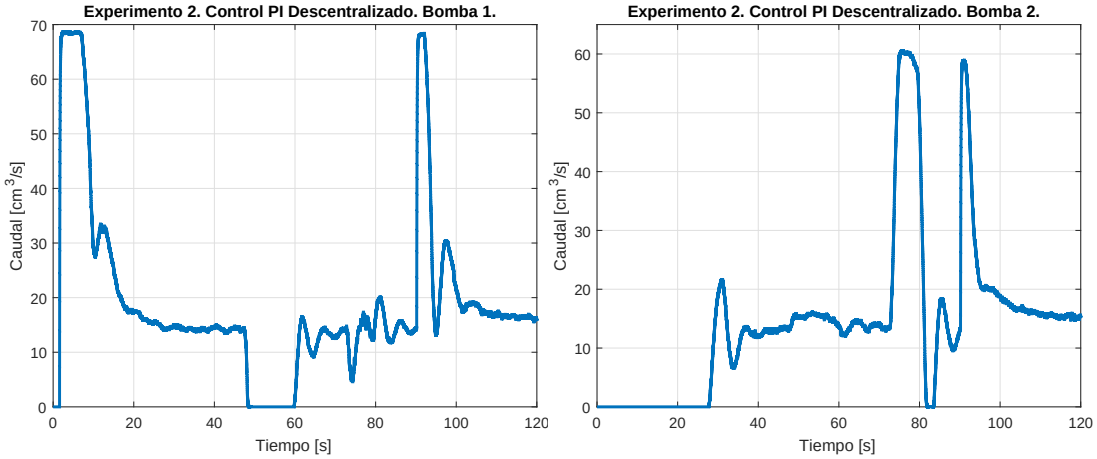


Fig. 3.11: Experimento 2. Controlador PI Descentralizado. Salidas del sistema.



(a) Caudal bomba de agua 1. *(b)* Caudal bomba de agua 2.

Fig. 3.12: Experimento 2. Controlador PI Descentralizado. Actuaciones.

3.3.2. PI con Acercamiento LQR

Experimento 1

Se observa un seguimiento de referencia más lento para el sistema con el controlador $C_{LQR}(s)$, tomándole aproximadamente 20[s] controlar $h_1(t)$. En la tabla (3.1) se observa la comparación de los costos definidos en el capítulo 2.

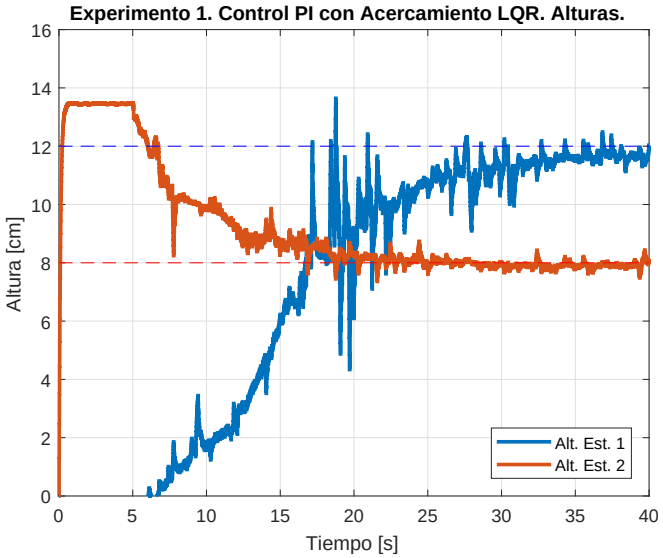
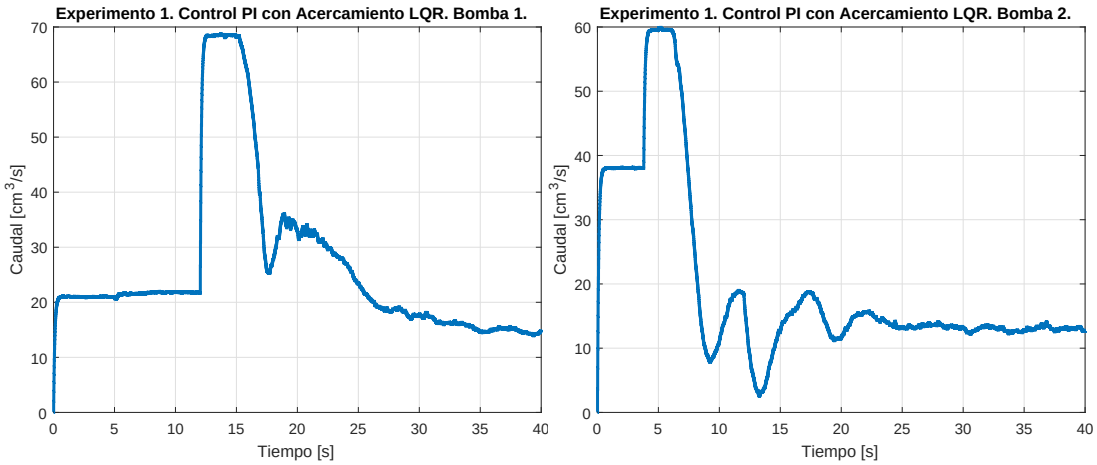


Fig. 3.13: Experimento 1. Controlador PI con Acercamiento LQR. Salidas del sistema.



(a) Caudal bomba de agua 1. *(b)* Caudal bomba de agua 2.

Fig. 3.14: Experimento 1. Controlador PI con Acercamiento LQR. Actuaciones.

Experimento 2

En las figuras (3.15)-(3.16b) se grafican las señales de interés del experimento 2 con el controlador $C_{LQR}(s)$.

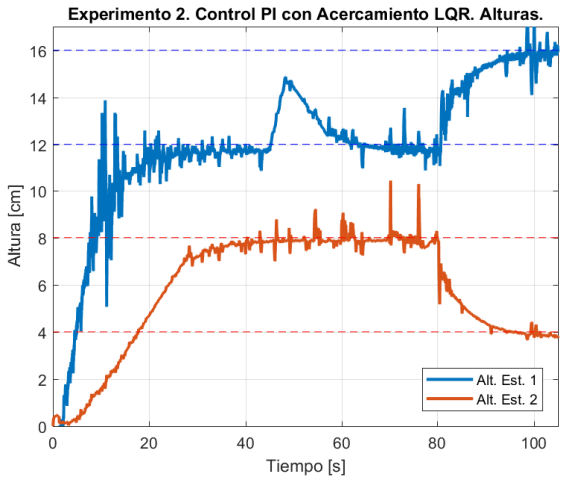
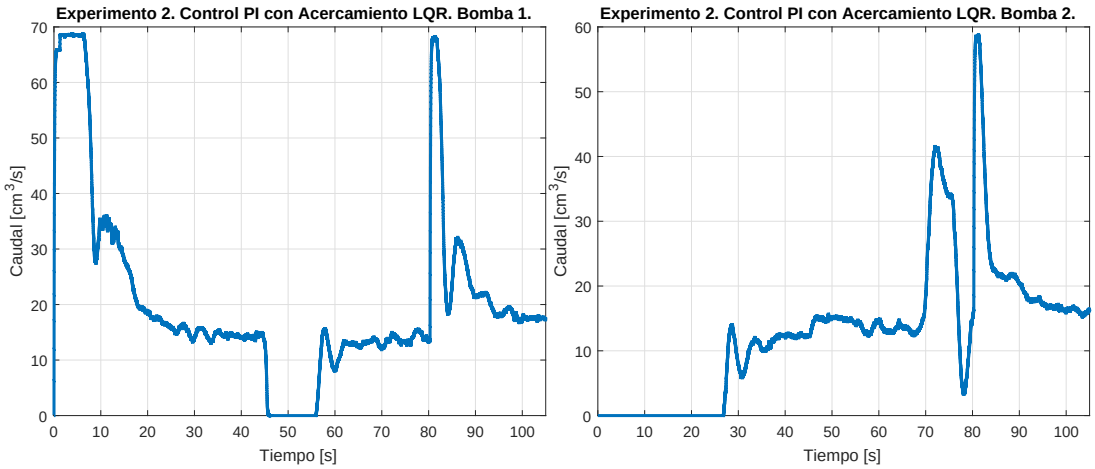


Fig. 3.15: Experimento 2. Controlador PI con Acercamiento LQR. Salidas del sistema.



(a) Caudal bomba de agua 1. *(b)* Caudal bomba de agua 2.

Fig. 3.16: Experimento 2. Controlador PI con Acercamiento LQR. Actuaciones.

En general se logra notar una menor utilización de actuaciones para resultados muy similares que en el caso descentralizado.

3.3.3. Comparación de Resultados

En la tabla (3.1) se observa la comparación de los costos definidos en el capítulo 2. En este caso es posible notar un aumento considerable en el error cuadrático medio,

y un marginal menor uso de actuaciones. Esto puede deberse a que $C_{LQR_A}(s)$ no aproxima de buena manera a $C_{LQR}(s)$.

Tab. 3.1: Sistema 2. Funcionales de desempeño para cada controlador.

Controlador	$\bar{e}[\text{cm}^2]$	$\bar{u}\left[\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}\right]^2$
PI Descentralizado	17.97	1543.6
PI con LQR	32.47	1524.1

4. CAPÍTULO 4

SISTEMA 3: TRES ESTANQUES ACOPLADOS

4.1. Modelado Fenomenológico

Es posible combinar los sistemas anteriores y construir un sistema de tres estanques acoplados, dos estanques unidos por un tubo a altura basal (Estanques 1 y 2) y un tercero en un piso superior a estos proveyendo de agua a los de abajo por medio de caudal gravitatorio (Estanque 3). Ahora el sistema se piensa de tres entradas y tres salidas, siendo estas últimas la altura del estanque 1 y 3 y la diferencia entre las alturas del estanque 1 y 2, asignándose esta última salida de esta manera ya que se poseen 2 sensores de presión de 10 pulgadas y otro de presión diferencial de 5 pulgadas. Las entradas para este caso serán un caudal de agua, $q_3(t)$, entrante al estanque superior 3, un caudal de entrada adicional, $q_1(t)$, a uno de los estanques inferiores (Estanque 1) y otro de expulsión de agua al restante (Estanque 2), $q_2(t)$. El balance de masa está expresado en las expresiones (4.1) - (4.8).

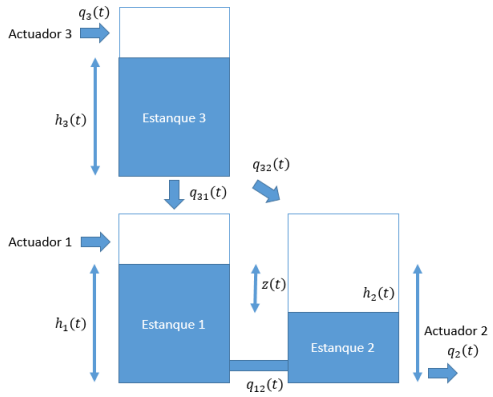


Fig. 4.1: Esquema del Sistema 3.

$$
\begin{aligned}
\text{Sea: } z(t) &= h_1(t) - h_2(t), && (4.1)\\
q_{12}(t) &= k_{12} \cdot \text{sgn}(z(t))\sqrt{z(t)}, && (4.2)\\
q_{31}(t) &= k_{31}\sqrt{h_3(t)}, && (4.3)\\
q_{32}(t) &= k_{32}\sqrt{h_3(t)}, && (4.4)\\
A\frac{d}{dt}h_1(t) &= q_1(t) - q_{12}(t) + q_{31}(t), && (4.5)\\
A\frac{d}{dt}h_2(t) &= q_{12}(t) + q_{32}(t) - q_2(t), && (4.6)\\
A\frac{d}{dt}z(t) &= q_1(t) - 2q_{12}(t) + q_{31}(t) - q_{32}(t) + q_2(t), && (4.7)\\
A\frac{d}{dt}h_3(t) &= q_3(t) - q_{31}(t) - q_{32}(t), && (4.8)
\end{aligned}
$$

Las ecuaciones del sistema MIMO 3×3 como tal, que luego definirán la matriz de transferencia y la representación en variables de estado $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, \mathcal{D})$, son (4.5), (4.7) y (4.8).

En equilibrio, dada la anulación de las derivadas en el tiempo se tiene que:

$$
\begin{aligned}
q_{1q} &= q_{12q} - q_{31q}, && (4.9)\\
q_{2q} &= g_{32q} - g_{31q} + 2q_{12q} - q_{1q},\\
&= g_{32q} - g_{31q} + 2q_{12q} - q_{12q} + q_{31q},\\
&= q_{32q} + q_{12q}, && (4.10)\\
q_{3q} &= q_{31q} + q_{32q}, && (4.11)
\end{aligned}
$$

Es importante realizar una observación sobre el punto de equilibrio de este sistema, más precisamente en la expresión (4.9): nótese que q_{1q} es la diferencia de los dos caudales que unen al estanque 1 con los demás. Por lo tanto si $q_{31q} > q_{32q}$ implica un caudal de equilibrio q_{1q} negativo, lo que no puede ser provisto por la configuración de la bomba de agua 1. Entonces debe de existir un compromiso entre los caudales q_{31q}

y q_{12q} de tal manera que la diferencia siempre sea positiva y que de cierta holgura en caso de perturbaciones o cambios de referencia. Por supuesto este problema solo es un impedimento dado que las bombas de este sistema no son capaces de proveer flujos de agua en más de un sentido. Además, en un sistema inestable la predisposición de un punto de equilibrio válido es una preocupación constante, pero se hace esta aclaración dado que en los sistemas anteriores no se observaba algo de este estilo, siendo que el punto de equilibrio siempre es alcanzable con las actuaciones disponibles. Así, se deja explícita la relación que debe de existir en las variables de entrada y salida de estado estacionario de manera que $q_{1q} \geq 0$:

$$
\begin{aligned}
q_{1q} &\geq 0, && (4.12)\\
q_{12q} - q_{31q} &\geq 0, && (4.13)\\
k_{12}\sqrt{z_q} - k_{31}\sqrt{h_{3q}} &\geq 0, && (4.14)\\
\therefore h_{3q} &\leq z_q \left(\frac{k_{12}}{k_{31}}\right)^2. && (4.15)
\end{aligned}
$$

Ahora, es posible continuar la linealización del sistema y llevar las ecuaciones diferenciales al dominio de Laplace como en los casos anteriores:

$$
\begin{aligned}
\Delta q_{12}(t) &= \underbrace{\frac{k_{12}}{2\sqrt{z_q}}}_{c_{12}} \Delta z(t), && (4.16)\\
\Delta q_{31}(t) &= \underbrace{\frac{k_{31}}{2\sqrt{h_{3q}}}}_{c_{31}} \Delta h_3(t), && (4.17)\\
\Delta q_{32}(t) &= \underbrace{\frac{k_{32}}{2\sqrt{h_{3q}}}}_{c_{32}} \Delta h_3(t), && (4.18)
\end{aligned}
$$

$$A\Delta\dot{h}_1(t) = \Delta q_1(t) - c_{12}\Delta z(t) + c_{31}\Delta h_3(t), \tag{4.19}$$

$$A\Delta\dot{z}(t) = \Delta q_1(t) - 2c_{12}\Delta z(t) + (c_{31} - c_{32})\Delta h_3(t) + \Delta q_2(t), \tag{4.20}$$

$$A\Delta\dot{h}_3(t) = \Delta q_3(t) - (c_{31} + c_{32})\Delta h_3(t), \tag{4.21}$$

Sea además:

$$x(t) = \begin{pmatrix} \Delta h_1(t) \\ \Delta z(t) \\ \Delta h_3(t) \end{pmatrix}, u(t) = \begin{pmatrix} \Delta q_1(t) \\ \Delta q_2(t) \\ \Delta q_3(t) \end{pmatrix}, y(t) = x(t) \tag{4.22}$$

Entonces una representación en variables de estado del sistema es la siguiente:

$$\dot{x}(t) = \underbrace{\frac{1}{A}\begin{bmatrix} 0 & -c_{12} & c_{31} \\ 0 & -2c_{12} & c_{31} - c_{32} \\ 0 & 0 & -(c_{31} + c_{32}) \end{bmatrix}}_{\mathcal{A}} x(t) + \underbrace{\frac{1}{A}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}}_{\mathcal{B}} u(t), \tag{4.23}$$

$$y(t) = \underbrace{I_3}_{\mathcal{C}} x(t). \tag{4.24}$$

$$\tag{4.25}$$

La matriz de transferencia $G(s) = \mathcal{C}(sI - \mathcal{A})^{-1}\mathcal{B}$ queda de la siguiente manera:

$$G(s) = \frac{1}{\text{den}(s)} \begin{pmatrix} g_{11}(s) & g_{12}(s) & g_{13}(s) \\ g_{21}(s) & g_{22}(s) & g_{23}(s) \\ g_{31}(s) & g_{23}(s) & g_{33}(s) \end{pmatrix} \tag{4.26}$$

Con:

$$
\begin{aligned}
\text{den}(s) &= As(As + 2c_{12})(As + c_{31} + c_{32}), && (4.27)\\
g_{11}(s) &= (As + c_{12})(As + c_{31} + c_{32}) && (4.28)\\
g_{12}(s) &= -c_{12}(As + c_{31} + c_{32}), && (4.29)\\
g_{13}(s) &= Ac_{31}s + c_{12}(c_{31} + c_{32}), && (4.30)\\
g_{21}(s) &= As(As + c_{31} + c_{32}), && (4.31)\\
g_{22}(s) &= As(As + c_{31} + c_{32}) && (4.32)\\
g_{23}(s) &= As(c_{31} - c_{32}), && (4.33)\\
g_{31}(s) &= 0, && (4.34)\\
g_{32}(s) &= 0, && (4.35)\\
g_{33}(s) &= As(As + 2c_{12}), && (4.36)\\
& && (4.37)
\end{aligned}
$$

Sistema con tres polos, $s = 0$, $s = -\frac{2c_{12}}{A}$ y $s = -\frac{c_{31}+c_{32}}{A}$, siendo el primero marginalmente inestable y los últimos estables. Como se demuestra en el capítulo 2, la diferencia de alturas $z(t)$ es una variable estable, esta característica se puede ver reflejada en la matriz de transferencia recién expuesta, ya que todos los elementos de la segunda fila de la matriz (fila que describe la dinámica de $\Delta z(t)$ con respecto de las entradas del sistema) no poseen el polo en $s = 0$. Además, al igual que los demás sistemas definidos hasta ahora, este sistema no posee ceros de transmisión, como se observa en la expresión (4.38), la matriz de Rosenbrock no presenta una caída de rango para ningún valor de s. Esto se nota rápidamente al observar que se la matriz $\mathcal{C}$ es la identidad, la matriz $\mathcal{B}$ una combinación lineal de la misma y la no existencia de paso directo, $\mathcal{D} = 0$, garantizando rango completo para cualquier valor de $s \in \mathbb{C}$.

$$R_{S3}(s) = \begin{bmatrix} -s & -\frac{c_{12}}{A} & \frac{c_{31}}{A} & \frac{1}{A} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{2c_{12}}{A} - s & \frac{c_{31}-c_{32}}{A} & \frac{1}{A} & \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{c_{31}+c_{32}}{A} - s & 0 & 0 & \frac{1}{A} \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{4.38}$$

La razón detrás de que ninguno de los tres sistemas estudiados posea ceros de transmisión es demostrable, y se debe a que $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ son invertibles y que $\mathcal{D}$ es nula. Si existe un cero, c, entonces se cumple la siguiente identidad:

$$\begin{bmatrix} x_{co}^H & y_c^H \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathcal{A} - cI & \mathcal{B} \\ \mathcal{C} & \mathcal{D} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \end{bmatrix}. \tag{4.39}$$

Donde x_{co}^H es el vector de estado de salida del cero c, e y_c es el vector de salida del cero c, hipotético en este caso, y de existir este cero, al igual que los vectores de entrada y salida de polos observados a lo largo de este trabajo, se trataría de un **vector unitario**. Una de las ecuaciones matriciales representadas en la expresión (4.39) es la siguiente:

$$x_{co}^H \mathcal{B} + y_c^H \mathcal{D} = 0, \tag{4.40}$$

Y dado que $\mathcal{D} = 0$, en adición a que, evidentemente en este caso, $\mathcal{B}$ es invertible, implica $x_{co} = 0$. Evaluando este resultado en la ecuación matricial restante en la expresión (4.39) se tiene lo siguiente:

$$\cancel{x_{co}^H(\mathcal{A} - cI)} + y_c^H \mathcal{C} = 0, \tag{4.41}$$

$$\therefore y_c = 0. \tag{4.42}$$

Conclusión que entra en conflicto con la noción de que un vector de dirección como y_c sea unitario. Esta contradicción es el paso final de esta pequeña reducción al absurdo que demuestra la no existencia de ceros de transmisión en estos sistemas. Así, las condiciones suficientes que se cumplen en los sistemas estudiados son que $(\mathcal{A}, \mathcal{B}, \mathcal{C}, 0)$ son representaciones mínimas y que tanto $\mathcal{B}$ como $\mathcal{C}$ son completamente invertibles.

Las direcciones de polos se obtienen a continuación. Los autovectores de $\mathcal{A}^H$ son:

$$x_{P_{1i}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, x_{P_{2i}} = \begin{pmatrix} 0 \\ \dfrac{c_{31} + c_{32} - 2c_{12}}{c_{31} - c_{32}} \\ 1 \end{pmatrix}, x_{P_{3i}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.43}$$

Con $P = \begin{pmatrix} P_1 & P_2 & P_3 \end{pmatrix}^T = -\frac{1}{A} \begin{pmatrix} 0 & 2c_{12} & c_{31} + c_{32} \end{pmatrix}^T$, el conjunto de polos del sistema. Así, las direcciones de entrada de los polos son:

$$u_{P_1} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, u_{P_2} = \frac{1}{\sqrt{2c^2 + 1}} \begin{pmatrix} c \\ c \\ 1 \end{pmatrix}, x_{P_3} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.44}$$

Donde $c = \frac{c_{31} + c_{32} - 2c_{12}}{c_{31} - c_{32}}$. Luego, los autovectores de $\mathcal{A}$ son:

$$x_{P_{1o}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, x_{P_{2o}} = \begin{pmatrix} \dfrac{1}{2} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, x_{P_{3o}} = \begin{pmatrix} \dfrac{c_{12} - c_{31}}{c_{31} + c_{32} - 2c_{12}} \\ \dfrac{c_{32} - c_{31}}{c_{31} + c_{32} - 2c_{12}} \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{4.45}$$

Entonces, dado que $\mathcal{C} = I$, las direcciones de salida de los polos son las siguientes:

$$y_{P_1} = \frac{x_{P_{1o}}}{||x_{P_{1o}}||}, y_{P_2} = \frac{x_{P_{2o}}}{||x_{P_{2o}}||}, y_{P_3} = \frac{x_{P_{3o}}}{||x_{P_{3o}}||}, \tag{4.46}$$

Es posible concluir, a partir de estas direcciones, que el estado ocasionado por el polo $s = 0$ evoluciona de la misma manera ante los caudales de entrada del sistema,

pero en el caso de $q_2(t)$, su influencia es inversa, lo cual es de esperar dada su actuación inversa en relación a los demás flujos. La evolución de este estado afecta solamente a $h_1(t)$. Luego, el estado relativo al polo $s = -2\frac{c_{12}}{A}$, es afectado en igual medida por los caudales $q_1(t)$ y $q_2(t)$, afectado directamente por el punto de equilibrio que se escoja. Este estado afecta a la evolución de la diferencia de altura, $z(t)$, en doble medida que a $h_1(t)$, sin afectar a $h_3(t)$. Finalmente $q_3(t)$ es la única entrada que afecta a la evolución del estado ocasionado por $s = -\frac{c_{31}+c_{32}}{A}$, pero ésta, a su vez, afecta en diferentes medidas a todas las salidas del sistema.

4.1.1. Identificación de Parámetros

En este sistema se poseen tres parámetros a determinar, k_{12} y k_{31} y k_{32}. Se realizan experimentos similares a los dos antes expuestos en capítulos anteriores, el primero es para determinar k_{12} y es exactamente igual al experimento del capítulo 2 y tiene las siguientes consideraciones.

- Vaciar el Estanque 2 y 3.
- Apagar todas las bombas de agua del sistema.
- Colocar inicialmente el Estanque 1 con todos sus orificios tapados y llenarlo a cierta altura $h_1(0) = h_1^0$.
- Cronometrar el tiempo que demora en igualarse las alturas del estanque 1 y 2 al destapar la interconexión entre ambos.

Para determinar k_{31} y k_{32} se hacen experimentos análogos que van de la siguiente manera:

- Vaciar el Estanque 1 y 2.
- Apagar todas las bombas de agua del sistema.

- Colocar inicialmente el Estanque 3 con todos sus orificios y mangueras tapadas y llenarlo a cierta altura $h_3(t_0)$.

- Destapar la manguera que conecta al estanque 3 con el estanque 1 (2) en pro de estimar k_{31} (k_{32}) como se indica en la expresión (4.47) (expresión (4.49) y medir el tiempo t_f que demora el caudal q_{31} (q_{32}) en parar y medir la altura inicial y final del estanque 3.

Con estas condiciones es posible llevar las ecuaciones diferenciales del sistema a:

$$A\frac{d}{dt}h_3(t) = -k_{31}\sqrt{h_3(t)}, \tag{4.47}$$

$$\therefore k_{31} = 2A\frac{\sqrt{h_3(t_{0exp1})} - \sqrt{h_3(t_{fexp1})}}{t_{fexp1} - t_{0exp1}}, \tag{4.48}$$

$$A\frac{d}{dt}h_3(t) = -k_{32}\sqrt{h_3(t)}, \tag{4.49}$$

$$\therefore k_{32} = 2A\frac{\sqrt{h_3(t_{0exp2})} - \sqrt{h_3(t_{fexp2})}}{t_{fexp2} - t_{0exp2}}, \tag{4.50}$$

Así, se determinan todas las constantes de traspaso de agua del sistema y se reúnen en la tabla (4.1).

Tab. 4.1: Constantes del Sistema 3.

Ctes. Traspaso	$[\text{cm}^{2.5}/s]$	Ctes. Sist. Lineal	$[\text{cm}^2/s]$
k_{12}	3.67	c_{12}	0.581
k_{31}	2.88	c_{31}	0.263
k_{32}	4.68	c_{32}	0.427

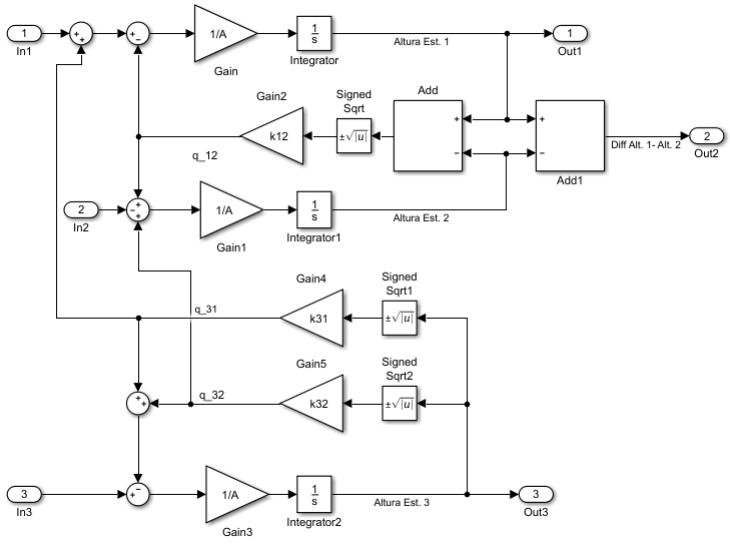


Fig. 4.2: Esquema del sistema en diagrama de bloques Simulink.

4.2. Simulaciones

4.2.1. Planta

Comportamiento del Sistema No Lineal

- Las alturas iniciales del sistema son: $h_1(0) = 10$[cm], $h_3(0) = 5$[cm] y $h_2(0) = 5$[cm], por lo tanto $z(0) = 5$,
- Se mantiene un comportamiento sin excitaciones a las entradas del sistema durante $t \in [0; 100[$[s],
- Luego los caudales $q_1(t)$ y $q_2(t)$ toman el valor de 10[cm^3/s] durante el intervalo $t \in [100; 400[$[s],
- Se termina la simulación llevando al sistema a una entrada de equilibrio u_q de tal manera que en, asumiendo un control de éste, llevaría a las salidas a y_q. Se

mantiene este comportamiento en el intervalo $t \in [400; 800]$[s]:

$$\begin{pmatrix} y_q & u_q \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 20[\text{cm}] & 5.17[\text{cm}^3/\text{s}] \\ 10[\text{cm}] & 22.1[\text{cm}^3/\text{s}] \\ 5[\text{cm}] & 16.9[\text{cm}^3/\text{s}] \end{pmatrix}. \tag{4.51}$$

Así, la descrita simulación se presenta en la figura (4.3).

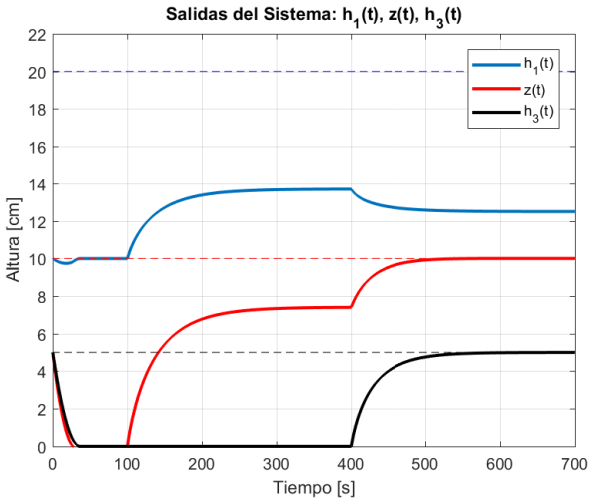


Fig. 4.3: Simulación del Sistema 3, Modelo no Lineal.

Inicialmente podemos observar como las alturas del estanque 1 y 2 se igualan en 10[cm], observándose $z(t) = 0$, así como también se observa el vaciado completo del estanque 3. Luego, $q_1(t) = q_2(t) \forall t \in [100; 400[$[s], por lo tanto se espera que las alturas del estanque 1 y 2 se estabilicen en algún punto, ilustrando que con el estanque 3 vacío y sin excitaciones se tiene el sistema 1 descrito en el capítulo 2. Finalmente se trata de llevar al sistema a un punto de equilibrio que solamente alcanza parcialmente, alcanzado por $z(t)$ y $h_3(t)$, $h_1(t)$ no es capaz de alcanzarlo dado que el comportamiento transiente que ocurre durante la simulación no lo permite.

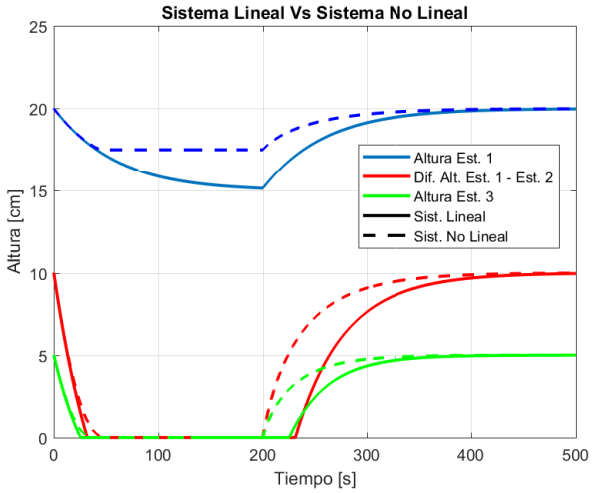


Fig. 4.4: Sistema 3, Comparación Modelo Lineal vs. No Lineal.

Comportamiento del Sistema Lineal vs. No Lineal

Con el mismo punto de equilibrio (u_q, y_q) definido anteriormente, y condiciones iniciales $y(0) = y_q$, se lleva a cabo la comparación de ambos modelos en la figura (4.4), notando que la aproximación es bastante cercana en estado estacionario. Pese a las similitudes vale destacar que hay una notable diferencia en los comportamientos transientes del sistema.

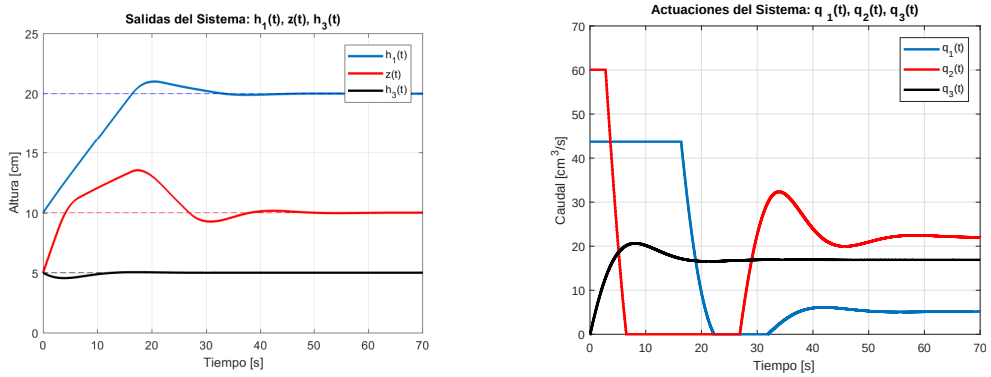
4.2.2. Controladores

Nuevamente se presentan dos tipos de controladores para un sistema de estanques.

Control PI Descentralizado

Con el enfoque descentralizado para sintonizar un PI a base del comando de MATLAB, `pidtune`, se sintoniza el controlador $C_{DC}(s)$ en la expresión (4.52). El controlador busca acelerar los transientes del sistema a aproximadamente 20 segundos, no logrando este objetivo por las saturaciones del sistema.

$$C_{DC}(s) = \begin{bmatrix} 21.27 + \dfrac{5.181}{s} & 0 & 0 \\ 0 & 20.97 + \dfrac{5.379}{s} & 0 \\ 0 & 0 & 20.71 + \dfrac{5.563}{s} \end{bmatrix} \tag{4.52}$$



(a) Alturas siguiendo la referencia propuesta. *(b)* Actuaciones del Sistema.

Fig. 4.5: Sistema 3. Señales de interés del lazo de control descentralizado.

El lazo de control acelera sus comportamientos transientes, a pesar de las notables saturaciones.

Control PI con Acercamiento LQR

Con la extensión de estados propuesta se redefine un estado extendido $x_{Ext}(t)$ como los errores e integrales de éstos:

$$x_{Ext}(t) = \begin{bmatrix} \int_{0+}^{t} e(\tau)d\tau \\ e(t) \end{bmatrix}, \tag{4.53}$$

Teniéndose la siguiente representación en variables de estado $(\mathcal{A}_{Ext}, \mathcal{B}_{Ext}, \mathcal{C}_{Ext}, 0)$ estructuradas de la misma manera que en capítulos anteriores:

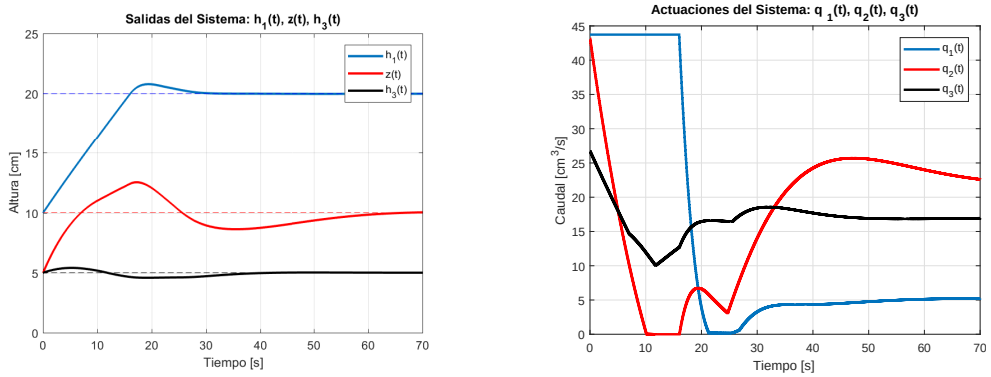
$$\dot{x}_{Ext}(t) = \mathcal{A}_{Ext}x_{Ext}(t) + \mathcal{B}_{Ext}u(t), \tag{4.54}$$

$$y(t) = \mathcal{C}_{Ext}x_{Ext}(t), \tag{4.55}$$

Se observa que el rango de la matriz de controlabilidad correspondiente es igual a 6, por lo tanto los seis estados son controlables. Las matrices de peso son $Q = \text{diag}\{\begin{bmatrix}10 & 1 & 1 & 10 & 1 & 1\end{bmatrix}\}$ y $R = \text{diag}\{\begin{bmatrix}1 & 10 & 1\end{bmatrix}\}$ para evitar que la bomba 2 absorba aire ante un estanque 2 vacío en los instantes iniciales del sistema, y además se trata de minimizar la energía del error en la altura 1 y su integral. Así, el controlador mediante el método de sintonización de PI's mediante LQR se muestra a continuación:

$$C_{LQR}(s) = \begin{bmatrix} 29.57 + \dfrac{6.834}{s} & 1.08 + \dfrac{0.5737}{s} & 0.4592 - \dfrac{0.02969}{s} \\ -8.515 - \dfrac{0.5677}{s} & 8.623 + \dfrac{0.68}{s} & -0.2213 + \dfrac{0.0736}{s} \\ -2.213 - \dfrac{0.2174}{s} & -2.213 - \dfrac{0.2174}{s} & 15.31 + \dfrac{2.224}{s} \end{bmatrix}. \tag{4.56}$$

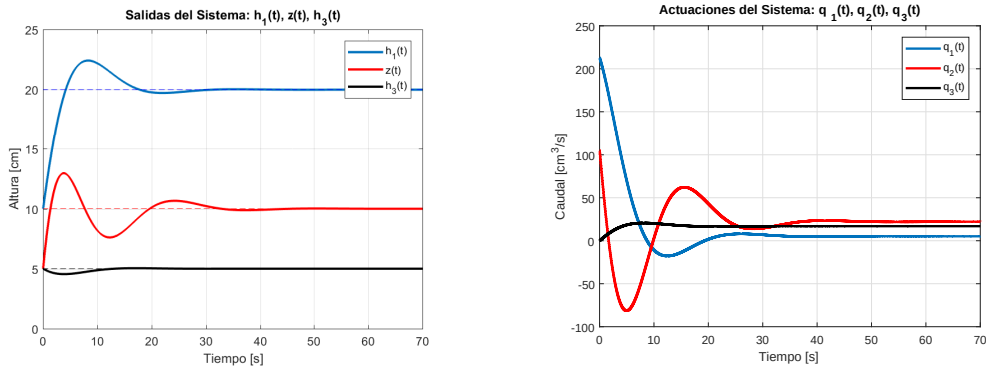
Así, en las figuras (4.6a)-(4.6b) se observan las señales de interés para este controlador.



(a) Alturas siguiendo la referencia propuesta. *(b)* Actuaciones del Sistema.

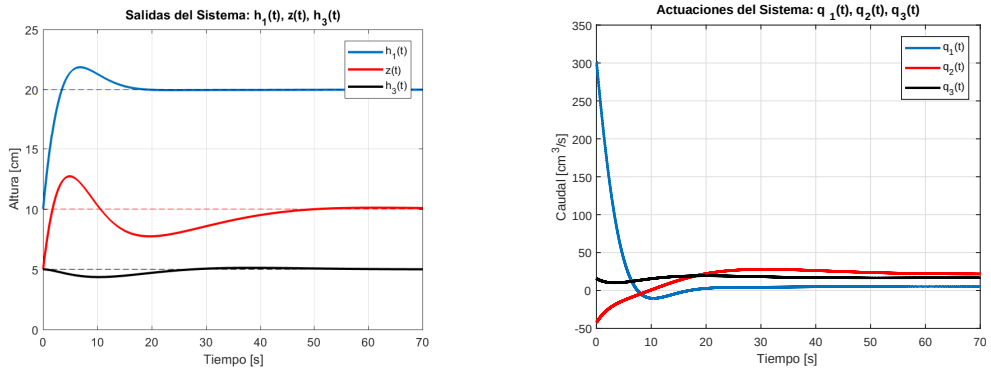
Fig. 4.6: Sistema 3. Señales de interés del lazo de control PI mediante LQR.

Inicialmente se observa un comportamiento bastante más lento que el controlador descentralizado, pero las simulaciones de ambos controladores incluyen la saturación de las actuaciones y la corrección mediante el algoritmo de desenrollamiento descrito en la figura (2.9). Esto entorpece bastante la comparación teórica de ambos controladores, por lo tanto se presentan los controladores funcionando con actuaciones ideales.



(a) Alturas siguiendo la referencia propuesta. *(b)* Actuaciones del Sistema.

Fig. 4.7: Sistema 3. Señales de interés del lazo de control descentralizado sin saturaciones.



(a) Alturas siguiendo la referencia propuesta. *(b)* Actuaciones del Sistema.

Fig. 4.8: Sistema 3. Señales de interés del lazo de control PI mediante LQR sin saturaciones.

Con estas últimas simulaciones sí es posible realizar una mejor comparación de los controladores. El controlador $C_{DC}(s)$ provee transientes más rápidos, pero $C_{LQR}(s)$ presenta una clara utilización inferior de caudales de agua para seguir la referencia.

4.3. Resultados Experimentales

Se diseñaron dos experimentos para la evaluación de controladores:

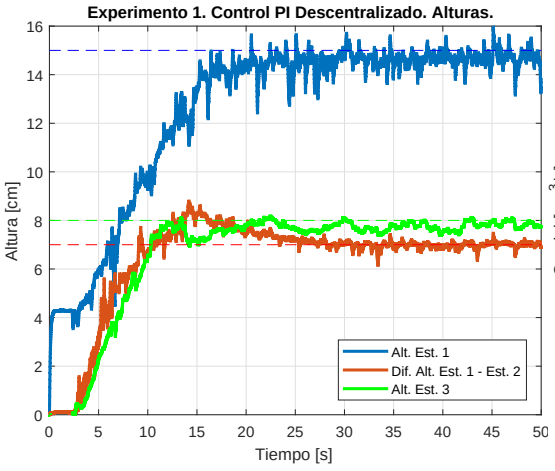
1. Los estanques 1 y 2 se encuentran a una altura inicial $h_1(0) = h_2(0) = 4$[cm], por lo tanto $z(0) = 0$. El estanque 3 se encuentra inicialmente vacío, $h_3(0) = 0$. Sistema solamente debe seguir a la referencia $r(t) = \begin{bmatrix} 15 & 7 & 8 \end{bmatrix}^T$ [cm].

2. Mismas condiciones iniciales y referencia que en el experimento 1, pero cuando ambos controladores terminen su transiente se aplican perturbaciones, 200[cm^3] de agua al estanque 2 y 3. Cuando el controlador supere estas perturbaciones se cambia la referencia a $r(t) = \begin{bmatrix} 15 & 10 & 11 \end{bmatrix}^T$ [cm].

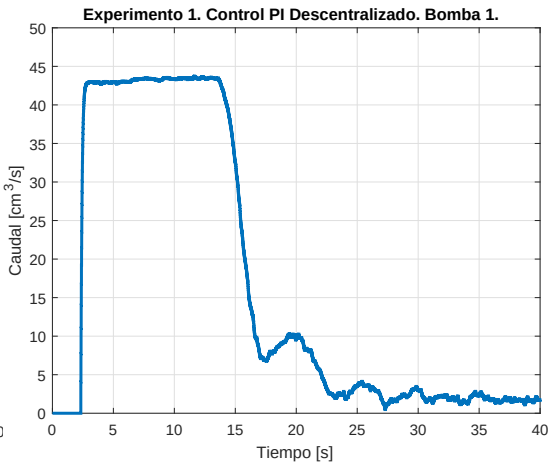
4.3.1. Control PI Descentralizado

Experimento 1

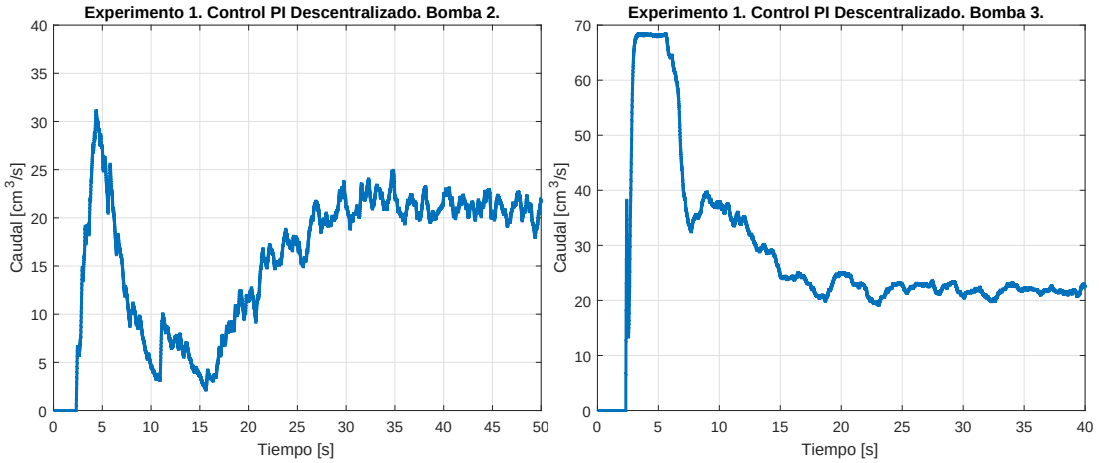
Así, el primer experimento queda ilustrado en las figuras (4.9a)-(4.10b). Se observa un controlador que acelera bastante las respuestas del sistema.



(a) Experimento 1. Controlador PI Descentralizado. Salidas del sistema.



(b) Experimento 1. Controlador PI Descentralizado. Bomba 1.



(a) Experimento 1. Controlador PI Descentralizado. Bomba 2.

(b) Experimento 1. Controlador PI Descentralizado. Bomba 3.

Es interesante un problema que se observó durante este experimento, cuyo comportamiento es muy similar a un punto de equilibrio mal localizado. La razón principal por la cual ocurre el problema a describir es la asignación como salida del sistema a la diferencia $z(t)$. Supóngase, un caso hipotético como el descrito en la siguiente figura:

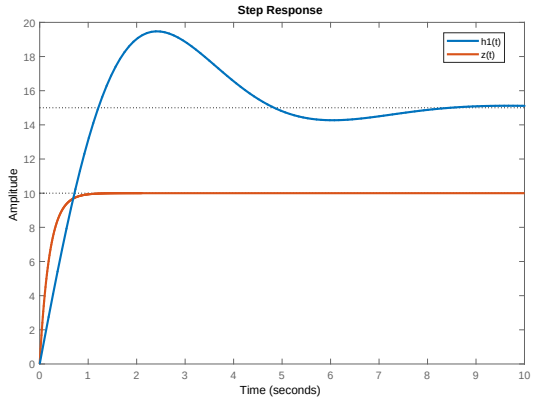


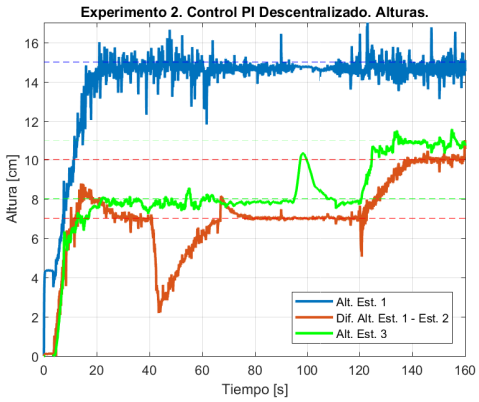
Fig. 4.11: Respuesta a escalón hipotética.

Supongamos que en la realidad, este comportamiento es cierto hasta al menos $t = 4$[s]. Si $z(t)$ converge a 10[cm] entonces el estanque 2 tiene una altura de 5[cm]. Si $z(t)$ se estabiliza antes que $h_1(t)$ quiere decir que $h_2(t)$ sigue evolucionando en compromiso con $h_1(t)$ para controlar la diferencia. Así, $h_2(2.5[s]) = 10$[cm], en

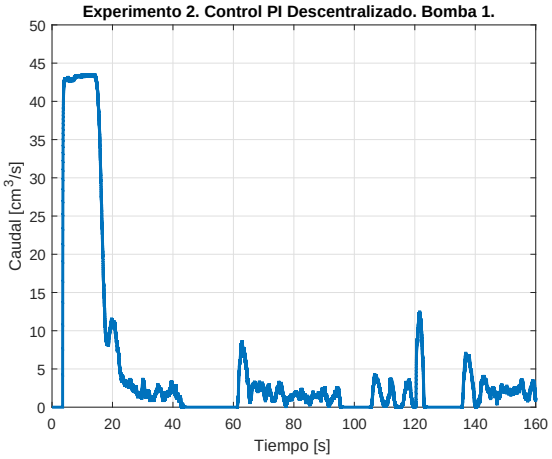
un instante de tiempo donde $z(t)$ ya superó su comportamiento transiente. Entonces $q_{12}(t)$ está constantemente variando, y puede suceder que en algún instante de tiempo, con el *overshoot* en $h_1(t)$ y $z(t)$ constante, ocurra que $q_{12}(t) < q_{31}(t)$ y por lo tanto $q_1(t) = 0$ en al menos un instante. Pero ese único instante marca el comienzo de un comportamiento que no se reparará. Si $q_{12}(t) < q_{31}(t)$, $h_1(t)$ aumentará indefinidamente, y dado que $z(t)$ ya convergió, $h_2(t)$ también aumenta indefinidamente, entonces el sistema está en una inestabilidad. Esta situación, que se admite es poco frecuente y compleja de describir, sucedió, tal y como se explica. Esta inestabilidad no es, solamente, producida por el punto de equilibrio, ya que en dos experimentos con la misma referencia, el controlador logra en uno de estos seguirla. Se debe a un compromiso de la referencia con las condiciones iniciales del sistema, y la influencia de éstos en el tiempo de asentamiento de cada salida.

Experimento 2

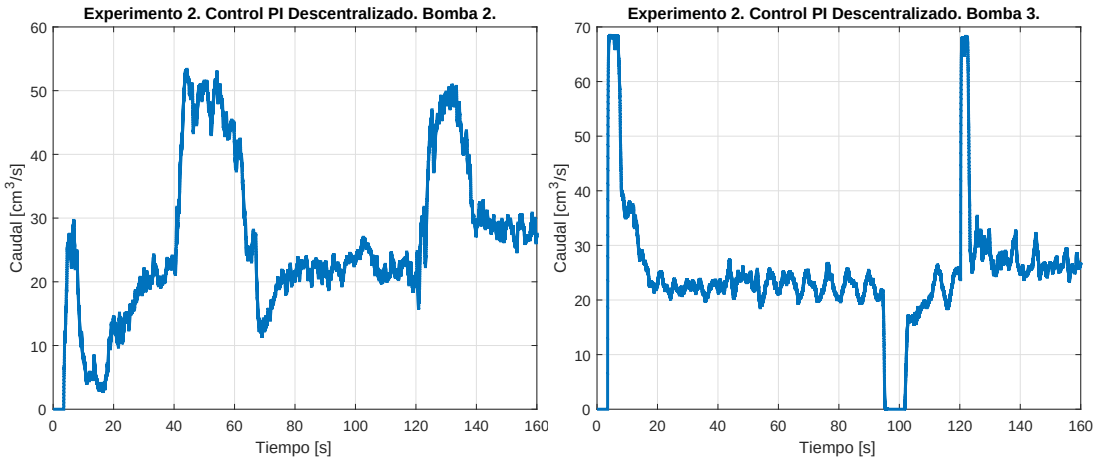
Los resultados del experimento 2 se presentan a continuación.



(a) Experimento 2. Controlador PI Descentralizado. Salidas del sistema.



(b) Experimento 2. Controlador PI Descentralizado. Bomba 1.



(a) Experimento 2. Controlador PI Descentralizado. Bomba 2.

(b) Experimento 2. Controlador PI Descentralizado. Bomba 3.

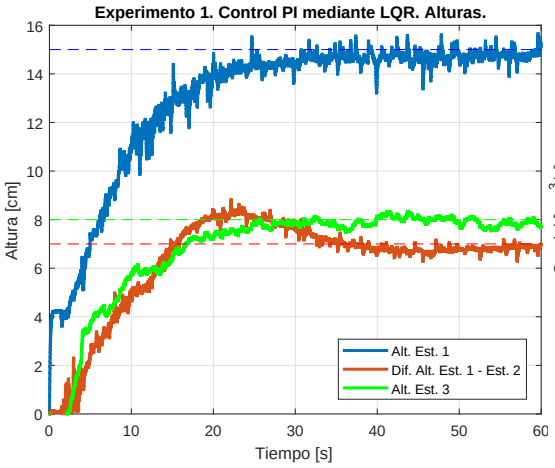
4.3.2. Control PI con Acercamiento LQR

Previo a presentar los resultados de los experimentos del controlador $C_{LQR}(s)$ es necesario aclarar que se realiza un pequeño cambio en éste. Programar un mecanismo de antienrrollamiento a un controlador MIMO en el PLC utilizado resulta imposible dada la incapacidad del mismo a la hora de transformar direcciones de memoria a formatos necesarios en tiempo real. El cambio consiste en anular la parte integrativa de cada elemento de $C_{LQR}(s)$ que no se encuentre en la diagonal. Así, con este cambio, esta versión simplificada no se desenrolla como debiese hacer un controlador MIMO pero el fenómeno de enrollamiento se ve bastante disminuido. Se realizó una prueba similar que al controlador $C_{LQR_A}(s)$ del capítulo anterior, y la respuesta del controlador es muy similar que la ya observada en las figuras (4.6a)-(4.6b).

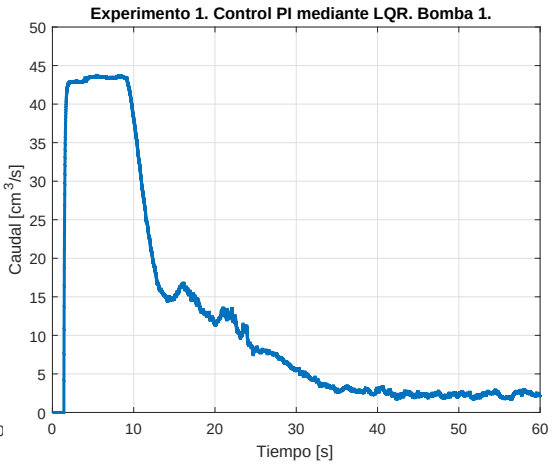
$$C_{LQR_s} = \begin{bmatrix} 29.57 + \dfrac{6.834}{s} & 1.08 & 0.4592 \\ -8.515 & 8.623 + \dfrac{0.68}{s} & -0.2213 \\ -2.213 & -2.213 & 15.31 + \dfrac{2.224}{s} \end{bmatrix}. \tag{4.57}$$

Experimento 1

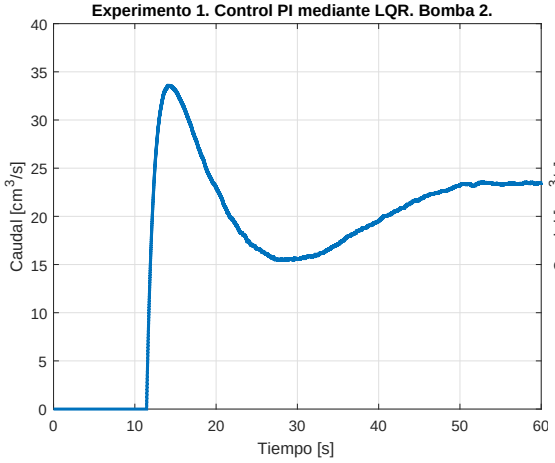
Entonces, los resultados para C_{LQR_s} se presentan en las siguientes figuras.



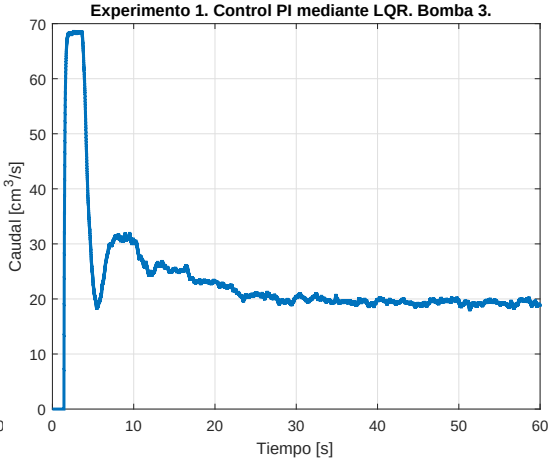
(a) Experimento 1. Controlador PI con Acercamiento LQR. Salidas del sistema.



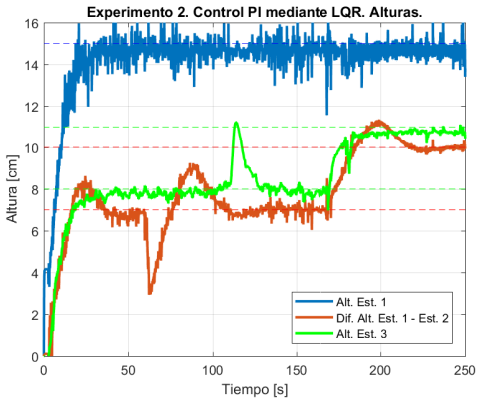
(b) Experimento 1. Controlador PI con Acercamiento LQR. Bomba 1.



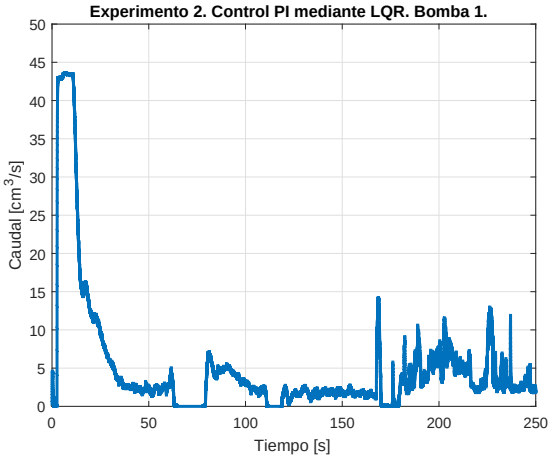
(a) Experimento 1. Controlador PI con Acercamiento LQR. Bomba 2.



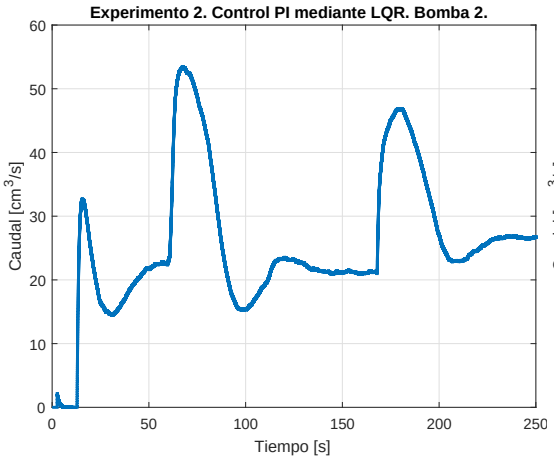
(b) Experimento 1. Controlador PI con Acercamiento LQR. Bomba 3.



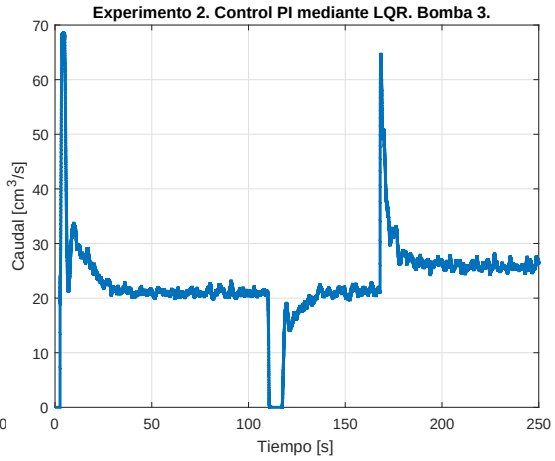
(a) Experimento 2. Controlador PI con Acercamiento LQR. Salidas del sistema.



(b) Experimento 2. Controlador PI con Acercamiento LQR. Bomba 1.



(a) Experimento 2. Controlador PI con Acercamiento LQR. Bomba 2.



(b) Experimento 2. Controlador PI con Acercamiento LQR. Bomba 3.

4.3.3. Comparación de Resultados

Inicialmente se puede decir que ambos controladores funcionan, son robustos ante perturbaciones y cambio de referencias dentro de los rangos admisibles del punto de operación. Pero también está el hecho de que la alternativa descentralizada $C_{DC}(s)$ es más rápida que su contraparte centralizada $C_{LQR}(s)$. Como se vio en simulaciones, es un controlador cuyo enrollamiento es difícil de reparar, más aún en un entorno con

opciones de programación limitada como lo es un PLC de prestaciones estándares. A continuación se presenta el error cuadrático medio y actuación cuadrática media de ambos controladores en el experimento 1. Los resultados del controlador $C_{DC}(s)$ son durante el intervalo $t \in [0; 40]$[s] y el de $C_{LQR}(s)$ en $t \in [0; 60]$[s], estos son los tiempos en que cada controlador estabiliza a la planta.

Tab. 4.2: Sistema 3. Funcionales de desempeño para cada controlador.

Controlador	$\bar{e}[\text{cm}^2]$	$\bar{u}\left[\frac{\text{cm}^3}{\text{s}}\right]^2$
PI Descentralizado	43.93	2016.5
PI con LQR	28.13	1398.7

Para concluir, $C_{LQR}(s)$ alcanza menores errores y menores actuaciones que $C_{DC}(s)$, logrando corroborar que es un controlador con mejores resultados a largo plazo y mejor utilización de energía.

5. CAPÍTULO 5
CONCLUSIONES

En este proyecto de título se logró implementar un sistema de estanques acoplados modular, donde se puede configurar el número de estanques, desde uno a tres, y la posición relativa de cada uno de éstos. Además es posible cambiar con facilidad sus actuadores, bombas, y sensores de presión por alguna otra manera de medición de altura. Así, se presentan tres sistemas de estanques diferentes y dos controladores PI con diferentes estructuras y método de sintonización para cada uno de los sistemas.

Para controlar los tres sistemas se utilizan dos métodos, el primero un enfoque de control descentralizado para sintonizar PI's, utilizado ampliamente en la industria, por ejemplo en control de altura de agua, control de convertidores eléctricos y motores de corriente continua y variadores de frecuencia. Todos estos sistemas suelen controlarse como si fueran plantas SISO, aprovechándose que la interacción entre sus entradas y salidas muchas veces no es importante. Pero en el presente se evalúa qué sucede si se implementa un controlador centralizado para controlar una planta MIMO. Se observa en los tres sistemas una importante mejoría en la utilización de los actuadores y una mejoría, leve en algunos casos, en el error medio del seguimiento a referencias.

Un punto importante sobre el control centralizado es que se sintoniza mediante LQR, un algoritmo de control óptimo donde se minimizó la energía en los estados, enfocándose además en proveer al sistema de actuaciones vigorosas y acelerar lo más posible las repuestas del sistema, dentro de un régimen de minimización de costos.

La fijación particular en sintonizar controladores PI, incluso con métodos de control óptimo, se debe a las limitaciones de trabajar con PLC's, que trabajan con pro-

gramación *ladder*, en otras palabras, programación de bajo nivel, programándose directamente operaciones a bits, direcciones de memoria, *relays*, y como característica especial, la escritura de datos analógicos mediante bloques PID. De esta manera, pensar en la utilización de controladores óptimos, como aplicaciones directas de LQR, u otros métodos se ven impedidas por no poder realizar operaciones de relativa simpleza como multiplicación en tiempo real de matrices o programación de observadores, etc.

Las dificultades recién descritas se eludieron manteniendo los controladores con la estructura PI. Lamentablemente la programación de un correcto sistema de antienrollamiento resulta engorrosa y compleja debido al uso de diferentes tipos de direcciones de memoria y la capacidad del PLC para realizar las correspondientes transformaciones. Pese a esto los experimentos realizados dieron resultados positivos e ilustrativos del sistema entregado.

5.1. Trabajo Futuro

Al finalizar este proyecto de título quedan varias mejoras al sistema de estanques por realizar, entre ellas se destacan:

- Rediseñar el estructurado general del sistema físico de estanques, lo que implica volver a comprar planchas de acrílico, utilizando conectores hidráulicos. Si bien el sistema presentado es funcional y práctico en varios aspectos, lográndose el objetivo de modularidad, no deja de ser una alternativa de diseño simple y con bastante por mejorar,

- Ordenar y proteger de posibles fugas de agua todo el conexionado el eléctrico, sean borneras, sensores, bombas, etc. Para esto se necesitan algunas carcasas y protecciones hechas de algún tipo de polímero,

- Continuar investigando nuevos métodos de sintonización de PID's MIMO en pro de seguir intentando de dar enfoques óptimos en el control mediante PLC's,

- Pero también, investigar la inclusión de otro dispositivo para generar señales de control, cuya programación y características faciliten la implementación de métodos de control, incentivando el uso de potenciales investigaciones en el sistema de estanques acoplados.

6. CAPÍTULO 6
APÉNDICE

6.1. Estanques (IDP)

Los estanques de acrílico diseñados por IDP del sistema se presentan en la figura (6.1). Se construyen tres estanques, cada uno tiene una altura graduada de 30[cm] y una base cuadrada de 10[cm] de lado, por ende 100[cm^2] de superficie y por lo tanto un volumen de operación de 3[l]. Para incentivar diferentes posibilidades de dinámicas físicas se colocan varios conectores de neumática (pero con fines hidráulicos) para conectar de variadas maneras a los estanques entre sí. El diseño entonces es bastante ambicioso con ocho conectores a altura basal, seis a 15[cm] de altura y cuatro en tope del estanque. En los cuadrados de acrílico exteriores ubicados en la base y el techo de cada estanque hay pequeños orificios para atornillar estos estanques uno encima de otro en pro de nuevamente darle una dinámica adicional a potenciales sistemas de estanques acoplados.

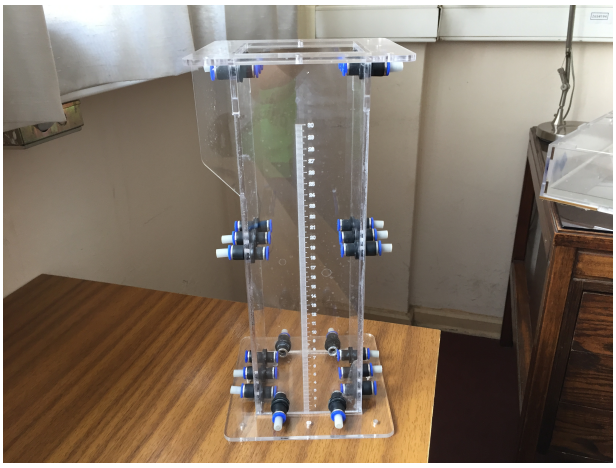


Fig. 6.1: Estanque tipo del sistema.

El conector utilizado es un conector tipo tubo para circuitos neumáticos. En particular, es de diámetro dual, teniéndose en un extremo acceso para mangueras de 8[mm] de diámetro exterior y 6[mm] en el otro, siendo este último el tamaño de mangueras utilizado, quedando el primero en el interior del estanque.



Fig. 6.2: Conector del sistema de estanques inicial.

Tanto los estanques como los conectores presentan problemas de filtración, al igual que el recipiente. Los estanques filtran agua en las juntas de sus paredes y los conectores lo hacen cuando la columna de agua supera cierta altura, alcanzando una presión crítica. La filtración en los conectores se deben, probablemente, a que son conectores para flujo de aire, no de líquidos; mientras que las filtraciones de los estanques se deben a un mal uso de silicona en las junturas.

6.1.1. Recipiente (IDP)

Para almacenar el volumen total de agua del sistema, se tiene una base recipiente de agua. Se expone en la siguiente figura.

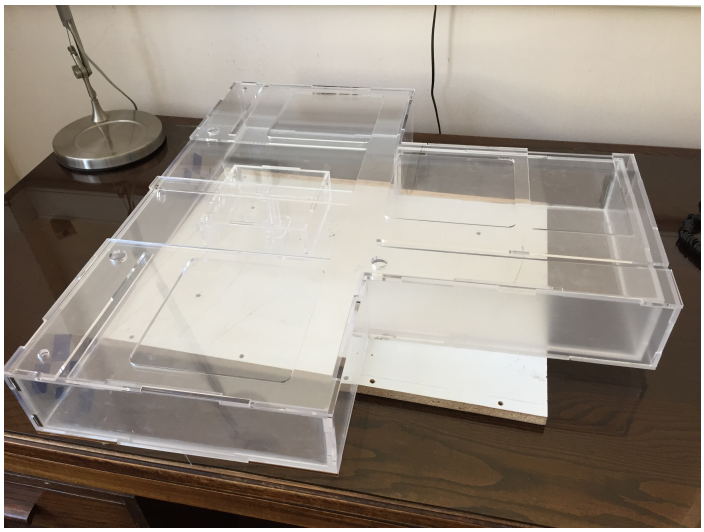


Fig. 6.3: Recipiente base del sistema.

Este recipiente en forma de "T" consta de paredes de acrílico y un primer techo removible para evitar rebalses y un segundo, con muescas capacitadas para sostener a los tres estanques de agua diseñados por IDP. Cada estanque se mantiene firme gracias a las muescas del techo del recipiente, necesitándose una fuerza importante para derribarlo, siendo entonces un sistema físicamente robusto. Su volumen es cercano a 22[l], cantidad suficiente para llenar los estanques del diseño de IDP acoplados con holgura.

Un problema inicial en este diseño son los techos del recipiente, pues sufren deformaciones importantes por alguna razón desconocida a quien escribe. Se piensa que al quedar con líquido en el interior del recipiente y éste a su vez evaporarse, naturalmente ocasionó una presión de larga duración que curvó al primer techo, quedando cóncavo, y por ende, dejando de calzar en el recipiente. El problema principal que hizo inutilizable este recipiente, sin embargo, es una cantidad importante de filtraciones en varios puntos de la base, liberando el agua. Si bien, fue aparentemente reparada por

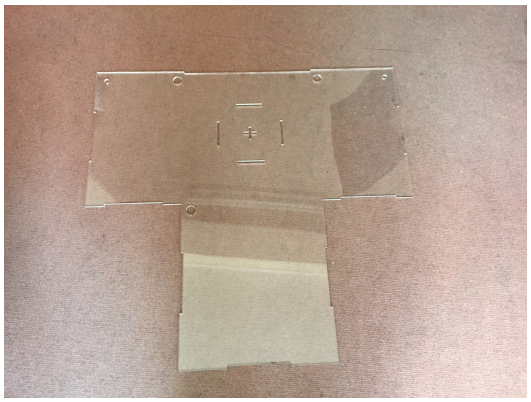


Fig. 6.4: Primer techo del recipiente.

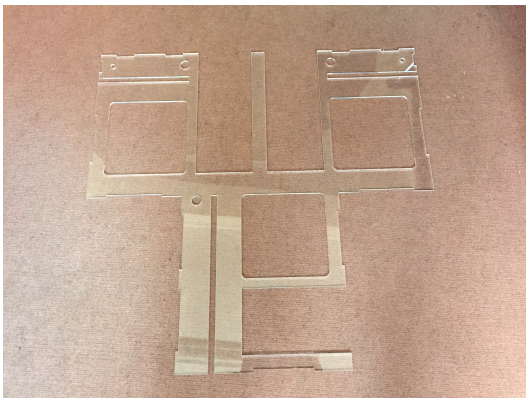


Fig. 6.5: Segundo techo del recipiente.

IDP, no se realizaron pruebas que constaten esto ya que la solución independiente ya se hallaba implementada.

Bibliografía

[1] GOODWIN, G. C., GRAEBE, S.F., SALGADO M. E. Control System Design. Prentice Hall, New Jersey, 2001.

[2] JOHANSSON, K. H. The Quadruple-Tank Process: A Multivariable Laboratory Process with an Adjustable Zero. IEEE Transactions on Control Systems Technology, Vol. 8, No. 3, May 2000.

[3] HE, JB., WANG, QG., LEE, TH. PI/PID controller tuning via LQR approach. Chemical Engineering Science 55 (2000) 2429-2439.

[4] KUMAR, V., JEROME, J. LQR based optimal tuning of PID controller for trajectory tracking of Magnetic Levitation System. Procedia Engineering 64 (2013) 254 – 264.

[5] YU, G., HWANG R. Optimal PID Speed Control of Brushless DC Motors Using LQR Approach. 2004 IEEE International Conference on Systems, Man and Cybernetics.

[6] MARCOPOLI, V., PHILLIPS S. Antiwindup Analysis and Design Approaches for MIMO Systems. NASA Contractor Report 195304, April 1994.