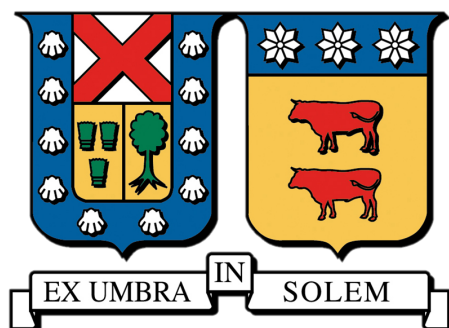




UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS

LINEALIZACIÓN FUNCIONES DE COSTOS DE COMBUSTIBLE
MEDIANTE APROXIMACIÓN LINEAL POR TRAMOS EN UN
PROBLEMA DE UNIT COMMITMENT

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

AUTOR

JAVIER PEÑA CASAS-CORDERO

PROFESOR GUÍA

RODRIGO MENA BUSTOS

PROFESOR CO-REFERENTE

ESTEBAN SALGADO VALENZUELA

SANTIAGO DE CHILE, 2025



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título; ☐ Tesis de Postgrado;

Título del trabajo: Linealización funciones de costos de combustible mediante aproximación lineal por tramos en un problema de unit commitment

Nombre del candidato(a): Javier Peña Casas-Cordero

Carrera / Grado: Ingeniería Civil Industrial

Campus: Santiago Vitacura ; **Departamento:** Industrias

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Rodrigo Mena Bustos, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL

☒ El trabajo **NO contiene información que amerite confidencialidad** y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (embargo) por:

☐ 6 meses; ☐ 12 meses; ☐ 2 años; ☐ 3 años; ☐ 5 años; ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 17-06-2025

; Firma:

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 17-06-2025

; Firma:

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

Resumen

Este trabajo aborda el problema de Unit Commitment (UC) en sistemas eléctricos modernos, con un enfoque en la optimización de costos operativos y la integración eficiente de energías renovables. El UC es una herramienta crucial en la operación de sistemas eléctricos, cuyo objetivo es determinar la programación óptima de encendido y apagado de unidades generadoras para satisfacer la demanda de energía de manera económica y confiable. La creciente penetración de energías renovables, como la eólica y solar, ha añadido una mayor complejidad al UC, debido a su naturaleza intermitente y dependiente de factores climáticos.

El estudio se centra en la linealización de las funciones de costos de combustible, que tradicionalmente se modelan de forma cuadrática, para convertir el problema de UC en un modelo más manejable computacionalmente, utilizando Programación Lineal Entera Mixta (MILP). El objetivo general es desarrollar un modelo de UC con las funciones de costos linealizadas mediante la técnica de Piecewise Upper Linear Approximation (PUA), que permite aproximar las funciones cuadráticas originales mediante segmentos lineales. Los objetivos específicos incluyen investigar y modelar el problema de UC, implementar el modelo en Python usando Pyomo, y comparar la precisión y la reducción de tiempo de cómputo a medida que se aumenta el número de tramos.

El UC es un problema de optimización entero mixto que implica decisiones binarias (encendido/apagado de unidades) y variables continuas (potencia generada). Las funciones de costos cuadráticas han sido preferidas en la formulación tradicional por su capacidad para capturar de manera realista la relación no lineal entre la potencia generada y el consumo de combustible. Sin embargo, estas funciones incrementan la complejidad computacional, convirtiendo el UC en un problema de Programación Cuadrática Entera Mixta (MIQP), lo que lo hace más costoso y difícil

de resolver. Para abordar esta limitación, la linealización por tramos transforma el problema en un modelo de MILP, que es más tratable computacionalmente.

El modelo de UC propuesto emplea la técnica de PUA para las funciones de costos de combustible, dividiendo el rango de generación en segmentos lineales. Se definen condiciones de linealización para asegurar que la aproximación represente adecuadamente la función cuadrática original. El modelo fue implementado en el sistema de prueba IEEE-39, que incluye 29 nodos y 10 unidades generadoras, utilizando el solver Gurobi Optimizer. Se realizaron pruebas con diferentes configuraciones de tramos (2, 4, 6, 8 y 10) para analizar el impacto en la precisión de la solución y el tiempo de cómputo.

Los resultados muestran que la técnica de PUA es efectiva para reducir la complejidad computacional del UC, permitiendo una resolución más rápida y eficiente. A medida que se incrementa el número de tramos, la precisión de la aproximación mejora, aunque también aumenta el tiempo de cómputo. Se encontró que el modelo con 6 tramos ofrece un equilibrio adecuado entre precisión y eficiencia, con errores porcentuales mínimos en la estimación de costos totales y específicos (combustible, O&M, emisiones de CO₂, rampa). Además, los resultados muestran que el programa óptimo de encendido y apagado es robusto, ya que las decisiones operativas son consistentes entre los diferentes modelos de linealización.

El estudio concluye que la técnica de PUA es una solución práctica y eficiente para optimizar el UC en sistemas eléctricos con alta penetración de energías renovables. La linealización por tramos permite reducir los tiempos de cómputo de manera significativa y facilita la incorporación de múltiples escenarios y restricciones adicionales sin comprometer de forma considerable la precisión de las soluciones obtenidas.

Tabla de Contenidos

1. Introducción	6
2. Objetivos	10
2.1. Objetivo General	10
2.2. Objetivos Específicos	10
3. Marco Teórico	11
3.1. Unit Commitment(UC)	11
3.1.1. Importancia del UC en la Operación del Sistema Eléctrico	13
3.1.2. Formulación Clásica	14
3.1.3. Complejidad Computacional y Métodos de Solución	14
3.1.4. Hacia un UC Dinámico, Flexible y Sostenible	15
3.1.5. Desafíos en sistemas con alta penetración de energías renovables	18
3.2. Aspectos Computacionales y Comparación entre MILP y MIQP en UC	19
3.3. Tipos de Linealización	22
3.3.1. Aproximación lineal superior por tramos (Piecewise Upper Linearization)	22
3.3.2. Series de Taylor	23
3.3.3. Aproximación Lineal Inferior por Tramos	25
3.3.4. Método de particiones más precisas	26
3.3.5. Razones para Elegir la Linealización por Tramos Superior (Piecewise Upper Approximation)	28
3.4. Pyomo y su aplicación en MILP para UC	29

3.4.1. Solvers de Optimización en Pyomo	31
4. Metodología	36
4.1. Modelo UC	36
4.1.1. Conjuntos	36
4.1.2. Parámetros	37
4.1.3. Variables	39
4.1.4. Parámetros Estocásticos	40
4.1.5. Función Objetivo	41
4.1.6. Restricciones	42
4.1.7. Modelo no lineal entero mixto	47
4.2. Aproximación Lineal por Tramos	47
4.2.1. Condiciones de Linealización	49
4.3. Aproximación Lineal	51
5. Caso De Estudio	54
6. Resultados Y Discusión	59
6.1. Función Objetivo	60
6.2. Tiempo de resolución	61
6.3. Programa de encendido y apagado	62
6.4. Despacho	63
6.5. Costos	65
6.6. Analisis	69



7. Conclusión

70

1. Introducción

En las últimas décadas, los sistemas eléctricos han experimentado una transformación significativa impulsada por la necesidad de reducir la dependencia de los combustibles fósiles y las emisiones de gases de efecto invernadero. Esta transición hacia fuentes de energía sostenibles ha llevado a la adopción creciente de energías renovables, particularmente la energía eólica y solar. Estas fuentes no solo ofrecen una alternativa más limpia, sino que también han demostrado ser eficaces para mitigar los impactos ambientales asociados con la generación tradicional de electricidad. Sin embargo, la integración de estas fuentes renovables en la red eléctrica presenta desafíos operativos debido a su naturaleza intermitente y dependiente de factores climáticos. La variabilidad inherente de la energía eólica y solar introduce complejidad en la planificación y operación de las unidades de generación, ya que los sistemas eléctricos deben equilibrar continuamente la oferta y la demanda, garantizando la estabilidad del sistema y optimizando los costos de operación (Mena et al., 2024).

La transición hacia un sistema eléctrico más sostenible no solo implica la incorporación de nuevas tecnologías, sino también la adaptación y mejora de los métodos de operación y planificación existentes. En este contexto, el UC emerge como un problema central en la operación de sistemas eléctricos modernos. El UC consiste en determinar la programación óptima de encendido y apagado de unidades generadoras en un horizonte de tiempo determinado, con el objetivo de minimizar los costos de generación y mantener el suministro necesario para satisfacer la demanda proyectada. Este problema es intrínsecamente complejo debido a la naturaleza discreta de las decisiones de encendido y apagado, así como a la variabilidad tanto de la demanda como de la oferta de generación (Wu, 2011).

Tradicionalmente, el problema de UC ha sido abordado mediante formulaciones de optimización lineal o cuadrática que incluyen los costos de combustible, los costos de encendido y apagado de unidades, y otros costos operativos. Las funciones de costos cuadráticas han sido preferidas debido a su capacidad para capturar de manera realista la relación no lineal entre la potencia generada y el consumo de combustible, reflejando las características de eficiencia de las unidades térmicas (Abdou and Tkiouat, 2018). No obstante, la inclusión de estas funciones cuadráticas introduce desafíos computacionales significativos, ya que convierte el UC en una tarea de MIQP. Las MIQP son más costosas de resolver en comparación con sus contrapartes lineales, lo que limita su aplicabilidad en sistemas de gran escala o en entornos donde se requiere una rápida toma de decisiones (Frangioni et al., 2009).

La creciente penetración de fuentes de energía renovable intermitentes añade una capa adicional de complejidad al problema de UC. Las energías renovables, como la eólica y la solar, dependen de condiciones meteorológicas variables, lo que introduce incertidumbre en la oferta de generación. Este factor obliga a los operadores de sistemas eléctricos a considerar una mayor flexibilidad en la programación de las unidades generadoras, para poder adaptarse rápidamente a cambios imprevistos en la generación y en la demanda. La capacidad de predecir y ajustar la programación de unidades en tiempo real se vuelve crucial para mantener el equilibrio entre oferta y demanda, garantizando la estabilidad y confiabilidad del sistema eléctrico (Wu, 2011).

Para abordar las limitaciones computacionales de las formulaciones cuadráticas, se han desarrollado diversas técnicas de linealización. Una de las más efectivas es la PAU, que aproxima la función cuadrática original mediante múltiples segmentos lineales. Este enfoque transforma el problema de UC en uno de MILP, que es más tratable y se puede resolver de manera eficiente (Mena et al., 2024) utilizando solvers comerciales avanzados como Gurobi Optimizer (Gurobi Optimiza-

tion, LLC, 2023). La linealización por tramos permite reducir los tiempos de cómputo y facilita la incorporación de múltiples escenarios y restricciones adicionales sin comprometer de manera significativa la exactitud de la solución.

Sin embargo, la aproximación lineal también introduce una pérdida de precisión que puede afectar la calidad de las soluciones obtenidas. El número de tramos utilizados en la linealización es un factor crítico que determina el equilibrio entre la fidelidad de la aproximación y la complejidad computacional del modelo MILP resultante. Un mayor número de tramos mejora la precisión de la aproximación, pero incrementa el tamaño y la complejidad del problema de optimización. Por lo tanto, es fundamental evaluar el impacto de diferentes configuraciones de linealización en términos de rendimiento computacional y precisión de los resultados (Frangioni et al., 2009).

Se presenta el UC con una formulación clásica, que define las funciones de manera cuadrática, a estas funciones se le realiza una aproximación de manera lineal, además de una PUA con el objetivo de evaluar el impacto de cada formulación en términos de rendimiento computacional y precisión de los resultados, proporcionando una perspectiva integral sobre la efectividad de cada método en contextos de alta penetración de energías renovables. La relevancia de esta comparación radica en determinar qué formulación ofrece el mejor balance entre precisión y eficiencia en la operación de sistemas eléctricos modernos (Mena et al., 2024).

Para realizar esta comparación, se utilizará el sistema de prueba IEEE-39, conocido por ser un estándar en el análisis de sistemas de potencia. Este sistema de prueba proporciona una estructura adecuada para evaluar cómo se comportan las distintas formulaciones en condiciones realistas de operación y permite analizar el impacto de cada enfoque en el costo total y en el tiempo de cálculo (Mena et al., 2024). El uso del IEEE-39 no solo garantiza la relevancia de los resultados obtenidos, sino que también facilita la comparación con otros estudios previos que han

empleado este mismo entorno de referencia.

El enfoque metodológico adoptado en este estudio incluye una serie de pasos estructurados que aseguran la rigurosidad y validez de los resultados. Inicialmente, se procederá a la definición y modelado de cada una de las formulaciones de la función de costos. Posteriormente, se implementarán estos modelos en un entorno de optimización utilizando herramientas avanzadas como Gurobi Optimizer, versión 11.0.0, que permite resolver problemas de MILP de manera eficiente. A continuación, se llevarán a cabo experimentos que simulan diferentes escenarios operativos, considerando variaciones en la demanda y disponibilidad de recursos renovables. Estos experimentos permitirán evaluar el desempeño de cada formulación bajo condiciones dinámicas y realistas, proporcionando una base sólida para el análisis comparativo.

Los resultados obtenidos se analizarán en términos de costo total de operación, tiempo de cómputo y precisión de las soluciones encontradas. Este análisis permitirá identificar las fortalezas y debilidades de cada formulación, así como su aplicabilidad en distintos contextos operativos. Finalmente, se discutirán las implicaciones prácticas de los hallazgos, ofreciendo recomendaciones sobre la elección de la formulación más adecuada en función de los objetivos específicos de operación y las condiciones particulares de cada sistema eléctrico.

2. Objetivos

2.1. Objetivo General

Desarrollar un modelo de UC donde las funciones cuadráticas de costos de combustible se modelan como representaciones lineales mediante aproximación lineal por tramos, convirtiendo así la formulación original MIQP en un problema MILP, evaluando el impacto del número de tramos utilizados en la aproximación, con el objetivo de generar un modelo más eficiente computacionalmente sin comprometer significativamente la precisión de los resultados.

2.2. Objetivos Específicos

Para cumplir con el objetivo general propuesto, se plantean los siguientes objetivos específicos:

- Investigar y modelar el problema de UC genérico, tomando en cuenta las restricciones operativas y la función objetivo no lineal.
- Desarrollar una metodología para la linealización de la función objetivo no lineal mediante la técnica de linealización por tramos , para convertir el problema original en un MILP.
- Implementar el modelo UC linealizado para ser aplicado en el contexto de un problema IEEE 39 en un entorno Python, utilizando Pyomo.
- Comparar los resultados obtenidos con diferentes métodos de segmentación en la linealización de la función de costos, con el modelo lineal y con el modelo cuadrático, analizando el balance entre precisión y tiempos de cómputo.

3. Marco Teórico

3.1. Unit Commitment(UC)

El UC es un problema de optimización entero mixto centrado en la operación a corto plazo y la planificación táctica de los sistemas eléctricos de potencia. Su esencia radica en decidir qué unidades de generación estarán en servicio y con cuánta potencia operarán en cada intervalo de un horizonte temporal predefinido —típicamente de 24 a 168 horas—, buscando satisfacer la demanda eléctrica de manera confiable y económica (Wood et al., 2013; Padhy, 2003; Morales-España et al., 2013). Este problema es fundamental para la gestión eficiente de los recursos energéticos, ya que determina la asignación óptima de las unidades generadoras, considerando sus características técnicas, costos operativos y restricciones físicas.

Históricamente, el UC surgió como una necesidad imperante con la expansión de los sistemas de generación eléctrica y la creciente complejidad de las redes de transmisión. En sus inicios, el problema se abordaba mediante métodos heurísticos y reglas empíricas que, aunque prácticos, carecían de la precisión y eficiencia necesarias para sistemas de gran escala y con alta penetración de fuentes renovables. Con el avance de las técnicas de optimización y la disponibilidad de mayor poder computacional, se desarrollaron formulaciones matemáticas más sofisticadas que permiten resolver el UC de manera exacta y eficiente.

El UC no solo implica decisiones binarias sobre el encendido y apagado de las unidades generadoras, sino que también debe considerar una serie de variables continuas relacionadas con la potencia producida, el consumo de combustible, las emisiones de gases de efecto invernadero y otros costos operativos. Además, debe respetar una variedad de restricciones, tales como los límites de generación de cada unidad, las capacidades de las líneas de transmisión, los tiempos mínimos y

máximos de encendido y apagado, y las restricciones de rampa que limitan la velocidad a la cual una unidad puede aumentar o disminuir su producción.

La complejidad del UC se incrementa significativamente cuando se integran fuentes de energía renovable, como la eólica y la solar, debido a su naturaleza intermitente y dependiente de factores climáticos. Esta integración introduce incertidumbre en la oferta de generación, lo que exige métodos de UC que puedan adaptarse dinámicamente a cambios imprevistos en la generación y en la demanda. En este sentido, se han desarrollado variantes del UC que incorporan técnicas estocásticas y robustas para manejar la incertidumbre, mejorando así la resiliencia y flexibilidad de los sistemas eléctricos modernos (Sundar et al., 2019).

Adicionalmente, el UC juega un papel crucial en los mercados eléctricos, donde determina la asignación de recursos y establece los precios de la electricidad a través de mecanismos como el despacho económico. En entornos de mercado liberalizado, el UC influye directamente en la competencia entre generadores, incentivando la operación eficiente y la reducción de costos mediante la adopción de tecnologías más limpias y eficientes (Arroyo and Conejo, 2000).

En la actualidad, con la creciente demanda de electricidad y la necesidad de una transición energética hacia fuentes más sostenibles, el UC se enfrenta a nuevos desafíos que requieren enfoques innovadores. La incorporación de tecnologías avanzadas como el almacenamiento de energía, las redes inteligentes (smart grids) y la participación activa de la demanda (programas de respuesta a la demanda) añade capas adicionales de complejidad y oportunidades para optimizar la operación de los sistemas eléctricos (Liu and Tomsovic, 2015). Estas innovaciones no solo mejoran la eficiencia y la fiabilidad del sistema, sino que también facilitan una mayor integración de energías renovables, promoviendo así un suministro eléctrico más limpio y sostenible.

3.1.1. Importancia del UC en la Operación del Sistema Eléctrico

El UC es crítico por:

- **Optimización de Costos Operativos:** El objetivo principal es minimizar los costos totales, que incluyen costos de combustible, arranques, paradas, mantenimiento, operación a mínima carga y, en casos, costos por emisiones. Una solución óptima garantiza la utilización más eficiente de los recursos de generación disponibles (Wood et al., 2013; Shahidehpour et al., 2003).
- **Confiabilidad y Seguridad del Suministro:** El UC debe asegurar que la demanda sea cubierta en cada periodo. La planificación considera reservas giratorias para responder a contingencias, fallas de generadores, variaciones bruscas de demanda o cambios no previstos en la generación renovable (Restrepo and Galiana, 2005).
- **Mercados Eléctricos y Regulación:** En entornos competitivos, el UC es un componente clave del Security-Constrained UC (SCUC), utilizado por operadores independientes del sistema (ISOs) y operadores de mercado (MO) para determinar despachos y establecer precios nodales. De este modo, el UC impacta directamente la eficiencia, la transparencia y la estabilidad del mercado eléctrico (Arroyo and Conejo, 2000; Shahidehpour et al., 2003; Conejo et al., 2010).
- **Integración de Energías Renovables e Incertidumbre:** La creciente penetración de fuentes eólicas y solares introduce variabilidad estocástica en la oferta de generación. El UC debe adaptarse incorporando metodologías estocásticas, robustas o adaptativas que consideren múltiples escenarios, distribuciones probabilísticas de la disponibilidad renovable y la

demanda (Morales et al., 2010).

3.1.2. Formulación Clásica

El UC clásico se modela habitualmente como un problema de Programación Entera Mixta (MIP), en el que las variables binarias indican el estado de cada unidad (encendida/apagada) y las variables continuas describen la potencia generada. La función objetivo busca minimizar los costos, incluyendo combustible, arranque/apagado, operación a potencia mínima y posibles penalizaciones por corte de carga (Wood et al., 2013; Padhy, 2003).

Las restricciones clave comprenden el balance de potencia, límites de generación por unidad, tiempos mínimos de encendido y apagado, y restricciones de rampa (Wood et al., 2013; Morales-España et al., 2013). Además, en el SCUC, se incorporan restricciones de red para garantizar que la solución sea física y eléctricamente realizable (Arroyo and Conejo, 2000; Shahidehpour et al., 2003).

3.1.3. Complejidad Computacional y Métodos de Solución

El UC es NP-difícil, por lo que resolverlo a gran escala es complejo (Padhy, 2003). Para ello, se emplean:

- **Formulaciones Compactas y Reformulaciones:** Mejoran el desempeño de los solvers al ajustar la relajación continua (Morales-España et al., 2013; Gentile et al., 2017).
- **Descomposiciones y Decomposición por Escenarios:** Benders, Lagrangiana y Dantzig-Wolfe reducen el problema maestro en subproblemas más tractables (Zheng et al., 2013; Takriti et al., 1996).

- **Metaheurísticas y Heurísticas:** Algoritmos genéticos, búsqueda tabu, recocido simulado, etc., brindan soluciones factibles y de buena calidad en menor tiempo (Padhy, 2003).
- **Solvers Modernos y Lenguajes de Modelamiento:** Herramientas como Gurobi, CPLEX y entornos de modelado (Pyomo, GAMS) facilitan la implementación, experimentación y comparación de modelos (Hart et al., 2012).

3.1.4. Hacia un UC Dinámico, Flexible y Sostenible

La evolución del problema de UC ha sido impulsada por la necesidad de adaptarse a un entorno energético en constante cambio. Factores como la integración de la respuesta de la demanda, la implementación de políticas ambientales más estrictas y la planificación multiescala han desempeñado roles cruciales en esta transformación (Liu and Tomsovic, 2015; Sundar et al., 2019). Estos elementos no solo han redefinido los objetivos y restricciones del UC, sino que también han catalizado el desarrollo de nuevas formulaciones, técnicas de resolución y herramientas computacionales que permiten abordar de manera más efectiva los desafíos contemporáneos en la operación de sistemas eléctricos.

Integración de la Respuesta de la Demanda La respuesta de la demanda (Demand Response, DR) se ha convertido en una estrategia fundamental para mejorar la eficiencia y la flexibilidad del sistema eléctrico. La DR involucra incentivos para que los consumidores ajusten su consumo de energía en respuesta a señales de precios o a condiciones específicas del sistema, como picos de demanda o interrupciones en la generación. La incorporación de la DR en el UC permite una mejor gestión de la carga, reduciendo la necesidad de encender unidades generadoras costosas o contaminantes durante periodos de alta demanda. Además, la DR contribuye a una mayor estabilidad

del sistema al equilibrar la oferta y la demanda de manera más dinámica.

Políticas Ambientales y Sostenibilidad Las políticas ambientales y acuerdos internacionales como el Acuerdo de París han impulsado la transición hacia fuentes de energía más limpias, con un enfoque en la reducción de las emisiones de carbono. Esto ha llevado a la creación de modelos de planificación de sistemas eléctricos que integran tanto objetivos económicos como ambientales. De hecho, los sistemas de generación basados en energías renovables han comenzado a desempeñar un papel crucial en la reducción de emisiones de gases de efecto invernadero y en el fomento de una producción de energía más sostenible (Carrión et al., 2019).

Las herramientas de UC ahora consideran tanto los costos operativos como las restricciones de emisiones, promoviendo el uso de energías renovables y contribuyendo a la descarbonización del sector energético (Ahmadi et al., 2020).

Planificación Multiescala La planificación multiescala se refiere a la coordinación de decisiones de operación y planificación en diferentes niveles de tiempo y espacio. En el ámbito del UC, esto implica la integración de decisiones a corto plazo, como el despacho diario de unidades, con decisiones a largo plazo, como la inversión en nuevas capacidades de generación o la expansión de la infraestructura de transmisión (Sundar et al., 2019). Esta perspectiva multiescala permite una planificación más coherente y robusta, adaptándose a las fluctuaciones en la demanda, la incorporación de nuevas tecnologías y la variabilidad de las fuentes renovables. Además, facilita la consideración de escenarios futuros y la evaluación de la resiliencia del sistema frente a eventos imprevistos.

Desarrollo de Nuevas Formulaciones y Técnicas de Resolución La complejidad creciente del UC ha impulsado la investigación en nuevas formulaciones matemáticas que capturen de manera más precisa las dinámicas del sistema eléctrico moderno. Formulaciones avanzadas, como la UC robusta y la UC estocástica, permiten incorporar incertidumbres en la demanda y la oferta de generación renovable, proporcionando soluciones más resilientes y adaptativas (Liu and Tomsovic, 2015). Asimismo, técnicas de optimización heurística y metaheurística, como algoritmos genéticos, enjambres de partículas y recocido simulado, han demostrado ser efectivas para resolver instancias de UC de gran escala en tiempos computacionales razonables (Sundar et al., 2019).

Avances en Herramientas Computacionales El progreso en las herramientas computacionales ha sido fundamental para manejar la complejidad del UC en escenarios modernos. Solvers de optimización de última generación, como Gurobi, CPLEX y otros, han mejorado significativamente en términos de velocidad y capacidad para manejar grandes modelos MILP (Programación Entera Mixta Lineal) (Milano, 2005). Además, el uso de computación paralela y distribuida ha permitido aprovechar mejor los recursos computacionales disponibles, reduciendo los tiempos de resolución y permitiendo la exploración de múltiples escenarios de manera simultánea. La integración de técnicas de inteligencia artificial y aprendizaje automático también ha comenzado a influir en el UC, proporcionando métodos innovadores para predecir la demanda, optimizar el despacho y mejorar la eficiencia general del sistema.

Garantizando un Suministro Fiable, Económico y Sostenible La combinación de estos factores ha permitido que el UC evolucione hacia un modelo más dinámico, flexible y sostenible. La capacidad de adaptarse rápidamente a cambios en la demanda, incorporar fuentes de energía

renovable y cumplir con las regulaciones ambientales ha fortalecido la fiabilidad y la eficiencia económica del sistema eléctrico. Además, la planificación multiescala y las nuevas formulaciones matemáticas aseguran que las decisiones de operación sean robustas frente a incertidumbres y eventos imprevistos, contribuyendo a la sostenibilidad a largo plazo del suministro energético.

3.1.5. Desafíos en sistemas con alta penetración de energías renovables

En los sistemas eléctricos modernos, el UC se vuelve especialmente desafiante debido a la integración de fuentes de energía renovable, tales como la energía eólica y solar. Estas fuentes de energía, aunque sostenibles, presentan una alta variabilidad e incertidumbre en su generación debido a factores ambientales. Este carácter intermitente aumenta la complejidad del problema de UC, ya que es necesario adoptar modelos de programación que no solo optimicen los costos, sino que también manejen eficazmente la incertidumbre. Los métodos estocásticos y las técnicas de optimización adaptativa se han vuelto herramientas esenciales en este contexto, permitiendo una mejor integración de las fuentes renovables en el sistema eléctrico (Mena et al., 2024).

Por lo tanto, el problema de UC juega un papel fundamental en la transición hacia sistemas eléctricos más sostenibles y resilientes, enfrentando desafíos significativos en la planificación y operación debido a las demandas cambiantes y a la creciente participación de energías renovables en la matriz energética. Los avances en la formulación y solución del problema de UC son clave para mejorar la eficiencia operativa y reducir el impacto ambiental en los sistemas de generación eléctrica.

3.2. Aspectos Computacionales y Comparación entre MILP y MIQP en UC

En la resolución del problema de UC, la elección del modelo de optimización es un factor determinante para el éxito en la obtención de resultados precisos y computacionalmente factibles. Entre los modelamientos más empleados se encuentran el MILP y el MIQP. Ambos han sido objeto de investigación durante décadas, con un continuo perfeccionamiento impulsado por la disponibilidad de recursos computacionales cada vez más potentes y el desarrollo de solvers y lenguajes de modelamiento especializados (Padhy, 2003; Wood et al., 2013).

MILP en UC El MILP ha ganado terreno en el contexto del UC principalmente debido a los avances en los algoritmos de ramificación y acotamiento, la eficiencia de los cortes generados por los solvers y la creciente capacidad para manejar miles de variables y restricciones de forma estable. Uno de los aportes más destacados es la introducción de aproximaciones lineales por tramos que permiten representar funciones de costo originalmente cuadráticas (o con términos no lineales) mediante un conjunto de tramos lineales. Esta técnica resulta especialmente efectiva para capturar la naturaleza convexa del costo de combustible sin perder la estructura lineal del problema (Frangioni et al., 2009; Wu, 2011).

El MILP facilita además la incorporación de un amplio rango de restricciones operativas: tiempos mínimos de encendido y apagado, rampas máximas entre periodos, representación detallada de costos de arranque y parada, y límites en la capacidad de líneas de transmisión en el SCUC. Estas restricciones, aunque complejas, pueden ser codificadas de manera relativamente directa mediante variables binarias y lineales, aprovechando así la robustez de los solvers comerciales. Estudios empíricos en sistemas de referencia, como el IEEE 118-bus, han demostrado que el MILP puede abordar problemas de gran tamaño con tiempos de cálculo razonables, brindando

soluciones aptas para la operación diaria del sistema (Ahmadi et al., 2013; Morales-España et al., 2013).

Otra ventaja clave de el MILP es la facilidad con la que puede integrarse la incertidumbre y la estocasticidad, por ejemplo, mediante escenarios múltiples que representen la variabilidad de la demanda o la producción de fuentes renovables. Si bien la incorporación de escenarios incrementa significativamente el tamaño del problema, las técnicas de descomposición, cortes avanzados y heurísticas de arranque inicial pueden facilitar la obtención de soluciones factibles y cercanas al óptimo en plazos aceptables (Sundar et al., 2019).

MIQP en UC El MIQP, al mantener la naturaleza cuadrática de la función objetivo, proporciona una representación más fiel de las curvas de costo sin necesidad de recurrir a la linealización por tramos. Esto puede resultar atractivo en contextos donde la precisión de la modelación es prioritaria, por ejemplo, en el análisis de políticas energéticas que requieran una valoración muy exacta de los costos marginales, o en estudios académicos orientados a evaluar el impacto de supuestos específicos sobre la función de costos. Sin embargo, este incremento en la fidelidad del modelo conlleva un costo computacional elevado (Wood et al., 2013; Wu, 2011).

La resolución de problemas MIQP es significativamente más compleja, ya que los algoritmos de ramificación y acotamiento deben lidiar con un espacio de búsqueda más intrincado, donde la función objetivo no es lineal. Las rutinas de convexificación, corte y relajación aplicables en el caso lineal se vuelven más limitadas, requiriendo técnicas especializadas y costosas en términos de tiempo de CPU. Además, el número de solvers capaces de manejar MIQP con la misma eficiencia que el MILP es menor, lo que restringe las opciones y estrategias al modelador. Por esta razón, el MIQP se utiliza con mayor frecuencia en sistemas reducidos o en pruebas conceptuales donde el

tamaño del problema sea acotado, y el tiempo de cómputo no sea un factor crítico.

Comparaciones y Consideraciones Prácticas La literatura ha aportado diversos estudios de casos en los que se compara el desempeño de MILP y MIQP en UC. Por ejemplo, (Frangioni et al., 2009) y (Ahmadi et al., 2013) han mostrado que el MILP, con la apropiada linealización por tramos, ofrece soluciones con excelente relación entre precisión y costo computacional, especialmente en sistemas realistas con decenas o centenas de unidades. Eso permite llevar el UC a la práctica diaria de centros de despacho, operadores independientes del sistema (ISO) y mercados eléctricos, donde la velocidad de cómputo y la confiabilidad del algoritmo resultan fundamentales.

El MIQP, por su parte, tiende a enfocarse en contextos de investigación, validación de modelos o análisis de sensibilidad donde el interés principal radica en la precisión. En estos casos, los tiempos de cómputo más altos pueden ser justificables, especialmente si los resultados obtenidos aportan nuevas perspectivas sobre la incidencia exacta de las curvas de costo en la operación del sistema.

Además, la elección entre MILP y MIQP depende en gran medida de los recursos computacionales disponibles. En entornos con acceso a clústeres de cómputo de alta capacidad, la resolución de problemas MIQP de tamaño moderado puede ser factible, permitiendo experimentos con exactitud superior en la representación de costos. Sin embargo, en la operación real de un sistema eléctrico, donde las decisiones deben tomarse en plazos cortos (del orden de minutos u horas), el MILP se impone como el modelamiento mas eficiente.

3.3. Tipos de Linealización

Se han desarrollado diversas estrategias para aproximar o reemplazar las funciones de costo no lineales con modelos lineales por tramos. Estas aproximaciones permiten una resolución mas eficiente y abordable con los solvers actuales. El objetivo principal es mantener un equilibrio adecuado entre la precisión de la representación de costos y la eficiencia computacional, permitiendo así que el UC se resuelva en tiempos razonables y con resultados de calidad.

A continuación, se describen las técnicas más difundidas para la linealización de las funciones de costo en el UC, presentando sus fundamentos, ventajas y limitaciones, sin alterar las relaciones matemáticas fundamentales ni la validez de la formulación.

3.3.1. Aproximación lineal superior por tramos (Piecewise Upper Linearization)

La linealización por tramos es ampliamente utilizada para aproximar funciones cuadráticas o no lineales en problemas de optimización. En UC, permite transformar una función de costos cuadrática en segmentos lineales. Esto facilita el uso de MILP en lugar de MIQP, mejorando la manejabilidad computacional (Frangioni et al., 2009; Wu, 2011).

Formulación General La función no lineal definida como:

$$C(P_{it}) = a_i P_{it}^2 + b_i P_{it} + c_i$$

se reemplaza por una aproximación lineal por tramos:

$$C(P_{it}) \approx \sum_{l=1}^K \alpha_{il} \delta_{il,t}$$

donde:

- K es el número de tramos.
- α_{il} es la pendiente del tramo l .
- $\delta_{il,t}$ es la potencia generada en el tramo l .

Ventajas y Desventajas Este método equilibra eficiencia computacional y precisión, siendo más eficiente para grandes sistemas eléctricos. Sin embargo, la precisión depende del número de tramos K , con una mayor cantidad de tramos incrementando la complejidad computacional (Wood et al., 2013).

3.3.2. Series de Taylor

La linealización es una técnica ampliamente utilizada en matemáticas aplicadas e ingeniería para aproximar sistemas no lineales mediante sistemas lineales más manejables. Una de las herramientas matemáticas más comunes para este propósito es la serie de Taylor. Esta técnica permite representar una función no lineal alrededor de un punto de operación dado mediante una expansión en serie basada en las derivadas de la función.

Definición La serie de Taylor de una función $f(x)$ alrededor de un punto x_0 está dada por:

$$f(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 + \dots$$

En el contexto de la linealización, solo se considera el primer término de la expansión, obteniendo así una aproximación lineal de la función:

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Aplicaciones en modelos no lineales La aplicación de la serie de Taylor es fundamental en el análisis y diseño de sistemas no lineales. Por ejemplo, en un sistema dinámico cuya ecuación puede expresarse como $\dot{x} = f(x, u)$, la linealización alrededor de un punto de operación (x_0, u_0) conduce a un modelo lineal aproximado:

$$\dot{x} \approx A\delta x + B\delta u,$$

donde $A = \frac{\partial f}{\partial x}|_{(x_0, u_0)}$ y $B = \frac{\partial f}{\partial u}|_{(x_0, u_0)}$. Este enfoque es clave para el análisis de estabilidad y el diseño de controladores en sistemas no lineales.

Ventajas y limitaciones El uso de la serie de Taylor proporciona una manera sistemática y computacionalmente eficiente de aproximar sistemas complejos. Sin embargo, su precisión depende de la proximidad al punto de operación. Para sistemas altamente no lineales o con variaciones significativas lejos de x_0 , puede ser necesario considerar términos de orden superior o emplear técnicas más avanzadas como la aproximación por tramos.

Esta metodología es esencial en el contexto de la optimización de sistemas complejos, donde la simplificación lineal facilita el análisis y la implementación de algoritmos de resolución.

3.3.3. Aproximación Lineal Inferior por Tramos

La Aproximación Lineal Inferior por Tramos es un enfoque matemático diseñado para simplificar la representación de una curva de costos cuadrática (QCC) en problemas de UC, mediante el uso de líneas tangentes en puntos específicos denominados terminales de segmento. Este método transforma la curva cuadrática en una aproximación lineal que conserva las propiedades fundamentales de la función original y facilita el uso de técnicas de MILP. Matemáticamente, se define mediante la expresión:

$$F_i \geq (2 \cdot a_i \cdot P_{ik}^{\max} + b_i) \cdot P_i + (c_i - a_i \cdot (P_{ik}^{\max})^2) \cdot I_i, \quad k = 0, \dots, N, \quad (1)$$

donde P_i es la potencia generada por la unidad i , a_i , b_i y c_i son los coeficientes de la curva cuadrática, y $P_{ik}^{\max}$ define los límites superiores de los segmentos. En esta formulación, el término $2 \cdot a_i \cdot P_{ik}^{\max} + b_i$ representa la pendiente de la tangente en el punto $P_{ik}^{\max}$, mientras que $c_i - a_i \cdot (P_{ik}^{\max})^2$ ajusta la línea para asegurar que esta se mantenga siempre por debajo de la curva original, garantizando así una aproximación conservadora. Esta propiedad es crucial, ya que evita sobrestimar los costos operativos y asegura que las soluciones del modelo sean factibles y económicamente seguras (Wu, 2011).

La curva cuadrática se divide en N segmentos, cada uno con una ecuación lineal específica, vinculados mediante restricciones que garantizan la continuidad y consistencia del modelo. Esta aproximación es computacionalmente eficiente, ya que reemplaza la naturaleza no lineal del problema con un conjunto de restricciones lineales, lo cual es particularmente útil en sistemas eléctricos grandes y complejos. Además, permite calcular despachos óptimos de generación minimizando costos operativos mientras se cumplen restricciones técnicas y económicas.

3.3.4. Método de particiones más precisas

Este método de aproximación es propuesto en (Wu, 2011) propuesto se centra en mejorar la precisión de las particiones en la linealización por tramos de las QCC, abordando una deficiencia inherente a los métodos tradicionales basados en la equipartición. A diferencia de los enfoques previos que simplemente dividen el rango de potencia activa en segmentos uniformes, este método tiene como objetivo minimizar el error introducido en la aproximación al reducir la discrepancia entre la longitud del arco y la longitud de la cuerda en cada segmento. Este enfoque es especialmente importante en problemas de UC, ya que errores significativos en la representación de las curvas de costo pueden llevar a soluciones subóptimas en términos de costos operativos y asignación de generación.

Desde un punto de vista matemático, el método busca minimizar la diferencia entre la longitud del arco y la longitud de la cuerda para cada segmento de la función de costo, lo que se expresa como:

$$\min \sum_{k=1}^N |L_k^a - L_k^c|,$$

donde:

- L_k^a representa la longitud del arco del segmento k ,
- L_k^c es la longitud de la cuerda del segmento k ,
- N es el número total de segmentos.

La longitud del arco, L_k^a , se calcula integrando sobre el segmento, considerando la derivada de la función de costo $C(P)$, mientras que la longitud de la cuerda L_k^c se define como la distancia

euclidiana entre los extremos del segmento. Estas expresiones se detallan como:

$$L_k^a = \int_{P_k^{\min}}^{P_k^{\max}} \sqrt{1 + \left(\frac{\partial C}{\partial P} \right)^2} dP,$$

$$L_k^c = \sqrt{(P_k^{\max} - P_k^{\min})^2 + (C(P_k^{\max}) - C(P_k^{\min}))^2}.$$

Aquí:

- $P_k^{\min}$ y $P_k^{\max}$ son los límites inferior y superior de potencia para el segmento k ,
- $C(P)$ es la función de costo cuadrática del generador, generalmente expresada como $C(P) = aP^2 + bP + c$, donde a, b, c son coeficientes característicos.

El método requiere resolver un problema de optimización no restringido, donde los puntos de segmentación $P_k^{\min}, P_k^{\max}$ se seleccionan para minimizar la función objetivo. Este proceso implica el uso de condiciones de Karush-Kuhn-Tucker (KKT) para establecer un sistema de ecuaciones que debe resolverse numéricamente. Métodos como el descenso de gradiente, Newton-Raphson o incluso algoritmos heurísticos pueden ser empleados para encontrar una solución.

Una ventaja significativa de este método es su capacidad para garantizar una mejor representación de las QCC, permitiendo una aproximación más cercana al comportamiento real de los costos de generación. Esto es especialmente relevante para generadores con curvas de costo altamente no lineales o con características específicas, como rampas abruptas o costos de operación variables. Además, al mejorar la precisión de los segmentos, el modelo resultante permite soluciones de UC más óptimas, tanto en términos de costos totales como en la asignación eficiente de generación.

Por otro lado, este método también ofrece flexibilidad en la selección del número de segmentos. Al mantener un equilibrio entre la precisión y la complejidad computacional, es posible representar adecuadamente curvas de costo complejas sin incrementar de manera significativa los tiempos de resolución. Esto resulta esencial en contextos donde la velocidad computacional y la precisión son factores críticos, como en sistemas eléctricos con múltiples generadores y alta penetración de energías renovables.(Wu, 2011).

3.3.5. Razones para Elegir la Linealización por Tramos Superior (Piecewise Upper Approximation)

La elección de la PUA como método principal de linealización en este trabajo responde a diversas ventajas prácticas y técnicas que hacen de este enfoque una solución robusta y eficiente para resolver problemas de UC en sistemas de potencia.

Simplicidad de Implementación El método PUA es significativamente más simple de implementar en entornos de optimización como Pyomo. Al convertir funciones cuadráticas de costos en segmentos lineales, se facilita la integración del modelo en herramientas de optimización basadas en MILP. Esta simplicidad es particularmente útil en proyectos con restricciones de tiempo o recursos computacionales, como en sistemas donde se requiere una implementación rápida y confiable (Hart et al., 2012).

Efectividad Comprobada La efectividad del método PUA ha sido ampliamente demostrada en estudios recientes. Por ejemplo, (Wu, 2011) muestran que la aproximación por tramos puede representar adecuadamente los costos de operación en sistemas reales con mínimos errores, siempre que se seleccionen un número adecuado de segmentos. Esto lo convierte en una opción confiable

para garantizar resultados precisos en sistemas complejos, manteniendo la simplicidad del modelo.

Flexibilidad para Sistemas Reales El método PUA también se adapta bien a la variabilidad de los sistemas reales. Permite ajustar la granularidad de los tramos según las características específicas del sistema de potencia, como la variabilidad de las unidades generadoras o la incertidumbre en la demanda, lo cual es esencial para garantizar la operatividad y robustez del modelo en escenarios prácticos (Mena et al., 2024).

Comparación con Otros Métodos En comparación con técnicas como splines o modelos max-afin, la PUA ofrece una solución intermedia entre precisión y simplicidad. Si bien métodos como max-afin pueden ofrecer mayor precisión en ciertos casos, suelen requerir mayor complejidad en la formulación y tiempos de cálculo más largos. Por su parte, la PUA mantiene una formulación sencilla sin sacrificar de manera significativa la exactitud, lo cual es ideal para sistemas de gran escala y decisiones operativas en tiempo real (Ahmadi et al., 2013).

Por estas razones, la elección del método de PUA como técnica principal de linealización no solo responde a criterios de simplicidad y eficiencia computacional, sino también a su probada efectividad en estudios recientes. Este enfoque permite abordar de manera práctica los desafíos del problema de UC, asegurando un equilibrio entre precisión y tiempos de cálculo razonables en sistemas de potencia modernos.

3.4. Pyomo y su aplicación en MILP para UC

La creciente complejidad de los sistemas eléctricos, marcada por la diversificación de la matriz de generación, la alta penetración de energías renovables intermitentes y la necesidad de

cumplir con una amplia gama de restricciones operativas, hace que el problema de UC represente un reto significativo para investigadores y operadores del sistema. En este contexto, Pyomo ha emergido como una herramienta de referencia para el modelamiento y la resolución de problemas de optimización complejos, incluyendo el UC. Esta biblioteca de código abierto en Python se ha posicionado en investigación operativa y sistemas de potencia gracias a su flexibilidad, compatibilidad con múltiples solvers, y la facilidad con que permite cambiar formulaciones, restricciones y enfoques de linealización (Hart et al., 2012).

Pyomo emplea una sintaxis algebraica que se acerca a la notación matemática estándar, lo que facilita la creación, modificación y entendimiento de modelos, incluso para usuarios que no son expertos en programación. La herramienta permite definir variables, restricciones y funciones objetivo de manera declarativa, manteniendo el foco en el problema en sí más que en los detalles de implementación. Asimismo, Pyomo ofrece soporte para múltiples paradigmas de programación: desde Programación Lineal (LP) hasta Programación Entera Mixta (MILP, MIQP) e incluso optimización no lineal, lo que habilita su uso en una amplia gama de problemas de planificación y operación del sistema eléctrico (Hart et al., 2012).

En el caso del UC, la capacidad de Pyomo para manejar formulaciones MILP resulta especialmente ventajosa. El UC involucra variables binarias (para la decisión de encender o apagar unidades generadoras), variables continuas (para la asignación de potencia, reservas, etc.) y una serie de restricciones complejas (límites de rampa, tiempos mínimos de encendido y apagado, balance nodal, entre otras). Además, las funciones de costo suelen tener términos no lineales (p. ej., costos de combustible cuadráticos), lo que complica la resolución directa del problema. Sin embargo, al aplicar técnicas de linealización por tramos, max-afines u otras aproximaciones, se pueden convertir estas curvas no lineales en funciones lineales por segmentos, permitiendo tratar el UC

como un MILP. Esta transformación incrementa sustancialmente la eficiencia computacional y la escalabilidad del problema (Frangioni et al., 2009; Wu, 2011; Mena et al., 2024).

3.4.1. Solvers de Optimización en Pyomo

La efectividad de Pyomo en la resolución del UC depende, en gran medida, del solver elegido. Pyomo actúa como un intermediario entre el usuario (que define el modelo) y el solver (que lo resuelve). Existen múltiples solvers disponibles, cada uno con fortalezas y limitaciones, por lo que la elección dependerá de factores como el tamaño del problema, el tipo de formulación (MILP, MIQP), los recursos computacionales y las licencias disponibles.

- **GLPK (GNU Linear Programming Kit)** es una opción de código abierto ampliamente utilizada para problemas LP y MILP pequeños a medianos. Ofrece la ventaja de no tener costo, lo que lo hace ideal para prototipar modelos, enseñar conceptos básicos de optimización y validar la corrección del modelo antes de abordar instancias más grandes. Sin embargo, su desempeño es limitado ante problemas UC de gran escala, ya que no implementa las estrategias de corte y heurísticas avanzadas que caracterizan a solvers comerciales (Hart et al., 2012).
- **CPLEX**, un solver comercial desarrollado por IBM, es considerado un estándar industrial gracias a su capacidad para resolver problemas MILP y MIQP a gran escala y en tiempos razonables. Su arquitectura interna aprovecha algoritmos de ramificación y corte avanzados, heurísticas de arranque y paralelización, lo que permite manejar modelos UC con numerosas unidades y periodos, restricciones complejas y componentes no lineales linealizados sin sacrificar excesivamente el tiempo de cómputo (IBM ILOG CPLEX, 2024).

- **Gurobi**, también comercial, destaca por su rapidez y eficiencia, logrando rendimientos competitivos o superiores a los de CPLEX en diversas aplicaciones. Es especialmente valioso en casos donde se requiere resolver el UC repetidamente en horizontes rolling (deslizantes) o en situaciones cercanas al tiempo real, como en mercados eléctricos con actualizaciones horarias o subhorarias. Su capacidad para manejar problemas grandes y su escalabilidad hacen que Gurobi sea una opción preferente para operaciones en tiempo real o escenarios con alta penetración renovable y requerimientos de respuesta rápida (Gurobi Optimization, LLC, 2023; Lubin and Dunning, 2015).

Implementación del Modelo de UC en Pyomo La definición de un modelo UC en Pyomo sigue una secuencia lógica:

- **Declaración de Datos y Parámetros:** Se especifican los datos del sistema, incluyendo la potencia máxima y mínima de cada unidad, costos de combustible, curvas de arranque y parada, perfiles de demanda, disponibilidad de fuentes renovables, y cualquier otro parámetro relevante (Hart et al., 2012).
- **Definición de Variables:** Se crean variables binarias para el estado de las unidades (encendido/apagado) y variables continuas para la potencia generada, potencia de reserva, entre otras. Estas variables capturan las decisiones básicas del UC (Wood et al., 2013).
- **Formulación de la Función Objetivo:** La función objetivo normalmente busca minimizar el costo total, que incluye costos de combustible, arranques, paradas, operación en vacío, penalizaciones por corte de carga y potencialmente costos ambientales. Si la función es no lineal, se introduce la linealización por tramos u otra técnica para mantener el problema en

el ámbito MILP (Frangioni et al., 2009; Wu, 2011).

- **Establecimiento de Restricciones:** Se agregan las restricciones operativas: balance nodal (para asegurar que la demanda sea satisfecha), límites de generación mínima y máxima, rampas máximas entre periodos, tiempos mínimos de encendido y apagado, límites en las líneas de transmisión (en caso de SCUC) y requerimientos de reserva giratoria. Estas restricciones reflejan la naturaleza física y técnica del sistema eléctrico (Mena et al., 2024).
- **Elección del Solver y Ejecución:** Una vez definido el modelo, basta con una llamada a la interfaz de Pyomo para activar el solver seleccionado (GLPK, CPLEX, Gurobi, etc.). Pyomo se encarga de traducir el modelo a un formato interno, enviar el problema al solver, recibir la solución y almacenarla en estructuras de datos de fácil acceso.

Ventajas de Pyomo en la Comparación de Formulaciones de Costos Uno de los puntos fuertes de Pyomo es su capacidad para facilitar la comparación entre diferentes representaciones de la función de costos del UC. Por ejemplo, se pueden probar:

- **Función Cuadrática Original:** Modela con exactitud la curva de costo, pero puede complicar la resolución (MIQP).
- **Linealización por Tramos:** Aproxima la curva por segmentos lineales, convirtiendo el problema en MILP. El número de tramos y su distribución afectan el balance entre precisión y tiempo de cómputo.
- **Formulación Simplificada de Costos:** Omite términos no lineales o utiliza estimaciones lineales para acelerar el cálculo, ideal para estudios preliminares o casos donde la precisión no sea crítica.

Pyomo permite alternar entre estos enfoques sin reescribir completamente el modelo. Basta con modificar la definición de la función objetivo y, eventualmente, añadir o remover variables auxiliares y restricciones asociadas a la linealización. Esta flexibilidad impulsa la investigación experimental, permitiendo explorar cómo impactan las decisiones de modelado en el rendimiento computacional, la calidad de las soluciones y la robustez frente a diferentes escenarios.

Resolución y Optimización en Pyomo Más allá de la simple ejecución del solver, Pyomo facilita la integración con librerías de Python para análisis avanzado. Por ejemplo, utilizando pandas se pueden organizar datos y resultados, mientras que matplotlib o seaborn permiten visualizar gráficos de convergencia, histogramas de tiempos de cómputo o mapas de calor que muestren la sensibilidad del tiempo de resolución a distintos parámetros. Esta combinación de modelado algebraico, análisis de datos y visualización hace que el proceso de experimentación sea más fluido y eficiente, reduciendo el tiempo dedicado a tareas manuales repetitivas y aumentando la capacidad de obtener insights sobre el comportamiento del UC bajo diferentes suposiciones (Mena et al., 2024).

Además, Pyomo se integra bien con entornos de computación de alto rendimiento (HPC). Si se dispone de un clúster de servidores, es factible lanzar múltiples instancias del modelo con distintas configuraciones, explorando así grandes espacios paramétricos. Esto resulta útil para evaluar la escalabilidad del método, la robustez ante incertidumbre en la demanda o la generación, y la sensibilidad ante cambios en el número de tramos de la linealización, entre otros factores.

En síntesis, Pyomo proporciona un entorno sumamente versátil y poderoso para abordar el UC mediante MILP, ofreciendo:

- Un lenguaje de modelado cercano a la notación matemática, reduciendo la dificultad de traducir ideas a código.

- La capacidad de integrar con múltiples solvers, tanto gratuitos como comerciales, ajustándose a las necesidades y recursos del proyecto.
- Herramientas para comparar y perfeccionar las formulaciones de costos, así como para analizar el impacto de diferentes restricciones y parámetros.
- Facilidades para combinar con librerías de análisis de datos y visualización, mejorando la interpretación de resultados y guiando la toma de decisiones.

Estas características hacen de Pyomo un aliado natural en el desarrollo de soluciones para el UC, permitiendo a investigadores, planificadores y operadores del sistema avanzar hacia modelos más precisos, eficientes y adaptables a las condiciones cambiantes de los sistemas eléctricos modernos.

4. Metodología

La metodología utilizada en este estudio se estructura permitiendo el desarrollo de un modelo de UC estocástico, el cual se define con sus respectivos conjuntos, parámetros, variables, función objetivo y restricciones. A este modelo, correspondiente a un MIQP, se le aplicarán aproximaciones lineales de distinta complejidad con el fin de buscar un modelo MILP que aproxime eficientemente la función objetivo del modelo UC presentado.

4.1. Modelo UC

Se propone un modelo UC estocástico no lineal basado en escenarios con incertidumbre en la demanda agregada y en la velocidad del viento, basado en el propuesto en (Mena et al., 2024), donde, si bien, las funciones de costos de combustible se presentan de forma lineal, en este estudio se trabaja con las funciones no lineales de costos de combustible con el objetivo de considerarlas como funciones cuadráticas.

4.1.1. Conjuntos

- G : Conjunto de unidades generadoras, indexado por g .
- G^1 : Conjunto de unidades generadoras convencionales con $t_g^u = 1$ indexado por g .
- G^c : Conjunto de unidades generadoras convencionales indexado por g .
- G^f : Conjunto de generadores a base de combustible indexado por g .
- L : Conjunto de líneas de transmisión indexado por (i, j) o (j, i) .
- N : Conjunto de nodos en el sistema indexado por i o j .

- T : Horizonte de planificación (períodos de tiempo) indexado por t .
- Ω : Conjunto de escenarios indexado por ξ .
- W : Conjunto de granjas eolicas, indexado por g .
- W_i : Conjunto de granjas eolicas localizadas en el nodo $i \in N$, indexado por g .

4.1.2. Parámetros

- $B_{(i,j)}$: Susceptancia de la línea de transmisión (i, j) , en p.u.
- C^{ENS} : Costo de penalización por energía no suministrada, en US\$/MW.
- C_g^F : Costo del combustible de una unidad generadora convencional g , en US\$/MBtu.
- C_g^{NL} : Costo de No-Load de la unidad generadora convencional g , en US\$/h.
- C_g^{OM} : Costo variable de O&M de la unidad generadora g , en US\$/MWh.
- C_g^{SU} : Costo de encendido de una unidad generadora convencional g , en US\$/MW de capacidad instalada.
- C^{CO_2} : Costo de carbono, en US\$/ton CO_2 .
- C_g^R : Costo de rampa de una unidad generadora convencional g , en US\$/MW.
- D_t : Demanda agregada del sistema en el periodo t , en MW.
- $D_{t,\xi}$: Demanda agregada del sistema en el periodo t , escenario ξ , en MW.
- p_i : Factor de demanda para el nodo i .

- μ_t : Media de la distribución normal de la demanda agregada en el periodo t , en MW.
- σ_t^2 : Varianza de la distribución normal de la demanda agregada en el periodo t , en MW^2 .
- $D_{i,t,\xi}$: Demanda energética en el nodo i , periodo t , escenario ξ , en MW.
- H_g : Tasa de calor de la unidad a plena carga g , in MBtu/MWh.
- μ_g^f : intensidad de carbono de la unidad con combustible fosil g , en $\text{tonCO}_2/\text{MBtu}$.
- $\bar{P}_g$: Capacidad máxima de la unidad convencional g , in MW.
- $P_g^{\min}$: Mínimo técnico de la unidad convencional g , in MW.
- r_g^U : Máxima tasa de rampa ascendente de la unidad g , como % de $\bar{P}_g$.
- r_g^D : Máxima tasa de rampa descendente de la unidad g , como % de $\bar{P}_g$.
- r_g^{SU} : Tasa de encendido de la unidad g , en MW.
- r_g^{SD} : Tasa de apagado de la unidad g , en MW.
- t_g^U : Duración mínima del estado de encendido de la unidad g , en h.
- t_g^D : Duración mínima del estado de apagado de la unidad g , en h.
- ΔT : Horizonte de tiempo, en h.
- P_ξ : probabilidad de ocurrencia del escenario ξ , en %.
- $ws_{i,t,\xi}$: velocidad del viento en el nodo i , periodo t , escenario ξ , in m/s.
- N_g^W : Cantidad de turbinas en la granja g .

- P^R : Potencia nominal por turbina en la granja g , en MW.
- U_g^{in} : Velocidad de conexión de las turbinas en la granja g , en m/s.
- U_g^{out} : Velocidad de desconexión de las turbinas en la granja g , en m/s.
- U_g^R : Velocidad nominal de las turbinas en la granja g , en m/s.
- $P_{g,t,\xi}^W$: Potencia de viento disponible en la granja eólica g en el periodo t en el escenario ξ , en MW.
- $\bar{P}_{(i,j)}$: Capacidad de transmisión de la linea (i, j) , in MW.
- S_0 : Potencia base aparente del sistema, en MVA.
- $r^{\min}$: Requisitos de reserva de giro del sistema, como % de $D_{t,\xi}$.
- FC_g^q : Coeficiente cuadrático del costo de combustible de la unidad g , en UC\$/MW².
- FC_g^l : Coeficiente lineal del costo de combustible de la unidad g , en UC\$/MW.
- FC_g : Intercepto del costo de combustible de la unidad g , en UC\$.

4.1.3. Variables

- $\Delta P_{g,t,\xi}^D \geq 0$: Rampa descendente de potencia de la unidad convencional g entre $t - 1$ y t , escenario ξ , en MW.
- $\Delta P_{g,t,\xi}^U \geq 0$: Rampa ascendente de potencia de la unidad convencional g entre $t - 1$ y t , escenario ξ , en MW.

- $\Delta\theta_{(i,j),t,\xi} \in \mathbb{R}$: Diferencia de ángulo de tensión entre nodos i y j , periodo t , escenario ξ , en radianes.
- $LS_{i,t,\xi} \geq 0$: Pérdida de carga en el nodo i , periodo t , escenario ξ , en MW.
- $PV_{g,t,\xi} \geq 0$: Potencia utilizada del parque eólico g , periodo t , escenario ξ , en MW.
- $PC_{g,t,\xi}^W \geq 0$: Restricción de energía eólica en el parque g , periodo t , escenario ξ , en MW.
- $P_{g,t,\xi} \geq 0$: Potencia generada por la unidad convencional g , periodo t , escenario ξ , en MW.
- $p_{g,t,\xi} \geq 0$: Potencia generada por encima del mínimo técnico de la unidad g , periodo t , escenario ξ , en MW.
- $r_{g,t,\xi} \geq 0$: Reserva de giro de la unidad convencional g , periodo t , escenario ξ , en MW.
- $u_{g,t} \in \{0, 1\}$: Encendido de la unidad g en t (1: se enciende, 0: no se enciende).
- $v_{g,t} \in \{0, 1\}$: Apagado de la unidad g en t (1: se apaga, 0: no se apaga).
- $x_{g,t} \in \{0, 1\}$: Estado de encendido/apagado unidad g en t (1: encendida, 0: apagada).

4.1.4. Parámetros Estocásticos

Demanda Agregada La demanda agregada del sistema D_t se distribuye según una distribución Normal, con media μ_t y varianza σ_t^2 para cada periodo $t \in T$. Los perfiles de la demanda agregada $\{D_{i,\xi}\}_{t=1,\dots,|T|}$ con $\xi \in \Omega$ se muestrean de las distribuciones normales correspondientes a cada periodo $t \in T$. Cada perfil es ponderado por un factor nodal $p_i, \forall i \in N$, con $\sum_{i \in N} p_i = 1$ para determinar los perfiles de demanda por nodo $\{D_{i,t,\xi}\}_{t=1,\dots,|T|}$ para cada $\xi \in \Omega$.

Velocidad del viento En cada nodo $i \in N$ con una granja eólica, se sintetiza una serie temporal discreta de velocidad del viento $ws_{i,t,\xi}$ m/s para cada escenario $\xi \in \Omega$ utilizando el proceso estocástico de Matérn (Mena et al., 2022). Estas series se utilizan para calcular la potencia eólica disponible $P_{g,t,\xi}^W$ mediante la ecuación (2)

$$P_{g,t,\xi}^W = \begin{cases} 0 & 0 < ws_{i,t,\xi} < U_g^{in} \\ N_g^W P_g^R \frac{ws_{i,t,\xi} - U_g^{in}}{U_g^R - U_g^{in}} & U_g^{in} < ws_{i,t,\xi} < U_g^R \\ N_g^W P_g^R & U_g^R < ws_{i,t,\xi} < U_g^{out} \\ 0 & \text{en otro caso} \end{cases} \quad \forall g \in W_i, t \in T, \xi \in \Omega \quad (2)$$

donde N_g^W es el numero de turbinas localizadas en la granja $g \in W_i$ localizada en el nodo i , P_g^R MW es la potencia nodal de las turbinas y U_g^{in} m/s, U_g^{out} m/s y U_g^R m/s, son la velocidad de conexión, desconexión y nominal, respectivamente.

4.1.5. Función Objetivo

El modelo busca minimizar el costo total esperado (E(CT)), donde se toman en cuenta los costos de encendido y apagado, el costo de no-load, el costo de operación y mantenimiento para las unidades convencionales y las granjas eólicas, el costo de emisiones de CO_2 , el costo de rampa, costo de combustible y el costo por energía no suministrada, considerando todos los escenarios de demanda y velocidad del viento y sus respectivas probabilidades de ocurrencia P_ξ , tomando en

consideración un horizonte de tiempo ΔT :

$$\begin{aligned} \min E(CT) = \sum_{\xi \in \Omega} P_{\xi} \left(\sum_{t \in T} \left(\sum_{g \in G^c} \bar{P}_g \cdot C^{SU}_g \cdot u_{g,t} + \sum_{g \in G^f} C^{NL}_g \cdot x_{g,t} \cdot \Delta t \right. \right. \\ + \sum_{g \in G^c} C^{OM}_g \cdot P_{g,t,\xi} \cdot \Delta t + \sum_{g \in G^f} C^{CO_2} \cdot \mu_g^f \cdot H_g \cdot P_{g,t,\xi} \cdot \Delta t \\ + \sum_{g \in G^c} C^R_g \cdot P_g^{min} \cdot (u_{g,t} + v_{g,t}) + \sum_{g \in W} C^{OM}_g \cdot PV_{g,t,\xi} \cdot \Delta t \\ + \sum_{g \in G^f} (FC_g^q P_{g,t,\xi}^2 + FC_g^l P_{g,t,\xi} + FC_g) \\ \left. \left. + \sum_{g \in G^c} C^R_g \cdot (\Delta P_{g,t,\xi}^U + \Delta P_{g,t,\xi}^D) + \sum_{i \in N} C^{ENS} \cdot LS_{i,t,\xi} \cdot \Delta t \right) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

donde $\bar{P}_g \cdot C^{SU}_g \cdot u_{g,t}$ corresponden a los costos de encendido de la unidad convencional $g \in G^c$, $C^{NL}_g \cdot x_{g,t} \cdot \Delta t$ es el costo de no-load de la unidad $g \in G^f$, $C^R_g \cdot P_g^{min} \cdot (u_{g,t} + v_{g,t}) + C^R_g \cdot (\Delta P_{g,t,\xi}^U + \Delta P_{g,t,\xi}^D)$ es el costo de rampa de la unidad $g \in G^c$ separado en 2 fases, la primera correspondiente al costo base al momento de encender o apagar la unidad, y la segunda que considera las rampas ascendentes y descendentes de la unidad ya en operación, $C^{CO_2} \cdot \mu_g^f \cdot H_g \cdot P_{g,t,\xi} \cdot \Delta t$ es el costo por emisión de carbono, $C^{OM}_g \cdot P_{g,t,\xi} \cdot \Delta t$ y $C^{OM}_g \cdot PV_{g,t,\xi} \cdot \Delta t$ son los costos de operación y mantenimiento de la unidad $g \in G^c$ y la granja $g \in W$, $C^{ENS} \cdot LS_{i,t,\xi} \cdot \Delta t$ es el costo de penalización por energía no suministrada, finalmente $FC_g^q P_{g,t,\xi}^2 + FC_g^l P_{g,t,\xi} + FC_g$ es la función de costo de combustible de la unidad $g \in G^f$, esta función es responsable de la no linealidad del modelo.

4.1.6. Restricciones

Primera Etapa

Commitment: Estas restricciones definen el encendido y apagado de las unidades de generación, para que una unidad no esté encendida y apagada en el mismo período, por ejemplo. Estas decisiones son tomadas de manera previa a la incertidumbre de la demanda y la velocidad del viento.

$$x_{g,t} - x_{g,t-1} = u_{g,t} - v_{g,t}, \quad \forall g \in G^c, t \in T, t \geq 2 \quad (4)$$

$$\sum_{\tau=t-t_g^U+1}^t u_{g,\tau} \leq x_{g,t}, \quad \forall g \in G^c, t \in T, t \geq t_g^U \quad (5)$$

$$\sum_{\tau=t-t_g^D+1}^t v_{g,\tau} \leq 1 - x_{g,t}, \quad \forall g \in G^c, t \in T, t \geq t_g^D \quad (6)$$

donde, $x_{g,t}$ corresponde a la variable binaria que define si la unidad g está encendida (si $x_{g,t} = 1$) o apagada (si $x_{g,t} = 0$), esta variable está relacionada con las variables binarias de encendido y apagado en ((4)) para formar el programa de encendido y apagado. Por otro lado, las desigualdades fuerzan que la unidad esté encendida en, por lo menos, un tiempo t_g^U , o apagada en un tiempo mínimo t_g^D . Además, las restricciones (5) y (6) aseguran que la unidad g no esté encendida y apagada en un mismo periodo de tiempo.

Segunda Etapa

Balance nodal Esta restricción contempla las decisiones a tomar después de la incertidumbre asociada a la demanda agregada y la velocidad del viento, esta restricción limita el poder generado por una unidad $g \in G_i^c$ y $g \in W_i$ ubicadas en el nodo $i \in N$ y el flujo de energía a través de la red de transmisión. En este sentido, la restricción 7 asegura el cumplimiento de la demanda nodal en

el periodo $t \in T$ en el escenario $\xi \in \Omega$.

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G_i^c} P_{g,t,\xi} + \sum_{g \in W_i} PV_{g,t,\xi} + \sum_{(j,i) \in L} B_{(j,i)} \cdot \Delta\theta_{(j,i),t,\xi} \cdot S_0 \\ - \sum_{(i,j) \in L} B_{(i,j)} \cdot \Delta\theta_{(i,j),t,\xi} \cdot S_0 + LS_{i,t,\xi} = D_{i,t,\xi}, \end{aligned} \quad \forall i \in N, t \in T, \xi \in \Omega \quad (7)$$

aquí $P_{g,t,\xi} \geq 0$ y $PV_{g,t,\xi} \geq 0$ son variables de decisión que representan la energía generada en (MW) en las unidades generadoras $g \in G^c$ o $g \in W$, $\Delta\theta_{(i,j),t,\xi}$ corresponde a la variable de decisión de la diferencia del ángulo de voltaje en radianes entre los nodos i y j y, finalmente, $LS_{i,t,\xi}$ es la pérdida de carga en (MW) en el nodo i , período t , escenario ξ . Por otro lado, $B_{(i,j)}$ y S_0 , corresponden a la susceptancia de la línea (i, j) y la potencia base aparente del sistema, en MVA, respectivamente.

Límites de generación: Las variables de decisión $P_{g,t,\xi}$ correspondientes a la potencia generada por la unidad generadora convencional $g \in G^c$ en el periodo t y escenario ξ están conformadas por tres términos: el mínimo técnico P_g^{min} en MW de la unidad g , la variable binaria $x_{g,t}$ y la potencia generada por sobre el mínimo técnico $p_{g,t,\xi} \geq 0$. Dicho esto, la potencia total generada puede ser expresada como $P_{g,t,\xi} = P_g^{min} \cdot x_{g,t} + p_{g,t,\xi}$. Las restricciones (8), (9), (10) y (11) limitan la variable $p_{g,t,\xi}$ para las unidades $g \in G^1$, es decir, para todas las unidades con tiempo mínimo de encendido $t_g^U = 1$ y, por otro lado, las restricciones (12) y (13) limitan la variable para el resto de unidades $g \in G \setminus G^1$.

$$\begin{aligned} p_{g,t,e} \leq (\bar{P}_g - P_g^{min}) \cdot x_{g,t} - (\bar{P}_g - r_{su_g}) \cdot u_{g,t} - \\ \text{máx}(r_g^{SU} - r_g^{SD}, 0) \cdot v_{g,t+1} - r_{g,t,e}, \end{aligned} \quad \forall g \in G^1, t \in T, t \leq |T| - 1, \xi \in \Omega \quad (8)$$

$$p_{g,t,\xi} \leq (\bar{P}_g - P_g^{min}) - \max\{r_g^{SD} - r_g^{SU}, 0\} \cdot u_{g,t} \quad \forall g \in G^1, t \in T, t \leq |T| - 1, \xi \in \Omega \quad (9)$$
$$- (\bar{P}_g - r_g^{SD}) \cdot v_{g,t+1} - r_{g,t,\xi},$$

$$p_{g,t,e} \leq (\bar{P}_g - P_g^{min}) \cdot x_{g,t} - (\bar{P}_g - r_g^{SU}) \cdot u_{g,t} - r_{g,t,e}, \quad \forall g \in G^1, t \in T, t = |T|, \xi \in \Omega \quad (10)$$

$$p_{g,t,e} \leq (\bar{P}_g - P_g^{min}) \cdot x_{g,t} - \max\{r_g^{SD} - r_g^{SU}, 0\} \cdot u_{g,t} - r_{g,t,e}, \quad \forall g \in G^1, t \in T, t = |T|, \xi \in \Omega \quad (11)$$

$$p_{g,t,\xi} \leq (\bar{P}_g - P_g^{min}) \cdot x_{g,t} - (\bar{P}_g - r_g^{SU}) \cdot u_{g,t} \quad \forall g \in G^c \setminus G^1, t \in T, t \leq |T| - 1, \xi \in \Omega \quad (12)$$
$$- (\bar{P}_g - r_g^{SD}) \cdot v_{g,t+1} - r_{g,t,\xi},$$

$$p_{g,t,e} \leq (\bar{P}_g - P_g^{min}) \cdot x_{g,t} - (\bar{P}_g - r_g^{SU}) \cdot u_{g,t} - r_{g,t,e}, \quad \forall g \in G^c \setminus G^1, t \in T, t = |T|, \xi \in \Omega \quad (13)$$

donde $\bar{P}_g$ y P_g^{min} son la potencia máxima y mínima de cada unidad g respectivamente, mientras r_g^{SU} y r_g^{SD} son las tasas de encendido y apagado en MW y, finalmente $r_{g,t,\xi} \geq 0$ es la variable de decisión correspondiente a la reserva de giro en MW de la unidad g en el periodo t escenario ξ .

Reserva de giro: La restricción (14) asegura que la reserva de giro $r_{g,t,\xi}$ en el periodo t y escenario ξ sea igual a un porcentaje $r^{\min}$ de la demanda agregada $D_{t,\xi}$.

$$r^{\min} \cdot D_{t,\xi} \leq \sum_{g \in G^c} r_{g,t,\xi}, \quad \forall t \in T, \xi \in \Omega \quad (14)$$

Balance de potencia eólica: la restricción (15) asegura que la potencia utilizada $PV_{g,t,\xi}$ por la granja eólica g en el periodo t escenario ξ sumada a la potencia restringida $PC_{g,t,\xi}^W$ sea igual a la potencia eólica disponible $P_{g,t,\xi}^W$.

$$PV_{g,t,\xi} + PC_{g,t,\xi}^W = P_{g,t,\xi}^W, \quad \forall g \in W, t \in T, \xi \in \Omega \quad (15)$$

Restricciones de rampa: Los límites de rampa ascendente y descendente de la unidad $g \in G$ están definidos en las restricciones (16) y (17), respectivamente.

$$p_{g,t,\xi} - p_{g,t-1,\xi} \leq r_g^U \cdot \bar{P}_g - r_{g,t,\xi}, \quad \forall g \in G^c, t \in T, t \geq 2, \xi \in \Omega \quad (16)$$

$$p_{g,t-1,\xi} - p_{g,t,\xi} \leq r_g^D \cdot \bar{P}_g - r_{g,t-1,\xi}, \quad \forall g \in G^c, t \in T, t \geq 2, \xi \in \Omega \quad (17)$$

r_g^U y r_g^D son las máximas tasas de rampa ascendente y descendente, respectivamente, representadas como porcentaje de la capacidad máxima $\bar{P}_g$.

Para evaluar los costos de rampa, se estiman las rampas de potencia excluidas no positivas y no negativas, desde el periodo $t - 1$ hasta t en el escenario ξ

$$P_{g,t,\xi} - P_{g,t-1,\xi} = \Delta P_{g,t,\xi}^U - \Delta P_{g,t,\xi}^D, \quad \forall g \in G^c, t \in T, t \geq 2, \xi \in \Omega \quad (18)$$

donde $\Delta P_{g,t,\xi}^U \geq 0$ y $\Delta P_{g,t,\xi}^D \geq 0$ son las variables de decisión correspondientes a la rampa de potencia ascendente o descendente, respectivamente.

Restricciones de capacidad de transmisión: Las restricciones (19) y (20) representan la capacidad de transmisión máxima de las líneas en el sistema, siendo $\bar{P}_{(i,j)}$ la capacidad de transmisión de la línea $(i, j) \in L$.

$$B_{(i,j)} \cdot \Delta\theta_{(i,j),t,\xi} \cdot S_0 \leq \bar{P}_{(i,j)}, \quad \forall (i, j) \in L, t \in T, \xi \in \Omega \quad (19)$$

$$-B_{(i,j)} \cdot \Delta\theta_{(i,j),t,e} \cdot S_0 \leq \bar{P}_{(i,j)} \quad \forall (i, j) \in L, t \in T, \xi \in \Omega \quad (20)$$

4.1.7. Modelo no lineal entero mixto

El modelo presentado, representa un modelo MIQP. La resolución de este modelo debe su complejidad a la no linealidad presente en el costo total esperado, principalmente en el costo de combustible:

$$C(P_{g,t,e}) = FC_g^q P_{g,t,\xi}^2 + FC_g^l P_{g,t,\xi} + FC_g \quad (21)$$

donde:

- $P_{g,t,e}$: Variable de decisión que representa la potencia generada por la unidad g en el tiempo t para el escenario e .
- FC_g^q, FC_g^l, FC_g : Parámetros de la función de costos de combustible de la unidad $g \in G^f$, que capturan la relación no lineal entre la potencia generada y el consumo de combustible.

4.2. Aproximación Lineal por Tramos

Para superar la alta exigencia computacional de las formulaciones cuadráticas, se implementa la técnica PUA. Esta técnica aproxima las funciones de costos cuadráticas mediante múltiples segmentos lineales, transformando así el problema de UC en una formulación de MILP, que es más manejable y eficiente de resolver utilizando solvers comerciales avanzados como Gurobi Optimizer. Para ello se deben agregar los siguientes elementos al modelo:

- **Conjuntos**
 - K : Conjunto de tramos en los cuales se van a dividir las funciones, indexado por l .
- **Parámetros**

- $\bar{P}_{g,l}$: Potencia máxima de la unidad $g \in G^f$ en el tramo $l \in K$.
- $\alpha_{g,l}$: Pendiente de la función de costos de la unidad $g \in G^f$ en el tramo $l \in K$

■ Variables

- $p_{g,t,\xi,l}^l$: potencia generada por la unidad g en el tramo l en el periodo t en el escenario ξ .

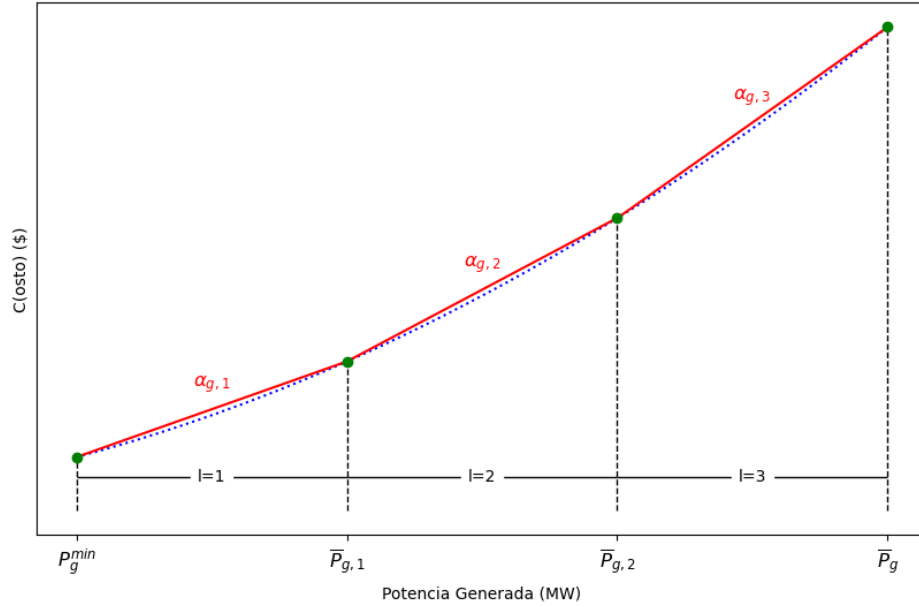


Figura 1: Curva linealizada por tramos

Dado esto, las funciones de costos de combustible se aproximan de la siguiente manera:

$$C(P_{g,t}) \approx C(P_g^{min}) \cdot x_{g,t,\xi} + \sum_{l=1}^K \alpha_{g,l} \cdot p_{g,t,\xi,l}^l \quad (22)$$

Esta aproximación permite representar la función de costos original mediante una combinación de segmentos lineales, donde cada segmento l captura una porción específica del rango de generación de potencia. A continuación, se establecen las condiciones necesarias para garantizar la correcta ejecución de la linealización.

4.2.1. Condiciones de Linealización

Para asegurar que la aproximación lineal refleje adecuadamente la función de costos cuadrática original, se definen tres condiciones principales:

Potencia Total Se reformula la variable de decisión correspondiente a la potencia generada por sobre el mínimo técnico $p_{g,t,\xi}$ que se define de la siguiente manera:

$$p_{g,t,\xi} = \sum_{l \in K} p_{g,t,\xi,l}^l, \quad \forall g \in G^f, t \in T, \xi \in \Omega \quad (23)$$

Por lo que la potencia total generada $P_{g,t,\xi}$ por la unidad g en el periodo t en el escenario ξ se define de la siguiente forma:

$$P_{g,t,\xi} = \sum_{l=1}^K p_{g,t,\xi,l}^l + P_g^{min} \cdot x_{g,t}, \quad \forall g \in G^f, t \in T, \xi \in \Omega \quad (24)$$

Esta ecuación asegura que la potencia generada por la unidad g en el tiempo t se distribuye correctamente entre los diferentes tramos lineales definidos. Si la unidad está apagada ($x_{g,t} = 0$), la potencia generada debe ser cero. Si está encendida ($x_{g,t} = 1$), la potencia total es la suma de las potencias en los tramos más la potencia mínima de operación.

Límites de los Segmentos de Potencia Cada segmento de potencia $p_{g,t,\xi,l}^l$ debe estar dentro de los límites máximos y mínimos definidos por la capacidad de generación de la unidad i en el tramo l . Esto se formaliza mediante la siguiente restricción:

$$0 \leq p_{g,t,\xi,l}^l \leq \bar{P}_{g,l} - \bar{P}_{g,(l-1)}, \quad \forall g \in G^f, t \in T, \xi \in \Omega, l \in K \quad (25)$$

donde $\overline{P}_{g,l}$ es la potencia máxima de la unidad g en el tramo l .

Esta restricción garantiza que la potencia generada en cada tramo lineal no exceda los límites físicos de la unidad generadora. Además, establece que la potencia en un tramo l está limitada por la diferencia entre la potencia máxima del tramo l y la del tramo anterior $l - 1$, asegurando una transición suave entre tramos. Además, se define que $\overline{P}_{g,0} = P_g^{min}$.

Pendiente del Tramo La pendiente $\alpha_{g,l}$ de cada segmento lineal l se define para que refleje la tasa de cambio del costo entre los puntos de potencia máxima de tramos adyacentes. Esto puede definirse de dos maneras:

$$\alpha_{g,l} = \frac{C(\overline{P}_{g,l})_g - C(\overline{P}_{g,(l-1)})_g}{\overline{P}_{g,l} - \overline{P}_{g,(l-1)}} \quad \forall g \in G^f, l \in K \quad (26)$$

La pendiente $\alpha_{g,l}$ determina la tasa a la cual el costo de combustible cambia en cada tramo lineal. La primera definición utiliza la diferencia de costos entre dos puntos de potencia máxima consecutivos, normalizada por la diferencia de potencia, para calcular la pendiente. La segunda definición deriva directamente de la función cuadrática original, relacionando los coeficientes de la función con las potencias máximas de los tramos adyacentes. Ambas definiciones aseguran que la aproximación lineal capture la función cuadrática de costo de combustible de manera precisa.

La elección adecuada del número de tramos K es fundamental para lograr un balance óptimo entre precisión y eficiencia computacional. Una configuración con un número moderado de tramos puede ofrecer una aproximación suficientemente precisa mientras mantiene la complejidad del modelo bajo control. Por otro lado, una mayor cantidad de tramos mejora la precisión de la aproximación, pero incrementa la carga computacional, lo que puede ser contraproducente en

sistemas donde los tiempos de cómputo son limitantes.

La selección del número de tramos K implica considerar múltiples factores, incluyendo la precisión deseada en la aproximación de la función de costos, la capacidad computacional disponible, y la escalabilidad del modelo en sistemas eléctricos de gran tamaño. Un mayor número de tramos reduce el error en la aproximación de los costos de combustible, pero incrementa el número de variables y restricciones en el modelo MILP, lo que puede llevar a tiempos de resolución más largos. Por lo tanto, es crucial encontrar un equilibrio que permita una representación precisa sin sacrificar la eficiencia computacional.

4.3. Aproximación Lineal

Se busca aproximar las funciones de costos de combustibles cuadráticas mediante una recta definida como:

$$C(P) = M_g \cdot P_{g,t,\xi} + I_g \quad (27)$$

donde M_g es el coeficiente lineal que representa la pendiente de la recta, e I_g es el intercepto de la recta.

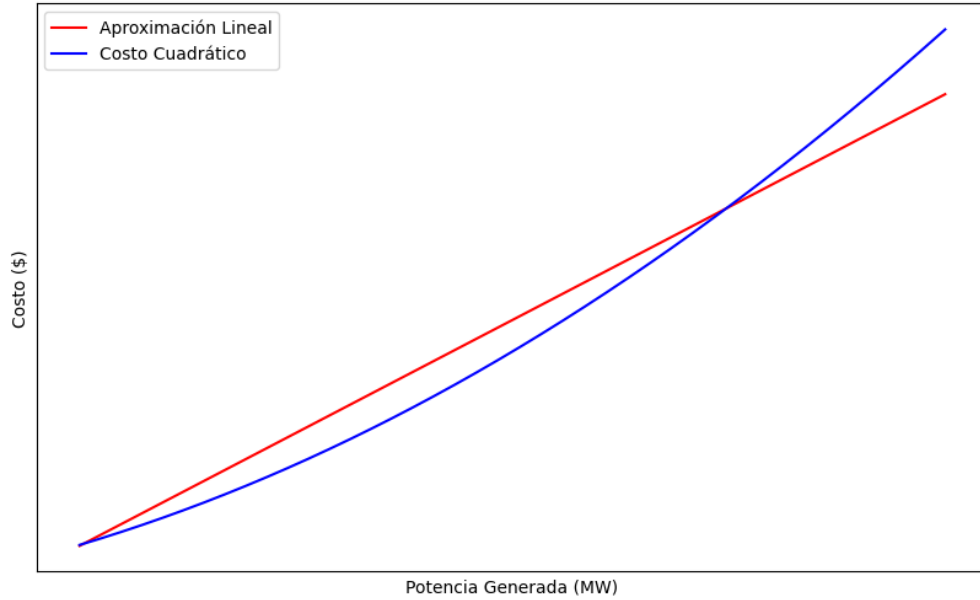


Figura 2: Recta ajustada mediante solver a la función cuadrática

Para obtener los valores M_g y I_g se utiliza la herramienta solver de Microsoft Excel mediante la cual se buscó minimizar el error promedio porcentual de la recta con respecto a la curva cuadrática. Para ello, se calcula el error porcentual (E %) de cada valor de $p_g \in [P_g^{min}, \bar{P}_g]$ para cada unidad $g \in G^f$, evaluado en la función lineal y en la función cuadrática:

$$E \%_{p,g} = \left| \frac{(M_g \cdot p_g + I_g) - (FC_g^q \cdot p_g^2 + FC_g^l \cdot p_g + FC_g)}{(FC_g^q \cdot p_g^2 + FC_g^l \cdot p_g + FC_g)} \right| \cdot 100 \quad (28)$$

donde M_g y I_g son los coeficientes buscados de la recta que minimicen el error y FC_g^q , FC_g^l y FC_g son los coeficientes cuadráticos de la función de costos de combustible de la unidad $g \in G^f$.

Posteriormente se busca minimizar el promedio de los errores porcentuales en todo el rango de $p \in [P_g^{min}, \bar{P}_g]$ para la unidad $g \in G^f$

$$\overline{E \%_g} = \frac{\sum_{p \in [P_g^{min}, \bar{P}_g]} E \%_p}{|P_g^{min} - \bar{P}_g|} \quad (29)$$

Además, se incluye como restricción que el costo en el mínimo técnico debe ser igual en ambas formulaciones (lineal y cuadrática) para todas las unidades.

$$(M_g \cdot P_g^{min} + I_g) = FC_g^q \cdot (P_g^{min})^2 + FC_g^l \cdot P_g^{min} + FC_g, \quad \forall g \in G^f \quad (30)$$

para así asegurar que ambas formulaciones compartan el valor del costo en el mínimo técnico y generar una aproximación más precisa.

Utilizando el método de resolución GRG Nonlinear entregado por la herramienta solver de Microsoft Excel, teniendo como objetivo minimizar la función (29), cambiando las celdas correspondientes a M_g y I_g y manteniendo la restricción definida en (30) se obtienen los valores óptimos que formen una recta que aproxime la curva de costos de manera eficiente.

5. Caso De Estudio

Para evaluar el modelo original MIQP y los modelos MILP simple y por tramos, se utilizará el sistema de pruebas IEEE-39, que cuenta con $|N| = 39$ nodos (barras), $|G^f| = 10$ unidades generadoras convencionales y $|L| = 46$ líneas de transmisión.

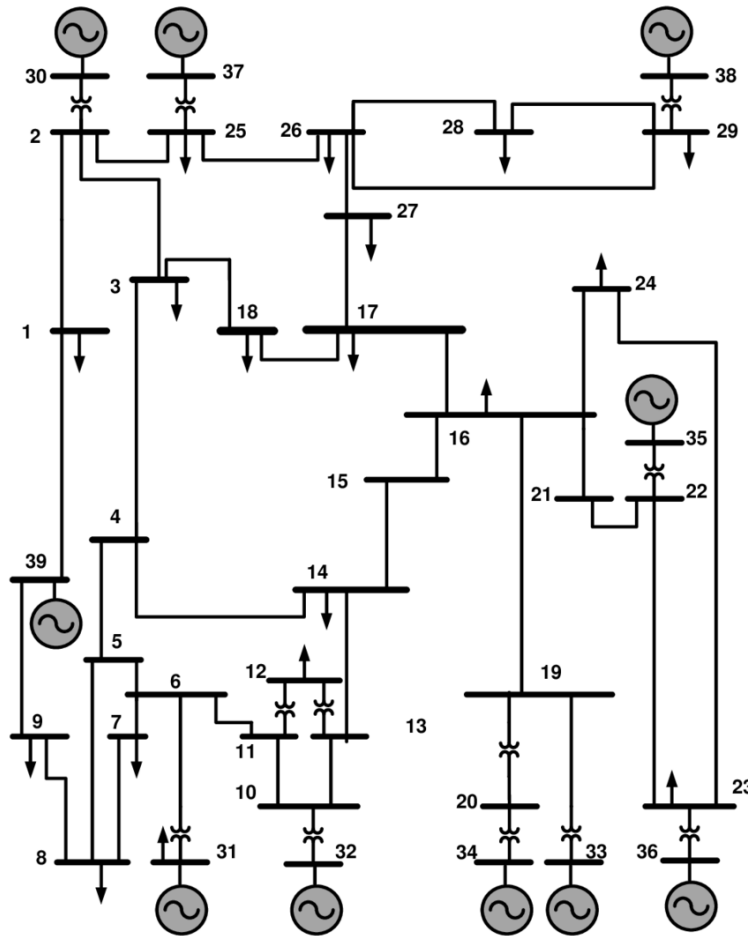


Figura 3: Diagram of the New England IEEE 10 generators 39-Bus test system

En la Tabla 1 se presentan los parámetros técnicos de las líneas de transmisión $(i, j) \in L$, la capacidad máxima $\bar{P}_{(i,j)}$ MW y la reactancia $X_{(i,j)}$ (p.u). Los valores por unidad de $X_{(i,j)}$ se obtienen considerando una potencia base aparente $S_0 = 100$ MVA y, según los supuestos correspondientes al flujo de potencia DC, la resistencia de las líneas de transmisión es despreciable. Por

lo tanto, la susceptancia de las líneas $B_{(i,j)}$ es igual a $-1/X_{(i,j)}$ (p.u).

Tabla 1: Parámetros técnicos de las líneas de Transmisión $(i, j) \in L$

$i \in N$	$j \in N$	$\bar{P}_{(i,j)}$ (MW)	$X_{(i,j)}$ (p.u)	$i \in N$	$j \in N$	$\bar{P}_{(i,j)}$ (MW)	$X_{(i,j)}$ (p.u)
1	2	600	0,0411	14	15	600	0,0217
1	39	1000	0,0250	15	16	600	0,0094
2	3	500	0,0151	16	17	600	0,0089
2	25	500	0,0086	16	19	600	0,0195
2	30	1200	0,0181	16	21	600	0,0135
3	4	500	0,0213	16	24	600	0,0059
3	18	500	0,0133	17	18	600	0,0082
4	5	600	0,0128	17	27	600	0,0173
4	14	500	0,0129	19	20	900	0,0138
5	6	1200	0,0026	19	33	900	0,0142
5	8	900	0,0112	20	34	900	0,0180
6	7	900	0,0092	21	22	900	0,0140
6	11	480	0,0082	22	23	600	0,0096
6	31	1800	0,0250	22	35	900	0,0143
7	8	900	0,0046	23	24	600	0,0350
8	9	900	0,0363	23	36	900	0,0272
9	39	900	0,0250	25	26	600	0,0323
10	11	600	0,0043	25	37	900	0,0232
10	13	600	0,0043	26	27	600	0,0147
10	32	900	0,0200	26	28	600	0,0474
12	11	500	0,0435	26	29	600	0,0625
12	13	500	0,0435	28	29	600	0,0151
13	14	600	0,0101	29	38	1200	0,0156

La construcción del programa de encendido y apagado considera un horizonte de tiempo $|T| = 24$ considerado de marea horaria y un $\Delta t = 1h$.

En la Tabla 2 se presentan los valores del factor nodal $p_i, \forall i \in N$, excluyendo los nodos $i \in N$ sin demanda, los cuales ponderan el perfil de demanda $\{D_{t,\xi}\}_{t=1,\dots,|T|}$ para determinar $\{D_{i,t,\xi}\}_{t=1,\dots,|T|}$.

Tabla 2: Factor Nodal

$i \in N$	p_i	$i \in N$	p_i
1	0,016169491	21	0,044845573
3	0,048596467	23	0,039473659
4	0,080405509	24	0,048607020
7	0,037492486	25	0,034547635
8	0,083164661	26	0,021133701
9	0,010098796	27	0,043911584
12	0,013342898	28	0,031366595
15	0,053529430	29	0,042977001
16	0,049890244	31	0,001552314
18	0,024270829	39	0,170830294
20	0,103793813		

Los parámetros técnicos correspondientes a las unidades $g \in G^c$ y $g \in W$ se presentan en la Tabla 12 (ver anexo) y la Tabla 3.

Tabla 3: Costos $g \in G^c$

$i \in N$	C_g^{OM}	C_g^{SU}	C_g^{NL}	C_g^R
	US\$/MWh	US\$/MW	US\$/h	US\$/MW
6	0,00500	-	-	-
30	0,00340	-	1,00	-
31	0,00297	0,05350	0,68	0,00171
32	0,00320	0,03747	0,45	0,00054
33	0,00357	0,05350	0,68	0,00171
34	0,00350	0,03212	0,45	0,00086
35	0,00298	0,05350	0,68	0,00171
36	0,00272	0,03747	0,48	0,00086
37	0,00450	0,05350	0,68	0,00171
38	0,00230	0,02569	1,20	-
39	0,00536	-	0,67	0,0011

En la Tabla 4 se presentan los coeficientes de las funciones de costos de combustible correspondientes a cada unidad generadora $g \in G^c$ (Singh et al., 2023)(Palanichamy et al., 2015)(Yehescale and Damodar Reddy, 2018) (Djurovic et al., 2012) (Aliyari et al., 2017):

Tabla 4: Coeficientes Costos de Combustible de las unidades $g \in G^c$

$i \in N$	FC_g^q	FC_g^l	FC_g
	\$/MW ²	\$/MW	\$
30	-	-	-
31	$4,447 \cdot 10^{-6}$	0,01240	0,3230
32	$1,730 \cdot 10^{-6}$	0,02779	0,6700
33	$4,447 \cdot 10^{-6}$	0,01240	0,3230
34	$1,799 \cdot 10^{-5}$	0,03827	1,3567
35	$4,447 \cdot 10^{-6}$	0,01240	0,3230
36	$1,199 \cdot 10^{-5}$	0,03755	0,1178
37	$4,447 \cdot 10^{-6}$	0,01240	0,3230
38	$2,840 \cdot 10^{-6}$	0,00666	0,7945
39	$2,110 \cdot 10^{-6}$	0,01650	0,6800

En la Tabla 5 se presentan el costo por emisiones de CO_2 C^{CO_2} , el costo por no cumplimiento de la demanda C^{ens} y la reserva mínima de giro r^{min} .

Tabla 5: Parámetros Técnicos

C^{CO_2}	C^{ens}	r^{min}
US\$/tonCO ₂	US\$/MW	%
0,04	10,0	0,05

Para evaluar los modelos se toma en consideración un caso con $|\Omega| = 30$, donde la probabilidad de cada escenario $\xi \in \Omega$ se presenta en la Tabla 6 y los valores de la demanda $D_{t,\xi}$ y la velocidad del viento $ws_{t,\xi}$ se presentan en las Tablas 13 y 14 (ver anexo).

Tabla 6: Probabilidad de ocurrencia por escenario

$\xi \in \Omega$	$\frac{P_\xi}{\%}$	$\xi \in \Omega$	$\frac{P_\xi}{\%}$
1	0,086	16	0,029
2	0,034	17	0,028
3	0,036	18	0,034
4	0,033	19	0,047
5	0,023	20	0,034
6	0,060	21	0,018
7	0,037	22	0,031
8	0,050	23	0,021
9	0,028	24	0,018
10	0,014	25	0,031
11	0,022	26	0,013
12	0,020	27	0,047
13	0,034	28	0,050
14	0,038	29	0,024
15	0,036	30	0,024

Además, para el modelo MILP simple, se presentan en la Tabla 7 los parámetros de las funciones de costos de combustible lineales de cada unidad $g \in G^c$.

Tabla 7: Valores lineales ajustados unidades $g \in G^c$

$i \in N$	FC_g^l	FC_g
	\$/MW	\$
30	-	-
31	0,015486223	-0,125298618
32	0,029387195	0,332704487
33	0,015548476	-0,140782042
34	0,049927588	-0,369420988
35	0,015690780	-0,185736798
36	0,046783172	-1,551215715
37	0,015112670	-0,021197700
38	0,009590895	0,120433825
39	0,017787097	0,679999957

6. Resultados Y Discusión

Para este estudio, se toman en consideración 3 tipos de modelos: el modelo MIQP original, el modelo MILP simple y el modelo MILP con las funciones de costos de combustible linealizadas, con un número de tramos $|K| = \{2, 4, 5, 6, 8, 10\}$

En este proceso, se ha empleado Gurobi Optimizer versión 10.0.0 (linux64), un software reconocido por su eficiencia y por implementar algoritmos avanzados en la resolución de problemas de optimización enteros mixtos. Se utiliza un equipo con un procesador Intel(R) Xeon(R) Silver 4114 CPU @ 2.20GHz, que cuenta con 20 núcleos físicos y 40 procesadores lógicos.

Tabla 8: Características de los Modelos

Modelo	Filas	Columnas	No-Ceros	Terminos Cuadráticos	Variables Continuas	Variables Binarias
Original	125833	79081	294721	12432	78361	720
Simple	125833	79081	294721	0	78361	720
$ K = 2$	125833	86281	351961	0	85561	720
$ K = 4$	125833	100681	466441	0	99961	720
$ K = 6$	125833	115081	580921	0	114361	720
$ K = 8$	125833	129481	695401	0	128761	720
$ K = 10$	125833	143881	809881	0	143161	720

Las características de los modelos presentadas por Gurobi se presentan en la Tabla 8, donde se evidencia la eliminación de los términos cuadráticos en los modelos MILP, un resultado inherente al proceso de linealización. Cabe destacar que esta simplificación no afecta el número de restricciones (filas) ni la cantidad de variables binarias en los modelos. Sin embargo, se observa un incremento significativo en el número de variables continuas, asociado específicamente a la incorporación de la variable $p_{g,t,\xi,l}^l$, indexada por los conjuntos G, T, Ω, K . Esta variable, ausente en el modelo MILP simple, explica la equivalencia en el número total de variables (columnas) entre el éste y el modelo MIQP original. Adicionalmente, al incrementar el valor de $|K|$, se genera un cre-

cimiento proporcional tanto en el número de variables como en los elementos no nulos de la matriz de coeficientes, reflejando la mayor complejidad computacional de los modelos linealizados.

6.1. Función Objetivo

Los valores óptimos esperados obtenidos por cada modelo, y su respectivo error porcentual con respecto al valor óptimo esperado del modelo original están presentados en la Tabla 9.

Tabla 9: Valor Objetivo de cada modelo

Modelo	Valor Objetivo	Error
Original	1809,28	-
Simple	1826,69	0,962 %
$ K = 2$	1811,51	0,124 %
$ K = 4$	1809,83	0,030 %
$ K = 6$	1809,51	0,013 %
$ K = 8$	1809,42	0,008 %
$ K = 10$	1809,37	0,005 %

Como se puede observar, el modelo simple presenta un error de 0,962 % con respecto al costo total óptimo esperado del modelo MIQP original. Dado que un error cercano al 1 % es relativamente alto, este modelo puede no ser adecuado en aplicaciones donde la precisión es crucial, aunque es adecuado en escenarios donde el tiempo de cómputo es limitado o los recursos computacionales son restringidos.

En contraste, la aproximación lineal por partes a medida que se aumenta el número de tramos, el error porcentual disminuye de forma significativa. A partir de los 6 tramos, el error porcentual alcanza un valor de 0.013 %, lo que representa una mejora dramática en la precisión. Esto indica que la aproximación por partes es capaz de seguir de manera muy cercana el comportamiento de la función cuadrática original, ofreciendo una estimación mucho más precisa que el modelo de aproximación lineal simple.

De hecho, en el caso del modelo con 10 tramos, el error es prácticamente nulo, lo que indica una aproximación extremadamente precisa al valor óptimo esperado. Este modelo logra replicar con alta exactitud el comportamiento de la función cuadrática original, lo que hace que los resultados obtenidos sean prácticamente indistinguibles de los obtenidos con el modelo exacto. Sin embargo, es importante señalar que la mejora en precisión no siempre se traduce en una mejora proporcional en términos de los recursos computacionales. Aunque el modelo MILP con $|K| = 10$ extremadamente preciso, su implementación requiere de más cálculos y recursos, como se evidencia en la Tabla 8, donde se observa que el modelo mencionado posee la mayor cantidad de variables (Columnas) y No-Ceros, lo que puede resultar en un aumento en los tiempos de cómputo. Por lo tanto, si bien la aproximación por 10 tramos es ideal en términos de precisión, también implica un mayor coste computacional que debe ser considerado en función de los requisitos del sistema.

6.2. Tiempo de resolución

Se presenta en la Tabla 10 los tiempos de resolución de cada modelo y los errores porcentuales con respecto al tiempo de resolución del modelo original.

Tabla 10: Tiempo de resolución de cada modelo

Modelo	Tiempo de Resolución (s)	Reducción de tiempo
Original	3494,16	-
Simple	231,41	93 %
$ K = 2$	315,69	91 %
$ K = 4$	334,67	90 %
$ K = 6$	546,74	84 %
$ K = 8$	709,50	80 %
$ K = 10$	636,64	82 %

En la Tabla 10 se puede observar el porcentaje de reducción del tiempo de resolución

para cada uno de los modelos en comparación con el modelo cuadrático. Tal como se destaca, el modelo lineal es el que más reduce el tiempo de cómputo, lo cual refleja su simplicidad y su menor requerimiento de esfuerzo computacional en relación con modelos más complejos. Por otro lado, el modelo de 8 tramos muestra el menor porcentaje de reducción de tiempo, lo que indica que, a pesar de ser más preciso, también es más costoso en términos de recursos computacionales.

Es importante notar que, en este caso específico, el modelo más complejo no es el que más recursos utiliza, lo que podría parecer contraintuitivo. Este comportamiento puede atribuirse a diversos factores, como la naturaleza de los datos y las características de los números generados a partir de la división en tramos.

Asimismo, otro punto relevante es que los modelos de 2 tramos y 4 tramos muestran una reducción prácticamente idéntica en el tiempo de resolución. Esto sugiere que, en este caso, incrementar el número de tramos no resulta en un aumento significativo en los recursos computacionales, por lo que, dependiendo de las necesidades de precisión, ambos modelos podrían considerarse igualmente eficientes desde el punto de vista del uso de recursos.

6.3. Programa de encendido y apagado

La Figura 4 muestra el programa óptimo de encendido y apagado para el modelo original, modelo simple y los modelos por tramos. En este experimento en específico, este programa es igual para todos los modelos.

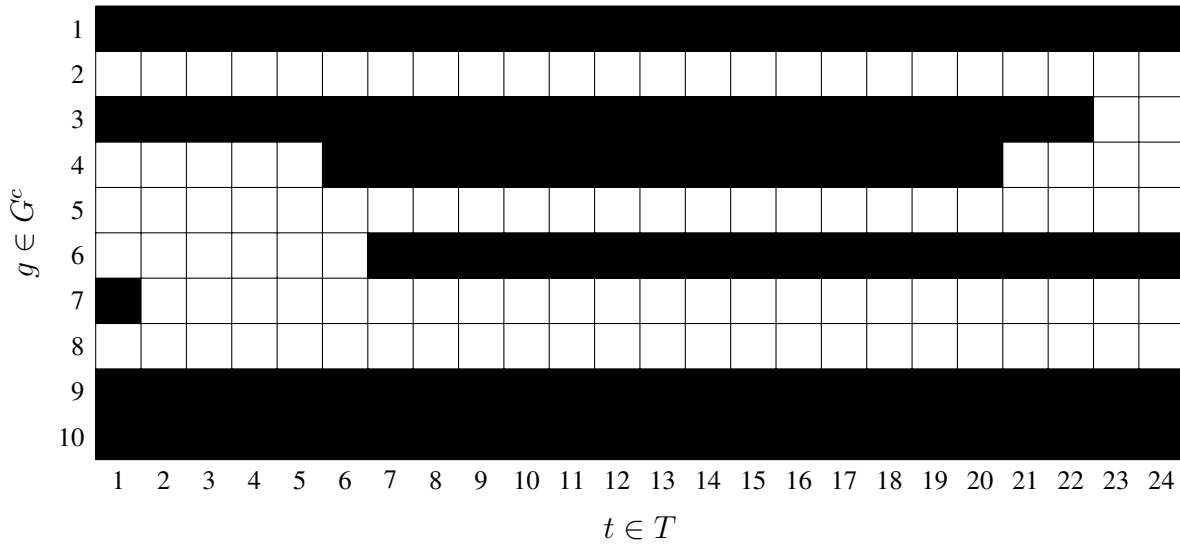


Figura 4: Programación Horaria

La homogeneidad del programa óptimo de encendido y apagado a través de los siete modelos de linealización analizados resalta la robustez de las decisiones operativas frente a las variaciones en la representación de la función de costos. Este hallazgo sugiere que, en contextos similares al estudiado, la elección del modelo de linealización puede no afectar significativamente el programa operativo, permitiendo a los operadores enfocarse en otros aspectos críticos de la gestión del sistema eléctrico.

Se puede observar una tendencia a evitar unidades en base a carbón, así como las unidades en base a gas con tecnología “OCGT”. En ambos casos influye el impacto en el costo por emisión de CO_2 , debido al alto valor de H_g y μ_g^f (ver Tabla 12 en Anexos).

6.4. Despacho

La decisión de la potencia esperada de cada unidad $g \in G^c$ varía levemente entre los modelos. Estas modificaciones afectan en cierta medida los costos dependientes de la potencia generada por cada unidad, lo que puede tener implicaciones significativas en la operación y planificación

del sistema eléctrico. Cabe destacar que, debido a la existencia de plantas eólicas $\in W$, las diferencias en el despacho de las unidades convencionales son compensadas mediante estas granjas, garantizando así el cumplimiento de la demanda en todo momento. En el la Figura 5 se observa la potencia esperada de cada tecnología mencionada en la Tabla 12(Ver Anexo) durante cada periodo $t \in T$ además de la restricción de energía eólica “Eólica-PC”.

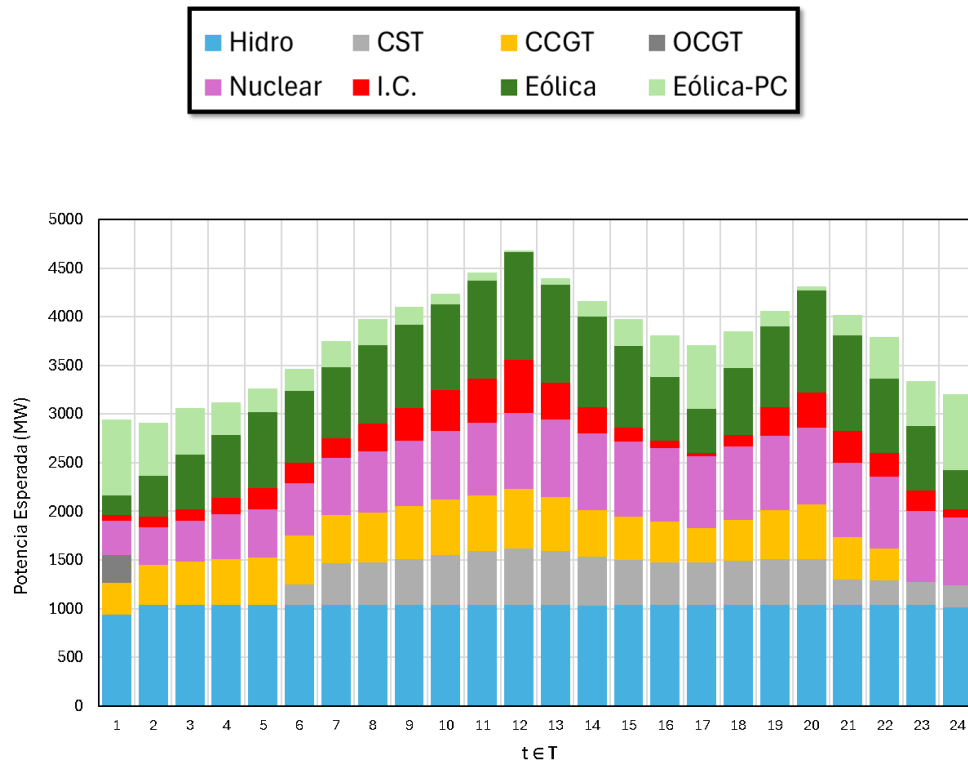


Figura 5: Despacho modelo original

En la Figura 6 se puede observar que el error porcentual entre los modelos lineales simple y linealizado con respecto al modelo MIQP original es relativamente bajo, por lo que analizar el despacho como en la Figura 5 no es óptimo.

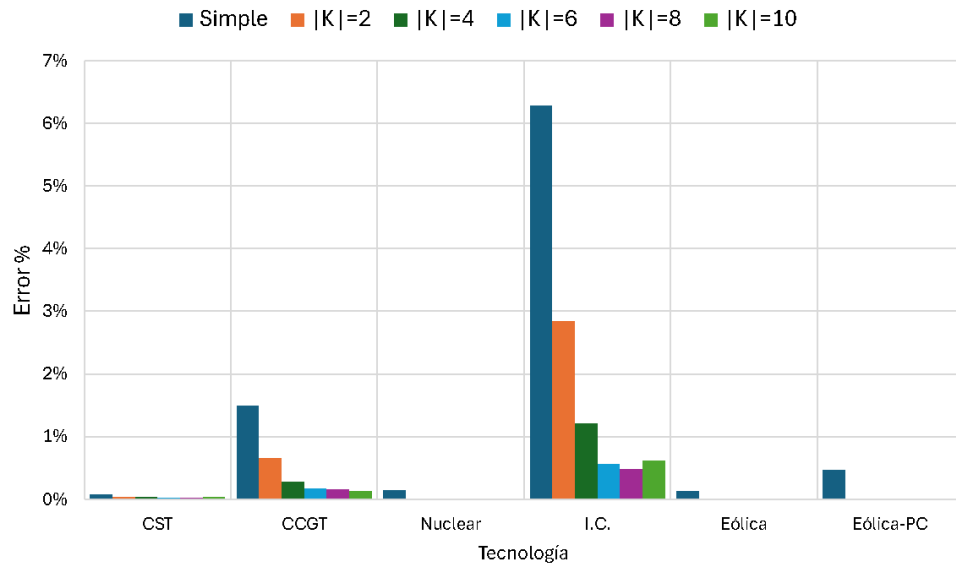


Figura 6: Error % potencia esperada por modelo

En la Figura 6 se observan los errores porcentuales de la potencia esperada generada por cada tecnología en cada modelo lineal con respecto al modelo MIQP original, las tecnologías “Hidro” y “CCGT” no se presentan ya que poseen un error del 0 % en todos los casos. En general, el error es bajo, como en las tecnologías “CST”, “Nuclear”, “Eólica” y “Eólica-PC”, pero en las tecnologías “CCGT” y por sobre todo “I.C.” se presentan errores mayores que el promedio, incluso en el modelo Linealizado con $|K| = 10$ posee el error mas alto, sin dejar de ser bajo, diferencia que se puede explicar por las características de la unidad $g \in G^c$, al poseer costos mas bajos en relación al resto de las unidades y poseer el mayor rango de potencia, ya que posee un $P_g^{min} = 0$ MW y un $\bar{P}_g = 1100$ MW (Ver Tabla 12 en Anexo).

6.5. Costos

La función objetivo está conformada por deferentes tipos de costos entre ellos se incluyen el costo de encendido que corresponde al costo asociado al encendido de una unidad generadora

desde un estado de apagado y viceversa; el costo de No-Load, que representa los costos fijos incurridos por mantener una unidad operativa incluso cuando no está generando potencia; el costo de Operación y Mantenimiento, que cubre los gastos relacionados con la supervisión y el mantenimiento de las instalaciones generadoras; el costo de combustible, que es una de las componentes principales del costo total debido al consumo directo de recursos energéticos; el costo de emisiones de CO_2 , el cual penaliza las emisiones de dióxido de carbono, el costo de rampa, que penaliza los cambios abruptos en la generación de una unidad para adaptarse a las variaciones de la demanda y el costo de penalización por ens (Energy Not Supplied) que penaliza el no poder satisfacer completamente la demanda energética.

Si bien el modelo cuadrático busca minimizar el costo total, las pequeñas diferencias en la potencia despachada por las unidades generadoras en los distintos modelos provocan diferencia en los costos específicos mencionados. Esto es especialmente relevante para los costos dependientes de la potencia despachada, que incluyen el costo de combustible, de operación y mantención, emisiones de CO_2 , y rampa. Los valores de estos costos y su error con respecto al modelo original se presentan en la Tabla 11.

Tabla 11: Costos esperados y error por modelo

Modelo	O&M (US\$)	Error	Combustible (US\$)	Error	Emisiones de CO_2 (US\$)	Error	rampa (US\$)	Error
Original	301,02	-	718,12	-	562,26	-	7,42	-
Simple	300,61	0,13 %	737,70	2,73 %	560,36	0,34 %	7,56	1,80 %
K =2	300,89	0,04 %	721,14	0,42 %	561,57	0,12 %	7,46	0,50 %
K =4	300,99	0,01 %	718,90	0,11 %	562,05	0,04 %	7,43	0,13 %
K =6	301,01	0,00 %	718,40	0,04 %	562,22	0,01 %	7,42	0,06 %
K =8	301,00	0,01 %	718,36	0,03 %	562,18	0,01 %	7,42	0,02 %
K =10	301,03	0,00 %	718,10	0,00 %	562,37	0,02 %	7,41	0,11 %

La Tabla 11 muestra el error porcentual de los resultados de cada modelo con respecto al

Modelo original, se puede observar que los modelos por tramos son significativamente más exactos que el modelo lineal. Este hecho refleja la capacidad de los modelos más sofisticados para capturar con mayor precisión las variaciones en los costos de operación y mantenimiento, ajustándose mejor a las condiciones reales de operación. Sin embargo, a pesar de que el error porcentual en el modelo lineal es relativamente bajo, la acumulación de pequeñas inexactitudes en grandes sistemas de generación puede tener un impacto notable en los costos totales de operación.

Los costos esperados de O&M obedecen esta tendencia, sin embargo, el modelo linealizado con $|K| = 8$ que el modelo linealizado con $|K| = 6$ posee un error mayor, aunque la diferencia es muy baja, esto demuestra que no siempre un modelo mas complejo va a tener una aproximación mayor que un modelo mas simple. Este hecho puede ser exclusivo del conjunto de parámetros con el que se realizaron las pruebas

Con respecto a los costos esperados de emisiones de CO_2 , se observa que a medida que se incrementa la complejidad del modelo, se alcanza una mayor exactitud en la estimación del costo de emisiones de CO_2 . No obstante, en el caso específico analizado en este estudio, se presenta una particularidad: en los dos modelos más complejos ($|K| = 8$ y $|K| = 10$), se aprecia una menor precisión del costo en comparación con el modelo $|K| = 6$.

Aunque esta diferencia es mínima (los errores para los tres modelos se mantienen por debajo del 0.05 %), es un detalle digno de evaluación en situaciones donde se busque un modelo que sea estrictamente exacto. Si bien la magnitud del error es despreciable en la práctica, es un aspecto a considerar cuando se requiere una mayor rigurosidad en la evaluación de costos en sistemas con grandes emisiones o cuando las regulaciones ambientales son estrictas.

Los costos esperados de rampa de igual manera se comportan con una tendencia similar a la observada en los análisis anteriores: a medida que se incrementa la complejidad del modelo,

el error promedio en la estimación del costo esperado de rampa disminuye. Sin embargo, en este caso, también se evidencia un comportamiento particular en los modelos de mayor complejidad.. Esto es notable, ya que en el caso del modelo linealizado con $|K| = 10$, el error alcanza valores en torno al 0.2 %, lo que lo convierte en un factor más significativo en comparación con otros costos como el de CO_2 o el de operación y mantención.

La aproximación al costo esperado de combustible del modelo MIQP mejora significativamente mientras mas complejo sea el modelo. En particular, a partir de los 6 tramos de linealización, el error porcentual es lo suficientemente bajo como para considerarse aceptable en la mayoría de los escenarios, con un valor cercano al 0 %. Este nivel de precisión hace que los modelos más complejos sean muy eficientes en la representación de los costos de combustible, lo que los convierte en una opción atractiva para sistemas que requieren una alta precisión en la predicción de este costo.

Es lógico que este costo sea el que mejor se aproxima, ya que la linealización implementada en el modelo incide directamente sobre la función de costos de combustible. Al reemplazar la función original, típicamente cuadrática, por una aproximación lineal por tramos, se logra una representación simplificada que preserva la esencia del comportamiento del consumo de combustible en función del despacho, lo que facilita una mejor estimación de este costo.

Por lo tanto, la elección del modelo adecuado dependerá no solo de la precisión requerida para el cálculo del costo esperado de combustible, sino también de cómo el modelo afecta el despacho total y, en consecuencia, los costos esperados asociados. En sistemas donde el costo de combustible representa una fracción considerable del costo total, un modelo con 6 tramos o más podría ser suficiente para lograr una aproximación precisa sin incurrir en una complejidad computacional excesiva.

6.6. Analisis

Los modelos de linealización con mayor cantidad de tramos (6, 8 y 10) muestran una reducción en el error porcentual del costo total esperado. A partir de 6 tramos, los errores porcentuales son casi nulos, lo que indica que estos modelos logran capturar con precisión la no linealidad presente en los costos esperados de generación. Esta mejora en la precisión se traduce en decisiones de despacho de energía más precisas y un costo total que se acerca cada vez más al óptimo teórico que proporcionaría el modelo cuadrático.

Sin embargo, esta mejora no es lineal ni infinita. Como se observa en los resultados, a partir de un cierto punto, el aumento en la precisión es despreciable, mientras que la complejidad computacional aumenta considerablemente. Específicamente, los modelos con 8 o más tramos apenas ofrecen mejoras perceptibles en comparación con los de 6 tramos, lo que sugiere que existe un "punto de equilibrio". Este punto marca el límite en el cual el beneficio adicional de la precisión no justifica el aumento en los recursos computacionales y el tiempo de cálculo. Este comportamiento es particularmente relevante en sistemas donde los recursos computacionales son limitados o cuando se requiere tomar decisiones en tiempo real.

Otro resultado importante del estudio es la relación no lineal entre la complejidad de los modelos y el uso de recursos computacionales. Los modelos menos complejos (simple y $|K| = 2$) requieren significativamente menos recursos en comparación con los más complejos.

Este comportamiento sugiere que es posible obtener una alta precisión sin un aumento lineal en la carga computacional, lo que refuerza la viabilidad de utilizar modelos más complejos en sistemas grandes. Por lo tanto, el modelo de 6 tramos parece ser un punto de equilibrio óptimo, ofreciendo una precisión elevada sin un aumento excesivo en el uso de recursos.

7. Conclusión

En el presente trabajo se desarrolló un modelo de UC no lineal al cual se le aplica la técnica de PUA para la linealización de la función de costos de combustible mediante tramos lineales y una aproximación lineal simple. Estas aproximaciones permitieron convertir un problema cuadrático no lineal en uno de MILP, lo que facilitó su resolución utilizando solvers avanzados como Gurobi Optimizer.

El sistema de prueba IEEE-39 fue utilizado como base para evaluar la efectividad de los modelos Lineales. En este contexto, se realizaron simulaciones utilizando diferentes configuraciones de segmentación para la linealización de la función de costos. Los resultados mostraron que la PUA ofrece una aproximación precisa de las curvas de costos cuadráticos, manteniendo los errores dentro de márgenes aceptables. A medida que se incrementó el número de tramos, se observó una mejora en la precisión.

El rendimiento computacional también fue un aspecto central en este estudio. Las simulaciones mostraron que los modelos MILP reducen significativamente los tiempos de cómputo en comparación el modelo MIQP original, lo que tiene importantes implicaciones para su uso en sistemas eléctricos de gran escala y en entornos donde se requieren decisiones rápidas. Este tipo de modelos puede ser utilizado en aplicaciones operativas diarias, donde la necesidad de soluciones en tiempo real es esencial para garantizar la estabilidad del sistema y minimizar los costos.

Además, se demostró que el modelo es flexible y se adapta a la variabilidad inherente de los sistemas eléctricos modernos, especialmente en contextos con alta penetración de fuentes de energía renovable. Las técnicas de linealización permiten integrar de manera eficiente las fuentes renovables, cuyo comportamiento intermitente y dependiente de factores climáticos añade com-

plejidad al problema de planificación. En este sentido, la metodología presentada se posiciona como una solución robusta para mejorar la eficiencia y sostenibilidad de la operación eléctrica, facilitando la transición hacia un sistema energético más limpio y eficiente.

Aunque los modelos lograron en su totalidad reducir la complejidad computacional, el uso de la PUA con un gran número de tramos puede resultar en modelos más difíciles de resolver en tiempo real cuando se incrementa la escala del sistema eléctrico. Este es un tema importante que debe ser considerado al aplicar este modelo en sistemas de mayor tamaño o con horizontes temporales más amplios.

Referencias

- Abdou, I. and Tkiouat, M. (2018). Unit commitment problem in electrical power system: A literature review. *International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE)*, 8(3):1357–1372.
- Ahmadi, A., Esmaeel Nezhad, A., Siano, P., Hredzak, B., and Saha, S. (2020). Information-gap decision theory for robust security-constrained unit commitment of joint renewable energy and gridable vehicles. *IEEE Transactions on Industrial Informatics*, 16(5):3064–3075.
- Ahmadi, H., Martí, J. R., and Moshref, A. (2013). Piecewise linear approximation of generators cost functions using max-affine functions. In *2013 IEEE Power & Energy Society General Meeting*, pages 1–5.
- Aliyari, H., Effatnejad, R., Izadi, M., and Hosseinian, S. H. (2017). Economic dispatch with particle swarm optimization for large scale system with non-smooth cost functions combine with genetic algorithm. *Journal of Applied Science and Engineering*, 20:141–148.
- Arroyo, J. and Conejo, A. (2000). Optimal response of a thermal unit to an electricity spot market. *IEEE Transactions on Power Systems*, 15(3):1098–1104.
- Athay, T., Podmore, R., and Virmani, S. (1979). A practical method for the direct analysis of transient stability. *IEEE Transactions on Power Apparatus and Systems*, PAS-98(2):573–584.
- Bertsimas, D., Litvinov, E., Sun, X. A., Zhao, J., and Zheng, T. (2013). Adaptive robust optimization for the security constrained unit commitment problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28(1):52–63.

- Carrión, M., Domínguez, R., Cañas-Carretón, M., and Zárate-Miñano, R. (2019). Scheduling isolated power systems considering electric vehicles and primary frequency response. *Energy*, 168:1192–1207.
- Chow, J. and Cheung, K. (1992). A toolbox for power system dynamics and control engineering education and research. *IEEE Transactions on Power Systems*, 7(4):1559–1564.
- Conejo, A., Carrión, M., and Morales, J. (2010). *Decision Making Under Uncertainty in Electricity Markets*. International Series in Operations Research & Management Science. Springer US.
- Djurovic, M., Milacic, A., and Kršulja, M. (2012). A simplified model of quadratic cost function for thermal generators. *23rd DAAAM International Symposium on Intelligent Manufacturing and Automation 2012*, 1:25–28.
- Frangioni, A., Gentile, C., and Lacalandra, F. (2009). Tighter approximated milp formulations for unit commitment problems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 24(1):105–113.
- Gentile, C., Morales-España, G., and Ramos, A. (2017). A tight mip formulation of the unit commitment problem with start-up and shut-down constraints. *EURO Journal on Computational Optimization*, 5(1):177–201.
- Gurobi Optimization, LLC (2023). Gurobi optimizer reference manual. <https://www.gurobi.com/documentation>. Accessed: 2023-10-10.
- Hart, W., Laird, C., Watson, J., and Woodruff, D. (2012). *Pyomo – Optimization Modeling in Python*. Springer Optimization and Its Applications. Springer New York.

- IBM ILOG CPLEX (2024). Cplex user's manual. <https://www.ibm.com/docs/en/icos/22.1.2?topic=optimizers-users-manual-cplex>.
- Kundur, P., Balu, N., and Lauby, M. (1994). *Power System Stability and Control*. EPRI power system engineering series. McGraw-Hill.
- Liu, G. and Tomsovic, K. (2015). Robust unit commitment considering uncertain demand response. *Electric Power Systems Research*, 119:126–137.
- Lubin, M. and Dunning, I. (2015). Computing in operations research using julia. *INFORMS Journal on Computing*, 27(2):238–248.
- Mena, R., Godoy, D., Kristjanpoller, F., and Viveros, P. (2024). A multi-objective two-stage stochastic unit commitment model for wind and battery-integrated power systems. *Journal of Energy Storage*, 89:111723.
- Mena, R., Zio, E., and Viveros, P. (2022). Matérn process-based simulation of wind speed time series. *Energy Conversion and Management*, 266:115596.
- Milano, F. (2005). An open source power system analysis toolbox. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(3):1199–1206.
- Morales, J. M., Conejo, A. J., and Pérez-Ruiz, J. (2010). Short-term trading for a wind power producer. *IEEE Transactions on Power Systems*, 25(1):554–564.
- Morales-España, G., Latorre, J. M., and Ramos, A. (2013). Tight and compact milp formulation of start-up and shut-down ramping in unit commitment. *IEEE Transactions on Power Systems*, 28(2):1288–1296.

- Padhy, N. P. (2003). Unit commitment problem under deregulated environment-a review. In *2003 IEEE Power Engineering Society General Meeting (IEEE Cat. No.03CH37491)*, volume 2, pages 1088–1094 Vol. 2.
- Palanichamy, C., Naveen, P., Ing, W. K., Danquah, M. K., and Indumathi, J. (2015). Energy efficiency enhancement of fossil-fuelled power systems. *International Journal of Energy Economics and Policy*, 5(3):765–771.
- Restrepo, J. and Galiana, F. (2005). Unit commitment with primary frequency regulation constraints. *IEEE Transactions on Power Systems*, 20(4):1836–1842.
- Shahidehpour, M., Yamin, H., and Li, Z. (2003). Market operations in electric power systems: Forecasting, scheduling, and risk management.
- Shoja, S., Arnström, D., and Axehill, D. (2022). Overall complexity certification of a standard branch and bound method for mixed-integer quadratic programming. In *2022 American Control Conference (ACC)*, pages 4957–4964.
- Singh, N., Chakrabarti, T., Chakrabarti, P., Margala, M., Gupta, A., Praveen, S. P., Krishnan, S. B., and Unhelkar, B. (2023). Novel heuristic optimization technique to solve economic load dispatch and economic emission load dispatch problems. *Electronics*, 12(13).
- Sundar, K., Nagarajan, H., Roald, L., Misra, S., Bent, R., and Bienstock, D. (2019). Chance-constrained unit commitment with n-1 security and wind uncertainty. *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, 6(3):1062–1074.
- Takriti, S., Birge, J., and Long, E. (1996). A stochastic model for the unit commitment problem. *IEEE Transactions on Power Systems*, 11(3):1497–1508.

- Wood, A., Wollenberg, B., and Sheblé, G. (2013). *Power Generation, Operation, and Control*. Wiley.
- Wu, L. (2011). A tighter piecewise linear approximation of quadratic cost curves for unit commitment problems. *IEEE Transactions on Power Systems*, 26(4):2581–2583.
- Yamin, H. (2004). Review on methods of generation scheduling in electric power systems. *Electric Power Systems Research*, 69(2-3):227–248.
- Yehescale, G. and Damodar Reddy, M. (2018). A new strategy for solving unit commitment problem by pso algorithm. In *2018 IEEE International Conference on Current Trends in Advanced Computing (ICCTAC)*, pages 1–6.
- Zheng, Q., Wang, J., Pardalos, P., and Guan, Y. (2013). A decomposition approach to the two-stage stochastic unit commitment problem. *Annals of Operations Research*, 210(1):387–410.

Anexos

Tabla 12: Parámetros Técnicos Unidades Generadoras

$i \in N$	$g \in G^c$	Tecno.	Fuente Energética	H_g	$\bar{P}_g$	P_g^{min}	r_g^U, r_g^D	r_g^{SU}, r_g^{SD}	t_g^U, t_g^D	μ_g^f
				MBtu/MWh	MW	MW	%	MW	h	t/MBtu
6	-	Eólica	Viento	-	1250	0	-	-	-	-
30	1	Hydro	Agua	-	1040	624	1	936	5	-
31	2	CST	Carbón	8,9	646	207	0,15	207	3	0,096
32	3	CCGT	Gas	6,6	725	327	0,3	327	2	0,053
33	4	CST	Carbón	8,9	652	209	0,15	209	3	0,096
34	5	OCGT	Gas	10	508	229	0,5	406,4	2	0,053
35	6	CST	Carbón	8,9	687	220	0,15	220	3	0,096
36	7	OCGT	Gas	9,6	580	290	0,5	464	1	0,053
37	8	CST	Carbón	8,9	564	180	0,15	180	3	0,096
38	9	Nuclear	Uranio	9,72	865	346	0,05	346	5	0
39	10	Todas	Todas	8	1100	0	0,325	357,5	1	0,077

Tabla 13: Demanda agregada por escenario

$\xi \in \Omega$	$t \in T$																							
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24
1	2038,56	2270,51	2368,67	2701,41	2970,44	3182,76	3526,07	3739,13	3841,49	4035,82	4478,95	4772,39	4469,05	3826,99	3655,08	3182,7	2813,72	3324,59	3775,51	4315,86	3871,97	3484,19	2932,96	2401,66
2	2096,74	2368,56	2689,98	2908,42	3161,25	3318,29	3571,46	3689,06	3953,98	4114,2	4217,66	4434,46	4085,05	3779,27	3385,47	3124,84	2714	3382,72	4080,58	4706,62	4076,59	3476,17	2844,15	2528,37
3	2303,19	2371,48	2538,26	2635,76	2890,49	3123,53	3323,09	3546,55	3675,21	3877,33	4107,25	4362,86	4126,58	3902,97	3782,54	3570,62	3255,6	3518,42	3761,33	4306,8	3853,47	3298,6	2661,92	2175,96
4	1996,31	2307,99	2478,4	2578,5	2751,49	2998,89	3267,68	3533,89	3770,53	4011,83	4190,21	4897,45	4368,55	3894,21	3543,3	3251,14	2751,28	3309,78	3924,6	4505,32	3895,83	3395,28	2873,16	2544,2
5	2248,73	2266,52	2615,15	2851,39	3093,06	3147,73	3301,24	3404,89	3642,41	3818,48	3961,29	4456,28	4086,64	3830,9	3585,18	3277,95	3207,75	3562,5	3829,57	4139,45	3697,08	3224,75	2680,56	2402,26
6	2146,75	2263,19	2664,82	2815,71	3071,29	3402,96	3540,04	3882,29	4164,85	4391,22	4680,39	5260,46	4796,74	4299,27	3841,73	3365,72	3192,1	3679,84	4144,77	4492,12	3913,31	3392,59	2784,43	2404,73
7	2203,84	2444,88	2662,15	2860,55	3110,03	3390,47	3655,51	3931,63	4116,14	4345,97	4513,07	4742,75	4364,76	3984,3	3746,26	3462,22	3250,58	3677,95	4151,08	4335,5	3932,85	3402,51	2994,25	2405,61
8	2115,71	2411,8	2629,73	2893,01	3232,55	3524,6	3820,4	4085,16	4363,77	4567,07	4799,62	4969,82	4529,17	4247,2	3981,88	3753,74	3488,46	3802,71	4038,87	4265,4	3874,22	3443,47	2900,14	2282,83
9	1938,02	2140,38	2400,26	2714,35	2928,72	3053,43	3283,27	3566,83	3704,04	3918,15	4138,24	4452,55	4181,06	3788,13	3488,19	3140,17	2986,15	3395,33	3793,03	4188,66	3802,66	3358,38	2942,83	2479,08
10	2083,45	2272,57	2412,68	2467,62	2587,57	2868,17	3052,42	3221,98	3485,56	3682,09	3971,67	4124,89	3921,18	3597,11	3262,14	3055,24	2662,02	3288,21	3889,4	4516,79	4014,21	3576,95	3101,83	2338,62
11	2072,26	2297,72	2479,78	2627,52	2734,09	2906,07	3113,87	3430,59	3590,44	3829,44	4068,03	4501,35	4383,54	4175,86	3895,19	3689,77	3237,54	3665,41	4198,07	4540,39	3994,21	3523,2	2987,78	2406,38
12	2147,25	2342,13	2617,34	2779,78	2973,79	3243,86	3494,82	3784,49	4098,38	4281,88	4484,57	4694,55	4315,03	3935,01	3647,81	3426,97	3076,92	3321,05	3612,52	4172,48	3634,1	3131,14	2720,33	2481,25
13	2202,3	2521,15	2731,33	2910,41	3106,53	3287,39	3463,42	3683,81	3925,05	4087,63	4410,68	4411,33	4046,56	3906,32	3607,78	3403,25	3114,62	3525,28	4144,08	4599,55	4038,92	3609,9	3151,51	2430,8
14	2214,28	2518,03	2752,91	3002,01	3250,08	3522,21	3784,4	4005,56	4182,5	4305,35	4609,3	4983,93	4620,4	4385,92	4033,97	3534,99	3078,9	3680,4	4247,25	4570,87	4085,02	3523,59	2843,32	2269,79
15	2105,99	2491,53	2646,96	2880,05	3090,3	3434,16	3620,25	3817,32	4139,64	4456,96	4793,98	4600,16	4307,77	4130,08	3889,14	3606,85	3432,14	3335,1	3468,33	3632,63	3364,35	3049,56	2767,29	2335,52
16	2321,9	2480,44	2647,44	2956,69	3312,62	3605,89	3910,04	4136,72	4410,17	4521,46	4785,12	5138,77	4585,47	4302,22	3821,89	3363,22	2959,41	3275,08	3746,64	3899,02	3560,42	3161,39	2910,13	2505,28
17	2191,13	2371,01	2688,24	2809,41	3094,75	3301,69	3418,83	3709,18	3896,9	4213,93	4312,15	4251,98	3963,98	3730,97	3476,13	3313,9	2844,29	3393,75	3881,62	4310,83	3735,83	3332,69	2752,18	2275,41
18	2122,81	2359,72	2569,72	2838,3	3072,78	3252,56	3394,85	3602,53	3746,12	3906,58	4007,49	4425,37	4153,51	3915,79	3660,41	3464,55	2998,45	3481,83	4000,42	4229,67	3819,78	3465,44	3121,61	2595,37
19	2228,88	2267,89	2447,45	2515,92	2714,23	2870,42	3242,1	3370,15	3602,88	3775,51	4021,15	4594,82	4298,29	4013,75	3624,44	3231,83	2865	3339,13	3859,16	4248,38	3834,91	3378,44	2872,84	2271,76
20	2419,88	2641,09	2829,5	3050,24	3185,76	3318,64	3599,41	3710,82	3928,51	4077,13	4221,81	4386,27	4162,34	3903,74	3629,73	3323,02	2919,7	3466,21	4033,99	4512,47	4004,89	3429,16	2738,42	2551,09
21	2116	2144,03	2398,02	2517,93	2696,25	2852,28	3052,53	3226,24	3432,34	3684,8	3858,16	4017,74	3899,84	3843,55	3733,1	3689,4	3183,53	3612,46	3926,71	4386,33	3986,81	3591,21	3144,97	2610,38
22	2086,78	2303,29	2469,13	2716,21	2890,02	3068,94	3316,06	3556,64	3744,74	3950,08	4212,98	4928,44	4526,24	4107,28	3680,89	3213,64	2984,36	3356,97	3627,44	3778,48	3499,73	3140,25	2937,03	2518,93
23	2122,5	2377,28	2740,36	3027,29	3251,25	3449,81	3737,33	3965,35	4170,34	4460,36	4567,36	4543,3	4367,33	4018,47	3753,58	3543,03	3049,81	3456,17	3810,52	4126,58	3672,96	3240,91	2736,03	2390,76
24	1967,49	2284,23	2559,75	2687,11	2938,65	3305,88	3637,24	3826,02	3954	4111,62	4419,46	4663,5	4310,82	3877,83	3581,13	3250,08	3003,74	3411,01	3780,13	4258,08	3833,23	3327,85	2824,64	2463,23
25	2290,27	2498,09	2764,21	3004,74	3319,07	3370,31	3733,47	4000,56	4179,76	4294,45	4522,34	4800,56	4472,08	4113,11	3705,71	3250,9	3085,77	3527,04	4071,65	4460,96	3850,57	3400,08	2917,78	2382,83
26	2119,19	2192,49	2385,28	2614,74	2826,74	2933,9	3145,69	3227,78	3555,84	3863,76	4267,81	4649,42	4264,67	3955,92	3648,46	3372,13	2988,31	3273,53	3578,6	4245,72	3950,35	3558,39	3171,77	2551,59
27	2182,35	2293,82	2481,77	2653,06	2853,12	3064,74	3286,4	3619,55	3765,46	3987,76	4215,91	4806,18	4565,34	4286,63	3944,81	3628,72	3298,24	3677,51	3992,3	3976,45	3648,45	3309,23	2949,59	2834,99
28	2264,94	2405,23	2607,37	2850,74	3009,13	3270,78	3475,55	3655,45	3999,18	4250,51	4424,72	4407,24	4117,96	3806,66	3483,06	3348,67	2864,33	3291,33	3604,85	4038,35	3442,82	3068,22	2627,51	2234,8
29	2093,21	2326,85	2522,14	2679,53	2974,83	3196,58	3458,95	3639,28	3825,54	4204,8	4663,89	4759,78	4390,05	3978,38	3787,77	3388,6	3068,82	3480,43	3961,56	4220,56	3825,37	3374,81	2968,68	2417,45
30	2242,9	2448,08	2626,91	2846,62	3016,85	3140,72	3246,33	3451,06	3767,82	4047,28	4136,33	4283,65	3958,07	3772,01	3525,93	3275,91	3035,55	3380,9	3706,06	4207,05	3658,81	3307,89	2916,24	2446,8

Tabla 14: Velocidad del viento por escenario

$\xi \in \Omega$	$t \in T$																									
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24		
1	4,27313	2,35281	2,16157	2,08208	1,77982	1,50747	1,38349	1,15547	1,71728	1,83222	1,39881	0,820546	0,384383	0,395381	1,2609	0,902881	1,02134	1,0959	1,71748	2,5587	2,69069	3,30335	3,779	3,43641		
2	6,64327	4,86026	5,82009	6,19555	7,83501	9,31168	9,03441	10,1942	11,1551	10,7405	10,8608	10,4598	8,37435	6,47387	8,29858	9,18645	8,63156	8,79062	10,2961	8,67579	8,3595	8,14116	6,25879	8,01569		
3	6,0787	4,20814	5,23209	5,71759	6,3301	5,75343	8,23022	6,94967	7,20327	6,26463	4,53558	7,31538	7,75817	9,69112	8,40971	7,95268	7,40668	6,37318	4,59671	5,56652	4,86714	4,382	5,89542	6,01607		
4	7,2217	6,99565	10,7127	9,15881	9,56016	7,59207	8,14454	10,7241	12,1814	12,6303	12,2744	9,7735	9,42815	8,64803	8,29266	7,72396	7,85043	9,18217	10,4836	11,0003	8,70482	10,2404	10,9674	11,877		
5	1,61978	2,81515	2,67385	1,74896	2,21178	3,77866	4,10398	3,37227	2,82974	3,89493	2,46329	2,0964	1,33648	3,24413	2,82645	2,38811	1,34014	0,505441	1,66431	0,687341	0,439257	0,839672	0,555783	1,28998		
6	8,07861	8,21981	9,89191	9,23804	9,04093	8,66985	5,41084	6,76627	7,2692	10,5992	10,7204	10,8775	10,3698	11,021	11,6685	9,71713	8,79828	10,2878	9,60271	10,4765	12,9068	13,6782	17,6914	12,5396		
7	7,0196	4,90027	5,45479	7,72916	6,30304	7,61518	11,0791	13,0955	9,70693	9,42736	9,23854	7,75309	8,06696	7,11026	8,48892	7,13088	6,58826	8,33134	8,51932	9,10485	13,6788	11,8302	13,0597	12,5358		
8	12,3774	13,0877	10,9279	12,7469	11,9082	10,7863	15,8479	12,8462	11,7928	8,42029	11,9594	9,44157	8,23779	7,4083	9,21327	8,37887	9,22743	8,97438	9,62856	9,60746	9,7057	9,70977	9,26414	9,37973		
9	8,59024	7,39937	5,93001	6,84293	8,26267	8,5191	7,76084	6,69506	6,16778	5,8613	5,33246	6,11292	4,52277	7,23932	7,65371	4,46969	4,95318	5,66541	4,90312	6,29711	5,65834	6,16602	6,16718	6,76224		
10	6,57148	5,96875	5,24852	4,80055	4,75216	3,27295	3,54632	3,48564	4,29995	3,23525	5,38261	5,43242	3,43668	4,797	4,99096	5,74421	4,5092	4,39579	4,51568	4,65592	4,03073	5,08146	4,58389	5,26457		
11	6,5099	6,76172	7,64363	6,89861	7,41914	5,85603	9,03015	8,18199	7,72879	8,17467	10,4438	8,39367	7,27615	7,18127	6,44126	6,63605	7,3561	7,123	6,76747	8,38979	5,92294	4,38401	4,07337	4,56913		
12	7,93015	7,17836	8,74171	8,06006	7,86798	5,84836	8,17516	10,3878	9,10302	6,99443	8,89296	9,76731	11,3334	11,7495	9,60442	13,39	13,6101	11,0361	10,1964	11,7045	12,155	13,5753	10,5135	10,4113		
13	15,8088	14,5875	16,8635	15,5468	16,0086	13,2405	12,5439	14,7766	17,9743	16,3116	12,9654	14,7288	15,7978	17,872	16,7478	15,7948	18,655	14,4049	15,1718	17,042	11,9836	13,3255	12,9182	13,3699		
14	2,9679	5,24309	5,92989	4,97117	4,39878	5,72585	5,42129	6,03438	6,79721	6,91993	6,98183	5,91584	7,16546	7,91022	8,23848	7,97007	10,206	11,6216	9,40833	7,34537	7,79913	7,736	6,23176	6,05394		
15	15,9812	16,7649	16,0685	17,4651	16,7052	16,0088	14,5056	14,5503	13,1611	15,4954	19,9537	22,6054	23,4458	19,3172	15,886	12,7648	12,1945	6,57555	8,18679	7,58598	8,95048	8,48287	6,38698	7,34465		
16	13,9474	18,8864	24,3945	20,6289	18,4813	16,298	13,7686	13,3569	10,2449	10,7583	14,1688	14,2017	12,3164	11,959	12,835	13,539	12,3947	12,0071	14,9557	18,3736	15,3419	12,1328	15,8112	13,661		
17	8,71027	8,54936	8,03775	6,94095	7,62672	6,06597	6,60525	5,285	6,35802	5,58664	4,97782	3,77159	2,15763	3,60483	4,73331	6,22488	4,89613	5,58609	5,89492	7,83951	8,37126	6,83479	4,33548	5,83259		
18	12,6825	14,9253	13,2131	11,2902	9,4311	8,92804	8,16728	9,69481	11,5093	10,4237	7,72301	7,02256	7,73315	6,79	7,30444	6,28502	6,7229	6,97768	5,57254	6,37314	5,0506	5,46249	6,18109	6,12905		
19	8,65774	8,48584	9,99899	6,9208	8,0966	7,79812	7,35585	8,28172	8,86892	8,5439	8,9543	11,1129	10,0613	10,8413	10,9842	11,8207	10,9436	9,15794	7,83896	8,46937	9,08857	6,92436	5,52412	5,79628		
20	7,25413	6,44313	6,30909	8,0699	7,573	7,65939	7,03813	5,49045	3,2494	4,52992	4,64466	4,32308	4,19523	3,15155	2,66383	2,56388	4,15539	5,29002	6,86268	8,58475	10,0069	9,0688	8,95793	12,6097		
21	8,70352	8,36706	7,60939	8,10367	7,1981	6,56557	5,91267	4,43248	3,9472	3,28354	3,84578	3,39298	3,20464	3,96653	4,61943	5,2681	6,11123	6,02836	3,41705	3,28499	4,17595	4,87248	4,79136	5,41967		
22	7,416	8,07971	6,68069	7,42826	7,57933	6,86113	7,635	7,87665	6,80479	5,70662	8,05577	8,22048	8,83739	9,70679	7,4597	7,86089	10,5207	11,0017	9,82305	9,71545	10,9009	8,34407	9,82287	8,96149		
23	5,34497	5,48775	7,41638	6,48934	6,82261	7,16731	5,45437	7,43261	6,4737	5,77916	5,54324	4,95746	4,95372	4,57987	5,63164	3,68383	2,7798	4,0836	3,44919	4,23979	3,47739	4,70549	3,89094	4,96252		
24	3,93606	2,96397	1,36252	1,5022	2,99144	4,98068	5,64064	5,64362	5,1318	5,28369	5,28769	6,39648	7,30494	5,61996	7,21748	10,8259	10,111	9,47528	10,9588	12,4819	14,6889	15,7939	17,9768	14,1071		
25	9,84911	11,4883	9,514	9,72239	10,521	11,8322	9,74893	9,98926	9,01225	8,50053	8,82809	11,5247	9,16572	8,53767	5,56104	5,59115	7,00713	4,55274	4,2083	5,62713	6,63929	8,28495	9,16352	8,14728		
26	0,90554	2,14472	0,979316	1,17133	2,51457	3,45913	4,50406	3,8877	3,23619	3,41653	2,71197	3,04866	4,1721	5,49319	4,95377	5,50476	4,82701	5,70137	6,61556	8,65459	8,71322	7,68913	7,38178	6,09466		
27	5,12358	6,75137	6,73173	5,56158	6,99485	5,75882	4,7215	4,47769	4,05249	4,33412	6,53098	8,82914	9,96761	10,4837	9,71481	8,86335	9,1478	9,65213	6,62413	6,83859	8,58652	10,421	10,5252	9,45793		
28	3,6404	2,4667	2,6774	3,27586	4,12612	2,96298	4,47052	4,06959	4,33476	4,13272	3,36024	3,13567	1,86023	3,08206	4,59843	4,24838	2,64529	2,87808	3,16992	5,49307	4,5095	5,62726	4,83351	5,80607		
29	7,24302	7,31943	9,89447	7,83994	9,85201	9,33371	10,114	12,3548	11,5653	11,9024	12,2748	14,4607	15,1737	14,9298	18,0374	15,0852	15,5992	17,8041	14,2934	11,1302	13,0724	13,1984	15,0707	14,7216		
30	3,08627	3,276	4,84044	3,81934	3,4453	4,53507	4,68092	4,92585	7,19773	6,18039	6,95803	9,56176	10,0011	9,14389	8,54981	10,6774	11,7907	10,2657	9,28777	8,23217	9,32557	10,0023	9,57822	7,53326		