



UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

Memoria de Título

Modelamiento de líneas HVDC utilizando Modelo de Parámetros Distribuidos.

Memoria de titulación para optar al título de
Ingeniero Civil Electrónico

Alumno

Alfredo César Montenegro Herrera

Profesor Supervisor

Dr. Marcelo Pérez Leiva

Comisión Co-Referente

Dr. Ricardo Olivares Véliz

26 de Julio del 2018, Valparaíso, Chile

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS	5
ÍNDICE DE TABLAS	7
ABREVIACIONES	8
RESUMEN	1
ABSTRACT	2
1. INTRODUCCIÓN	3
2. MODELO DE LÍNEA DE TRANSMISIÓN	6
2.1. Modelo de la línea con parámetros distribuidos.	6
2.1.1. Ecuación de Onda Fasorial	9
2.2. Impedancia Característica	10
2.3. Coeficiente de Reflexión	12
2.3.1. Coeficiente de Reflexión en la carga Z_L	12
2.3.2. Coeficiente de Reflexión en cualquier punto de la Línea	13
2.4. Solución General de Tensiones y Corrientes en el dominio de la frecuencia	13
2.5. Impedancia Aparente	14
2.6. Solución General de Tensiones y Corrientes en el dominio del tiempo	15
2.7. Modelo a Tensión Continua en el tiempo	16
2.8. Distorsión en la línea de Transmisión	17
2.9. Parámetros de la línea de Transmisión	19
3. MODELO DEL CONVERTIDOR MULTINIVEL MODULAR	21
3.1. Descripción Circuito MMC	21
3.1.1. Topologías de submódulos para MMC	21
3.1.2. Modelo Matemático MMC	23
3.2. Modelo Desacoplado de corrientes y voltajes del MMC	24
3.2.1. Modelo de entrada	25
3.2.2. Modelo de salida	25
3.2.3. Impedancia de entrada	26
3.2.4. Impedancia de salida	26
3.3. Diagrama del modelo simplificado	26

3

4. SIMULACIONES	27
4.1. Metodología	27
4.2. Parámetros de la línea	27
4.3. Parámetros del convertidor MMC	28
4.4. Fuentes de tensión del MMC	29
4.5. Serie de Fourier de voltaje en terminales en circuito abierto	31
4.6. Criterio de Energía	32
5. RESULTADOS	34
5.1. Gráficos	34
5.2. Variación de parámetros de sensibilidad	37
5.2.1. Resistencia distribuida de la línea	49
5.2.2. Conductancia distribuida de la línea	50
5.2.3. Inductancia distribuida de la línea	50
5.2.4. Capacitancia distribuida de la línea	50
5.2.5. Posición de la línea	50
5.2.6. Frecuencia de conmutación de los semiconductores.	51
5.2.7. Variando más de un parámetro a la vez	51
6. CONCLUSIONES	52
6.1. Conclusiones	52
A. CODIGO MATHEMATICA	54
B. CÓDIGO OCTAVE	58
BIBLIOGRAFÍA	60

Índice de figuras

1.1. Sistemas de transmisión de energía. a) transmisión AC b) transmisión DC	3
1.2. Costos en sistemas de Transmisión AC y DC.	5
2.1. Modelo circuital de parametros ditribuidos de una línea de transmisión.	6
2.2. Representación de la línea de transmisión.	9
2.3. Representación de la línea de transmisión con generador de tensión.	10
2.4. Modelo circuital de una línea de transmisión a través de un modelo de parámetros distribuidos, condición de frontera bornes del generador.	13
2.5. Modelo circuital de una línea de transmisión DC.	16
2.6. Modelo circuital equivalente DC.	16
2.7. Fenomeno de distorsión.	17
2.8. Señal sin distorsión.	18
2.9. línea DC, Estructura de transimisión.	19
2.10. línea DC de transimisión.	19
2.11. Efecto piel	20
3.1. Topologia Convertidor Multinivel Modular trifásico DC/AC.	22
3.2. Modelo circuital del MMC	22
3.3. Topología de celda para MMC. a) Half-bridge b) Full-bridge	23
3.4. Diagrama del modelo simplificado.	26
4.1. Fuentes de tensión $\mathbf{V}_{xy}$ que modela el MMC.	30
4.2. Fuente de tensión $Vs(t)$ que modela el MMC.	30
4.3. Fuente de tensión $Vs(t + \phi)$.	31
5.1. Esquema línea de transmisión.	34
5.2. Voltaje en los bornes de la línea, modelo 1: parámaetros concentrados, modelo 2: parámetros distribuidos.	35
5.3. Corriente en los bornes de la línea, modelo 1: parámaetros concentrados, modelo 2: parámetros distribuidos.	35
5.4. Potencia en los bornes de la línea, modelo 1: parámaetros concentrados, modelo 2: parámetros distribuidos.	36
5.5. Impedancia apartente en los bornes de la línea, magnitud, parte real y parte imaginaria.	37
5.6. Espectro del voltaje en los bornes de la línea.	37

5.7. Voltaje en los bornes de la línea, variando la resistencia distribuida. . .	38
5.8. Corriente en los bornes de la línea, variando la resistencia distribuida. . .	38
5.9. Espectro del voltaje en los bornes de la línea, amplitud normalizada, variando resistencia distribuida.	38
5.10. Desfase entre el voltaje y la corriente en los bornes de la línea, variando la resistencia distribuida.	39
5.11. Voltaje en los bornes de la línea, variando la conductancia distribuida. . .	39
5.12. Corriente en los bornes de la línea, variando la conductancia distribuida. .	39
5.13. Voltaje en los bornes de la línea, variando inductancia distribuida. . . .	40
5.14. Corriente en los bornes de la línea, variando inductancia distribuida. . .	40
5.15. Espectro del voltaje en los bornes de la línea, amplitud normalizada, variando la inductancia distribuida.	40
5.16. Desfase entre el voltaje y la corriente en los bornes de la línea, variando la inductancia distribuida.	41
5.17. Voltaje en los bornes de la línea, variando la capacitancia distribuida. . .	41
5.18. Corriente en los bornes de la línea, variando la capacitancia distribuida. .	41
5.19. Espectro del voltaje normalizado en los bornes de la línea, Variando capacitancia distribuida.	42
5.20. Espectro del voltaje en los bornes de la línea, fase entre el voltaje y la corriente, variando la capacitancia distribuida.	42
5.21. Voltaje en $x = \frac{\lambda_1}{8}$ respecto a los bornes de la línea.	42
5.22. Corriente en $x = \frac{\lambda_1}{8}$ respecto a los bornes de la línea.	43
5.23. Voltaje en $x = \frac{2\lambda_1}{8}$ respecto a los bornes de la línea.	43
5.24. Corriente en $x = \frac{2\lambda_1}{8}$ respecto a los bornes de la línea.	43
5.25. Voltaje en $x = \frac{3\lambda_1}{8}$ respecto a los bornes de la línea.	44
5.26. Corriente en $x = \frac{3\lambda_1}{8}$ respecto a los bornes de la línea.	44
5.27. Voltaje en $x = \frac{3\lambda_1}{8}$ respecto a la carga de la línea.	44
5.28. Corriente en $x = \frac{3\lambda_1}{8}$ respecto a la carga de la línea.	45
5.29. Voltaje en $x = \frac{2\lambda_1}{8}$ respecto a la carga de la línea.	45
5.30. Corriente en $x = \frac{2\lambda_1}{8}$ respecto a la carga de la línea.	45
5.31. Voltaje en $x = \frac{\lambda_1}{8}$ respecto a la carga de la línea.	46
5.32. Corriente en $x = \frac{\lambda_1}{8}$ respecto a la carga de la línea.	46
5.33. Voltaje en la carga de la línea.	46
5.34. Corriente en la carga de la línea.	47
5.35. Voltaje en los bornes de la línea, variando la frecuencia de la portadora. .	47
5.36. Corriente en los bornes de la línea, variando la frecuencia de la portadora.	47
5.37. Potencia en la carga de la línea.	48
5.38. Voltaje en los bornes y carga de la línea.	48
5.39. Potencia en la carga de la línea.	48
5.40. Voltaje en la carga de la línea.	49
5.41. Corriente en la carga de la línea.	49

Índice de tablas

2.1. Resistencia distribuida de la línea.	17
4.1. Parámetros de la línea de transmisión	27
4.2. Parámetros distribuidos	28
4.3. Parámetro del MMC.	28
4.4. Parámetro del MMC para análisis y simulación.	29
4.5. Impedancia de entrada y salida del MMC	29
4.6. Energía de la señal en función de la cantidad de armónicos a_n	33

ABREVIACIONES

Mayúsculas

HVDC	: High-voltage direct current.
MMC	: Convertidor Multinivel Modular.
LCC	: Line Comutated Converter.
VSC	: Convertidores fuentes de voltaje.
IGBTs	: Insulated Gate Bipolar Transistors.
R	: Resistencia por unidad de largo de la línea.
L	: Inductancia por unidad de largo de la línea.
C	: Capacitancia por unidad de largo de la línea.
G	: Conductancia por unidad de largo de la línea.
$R\Delta$	: Es la suma de resistencias parásita de ambos conductores.
$L\Delta$	: Es la suma de inductancia parásita de los conductores.
$C\Delta$	: Es la capacitancia parásita que se produce en ambos conductores.
$G\Delta$	: Es la conductancia parásita que hay entre los conductores.
DC	: Corriente continua.
AC	: Corriente alterna.
$\bar{V}(x)$	: Fasor de tensión de la línea.
$\bar{I}(x)$	: Fasor de corriente de la línea.
$\bar{V}_+(x)$	: Onda de voltaje que se desplaza hacia la carga de la línea.
$\bar{V}_-(x)$	: Onda de voltaje que se desplaza hacia el generador de la línea.
$\bar{I}_+(x)$	: Onda de corriente que se desplaza hacia la carga de la línea.
$\bar{I}_-(x)$	: Onda de corriente que se desplaza hacia el generador de la línea.
$\bar{V}_G$	: Generador de tensión de la línea.
Z_G	: Impedancia interna del generador de la línea.
Z_L	: Impedancia de carga de la línea.
Z_o	: Impedancia característica de la línea.
Γ_L	: Coeficiente de reflexión en la impedancia de carga de la línea.
$\Gamma(x)$	: Coeficiente de reflexión en un punto arbitrario de la línea.
$\mathbf{V}_{xy}$	: Matriz 2x3 de voltajes de rama del MMC.
$\mathbf{V}_y$	: Matriz 2x3 de voltajes del lado AC.
$\mathbf{V}_x$	: Matriz 2x3 de voltaje del lado DC.
$\mathbf{I}_{xy}$	: Matriz 2x3 de corrientes de rama del MMC.
$\mathbf{I}_y$	: Matriz 2x3 de corrientes del lado AC.
$\mathbf{I}_x$	: Matriz 2x3 de corrientes del lado DC.
$\mathbf{I}_o$	: Componente de salida de la corriente $\mathbf{I}_{xy}$.

$\mathbf{I}_s$	: Componente de entrada de la corriente $\mathbf{I}_{xy}$.
$\mathbf{V}_o$	: Componente de salida del voltaje $\mathbf{V}_{xy}$.
$\mathbf{V}_s$	: Componente de entrada del voltaje $\mathbf{V}_{xy}$.

Minúsculas

γ	: Constante de propagación de la línea.
α	: Constante de atenuación de la línea.
β	: Constante de fase de la línea.
Ψ	: Flujo magnetico.
q	: Carga eléctrica.
r_{ac}	: Resistencia del lado alterno (AC) del convertidor
r_{dc}	: Resistencia del lado alterno (DC) del convertidor
r	: Resistencia del convertidor
r_o	: Resistencia del modelo de salida del convertidor equivalente a $2 \cdot r_{ac} + r$
r_s	: Resistencia del modelo de entrada de convertidor equivalente a $3 \cdot r_{dc} + r$
L_{ac}	: Inductancia del lado AC
L_{dc}	: Inductancia del lado DC
L	: Inductancia de acople del convertidor
L_o	: Inductancia del modelo de salida del convertidor equivalente a $2 \cdot L_{ac} + L$
L_s	: Inductancia del modelo de entrada del convertidor equivalente a $3 \cdot L_{dc} + L$
v_p	: Voltaje DC equivalente a $\frac{V_{dc}}{2}$
v_n	: Voltaje DC equivalente a $-\frac{V_{dc}}{2}$
i_p	: Corriente DC rama positiva
i_n	: Corriente DC rama negativa
v_{cxyz}	: Voltaje del condensador flotante del submódulo z de la rama x y fase y del MMC
v_{xyz}	: Voltaje de salida del submódulo z de la rama x y fase y del MMC
ac	: Corriente Alterna.
dc	: Corriente Continua.

RESUMEN

Se describe un método para el cálculo preciso del voltaje y de la corriente generados por un enlace HVDC con convertidores multinivel modulares en sus terminales con una longitud de 1000 km entre ellos. El método de Oliver Heaviside ilustra la importancia de incluir los parámetros distribuidos de la línea para predecir de manera más rigurosa las variables eléctricas en el sistema, en el que se considera un modelo matemático riguroso para el convertidor multinivel modular. Se incluyen simulaciones con variaciones de los parámetros de sensibilidad.

ABSTRACT

This work describes a method for the precise calculation of the voltage and current generated by an HVDC link with modular multilevel converters at its terminals with a length of 1000 km between them. The method proposed by Oliver Heaviside shows the importance of including the distributed parameters of the transmission line to predict the electrical variables in the system more precisely, considering a rigorous mathematical model for the modular multilevel converter. Simulations with variations of the sensitivity parameters are included.

INTRODUCCIÓN

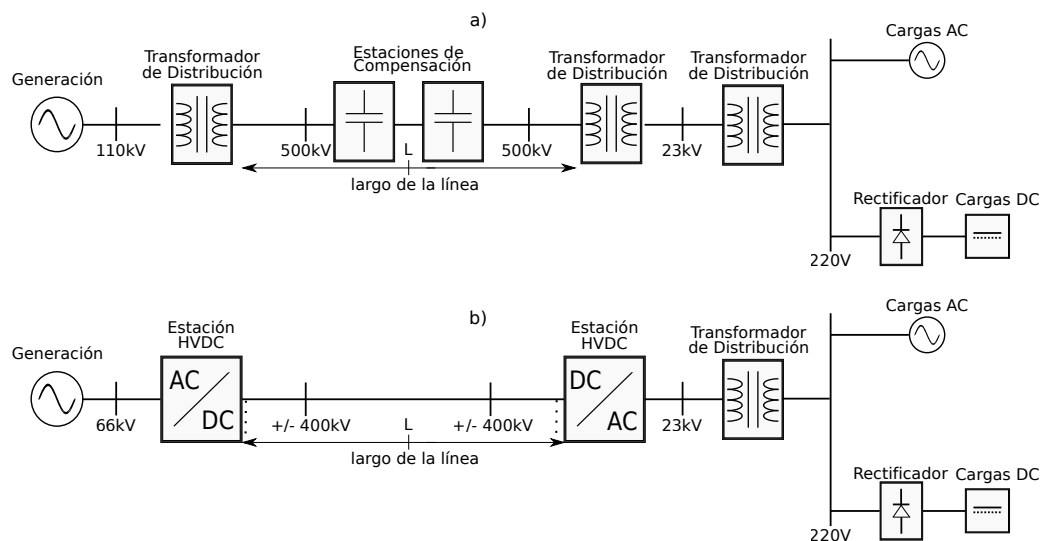


Figura 1.1: Sistemas de transmisión de energía. a) transmisión AC b) transmisión DC

La humanidad empezó a utilizar la electricidad para transportar energía hace aproximadamente 130 años, a raíz de lo que surgió la necesidad de transmitir una gran cantidad de potencia a través de largas distancias para poder suministrar energía eléctrica a ciudades que están alejadas de los generadores. La transferencia de energía eléctrica entre dos puntos se puede lograr usando voltaje alterno o continuo. Las primeras redes de distribución instaladas en EE.UU. y Europa funcionaban en DC con baja tensión tal como se realizó en 1882 con una línea de 2 kV DC (corriente continua) de 50 km entre Miesbach y Munich, pero gran parte de la energía se perdía en los cables.

El cambio en la transmisión de potencia eléctrica de DC a AC se debe en parte

al perfeccionamiento del generador en corriente alterna - que logra generar energía con menos costos mediante turbinas hidroeléctricas - y al invento del transformador en 1885. El transformador tiene la facultad de variar de forma sencilla, eficiente y con aislamiento galvánico el nivel de tensión, lo que permitió transportar energía eléctrica a largas distancias con menores pérdidas. Debido a que el transformador funciona en base al principio de la ley de Faraday, este es incapaz de operar con corriente continua.

Al transmitir corriente alterna, la inductancia distribuida de la línea la cual es proporcional al largo de la línea genera desfase entre el voltaje y la corriente con lo cual disminuye la potencia activa, también se presenta el efecto piel el cual consiste que la corriente se transmite por la orilla del conductor con lo cual aumenta la resistividad del conductor y hace menos eficiente la transmisión de la potencia eléctrica, para lidiar con esto, cada cierta distancia se introducen estaciones de compensación tal como se muestra en la figura 1.1 a). Por otra parte la transmisión de corriente continua no presenta este problema por lo cual no se necesitan estas estaciones de compensación y no se presenta el efecto piel [11].

En forma paralela se sigue desarrollando la distribución de potencia DC con la tecnología disponible en la época (diodo en 1904, triodo en 1906 y tubo de vacío en 1910), en 1929 se utilizó las válvulas de arco de mercurio en los procesos de transmisión y conversión de potencia eléctrica para altas potencias y tensiones. En 1930 se iniciaron investigaciones en Suecia y EE.UU donde se investigaba la corriente continua en la transmisión de energía a largas distancias, ya que estas no pierden capacidad de transporte. En 1941 se planificó la primera construcción de un enlace HVDC de 60 MW en Alemania. Este cable debía transmitir hasta 150 A utilizando ± 200 kV. El enlace estuvo preparado para ser usado en 1945, pero fue desmantelado.

El primer sistema LCC(line comutated converter)-HVDC comercial se construyó en 1954, el cual unió mediante un cable submarino de 98 km uniendo la isla de Gotland con Suecia. Esta tecnología trabaja con convertidores conmutados por el voltaje de línea (LCC), los cuales operan con conmutación de diodos y tiristores, estos sistemas tienen la desventaja de introducir armónicas de bajo orden, introducir potencia reactiva a la línea, para la inversión de potencia requiere que la polaridad DC se invierta, requiere conexiones con sistemas AC fuertes para asegurar la conmutación de los semiconductores.

El primer sistema VSC(Convertidores fuentes de voltaje)-HVDC comercial fue construido en Gotland en 1999. Esta tecnología utiliza los semiconductores IGBTs (Insulated Gate Bipolar Transistors). Los cuales tienen la capacidad de controlar y el apagado de los semiconductores. Gracias a esto las fallas de conmutación no ocurren en caso de perturbaciones de la red ac, facultad que no tienen los sistemas LCC, estos pueden usarse en redes ac de baja tensión. Actualmente esta tecnología está descontinuada, debido a que solo se tiene 2 niveles por lo cual debe soportar grandes variaciones de voltaje respecto al tiempo lo cual genera estrés en las componentes del sistema y aumenta la necesidad de los filtros.

La primera aplicación importante del sistema MMC-HVDC fue el enlace Trans Bay Cable instalado en EE.UU. en el 2010, este convertidor está constituido por un gran número de convertidores fuente de voltaje en serie, con lo cual mejora la señal de voltaje ac del convertidor. La disminución de conmutación individual de los IGBTs disminuye desde $1 - 2[kHz]$, los cuales se utilizan en los convertidores VSC de 2 y 3 niveles, a $100 - 150Hz$.

En la actualidad, al momento de transmitir potencia eléctrica uno de los criterios más recurridos son el costos de implementar los sistemas de transmisión tal como se señala en la figura 1.2. Donde se aprecia que el costo de la instalación DC es mucho mayor que la

estación AC, pero a partir de una distancia es menos costoso la implementación de un sistema HVDC.

La línea de transmisión por lo general se suponen que no almacenan cargas, no tienen pérdidas y que la velocidad de las ondas de voltaje y corriente son infinitas, pero cuando el largo de los conductores es comparable con la longitud de onda de la fundamental de la señal, estos supuestos impiden una predicción certera. Por lo cual en este trabajo se modela la línea de transmisión (capítulo 2) junto al convertidor modular multinivel (capítulo 3) con el objetivo de predecir de manera más precisa el voltaje y la corriente a lo largo del cable.

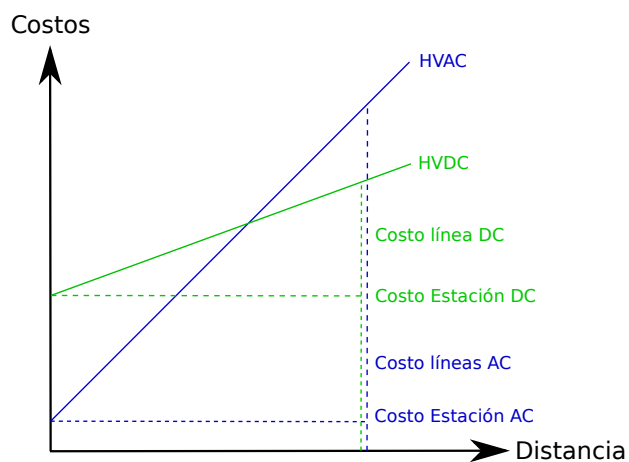


Figura 1.2: Costos en sistemas de Transmisión AC y DC.

MODELO DE LÍNEA DE TRANSMISIÓN

En este capítulo se desarrollará el modelo matemático de la línea de transmisión de un sistema HVDC que se basa en el modelo de parámetros distribuidos de **Olivier Heaviside** descrito en [4]. Este modelo define las ecuaciones que describen la transmisión de las ondas del voltaje y de la corriente en la línea.

2.1. Modelo de la línea con parámetros distribuidos.

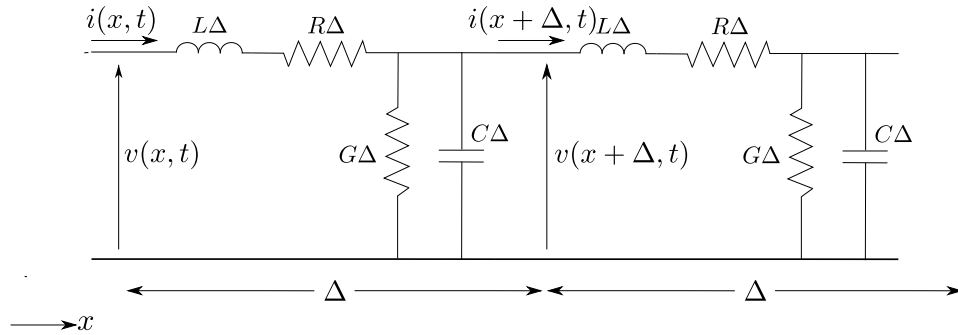


Figura 2.1: Modelo circuital de parametros ditribuidos de una línea de transmisión.

Debido a que la longitud de onda de la armónica fundamental del voltaje es comparable con el largo de la línea, la teoría de redes eléctricas no predice adecuadamente el comportamiento de las tensiones y corrientes. Por lo cual se plantea un modelo más riguroso para predecir de manera más precisa los voltajes y las corrientes en la línea. En la figura 2.1 se representa el modelo eléctrico con parámetros distribuidos de un segmento de una línea de transmisión, el cual se caracteriza por una resistencia serie R , una inductancia serie L , una capacitancia paralelo C y una admitancia paralelo G . Donde

- La resistencia R es la constante de proporcionalidad entre el voltaje y la corriente por metro es decir

$$R = \frac{v}{i} [\Omega/m] \quad (2.1)$$

por lo tanto ΔR representa la resistencia de un segmento de línea de largo Δ .

- La resistencia depende del conductor, el material y la sección, pero nótese que también depende de la frecuencia debido al efecto piel.
- La inductancia L es la constante de proporcionalidad entre el flujo magnético y la corriente por metro es decir

$$L = \frac{\Psi}{i} [H/m] \quad (2.2)$$

por lo tanto ΔL representa la inductancia de un segmento de la línea de largo Δ .

- La inductancia depende de la geometría de los conductores, la separación entre ellos y del material dieléctrico que está entre ellos.
- La resistencia y la inductancia son proporcionales al largo de la línea, ya que estas se suman en serie.
- La capacitancia C es la constante de proporcionalidad entre el voltaje y la carga por metro, es decir

$$C = \frac{v}{q} [F/m] \quad (2.3)$$

por lo tanto, ΔC representa la capacitancia de un segmento de la línea de largo Δ .

- La capacitancia y la conductancia son proporcionales al largo ya que estas se suman en paralelo.

Debido a que la figura 2.1 corresponde a un tramo diferencial, las leyes de Kirchhoff son un excelente modelo.

Aplicando la ley de voltaje de Kirchhoff se obtiene

$$v(x + \Delta, t) - v(x, t) = R \cdot \Delta \cdot i(x, t) - L \cdot \Delta \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.4)$$

Dividiendo ambos miembros de la ecuación por Δ se obtiene

$$\frac{v(x + \Delta, t) - v(x, t)}{\Delta} = R \cdot i(x, t) - L \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.5)$$

Tomando el límite cuando Δ **tiende a cero** se obtiene

$$\frac{\partial v(x, t)}{\partial x} = -R \cdot i(x, t) - L \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \quad (2.6)$$

A continuación se estudia el fenómeno con las diferencias de las corrientes

$$\frac{i(x + \Delta, t) - i(x, t)}{\Delta} = -G \cdot v(x + \Delta, t) - C \cdot \frac{\partial v(x + \Delta, t)}{\partial t} \quad (2.7)$$

Nuevamente tomando el límite cuando Δ **tiende a cero** se obtiene la derivada temporal de la corriente

$$\frac{\partial i(x, t)}{\partial x} = -G \cdot v(x, t) - C \cdot \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} \quad (2.8)$$

En los modelos anteriores se considera

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} v(x + \Delta) = v(x) \quad (2.9)$$

$$\lim_{\Delta \rightarrow 0} i(x + \Delta) = i(x) \quad (2.10)$$

Como se observa, las ecuaciones (2.6) y (2.8) están acopladas entre ellas, ya que en un miembro se tienen las derivadas temporales del voltaje y en el otro miembro las derivadas espaciales de la corriente.

Es posible desacoplar las ecuaciones para obtener una sola ecuación que dependa únicamente de la tensión y una sola ecuación que dependa únicamente de la corriente, derivando la ecuación (2.6) respecto el tiempo, obteniéndose así

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t \partial x} = -R \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} - L \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.11)$$

Por otro lado, derivando la ecuación (2.8) respecto a la variable espacial se obtiene

$$\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = -G \frac{\partial v(x, t)}{\partial x} - C \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x \partial t} \quad (2.12)$$

Asumiendo continuidad en la derivada parcial mixta ($\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x \partial t}$) es condición suficiente para considerar la ecuación (2.13)

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x \partial t} = \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t \partial x} \quad (2.13)$$

Reemplazando en (2.12) la ecuación (2.11) para el segundo término del miembro derecho y la ecuación (2.6) para el primer término del miembro derecho se obtiene una ecuación diferencial que solo depende de la corriente.

$$\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = G \left[R \cdot i(x, t) + L \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} \right] + C \left[R \cdot \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + L \cdot \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} \right] \quad (2.14)$$

Simplificando términos semejantes se obtiene

$$\frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial x^2} = G \cdot R \cdot i(x, t) + [G \cdot L + R \cdot C] \frac{\partial i(x, t)}{\partial t} + L \cdot C \frac{\partial^2 i(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.15)$$

Análogamente para la tensión se obtiene

$$\frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial x^2} = G \cdot R \cdot v(x, t) + [G \cdot L + R \cdot C] \frac{\partial v(x, t)}{\partial t} + L \cdot C \frac{\partial^2 v(x, t)}{\partial t^2} \quad (2.16)$$

las ecuaciones (2.15) y (2.16) poseen la siguientes propiedades

- Son ecuaciones diferenciales desacopladas donde solo aparecen la corriente o el voltaje en cada una de ellas y los componentes pasivos del circuito.
- No poseen soluciones algebraicas.
- Pueden ser resueltas a través de transformadas tales como Transformada de Laplace, fasorial o métodos numéricos.

2.1.1. Ecuacion de Onda Fasorial

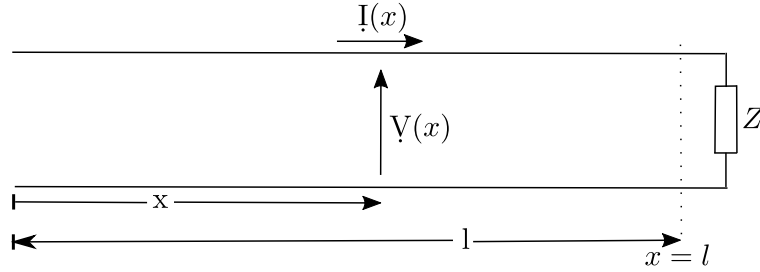


Figura 2.2: Representación de la línea de transmisión.

Para encontrar el voltaje y la corriente en la línea, se aplica la transformada fasorial a las ecuaciones (2.15) y (2.16) para hallar la solución del voltaje y corriente en función del espacio. Con lo que el problema se reduce a encontrar cuatro constantes complejas, las que se reducen a dos usando el concepto de impedancia característica. Finalmente se encuentran las dos constantes, evaluando las condiciones de frontera en la carga y en el generador.

Al aplicar transformada fasorial a las ecuaciones (2.15) y (2.16) se obtienen las siguientes expresiones para los fasores de tensión y de corriente

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x) = (R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C) I(x) \quad (2.17)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x) = (R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C) V(x) \quad (2.18)$$

Donde $V(x)$ y $I(x)$ denotan los fasores de tensión y de corriente que implícitamente dependen de la frecuencia angular ω , y que representan el voltaje y la corriente en cada punto de la línea tal como se muestra en la figura 2.2.

Al observar las ecuaciones (2.18) y (2.17) conviene definir la constante de propagación $\gamma \in \mathbb{C}$ como

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)} = \alpha + j\beta \quad (2.19)$$

Donde la constante de atenuación $\alpha [\frac{\text{Np}}{\text{m}}]$ y la constante de fase $\beta [\frac{\text{rad}}{\text{m}}]$ son números reales no negativos. A partir de la ecuación (2.19), se encuentra que estas constantes están dadas por

$$\alpha = \sqrt{\frac{\sqrt{(\omega^2 LC - RG)^2 + \omega^2 (LG + RC)^2} - (\omega^2 LC - RG)}{2}} \quad [\frac{\text{Np}}{\text{m}}] \quad (2.20)$$

$$\beta = \sqrt{\frac{\sqrt{(\omega^2 LC - RG)^2 + \omega^2 (LG + RC)^2} + (\omega^2 LC - RG)}{2}} \quad [\frac{\text{rad}}{\text{m}}] \quad (2.21)$$

Utilizando la ecuación (2.19) en las ecuaciones (2.17) y (2.18), estas se pueden simplificar a

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} V(x) = \gamma^2 \cdot V(x) \quad (2.22)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} I(x) = \gamma^2 \cdot I(x) \quad (2.23)$$

La solución general de estas ecuaciones (2.22) y (2.23) es

$$V(x) = V_+ e^{-\gamma x} + V_- e^{\gamma x} \quad (2.24)$$

$$I(x) = I_+ e^{-\gamma x} + I_- e^{\gamma x} \quad (2.25)$$

Donde V_+ , V_- , I_+ y I_- son constantes complejas, las que dependen de las condiciones en la carga y de lo que está conectado en la entrada de la línea.

- $V_+(x) \triangleq V_+ e^{-\gamma x}$
- $I_+(x) \triangleq I_+ e^{-\gamma x}$
- $V_-(x) \triangleq V_- e^{\gamma x}$
- $I_-(x) \triangleq I_- e^{\gamma x}$

Los términos $V_+(x)$ y $I_+(x)$ corresponden a ondas que se desplazan en dirección de x con sentido positivo, es decir hacia la derecha en la figura 2.2. Los términos $V_-(x)$ y $I_-(x)$ describen ondas que se propagan en sentido negativo (hacia la izquierda).

Para observar este fenómeno más detenidamente se aplica la transformada fasorial inversa a $V_+(x)$ con lo cual se obtiene

$$\mathcal{F}^{-1}\{V_+(x)\} = v_+(x, t) = |V_+| e^{-\alpha x} \cdot \cos(\omega t - \beta x + \sigma_{V_+}) \quad (2.26)$$

En la ecuación (2.26) se observa la onda desplazándose en el sentido x positivo. Análogamente se aplica transformada fasorial inversa a $V_-(x)$ con lo que se obtiene

$$\mathcal{F}^{-1}\{V_-(x)\} = v_-(x, t) = |V_-| e^{\alpha x} \cdot \cos(\omega t - \beta x + \sigma_{V_-}) \quad (2.27)$$

En la ecuación (2.27) se observa la onda desplazándose hacia $-x$.

2.2. Impedancia Característica

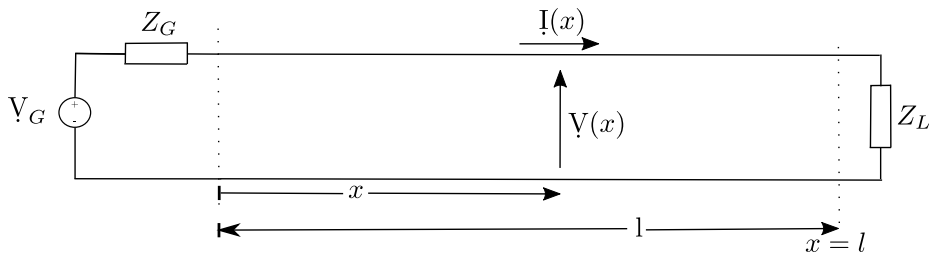


Figura 2.3: Representación de la línea de transmisión con generador de tensión.

En la figura 2.3 se observa una línea de transmisión con parámetros distribuidos, donde en el extremo izquierdo se encuentra un generador con una tensión V_G la que oscila en

una sola frecuencia, el generador tiene una impedancia interna denominada Z_G . En el otro extremo se conecta algún dispositivo que se modela por su impedancia de carga, en este caso Z_L . Dado este contexto, las variables de interés son las tensiones y corrientes a lo largo de la línea ($V(x)$ y $I(x)$). Para ello, se recurre a las ecuaciones originales de la línea (2.6) y (2.8) que al desacoplarlas y expresarlas fasorialmente se obtienen las soluciones generales (2.24) y (2.25) con lo que se podría interpretar que el voltaje es independiente de la corriente, es decir que no hay ninguna relación entre V_+ con I_+ e I_- con V_- , lo cual no es correcto. Esto se puede observar en las ecuaciones (2.6) y (2.8) que muestra la dependencia de la corriente respecto al voltaje y que existe una constante de proporcionalidad entre V_+ con I_+ y V_- con I_- . Aplicando transformada fasorial a las ecuaciones (2.6) y (2.8) se obtiene

$$\frac{\partial V(x)}{\partial x} = -(R + j\omega L)I(x) \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial I(x)}{\partial x} = -(G + j\omega C)V(x) \quad (2.29)$$

Sustituyendo (2.6) y (2.8) en (2.28) y reagrupando, se obtiene

$$\left[V_+ - \left(\frac{R + j\omega L}{\gamma} \right) I_+ \right] e^{-\gamma x} = \left[V_- + \left(\frac{R + j\omega L}{\gamma} \right) I_- \right] e^{\gamma x}, \quad \forall x \in [0, l] \quad (2.30)$$

Se observa que $e^{-\gamma x}$ es el inverso multiplicativo de $e^{\gamma x}$ por lo tanto se concluye

$$\left[V_+ - \left(\frac{R + j\omega L}{\gamma} \right) I_+ \right] = 0 \quad (2.31)$$

$$\left[V_- + \left(\frac{R + j\omega L}{\gamma} \right) I_- \right] = 0 \quad (2.32)$$

Estas ecuaciones no dependen de x y solo dependen de los parámetros de la línea, al despejar $\frac{V_+}{I_+}$ y $\frac{V_-}{I_-}$ para hallar dicha constante de proporcionalidad se encuentra

$$\frac{V_+}{I_+} = -\frac{V_-}{I_-} = \frac{R + j\omega L}{\gamma} \quad (2.33)$$

Sustituyendo $\gamma = \sqrt{(R + j\omega L) \cdot (G + j\omega C)}$ (2.19) en (2.31) se obtiene

$$Z_o \triangleq \frac{V_+}{I_+} = -\frac{V_-}{I_-} = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (2.34)$$

Donde Z_o es denominada impedancia característica de la línea. Con el desarrollo anterior se reduce la cantidad de incógnitas de cuatro a dos, ya que sustituyendo (2.34) en (2.25) se obtiene

$$I(x) = I_+ e^{-\gamma x} + I_- e^{\gamma x} = \frac{1}{Z_o} \cdot [V_+ e^{-\gamma x} - V_- e^{\gamma x}] \quad (2.35)$$

La ecuación (2.35) describe la corriente a lo largo de la línea y de qué manera difiere en amplitud el voltaje debido a la impedancia característica Z_o .

2.3. Coeficiente de Reflexión

El coeficiente de reflexión se obtiene con la finalidad de relacionar la onda que va en sentido $+x$ con la onda que va en sentido $-x$ en la figura 2.3 y así relacionar la constante compleja V_+ con V_- y pasar de dos incógnitas a una sola. Primero se hace esta relación con la tensión en la carga Z_L y así se obtiene el coeficiente de reflexión en la carga Z_L . Posteriormente, se hace en cualquier punto de la línea y así se obtiene el coeficiente de reflexión en cualquier punto de la línea en función del coeficiente de reflexión en la carga.

2.3.1. Coeficiente de Reflexión en la carga Z_L

El uso de la impedancia característica permitió reducir las incógnitas de cuatro a dos. Con el concepto de coeficiente de reflexión se reduce a una sola.

Se define el coeficiente de reflexión en la carga como la tensión que va hacia la izquierda en la figura 2.3 (V_-), la que se denomina tensión reflejada, vista desde los terminales de la carga Z_L , dividido por la tensión que va hacia la derecha (V_+), la que se denomina tensión incidente, como se observa en la figura 2.3 y en (2.36)

$$\Gamma_L \triangleq \frac{V_- e^{\gamma l}}{V_+ e^{-\gamma l}} = \frac{V_-}{V_+} \cdot e^{2\gamma l} \quad (2.36)$$

El coeficiente de reflexión Γ_L se puede expresar en función de la impedancia de carga Z_L y la impedancia característica de la línea Z_o aplicando la ley de Ohm en la carga

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} \quad (2.37)$$

Sustituyendo (2.24) en el numerador de (2.37) y (2.35) en el denominador de (2.37) se obtiene

$$Z_L = \frac{V_L}{I_L} = \frac{V(l)}{I(l)} = \frac{V_+ e^{-\gamma x} + V_- e^{\gamma x}}{\frac{1}{Z_o} \cdot [V_+ e^{-\gamma x} + V_- e^{\gamma x}]} \quad (2.38)$$

En el último miembro derecho de (2.38) se divide numerador y denominador por $V_+ e^{-\gamma x}$ con lo cual se obtiene

$$\frac{Z_L}{Z_o} = \frac{1 + \frac{V_- e^{\gamma x}}{V_+ e^{-\gamma x}}}{1 - \frac{V_- e^{\gamma x}}{V_+ e^{-\gamma x}}} \quad (2.39)$$

Con lo que se sustituye (2.36) en (2.39)

$$\frac{Z_L}{Z_o} = \frac{1 + \Gamma_L}{1 - \Gamma_L} \quad (2.40)$$

Despejando Γ_L de (2.40)

$$\Gamma_L = \frac{Z_L - Z_o}{Z_L + Z_o} \quad (2.41)$$

Con lo que se puede expresar V_- en función de Γ_L . Despejando V_- en (2.36) como señala en (2.42)

$$V_- = V_+ \cdot \Gamma_L \cdot e^{-2\gamma l} \quad (2.42)$$

Con lo cual se puede expresar (2.24) con una sola incógnita como se señala en (2.43)

$$V(x) = \underbrace{V_+ e^{-\gamma x}}_{V_+(x)} + \underbrace{V_+ \cdot \Gamma_L \cdot e^{-2\gamma l} \cdot e^{\gamma x}}_{V_-(x)} \quad (2.43)$$

2.3.2. Coeficiente de Reflexión en cualquier punto de la Línea

Extendiendo la definición del coeficiente de reflexión en la carga (2.36) se define el coeficiente de reflexión para cualquier punto de la línea, es decir el cociente entre la onda reflejada ($V_-(x)$) y la onda incidente ($V_+(x)$). Dividiendo $V_-(x)$ por $V_+(x)$ de (2.43) se obtiene

$$\Gamma(x) \triangleq \frac{V_-(x)}{V_+(x)} = \Gamma_L \cdot e^{-2\gamma l} e^{2\gamma x} = \Gamma_L \cdot e^{-2\gamma(l-x)} \quad (2.44)$$

Se puede representar $V_-(x)$ en función de $\Gamma(x)$ al despejar $V_-(x)$ en (2.44)

$$V_-(x) = \Gamma(x) \cdot V_+(x) \quad (2.45)$$

Con lo que se puede representar la tensión de la línea en función del coeficiente de reflexión al sustituir (2.45) en (2.24)

$$V(x) = V_+ e^{-\gamma x} + \Gamma(x) \cdot V_+ e^{-\gamma x} = V_+ e^{-\gamma x} (1 + \Gamma(x)) \quad (2.46)$$

Finalmente se observa que para encontrar las tensiones y corrientes en toda la línea solo basta con encontrar la incógnita V_+ .

2.4. Solución General de Tensiones y Corrientes en el dominio de la frecuencia

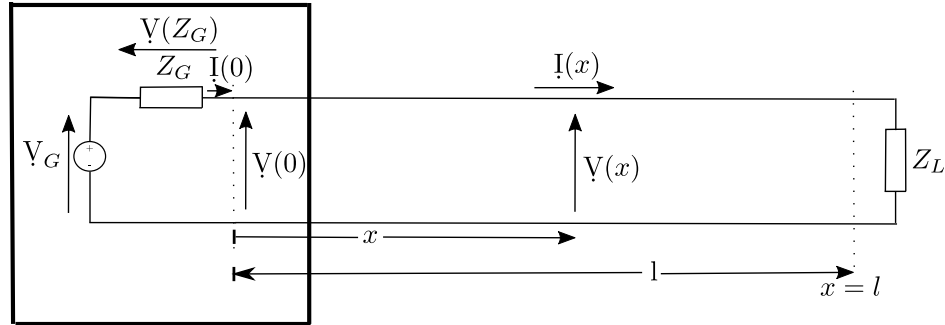


Figura 2.4: Modelo circuital de una línea de transmisión a través de un modelo de parámetros distribuidos, condición de frontera bornes del generador.

Para la obtención del coeficiente de reflexión en la carga Γ_L se procedió a evaluar la condición de frontera asociada a la carga Z_L , con lo que para obtener V_+ se utiliza la otra condición de frontera asociada al generador para encontrar la incógnita compleja. Para ello, se expresa la corriente (2.25) con solo V_+ como incógnita. Eso se logra sustituyendo (2.45) en (2.35) obteniéndose

$$I(x) = \frac{1}{Z_o} \cdot [V_+ e^{-\gamma x} - V_+ \cdot \Gamma(x) \cdot e^{\gamma x}] = \frac{V_+}{Z_o} e^{-\gamma x} [1 - \Gamma(x)] \quad (2.47)$$

Se procede hacer ley de voltaje de Kirchhoff en la malla que se hace referencia en (2.4)

$$V_G - Z_g \cdot I(0) = V(0) \quad (2.48)$$

Despejando V_G de (2.48) se obtiene (2.49)

$$V_G = V_0 + Z_g \cdot I(0) \quad (2.49)$$

Sustituyendo (2.46) y (2.47) en (2.49) se obtiene la siguiente expresión (2.50)

$$V_G = V_+ \cdot (1 + \Gamma(0)) + \frac{Z_g}{Z_o} V_+ (1 - \Gamma(0)) \quad (2.50)$$

Factorizando (2.50) por V_+ se obtiene (2.51)

$$V_G = V_+ \cdot \left[1 + \frac{Z_g}{Z_o} + \Gamma(0) \cdot \left(1 - \frac{Z_g}{Z_o} \right) \right] \quad (2.51)$$

Factorizando (2.51) por Z_o y reemplazando $\Gamma(0) = \Gamma_L \cdot e^{-2\gamma l}$ vease (2.44)

$$V_G = \frac{V_+}{Z_o} \cdot [Z_o + Z_g + \Gamma_L \cdot e^{-2\gamma l} (Z_o - Z_g)] \quad (2.52)$$

Factorizando (2.52) por $(Z_o + Z_g)$ se obtiene (2.53)

$$V_G = V_+ \frac{(Z_o + Z_g)}{Z_o} \cdot \left[1 + \underbrace{\frac{Z_o - Z_g}{Z_o + Z_g} \Gamma_L \cdot e^{-2\gamma l}}_{-\Gamma_G} \right] \quad (2.53)$$

Donde Γ_G se define como el coeficiente de reflexión en el generador. Despejando V_+ de (2.53) se obtiene (2.54)

$$V_+ = V_G \cdot \frac{Z_o}{Z_g + Z_o} \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_L \Gamma_G \cdot e^{-2\gamma l}} \quad (2.54)$$

Con lo cual es posible determinar el voltaje en cada punto en la línea al reemplazar (2.54) en (2.46) como se muestra en (2.55)

$$V(x) = \underbrace{V_G \cdot \frac{Z_o}{Z_g + Z_o} \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_L \cdot \Gamma_G \cdot e^{-2\gamma l}}}_{V_+} \cdot e^{-\gamma x} \cdot \left[1 + \underbrace{\Gamma_L e^{-2\gamma(l-x)}}_{\Gamma(x)} \right] \quad (2.55)$$

De manera analógica se puede encontrar la corriente teniendo como referencia la ecuación (2.47)

$$I(x) = \underbrace{V_G \cdot \frac{1}{Z_g + Z_o} \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_L \cdot \Gamma_G \cdot e^{-2\gamma l}}}_{\frac{V_+}{Z_o}} \cdot e^{-\gamma x} \cdot \left[1 - \underbrace{\Gamma_L e^{-2\gamma(l-x)}}_{\Gamma(x)} \right] \quad (2.56)$$

2.5. Impedancia Aparente

Al observar las ecuaciones que describen el voltaje (2.55) (2.46) y las ecuaciones que describen la corriente (2.47) (2.56) se observa que estas se pueden relacionar con una impedancia en función de la posición tal como se muestra en la ecuación (2.57)

$$Z(x) \triangleq \frac{V(x)}{I(x)} = Z_o \cdot \frac{1 + \Gamma(x)}{1 - \Gamma(x)} \quad (2.57)$$

Como se observa en la ecuación (2.57) el voltaje y la corriente en cada punto x de la línea esta escalada por la impedancia equivalente en la posición x de la línea, la cual corresponde a un número complejo.

A esta expresión se le denomina impedancia aparente.

2.6. Solución General de Tensiones y Corrientes en el dominio del tiempo

Al analizar las expresiones (2.55) y (2.56) para un punto arbitrario de la línea $x = c_1$, se observa que estas pueden ser escritas como las ecuaciones (2.58) y (2.59).

$$V(c_1) = \underbrace{V_G \cdot \frac{Z_o}{Z_g + Z_o} \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_L \cdot \Gamma_G \cdot e^{-2\gamma l}}}_{V_+} \cdot e^{-\gamma c_1} \cdot \left[1 + \underbrace{\Gamma_L e^{-2\gamma(l-c_1)}}_{\Gamma(c_1)} \right] = a_1 + j \cdot b_1 \quad (2.58)$$

$$I(c_1) = \underbrace{V_G \cdot \frac{1}{Z_g + Z_o} \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_L \cdot \Gamma_G \cdot e^{-2\gamma l}}}_{\frac{V_+}{Z_o}} \cdot e^{-\gamma c_1} \cdot \left[1 - \underbrace{\Gamma_L e^{-2\gamma(l-c_1)}}_{\Gamma(c_1)} \right] = a_2 + j \cdot b_2 \quad (2.59)$$

Donde

- a_1 y a_2 son la parte real de $V(c_1)$ e $I(c_1)$ respectivamente.
- b_1 y b_2 son la parte imaginaria de $V(c_1)$ e $I(c_1)$ respectivamente.

Al aplicar transformada fasorial inversa a las ecuaciones (2.58) y (2.59) se obtiene

$$v(x = c_1, t) = A_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \phi_1) \quad (2.60)$$

$$i(x = c_1, t) = B_1 \cdot \cos(\omega_1 t + \psi_1) \quad (2.61)$$

Donde

- ω_1 es la frecuencia angular de interés a la que se le está aplicando el modelo de línea de transmisión.
- $A_1 = |v(x = c_1, t)| = \sqrt{(a_1)^2 + (b_1)^2}$
- $B_1 = |i(x = c_1, t)| = \sqrt{(a_2)^2 + (b_2)^2}$
- $\phi_1 = \arccos\left(\frac{a_1}{\sqrt{(a_1)^2 + (b_1)^2}}\right) \cdot \text{Signo}(a_1)$
- $\psi_1 = \arccos\left(\frac{a_2}{\sqrt{(a_2)^2 + (b_2)^2}}\right) \cdot \text{Signo}(a_2)$

Si una señal esta compuesta por una suma finita de frecuencias, la expresión para el voltaje y la corriente queda como

$$v(x = c, t) = \sum_{i=1}^N A_n \cdot \cos(\omega_n t + \phi_n) \quad (2.62)$$

$$i(x = c, t) = \sum_{j=1}^N B_j \cdot \cos(\omega_j t + \psi_j) \quad (2.63)$$

2.7. Modelo a Tensión Continua en el tiempo

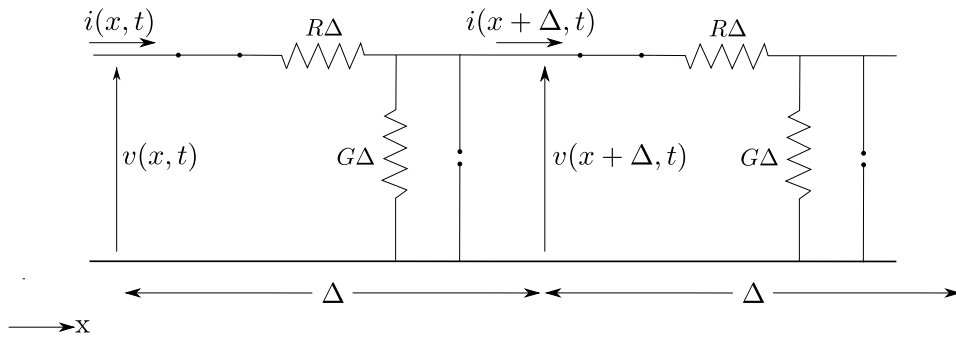


Figura 2.5: Modelo circuital de una línea de transmisión DC.

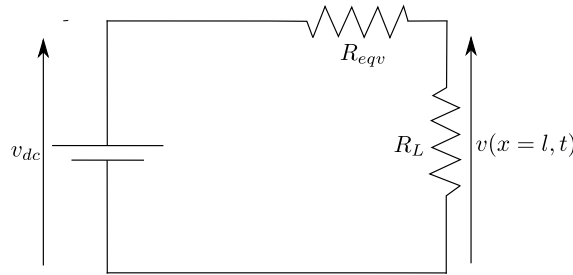


Figura 2.6: Modelo circuital equivalente DC.

Anteriormente se analizó la línea de transmisión para señales sinusoidales, a continuación se hace un análisis para tensiones continuas. Al alimentar el circuito de la figura 2.1 con una fuente de tensión DC, en estado estacionario se observa que los condensadores y los inductores se cargan tal como se muestra en la figura 2.5

Se observa en la figura 2.5 que los condensadores y los inductores se han cargado con lo que su equivalente son un circuito abierto y un cable respectivamente.

Se calcula la tensión en la carga considerando solo la resistencia distribuida de la línea. En la figura 2.6 se observa el circuito equivalente

Aplicando el principio de divisor de tensión se obtiene (2.64)

$$v(x = l, t) = \frac{R_L}{R_L + R_{eqv}} \cdot v_{dc} \quad (2.64)$$

Como se menciona en la tabla 2.1

Tabla 2.1: Resistencia distribuida de la línea.

Párametro	Referencia [1]	Referencia [2]	Referencia [3]
$R_{DC}[\Omega/m]$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$3,9 \cdot 10^{-5}$

La resistencia distribuida es de orden de magnitud decenas de miliohms. El largo de la línea es de orden de magnitud kilómetros y la resistencia de carga es de una orden de magnitud de centenas de ohms ($R_L = 10^2[\Omega]$) con lo que se obtiene

$$R_{eqv} = l \cdot R = 10^3 \cdot 10^{-5} = 10^{-2} \quad (2.65)$$

$$\frac{R_L}{R_L + R_{eqv}} = \frac{10^2}{10^2 + 10^{-2}} = 0,99990 \quad (2.66)$$

Con lo que se concluye

$$v(x, t) \approx v_{dc} \quad (2.67)$$

No se considera en el modelo la conductancia, ya que en la literatura esta es de orden de pico-ohms o simplemente no se tiene en cuenta.

2.8. Distorsión en la línea de Transmisión

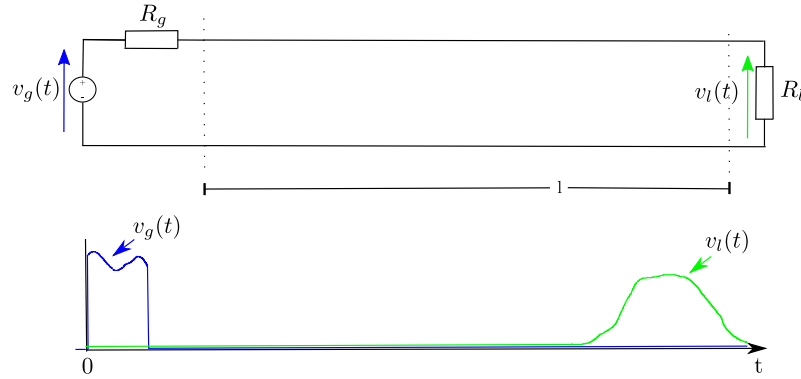


Figura 2.7: Fenomeno de distorsión.

En el capítulo se ha analizado la línea de transmisión para una única frecuencia. Debido a esto se analizó con transformada fasorial. Con lo cual, al transmitir una sinusoidal, la línea podrá introducir un cambio de amplitud y/o un cambio de fase. Pero una señal puede estar constituida por la suma de señales de distintas frecuencias, con la que se estudia la distorsión en la línea.

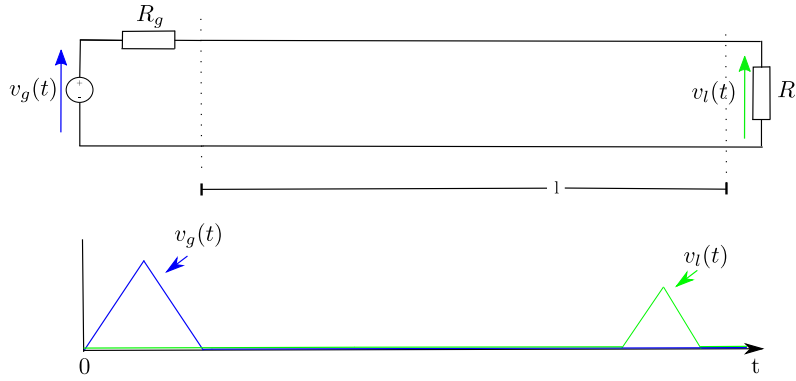


Figura 2.8: Señal sin distorsión.

Se define distorsión cuando $v_l(t)$ difiere de $v_g(t)$ más que una atenuación o un desfase tal como se señala en la figura 2.7. Un ejemplo de una línea de transmisión sin distorsión se muestra a continuación en la figura 2.8

Se aprecia que no se produce distorsión, ya que en la figura 2.8 se observa que la señal solo está atenuada y desfasada. Es decir se puede escribir como

$$v_l(j\omega) = K \cdot e^{-j\omega\tau} v_g(j\omega) \quad \text{para algun } K, \tau, \in \mathbb{R} \quad (2.68)$$

Por lo tanto, hay distorsión cuando no es posible escribir $v_l(t)$ y $v_g(t)$ de la forma que se señala en la ecuación (2.68). Al aplicar transformada de Fourier a la ecuación (2.68) se obtiene (2.69)

$$v_l(\omega) = K \cdot e^{-\omega\tau} v_g(\omega) \quad (2.69)$$

Al expresar la ecuación (2.55) evaluada en $x = l$ con sus variables en función de ω , se obtiene la ecuación (2.70)

$$V_l(\omega) = V_G(\omega) \cdot \underbrace{\frac{Z_o(\omega)}{Z_g(\omega) + Z_o(\omega)} \cdot \frac{1}{1 - \Gamma_L(\omega) \cdot \Gamma_G(\omega) \cdot e^{-2\gamma(\omega)l}} \cdot e^{-\gamma(\omega)l} \cdot [1 + \Gamma_L(\omega)]}_{H(\omega)} \quad (2.70)$$

Donde $H(\omega)$ es la respuesta en frecuencia de v_g hasta v_l . Al comparar (2.69) con (2.70) se observa que en muy pocos casos la función de transferencia ($H(\omega)$) queda expresada como una constante real, con lo que se espera que la mayoría de los casos se produzca el fenómeno de distorsión. Por lo tanto una línea de transmisión introduce distorsión si alguna de las siguientes condiciones se cumple

- Z_o depende de la frecuencia.
- α depende de la frecuencia.
- v_p (velocidad de fase) depende de la frecuencia.

2.9. Parámetros de la línea de Transmisión

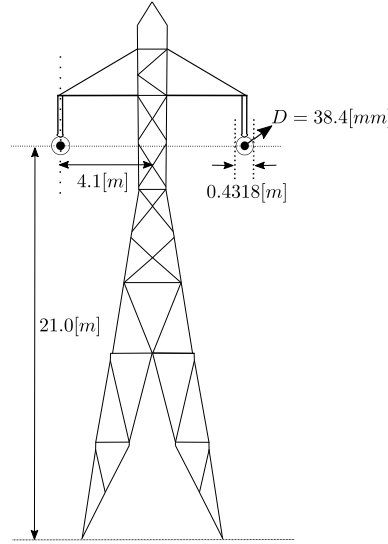


Figura 2.9: línea DC, Estructura de transmisión.

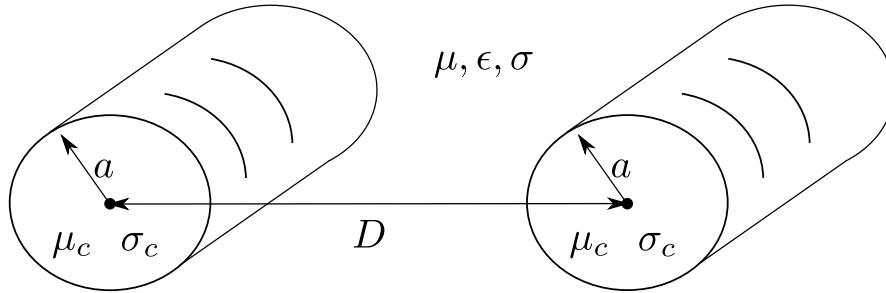


Figura 2.10: línea DC de transmisión.

La línea de transporte aérea utilizada en este trabajo es la misma línea transportadora de [7], la que se utiliza para transportar energía continua en Nueva Zelanda, la que se presenta en la figura 2.9.

La línea consiste en un par de conductores con muy alta conductividad separados a una distancia D , tal como se muestra en la figura 2.10. Para dos alambres conductores, cada uno de radio a y separados a una distancia D por un medio dieléctrico con parámetros ϵ , μ y σ , [4] define los parámetros distribuidos de la línea como

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}(D/2a)} \quad (F/m) \quad (2.71)$$

$$L = \frac{\mu}{\pi} \cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right) \quad (H/m) \quad (2.72)$$

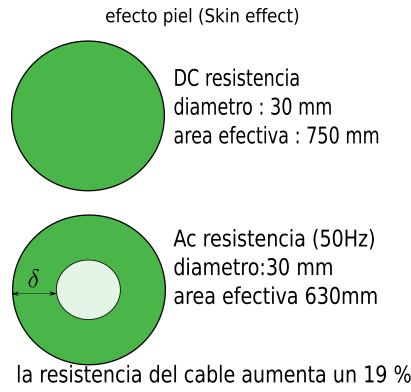


Figura 2.11: Efecto piel

$$G = \frac{\pi \cdot \sigma}{\cosh^{-1}\left(\frac{D}{2a}\right)} \quad (S/m) \quad (2.73)$$

y la resistencia queda definida como

$$R = \frac{1}{\sigma_c(S)} \quad (2.74)$$

Donde S es el área de la sección transversal del flujo de corriente en cada alambre. Con una profundidad de penetración δ la sección transversal es aproximadamente $S = 2\pi a\delta$, por lo tanto

$$R_{AC} = \frac{1}{\sigma_c(2\pi a\delta)} = \frac{1}{\pi a} \cdot \sqrt{\frac{\pi f \mu_c}{\sigma_c}} \quad (\Omega/m) \quad (2.75)$$

En el caso de DC la sección transversal del flujo de corriente queda definida como $S = \pi a^2$, por lo tanto

$$R_{DC} = \frac{1}{\sigma_c(2\pi a^2)} \quad (\Omega/m) \quad (2.76)$$

se observa lo siguiente

- La resistencia distribuida aumenta proporcionalmente a la raíz cuadrada de la frecuencia.
- La inductancia distribuida aumenta al separar más los conductores de la línea.
- La capacitancia distribuida aumenta al disminuir la distancia de los conductores de la línea.
- La resistencia distribuida disminuye al aumentar el radio del conductor eléctrico.

MODELO DEL CONVERTIDOR MULTINIVEL MODULAR

El "Modular Multilevel Converters" (MMC) es el convertidor utilizado en este trabajo por lo que se modela para obtener las condiciones de frontera, es decir la fuente de tensión V_G , la impedancia de carga Z_L y la impedancia del generador Z_G y así usar estas expresiones en las simulaciones. Esta tecnología se utiliza en sistemas de transportes de energía HVDC.

3.1. Descripción Circuito MMC

En esta sección se desarrollan los fundamentos del MMC [5], el que dará las bases para modelar la impedancia de entrada Z_G y la impedancia de carga Z_L de la línea de transmisión analizada, a través del modelo circuital del MMC, el que se implementa en las simulaciones de este trabajo. El MMC se sustenta en la conexión en serie de submódulos, los que se utilizan en sistemas de potencia de medio y alto voltaje con alta calidad de potencia transmitida en función de la cantidad de submódulos utilizados. La topología más utilizada en aplicaciones HVDC se muestra en la figura 3.1 en donde cada submódulo se conecta en serie con el siguiente, formando la rama positiva y la rama negativa, cada una con N celdas. La rama positiva se conecta en el polo positivo de la línea DC y la rama negativa se conecta en el polo negativo de la línea DC. En esta topología, representada en la figura 3.1, las dos ramas forman una fase del convertidor, cuyo punto medio es la salida del convertidor trifásico.

3.1.1. Topologías de submódulos para MMC

Los submódulos del MMC tienen distintas topologías, todas ellas trabajan con un condensador flotante en el lado DC de cada celda. Las topologías más frecuentes son

- "Full-bridge": Topología que tiene la capacidad de entregar 3 niveles de voltaje de la salida ($-v_{dc}$, 0 , v_{dc}) la que se muestra en la figura 3.3
- "Half-bridge": Topología capaz de entregar 2 niveles de voltaje de salida (0 , v_{dc}) la que se puede observar en la figura 3.3.

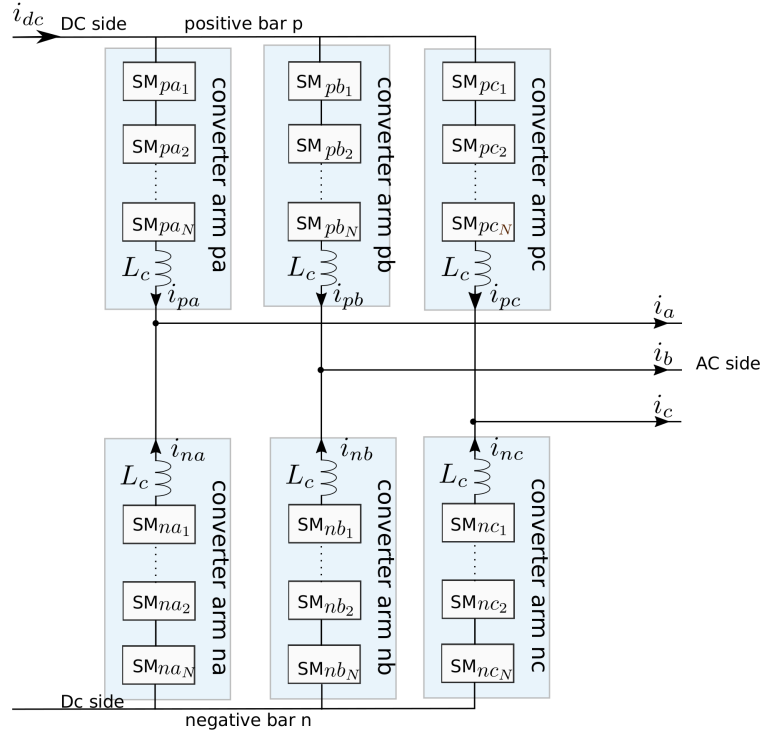


Figura 3.1: Topología Convertidor Multinivel Modular trifásico DC/AC .

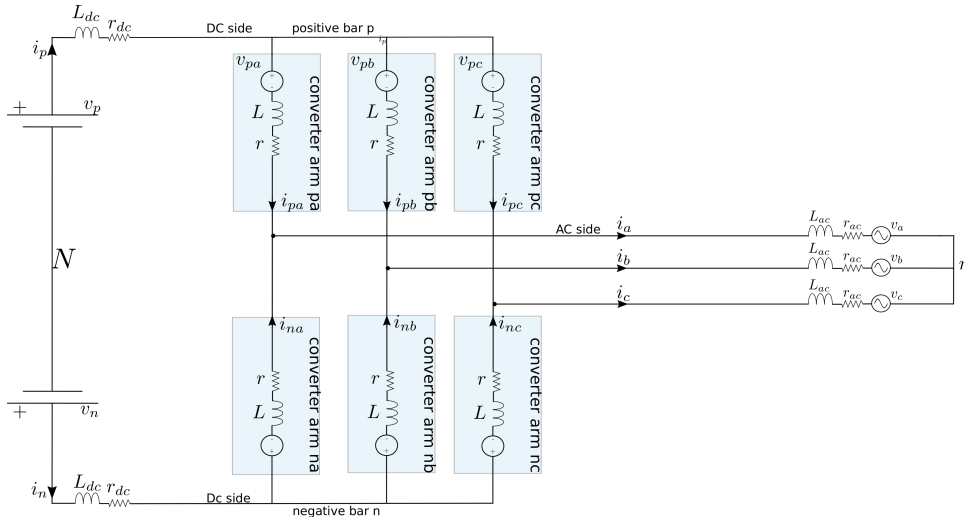


Figura 3.2: Modelo circuital del MMC

Se puede modelar cada topología usando una función de conmutación SM_{xyz} donde $x \in \{p, n\}$ para la rama positiva y negativa respectivamente, $y \in \{a, b, c\}$ para la fase

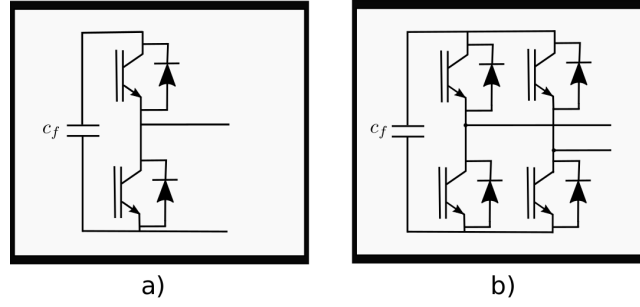


Figura 3.3: Topología de celda para MMC. a) Half-bridge b) Full-bridge

del convertidor trifásico, y $z \in \{1, 2, 3, \dots, N\}$ es el submódulo z de la rama. Dependiendo de los estados de conmutación (S_{xyz}) que posea el submódulo, el voltaje de la salida puede ser descrito como

$$v_{xyz} = v_{cxyz} \cdot S_{xyz} \quad (3.1)$$

El modelo que se implementa en las simulaciones se obtiene sumando todos los voltajes de todas las celdas de cada rama (positiva y negativa) del MMC, y añadiendo resistencias de pérdidas a las ramas, así obteniéndose un modelo simétrico que se presenta en la figura 3.2

3.1.2. Modelo Matemático MMC

Tal como se mencionó en la sección anterior, el modelo matemático a utilizar en este trabajo se fundamenta en el circuito eléctrico de la figura 3.2. Los voltajes por rama v_{xy} $x \in \{p, n\}$, $y \in \{a, b, c\}$ corresponden a la suma de cada uno de los voltajes de rama según la ecuación (3.2)

$$v_{xy} = \sum_{z=1}^N v_{xyz} = \sum_{z=1}^N v_{cxyz} \cdot s_{xyz} \quad x \in \{p, n\}, y \in \{a, b, c\} \quad (3.2)$$

Aplicando ley de voltaje de Kirchhoff, se obtienen 6 ecuaciones dinámicas del MMC en matrices de 2×3 , se consigue una ecuación matricial que representa la dinámica del MMC. [6]

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} v_p & v_p & v_p \\ v_n & v_n & v_n \end{bmatrix} &= L_{dc} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_p & i_p & i_p \\ i_n & i_n & i_n \end{bmatrix} + r_{dc} \begin{bmatrix} i_p & i_p & i_p \\ i_n & i_n & i_n \end{bmatrix} + L \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{pa} & i_{pb} & i_{pc} \\ i_{na} & i_{nb} & i_{nc} \end{bmatrix} \\ &+ r \begin{bmatrix} i_{pa} & i_{pb} & i_{pc} \\ i_{na} & i_{nb} & i_{nc} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{pa} & v_{pb} & v_{pc} \\ v_{na} & v_{nb} & v_{nc} \end{bmatrix} + L_{ac} \frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_a & i_b & i_c \\ i_a & i_b & i_c \end{bmatrix} \\ &+ r_{ac} \begin{bmatrix} i_a & i_b & i_c \\ i_a & i_b & i_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_a & v_b & v_c \\ v_a & v_b & v_c \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} v_{nN} & v_{nN} & v_{nN} \\ v_{nN} & v_{nN} & v_{nN} \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (3.3)$$

Con la finalidad de expresar de manera más sencilla la ecuación matricial anterior, se define las siguientes matrices

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_x &= \begin{bmatrix} v_p & v_p & v_p \\ v_n & v_n & v_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_x = \begin{bmatrix} i_p & i_p & i_p \\ i_n & i_n & i_n \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_{xy} = \begin{bmatrix} v_{pa} & v_{pb} & v_{pc} \\ v_{na} & v_{nb} & v_{nc} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_y = \begin{bmatrix} i_a & i_b & i_c \\ i_a & i_b & i_c \end{bmatrix} \\
\mathbf{V}_y &= \begin{bmatrix} v_a & v_b & v_c \\ v_a & v_b & v_c \end{bmatrix}, \quad \mathbf{I}_{xy} = \begin{bmatrix} i_{pa} & i_{pb} & i_{pc} \\ i_{na} & i_{nb} & i_{nc} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{V}_{nN} = \begin{bmatrix} v_{nN} & v_{nN} & v_{nN} \\ v_{nN} & v_{nN} & v_{nN} \end{bmatrix}, \quad \mathbf{P}_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \\
\mathbf{P}_2 &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_2 = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbf{Q}_3 = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Utilizando el principio ley de corriente de Kirchhoff, se establecen las ecuaciones (3.4) y (3.5)

$$\mathbf{I}_x = 3 \mathbf{I}_{xy} \mathbf{P}_3 \quad (3.4)$$

$$\mathbf{I}_y = 2 \mathbf{P}_2 \mathbf{I}_{xy} \quad (3.5)$$

Con lo mencionado anteriormente, la ecuación matricial (3.3) es representada en la ecuación (3.6)

$$\begin{aligned}
\mathbf{V}_x &= 2L_{ac} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{P}_2 \mathbf{I}_{xy}) + 2r_{ac} \cdot \mathbf{P}_2 \mathbf{I}_{xy} + L \cdot \frac{d}{dt} \mathbf{I}_{xy} + r \cdot \mathbf{I}_{xy} \\
&+ \mathbf{V}_{xy} + 3L_{ac} \cdot \frac{d}{dt}(\mathbf{I}_{xy} \mathbf{P}_3) + 3r_{ac} \cdot \mathbf{I}_{xy} \mathbf{P}_3 + \mathbf{V}_y + \mathbf{V}_{nN}
\end{aligned} \quad (3.6)$$

La ecuación (3.6) modela la dinámica de todas las ramas MMC en forma matricial. Esta ecuación se puede descomponer con el fin de obtener los modelos de entrada y salida del convertidor entre otros.

3.2. Modelo Desacoplado de corrientes y voltajes del MMC

En la sección anterior se dedujo la ecuación (3.6) que modela el comportamiento dinámico del MMC. Al multiplicar la ecuación (3.6) con matrices idempotentes y aplicar transformadas matemáticas se obtienen modelos desacoplados del MMC, las cuales modelan las variables eléctricas del convertidor. Para obtener la descomposición es necesario utilizar las matrices ($\mathbf{Q}_2$ y $\mathbf{Q}_3$), y las matrices ($\mathbf{P}_2$ y $\mathbf{P}_3$) que poseen las siguientes propiedades

- $\mathbf{P}_2, \mathbf{P}_3, \mathbf{Q}_2, \mathbf{Q}_3$ son matrices idempotentes
- $\mathbf{P}_3 \mathbf{Q}_3 = 0$
- $\mathbf{Q}_2 \mathbf{P}_2 = 0$
- La matriz $\mathbf{Q}_2$ elimina a las matrices cuyas filas son idénticas, como por ejemplo a las matrices $\mathbf{V}_y$ y $\mathbf{I}_y$, y además esta no afecta a las matrices cuya fila superior sea el negativo de la fila inferior.
- La matriz $\mathbf{P}_2$ elimina a matrices cuya fila inferior sea el negativo de la superior, tal como $\mathbf{V}_x$ e $\mathbf{I}_x$, y además no afecta al resto.

- La matriz $\mathbf{Q}_3$ elimina a matrices cuya fila inferior sea el negativo de la fila superior y sean matrices escalares; y no afecta a matrices que representan a sistemas trifásicos balanceados.
- La matriz $\mathbf{P}_3$ elimina a matrices que representan sistemas trifásicos balanceados. No afecta al resto de las matrices.

Aplicando las propiedades descritas anteriormente, es posible descomponer la ecuación (3.6) realizando multiplicaciones matriciales tanto por la izquierda como por la derecha.

3.2.1. Modelo de entrada

El modelo de la entrada se obtiene al multiplicar la ecuación (3.6) por la izquierda con $\mathbf{Q}_2$ y por la derecha por $\mathbf{P}_3$. Las matrices que tengan $\mathbf{P}_2$ por la izquierda que sean matrices escalares y sean trifásicos se anularán debido a las propiedades descritas anteriormente ($\mathbf{V}_y$, $\mathbf{I}_y$) quedando

$$-\mathbf{V}_s = L_s \frac{d}{dt} \mathbf{I}_s + r_s \mathbf{I}_s - \mathbf{V}_x \quad (3.7)$$

Donde

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_s &= \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{V}_{xy} \cdot \mathbf{P}_3, & \mathbf{I}_s &= \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{I}_{xy} \cdot \mathbf{P}_3 \\ r_s &= 3r_{dc} + r, & L_s &= 3L_{dc} + L \end{aligned}$$

Donde $\mathbf{V}_s$, $\mathbf{I}_s$, r_s y L_s son el voltaje de entrada, corriente de entrada, resistencia e inductancias de entrada del MMC teniendo en cuenta

$$3 \cdot \mathbf{I}_s = \mathbf{I}_x \quad (3.8)$$

3.2.2. Modelo de salida

Al multiplicar la ecuación (3.6) por la izquierda con $\mathbf{P}_2$ y hacia la derecha con $\mathbf{Q}_3$, donde las matrices que representan sistemas trifásicos balanceados no se eliminan tal como se representa en la ecuación (3.9)

$$-\mathbf{V}_o = L_o \frac{d}{dt} \mathbf{I}_o + r_o \mathbf{I}_o + \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{V}_y \cdot \mathbf{Q}_3 \quad (3.9)$$

donde se tiene

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_o &= \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{V}_{xy} \cdot \mathbf{Q}_3, & \mathbf{I}_o &= \mathbf{P}_2 \cdot \mathbf{I}_{xy} \cdot \mathbf{Q}_3 \\ r_o &= r + 2r_{ac}, & L_o &= L + 2L_{ac} \end{aligned}$$

$\mathbf{V}_o$, $\mathbf{I}_o$, r_o y L_o son respectivamente el voltaje de salida, corriente de salida, resistencia de salida e inductancia de salida del MMC.

La corriente en el modelo de salida es

$$2 \cdot \mathbf{I}_o = \mathbf{I}_y \quad (3.10)$$

3.2.3. Impedancia de entrada

Para encontrar la impedancia de entrada entre el voltaje de entrada $\mathbf{V}_s$ y la corriente $\mathbf{I}_s$, se utilizará la ecuación (3.7) que describe la dinámica entre las variables, con lo cual aplicando transformada fasorial se llega a la ecuación (3.11)

$$Z_g = \frac{\mathbf{V}_s(j\omega)}{\mathbf{I}_s(j\omega)} = L_s \cdot j\omega + r_s \quad (3.11)$$

3.2.4. Impedancia de salida

Para encontrar la impedancia de entrada entre el voltaje de entrada $\mathbf{V}_o$ y la corriente $\mathbf{I}_o$, se utilizará la ecuación (3.9) que describe la dinámica entre las variables, con lo cual aplicando la transformada fasorial se llega a la ecuación (3.12)

$$Z_l = \frac{\mathbf{V}_o(j\omega)}{\mathbf{I}_o(j\omega)} = L_o \cdot j\omega + r_o \quad (3.12)$$

En este trabajo no es necesario considerar el modelo circulante y el modelo de modo común.

3.3. Diagrama del modelo simplificado

En la figura 3.4 se presenta el diagrama simplificando, el cual va ser utilizado en la simulación

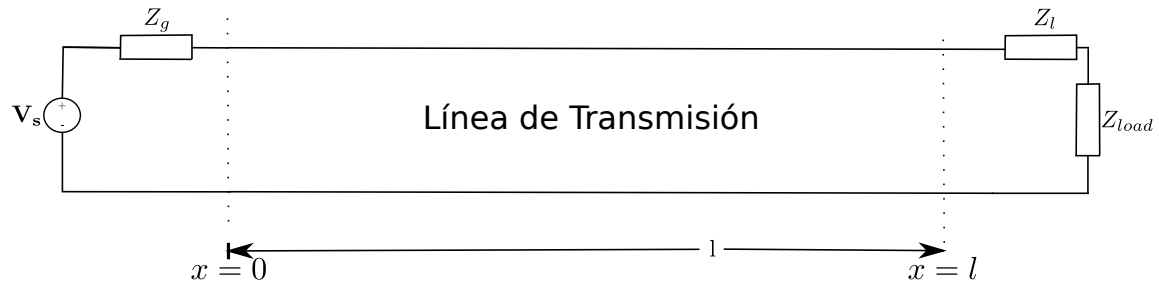


Figura 3.4: Diagrama del modelo simplificado.

En 3.4 se observa

- $\mathbf{V}_s$ es el generador de tensión que esta representado en la ecuación (3.7)
- Z_g es la impedancia de entrada del MMC representada por la ecuación (3.11)
- Z_l es la impedancia de salida del MMC representada por la ecuación (3.12)
- Z_{load} es la carga a la cual se quiere alimentar con potencia eléctrica.
- Se observa la línea de transmisión la cual es descrita en el capítulo dos.

Capítulo 4

SIMULACIONES

En este capítulo se plantea la metodología con la que se realizan las simulaciones.

4.1. Metodología

En este trabajo para poder simular la línea de transmisión se planteó un modelo de línea de **Olivier Heaviside** en el capítulo dos. Este plantea el voltaje y corriente de la línea en el dominio de la frecuencia en (2.55) y (2.56). Esta transformada permite ver el voltaje y la corriente a lo largo de la línea en estado estacionario para una sola frecuencia, por lo que se le aplica la serie de Fourier al generador de tensión en circuito abierto que es representado en la ecuación (3.7). A su vez se analizan las condiciones de contorno de la línea. En este caso los convertidores MMC de entrada AC/DC y de salida DC/AC. Estos se modelan como impedancias en función de la frecuencia como se mostró en el capítulo tres usando (3.11) para la impedancia de entrada y (3.12) para la impedancia de salida.

4.2. Parámetros de la línea

Anteriormente en el capítulo dos sección Parámetros de la línea de Transmisión se describió el tipo de línea en la figura 2.9 con sus respectivos parámetros que se encuentran en la tabla 4.1

Tabla 4.1: Parámetros de la línea de transmisión

Parámetro	Símbolo	Valor	Referencia
Radio	a	$0,0192[m]$	[7]
Permeabilidad magnética en el conductor	μ_c	$4\pi \cdot 10^{-7}[H/m]$	[4]
Conductividad eléctrica en el conductor	σ_c	$2,46 \cdot 10^7[S/m]$	[7]
Distancia entre conductores	D	$8,2[m]$	[7]
Permeabilidad magnética en el aire	μ_o	$4\pi \cdot 10^{-7}[H/m]$	[4]
Permeabilidad eléctrica en el aire	ϵ_o	$\frac{1}{36\pi} \cdot 10^{-9}[F/m]$	[4]
Conductividad eléctrica en el aire	σ_o	$1,8 \cdot 10^{-14}[S/m]$	[8]

Con los parámetros de la tabla 4.1 se construyen los parámetros distribuidos de manera teórica, estos también se muestran junto a los parámetros obtenidos numéricamente según las siguientes referencias [1], [2] y [3] en la tabla 4.2

Tabla 4.2: Parámetros distribuidos

Parámetro	Teorico	referencia [1]	referencia [2]	referencia [3]
$L[H/m]$	$5,96 \cdot 10^{-7}$	$1,05 \cdot 10^{-6}$	$7,92 \cdot 10^{-7}$	$2,3 \cdot 10^{-7}$
$C[F/m]$	$1,86 \cdot 10^{-11}$	$1,1 \cdot 10^{-11}$	$1,4 \cdot 10^{-11}$	$3,2 \cdot 10^{-10}$
$G[S/m]$	$3,79 \cdot 10^{-12}$	$6,5 \cdot 10^{-12}$	x	x
$R_{DC}[\Omega/m]$	$3,51 \cdot 10^{-5}$	$3 \cdot 10^{-5}$	$1,5 \cdot 10^{-5}$	$3,9 \cdot 10^{-5}$
$R_{AC}[\Omega/m]$	$6,64142 \cdot 10^{-6} \cdot \sqrt{f}$	x	x	x

4.3. Parámetros del convertidor MMC

En el capítulo tres se modeló el convertidor MMC para obtener la impedancia de entrada y de salida. A partir de este modelo se muestran los parámetros del convertidor en la tabla 4.3, los que se utilizaron en las simulaciones de [9].

Tabla 4.3: Parámetro del MMC.

Parámetro	Valor
L	$5[mH]$
L_{ac}	$2[mH]$
r	$0,05[\Omega]$
r_{ac}	$1[\Omega]$
v_{Ripple}	$14,56[V]$
v_{dc}	$600[V]$
i_{dc}	$8,3[A]$
v_{ac}	$\sqrt{2} \cdot 220[V]$
i_{ac}	$16[A]$
Z_{load}	$19,4[\Omega]$

Con que se diseñan los parámetros para realizar las simulaciones.

- L la inductancia de acoplamiento evita los cambios bruscos de corriente que puedan dañar el sistema, tal como se muestra en la siguiente ecuación

$$\frac{v}{L} = \frac{di}{dt} = k1 \quad (4.1)$$

Para un voltaje y una inductancia dadas, se acota $\frac{di}{dt}$ tal como se muestra en la ecuación 4.1. Se calcula el factor de variación de corriente f_{vc} que consiste en ver cuántas veces es $\frac{di}{dt}$ respecto a la corriente nominal i_{dc} de la tabla 4.3 en la ecuación (4.2).

$$f_{vc} = \frac{\frac{di}{dt}}{i_{dc}} = \frac{\frac{v_{Ripple}}{L}}{8,3} = \frac{\frac{14,56}{5}}{8,3} = 0,35 \quad (4.2)$$

Para diseñar L se usa el criterio de obtener un f_{vc} cercano a 0,3 por lo que reemplazando con las condiciones a simular se obtiene L en la ecuación 4.3

$$L = \frac{v_{Riple}}{f_{vc} \cdot i_{dc}} = \frac{2000}{0,3 \cdot 1000} = 6,666[mH] \approx 7[mH] \quad (4.3)$$

A partir de este resultado, en este trabajo se usará una L de 7[mH].

- r es la resistencia por pérdidas de los convertidores, en la tabla 4.3 representa aproximadamente 1/40 de la resistencia de carga por lo que usando el mismo criterio

$$r = \frac{1}{40} \cdot Z_{load} = 1[\Omega] \quad (4.4)$$

- r_{ac} y l_{ac} corresponden a los parámetros concentrados de la línea en el lado AC por lo que se mantienen los mismos valores.

Finalmente se muestran los parámetros a utilizar en la simulación

Tabla 4.4: Parámetro del MMC para análisis y simulación.

Parámetro	Valor
L	7[mH]
L_{ac}	2[mH]
r	1[Ω]
r_{ac}	1[Ω]
Z_{load}	400[Ω]

Con los valores de la tabla 4.4 se expresan las impedancias de entrada y salida como se señala en las ecuaciones (3.11) y (3.12), con $r_{dc} = 0$ y $L_{dc} = 0$ ya que estos parámetros son considerados en el modelo de la línea.

Tabla 4.5: Impedancia de entrada y salida del MMC

Impedancia	Valor
ZG	$2 + j \cdot 0,007 \cdot w$
ZL	$4 + j \cdot 0,011 \cdot w$

4.4. Fuentes de tensión del MMC

Se expone la matriz que representa la fuente de tensión independiente (3.7) en (4.5)

$$\mathbf{V}_s = \mathbf{Q}_2 \cdot \mathbf{V}_{xy} \cdot \mathbf{P}_3 = \begin{pmatrix} z & z & z \\ y & y & y \end{pmatrix} \quad (4.5)$$

donde

$$z = \frac{1}{3} \cdot (0,5v_{na} - 0,5v_{pa}) + \frac{1}{3} \cdot (0,5v_{nb} - 0,5v_{pb}) + \frac{1}{3} \cdot (0,5v_{nc} - 0,5v_{pc}) \quad (4.6)$$

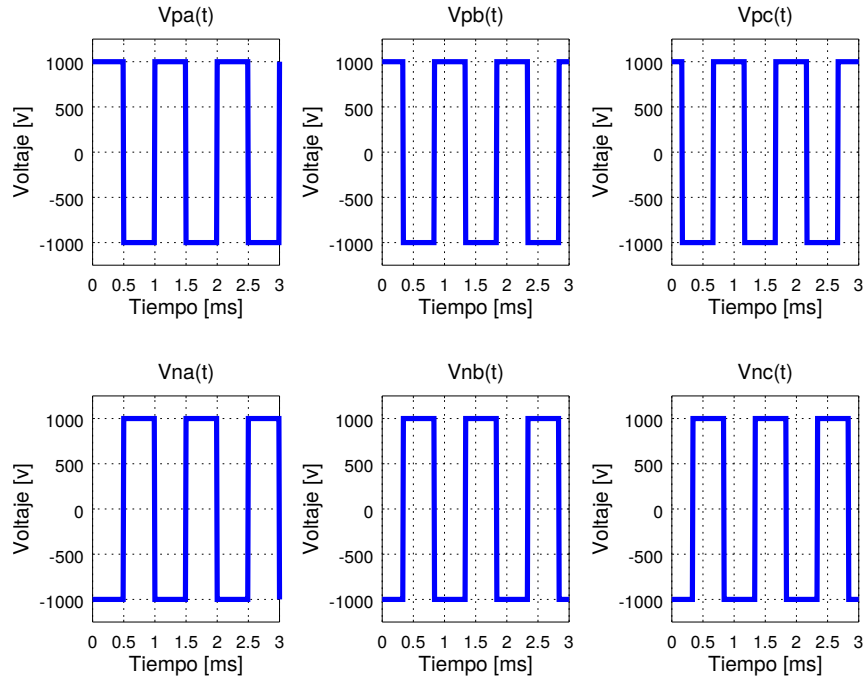


Figura 4.1: Fuentes de tensión V_{xy} que modela el MMC.

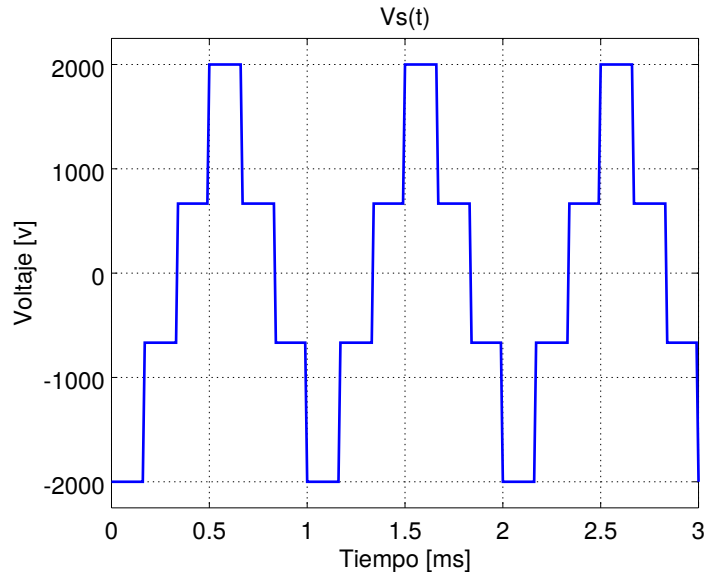


Figura 4.2: Fuente de tensión $V_s(t)$ que modela el MMC.

y

$$y = \frac{1}{3} \cdot (-0,5v_{na} + 0,5v_{pa}) + \frac{1}{3} \cdot (-0,5v_{nb} + 0,5v_{pb}) + \frac{1}{3} \cdot (-0,5v_{nc} + 0,5v_{pc}) \quad (4.7)$$

Se presenta el peor caso de las variables presentadas en la ecuación (4.5) las que se ilustran en la figura 4.1

Notar que $z + y = 0$. La fuente de tensión independiente queda representada como la diferencia de potencial entre un elemento de la fila 1 y un elemento de la fila 2 de la matriz (4.5)

Se presenta la fuente de tensión independiente (4.6) que modela el MMC, en la figura 4.2, la que corresponde a la diferencia de potencial que hay en los nodos z e y como se ilustra en la ecuación (4.8)

$$Vs(t) = V(z) - V(y) \quad (4.8)$$

4.5. Serie de Fourier de voltaje en terminales en circuito abierto

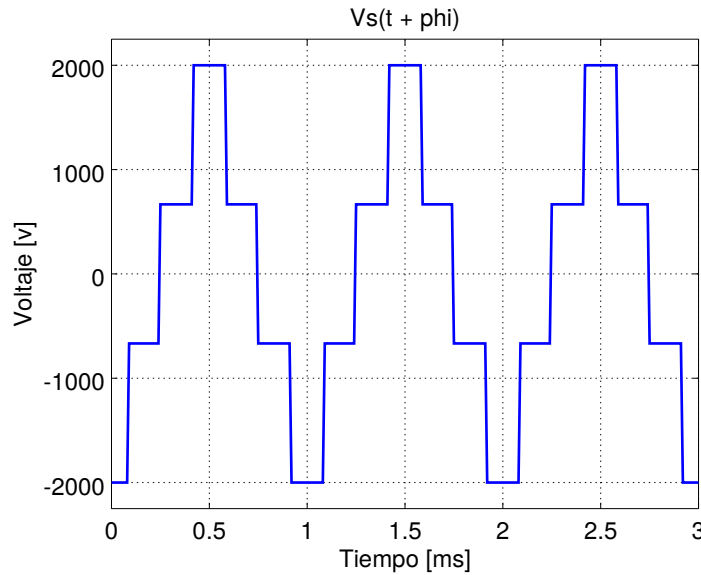


Figura 4.3: Fuente de tensión $Vs(t + \phi)$.

Como el modelo de líneas de transmisión es aplicable a sinusoidales, tal como se mostró en el capítulo dos, se aplica la transformada de Fourier a la señal voltaje en terminales en circuito abierto según la ecuación (3.7) y la figura 4.2. Sin embargo, se observa que la figura 4.2 no presenta la simetría que presenta una función par o impar, por lo que se aplica un desfase de tal manera de obtener simetría par, con el fin de facilitar los cálculos de los coeficientes de Fourier. La señal presentada en la figura 4.2 con el desfase correspondiente es presentada en 4.3

Como la señal presentada en la figura 4.3 es par, solo se presentan coeficientes impares tal como se presentan en la ecuación (4.9)

$$a_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{T/2}^{T/2} f(t) \cdot \cos(n \cdot \omega t) dt \quad (4.9)$$

$$b_n = \frac{2}{T} \cdot \int_{T/2}^{T/2} f(t) \cdot \sin(n \cdot \omega t) dt = 0 \quad (4.10)$$

Al resolver la expresión planteada en la ecuación (4.9) se obtiene el siguiente polinomio presentado en la ecuación (4.11)

$$a_n = \frac{212,207}{n} \cdot (-2 \cdot \sin(0,523599 \cdot n) - 2 \cdot \sin(1,5708 \cdot n) - 2 \cdot \sin(2 \cdot 61799 \cdot n) + 2 \cdot \sin(3,66519 \cdot n) + 2 \cdot \sin(4,71239 \cdot n) + 2 \cdot \sin(5,75959 \cdot n) - 3 \cdot \sin(6,28319 \cdot n)) \quad (4.11)$$

Como se observa en (4.11) existen infinitas armónicas, por lo que se analiza un número finitos de estas.

4.6. Criterio de Energía

Debido a la existencia de infinitos a_n se procede a truncar el número de armónicas mediante un criterio de energía [10] el que consiste en analizar una cantidad finita de armónicas que acumulen más del 99,95% de la energía de la señal de la figura 4.2. En esta sección se muestran los fundamentos para ello.

Se define la energía de una señal $x(t)$ en un cierto periodo T en la ecuación (4.12)

$$\text{Energía} = \int_0^T x^2(t) dt \quad (4.12)$$

a su vez se establece el valor RMS de $x(t)$ en (4.13)

$$\text{Valor RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T |x(t)|^2 dt} \quad (4.13)$$

En la ecuación (4.14) se presenta el valor RMS de una señal $x(t) = a_n \cdot \cos(w \cdot t + \phi)$

$$x_{\text{RMS}} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \int_0^T |a_n \cdot \cos(w \cdot t + \phi)|^2 dt} = \frac{a_n}{\sqrt{2}} \quad (4.14)$$

Con lo cual se representa la energía de una señal sinusoidal en función de su valor RMS como se presenta en (4.15)

$$\text{Valor RMS} = \sqrt{\frac{1}{T} \cdot \underbrace{\int_0^T |x(t)|^2 dt}_{\text{Energía}}} = \frac{a_n}{\sqrt{2}} \quad (4.15)$$

$$\sqrt{\frac{1}{T} \cdot \text{Energía}} = \frac{a_n}{\sqrt{2}} \quad (4.16)$$

Despejando la energía en (4.16) se obtiene (4.17)

$$\text{Energía} = \frac{T}{2} \cdot a_n^2 \quad (4.17)$$

Se establece la energía acumulada de los componentes a_n es

$$E_{a_n}(N) = \frac{T}{2} \cdot \sum_{n=1}^N (a_n)^2 \quad (4.18)$$

La energía de la señal $Vs(t)$ está representada por la ecuación (4.19)

$$E_{Vs} = \int_0^T (Vs(t))^2 dt = 1629,63 \quad (4.19)$$

Con lo que se encuentra la solución que satisfaga la relación señalada en la inecuación (4.20)

$$\underbrace{\frac{E_{a_n}}{E_{Vs}} \cdot 100 \%}_E \geq 99,95 \% \quad (4.20)$$

Para lo que se ilustran los distintos valores de E de la inecuación (4.20) en la tabla 4.6

Tabla 4.6: Energía de la señal en función de la cantidad de armónicos a_n

N	E
1	88,4258 %
3	90,882 %
5	94,4191 %
7	96,2237 %
9	96,4966 %
11	97,2274 %
13	97,7506 %
.	.
.	.
.	.
657	99,9496 %
659	99,9498 %
661	99,95 %
663	99,95 %
665	99,9502 %
666	99,9502 %

Con lo que para el modelo de línea de transmisión solo se realiza hasta el armónico número seiscientos sesenta y seis para satisfacer el criterio de energía.

RESULTADOS

En este capítulo se muestran los gráficos asociados a las simulaciones con sus respectivas observaciones y posteriormente se varían los parámetros de sensibilidad para observar sus efectos.

5.1. Gráficos

En esta sección se muestran los gráficos asociados a los parámetros señalados en las tablas 4.1 y 4.2

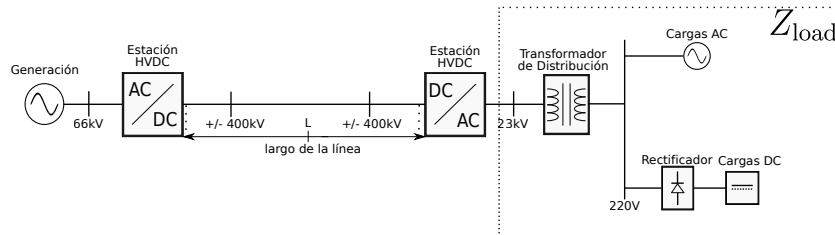


Figura 5.1: Esquema línea de transmisión.

En la figura 5.1 se muestra el esquema que se usará para las simulaciones.

- Estación HVDC AC/DC corresponde al Convertidor Multinivel Modular que tiene como entrada voltaje AC y de salida voltaje DC.
- Red DC corresponde a la línea a estudiar el fenómeno de transmisión de potencia. Donde L es el largo del cable.
- Estación HVDC DC/AC corresponde al Convertidor Multinivel Modular que tiene de entrada voltaje DC y de salida voltaje AC
- Z_{load} corresponde a la impedancia de carga conectada a la red eléctrica. Para las figuras 5.2 , 5.3 y 5.4 se considera una impedancia de carga nominal para un sistema

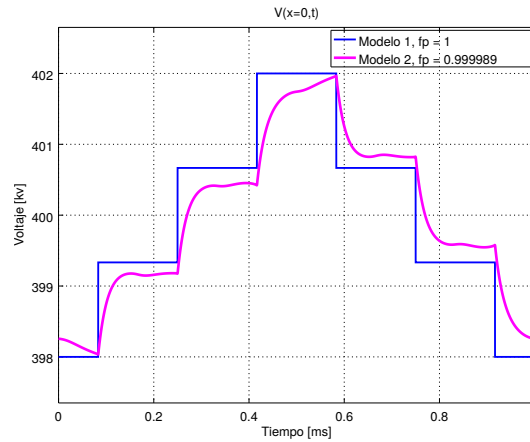


Figura 5.2: Voltaje en los bornes de la línea, modelo 1: parámetros concentrados, modelo 2: parámetros distribuidos.

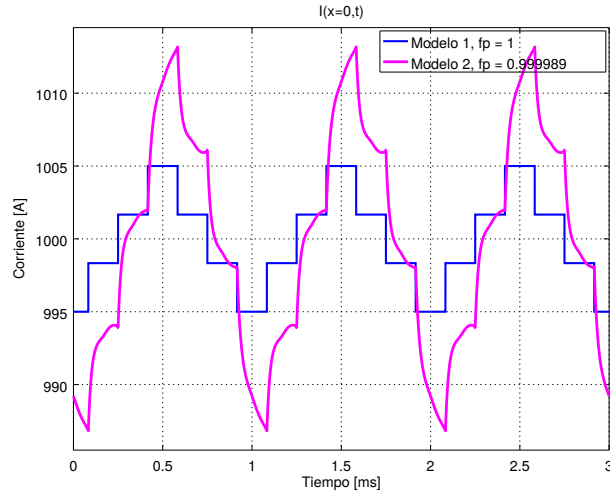


Figura 5.3: Corriente en los bornes de la línea, modelo 1: parámetros concentrados, modelo 2: parámetros distribuidos.

HVDC de Potencia $P = 400[MW]$ operando con Voltaje $V = 400[KV]$ con lo cual se obtiene

$$Z_{load} = \frac{V_{nominal}^2}{P_{nominal}} = 400[\Omega] \quad (5.1)$$

Se observa en la figura 5.2

- El mismo orden de magnitud del voltaje en ambos modelos.
- Un factor de potencia distinto en ambos modelos, esto se debe a que el modelo de parámetros distribuidos considera los parámetros pasivos parásitos de la línea la que desfasa la señal de voltaje respecto a la corriente.

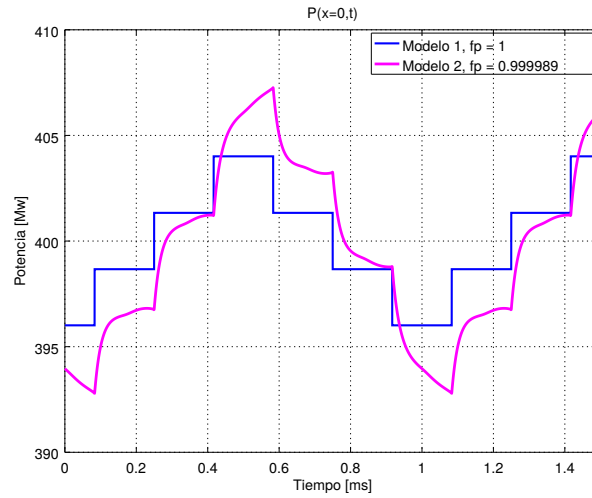


Figura 5.4: Potencia en los bornes de la línea, modelo 1: parámetros concentrados, modelo 2: parámetros distribuidos.

- Un valor medio de $400[KV]$ el cual corresponde a la parte de la señal que no está oscilando, es decir DC.
- Fenómeno de distorsión que se describe en 2.8.

Se observa en la figura 5.3

- En las ecuaciones (2.55) y (2.56) se observa como difiere la corriente respecto al voltaje por lo cual se pudiera deducir que estas formas de ondas pudieran ser muy distintas entre ellas para esto se observa la ecuación (2.57). En dicha ecuación se observa que el voltaje está escalado respecto a la corriente por $Z_o \cdot \frac{1+\Gamma(x)}{1-\Gamma(x)}$, por lo cual en el gráfico 5.5 se estudia la impedancia $Z(x=0)$. En el cual se observa
 - La magnitud converge a $179,006[\Omega]$
 - La fase converge a $10^{-2}[rad]$
 - La parte real converge a $179,006[\Omega]$
 - La tercer armónica tiene un desfase máximo de $0,160578[rad]$

Debido se explica similaridad de la figura 5.2 y 5.3

- Se observan que las ondas de corriente tienen el mismo orden de magnitud, la diferencia entre ambas corresponde a que en el modelo de parámetros concentrados la corriente está escalada por la impedancia de carga y en el modelo de parámetros distribuidos la corriente está escalada por la impedancia aparente en los bornes de la línea.
- El factor de potencia del modelo 2 que corresponde a $fp = 0,999989$. Esto es consecuencia del pequeño desfase introducido por la línea de transmisión como se observa en el gráfico 5.5
- Se observa amplitud máxima de $1013[A]$ en el modelo de parámetros distribuidos, respecto a los $1005[A]$ del modelo de parámetros concentrados.

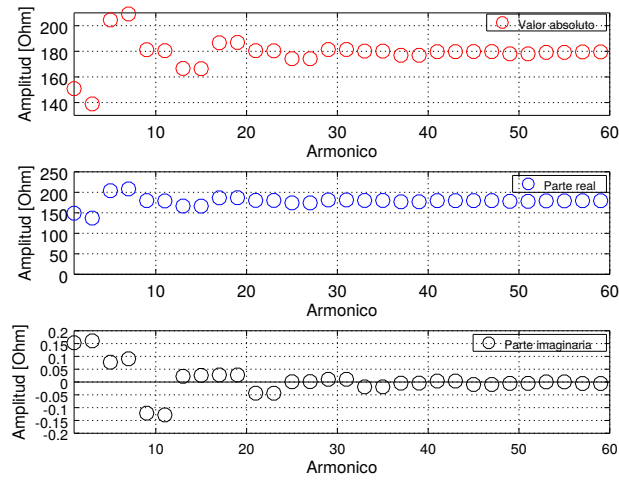


Figura 5.5: Impedancia aparente en los bornes de la línea, magnitud, parte real y parte imaginaria.

Se observa en la figura 5.4

- La forma de onda de la potencia es similar a la del voltaje y la corriente debido a la similitud de estas anteriores. Ya que $p(t) = v(t) \cdot i(t)$.

5.2. Variación de parámetros de sensibilidad

Al observar los resultados anteriores, se puede llegar a la conclusión que los resultados dependen de las variables que rigen el sistema. En esta subsección se procede a variar por separado algunas de estas variables manteniendo el resto constante para estudiar sus efectos en las simulaciones.

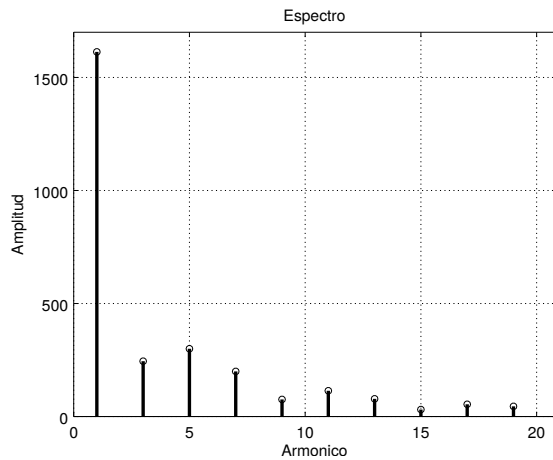


Figura 5.6: Espectro del voltaje en los bornes de la línea.

En general, se observa

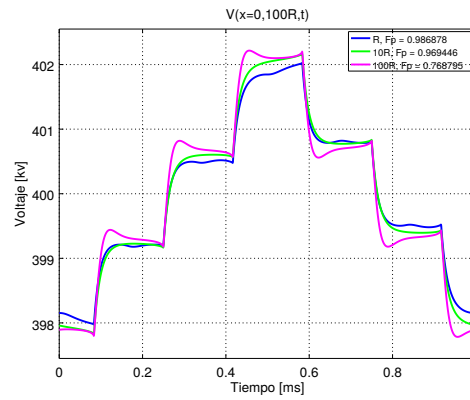


Figura 5.7: Voltaje en los bornes de la línea, variando la resistencia distribuida.

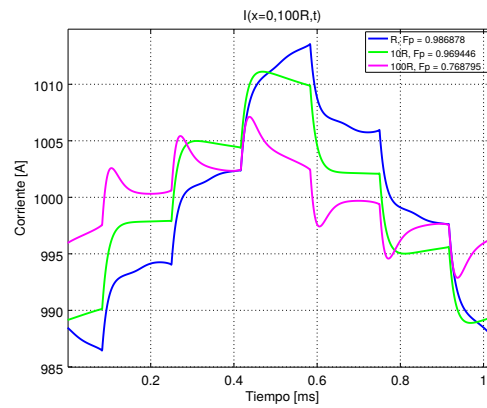


Figura 5.8: Corriente en los bornes de la línea, variando la resistencia distribuida.

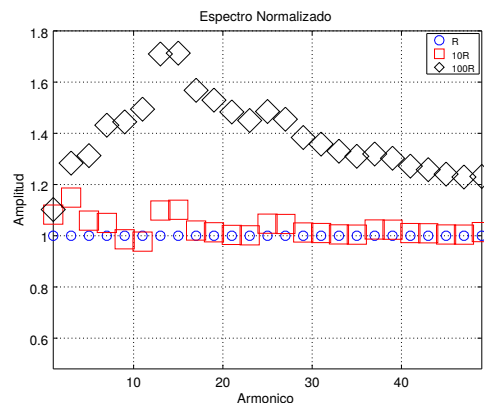


Figura 5.9: Espectro del voltaje en los bornes de la línea, amplitud normalizada, variando resistencia distribuida.

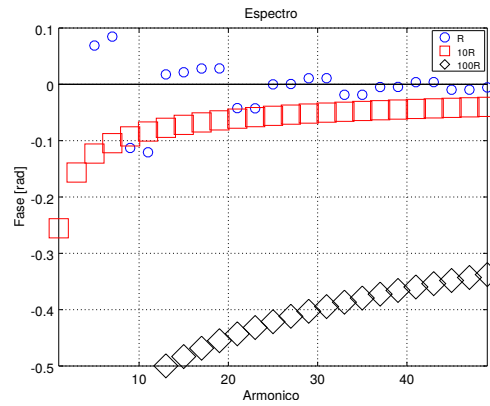


Figura 5.10: Desfase entre el voltaje y la corriente en los bornes de la línea, variando la resistencia distribuida.

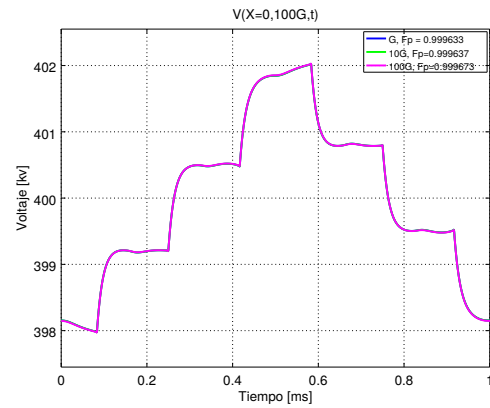


Figura 5.11: Voltaje en los bornes de la línea, variando la conductancia distribuida.

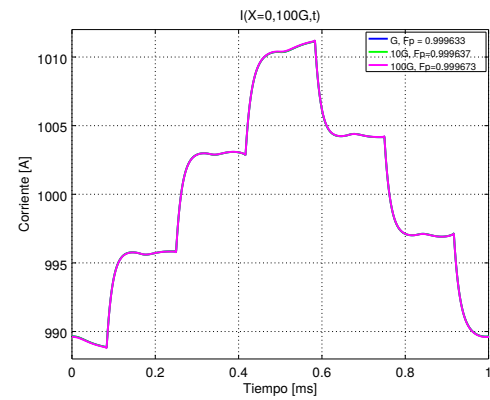


Figura 5.12: Corriente en los bornes de la línea, variando la conductancia distribuida.

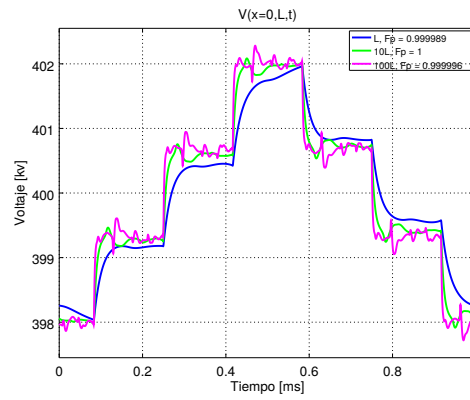


Figura 5.13: Voltaje en los bornes de la línea, variando inductancia distribuida.

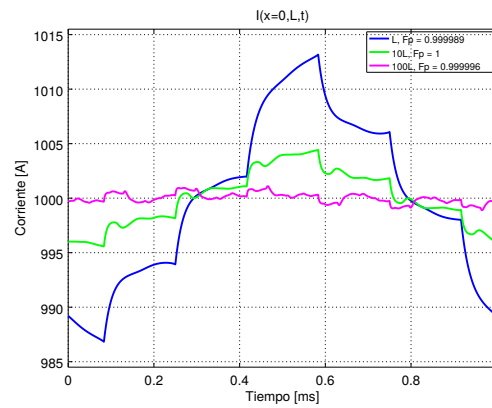


Figura 5.14: Corriente en los bornes de la línea, variando inductancia distribuida.

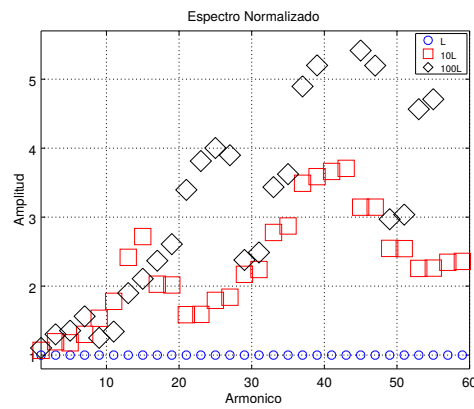


Figura 5.15: Espectro del voltaje en los bornes de la línea, amplitud normalizada, variando la inductancia distribuida.

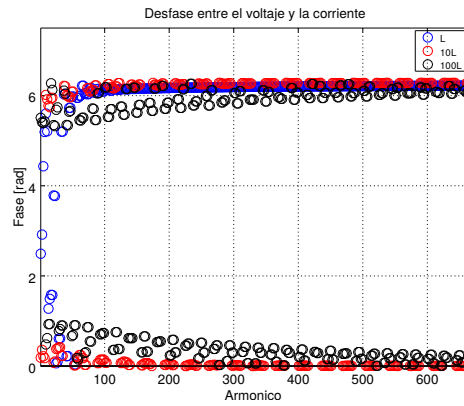


Figura 5.16: Desfase entre el voltaje y la corriente en los bornes de la línea, variando la inductancia distribuida.

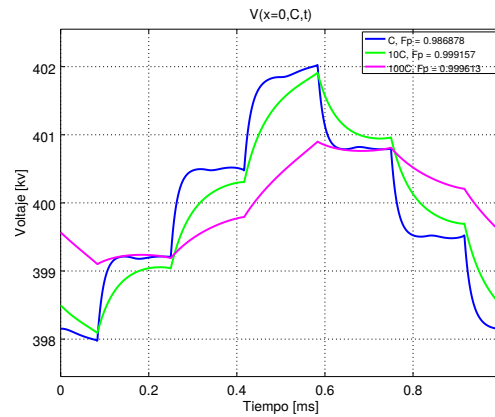


Figura 5.17: Voltaje en los bornes de la línea, variando la capacitancia distribuida.

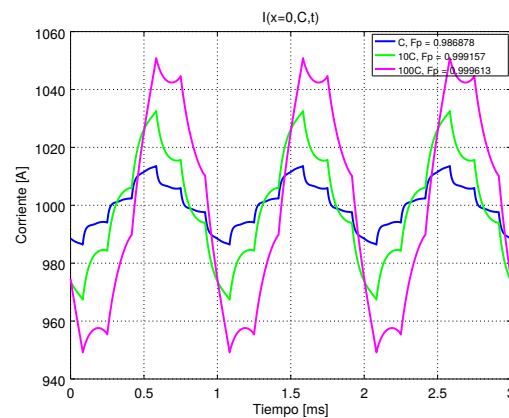


Figura 5.18: Corriente en los bornes de la línea, variando la capacitancia distribuida.

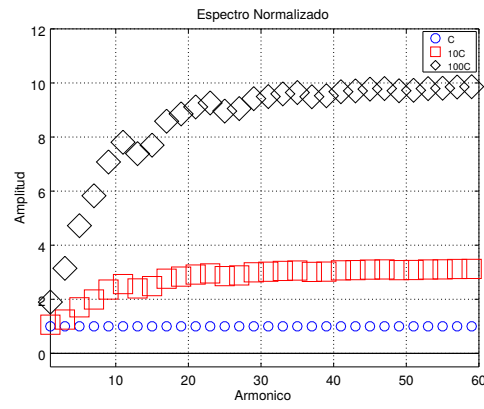


Figura 5.19: Espectro del voltaje normalizado en los bornes de la línea, Variando capacitancia distribuida.

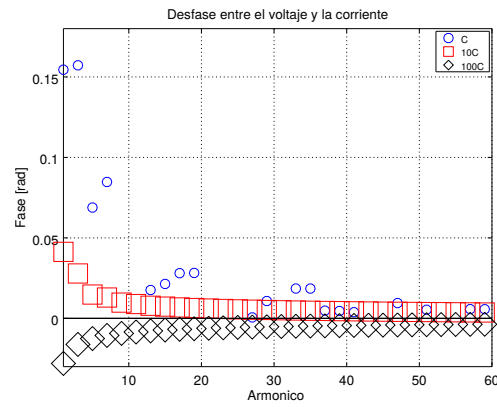


Figura 5.20: Espectro del voltaje en los bornes de la línea, fase entre el voltaje y la corriente, variando la capacitancia distribuida.

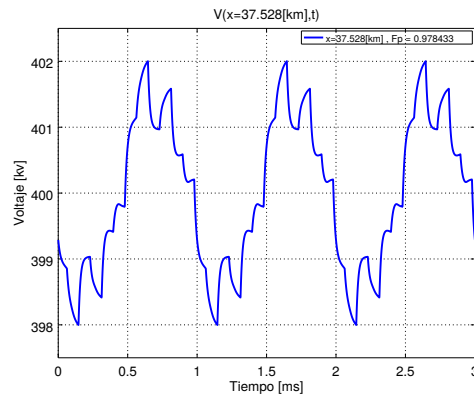


Figura 5.21: Voltaje en $x = \frac{\lambda_1}{8}$ respecto a los bornes de la línea.

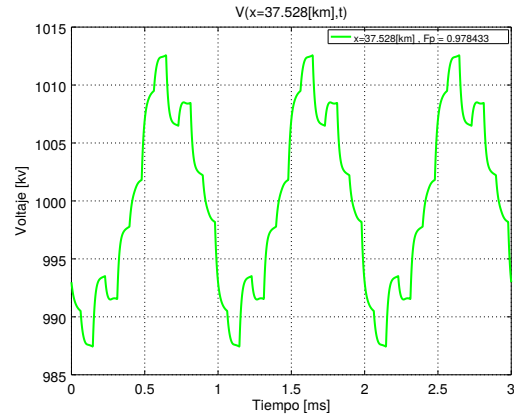


Figura 5.22: Corriente en $x = \frac{\lambda_1}{8}$ respecto a los bornes de la línea.

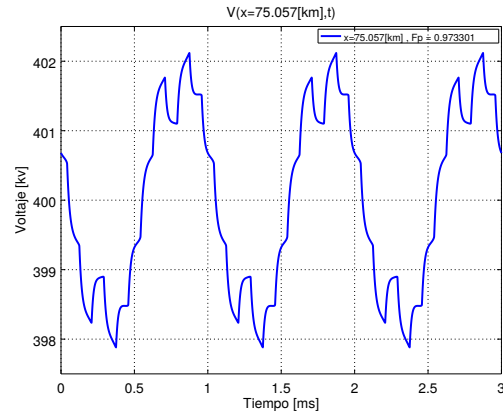


Figura 5.23: Voltaje en $x = \frac{2\lambda_1}{8}$ respecto a los bornes de la línea.

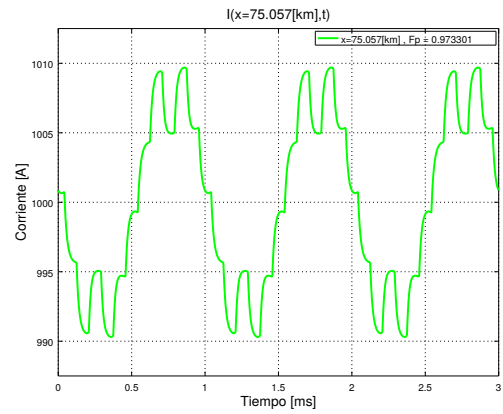


Figura 5.24: Corriente en $x = \frac{2\lambda_1}{8}$ respecto a los bornes de la línea.

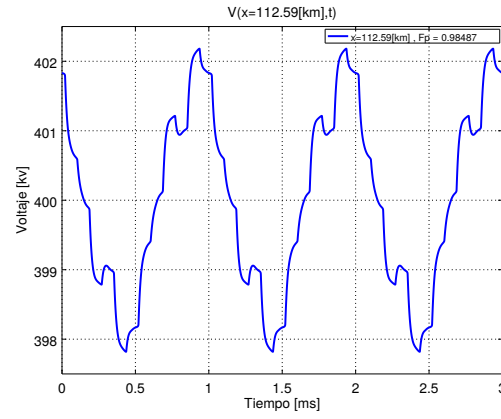


Figura 5.25: Voltaje en $x = \frac{3\lambda_1}{8}$ respecto a los bornes de la línea.

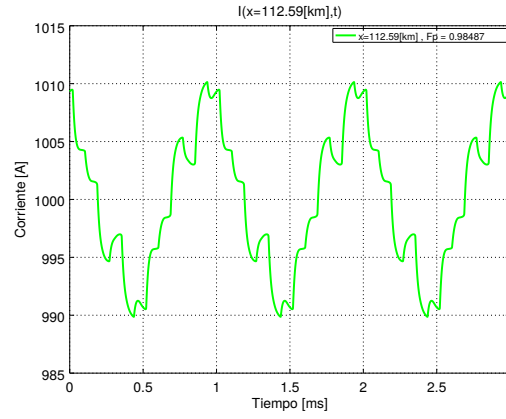


Figura 5.26: Corriente en $x = \frac{3\lambda_1}{8}$ respecto a los bornes de la línea.

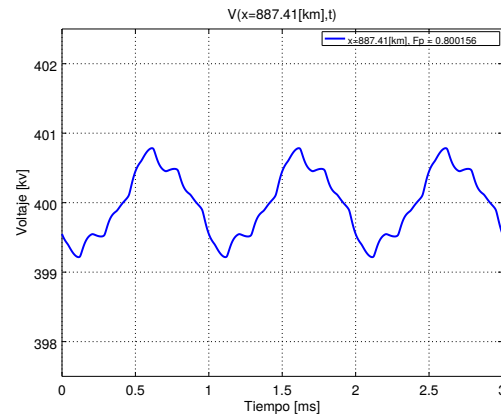


Figura 5.27: Voltaje en $x = \frac{3\lambda_1}{8}$ respecto a la carga de la línea.

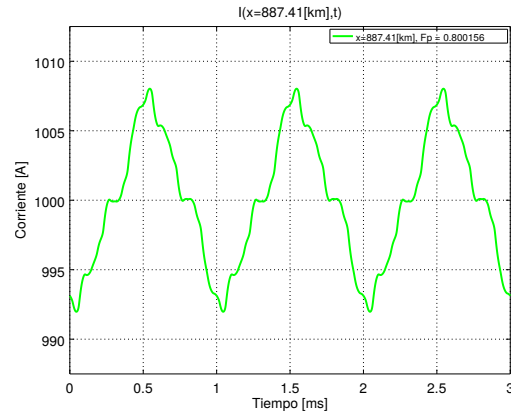


Figura 5.28: Corriente en $x = \frac{3\lambda_1}{8}$ respecto a la carga de la línea.

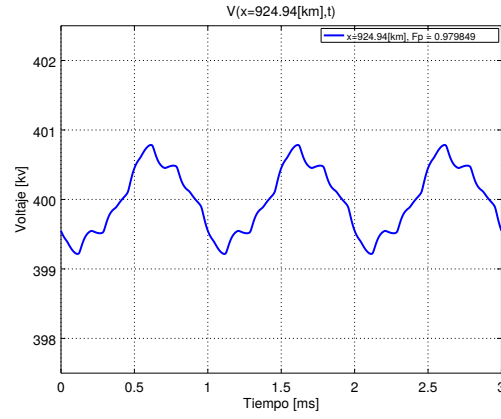


Figura 5.29: Voltaje en $x = \frac{2\lambda_1}{8}$ respecto a la carga de la línea.

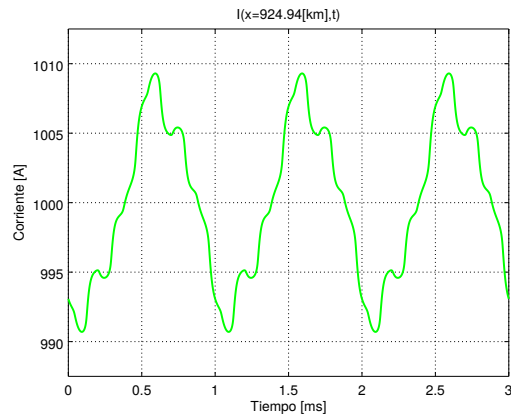


Figura 5.30: Corriente en $x = \frac{2\lambda_1}{8}$ respecto a la carga de la línea.

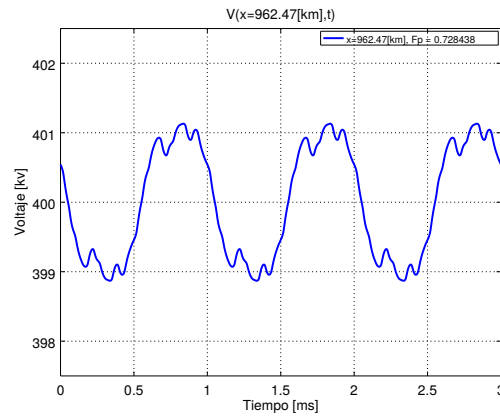


Figura 5.31: Voltaje en $x = \frac{\lambda_1}{8}$ respecto a la carga de la línea.

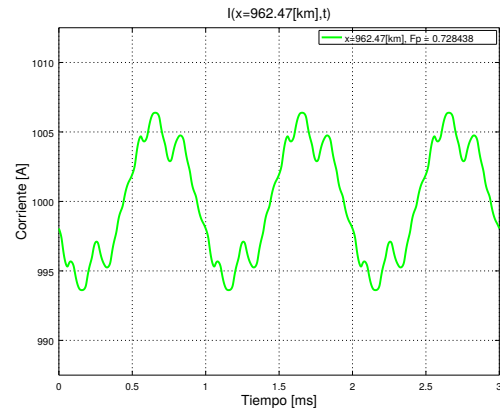


Figura 5.32: Corriente en $x = \frac{\lambda_1}{8}$ respecto a la carga de la línea.

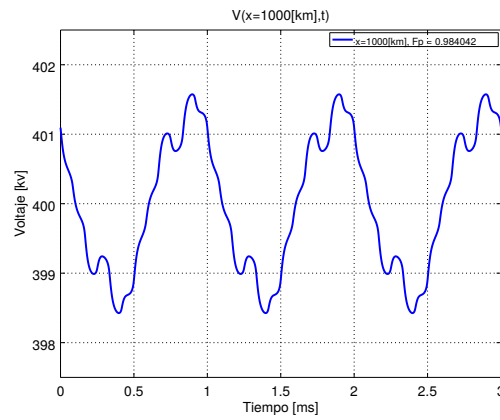


Figura 5.33: Voltaje en la carga de la línea.

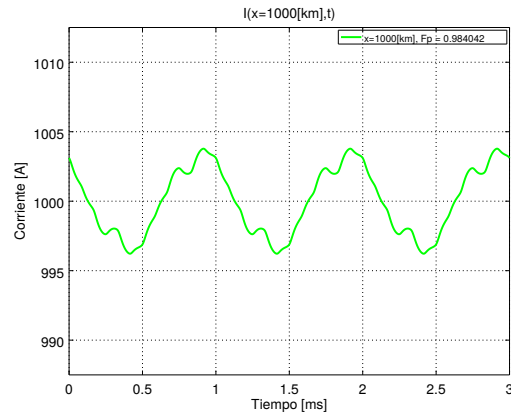


Figura 5.34: Corriente en la carga de la línea.

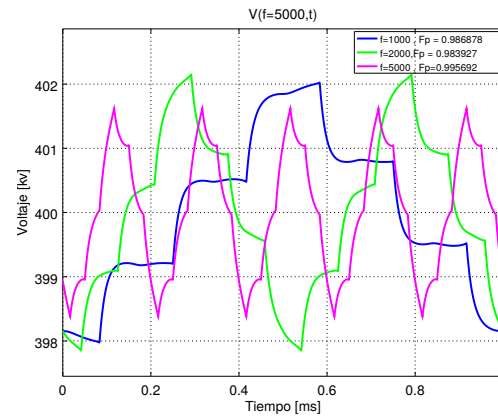


Figura 5.35: Voltaje en los bornes de la línea, variando la frecuencia de la portadora.

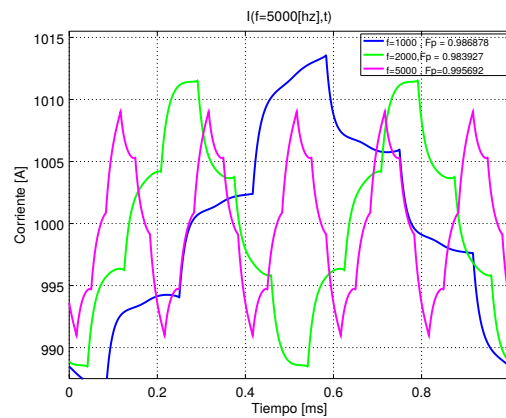


Figura 5.36: Corriente en los bornes de la línea, variando la frecuencia de la portadora.

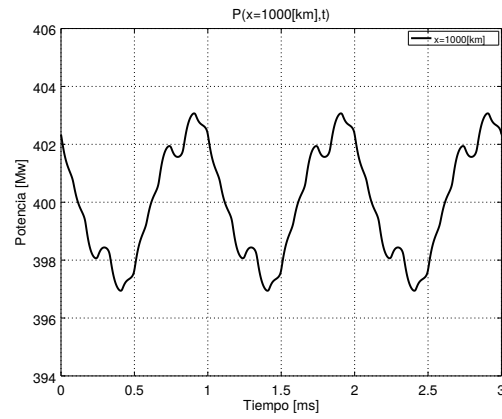


Figura 5.37: Potencia en la carga de la línea.

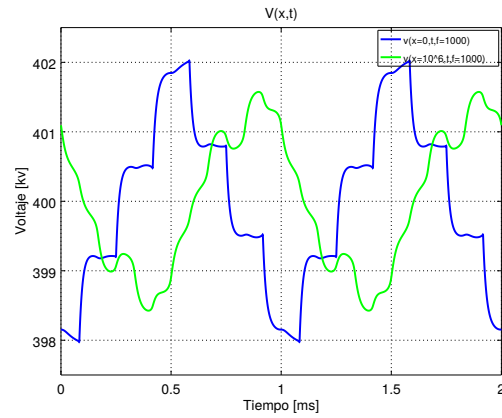


Figura 5.38: Voltaje en los bornes y carga de la línea.

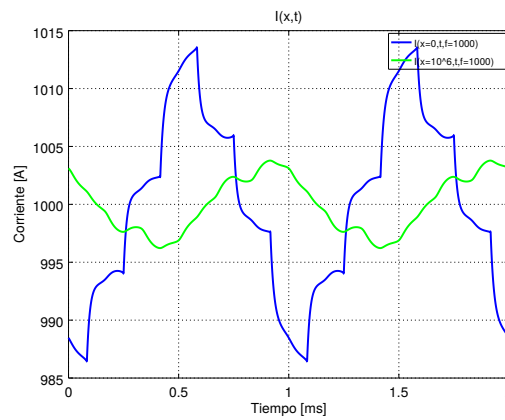


Figura 5.39: Potencia en la carga de la línea.

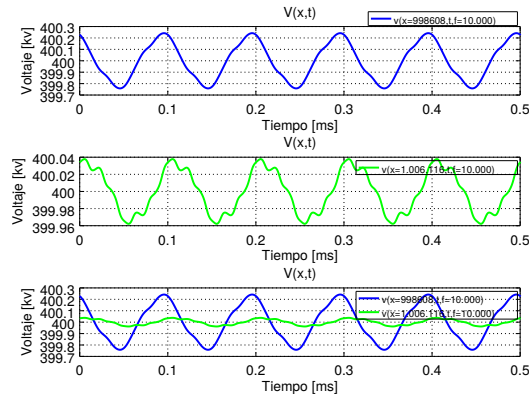


Figura 5.40: Voltaje en la carga de la línea.

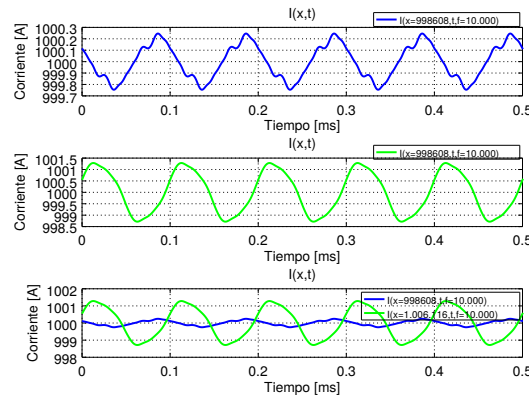


Figura 5.41: Corriente en la carga de la línea.

- λ_1 corresponde a la longitud de onda de la armónica fundamental del voltaje la que equivale a $300,2[km]$
- En las figuras 5.9 , 5.15 y 5.19 se normaliza el espectro respecto a la figura 5.6
- El valor medio de la señal es independiente de la variación de los parámetros distribuidos.
- Fenómeno de distorsión, el cual es producido por la línea.

5.2.1. Resistencia distribuida de la línea

Variando la resistencia distribuida de la línea se obtienen las siguientes figuras 5.7 y 5.8 en las que se observa

- Al aumentar la resistencia distribuida disminuye el factor de potencia, debido al desfase entre la señal de voltaje y corriente tal como se muestra en la figura 5.10.
- Cambio de la forma de onda introducido por la variación de resistencia distribuida como se observa en la figura 5.9, donde se muestra el espectro de la amplitud

normalizada respecto al modelo 2 de parámetros distribuidos de la señal de la figura 5.2

- Al aumentar la resistencia distribuida se observa la disminución de la amplitud de la corriente la cual corresponde al aumento de la impedancia distribuida (2.34)

5.2.2. Conductancia distribuida de la línea

Variando la Conductancia distribuida se obtienen las figuras 5.11 y 5.12 donde se observa

- Independiente de la conductancia distribuida, el voltaje y la corriente se mantienen constantes. Esto se debe a que la conductancia es el parámetro distribuido con el menor orden de magnitud de la línea. Tal como se muestra en la tabla 4.2

5.2.3. Inductancia distribuida de la línea

Variando la inductancia distribuida se obtienen las figuras 5.13 y 5.14

- Al aumentar la inductancia distribuida disminuye el valor “peak to peak” de la corriente, el cual corresponde al aumento de la magnitud de impedancia característica de la línea (2.34) con lo que disminuye la amplitud de la corriente.
- Al aumentar la inductancia distribuida, cambia la densidad espectral con lo que cambia la forma de onda de la señal. Tal como se observa en la figura 5.15
- Se observa que las señales con mayor factor de potencia tienen un desfase menor entre el voltaje y la corriente tal como se observa en la figura 5.16.

5.2.4. Capacitancia distribuida de la línea

Variando la capacitancia distribuida se observa

- Al aumentar la capacitancia distribuida se observa un aumento de la amplitud de la corriente (véase en la figura 5.18) la que se debe a la disminución de la impedancia característica de la línea (2.34)
- Al aumentar la capacitancia distribuida cambia la densidad espectral de la señal (véase en la figura 5.19) con lo cual cambia la forma del voltaje (véase en la figura 5.17)
- Al aumentar la capacitancia distribuida disminuye el desfase entre el voltaje y la corriente. tal como se muestra en la figura 5.20

5.2.5. Posición de la línea

Variando la posición se obtienen los siguientes resultados, que pueden ver desde la figura 5.21 hasta la figura 5.34

- Se observan distintas formas de onda en función de la posición.
- Se observa que en los puntos de la línea cercanos a la carga la señal está más atenuada, esto corresponde a la constante de atenuación que introduce la línea.
- Al estar más cerca de la carga se observa la atenuación selectiva de la señal, atenuando con mayor amplitud a las frecuencias altas respecto a las frecuencias bajas. En la figura 5.33 se observa la fundamental de la señal con menos armónicas que la figura 5.2

5.2.6. Frecuencia de conmutación de los semiconductores.

Variando la frecuencia de la portadora se obtienen los siguientes resultados al observar las figuras 5.35 y 5.36

- Al aumentar la frecuencia la impedancia característica de la línea converge con mayor rapidez a un valor real, lo que aumenta el factor de potencia, ya que el voltaje y la corriente están escalados por esta impedancia.
- Al aumentar la frecuencia disminuye el período de la señal de “ripple” del voltaje.

5.2.7. Variando más de un parámetro a la vez

Se observa en las figuras 5.38 5.40 5.39 5.41 lo siguiente

- Se ilustra la atenuación y desfase producida por la línea desde el generador hasta la carga en las figuras 5.38 5.39
- Al aumentar la frecuencia de conmutación de los semiconductores y modificar el largo de la línea de tal manera que se produzca un máximo y un mínimo local de tensión y corriente en los bornes de la carga se obtiene las figuras 5.40 y 5.41
- Un “ripple” máximo de voltaje y corriente de $200[V]$ y $1,2[A]$ y un mínimo de $40[V]$ y $200[mA]$ respectivamente.
- A mayor frecuencia de conmutación de los semiconductores más pequeña la longitud de onda de la señal.
- Se deduce que cuando hay un máximo de voltaje en un punto este también corresponde mínimo de corriente y viceversa.

CONCLUSIONES

6.1. Conclusiones

El modelo de Olivier Heaviside evidencia la necesidad de usar un modelo más riguroso para predecir de manera más precisa las variables eléctricas de un HVDC Monopolar simétrico con convertidores MMC. Debido al rango de operación de los parámetros distribuidos se observa que no hay pérdidas significativas en el valor medio de la señal, independiente de las grandes distancias con la que se transmite la potencia. En el "ripple" se observa atenuación y desfase para cada frecuencia de la señal introducido por los parámetros distribuidos de la línea.

Al diseñar una línea HVDC se debe considerar el diseño de la estructura, ya que estos predeterminan los valores de los parámetros distribuidos y estos pueden distorsionar el voltaje y la corriente. Al aumentar el radio del conductor disminuye la resistencia distribuida, al acercar los conductores aumenta la capacitancia distribuida y disminuye la inductancia distribuida. Al aumentar la frecuencia de la señal aumenta la resistencia distribuida de forma proporcional a la raíz cuadrada de la frecuencia.

Debido al diseño de la estructura y de la línea de transmisión se introduce distorsión en la señal.

El modelo matemático del convertidor multinivel modular presentado en este trabajo permite expresar el voltaje con el "ripple" generado por la conmutación de los semiconductores, también permite expresar la función transferencia del convertidor.

En los resultados se observa que al aumentar la resistencia distribuida aumenta el desfase entre el voltaje respecto de la corriente con lo que disminuye el factor de potencia.

La conductividad distribuida es el parámetro distribuido más pequeño debido a la conductividad eléctrica del aire. Debido a esto, al aumentar este parámetro en las simulaciones no se percibieron sus efectos.

Al aumentar la capacitancia distribuida se observa un aumento en la amplitud de la corriente debido a la disminución de la impedancia característica de la línea.

Al aumentar la inductancia distribuida aumenta la impedancia característica con lo que disminuye la corriente.

En la carga de la línea se observa cómo las armónicas de alta frecuencia se atenúan significativamente debido al aumento de la constante de atenuación y la distancia recorrida

de la señal.

La línea puede ser descrita como un filtro pasivo pasa bajos con ganancia unitaria para frecuencia cero.

Al aumentar la frecuencia de conmutación de los semiconductores, la longitud de onda del voltaje disminuye con lo cual da mayor ancho de banda para poder maximizar el voltaje o la corriente en la carga.

Se destacan que los parámetros más sensibles en el diseño de un sistema HVDC son la distancia con la cual están separados los conductores eléctricos, el radio del cable y el largo de la línea que conecta la carga y el generador. En el MMC se observa que la modulación y la frecuencia de conmutación corresponden a las variables más sensibles a la hora de su diseño e implementación.

Apéndice A

CODIGO MATHEMATICA

```
1 Q2 = -0.5*{{1,-1},{-1,1}}; (*Matrices idempotentes*)
2 P3 = (1/3)*{{1,1,1},{1,1,1},{1,1,1}};
3
4 vpa[t_, f_] = A*SquareWave[f*t];
5 vpb[t_, f_] = A*SquareWave[f*t+1/6];
6 vpc[t_, f_] = A*SquareWave[f*t+2/6];
7 vna[t_, f_] = A*SquareWave[f*t+3/6];
8 vnb[t_, f_] = A*SquareWave[f*t+4/6];
9 vnc[t_, f_] = A*SquareWave[f*t+5/6];
10
11 vxy = {{vpa[t, f], vpb[t, f], vpc[t, f]}, {vna[t, f], vnb[t, f], vnc[t, f]}};
12
13 Vs1 = Q2.vxy.P3;
14 Vs[t_, f_] = Vs1[[1, 1]] - Vs1[[2, 1]];
15 A = 1000;
16 Rl = 400;
17 VDC = 400*1000;
18 f[t_, f_] = Vs[t + 1/(6*2*f), f] + VDC;
19 idc[t_] = f[t, 1000]/Rl;
20 Ts[f_] = 1/f;
21 Ts[1000];
22 pac[t_] = (idc[t])*(f[t, 1000]);
23
24 f[t, 1000]
25 Plot[f[t, 1000], {t, 0, 1/1000}, ExclusionsStyle -> Dotted]
26 a0 = 1/(1/1000)*Integrate[f[t, 1000], {t, 0, 1/1000}]
27
28 idc[t]
29 Plot[idc[t], {t, 0, 1/1000}, ExclusionsStyle -> Dotted]
30 a02 = 1/(1/1000)*Integrate[idc[t], {t, 0, 1/1000}]
31
32 pac[t]
33 Plot[pac[t]/10^6, {t, 0, 1/1000}, ExclusionsStyle -> Dotted]
34 1/(1/1000)*Integrate[pac[t], {t, 0, 1/1000}]
35
36 (* bn1[n_] = 0*(2/Ts[1000]) (\!\(
37 \*SubsuperscriptBox[\(\int\), \{0\}, \{Ts[1000]\}]\(f[t, 1000]*Sin[n
    *2*Pi*1000*t]\[DifferentialD]t\)\)\) componentes impares serie de fourier *)
```

```

38 anl[n_] = (2/Ts[1000]) (\!\(
39 \*SubsuperscriptBox[\(\int\), \{0\},
40 \{Ts[1000]\}]\(f[t, 1000]*Cos[n*2*Pi*1000*t] \[DifferentialD]t\)\)\) (*
    componentes Pares serie de fourier *)
41
42
43 na[k_] = Floor[(k+1)/2];
44 k[n_] = 2*n-1;
45 rad[x_] = (180/Pi)*x;
46 fl = 1000;
47 ka = 666;
48 ll = 1000*1000;
49
50
51 J = Sqrt[-1]; (* numero imaginario unitario *)
52 \[Gamma][\[Alpha]_,\[Beta]_] = \[Alpha] + J*\[Beta];
53 \[Alpha][R_,L_,C_,G_,w_] = Sqrt[(Sqrt[(w^2*L*C-R*G)^2+w^2*(L*G+R*C)^2]-(w^2*L*
    *C-R*G))/2];
54 \[Beta][R_,L_,C_,G_,w_] = Sqrt[(Sqrt[(w^2*L*C-R*G)^2+w^2*(L*G+R*C)^2]+(w^2*L*
    *C-R*G))/2];
55 (* Constante de fase [rad/s] *)
56
57
58 \[Lambda][\[Beta]_] = (2\[Pi])/\[Beta];
59 \[Gamma][\[Alpha]_,\[Beta]_] = \[Alpha] + J*\[Beta]; (* Constante de
    propagacion *)
60 \[Alpha][R_,L_,C_,G_,w_] = Sqrt[(Sqrt[(w^2*L*C-R*G)^2+w^2*(L*G+R*C)^2]-(w^2*L*
    *C-R*G))/2];
61 \[Beta][R_,L_,C_,G_,w_] = Sqrt[(Sqrt[(w^2*L*C-R*G)^2+w^2*(L*G+R*C)^2]+(w^2*L*
    *C-R*G))/2];
62 (* Constante de fase [rad/s] *)
63
64 \[Lambda][\[Beta]_] = (2\[Pi])/\[Beta]; (* Longitud de onda *)
65 Z0[R_,L_,C_,G_,w_] = Sqrt[(R+J*w*L)/(G+J*w*C)];
66 (* Impedancia Caracteristica [\[CapitalOmega]] *)
67 v[w_,\[Beta]_] = w/\[Beta];
68
69 \[CapitalGamma]l[Zl_,Z0_] = (Zl-Z0)/(Zl+Z0); (*coeficiente de reflexion en la
    carga*)
70 \[CapitalGamma]g[Zg_,Z0_] = (Zg-Z0)/(Zg+Z0); (*coeficiente de reflexion en
    la carga del generador*)
71 V[x_,Vg_,Z0_,Zg_,\[Gamma]_,\[CapitalGamma]l_,\[CapitalGamma]g_,l_] = Vg*Z0/(
    Z0+Zg)*(Exp[-\[Gamma]*x] + \[CapitalGamma]l*Exp[-2*\[Gamma]*l]*Exp[-\[Gamma]
    *x])/(1-\[CapitalGamma]g*\[CapitalGamma]l*Exp[-2*\[Gamma]*l]);
72
73 (* Voltaje a lo largo de la línea *)
74 Ic[x_,Vg_,Z0_,Zg_,\[Gamma]_,\[CapitalGamma]l_,\[CapitalGamma]g_,l_] = Vg*1/(
    Z0+Zg)*(Exp[-\[Gamma]*x] - \[CapitalGamma]l*Exp[-2*\[Gamma]*l]*Exp[-\[Gamma]
    *x])/(1-\[CapitalGamma]g*\[CapitalGamma]l*Exp[-2*\[Gamma]*l]); (*
    Corriente a lo largo de la línea *)
75
76
77 w[n_,fs_] = 2*Pi*fs*n; (* frecuencia angular *)
78 (* Transformada Fasorial*)
79
80 (* Transformada inversa fasorial*)
81 F[a_,w_] = AbsArg[a][[1]] *Cos[w*t+AbsArg[a][[2]]];
82
83 (* Parametros de la Linea, teorico *)
84

```

```

85 L1= 5.96*10^(-7) ; (*[H/m]*)
86 C1 = 1.86*10^(-11); (*F/m*)
87 G1 = 3.79*10^-12 (*S/m*);
88 R1[f_] = 6.64142*10^(-6) *Sqrt[f]; (* Efecto skin *)
89
90
91 (* impedancia de entrada del convertidor *)
92
93 Zg[w_] = 2+I*0.007*w;
94 Zl[w_] = 4+I*0.011*w;
95
96 \[Alpha]n = Table[{2n-1,\[Alpha][R1[f1*(2*n-1)],L1,C1,G1,w[2*n-1,f1]]},{n,1,
na[ka]}];
97 \[Beta]n= Table[{2n-1,\[Beta][R1[f1*(2*n-1)],L1,C1,G1,w[2*n-1,f1]]},{n,1,na[
ka]}];
98
99 \[Gamma]n=Table[{2n-1,\[Gamma][\[Alpha]n[[na[n]]][[2]],\[Beta]n[[na[n]
]]][[2]]},{n,1,na[ka]}];
100 Z0n =Table[{2n-1,Z0[R1[(2n-1)*f1],L1,C1,G1,w[(2n-1),f1]]},{n,1,na[ka]}];
101 Zln = Table[{2n-1,400+Zl[w[(2n-1),f1]]},{n,1,na[ka]}];
102
103 \[CapitalGamma]ln = Table[{2n-1,\[CapitalGamma]l[Zln[[n]][[2]],Z0n[[n]
]][[2]]},{n,1,na[ka]}];
104 Zgn = Table[{2n-1,Zg[w[n,f1]]},{n,1,na[ka]}];
105 \[CapitalGamma]gn = Table[{2n-1,\[CapitalGamma]g[Zgn[[n]][[2]],Z0n[[n]
]][[2]]},{n,1,na[ka]}];
106 Vnf =Table[{2n-1,V[0,anl[2*n-1],Z0n[[n]][[2]],Zgn[[n]][[2]],\[Gamma]n[[n]
]][[2]],\[CapitalGamma]ln[[n]][[2]],\[CapitalGamma]gn[[n]][[2]],l1]},{n,1,
na[ka]}];
107 Inf =Table[{2n-1,Ic[0,anl[2*n-1],Z0n[[n]][[2]],Zgn[[n]][[2]],\[Gamma]n[[n]
]][[2]],\[CapitalGamma]ln[[n]][[2]],\[CapitalGamma]gn[[n]][[2]],l1]},{n,1,
na[ka]}];
108 Vn = Table[{2n-1,F[Vnf[[n]][[2]],w[2*n-1,f1]]},{n,1,na[ka]}}//N;
109 In1 = Table[{2n-1,F[Inf[[n]][[2]],w[2*n-1,f1]]},{n,1,na[ka]}}//N;
110 ic[t_] = Sum[In1[[n]][[2]],{n,1,na[ka]}];
111 v[t_] = Sum[Vn[[n]][[2]],{n,1,na[ka]}];
112 fase = Table[{2n-1,rad[AbsArg[Vnf[[n]][[2]]][[2]] - AbsArg[Inf[[n]
]][[2]]][[2]]},{n,1,na[ka]}];
113 v[t_] = v[t] + a0;
114 ic[t_] = ic[t] + a02;
115
116 (*Espectro Corriente*)
117 IeA = Table[{2n-1,AbsArg[Inf[[n]][[2]]][[1]]},{n,1,na[ka]}}//N;(*Amplitud*)
118 IeA2 = Table[IeA[[n]][[2]],{n,1,na[ka]}}//N;
119 IeF = Table[{2n-1,rad[AbsArg[Inf[[n]][[2]]][[2]]},{n,1,na[ka]}}//N;(*Fase*)
120 IeF2 = Table[IeF[[n]][[2]],{n,1,na[ka]}}//N;
121
122
123 (*Espectro Voltaje*)
124 VeA = Table[{2n-1,AbsArg[Vnf[[n]][[2]]][[1]]},{n,1,na[ka]}}//N;(*Amplitud*)
125 VeA2 = Table[VeA[[n]][[2]],{n,1,na[ka]}}//N;
126 VeF = Table[{2n-1,rad[AbsArg[Vnf[[n]][[2]]][[2]]},{n,1,na[ka]}}//N;(*Fase*)
127 VeF2 = Table[VeF[[n]][[2]],{n,1,na[ka]}}//N;
128
129 p[t_] = v[t]*ic[t];
130
131 Pact = 1000*NIntegrate[p[t],{t,0,1/1000}];
132 vrms = Sqrt[1000*NIntegrate[v[t]^2,{t,0,1/1000}]];
133 irms = Sqrt[1000*NIntegrate[ic[t]^2,{t,0,1/1000}]];
134 S = vrms*irms ; (*potencia aparente*)

```

```

135 Fp = Pact/S
136
137 fs1 = 666*1000*10
138 k2 = Solve[k/fs1== 3/1000,k][[1]][[1]][[2]]
139
140 t = Table[{t1/fs1},{t1,0,k2}]/N;
141 Vxt= Table[{v[t1/fs1]},{t1,0,k2}]/N;
142 Ixt = Table[{ic[t1/fs1]},{t1,0,k2}]/N;
143 pxt = Table[{p[t1/fs1]},{t1,0,k2}]/N;
144
145 Vc= Table[{f[t1/fs1,1000]},{t1,0,k2}]/N;
146 Ic = Table[{idc[t1/fs1]},{t1,0,k2}]/N;
147 Pc = Table[{pac[t1/fs1]},{t1,0,k2}]/N;
148
149
150 Export["V0t.mat",{ "t"->t, "V0t"-> Vxt, "I0t"-> Ixt, "P0t"-> pxt, "Ve0a"-> VeA, "
    Ve0f"-> VeF, "Ie0a"-> IeA, "Pc"-> Pc, "Vc"->Vc, "Ic"-> Ic}, "LabeledData"]

```

CÓDIGO OCTAVE

```
1
2 clc
3 clear all
4 close all
5
6 a=12;
7 load('V0t.mat')
8 t=t*1000; %ms
9
10
11 K = 10^3;
12 M = 10^6;
13 Fp = 0.999629
14
15 DC = 400000;
16 IDC = 1000;
17 PDC = DC*IDC;
18
19 Vc = (Vc)/K;
20 Ic = (Ic);
21 Pc = (Pc)/M;
22
23 Vxt = (V0t)/K;
24 Ixt = I0t;
25 Pxt = (P0t)/M; %mw
26
27
28
29 %% Voltaje %%
30 plot(t,Vc,'b','LineWidth',1.75);ylim([400-2.65 400+2.65]);xlim([0 1]);
31 grid on
32 hold on
33 plot(t,Vxt,'m','LineWidth',2.5)
34 title('V(x=0,t)','fontsize',a);
35 xlabel('Tiempo [ms]','fontsize',a);ylabel('Voltaje [kv]','FontSize',a);
36 set(gca,'fontsize',a);
37 legend('Modelo 1, fp = 1','Modelo 2, fp = 0.999629')
```

```

38
39 %% Corriente %%
40
41 figure
42 plot(t,Ic,'b','LineWidth',1.75);ylim([-14.5+IDC 14.5+IDC])
43 grid on
44 hold on
45 plot(t,I0t,'m','LineWidth',2.31)
46 title('I(x=0,t)','fontsize',a);
47 xlabel('Tiempo [ms]','fontsize',a);ylabel('Corriente [A]','FontSize',a);
48 set(gca,'fontsize',a);
49 legend('Modelo 1, fp = 1','Modelo 2, fp = 0.999629')
50
51 %% potencia %%
52 figure
53 plot(t,Pc,'b','LineWidth',1.75);
54 grid on
55 hold on
56 plot(t,Pxt,'m','LineWidth',2.31);xlim([0 1.5])
57 title('P(x=0,t)','fontsize',a);
58 xlabel('Tiempo [ms]','fontsize',a);ylabel('Potencia [Mw]','FontSize',a);
59 set(gca,'fontsize',a);
60 hold on
61 legend('Modelo 1, fp = 1','Modelo 2, fp = 0.999629')

```

BIBLIOGRAFÍA

- [1] Jocelyn Sabatier, Toni Youssef, Mathieu Pellet, “Nan HVDC line parameters estimation method without optimization ,” . *Sabatier et al. / Electrical Power and Energy Systems*, vol. 83, pp. 541–546, 2016. 2.1, 4.2, 4.2
- [2] Mohamed Khatir, Sid Ahmed Zidi, Samir Hadjeri, Mohammed Karim Fellah, “Comparison of HVDC Line Models in PSB/Simulink Based on Steady-State and Transients Considerations,” .*Acta Electrotechnica et Informatica*, vol. 8, pp. 2, 2008. 2.1, 4.2, 4.2
- [3] Laurent Teppoz, “ Commande d un systeme de conversion de type VSC-HVDC. Stabilité - Controle des perturbations.,” <https://tel.archives-ouvertes.fr/tel-00168414>, PHD theses, 2005. 2.1, 4.2, 4.2
- [4] David K.Cheng, “Fundamentos de Electromagnetismo para Ingeniería. ”,Addison Wesley Iberoamericana, S.A.,1997. 2, 2.9, 4.1
- [5] Ricardo Lizana, Marcelo A. Perez, David Arancibia, Jose R. Espinoza and Jose Rodriguez. “Decoupled Current Model and Control of Modular Multilevel Converters.,” . *IEEE Transactions on Power Electronics*, VOL. 62, NO. 9, September 2015. 3.1
- [6] Ricardo Lizana, Marcelo A. Perez, Steffen Bernet, Jose R. Espinoza and Jose Rodriguez. “Control of Arm Capacitor Voltages in Modular Multilevel Converters.,” . *IEEE Transactions on Power Electronics*, VOL. 31, NO. 2, FEBRUARY 2016. 3.1.2
- [7] Graeme N. Bathurst, Neville R. Watson and Jos Arrillaga. “Modeling of Bipolar HVdc Links in the Harmonic Domain.,” .*IEEE TRANSACTIONS ON POWER DELIVERY*, VOL. 15, NO. 3, Julio 2000. 2.9, 4.1
- [8] J. Alan Chalmers and D. ter Haar, *Atmospheric Electricity-Elsevier Science Ltd.*, 1967 4.1
- [9] V. Arredondo, “Control y minimización del ripple de voltaje en convertidores multinivel modulares” , MS tesis, 2018. 4.3
- [10] Sompop Poomjan, Thammarat Taengtang, Keerayoot Srinuanjan, Surachart Kamoldilok, Chesta Ruttanapun and Prathan Buranasiri , “ Proof of Using Fourier Coefficients for Root Mean Square Calculations on Periodic Signals” , VOL. 8, NO. 1,21-25,2014. 4.6
- [11] C. Alcota, “Control de Sistemas de Transmisión Multiterminal de Alto Voltaje basado en Variables Locales” , MS tesis, 2017. 1

