



UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Departamento de Ingeniería Comercial

Desarrollo de un Modelo de CVA y DVA para Forwards

Seminario de Título presentado por

Martín Alonso Espinoza Oyanedel

Ingeniería Comercial

Profesor Guía: Fernando Díaz Hurtado

13 de agosto de 2025



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título; ☐ Tesis de Postgrado;

Título del trabajo: Desarrollo de un Modelo de CVA y DVA para forwards

Nombre del candidato(a): Martin Espinoza Oyanedel

Carrera / Grado: Ingeniería Comercial

Campus: Casa Central Valparaíso ; Departamento: Ingeniería Comercial

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Fernando Díaz Hurtado, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL

☒ El trabajo **NO** contiene información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (embargo) por:

☐ 6 meses; ☐ 12 meses; ☐ 2 años; ☐ 3 años; ☐ 5 años; ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 12-08-2025

; Firma:

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 12-08-2025

; Firma:

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

Dedico este trabajo a mi madre, cuyo esfuerzo, sacrificio y apoyo incondicional me permitieron llegar hasta aquí. A Ariel y a mis hermanos, por su cariño y motivación que me ayudaron a alcanzar mis metas. Y a mis amigos y familia cercana, que fueron un pilar fundamental en los momentos de mayor desafío.

Resumen

El presente trabajo desarrolla e implementa un modelo cuantitativo para el cálculo del **Credit Value Adjustment (CVA)** y el **Debit Value Adjustment (DVA)** en instrumentos derivados, específicamente contratos forwards. Este proyecto surge como respuesta a la creciente necesidad en Deloitte Chile de contar con una herramienta analítica avanzada, flexible y confiable que permita evaluar, validar y asesorar sobre riesgos de contraparte, alineándose con requerimientos regulatorios y contables (IFRS 13, Basilea III y estándares ISDA).

La crisis financiera global de 2008 evidenció claramente la importancia del riesgo de crédito de contraparte (*Counterparty Credit Risk - CCR*), mostrando cómo incumplimientos inesperados en derivados negociados en mercados OTC pueden ocasionar graves pérdidas económicas. Esto ha motivado cambios regulatorios y metodológicos que exigen considerar explícitamente este riesgo en la valoración de derivados mediante ajustes como CVA y DVA. El CVA mide la pérdida esperada debido a la posibilidad de incumplimiento de la contraparte, mientras que el DVA refleja la posible ganancia contable generada por la probabilidad de incumplimiento propio.

El objetivo general del proyecto es proporcionar a Deloitte una capacidad interna sólida para el análisis, la validación y la consultoría en gestión del riesgo de crédito en derivados. Los objetivos específicos incluyen el análisis del marco teórico y normativo relevante, la definición clara del alcance del modelo, el diseño de la estructura matemática, el desarrollo computacional del modelo usando Python y simulaciones de Monte Carlo, y la validación exhaustiva frente a herramientas estándar del mercado.

El desarrollo del modelo incluye la implementación de técnicas avanzadas como modelos estocásticos para la simulación conjunta de factores de riesgo de mercado (tasas de interés mediante Hull-White, tipos de cambio por paridad de tasas de interés) y modelos de riesgo crediticio (tasas de intensidad de incumplimiento derivadas de spreads de CDS). La exposición esperada (*Expected Exposure - EE*) se proyecta en múltiples escenarios, considerando correlaciones entre factores mediante la descomposición de Cholesky, asegurando realismo en los escenarios generados. El modelo también contempla el neteo y el manejo de colaterales conforme a prácticas estándar del mercado.

La validación del modelo muestra coherencia robusta con datos del mercado (tasas simuladas versus reales, tipo de cambio proyectado) y permite cuantificar adecuadamente el CVA y DVA por instrumento, reflejando con precisión la exposición futura y el riesgo crediticio bilateral. Finalmente, un análisis de sensibilidad demuestra que los resultados son particularmente sensibles a variaciones en parámetros clave como volatilidad de tasas, tipos de cambio y spreads crediticios.

La implementación exitosa del modelo no solo contribuye académicamente al campo de



la ingeniería financiera aplicada, sino que proporciona a Deloitte una valiosa herramienta estratégica para mejorar su oferta en servicios relacionados con valoración y gestión del riesgo de contraparte.

Abstract

This project describes the development and implementation of a quantitative model to calculate the **Credit Value Adjustment (CVA)** and **Debit Value Adjustment (DVA)** for derivative instruments, specifically forward contracts. It addresses Deloitte Chile's increasing need for an advanced, flexible, and reliable analytical tool capable of evaluating, validating, and advising on counterparty credit risk, fully aligned with regulatory and accounting requirements (IFRS 13, Basel III, and ISDA standards).

The 2008 global financial crisis clearly highlighted the significance of Counterparty Credit Risk (CCR), revealing how unexpected defaults on derivatives traded in OTC markets could result in severe economic losses. This realization drove regulatory and methodological changes, mandating explicit consideration of CCR in derivative valuations through adjustments such as CVA and DVA. CVA quantifies the expected loss due to potential counterparty default, while DVA represents the potential accounting gain associated with one's own default risk.

The main objective of this project is to provide Deloitte with robust internal capabilities for analyzing, validating, and consulting on credit risk management in derivatives. Specific objectives include analyzing relevant theoretical and regulatory frameworks, clearly defining the model's operational scope, designing the mathematical structure, computationally developing the model using Python and Monte Carlo simulations, and performing comprehensive validation against standard market tools.

The model's development includes the implementation of advanced stochastic models for the joint simulation of market risk factors (interest rates using Hull-White model, foreign exchange rates through interest rate parity) and credit risk models (default intensity rates derived from CDS spreads). Expected Exposure (EE) is projected across multiple scenarios, incorporating correlations between risk factors through Cholesky decomposition, ensuring realistic scenario generation. The model also considers netting agreements and collateral management according to industry-standard practices.

Model validation demonstrates strong consistency with market data (simulated versus actual rates, projected exchange rates), allowing accurate quantification of CVA and DVA at the instrument level. This accurately reflects future exposure and bilateral credit risk. Finally, a sensitivity analysis indicates that results are particularly responsive to variations in key parameters such as interest rate volatility, exchange rates, and credit spreads.

The successful implementation of this model contributes not only to the academic field of applied financial engineering, but it also provides Deloitte with a valuable strategic tool, enhancing its services related to valuation and management of counterparty risk.



Índice general

1. Problema	11
1.1. Introducción	11
1.2. Objetivo General	13
1.3. Objetivos Específicos	13
2. Marco Teórico	15
2.1. Derivados Financieros	15
2.2. Principios Fundamentales de la Valoración	20
2.3. Factores de Riesgo	24
2.4. Modelos Estocásticos	27
2.4.1. Fundamentos de un Modelo Estocástico	28
2.4.2. Descomposición de Cholesky	29
2.4.3. Brownian Motion	31
2.4.4. Geometric Brownian Motion	34
2.4.5. Proyección de Tasas de Interés	36
2.4.6. Modelo de Tasa Corta de Hull-White	39
2.4.6.1. De Vasicek a Hull-White: La Evolución Clave	39
2.4.6.2. Propiedades y Tratabilidad Analítica	40
2.4.6.3. Ventajas y Desventajas en la Práctica	41
2.5. Simulación de Monte Carlo	41
2.6. Generación de números aleatorios	43
2.7. Ajustes de Valoración XVA	45
2.7.1. Credit Value Adjustment (CVA)	47
2.7.2. Debit Value Adjustment (DVA)	50
3. Desarrollo Integral del Modelo CVA/DVA: Fundamentos Teóricos y Solución Computacional	54
3.1. Marco de Trabajo y Fases del Proyecto	54
3.1.1. Fase 1: Revisión Teórica y Marco Normativo (Objetivo Específico 1)	54
3.1.2. Fase 2: Definición del Alcance y Especificaciones del Modelo (Objetivo Específico 2)	55
3.1.3. Fase 3: Diseño de la Arquitectura Matemática (Objetivo Específico 3)	56
3.1.4. Fase 4: Desarrollo Computacional del Modelo (Objetivo Específico 4)	56
3.1.5. Fase 5: Validación y Pruebas del Modelo (Objetivo Específico 5)	57
3.2. Diseño del Modelo de Valoración: Principios y Formulación	58



3.2.1. Marco Regulatorio y Contable del Riesgo de Contraparte	59
3.2.1.1. Valoración a Valor Razonable bajo IFRS 13	60
3.2.1.2. Requerimientos de Capital bajo Basilea III	60
3.2.2. Estándares Contractuales de ISDA	61
3.2.3. Inputs Necesarios para el Modelo	62
3.2.3.1. Datos Contractuales del Portafolio	62
3.2.3.2. Parámetros de Riesgo de Crédito	63
3.2.3.3. Datos de Mercado	63
3.2.4. Factores de Riesgo: Las Fuentes de Incertidumbre del Mercado	64
3.2.4.1. Tasas de Interés y la Estructura Temporal	64
3.2.4.2. Tipos de Cambio Spot	65
3.2.4.3. Interdependencia y Correlación de los Factores de Riesgo . . .	65
3.2.5. Modelo de Tasas de Interés: Hull-White Extendido (Libre de Arbi- traje)	66
3.2.5.1. Formulación Matemática y Propiedades	67
3.2.5.2. Calibración de los Parámetros del Proceso Estocástico	67
3.2.5.3. Implementación de la Simulación y Valoración	68
3.2.6. Curvas de Descuento Simuladas	69
3.2.6.1. La Solución Analítica para los Factores de Descuento	69
3.2.6.2. Generación de Curvas de Descuento Coherentes	69
3.2.6.3. Interpolación para Vencimientos Arbitrarios	70
3.2.7. Modelo del Tipo de Cambio	70
3.2.7.1. Fundamento Teórico: Paridad de Tasas de Interés y Valo- ración Neutral al Riesgo	71
3.2.7.2. Formulación Matemática y Acoplamiento con los Modelos de Tasas	71
3.2.7.3. Implementación de la Simulación	72
3.2.8. Correlación de Factores de Riesgo	73
3.2.8.1. Cuantificación de la Dependencia Histórica: La Matriz de Covarianza	73
3.2.8.2. Generación de Shocks Correlacionados mediante Descom- posición de Cholesky	74
3.2.8.3. Integración en los Modelos Estocásticos	75
3.2.9. Valoración de Forwards en las Simulaciones (Mark-to-Future)	75
3.2.9.1. Principio de Valoración por Descuento de Flujos de Caja . . .	75
3.2.9.2. Implementación Práctica y Manejo de Vencimientos	76
3.2.10. Cuantificación de la Exposición Futura	77
3.2.10.1. Definición de las Métricas de Exposición	77
3.2.10.2. Cálculo de los Perfiles de Exposición Esperada	78
3.2.10.3. Impacto del Neteo (Netting)	78
3.2.11. Modelado del Riesgo de Crédito	79
3.2.11.1. Credit Default Swaps (CDS) como Insumo de Mercado . . .	79
3.2.11.2. Pérdida Dado el Incumplimiento (LGD)	80
3.2.11.3. De Spreads de CDS a Probabilidades de Default	80
3.2.11.4. La Tasa de Riesgo (Hazard Rate, λ)	80



3.2.11.5. Probabilidad de Supervivencia y Probabilidad de Default	
Acumulada	81
3.2.11.6. Probabilidad de Default Marginal	81
3.2.12. Cálculo de CVA, DVA y Ajuste por Neteo	81
3.2.12.1. Formulación del CVA y DVA en Tiempo Discreto	81
3.2.12.2. Credit Value Adjustment (CVA)	82
3.2.12.3. Debit Value Adjustment (DVA)	82
3.2.12.4. Ajuste de Valoración Bilateral (BVA)	82
3.2.12.5. Implementación del Neteo por Contraparte	83
3.2.12.6. Prorratio a Nivel de Transacción	83
4. Implementación computacional del Modelo	84
4.1. Del Diseño Matemático al Prototipo Funcional	84
4.2. Selección de la Plataforma Tecnológica	85
4.3. Arquitectura Modular del Software	86
4.3.1. Diagrama de Flujo del Modelo	87
4.3.2. Descripción de los Módulos Funcionales Principales	87
4.4. Desafíos de Implementación y Soluciones Adoptadas	89
4.4.1. Desafío 1: Rendimiento Computacional en Simulaciones de Monte Carlo	90
4.4.2. Desafío 2: Precisión Numérica en la Valoración	90
4.4.3. Desafío 3: Robustez frente a Datos de Entrada Imperfectos	91
4.5. Conclusión del Capítulo	91
5. Implementación del Modelo y Resultados	93
5.1. Introducción	93
5.2. Configuración del Caso de Prueba	93
5.2.1. Parámetros de Simulación y Mercado	93
5.2.2. Portafolio de Derivados	94
5.3. Análisis de los Outputs del Modelo	95
5.3.1. Simulación de Factores de Riesgo: El Tipo de Cambio USD/CLP	95
5.3.2. Validación de Mercado: Curvas de Tasas de Interés Simuladas	98
5.3.2.1. Análisis de la Curva USD	98
5.3.2.2. Análisis de la Curva CLP	99
5.3.2.3. Conclusiones de la Validación de Curvas	100
5.3.3. Perfiles de Exposición	100
5.3.4. Resultados de CVA, DVA y BVA	101
5.4. Conclusión del Análisis de Caso Base	102
6. Análisis de Sensibilidad del Modelo	103
6.1. Introducción y Objetivos del Análisis	103
6.2. Metodología y Caso Base	103
6.3. Análisis de Resultados	104
6.3.1. Sensibilidad a Parámetros de Mercado	104
6.3.2. Sensibilidad a Parámetros de Crédito	105
6.4. Conclusiones del Análisis	106



7. Conclusiones, recomendaciones y futuros pasos	108
7.1. Conclusiones	108
7.2. Recomendaciones	108
7.3. Futuros Pasos	109



Índice de cuadros

5.1. Características Detalladas del Portafolio de Prueba	94
5.2. Estadísticos Descriptivos de la Simulación del Tipo de Cambio USD/CLP	96
5.3. Comparativa Numérica: Curva USD Simulada vs. Mercado al 30-06-2025	99
5.4. Comparativa Numérica: Curva CLP Simulada vs. Mercado al 30-06-2025	99
5.5. Resultados de CVA, DVA y BVA por Instrumento (Caso Base)	101
6.1. Resumen de Resultados del Análisis de Sensibilidad	104



Índice de figuras

4.1. Diagrama de Flujo de la Arquitectura Modular del Modelo.	88
5.1. Ejemplo de Trayectorias Simuladas para el Tipo de Cambio USD/CLP . .	96
5.2. Comparación de Curvas de Tasas Cero Simuladas (Promedio) vs. Mercado (Bloomberg) al 30-06-2025	98
5.3. Perfil de Exposición Esperada Positiva (EPE) Agregada del Portafolio . . .	101
6.1. Análisis de Sensibilidad - Impacto en CVA Total	105
6.2. Análisis de Sensibilidad - Impacto en DVA Total	106

Capítulo 1

Problema

1.1. Introducción

La crisis financiera global que se desató en 2007-2008, originada en el mercado de hipotecas de alto riesgo (*subprime*) de Estados Unidos, representó un punto de inflexión sísmico para el sistema financiero internacional. Más allá de las pérdidas directas asociadas a los activos hipotecarios, la crisis expuso de manera cruda y contundente las profundas interconexiones y las vulnerabilidades ocultas dentro de la arquitectura financiera global. Uno de los riesgos que emergió con una fuerza devastadora desde la relativa oscuridad fue el **riesgo de crédito de contraparte (CCR - Counterparty Credit Risk)**. La quiebra de Lehman Brothers en septiembre de 2008 se convirtió en el símbolo paradigmático de este riesgo: el incumplimiento de una entidad masivamente interconectada a través de una compleja red de contratos de derivados, principalmente negociados *Over-The-Counter* (OTC), desencadenó una cascada de pérdidas y una crisis de confianza que paralizó los mercados de crédito a nivel mundial.

Antes de la crisis, el CCR era a menudo percibido como un riesgo secundario, gestionado a través de límites de crédito o márgenes iniciales, pero rara vez incorporado de forma explícita y dinámica en la valoración diaria de las posiciones en derivados. Los eventos de 2008 demostraron que esta visión era peligrosamente incompleta. Se hizo evidente que el valor de un contrato de derivados no solo dependía de los movimientos de los factores de mercado subyacentes, sino también, y de manera crítica, de la solvencia crediticia de la contraparte con la que se había negociado el contrato. La posibilidad de que una contraparte incumpliera sus obligaciones futuras, especialmente en derivados con larga duración o estructuras complejas, representaba una fuente significativa de pérdidas potenciales que no estaba siendo adecuadamente reflejada en los balances.

Como respuesta directa a esta revelación y a la subsiguiente reforma regulatoria global, la industria financiera experimentó un cambio de paradigma en la forma de valorar y gestionar los derivados OTC. Surgió la necesidad imperiosa de cuantificar y contabilizar explícitamente el riesgo de contraparte. Esto condujo a la adopción generalizada de los llamados **Ajustes de Valoración xVA** (donde 'x' representa diversas letras como C, D, F, K, M), que modifican el precio "libre de riesgo" de un derivado para incorporar una variedad de costos y riesgos adicionales. Entre los ajustes más fundamentales y universalmente reconocidos se encuentran el **Credit Value Adjustment (CVA)** y el **Debit Value Adjustment (DVA)**.

El **CVA** se define como el ajuste al valor razonable de un portafolio de derivados para reflejar el riesgo de pérdida económica debido a un potencial incumplimiento futuro de la *contraparte*. Es, en esencia, el precio de mercado del riesgo de crédito de la contraparte incorporado en la valoración de la transacción. Representa una expectativa de pérdida y, por lo tanto, generalmente reduce el valor del activo (o aumenta el del pasivo) para la entidad que realiza la valoración. Por el contrario, el **DVA** es el ajuste que refleja el riesgo de crédito de la *propia entidad* que informa. Representa el beneficio teórico (contable) derivado de la posibilidad de que la propia entidad incumpla sus obligaciones bajo el contrato de derivados. Aunque su reconocimiento y tratamiento han sido objeto de debate, el DVA es el componente simétrico necesario para capturar el riesgo de crédito *bilateral* de manera completa.

La correcta estimación y gestión del CVA y DVA se han convertido en aspectos cruciales de la operativa financiera moderna por múltiples razones. Primero, regulaciones contables como **IFRS 13** (Valor Razonable) exigen que las valoraciones reflejen todos los riesgos significativos que los participantes del mercado considerarían, incluyendo explícitamente el riesgo de crédito propio y de la contraparte. Segundo, marcos regulatorios prudenciales como **Basilea III** imponen cargos de capital específicos no solo por el riesgo de incumplimiento de la contraparte, sino también por la volatilidad potencial del propio CVA, incentivando a las entidades a medir, gestionar y cubrir activamente estos ajustes. Tercero, el CVA y DVA tienen un impacto directo y a menudo material en los resultados financieros (P&L), introduciendo una fuente adicional de volatilidad que debe ser comprendida y controlada. Finalmente, estos ajustes influyen en las decisiones de negocio, como la fijación de precios de nuevos derivados, la selección de contrapartes y la gestión de relaciones bilaterales, incluyendo la negociación de acuerdos de colateralización (CSA).

La cuantificación del CVA y DVA, sin embargo, presenta desafíos metodológicos y computacionales significativos. Requiere la modelización conjunta de múltiples factores de riesgo de mercado (tasas de interés, tipos de cambio, precios de acciones, volatilidades, etc.) y factores de riesgo de crédito (probabilidades de incumplimiento, tasas de recuperación), a menudo bajo un marco de simulación de Monte Carlo. Es necesario proyectar la exposición futura del portafolio de derivados a lo largo de miles de escenarios de mercado (Exposición Esperada Positiva para CVA, Exposición Esperada Negativa para DVA), incorporar los efectos complejos del netting entre contratos y la mitigación proporcionada por el colateral, y combinar estas exposiciones con las probabilidades de incumplimiento derivadas del mercado. La complejidad inherente demanda modelos robustos, datos de calidad y una infraestructura computacional potente.

En este contexto de alta relevancia estratégica, regulatoria y financiera, **Deloitte**, como firma líder global en servicios profesionales con una extensa cartera de clientes en el sector financiero (bancos, aseguradoras, fondos de inversión, etc.), se enfrenta constantemente a la necesidad de evaluar, validar o asesorar sobre los cálculos de CVA y DVA realizados por sus clientes. Para llevar a cabo estas tareas con la profundidad, rigor y eficiencia requeridos, es indispensable contar con capacidades analíticas internas avanzadas. No obstante, actualmente se identifica en la práctica local una carencia fundamental: la ausencia de una herramienta o modelo interno consolidado, flexible y configurable que permita calcular estos ajustes de valoración de forma automática, transparente, replicable y auditable bajo diversos supuestos de mercado, características contractuales y configuraciones de portafolio.

Esta ausencia representa una limitación operativa y estratégica. Restringe la capacidad de la firma para realizar validaciones independientes exhaustivas de los modelos de CVA/DVA de los clientes en proyectos de auditoría o consultoría de riesgos. Limita la agilidad para responder a requerimientos específicos de clientes que puedan necesitar cálculos ad-hoc o análisis de sensibilidad. Dificulta la estandarización de metodologías internas y la capacitación eficiente del personal en esta área técnica especializada. En definitiva, impide a la firma desplegar todo su potencial de servicio en un ámbito de creciente demanda y complejidad regulatorio.

Por consiguiente, este trabajo de tesis se enfoca directamente en abordar esta necesidad crítica. El **objetivo principal** es el diseño, desarrollo e implementación de un prototipo de modelo cuantitativo y computacional para el cálculo del Credit Value Adjustment (CVA) y el Debit Value Adjustment (DVA). Se busca crear una herramienta que esté alineada con las metodologías estándar de la industria, que sea suficientemente flexible para manejar diferentes tipos de derivados y factores de riesgo, y que proporcione resultados transparentes y verificables. La culminación exitosa de este proyecto no solo representará una contribución académica en el campo de la ingeniería financiera aplicada, sino que también proporcionará a Deloitte una capacidad interna valiosa para mejorar sus servicios de auditoría, consultoría y gestión de riesgos relacionados con la valoración de derivados y el riesgo de contraparte.

1.2. Objetivo General

Desarrollar un modelo computacional para el cálculo del **Credit Value Adjustment (CVA)** y el **Debit Value Adjustment (DVA)** en instrumentos financieros derivados, conforme a los marcos regulatorios y contables vigentes, que permita a **Deloitte** mejorar sus capacidades de análisis, validación y consultoría en valoración de riesgo de crédito y contraparte.

1.3. Objetivos Específicos

1. Analizar los fundamentos teóricos y normativos relacionados con el cálculo de CVA y DVA, incluyendo los requerimientos establecidos por IFRS 13, Basilea III y las recomendaciones del marco ISDA.
2. Definir el alcance operativo del modelo, incluyendo las clases de derivados a considerar, los horizontes temporales relevantes, el tipo de contrapartes, y los supuestos de neteo y colateralización.
3. Diseñar la estructura matemática del modelo, incorporando la estimación de exposición esperada (EE), probabilidades de incumplimiento (PD), y tasas de descuento apropiadas (risk-free y de crédito).
4. Desarrollar el modelo computacional utilizando un lenguaje de programación adecuado (Python), implementando simulaciones de Monte Carlo para la generación de trayectorias de precios y cálculos de exposición.



5. Validar el modelo frente a datos de mercado y herramientas estándar, verificando la coherencia, robustez, y precisión de los resultados obtenidos

Capítulo 2

Marco Teórico

2.1. Derivados Financieros

Un derivado financiero es un contrato cuyo valor depende de uno o más activos, tasas o índices subyacentes, de ahí su nombre de derivado. Estos contratos estipulan acuerdos para realizar pagos futuros o para comprar/vender el activo subyacente en una o varias fechas futuras, que pueden variar desde semanas hasta muchos años. Una característica fundamental es que su valor fluctúa en respuesta a cambios en las variables que afectan a los activos subyacentes, y frecuentemente, su valor inicial al momento de la contratación se configura contractualmente para que este sea cero para ambas partes.

Los derivados financieros se usan como herramientas para las siguientes tres funciones:

1. **Cobertura:** Esta es una de sus funciones más utilizadas en el mercado, dado que los derivados financieros están sujetos al valor de un activo subyacente, los mismos permiten a las organizaciones reducir, aislar o neutralizar exposiciones a fluctuaciones en tasas de interés, tipos de cambio, precios o commodities. Para ejemplificar este uso, considere una firma exportadora de manzanas chilena cuya moneda funcional es el peso (**CLP**), pero que recibe sus ingresos por ventas en dólares estadounidenses (**USD**). Esta situación expone a la empresa a un considerable riesgo de tipo de cambio, ya que el valor final en CLP de sus futuros ingresos en USD es incierto, generando dificultades en la planificación financiera, presupuestaria y complejidades contables debido a los ajustes por fluctuaciones cambiarias. Para mitigar esta volatilidad y estabilizar sus flujos de caja, la firma puede emplear un contrato derivado, como un forward de tipo de cambio. Mediante este acuerdo, la exportadora pacta hoy vender una cantidad específica de los USD que espera recibir en una fecha futura, comprando CLP a un tipo de cambio fijo (**K**) preestablecido, eliminando así la incertidumbre sobre el valor en CLP de esa porción de sus ingresos y facilitando la gestión financiera. Naturalmente, esta cobertura implica que la empresa renuncia a potenciales ganancias si el tipo de cambio spot futuro le fuera más favorable, pero también se protege de posibles pérdidas si ocurriera lo contrario, cumpliendo el objetivo primario de asegurar un flujo de ingresos predecible. Sin embargo, la decisión de cobertura debe considerar que los contratos forward son obligaciones firmes; cubrir el 100 % de los ingresos esperados puede ser arriesgado si las ventas reales fluctúan. Además, la implementación de esta estrategia conlleva otros fac-

tores relevantes como los costos de transacción, la necesidad de evaluar la calidad crediticia de la contraparte (**riesgo de contraparte**) y los posibles requerimientos de garantías (**colateral**), aspectos fundamentales en el análisis de valoración de derivados y sus ajustes asociados (**xVA**). Este ejemplo ilustra cómo los derivados funcionan como herramientas esenciales para la gestión de riesgos específicos en el ámbito corporativo.

2. **Especulación:** Los derivados permiten a los participantes tomar posiciones direccionales sobre la evolución futura de los precios de los subyacentes. Debido a la característica de apalancamiento (requieren una inversión inicial pequeña o nula en comparación con el valor nocional del contrato), los derivados magnifican tanto las ganancias como las pérdidas potenciales. Los especuladores utilizan derivados para apostar por movimientos de mercado sin necesidad de poseer el activo subyacente.
3. **Arbitraje:** En teoría, la relación matemática entre un derivado y su subyacente (y otros derivados relacionados) debería impedir oportunidades de beneficio sin riesgo. Sin embargo, ineficiencias temporales del mercado pueden crear discrepancias de precios que los arbitrajistas buscan explotar mediante la compra y venta simultánea de instrumentos relacionados para asegurar una ganancia libre de riesgo. La existencia de arbitrajistas contribuye a la eficiencia de los precios en los mercados.

Por otro lado, los derivados financieros se negocian principalmente en dos tipos de mercados.

Primero, existen los mercados organizados, como las bolsas de futuros y opciones, que operan bajo un marco regulado y centralizado. Estos mercados se especializan en la negociación de contratos estandarizados, definidos rigurosamente en términos de tamaño, vencimiento, activo subyacente y otros detalles contractuales. La negociación se realiza en una plataforma central, lo que intrínsecamente promueve una mayor liquidez (facilitando la entrada y salida de posiciones), transparencia (ya que los precios y volúmenes de transacción suelen ser públicos) y una formación de precios eficiente al concentrar la oferta y la demanda. Un elemento distintivo y fundamental de los mercados organizados modernos es la figura de la Cámara de Compensación Central (CCP, por sus siglas en inglés). La CCP se interpone como contraparte en cada transacción, actuando como comprador para cada vendedor y como vendedor para cada comprador, y garantiza el cumplimiento de las obligaciones contractuales. Esta intermediación mitiga de forma significativa el riesgo de crédito de contraparte para los participantes, ya que su exposición directa se traslada del participante original a la CCP, una entidad diseñada para gestionar dichos riesgos. Un ejemplo prominente de este tipo de mercado es el **Shanghai Futures Exchange (SFHE)**, el cual ofrece una plataforma centralizada para la negociación de contratos de futuros estandarizados sobre diversas materias primas como cobre, celulosa y petróleo, además de derivados sobre índices.

En segundo lugar, y en contraste con los mercados organizados, se encuentran los mercados **Over-the-Counter (OTC)**. La característica distintiva de estos mercados es que las transacciones de derivados se negocian y acuerdan bilateralmente, es decir, directamente entre dos partes, sin la intermediación de una bolsa centralizada o una cámara de compensación. Esta estructura permite una gran flexibilidad y personalización de los contratos, ya que los términos (como el activo subyacente exacto, el nocional, el

vencimiento o la estructura de pagos) pueden adaptarse específicamente a las necesidades de las contrapartes involucradas, a diferencia de la rigidez de los contratos estandarizados de bolsa.

Sin embargo, esta naturaleza bilateral y privada conlleva importantes implicaciones. Al no existir una plataforma central de negociación ni requerimientos de reporte estandarizados, los mercados OTC tienden a ser menos transparentes; los detalles específicos y los precios de las transacciones no suelen ser de dominio público. Más crucialmente, la ausencia de una Cámara de Compensación Central que garantice las operaciones significa que el riesgo de crédito de contraparte es inherente y significativamente más alto. Cada participante está directamente expuesto a la posibilidad de que su contraparte incumpla sus obligaciones contractuales, sin un mecanismo centralizado que absorba las pérdidas. Por esta razón fundamental, en el mercado OTC es una práctica extendida y necesaria el uso de mecanismos bilaterales de mitigación de riesgo, siendo el más común el establecimiento de acuerdos de colateral (garantías), donde las partes intercambian activos (usualmente efectivo o valores de alta calidad) para cubrir la exposición crediticia mutua derivada de las fluctuaciones del valor de los contratos. Además, se suelen incluir cláusulas contractuales específicas que detallan los procedimientos a seguir en caso de eventos de crédito o incumplimiento.

Dentro del vasto universo de derivados, existen instrumentos estándar que forman la base de la mayoría de las transacciones y estructuras más complejas diseñadas para necesidades específicas.

Los contratos a plazo (forwards) representan acuerdos privados, negociados directamente entre dos contrapartes fuera de un mercado organizado (Over-The-Counter, OTC), para efectuar la compra o venta de un activo subyacente específico en una fecha futura predeterminada a un precio fijado en el momento del acuerdo. Ambas partes adquieren una obligación firme de cumplir la transacción al vencimiento, independientemente de la evolución del precio de mercado del subyacente. Su propósito fundamental es la mitigación del riesgo de precio futuro, permitiendo a las entidades fijar costos o ingresos anticipadamente. Debido a su naturaleza OTC, los forwards ofrecen gran flexibilidad para personalizar los términos del contrato (activo, cantidad, fecha, precio), pero esta característica introduce un significativo riesgo de crédito de contraparte, ya que el cumplimiento depende de la solvencia de la otra parte involucrada (Hull, 2022). Sus aplicaciones más habituales incluyen la cobertura de exposiciones a fluctuaciones en precios de materias primas, tipos de cambio (mediante FX forwards) y tasas de interés a corto plazo (a través de Forward Rate Agreements o FRAs), así como la especulación sobre movimientos de precios futuros y la ejecución de estrategias de arbitraje basadas en el costo de acarreo.

Los contratos de futuros, en contraste, son acuerdos estandarizados negociados en bolsas de derivados organizadas. La estandarización abarca aspectos como el tamaño del contrato, la calidad del subyacente, las fechas de vencimiento y los mecanismos de liquidación. Una característica distintiva es la intermediación de una cámara de compensación, que actúa como contraparte central para todas las operaciones, neutralizando el riesgo de contraparte directo entre comprador y vendedor. Adicionalmente, los futuros se liquidan diariamente mediante el sistema de "mark-to-market", donde las ganancias y pérdidas se abonan o adeudan a las cuentas de margen de los participantes cada día (Hull, 2022). Si bien comparten con los forwards el objetivo de fijar precios futuros para la gestión de riesgos y la especulación, su estandarización y negociación centralizada les otorgan mayor

liquidez, transparencia y seguridad crediticia. Son instrumentos predilectos para la cobertura de riesgos en índices bursátiles, commodities, divisas y tasas de interés, y desempeñan un rol crucial en la formación de precios y la especulación apalancada, aunque la estandarización puede introducir un riesgo de base si el contrato no se ajusta perfectamente a la necesidad de cobertura específica.

Las opciones confieren a su comprador (tenedor) el derecho, pero no la obligación, de comprar (opción Call) o vender (opción Put) una cantidad determinada de un activo subyacente a un precio estipulado (precio de ejercicio o strike, K) hasta una fecha de vencimiento específica (T) o únicamente en esa fecha (según sean de estilo Americano o Europeo, respectivamente). Por adquirir este derecho, el comprador paga una suma inicial denominada prima al vendedor (emisor) de la opción, quien a cambio asume la obligación de cumplir la transacción si el comprador decide ejercer su derecho. Este instrumento crea perfiles de riesgo-rendimiento asimétricos: el comprador limita su pérdida máxima a la prima pagada, mientras que su potencial de ganancia puede ser considerable; el vendedor recibe la prima como ingreso limitado, pero se expone a pérdidas potencialmente significativas (Hull, 2022). La valoración racional de estas opciones fue un hito fundamental en la teoría financiera (Black and Scholes, 1973; Merton, 1973). Las opciones son herramientas versátiles utilizadas para asegurar carteras contra caídas de precios (compra de Puts), para especular sobre movimientos direccionales con riesgo acotado (compra de Calls o Puts), para generar ingresos mediante la venta de primas (p. ej., venta de Calls cubiertas) y para implementar estrategias complejas que permiten posicionarse sobre la volatilidad o rangos de precios futuros.

Las permutas financieras (swaps) son acuerdos, típicamente OTC, mediante los cuales dos partes convienen intercambiar series de flujos de caja futuros durante un período establecido, calculados sobre un monto principal notional que usualmente no se intercambia físicamente. El ejemplo más prevalente es el swap de tasas de interés (Interest Rate Swap - IRS), en el que se intercambian pagos a tasa fija por pagos a tasa flotante (como la Secured Overnight Financing Rate, SOFR). Otros tipos relevantes son los swaps de divisas (que frecuentemente sí involucran intercambio de principal al inicio y al final), swaps de materias primas y swaps de renta variable. Los swaps permiten a las entidades transformar la naturaleza de sus flujos de caja asociados a activos o pasivos, gestionar eficazmente los riesgos de tasa de interés y tipo de cambio, explotar ventajas comparativas en costes de financiación o acceder sintéticamente a la rentabilidad de ciertos mercados (Hull, 2022). Dada su naturaleza OTC, son altamente configurables a las necesidades de las partes, pero están sujetos a riesgo de contraparte, aunque la práctica de colateralización y la intermediación de cámaras de compensación para swaps estandarizados, así como la consideración de ajustes de valoración como los xVA, han mitigado este riesgo en años recientes (Gregory, 2020).

Más allá de estos instrumentos fundamentales, el mercado financiero ha desarrollado derivados con estructuras más intrincadas. Las opciones exóticas se desvían de las especificaciones estándar; ejemplos incluyen las opciones barrera, cuyo payoff o existencia depende de que el precio del subyacente alcance un nivel predeterminado; las opciones asiáticas, cuyo valor al vencimiento se basa en el precio promedio del subyacente durante un período; las opciones lookback, donde el precio de ejercicio se fija retrospectivamente como el más favorable ocurrido; y las opciones binarias, que ofrecen un pago fijo si se cumple una condición específica. Estos instrumentos permiten coberturas más precisas o



la expresión de visiones de mercado más específicas (Hull, 2022). Otros derivados complejos incluyen las swaptions, que son opciones sobre swaps, otorgando el derecho a entrar en un contrato de swap en el futuro, utilizadas para gestionar la incertidumbre en futuras necesidades de financiación o inversión. Los Credit Default Swaps (CDS) son derivados de crédito que funcionan como un seguro contra el incumplimiento de una entidad de referencia, permitiendo a los inversores cubrirse contra el riesgo de crédito o especular sobre la calidad crediticia, siendo un componente central en la gestión moderna del riesgo de contraparte (Gregory, 2020). Finalmente, los productos estructurados combinan activos tradicionales, como bonos, con componentes derivados (usualmente opciones) para crear perfiles de riesgo-rendimiento a medida, tales como notas con capital protegido o certificados vinculados a índices con características particulares, aunque su complejidad puede a veces dificultar su valoración y comprensión del riesgo (Hull, 2022).

2.2. Principios Fundamentales de la Valoración

La valoración de cualquier activo financiero, ya sea una acción, un bono o un instrumento más complejo, se sustenta en principios económicos fundamentales. El más esencial es el principio del valor presente (**VP**), que establece que el valor intrínseco de un activo hoy (**V₀**) se deriva de la suma de todos los flujos de caja futuros (**FC_t**) que se anticipa generará, debidamente descontados para reflejar su valor equivalente en el presente (Brealey et al., 2023; Damodaran, 2012). Este descuento es crucial y debe incorporar dos elementos: el valor temporal del dinero, que reconoce la preferencia por la liquidez inmediata y la capacidad del dinero actual para generar rendimientos futuros, y el riesgo inherente a la recepción de esos flujos. Una mayor incertidumbre o riesgo asociado a los flujos de caja proyectados demanda una compensación mayor por parte del inversor, lo que se traduce en una tasa de descuento (**k**) más elevada y, consecuentemente, un menor valor presente. Matemáticamente, para flujos de caja discretos esperados $\mathbb{E}[FC_t]$ en los tiempos $t = 1, 2, \dots, T$, el principio se expresa como (ver, por ejemplo, Brealey et al., 2023):

$$V_0 = \sum_{t=1}^T \frac{\mathbb{E}[FC_t]}{(1+k)^t} \quad (2.1)$$

En un marco de tiempo continuo, utilizando una tasa de descuento instantánea $r(u)$ que puede variar con el tiempo, la formulación equivalente es (e.g., Hull, 2022; Shreve, 2004):

$$V_0 = \mathbb{E} \left[\int_0^T e^{-\int_0^t r(u) du} \cdot FC(t) dt \right] \quad (2.2)$$

La correcta determinación de la tasa de descuento k o la trayectoria de $r(t)$ es uno de los aspectos más críticos y desafiantes de la valoración, involucrando a menudo modelos como el **CAPM** o el **WACC** para estimar el costo de oportunidad del capital ajustado por riesgo (Brealey et al., 2023; Damodaran, 2012).

Otro pilar fundamental, intrínsecamente ligado al concepto de mercados eficientes, es el principio de no arbitraje (Hull, 2022). Este principio postula que en un mercado funcional no deben existir oportunidades para obtener un beneficio garantizado sin incurrir en riesgo ni realizar una inversión neta inicial. La implicación directa de la ausencia de oportunidades de arbitraje es la **Ley del Precio Único** (Hull, 2022): dos activos o carteras que produzcan flujos de caja idénticos en todos los escenarios futuros posibles deben, necesariamente, cotizar al mismo precio en el presente. Cualquier desviación crearía una oportunidad inmediata para que los arbitrajistas compren el activo infravalorado y vendan el sobrevalorado, obteniendo un beneficio sin riesgo y reconduciendo los precios al equilibrio. Este principio es especialmente poderoso en la valoración de derivados, ya que permite determinar su precio no por una evaluación directa de su riesgo intrínseco, sino por el costo de replicar sus flujos de caja mediante una cartera de activos subyacentes cuyos precios se toman como dados (Hull, 2022). Esta idea de replicación es central en la teoría moderna de precios de derivados y conduce al concepto de valoración neutral al riesgo (Hull, 2022).

Finalmente, es importante distinguir entre el precio de mercado y el precio justo o de equilibrio. Mientras que el precio de mercado observado en cualquier momento es el resultado de la dinámica de oferta y demanda, influenciado por factores como la liquidez,

el sentimiento del inversor y los flujos de órdenes, la teoría de valoración se enfoca en determinar el precio justo. Este valor teórico se fundamenta en los principios de valor presente y no arbitraje, buscando reflejar de manera objetiva los flujos de caja esperados y los riesgos asociados al activo. Aunque en mercados eficientes se espera una convergencia entre ambos precios a largo plazo, pueden existir desviaciones significativas.

Estos principios se aplican de la misma manera a la valoración de instrumentos derivados, sin embargo se destaca el principio de **no arbitraje**, ya que como se mencionaba anteriormente hace alusión a la imposibilidad de obtener beneficios neutros al riesgo y sin una inversión inicial, que da paso a la **Ley de Precio Único**, este principio termina siendo particularmente potente en la valoración de instrumentos derivados (Hull, 2022). Lo anterior se explica ya que, en vez de evaluar directamente su riesgo, su precio se determina por el costo de construir una cartera replicante (construida por los activos subyacentes y posiblemente un activo libre de riesgo) que genere exactamente los mismos flujos de caja que el derivado en todos los escenarios futuros. El costo inicial de esta cartera replicante debe, por no arbitraje, ser igual al precio del derivado.

Esta estrategia de replicación lleva al concepto fundamental de valoración neutral al riesgo (Hull, 2022). Si un derivado es perfectamente replicable, su precio es independiente de las actitudes frente al riesgo de los inversores. Podemos, por tanto, valorarlo como si estuviéramos en un mundo hipotético donde todos los inversores son neutrales al riesgo. En este marco, la tasa de rendimiento esperada de cualquier activo es la tasa libre de riesgo r (ajustada por cualquier flujo conocido como dividendos, δ), y el valor presente se calcula descontando los flujos futuros esperados a esta tasa r . Esto se formaliza mediante el uso de la medida de probabilidad neutral al riesgo ($\mathbf{Q}$), bajo la cual el precio descontado de los activos negociables son martingalas (Hull, 2022; Shreve, 2004). El precio de un derivado V_0 con payoff $\text{Payoff}(T)$ en el tiempo T se calcula como:

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}} \left[e^{-\int_0^T r(u) du} \cdot \text{Payoff}(T) \right] \quad (2.3)$$

donde $\mathbb{E}_{\mathbf{Q}}$ denota la expectativa bajo la medida $\mathbf{Q}$ (Hull, 2022). Si la tasa r es constante, la fórmula se simplifica a:

$$V_0 = \mathbb{E}_{\mathbf{Q}} \left[e^{-rT} \cdot \text{Payoff}(T) \right] \quad (2.4)$$

Los modelos de valoración (como Black-Scholes (Black and Scholes, 1973; Merton, 1973), HJM) describen la dinámica de los subyacentes bajo esta medida $\mathbf{Q}$ (Hull, 2022).

Aplicando estos principios, valoramos derivados comunes. Para un contrato a plazo (forward), que obliga a comprar/vender un activo S en el tiempo T a un precio K fijado hoy, el precio forward $F(t, T)$ se establece para que el valor inicial del contrato sea cero. En el momento inicial $t = 0$, este precio cumple (Hull, 2022):

$$F(0, T) = S(0) \exp((r - \delta)T) \quad (2.5)$$

donde r es la tasa libre de riesgo y δ es el rendimiento continuo del subyacente (conocido como *cost of carry*). Un ejemplo importante es un forward de tipo de cambio, donde $S(t)$ es el tipo de cambio spot (unidades de moneda doméstica por unidad de moneda extranjera), K es el tipo de cambio pactado, r es la tasa libre de riesgo doméstica (r_d) y el rendimiento δ es la tasa libre de riesgo extranjera (r_f). En este caso, la fórmula del precio forward inicial es (Hull, 2022):

$$F(0, T) = S(0) \exp((r_d - r_f)T) \quad (2.6)$$

Para valorar un contrato forward existente en un tiempo $t < T$ con un precio pactado K , existen dos enfoques equivalentes basados en el principio de no arbitraje (Hull, 2022).

El primer enfoque calcula el valor presente de cada "pata" del contrato y luego las resta. La pata larga (la obligación de recibir el activo S o 1 unidad de divisa extranjera en T) tiene un valor en t de $S(t)e^{-\delta(T-t)}$ (o $S(t)e^{-r_f(T-t)}$ para el forward de tipo de cambio). La pata corta (la obligación de pagar K unidades de moneda doméstica en T) tiene un valor presente en t de $Ke^{-r(T-t)}$ (o $Ke^{-r_d(T-t)}$ para el forward de tipo de cambio). El valor neto del contrato forward en t es la diferencia (Hull, 2022):

$$V_{\text{forward}}(t) = S(t)e^{-\delta(T-t)} - Ke^{-r(T-t)} \quad (2.7)$$

(Para el forward de tipo de cambio, se usarían r_f en el primer término y r_d en el segundo).

El segundo enfoque calcula la diferencia entre el precio forward vigente en el mercado en t , $F(t, T)$, y el precio pactado en el contrato, K , y luego descuenta esta diferencia desde el vencimiento T hasta el tiempo actual t usando la tasa libre de riesgo apropiada (r o r_d) (Hull, 2022):

$$V_{\text{forward}}(t) = [F(t, T) - K]e^{-r(T-t)} \quad (2.8)$$

Ambas metodologías son equivalentes y reflejan el valor de mercado del contrato existente (Hull, 2022).

Para un swap de tasas de interés (IRS) sobre un nocional N , donde se intercambian pagos a una tasa fija R (calculados sobre períodos de duración δ_i) y pagos a una tasa flotante (que hoy en día comúnmente se basan en tasas de referencia Overnight como SOFR, compuestas y pagadas al final del período, o "in arrears") en un conjunto de fechas de pago $T_1, \dots, T_M$, su valor se determina como la diferencia entre el valor presente (PV) de la pata fija y el PV de la pata flotante (Hull, 2022). El PV de la Pata Fija se calcula descontando todos los pagos fijos futuros $N \times R \times \delta_i$ y el nocional final (si se intercambia) usando los precios de los bonos cupón cero $B(t, T_i)$ correspondientes a cada fecha de pago (Hull, 2022):

$$\text{PV(Pata Fija)} = \sum_{i=1}^M (N \times R \times \delta_i \times B(t, T_i)) + N \times B(t, T_M) \quad (2.9)$$

(Nota: a menudo el nocional no se intercambia explícitamente al final en los IRS de solo interés, pero su valor está implícito en la valoración de los flujos). El PV de la Pata Flotante, aunque la tasa flotante exacta para un período $[T_{k-1}, T_k]$ se determina al final del período (T_k) mediante la composición de las tasas diarias observadas, tiene una propiedad clave: su valor presente justo después de una fecha de pago/reset (T_{k-1}) es aproximadamente igual al nocional N (Hull, 2022). Esto se puede argumentar mediante una estrategia de replicación con instrumentos del mercado monetario o bonos de tasa flotante. Por lo tanto, para fines prácticos de valoración, se sigue utilizando el principio de que $\text{PV(Pata Flotante)} \approx N$ en las fechas de reset, y su valor en t se calcula descontando los flujos flotantes esperados (que se derivan de la curva forward de tasas). El valor neto del swap para quien recibe la tasa fija es (Hull, 2022):

$$V_{\text{swap}}(t) = \text{PV(Pata Fija)} - \text{PV(Pata Flotante)} \quad (2.10)$$

La tasa de swap (*swap rate*) es aquella tasa fija R que hace que el valor inicial del swap sea cero, es decir, $V_{\text{swap}}(0) = 0$ (Hull, 2022).

Para opciones europeas (Call/Put) sobre un subyacente S , con precio de ejercicio (strike) K y fecha de vencimiento T , sus precios teóricos en $t = 0$ se definen como el valor presente esperado de sus pagos futuros (*payoffs*) bajo la medida neutral al riesgo Q (Hull, 2022):

$$C(0) = \mathbb{E}_Q [e^{-rT} \max(S(T) - K, 0)] \quad (2.11)$$

$$P(0) = \mathbb{E}_Q [e^{-rT} \max(K - S(T), 0)] \quad (2.12)$$

donde $\mathbb{E}_Q[\cdot]$ denota la expectativa bajo la medida neutral al riesgo y r es la tasa libre de riesgo constante hasta T . Bajo supuestos específicos, como los del modelo de Black-Scholes (Black and Scholes, 1973; Merton, 1973), que asume que $S(T)$ sigue una distribución log-normal, derivada de un movimiento Browniano geométrico con volatilidad constante, existen fórmulas analíticas cerradas para $C(0)$ y $P(0)$ (Hull, 2022). Sin embargo, en casos más generales (modelos estocásticos más complejos, tasas de interés estocásticas, etc.), se debe recurrir a métodos numéricos para estimar estas expectativas descontadas. El método más utilizado en la práctica para derivados complejos y para el cálculo de exposiciones es la simulación de Monte Carlo (Hull, 2022). Esta técnica consiste en simular un gran número de trayectorias posibles para el activo subyacente $S(t)$ bajo la dinámica neutral al riesgo Q , calcular el payoff de la opción en T para cada trayectoria, y luego promediar los payoffs descontados $e^{-rT} \times \text{Payoff}(T)$ para obtener el precio estimado.

Finalmente, resulta fundamental distinguir entre el precio 'justo' teórico, derivado de los principios de no arbitraje y valoración neutral al riesgo, y el precio observado en el mercado. Mientras que la teoría proporciona un valor de referencia libre de riesgo, la práctica reconoce que los derivados están sujetos a costos y riesgos adicionales —tales como el riesgo de crédito, los costos de fondeo y los requerimientos de capital— que no son capturados por los modelos más básicos. Es precisamente para incorporar estas realidades económicas que surgen los ajustes de valoración xVA (Gregory, 2020). En particular, el CVA y el DVA, elementos centrales de esta tesis, cuantifican el impacto del riesgo de crédito bilateral (de la contraparte y propio, respectivamente), cerrando así una parte significativa de la brecha entre el valor teórico libre de riesgo y una valoración más completa y representativa del valor económico del instrumento (Gregory, 2020; Hull, 2022).

2.3. Factores de Riesgo

La valoración de **instrumentos derivados** es una tarea esencial en las finanzas modernas, cuya precisión depende de la correcta consideración de dos conjuntos distintos pero interrelacionados de información: los términos fijos que definen el contrato y las variables de mercado dinámicas que influyen en su valor económico a lo largo del tiempo. Una comprensión clara de la naturaleza y el rol de cada uno es fundamental para la aplicación de modelos de precios, la gestión de riesgos y el cálculo de ajustes de valoración complejos como los **xVA**. En primer lugar, la valoración de cualquier instrumento derivado se fundamenta en los **parámetros contractuales**, que son los términos específicos, fijos y determinísticos acordados *ex ante* por las partes al celebrar el contrato. Estos parámetros definen la estructura matemática y temporal del instrumento, estableciendo las reglas del juego y los flujos de caja contingentes. No fluctúan con el mercado, pero son inputs indispensables y directos para cualquier modelo de valoración. Los parámetros contractuales más relevantes incluyen:

1. **Activo Subyacente Específico:** La identificación inequívoca del activo, índice, tasa de interés, materia prima, divisa o cualquier otra variable de referencia sobre la cual se basa el contrato derivado (*e.g.*, acciones ordinarias de 'AAPL', índice S&P 500, tasa SOFR a 3 meses).
2. **Nocional Principal (N):** El monto teórico o de referencia utilizado como base para calcular los pagos de intereses, los flujos de liquidación u otras obligaciones (fundamental en swaps, caps, floors; relevante también en opciones sobre tasas o bonos).
3. **Fechas Clave:** El cronograma preciso del contrato, que incluye la *Fecha de Inicio* o *Fecha Efectiva* (cuándo comienzan las obligaciones), la *Fecha de Vencimiento* o *Expiración* (T) (cuándo termina el contrato y se realiza la liquidación final), y todas las fechas intermedias relevantes estipuladas para *Pagos* (de intereses, cupones), *Fijación* o *Reset* de tasas variables, o *Ejercicio* permitido para opciones no europeas.
4. **Precio de Ejercicio (*Strike Price* - K):** En el caso de las opciones, es el precio predefinido al cual el tenedor tiene el derecho, pero no la obligación, de comprar (opción *Call*) o vender (opción *Put*) el activo subyacente.
5. **Precio Forward o Tasa Fija del Swap (K o R):** El precio (para contratos a plazo como *forwards* o futuros) o la tasa de interés (para la pata fija de un *swap*) acordado contractualmente para la transacción o los pagos futuros, fijado al inicio del contrato.
6. **Detalles del Flujo de Pagos:** Especificaciones operativas precisas sobre cómo se calculan y realizan los pagos, incluyendo la fórmula exacta para determinar la *tasa flotante* (*e.g.*, SOFR compuesto *in arrears* más un *spread* fijo, Euribor a 3 meses), la *Frecuencia de Pago/Reset* (*e.g.*, trimestral, semestral), las *Convenciones de Conteo de Días* para calcular las fracciones de año aplicables a los períodos de interés (*e.g.*, Actual/360, 30/360, Actual/Actual), y las *Convenciones de Días Hábiles* para ajustar fechas de pago o reset que caigan en días no laborables (*e.g.*, *Following*, *Modified Following*, *Preceding*).

7. **Moneda(s):** La(s) divisa(s) específicas en que se denominan el nocional, los pagos, el precio de ejercicio y cualquier otro monto relevante del contrato.
8. **Estilo de Ejercicio (Opciones):** Define la ventana temporal durante la cual el tenedor puede ejercer su derecho: *Europea* (ejercicio permitido únicamente en la fecha de vencimiento T), *Americana* (ejercicio permitido en cualquier momento hasta la fecha de vencimiento T), o *Bermudiana* (ejercicio permitido únicamente en un conjunto predefinido de fechas específicas antes de o en T).
9. **Método de Liquidación:** Especifica cómo se resuelve el contrato al vencimiento o al ejercerse: mediante la *entrega física* del activo subyacente contra el pago acordado, o mediante un *pago en efectivo* (*cash settlement*) basado en la diferencia entre el precio de mercado del subyacente en ese momento y el precio acordado (strike o forward).

Una vez definida la estructura contractual mediante estos parámetros fijos, la valoración dinámica del derivado depende críticamente de la evolución de los **factores de riesgo**. Estos representan las variables de mercado estocásticas cuya trayectoria futura es incierta y cuyo estado en cada momento afecta el valor presente esperado de los flujos de caja del derivado o su valor de mercado. El modelado de la dinámica de estos factores, usualmente mediante **procesos estocásticos**, es esencial para la valoración y la gestión de riesgos. Los factores de riesgo primordiales son:

1. **Precio del Activo Subyacente (S):** Variable clave para derivados cuyo payoff depende del precio de acciones, índices, materias primas, etc. Su impacto se mide a través de sensibilidades como δ y γ .
2. **Tasas de Interés (r) y la Estructura Temporal de Tipos de Interés (Yield Curve):** Afectan el **descuento** de flujos futuros (a través de la *Curva de Descuento*) y el **costo de carry** o deriva neutral al riesgo (impactando forwards, futuros y opciones). La sensibilidad es ρ . La forma completa de la curva y las *Curvas de Tasas Forward* son relevantes.
3. **Tipos de Cambio (FX):** Cruciales para derivados multidivisa o con subyacentes en moneda extranjera, afectando directamente la conversión de valores.
4. **Volatilidades (σ):** Cuantifican la magnitud esperada de las fluctuaciones futuras de los factores de riesgo, siendo un input vital para opciones (sensibilidad *vega*). Se manifiesta como una **superficie de volatilidad implícita** que varía por *strike* y vencimiento, reflejando el *smile/skew*. Puede ser estocástica.
5. **Correlaciones (ρ):** Miden la dependencia entre los movimientos de múltiples factores de riesgo. Son fundamentales para valorar derivados sobre múltiples subyacentes, gestionar riesgos de cartera y calcular exposiciones netas para xVA.
6. **Tasas de Dividendos o Rendimientos Continuos (δ):** Relevantes para derivados sobre activos que generan flujos, ajustando el *cost of carry* y la deriva neutral al riesgo.



Dada la naturaleza prospectiva de la valoración financiera, que inherentemente depende de las expectativas sobre el comportamiento futuro de los mercados, resulta evidente que una valoración adecuada de los instrumentos derivados no puede basarse únicamente en el estado actual de los factores de riesgo. Es imprescindible proyectar la evolución futura de variables clave como los precios de subyacentes (S), las curvas de tasas de interés (r), los tipos de cambio (FX), las volatilidades (σ) y los factores de crédito (PD , LGD). Para llevar a cabo estas proyecciones de manera que reflejen la incertidumbre inherente a los mercados, se recurre a los **modelos estocásticos**. Estos modelos proporcionan el marco matemático para describir la dinámica aleatoria de los factores de riesgo a lo largo del tiempo, permitiendo generar múltiples escenarios o trayectorias futuras posibles. Sin embargo, proyectar cada factor de riesgo de forma aislada resulta insuficiente y potencialmente erróneo, especialmente al valorar derivados complejos que dependen de múltiples factores o al evaluar el riesgo agregado de una cartera. Los mercados financieros exhiben una interdependencia significativa, donde los distintos factores de riesgo no se mueven de forma independiente. Por ello, es crucial que los modelos de proyección capturen adecuadamente las **correlaciones** (ρ) existentes entre estos factores. Incorporar estas correlaciones asegura que las proyecciones conjuntas de los factores de riesgo sean realistas y consistentes con las dinámicas observadas en el mercado. Técnicas como la **simulación de Monte Carlo**, combinadas con herramientas matemáticas como la **descomposición de Cholesky** aplicada a la matriz de covarianza estimada, permiten generar trayectorias multivariantes de los factores de riesgo que respetan su estructura de dependencia. Esta capacidad de proyectar de manera correlacionada los factores de riesgo es fundamental no solo para obtener valoraciones más precisas de derivados individuales complejos, sino también para calcular de forma fiable métricas de riesgo de cartera y los ajustes de valoración **xVA**, los cuales dependen críticamente de la distribución conjunta futura de la exposición y los factores de crédito.

2.4. Modelos Estocásticos

Como se estableció en la discusión precedente, la valoración rigurosa de instrumentos derivados y el cálculo preciso de los ajustes xVA dependen fundamentalmente de nuestra capacidad para anticipar la evolución futura de los **factores de riesgo** subyacentes (S , r , FX , σ , ρ , PD , LGD , etc.). Dado que el futuro es inherentemente incierto, no basta con conocer el estado actual del mercado; es imperativo **proyectar** las posibles trayectorias futuras de estos factores de una manera que capture tanto su volatilidad individual como sus complejas interdependencias. La necesidad de generar escenarios futuros consistentes y realistas, que reflejen la aleatoriedad y las correlaciones observadas en los mercados financieros, nos conduce directamente al dominio de los **modelos estocásticos**.

Un **proceso estocástico** es, en esencia, un modelo matemático diseñado para describir la evolución de un sistema o variable que cambia a lo largo del tiempo de una manera que contiene elementos aleatorios o impredecibles. Formalmente, se define como una colección de variables aleatorias, $\{X(t), t \in T\}$, indexadas por el tiempo t . En el ámbito financiero, estos modelos proporcionan el lenguaje y las herramientas para describir y simular la dinámica incierta de los factores de riesgo. Son el motor que nos permite ir más allá de una visión estática del mercado y generar los múltiples escenarios futuros necesarios para la valoración por **Monte Carlo**, la estimación de exposiciones crediticias y la cuantificación general del riesgo. La capacidad de estos modelos para incorporar no sólo la aleatoriedad individual sino también la **correlación** entre diferentes factores es crucial para obtener simulaciones conjuntas que sean representativas de la realidad del mercado.

Este capítulo se adentra en los elementos constitutivos y las aplicaciones de los modelos estocásticos más relevantes en el contexto financiero. Iniciaremos explorando los **Fundamentos de un Modelo Estocástico** (Sección 2.4.1), identificando sus componentes esenciales como la deriva y la difusión, que dictan la tendencia y la magnitud de la aleatoriedad. A continuación, abordaremos una herramienta matemática clave para manejar la dependencia entre múltiples factores: la **Descomposición de Cholesky** (Sección 2.4.2), fundamental para la simulación correlacionada. Seguidamente, introduciremos el proceso estocástico más fundamental en finanzas de tiempo continuo, el **Movimiento Browniano** (Sección 2.4.3), base de muchos modelos posteriores. Desarrollaremos sobre este concepto para presentar el **Movimiento Geométrico Browniano** (Sección 2.4.4), el modelo canónico para la dinámica de precios de activos. Finalmente, exploraremos un modelo específico y ampliamente utilizado para la simulación de curvas de tasas de interés, el **Modelo Vasicek** (o una de sus variantes). A través de estas secciones, construiremos el conocimiento necesario para comprender cómo se modelan y simulan los factores de riesgo en la práctica financiera moderna.

2.4.1. Fundamentos de un Modelo Estocástico

Como se introdujo previamente, los **modelos estocásticos** son herramientas matemáticas esenciales para describir y simular la evolución temporal de los factores de riesgo financieros, cuya dinámica futura está sujeta a incertidumbre. En el contexto de las finanzas cuantitativas, particularmente para variables de tiempo continuo como precios de activos S o tasas de interés r , estos modelos se formulan frecuentemente a través de **Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (SDEs)**.

Una SDE proporciona una descripción concisa de cómo cambia una variable estocástica $X(t)$ en un intervalo de tiempo infinitesimal dt . La forma general de una SDE para un proceso unidimensional puede escribirse como:

$$dX(t) = a(X(t), t) dt + b(X(t), t) dW(t) \quad (2.13)$$

Esta ecuación descompone el cambio infinitesimal $dX(t)$ en dos componentes fundamentales que capturan la esencia de la dinámica estocástica:

1. Componente de Deriva (*Drift*): $a(X(t), t) dt$

Este término representa la parte **determinística** o **esperada** del cambio en $X(t)$ durante el intervalo dt . La función $a(X(t), t)$, conocida como la **función de deriva**, especifica la tasa de cambio promedio instantánea de $X(t)$, la cual puede depender del valor actual del proceso y del tiempo t . Esencialmente, dicta la **tendencia** o dirección promedio hacia la cual se espera que evolucione el proceso.

En modelos más simples, como el Movimiento Browniano aritmético con deriva constante μ , la función de deriva es simplemente $a(X(t), t) = \mu$. Para el Movimiento Geométrico Browniano utilizado para acciones, $a(S(t), t) = \mu S(t)$, donde μ es la tasa de rendimiento esperada instantánea.

La especificación de $a(X(t), t)$ es crucial y depende del contexto: bajo la **medida neutral al riesgo** ($\mathbb{Q}$) utilizada para valoración, μ se relaciona con la tasa libre de riesgo r y los dividendos δ (por ejemplo, $\mu = r - \delta$ para una acción); bajo la **medida real** ($\mathbb{P}$) utilizada para gestión de riesgos o predicción, μ reflejaría el rendimiento esperado real, a menudo estimado a partir de datos históricos o modelos económicos.

2. Componente de Difusión (*Diffusion*): $b(X(t), t) dW(t)$

Este término captura la parte **aleatoria** o **estocástica** del cambio en $X(t)$. Se compone a su vez de dos elementos:

- **Elemento Aleatorio Fundamental** ($dW(t)$): Representa el incremento infinitesimal de un **proceso de Wiener** estándar, también conocido como **Movimiento Browniano** $W(t)$. Este $dW(t)$ es la fuente del ruido.º la incertidumbre en el modelo. Se caracteriza por tener una media de cero $\mathbb{E}[dW(t)] = 0$ y una varianza igual al intervalo de tiempo $\text{Var}(dW(t)) = dt$. Los incrementos $dW(t)$ en intervalos de tiempo no solapados son independientes entre sí.
- **Función de Difusión o Volatilidad** ($b(X(t), t)$): Esta función actúa como un **factor de escala** para el ruido browniano $dW(t)$. Determina la **magnitud**

o **intensidad** de las fluctuaciones aleatorias alrededor de la deriva. Un valor mayor de $b(X(t), t)$ implica que el proceso es más sensible a los shocks aleatorios $dW(t)$, resultando en una mayor volatilidad. El cuadrado de esta función, $b(X(t), t)^2$, se conoce como el **coeficiente de difusión** y mide la contribución instantánea a la varianza del proceso por unidad de tiempo.

En modelos simples, $b(X(t), t)$ puede ser una constante σ , denominada la **volatilidad**. Para el Movimiento Geométrico Browniano, $b(S(t), t) = \sigma S(t)$.

La función $b(X(t), t)$ (o el parámetro σ) se relaciona directamente con la volatilidad del mercado, la cual puede estimarse a partir de *datos históricos* o, más comúnmente para valoración, calibrarse a las *volatilidades implícitas* observadas en los precios de mercado de las opciones.

2.4.2. Descomposición de Cholesky

La descomposición de Cholesky es una factorización matricial fundamental que se aplica a matrices Hermíticas definidas positivas, o en el caso más común de matrices reales, a matrices simétricas definidas positivas. Dada una matriz real simétrica definida positiva $\mathbf{A}$ de tamaño $n \times n$, la descomposición de Cholesky la factoriza de manera única en el producto de una matriz triangular inferior $\mathbf{L}$ con elementos diagonales estrictamente positivos y su traspuesta $\mathbf{L}^T$, tal como se expresa en la Ecuación (2.14):

$$\mathbf{A} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T \quad (2.14)$$

El propósito principal de esta descomposición es proporcionar una factorización eficiente y numéricamente estable, lo cual resulta particularmente útil para la generación de muestras de distribuciones normales multivariantes. Esta es una tarea central en la simulación de Monte Carlo dentro del campo de la ingeniería financiera (cf. Glasserman [2003], Sección 3.1.2).

En efecto, una de las aplicaciones más relevantes de la descomposición de Cholesky en finanzas cuantitativas es la generación de vectores aleatorios $\mathbf{X}$ que sigan una distribución normal multivariante con un vector de medias $\boldsymbol{\mu}$ y una matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$ específica, denotado como $\mathbf{X} \sim N(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma})$. Dado que la matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$ es, por naturaleza, simétrica y (asumiendo no degeneración) definida positiva, admite una descomposición de Cholesky única $\boldsymbol{\Sigma} = \mathbf{L}\mathbf{L}^T$. El procedimiento para generar un vector $\mathbf{X}$ con la distribución deseada, como se describe en Glasserman [2003], Sección 2.3.3, aplicado en Sección 3.1.2), consiste en los siguientes pasos: primero, se calcula la descomposición de Cholesky $\mathbf{L}$ de la matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$; segundo, se genera un vector $\mathbf{Z} = (Z_1, \dots, Z_n)^T$ de n variables aleatorias normales estándar independientes ($Z_i \sim N(0, 1)$, $E[\mathbf{Z}] = \mathbf{0}$, $\text{Cov}(\mathbf{Z}) = \mathbf{I}$); y tercero, se construye el vector aleatorio correlacionado $\mathbf{X}$ mediante la transformación lineal dada por la Ecuación (2.15):

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + \mathbf{L}\mathbf{Z} \quad (2.15)$$

Gracias a esta transformación, se garantiza que el vector $\mathbf{X}$ así generado tiene la media $\boldsymbol{\mu}$ y la matriz de covarianza $\boldsymbol{\Sigma}$ requeridas ($E[\mathbf{X}] = \boldsymbol{\mu}$ y $\text{Cov}(\mathbf{X}) = \mathbf{L}\mathbf{L}^T = \boldsymbol{\Sigma}$).

Esta técnica es, por tanto, indispensable para simular conjuntamente factores de riesgo financiero que exhiben correlaciones entre sí.

Para llevar a cabo esta transformación, es necesario calcular explícitamente la matriz $\mathbf{L}$. Los elementos L_{ij} de $\mathbf{L}$ (con $1 \leq j \leq i \leq n$, y $L_{ij} = 0$ si $j > i$) se pueden obtener secuencialmente. Las fórmulas para este cálculo son las siguientes: para los elementos diagonales ($i = j$), se utiliza la Ecuación (2.16):

$$L_{jj} = \sqrt{A_{jj} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{jk}^2} \quad (2.16)$$

donde la suma se considera cero si $j = 1$. Para los elementos que se encuentran estrictamente por debajo de la diagonal ($i > j$), la fórmula es la Ecuación (2.17):

$$L_{ij} = \frac{1}{L_{jj}} \left(A_{ij} - \sum_{k=1}^{j-1} L_{ik} L_{jk} \right) \quad (2.17)$$

donde, nuevamente, la suma es cero si $j = 1$. El cálculo práctico suele proceder columna por columna, de izquierda a derecha: se calcula L_{jj} y luego los L_{ij} para $i > j$. Es fundamental que la matriz $\mathbf{A}$ (o Σ en la aplicación de simulación) sea definida positiva, pues esto asegura que la cantidad bajo la raíz cuadrada en la Ecuación (2.16) es siempre positiva, garantizando la existencia de $\mathbf{L}$ con elementos reales.

La descomposición de Cholesky posee varias propiedades importantes:

- **Triangularidad Inferior:** La matriz $\mathbf{L}$ es triangular inferior por construcción.
- **Diagonal Positiva:** Los elementos diagonales L_{ii} son estrictamente positivos.
- **Unicidad:** Para una $\mathbf{A}$ definida positiva dada, la matriz $\mathbf{L}$ con diagonal positiva es única.
- **Estabilidad Numérica:** La descomposición es reconocida por su buena estabilidad numérica.
- **Eficiencia Computacional:** Requiere aproximadamente $(1/3)n^3$ operaciones de punto flotante.

Estas propiedades la convierten en una herramienta robusta y eficiente para las aplicaciones mencionadas, especialmente en el contexto de simulaciones financieras a gran escala.

2.4.3. Brownian Motion

Una característica omnipresente de los mercados financieros es la incertidumbre. Los precios de los activos financieros, como acciones o tipos de cambio, y variables económicas clave, como las tasas de interés, no evolucionan de manera predecible, sino que exhiben fluctuaciones constantes y, a menudo, erráticas (Hull, 2022). Ignorar esta aleatoriedad inherente limitaría severamente nuestra capacidad para valorar instrumentos financieros contingentes (derivados), cuantificar y gestionar el riesgo de mercado y de crédito (Gregory, 2020), y formular estrategias de inversión robustas. Mientras que los modelos financieros tradicionales a menudo se basan en expectativas determinísticas (Brealey et al., 2023; Damodaran, 2012), el desarrollo de la teoría financiera moderna, particularmente en el área de valoración de derivados, ha dependido críticamente de modelos que incorporan explícitamente la aleatoriedad a través de *procesos estocásticos* (Merton, 1973).

Un proceso estocástico puede entenderse como una variable cuyo valor evoluciona a lo largo del tiempo de una manera que es, al menos en parte, aleatoria. Formalmente, es una familia de variables aleatorias $\{X(t) \mid t \in T\}$ indexada por un conjunto T , que usualmente representa el tiempo (Shreve, 2004). Entre la diversidad de procesos estocásticos utilizados en finanzas, el *Movimiento Browniano* emerge como el pilar fundamental sobre el cual se construyen muchos de los modelos de tiempo continuo más influyentes y utilizados (Glasserman, 2003). Su estudio detallado es, por tanto, esencial para comprender la maquinaria matemática detrás de la valoración de derivados y la simulación financiera moderna.

El *Movimiento Browniano Estándar*, también conocido como *Proceso de Wiener* en honor a Norbert Wiener, es un proceso estocástico de tiempo continuo, denotado $\{W(t) \mid t \geq 0\}$, que se define rigurosamente a través de un conjunto de propiedades axiomáticas. Un proceso estocástico $W = \{W(t) \mid t \geq 0\}$ definido sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ y adaptado a una filtración $\{\mathcal{F}_t \mid t \geq 0\}$ es un Movimiento Browniano Estándar si cumple (Shreve, 2004; Glasserman, 2003):

1. **Valor Inicial:** $W(0) = 0$ casi seguramente (c.s.). El proceso parte del origen en el tiempo cero.
2. **Trayectorias Continuas:** Las funciones $t \mapsto W(t, \omega)$ son continuas en t para casi todo $\omega \in \Omega$. Esto significa que el proceso no experimenta saltos instantáneos; su evolución, aunque errática, es continua.
3. **Incrementos Independientes:** Para cualquier partición de tiempos $0 \leq t_0 < t_1 < \dots < t_n$, los incrementos $W(t_1) - W(t_0), W(t_2) - W(t_1), \dots, W(t_n) - W(t_{n-1})$ son variables aleatorias mutuamente independientes. El movimiento futuro del proceso, dado su valor actual, es independiente de su historia pasada.
4. **Incrementos Normales y Estacionarios:** Para cualesquiera $0 \leq s < t$, el incremento $W(t) - W(s)$ sigue una distribución normal (Gaussiana) con media cero y varianza igual a la duración del intervalo de tiempo, $t - s$. Simbólicamente:

$$W(t) - W(s) \sim \mathcal{N}(0, t - s) \quad (2.18)$$

La distribución del incremento solo depende de la longitud del intervalo $(t - s)$, no de su posición en el tiempo (estacionalidad de los incrementos). De esto se deduce que $W(t) \sim \mathcal{N}(0, t)$.

Estas propiedades definen un proceso con una estructura muy rica, capaz de capturar la idea de ruido blanco acumulado o la trayectoria de una partícula sujeta a innumerables colisiones aleatorias. En finanzas, $W(t)$ representa la fuente fundamental de incertidumbre o "ruido" de mercado en muchos modelos (Hull, 2022).

El Movimiento Browniano Estándar posee varias propiedades matemáticas notables que son cruciales para su aplicación en cálculo estocástico y finanzas:

- **No Diferenciabilidad:** A pesar de tener trayectorias continuas, con probabilidad 1, una trayectoria de Movimiento Browniano no es diferenciable en ningún punto $t > 0$ (Shreve, 2004). Las trayectorias son infinitamente "dentadas".
- **Variación Cuadrática Finita y No Nula:** Posee una variación cuadrática finita y determinística sobre $[0, t]$ (Shreve, 2004):

$$[W, W]_t = \lim_{\|\Pi\| \rightarrow 0} \sum_{i=0}^{n-1} (W(t_{i+1}) - W(t_i))^2 = t \quad (2.19)$$

Intuitivamente, $(dW(t))^2 \approx dt$, lo cual es clave para el Lema de Itô.

- **Propiedad de Martingala:** $W(t)$ es una martingala respecto a su filtración natural (Shreve, 2004):

$$\mathbb{E}[W(t) \mid \mathcal{F}_s] = W(s) \quad \text{para } s < t \quad (2.20)$$

El mejor pronóstico para el valor futuro es su valor actual.

- **Propiedad de Markov:** La distribución futura, dada la historia hasta s , solo depende del valor actual $W(s)$ (Glasserman, 2003).

$$\mathbb{P}(W(t) \in A \mid \mathcal{F}_s) = \mathbb{P}(W(t) \in A \mid W(s)) \quad (2.21)$$

La intuición del Movimiento Browniano proviene de su conexión con los paseos aleatorios discretos. Un paseo aleatorio simple donde en cada intervalo Δt la posición cambia en $\pm \sigma \sqrt{\Delta t}$ con igual probabilidad, converge a un Movimiento Browniano con volatilidad σ cuando $\Delta t \rightarrow 0$ (Hull, 2022; Glasserman, 2003). Esto justifica su uso para modelar fluctuaciones de precios y fundamenta su simulación numérica.

Para describir procesos con tendencia o volatilidad diferente a la estándar, se usa el *Movimiento Browniano con deriva μ y coeficiente de difusión σ^2* (Movimiento Browniano Aritmético). Un proceso $\{X(t) \mid t \geq 0\}$ sigue un $BM(\mu, \sigma^2)$ si (Shreve, 2004; Glasserman, 2003):

$$X(t) = X(0) + \mu t + \sigma W(t) \quad (2.22)$$

donde μ es la *tasa de deriva* constante (tendencia promedio) y $\sigma > 0$ es la *volatilidad* constante (escala del ruido). $X(0)$ es el valor inicial. El valor esperado y la varianza son:

$$\mathbb{E}[X(t)] = X(0) + \mu t \quad (2.23)$$

$$Var(X(t)) = \sigma^2 t \quad (2.24)$$

Este modelo es un bloque de construcción esencial, por ejemplo, para el logaritmo del precio en el modelo GBM ([Black and Scholes, 1973; Hull, 2022]).

La simulación de trayectorias de Movimiento Browniano es clave para los métodos de Monte Carlo ([Glasserman, 2003]). El método directo se basa en la *construcción recursiva*. Para simular $\{W(t_i)\}$ en una malla $0 = t_0 < \dots < t_n = T$:

1. $W(t_0) = 0$.
2. Para $i = 0, \dots, n - 1$: generar $Z_{i+1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ independiente y calcular:

$$W(t_{i+1}) = W(t_i) + \sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1} \quad (2.25)$$

Para simular $X(t) \sim BM(\mu, \sigma^2)$:

$$X(t_{i+1}) = X(t_i) + \mu(t_{i+1} - t_i) + \sigma\sqrt{t_{i+1} - t_i} Z_{i+1} \quad (2.26)$$

Este método es exacto en los puntos t_i .

En conclusión, el Movimiento Browniano es un concepto matemático fundamental en finanzas cuantitativas. Sus propiedades lo convierten en el principal impulsor de aleatoriedad en modelos de tiempo continuo. Es la base para el Movimiento Geométrico Browniano ([Hull, 2022]), central en Black-Scholes-Merton ([Black and Scholes, 1973; Merton, 1973]), y componente en modelos de tasas de interés, volatilidad estocástica y marcos generales ([Shreve, 2004]). Aunque existen modelos más complejos para capturar fenómenos empíricos no abarcados por el MB simple (colas pesadas, saltos, volatilidad variable), estos a menudo lo extienden en lugar de reemplazarlo. Su comprensión sigue siendo indispensable en la teoría y práctica financiera.

2.4.4. Geometric Brownian Motion

Si bien el Movimiento Browniano Aritmético proporciona un modelo útil para variables que pueden tomar valores tanto positivos como negativos, no es directamente adecuado para modelar precios de activos como acciones o tipos de cambio, los cuales, debido a la responsabilidad limitada o a su propia naturaleza, no pueden ser negativos. Un modelo que decrezca siguiendo un Movimiento Browniano Aritmético podría eventualmente predecir precios negativos con probabilidad positiva (Hull, 2022).

Para abordar esta limitación y capturar la observación empírica de que los inversores suelen pensar en términos de tasas de rendimiento porcentuales, se introduce el *Movimiento Geométrico Browniano (GBM)*. El GBM asume que el cambio porcentual instantáneo en el precio del activo sigue un proceso con deriva y volatilidad constantes. Formalmente, un proceso estocástico $\{S(t) \mid t \geq 0\}$ sigue un Movimiento Geométrico Browniano si satisface la siguiente Ecuación Diferencial Estocástica (SDE) (Hull, 2022; Shreve, 2004):

$$\frac{dS(t)}{S(t)} = \mu dt + \sigma dW(t) \quad (2.27)$$

o, escrita en términos del cambio absoluto $dS(t)$:

$$dS(t) = \mu S(t)dt + \sigma S(t)dW(t) \quad (2.28)$$

donde:

- $S(t)$ es el precio del activo en el tiempo t .
- μ es la *tasa de rendimiento esperada* constante (deriva porcentual) del activo por unidad de tiempo.
- $\sigma > 0$ es la *volatilidad* constante de los rendimientos del activo por unidad de tiempo.
- $W(t)$ es un Movimiento Browniano Estándar que representa la fuente de aleatoriedad.

La SDE (2.28) indica que el cambio instantáneo en el precio $dS(t)$ tiene dos componentes: una parte predecible o deriva, $\mu S(t)dt$, proporcional al precio actual; y una parte aleatoria o de difusión, $\sigma S(t)dW(t)$, también proporcional al precio actual y cuya magnitud aleatoria viene dada por el incremento del Movimiento Browniano $dW(t)$ escalado por la volatilidad σ .

Una propiedad fundamental del GBM es su relación con el Movimiento Browniano Aritmético. Aplicando el Lema de Itô (Shreve, 2004) a la función $f(S) = \log S$, podemos derivar la dinámica del logaritmo del precio:

$$d(\log S(t)) = \left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2 \right) dt + \sigma dW(t) \quad (2.29)$$

Esta ecuación muestra que el logaritmo del precio, $X(t) = \log S(t)$, sigue un Movimiento Browniano Aritmético con una deriva constante igual a $(\mu - \sigma^2/2)$ y una volatilidad constante σ . El término $-\frac{1}{2}\sigma^2$ es una corrección crucial que surge de la aplicación del Lema de Itô, a menudo denominada corrección por convexidad.

Dado que conocemos la solución para el Movimiento Browniano Aritmético (Ecuación 2.22), podemos integrar la Ecuación (2.29) para obtener $\log S(t) = \log S(0) + (\mu - \sigma^2/2)t + \sigma W(t)$. Exponenciando ambos lados, obtenemos la solución explícita para el precio del activo $S(t)$ que sigue un GBM, dado su valor inicial $S(0)$ (Hull, 2022; Shreve, 2004):

$$S(t) = S(0) \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W(t) \right) \quad (2.30)$$

Esta forma es extremadamente útil tanto para el análisis teórico como para la simulación numérica. Como el exponente en (2.30) contiene $W(t)$ que es normal, $S(t)$ sigue una *distribución lognormal*. Una consecuencia importante es que si $S(0) > 0$, entonces $S(t)$ permanecerá positivo para todo $t > 0$ casi seguramente, resolviendo así el problema del Movimiento Browniano Aritmético para precios de activos.

Es importante interpretar correctamente los parámetros del modelo GBM:

- **Deriva (μ):** Representa la *tasa de rendimiento instantánea esperada* del activo $S(t)$. Es decir, $\mathbb{E}[dS(t)/S(t)] = \mu dt$. Si el activo no paga dividendos, en un contexto de valoración neutral al riesgo, μ se reemplaza por la tasa libre de riesgo r . Si paga un dividendo continuo q , se reemplaza por $r - q$ (Hull, 2022). En un contexto de simulación bajo la medida real (física o P), μ representa la expectativa real del rendimiento del inversor.
- **Volatilidad (σ):** Representa la *desviación estándar instantánea de la tasa de rendimiento* del activo. Cuantifica la magnitud de las fluctuaciones aleatorias porcentuales alrededor de la deriva esperada. σ^2 es la varianza instantánea de la tasa de rendimiento. Este parámetro es crucial para la valoración de opciones, ya que mide la incertidumbre sobre el precio futuro del activo.

En el modelo GBM estándar, tanto μ como σ se asumen constantes a lo largo del tiempo.

El Movimiento Geométrico Browniano adquirió una prominencia extraordinaria en finanzas debido a que es la hipótesis central sobre la dinámica del precio del activo subyacente en el revolucionario modelo de valoración de opciones de Black, Scholes y Merton (Black and Scholes, 1973; Merton, 1973). La elección del GBM fue crucial por varias razones:

1. Garantiza precios positivos.
2. Implica que los rendimientos continuos son normales, una aproximación razonable (aunque imperfecta) de la realidad.
3. Permite la construcción de una cartera de replicación dinámica (delta-hedging).
4. Conduce, bajo el marco de valoración neutral al riesgo (donde $\mu = r$ o $r - q$), a una fórmula analítica cerrada para el precio de las opciones europeas (Hull, 2022).

Aunque los modelos posteriores han relajado la hipótesis de GBM para capturar características más complejas del mercado, el modelo basado en GBM sigue siendo un punto de referencia fundamental y una herramienta ampliamente utilizada.

La simulación de trayectorias de GBM es esencial para los métodos de Monte Carlo aplicados a la valoración de opciones exóticas, la estimación de métricas de riesgo como el Valor en Riesgo (VaR), o el cálculo de exposiciones crediticias para ajustes xVA (Glasserman, 2003; Gregory, 2020).

Dada la solución explícita (2.30), la forma más precisa y común de simular un paso de $S(t_i)$ a $S(t_{i+1})$ en una malla de tiempo $0 = t_0 < \dots < t_n = T$ es utilizando directamente la relación lognormal. Sea $\Delta t = t_{i+1} - t_i$:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp \left(\left(\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) \Delta t + \sigma \sqrt{\Delta t} Z_{i+1} \right) \quad (2.31)$$

donde Z_{i+1} es una variable aleatoria extraída de una distribución normal estándar $\mathcal{N}(0, 1)$, independiente de las anteriores. Este método es preferible a discretizaciones directas de la SDE como Euler-Maruyama para el GBM, ya que es exacto en el sentido de que la distribución de $S(t_{i+1})$ condicional a $S(t_i)$ es la correcta según el modelo (Glasserman, 2003).

Partiendo de $S(t_0) = S(0)$, se aplica la Ecuación (2.31) recursivamente para generar una trayectoria completa $\{S(t_0), S(t_1), \dots, S(t_n)\}$. Repitiendo este proceso muchas veces con diferentes secuencias de Z_i , se obtiene un conjunto de trayectorias simuladas que pueden ser utilizadas para análisis estadísticos o de valoración.

A pesar de su elegancia matemática y su éxito en el marco BSM, el modelo GBM estándar se basa en supuestos que no siempre se cumplen en los mercados reales (Hull, 2022):

- **Parámetros Constantes:** Asume que la deriva μ y la volatilidad σ son constantes, mientras que empíricamente la volatilidad varía en el tiempo y depende del precio del activo (volatility smile/skew).
- **Rendimientos Log-Normales:** Implica que los rendimientos logarítmicos son normales, pero los datos reales a menudo muestran colas más pesadas (leptokurtosis), indicando que los movimientos extremos son más probables de lo que predice la distribución normal.
- **Trayectorias Continuas:** Asume que los precios cambian continuamente, sin saltos. Los mercados reales pueden experimentar movimientos súbitos y discontinuos (jumps) debido a noticias o eventos significativos.

Estas limitaciones han impulsado el desarrollo de modelos más sofisticados (volatilidad estocástica, modelos de salto-difusión, procesos de Lévy). Sin embargo, el GBM sigue siendo una herramienta fundamental por su simplicidad, interpretabilidad y por ser la base sobre la cual se construyen o comparan muchos de estos modelos avanzados. Su comprensión es esencial para la ingeniería financiera moderna.

2.4.5. Proyección de Tasas de Interés

La gestión eficaz de portafolios de renta fija y la valoración de instrumentos financieros sensibles a las tasas de interés requieren inevitablemente una forma de proyectar o anticipar la evolución futura de las tasas. Dos actividades fundamentales para un gestor

son la determinación del valor razonable de los bonos y derivados de tasas de interés, y la evaluación del desempeño potencial de un portafolio bajo diferentes escenarios futuros de tasas. Dado que las tasas de interés futuras son inherentemente inciertas, se necesita un marco formal para describir esta incertidumbre: un **modelo de tasas de interés**.

Un modelo de tasas de interés, en esencia, es una descripción probabilística de cómo pueden cambiar las tasas (nominales, en el contexto más habitual) a lo largo del tiempo. Proporciona una estructura matemática para representar la incertidumbre sobre la evolución futura de la estructura temporal de tasas de interés (ETTI). La herramienta matemática comúnmente utilizada para describir el movimiento dinámico de las tasas, incorporando sus propiedades estadísticas clave, es el lenguaje de las **Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (SDEs)**. Aunque un tratamiento riguroso requiere cálculo estocástico, sus elementos básicos son esenciales para comprender cómo se modela la dinámica de las tasas.

Las propiedades estadísticas fundamentales que un modelo de tasas de interés busca capturar son:

1. **Deriva (*Drift*)**: La tendencia o dirección esperada del cambio en las tasas de interés.
2. **Volatilidad (*Volatility*)**: La magnitud o intensidad de las fluctuaciones aleatorias alrededor de la deriva.
3. **Reversión a la Media (*Mean Reversion*)**: La tendencia observada en muchas tasas de interés de gravitar hacia un nivel promedio de largo plazo. Cuando las tasas están por encima de este nivel, tienden a bajar, y viceversa.

Los modelos más comunes en la práctica, especialmente por su relativa simplicidad, son los **modelos de un factor**. Estos modelos asumen que la dinámica de toda la curva de tasas está impulsada por la evolución estocástica de una única variable subyacente, usualmente la **tasa de interés a corto plazo** (o tasa corta, r). Se postula un proceso estocástico para $r(t)$, y luego, mediante argumentos de ausencia de arbitraje, se derivan las tasas para todos los demás vencimientos. Aunque existen modelos multifactoriales (e.g., incorporando una tasa de largo plazo como segundo factor) que pueden capturar de forma más rica los movimientos de la curva (como cambios en la pendiente y curvatura), los modelos de un factor siguen siendo ampliamente utilizados debido a su manejabilidad y al hecho empírico de que una gran parte de la variación de la curva de tasas puede explicarse por un movimiento paralelo (un solo factor de "nivel").

La dinámica de la tasa corta $r(t)$ en un modelo de un factor se describe típicamente mediante una SDE de tiempo continuo. Una forma general, conocida como **proceso de Itô**, es:

$$dr(t) = b(r, t)dt + \sigma(r, t)dz(t) \quad (2.32)$$

donde:

- $dr(t)$ es el cambio infinitesimal en la tasa corta.
- dt es el intervalo infinitesimal de tiempo.

- $b(r, t)$ es la función de **deriva**, que describe la tendencia esperada del cambio en r , pudiendo depender del nivel actual de la tasa r y del tiempo t .
- $\sigma(r, t)$ es la función de **volatilidad**, que determina la magnitud de las fluctuaciones aleatorias, pudiendo también depender de r y t .
- $dz(t)$ representa el incremento de un proceso de Wiener o Movimiento Browniano estándar, $dz(t) \sim \mathcal{N}(0, dt)$, siendo la fuente de aleatoriedad. $z(t)$ es un proceso aleatorio que sigue una distribución normal con media cero y varianza t .

La ecuación (2.32) expresa que el cambio en la tasa corta (dr) en un pequeño intervalo de tiempo (dt) se compone de una parte determinística o esperada ($b(r, t)dt$) y una parte aleatoria ($\sigma(r, t)dz(t)$) cuya magnitud depende de la volatilidad.

Diferentes especificaciones para las funciones de deriva $b(r, t)$ y volatilidad $\sigma(r, t)$ dan lugar a distintos modelos de tasa corta. Una especificación común para la deriva incorpora la **reversión a la media** hacia un nivel de largo plazo $\bar{r}$ con una velocidad de ajuste α :

$$b(r, t) = \alpha(\bar{r} - r) \quad \text{o} \quad b(r, t) = \kappa(\theta(t) - r) \quad (2.33)$$

donde κ (o α) es la velocidad de reversión y $\theta(t)$ (o $\bar{r}$) es el nivel de reversión (que puede ser constante o dependiente del tiempo, como en el modelo Hull-White).

Para la volatilidad $\sigma(r, t)$, diversas formas funcionales han sido propuestas, a menudo dentro del marco del modelo de **Elasticidad Constante de la Varianza (CEV)**:

$$\sigma(r, t) = \sigma r^\gamma \quad (2.34)$$

donde γ es la elasticidad constante. Casos notables incluyen:

- $\gamma = 0$: Volatilidad constante, $\sigma(r, t) = \sigma$. Es el caso del modelo de Vasicek y del modelo de Hull-White. Se denomina **modelo normal**. Una característica es que puede generar tasas negativas.
- $\gamma = 1$: Volatilidad proporcional a la tasa, $\sigma(r, t) = \sigma r$. Se denomina **modelo log-normal** (o de volatilidad proporcional, como Dothan). Impide tasas negativas.
- $\gamma = 1/2$: Volatilidad proporcional a la raíz cuadrada de la tasa, $\sigma(r, t) = \sigma\sqrt{r}$. Es el caso del modelo de Cox-Ingersoll-Ross (CIR). También impide tasas negativas.

La elección de la forma funcional para la deriva y la volatilidad, junto con la metodología de calibración, distingue entre dos grandes categorías de modelos: **modelos de equilibrio** y **modelos sin arbitraje (o ajustados a la curva)**. Los modelos de equilibrio (como Vasicek, CIR) parten de supuestos económicos fundamentales y derivan una familia específica de curvas de tasas; su calibración se basa en estimaciones econométricas de los parámetros $(\alpha, \bar{r}, \sigma)$ y no garantizan coincidir con los precios de mercado actuales. En contraste, los modelos sin arbitraje (como Ho-Lee, Hull-White, Black-Derman-Toy, HJM) toman la curva de tasas actual observada en el mercado como un input y ajustan sus parámetros (a menudo un componente dependiente del tiempo en la deriva, como $\theta(t)$ en Hull-White) para reproducir exactamente los precios de mercado de un conjunto

de instrumentos de referencia (bonos). Estos modelos son preferidos en la práctica para valoración y cobertura, ya que aseguran la consistencia con los precios de mercado actuales.

La selección de un modelo específico (e.g., normal vs. lognormal, con o sin reversión a la media) depende de varios factores, incluyendo la evidencia empírica sobre el comportamiento de las tasas (relación volatilidad-nivel, probabilidad de tasas negativas), la facilidad de calibración e implementación, y la capacidad del modelo para valorar consistentemente los instrumentos de interés. Aunque históricamente se pensaba que los modelos normales eran problemáticos por permitir tasas negativas, estudios empíricos y prácticos sugieren que, para niveles de tasas no extremadamente bajos y parámetros razonables, la probabilidad de generar tasas significativamente negativas es baja, y el impacto en la valoración puede no ser crítico para muchos instrumentos. Por ello, modelos normales con reversión a la media y ajuste a la curva, como el de Hull-White, siguen siendo herramientas populares y valiosas para la proyección estocástica de tasas de interés en aplicaciones financieras.

2.4.6. Modelo de Tasa Corta de Hull-White

Los modelos de tasa corta buscan describir la evolución estocástica de la tasa de interés instantánea libre de riesgo, $r(t)$. El modelo de Hull-White, introducido por John Hull y Alan White en 1990, es una extensión del influyente modelo de Vasicek (Vasicek, 1977) y se ha consolidado como un estándar en la industria para la valoración de derivados de tasas de interés (Hull and White, 1990). Su principal ventaja radica en que, si bien conserva la tratabilidad analítica y la propiedad de reversión a la media del modelo de Vasicek, está diseñado para ser **libre de arbitraje**, es decir, se ajusta perfectamente a la estructura temporal de tasas de interés (ETTI) observada en el mercado en cualquier momento.

Esta propiedad de ajuste al mercado es lo que distingue a Hull-White como un modelo de **no-arbitraje**, en contraposición a los modelos de equilibrio como el de Vasicek. Para la valoración de derivados y el cálculo de exposiciones como el CVA, esta característica es indispensable, ya que asegura que la valoración del modelo sea consistente con los precios de mercado observables.

2.4.6.1. De Vasicek a Hull-White: La Evolución Clave

El modelo de Vasicek postula que la dinámica de la tasa corta sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck con reversión a una media constante, b :

$$dr(t) = \kappa(b - r(t))dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t) \quad (2.35)$$

La limitación fundamental de esta formulación para el pricing es que la media constante b y los demás parámetros, al ser estimados históricamente, no garantizan que el modelo reproduzca la curva de tipos actual.

El modelo de Hull-White resuelve esta deficiencia de manera elegante. En lugar de una media constante, introduce una **media dependiente del tiempo**, lo que se logra reemplazando el término de drift. La SDE del modelo de Hull-White bajo la medida

neutral al riesgo $\mathbb{Q}$ es:

$$dr(t) = (\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW^{\mathbb{Q}}(t) \quad (2.36)$$

donde:

- $r(t)$ es la tasa corta instantánea en el tiempo t .
- $a > 0$ es la *velocidad de reversión a la media* constante (equivalente a κ en Vasicek).
- $\sigma > 0$ es la *volatilidad* constante de la tasa corta.
- $W^{\mathbb{Q}}(t)$ es un Movimiento Browniano Estándar bajo la medida neutral al riesgo $\mathbb{Q}$.
- $\theta(t)$ es una **función determinística del tiempo**, cuidadosamente elegida para asegurar que el modelo se ajuste a la ETTI del mercado.

La tasa ahora revierte hacia un nivel $\theta(t)/a$, que se mueve con el tiempo. Para lograr el ajuste perfecto, $\theta(t)$ se define en función de la curva de tasas forward instantáneas del mercado, $f(0, t)$:

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + af(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad (2.37)$$

Esta función actúa como un "parámetro de ajuste" que alinea la deriva del modelo con las expectativas de tasas futuras implícitas en la curva de mercado actual.

2.4.6.2. Propiedades y Tratabilidad Analítica

Al igual que Vasicek, el modelo de Hull-White es un **modelo afín** y **Gaussiano**, lo que le confiere propiedades muy deseables:

- **Permite Tasas Negativas:** La naturaleza Gaussiana del término de shock implica que $r(t)$ puede tomar valores negativos. Si bien esto fue visto como una desventaja en el pasado, la experiencia de mercado en varias economías importantes ha demostrado que esta es una característica realista y necesaria (Hull, 2022).
- **Fórmulas Analíticas para Bonos:** La estructura afín del modelo permite obtener una solución analítica cerrada para los precios de los bonos cupón cero. El precio en el tiempo t de un bono con vencimiento en T , $P(t, T)$, es (Shreve, 2004):

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (2.38)$$

donde las funciones $B(t, T)$ y $A(t, T)$ son determinísticas:

$$B(t, T) = \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \quad (2.39)$$

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + B(t, T)f(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1 - e^{-2at})B(t, T)^2 \quad (2.40)$$

Estas fórmulas son la base para la valoración eficiente y precisa de derivados y la construcción de curvas de descuento simuladas consistentes.

La simulación de trayectorias de la tasa corta $r(t)$ también es eficiente y se realiza mediante una discretización de la SDE, como la de Euler-Maruyama:

$$r(t_{i+1}) = r(t_i) + (\theta(t_i) - ar(t_i))\Delta t + \sigma\sqrt{\Delta t}Z_{i+1} \quad (2.41)$$

donde $Z_{i+1} \sim \mathcal{N}(0, 1)$ es una variable aleatoria normal estándar independiente (que en un modelo integrado se deriva de un proceso correlacionado).

2.4.6.3. Ventajas y Desventajas en la Práctica

Las principales **ventajas** del modelo Hull-White, que motivan su elección para este trabajo, son:

- **Es libre de arbitraje:** Se ajusta perfectamente a la curva de rendimientos inicial, lo cual es esencial para el pricing.
- **Conserva la reversión a la media:** Una propiedad económica fundamental de las tasas de interés.
- **Es analíticamente tratable:** Ofrece fórmulas cerradas para bonos y opciones europeas, lo que lo hace computacionalmente eficiente.
- **Es flexible:** Puede manejar tasas de interés negativas.

Sus **desventajas** son inherentes a su simplicidad como modelo de un solo factor:

- La volatilidad σ es constante, mientras que en la realidad tiende a ser estocástica y dependiente del nivel de la tasa.
- Al ser un modelo de un solo factor, asume que todos los movimientos de la curva de tasas están perfectamente correlacionados, lo que no permite capturar cambios en la pendiente y la curvatura de forma independiente.

A pesar de estas limitaciones, el modelo de Hull-White de un factor representa un equilibrio óptimo entre realismo económico, consistencia teórica y tratabilidad computacional, convirtiéndolo en una herramienta robusta y ampliamente aceptada para la valoración de derivados de tasas de interés y el cálculo de exposiciones como CVA y DVA.

2.5. Simulación de Monte Carlo

La simulación de Monte Carlo constituye una clase de algoritmos computacionales que se basan en el muestreo aleatorio repetido para obtener resultados numéricos aproximados a problemas que son analíticamente intratables o computacionalmente prohibitivos por otros medios (Glasserman, 2003). El nombre, acuñado por Ulam, Metropolis y von Neumann, hace referencia al casino de Monte Carlo, evocando la naturaleza inherentemente aleatoria del método. Su aplicación se extiende a una vasta gama de campos, incluyendo la física, la ingeniería, la estadística y, de manera prominente, las finanzas cuantitativas (Hull, 2022).

El fundamento matemático de la simulación de Monte Carlo reside en la *Ley de los Grandes Números* y el *Teorema Central del Límite*. Si se desea estimar una cantidad α que puede ser expresada como el valor esperado de una función g de una variable aleatoria (o vector aleatorio) X , es decir, $\alpha = \mathbb{E}[g(X)]$, el método procede generando una secuencia de N realizaciones independientes e idénticamente distribuidas (i.i.d.) $X_1, X_2, \dots, X_N$ de X . El estimador de Monte Carlo para α es el promedio muestral de $g(X_i)$:

$$\hat{\alpha}_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N g(X_i) \quad (2.42)$$

Por la Ley Fuerte de los Grandes Números, $\hat{\alpha}_N \rightarrow \alpha$ casi seguramente a medida que $N \rightarrow \infty$. Además, si la varianza de $g(X)$, $\text{Var}(g(X)) = \sigma_g^2$, es finita, el Teorema Central del Límite establece que para N suficientemente grande, el error del estimador, $\hat{\alpha}_N - \alpha$, se aproxima a una distribución normal con media 0 y varianza σ_g^2/N . Esto implica que el error estándar del estimador de Monte Carlo disminuye a una tasa de $O(1/\sqrt{N})$, lo que se conoce como convergencia de Monte Carlo estándar (Glasserman, 2003).

En el ámbito financiero, la aplicación más directa de la simulación de Monte Carlo es la valoración de instrumentos derivados. Muchos derivados, especialmente aquellos con características exóticas o dependientes de la trayectoria, no poseen soluciones analíticas cerradas para sus precios. La teoría de valoración de activos por ausencia de arbitraje establece que el precio V_0 de un derivado con payoff $P(S_T)$ en el tiempo T , donde S_T es el estado del activo subyacente en T , puede expresarse como un valor esperado descontado bajo una medida de probabilidad neutral al riesgo Q : $V_0 = \mathbb{E}_Q[e^{-\int_0^T r(u)du} P(S_T)]$ (Shreve, 2004; Hull, 2022). La simulación de Monte Carlo permite estimar esta expectativa mediante los siguientes pasos:

1. **Modelado Estocástico:** Se especifica la dinámica del activo o activos subyacentes $S(t)$ bajo la medida neutral al riesgo Q , típicamente mediante una o varias Ecuaciones Diferenciales Estocásticas (SDEs), como por ejemplo el Movimiento Geométrico Browniano.
2. **Generación de Trayectorias:** Se simulan N trayectorias discretas del proceso $S(t)$ desde el tiempo 0 hasta el tiempo T (o las fechas relevantes del payoff). Esto implica discretizar la SDE (e.g., usando esquemas como Euler-Maruyama o Milstein, o soluciones exactas si están disponibles como en el GBM) y generar los incrementos aleatorios necesarios, usualmente a partir de variables normales estándar.
3. **Cálculo del Payoff y Descuento:** Para cada trayectoria simulada i , se calcula el payoff del derivado $P(S_T^{(i)})$ y se descuenta al tiempo presente, $Y_i = e^{-\int_0^T r(u)du} P(S_T^{(i)})$.
4. **Estimación del Valor:** El precio estimado del derivado es el promedio de los Y_i según la Ecuación (2.42).

La generalidad de este enfoque es una de sus mayores fortalezas. Permite manejar múltiples factores de riesgo correlacionados mediante la generación de vectores aleatorios multivariantes (a menudo utilizando la descomposición de Cholesky de la matriz de covarianza para transformar ruidos independientes en correlacionados), derivados con pagos intermedios, y opciones con características de ejercicio complejo (aunque las opciones

americanas requieren técnicas más sofisticadas como la simulación hacia adelante con regresión, conocida como el método de Mínimos Cuadrados de Monte Carlo) (Glasserman, 2003).

A pesar de su flexibilidad, la tasa de convergencia $O(1/\sqrt{N})$ puede hacer que la simulación de Monte Carlo sea computacionalmente costosa para alcanzar altos niveles de precisión. Esto ha motivado una extensa investigación en *técnicas de reducción de varianza*, diseñadas para disminuir la varianza del estimador σ_g^2 o, equivalentemente, reducir el número de simulaciones N necesarias para un error estándar dado. Entre las técnicas más comunes se encuentran (Glasserman, 2003; Hull, 2022):

- **Variables Antitéticas:** Se generan pares de trayectorias correlacionadas negativamente para inducir una cancelación de errores.
- **Variables de Control:** Se utiliza la correlación con otra variable aleatoria cuyo valor esperado se conoce analíticamente para reducir la varianza.
- **Muestreo por Importancia (*Importance Sampling*):** Se modifica la distribución de muestreo para concentrar las simulaciones en regiones que contribuyen más al valor esperado.
- **Muestreo Estratificado y por Conglomerados (*Latin Hypercube Sampling*):** Se divide el dominio de las variables de entrada para asegurar una cobertura más uniforme del espacio de muestreo.

Adicionalmente, los *métodos Quasi-Monte Carlo* reemplazan las secuencias de números pseudoaleatorios por secuencias determinísticas de baja discrepancia (e.g., secuencias de Sobol o Halton) que llenan el espacio de integración de manera más uniforme. Para ciertas clases de problemas, particularmente aquellos con una dimensionalidad efectiva baja y funciones suaves, los métodos Quasi-Monte Carlo pueden lograr tasas de convergencia más rápidas, a veces cercanas a $O(1/N)$ (Glasserman, 2003).

2.6. Generación de números aleatorios

La piedra angular de cualquier simulación de Monte Carlo es la capacidad de generar secuencias de números que se comporten, para fines prácticos, como realizaciones de variables aleatorias independientes extraídas de una distribución de probabilidad específica (Glasserman, 2003). Aunque el término "número aleatorio" se usa comúnmente, las computadoras digitales son máquinas determinísticas y, por lo tanto, no pueden producir números verdaderamente aleatorios. En su lugar, se utilizan *generadores de números pseudoaleatorios* (PRNGs), que son algoritmos que producen secuencias de números que parecen aleatorios y pasan diversas pruebas estadísticas de aleatoriedad.

El bloque de construcción fundamental para la generación de números aleatorios es el generador de números uniformes. Un PRNG típicamente produce una secuencia de enteros que luego se escalan para producir números $U_1, U_2, \dots$ que se aproximan a realizaciones independientes de una variable aleatoria uniforme en el intervalo $(0, 1)$, denotada $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$ (Glasserman, 2003). La calidad de un PRNG se evalúa por varias propiedades, incluyendo la longitud de su período (el número de valores antes de que la secuencia

comience a repetirse), su estructura de red o reticular en múltiples dimensiones (para evitar patrones indeseados cuando se usan para generar vectores aleatorios), y su eficiencia computacional.

Los generadores congruenciales lineales (LCGs) fueron históricamente populares debido a su simplicidad, pero a menudo sufren de períodos cortos y malas propiedades dimensionales. Generadores más modernos y robustos, como los generadores de Fibonacci retardados, los generadores basados en registros de desplazamiento con retroalimentación generalizada (GFSR), o el algoritmo Mersenne Twister, ofrecen períodos extremadamente largos y mejores propiedades estadísticas, siendo preferidos en aplicaciones financieras serias (Glasserman, 2003).

Una vez que se dispone de un generador fiable de números uniformes $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$, el siguiente paso es transformar estas muestras uniformes en muestras de otras distribuciones de probabilidad necesarias para la simulación, como la distribución normal, exponencial, gamma, etc. Existen varios métodos generales para esta transformación (Glasserman, 2003; Hull, 2022):

- **Método de la Transformada Inversa (Inverse Transform Method):** Este método se basa en el hecho de que si $F(x)$ es la función de distribución acumulada (FDA) continua y estrictamente creciente de una variable aleatoria X , y $F^{-1}(u)$ es su inversa (la función cuantil), entonces si $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$, la variable aleatoria $X = F^{-1}(U)$ tiene la distribución F . Es decir, para generar una muestra de X , se genera U y se calcula $X = F^{-1}(U)$. Este método es conceptualmente simple y aplicable siempre que F^{-1} pueda calcularse eficientemente. Es el método estándar, por ejemplo, para generar variables exponenciales. Aunque la FDA normal no tiene una inversa en forma cerrada simple, existen aproximaciones numéricas muy precisas para la función cuantil normal (Glasserman, 2003).
- **Método de Aceptación-Rechazo (Acceptance-Rejection Method):** Este método, atribuido a von Neumann, es útil cuando la función de densidad de probabilidad (FDP) $f(x)$ de la distribución objetivo es conocida, pero su FDA inversa es difícil de calcular. Requiere una distribución de "propuesta" $g(x)$ de la cual sea fácil muestrear, y una constante c tal que $f(x) \leq cg(x)$ para todo x . El algoritmo consiste en generar una muestra Y de $g(x)$ y un número uniforme $U \sim \mathcal{U}(0, 1)$. Si $U \leq f(Y)/(cg(Y))$, entonces se acepta Y como una muestra de $f(x)$; de lo contrario, se rechaza Y y se repite el proceso. La eficiencia de este método depende de la tasa de aceptación, que está relacionada con qué tan cerca $cg(x)$ envuelve a $f(x)$ (Glasserman, 2003).
- **Métodos Específicos para Distribuciones Particulares:** Para distribuciones comunes como la normal, existen transformaciones específicas y eficientes. El *método de Box-Muller* (o sus variantes polares) genera un par de variables normales estándar independientes a partir de un par de variables uniformes independientes utilizando transformaciones trigonométricas y logarítmicas (Glasserman, 2003; Hull, 2022). Es un método exacto y ampliamente utilizado.

$$\begin{aligned} Z_1 &= \sqrt{-2 \log U_1} \cos(2\pi U_2) \\ Z_2 &= \sqrt{-2 \log U_1} \sin(2\pi U_2) \end{aligned} \tag{2.43}$$

donde $U_1, U_2 \sim \mathcal{U}(0, 1)$ independientes, y $Z_1, Z_2 \sim \mathcal{N}(0, 1)$ independientes.

En muchas aplicaciones financieras, como la simulación de múltiples factores de riesgo correlacionados, es necesario generar vectores aleatorios de una distribución normal multivariante $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, donde μ es el vector de medias y Σ es la matriz de covarianza. Si $\mathbf{Z} \sim \mathcal{N}(\mathbf{0}, \mathbf{I})$ es un vector de k normales estándar independientes, y si se puede encontrar una matriz $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \Sigma$, entonces el vector $\mathbf{X} = \mu + \mathbf{A}\mathbf{Z}$ tendrá la distribución $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$. La *descomposición de Cholesky* de la matriz de covarianza Σ proporciona una forma eficiente y numéricamente estable de encontrar una matriz triangular inferior $\mathbf{L}$ tal que $\mathbf{L}\mathbf{L}^\top = \Sigma$, que luego se usa como $\mathbf{A}$ (Glasserman, 2003; Hull, 2022). Este método es fundamental para introducir la estructura de dependencia correcta en las simulaciones de Monte Carlo de sistemas con múltiples fuentes de aleatoriedad.

La calidad y eficiencia de la generación de números aleatorios y el muestreo de distribuciones son críticas para la fiabilidad y el rendimiento de las simulaciones de Monte Carlo. La elección del PRNG y de los métodos de transformación de distribuciones debe considerar un equilibrio entre la precisión estadística, la velocidad computacional y la facilidad de implementación.

2.7. Ajustes de Valoración XVA

La valoración tradicional de instrumentos derivados, basada en el principio de no arbitraje y replicación bajo una medida neutral al riesgo, a menudo produce un precio "limpio." "libre de riesgo" que no considera diversos costos, riesgos y externalidades inherentes a la negociación y mantenimiento de estos contratos, especialmente en los mercados *Over-The-Counter* (OTC). La crisis financiera de 2008-2009 puso de manifiesto de forma dramática la importancia de estos factores, particularmente el riesgo de crédito de contraparte (CCR) (Gregory, 2020). Como respuesta, la industria y los reguladores han impulsado la adopción de un conjunto de ajustes de valoración, conocidos colectivamente como **xVA** (donde 'x' es una variable que denota el tipo específico de ajuste), para reflejar un valor más completo y cercano al de mercado, incorporando estos elementos adicionales (Hull, 2022; Gregory, 2020).

Los ajustes xVA representan el valor económico de diversos aspectos que afectan el perfil de flujo de caja y riesgo de una cartera de derivados más allá de su valoración teórica bajo supuestos idealizados. Su cálculo es complejo, a menudo requiere simulaciones de Monte Carlo y la modelización conjunta de factores de riesgo de mercado y de crédito, y tiene un impacto significativo en los estados financieros, la gestión de capital, la fijación de precios y la rentabilidad de las mesas de negociación de derivados. A continuación, se describen los ajustes xVA más prominentes utilizados en el mercado:

- **Credit Value Adjustment (CVA):** Es quizás el ajuste xVA más fundamental y reconocido. El CVA representa el valor de mercado del riesgo de crédito de la *contraparte*. Cuantifica la pérdida esperada que una entidad sufriría debido a un posible incumplimiento de su contraparte en una o más transacciones de derivados antes de su vencimiento. El CVA es un costo para la entidad que realiza la valoración (reduce el valor de un activo derivado o aumenta el de un pasivo derivado) y depende de la exposición futura esperada a la contraparte (Expected Positive Exposure - EPE), la

probabilidad de incumplimiento (PD) de la contraparte, y la tasa de pérdida dado el incumplimiento (Loss Given Default - LGD) (Gregory, 2020; Hull, 2022). Su cálculo y gestión activa son exigidos por normativas como Basilea III e IFRS 13.

- **Debit Value Adjustment (DVA):** Es el ajuste simétrico al CVA y representa el valor de mercado del riesgo de crédito de la *propia entidad* que informa. Refleja el beneficio teórico (contable) que la entidad obtendría si incumpliera sus propias obligaciones bajo contratos de derivados que están en una posición de pasivo (i.e., la entidad debe dinero). El DVA se calcula de manera análoga al CVA, utilizando la exposición futura esperada negativa (Expected Negative Exposure - ENE) a la contraparte, la PD de la propia entidad y su LGD. Aunque su reconocimiento como "beneficio" ha sido objeto de debate (ya que un beneficio por DVA solo se materializa si la propia entidad incumple), IFRS 13 requiere su inclusión para una valoración a valor razonable completa del riesgo de crédito bilateral (Gregory, 2020).
- **Funding Value Adjustment (FVA):** El FVA surge de los costos o beneficios de fondeo asociados a los flujos de efectivo y al colateral (o la ausencia de este) en una cartera de derivados no colateralizados o imperfectamente colateralizados. Si una entidad tiene una posición neta que requiere financiación (e.g., una exposición positiva no colateralizada), incurrirá en un costo de fondeo por encima de la tasa libre de riesgo. Inversamente, si recibe efectivo que puede invertir, obtendrá un beneficio de fondeo. El FVA intenta cuantificar el valor presente de estos diferenciales de costos/beneficios de fondeo a lo largo de la vida de las transacciones (Hull, 2022; Gregory, 2020). Su tratamiento contable y su inclusión como parte del valor razonable son temas complejos y debatidos, pero es un factor económico real para las mesas de tesorería.
- **Collateral Value Adjustment (ColVA):** Este ajuste está estrechamente relacionado con el FVA y se refiere a los costos y beneficios asociados a la gestión del colateral bajo un Credit Support Annex (CSA). Puede incluir el diferencial entre la tasa de interés pagada/recibida sobre el colateral en efectivo y la tasa de fondeo del mercado, así como los riesgos asociados a la elegibilidad y liquidez de los activos de colateral. En la práctica, a menudo los efectos del FVA y ColVA se analizan conjuntamente.
- **Capital Value Adjustment (KVA):** El KVA representa el costo de mantener el capital regulatorio y económico requerido para respaldar una cartera de derivados. Las regulaciones (como Basilea III) exigen a los bancos mantener ciertos niveles de capital contra sus exposiciones al riesgo de mercado y de crédito, incluyendo el riesgo de CVA. El KVA intenta asignar el costo de este capital (e.g., el rendimiento esperado por los accionistas sobre ese capital) a las transacciones que lo generan, internalizando así el costo de capital en la fijación de precios de los derivados (Gregory, 2020).
- **Margin Value Adjustment (MVA):** El MVA está asociado al costo de fondeo del margen inicial que se requiere postear bajo las nuevas regulaciones para derivados no compensados centralmente (UMR - Uncleared Margin Rules). Este margen inicial, a

diferencia del margen de variación, no se transfiere directamente para cubrir pérdidas mark-to-market, sino que se mantiene segregado y debe ser fondeado por las partes, generando un costo de fondeo que el MVA busca cuantificar (Gregory, 2020).

La interacción entre estos diferentes ajustes xVA puede ser compleja, con posibles dobles conteos o sinergias que deben ser manejados cuidadosamente. Por ejemplo, la existencia de un CSA bien estructurado puede reducir significativamente el CVA y también impactar el FVA. El objetivo general de los xVA es internalizar todos los costos y riesgos relevantes en el precio "todo incluido" (*all-in price*) de un derivado, permitiendo una gestión de riesgos más holística y una toma de decisiones económicas más informada. La capacidad de calcular, atribuir y gestionar estos ajustes se ha convertido en una competencia esencial para las instituciones financieras activas en los mercados de derivados.

2.7.1. Credit Value Adjustment (CVA)

Conceptualmente, el CVA es la diferencia entre el valor de un portafolio de derivados libre de riesgo de crédito y su valor considerando la posibilidad de incumplimiento de la contraparte. Desde la perspectiva de la entidad que realiza la valoración (Entidad A) frente a una Contraparte B, si la Contraparte B incumple en un momento en que el valor de mercado del portafolio es positivo para la Entidad A (es decir, la Entidad A tiene una exposición a la Contraparte B), la Entidad A sufrirá una pérdida. El CVA busca agregar el valor presente de todas estas pérdidas potenciales futuras, ponderadas por su probabilidad de ocurrencia.

Matemáticamente, el CVA se define como el valor esperado (bajo una medida neutral al riesgo Q) de la pérdida en caso de incumplimiento de la contraparte, descontado al tiempo actual ($t = 0$). Asumiendo que el incumplimiento de la contraparte puede ocurrir en cualquier momento t durante la vida del portafolio (hasta el vencimiento final T), y que dicho incumplimiento es modelado como el primer salto de un proceso de Poisson (o más generalmente, a través de una función de densidad de probabilidad de incumplimiento), el CVA puede expresarse de forma continua como (Gregory, 2020; Shreve, 2004):

$$\text{CVA} = (1 - R) \int_0^T D(0, t) \cdot \text{EPE}(t) \cdot d\text{PD}(t) \quad (2.44)$$

donde:

- R es la *Tasa de Recuperación* esperada de la contraparte en caso de incumplimiento. Por lo tanto, $(1 - R)$ es la *Pérdida Dado el Incumplimiento* (*Loss Given Default - LGD*).
- $D(0, t) = \mathbb{E}_Q[e^{-\int_0^t r(u) du} \mid \mathcal{F}_0]$ es el factor de descuento estocástico desde el tiempo t hasta el tiempo 0, donde $r(u)$ es la tasa libre de riesgo instantánea. Si la tasa es determinística, $D(0, t) = e^{-rt}$.
- $\text{EPE}(t) = \mathbb{E}_Q[\max(V(t), 0) \mid \mathcal{F}_0, \text{no default antes de } t]$ es la *Exposición Esperada Positiva* (Expected Positive Exposure) en el tiempo t . $V(t)$ es el valor de mercado (mark-to-market, MtM) del portafolio de derivados con la contraparte en el tiempo t . La EPE representa la pérdida promedio que se sufriría si la contraparte incumpliera en t y el valor del portafolio fuera positivo para la entidad.

- $dPD(t)$ es la probabilidad (neutral al riesgo) de que la contraparte incumpla en el intervalo infinitesimal $[t, t + dt]$, condicional a que no haya incumplido antes de t . A menudo se deriva de los spreads de Credit Default Swaps (CDS) de la contraparte. Si $S(t)$ es la probabilidad de supervivencia hasta t , entonces $dPD(t) = -\frac{dS(t)}{dt}dt = S(t)\lambda(t)dt$, donde $\lambda(t)$ es la tasa de intensidad de incumplimiento (hazard rate).

El signo del CVA suele tomarse como positivo para representar una reducción en el valor (un costo). Algunas convenciones lo definen con signo negativo.

La fórmula (2.44) destaca los tres componentes fundamentales del CVA:

1. **Exposición (Exposure):** La exposición en un tiempo futuro t , $V(t)$, es el valor de mercado del portafolio de derivados. Es una variable aleatoria, ya que depende de la evolución futura de los factores de riesgo de mercado (tasas de interés, tipos de cambio, precios de acciones, volatilidades, etc.). Solo se sufre una pérdida si la contraparte incumple cuando la exposición es positiva para la entidad ($V(t) > 0$). La métrica clave es la *Exposición Esperada Positiva (EPE)*, $EPE(t) = \mathbb{E}_Q[\max(V(t), 0)]$. La estimación del perfil de EPE a lo largo del tiempo es uno de los aspectos más complejos del cálculo de CVA y típicamente requiere simulación de Monte Carlo (Glasserman, 2003; Gregory, 2020). Se deben simular miles de trayectorias de los factores de riesgo, revalorizar el portafolio en cada punto de la trayectoria, aplicar efectos de netting (si existen acuerdos marco como el ISDA Master Agreement) y colateral (si existe un Credit Support Annex - CSA), y luego promediar las exposiciones positivas.
2. **Probabilidad de Incumplimiento (Probability of Default - PD):** La PD cuantifica la probabilidad de que la contraparte incumpla sus obligaciones. Para CVA, se requieren las probabilidades de incumplimiento *neutrales al riesgo*, que se derivan implícitamente de los precios de mercado de instrumentos de crédito, siendo los Credit Default Swaps (CDS) la fuente más común (Hull, 2022). A partir de las primas (spreads) de CDS para diferentes vencimientos, se puede arrancar una curva de tasas de intensidad de incumplimiento $\lambda(t)$ o directamente las probabilidades de supervivencia $S(t) = e^{-\int_0^t \lambda(u)du}$. La probabilidad marginal de incumplimiento en un intervalo $[t_i, t_{i+1}]$ es $S(t_i) - S(t_{i+1})$.
3. **Pérdida Dado el Incumplimiento (Loss Given Default - LGD):** La LGD es la proporción de la exposición que se espera perder si la contraparte incumple. Se expresa como $LGD = 1 - R$, donde R es la Tasa de Recuperación. La LGD depende de factores como la antigüedad de la deuda, la existencia de garantías (más allá del colateral específico del derivado), y la jurisdicción. A menudo se toma como un parámetro exógeno, con valores estándar como 40%-60% para deuda senior no garantizada, aunque puede estimarse a partir de datos de mercado o análisis crediticio.

En la práctica, el CVA se calcula a menudo utilizando una aproximación discreta de la integral (2.44). Se discretiza el horizonte temporal en N intervalos $[t_{i-1}, t_i]$ donde $t_0 = 0$ y $t_N = T$. El CVA se aproxima como la suma de las pérdidas esperadas descontadas en cada intervalo:

$$CVA \approx \sum_{i=1}^N LGD \cdot D(0, t_i^*) \cdot EE(t_i^*) \cdot PD(t_{i-1}, t_i) \quad (2.45)$$

donde:

- $\text{LGD} = 1 - R$.
- $D(0, t_i^*)$ es el factor de descuento promedio para el i -ésimo intervalo, a menudo se usa $D(0, t_i)$ o $D(0, (t_{i-1} + t_i)/2)$.
- $\text{EE}(t_i^*)$ es la Exposición Esperada (EPE) representativa para el i -ésimo intervalo, a menudo $\text{EPE}(t_i)$ o $\text{EPE}((t_{i-1} + t_i)/2)$. Es crucial que esta exposición se calcule bajo la medida neutral al riesgo Q .
- $\text{PD}(t_{i-1}, t_i)$ es la probabilidad marginal de que la contraparte incumpla en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, condicional a no haber incumplido antes de t_{i-1} . Se calcula como $S(t_{i-1}) - S(t_i)$, donde $S(t)$ es la probabilidad de supervivencia neutral al riesgo hasta t .

El cálculo de $\text{EPE}(t_i)$ es el componente más intensivo computacionalmente y, como se mencionó, generalmente se realiza mediante simulación de Monte Carlo:

1. Se simulan M trayectorias de los factores de riesgo de mercado relevantes (tasas, FX, acciones, etc.) bajo la medida Q hasta el vencimiento T .
2. Para cada trayectoria j y cada tiempo de simulación t_i , se valora el portafolio de derivados $V_j(t_i)$.
3. Se calcula la exposición positiva, aplicando netting y colateral: $E_j(t_i) = \max(\text{NetValue}_j(t_i) - \text{Collateral}_j(t_i), 0)$.
4. La Exposición Esperada Positiva en t_i se estima como el promedio sobre las simulaciones: $\text{EPE}(t_i) \approx \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M E_j(t_i)$.

Este perfil de $\text{EPE}(t_i)$ se combina luego con los factores de descuento $D(0, t_i)$ y las probabilidades de incumplimiento $\text{PD}(t_{i-1}, t_i)$ en la Ecuación (2.45).

Por otro lado, el CVA de un portafolio puede ser influenciado por numerosos factores:

- **Calidad Crediticia de la Contraparte:** Una mayor probabilidad de incumplimiento (spreads de CDS más altos) aumenta el CVA.
- **Volatilidad de Mercado:** Mayor volatilidad en los factores de riesgo tiende a aumentar la dispersión de los valores futuros del portafolio, lo que generalmente incrementa la EPE y, por ende, el CVA.
- **Correlaciones:** La correlación entre los factores de riesgo de mercado y entre estos y el riesgo de crédito de la contraparte (Wrong-Way Risk si es adversa, Right-Way Risk si es favorable) puede tener un impacto significativo. Wrong-Way Risk (WWR), donde la exposición tiende a aumentar cuando la calidad crediticia de la contraparte se deteriora, es particularmente peligroso y puede amplificar el CVA (Gregory, 2020).
- **Vencimiento de las Transacciones:** Transacciones de mayor plazo generalmente tienen un CVA mayor, ya que hay más tiempo para que ocurra un incumplimiento y para que la exposición evolucione.

- **Características del Portafolio:** La direccionalidad y la no linealidad (opcionalidad) del portafolio afectan la forma del perfil de EPE.
- **Acuerdos de Mitigación de Riesgo:**
 - **Netting (Compensación):** Acuerdos marco (como el ISDA Master Agreement) que permiten compensar las exposiciones positivas y negativas entre múltiples transacciones con la misma contraparte pueden reducir significativamente la EPE neta.
 - **Colateralización (CSA):** Los Credit Support Annexes que estipulan el intercambio de colateral (generalmente efectivo o bonos gubernamentales) para cubrir la exposición mark-to-market pueden reducir drásticamente la EPE y, por lo tanto, el CVA. Características del CSA como umbrales (thresholds), montos mínimos de transferencia (MTA) y frecuencia del intercambio de colateral son cruciales.

La gestión activa del CVA implica la cobertura (hedging) de sus componentes, por ejemplo, mediante la compra de protección crediticia (CDS) sobre la contraparte para cubrir el componente de PD y LGD, y mediante la negociación de derivados de mercado para cubrir la sensibilidad de la EPE a los factores de mercado (delta, gamma, vega del CVA).

2.7.2. Debit Value Adjustment (DVA)

El **Debit Value Adjustment (DVA)** es el ajuste simétrico al Credit Value Adjustment (CVA) y representa el valor de mercado del riesgo de crédito de la *propia entidad* que realiza la valoración. El DVA cuantifica el beneficio teórico (contable) que una entidad podría reconocer debido a la posibilidad de su propio incumplimiento en transacciones de derivados que representan un pasivo para ella (es decir, cuando la entidad debe dinero a su contraparte) (Gregory, 2020; Hull, 2022). Si la entidad incumpliera en tal situación, no tendría que pagar la totalidad del valor de mercado de dicho pasivo.

La inclusión del DVA en la valoración a valor razonable es un requisito bajo normativas contables como IFRS 13, que buscan una valoración completa del riesgo de crédito bilateral. Aunque el concepto de reconocer un "beneficio" por el deterioro de la propia calidad crediticia ha sido objeto de considerable debate y controversia, especialmente en lo referente a su monetización y su impacto en la percepción de la solidez financiera, su cálculo es una parte integral del marco de valoración xVA.

Conceptualmente, el DVA es el valor esperado (bajo una medida neutral al riesgo Q) del "ahorro" reducción de pasivos en caso de incumplimiento propio, descontado al tiempo actual ($t = 0$). Es el espejo del CVA: mientras el CVA considera el riesgo de la contraparte cuando la entidad tiene una exposición positiva, el DVA considera el riesgo propio cuando la entidad tiene una exposición negativa (es decir, un pasivo).

Matemáticamente, asumiendo que el incumplimiento propio puede ocurrir en cualquier momento t hasta el vencimiento final T , el DVA puede expresarse de forma continua de manera análoga al CVA (Gregory, 2020):

$$\text{DVA} = (1 - R_{\text{propia}}) \int_0^T D(0, t) \cdot \text{ENE}(t) \cdot d\text{PD}_{\text{propia}}(t) \quad (2.46)$$

donde:

- R_{propia} es la *Tasa de Recuperación* esperada de la deuda de la propia entidad en caso de su incumplimiento. $(1 - R_{\text{propia}})$ es la *LGD propia*.
- $D(0, t)$ es el factor de descuento estocástico libre de riesgo desde t hasta 0.
- $\text{ENE}(t) = \mathbb{E}_Q[-\min(V(t), 0) \mid \mathcal{F}_0, \text{no default propio antes de } t]$ es la *Exposición Esperada Negativa* (Expected Negative Exposure) en el tiempo t . $V(t)$ es el valor de mercado del portafolio. $-\min(V(t), 0)$ es equivalente a $\max(-V(t), 0)$, representando el valor absoluto de la deuda de la entidad si $V(t) < 0$. Es importante notar que ENE es una cantidad positiva o cero.
- $d\text{PD}_{\text{propia}}(t)$ es la probabilidad (neutral al riesgo) de que la *propia entidad* incumpla en el intervalo infinitesimal $[t, t + dt]$, condicional a no haber incumplido antes. Se deriva de los spreads de CDS de la propia entidad o de entidades comparables. Si $S_{\text{propia}}(t)$ es la probabilidad de supervivencia propia hasta t , entonces $d\text{PD}_{\text{propia}}(t) = S_{\text{propia}}(t)\lambda_{\text{propia}}(t)dt$.

El DVA, por convención, se registra como un aumento en el valor del portafolio (reduce un pasivo o aumenta un activo). La fórmula (2.46) resulta en un valor positivo dado que ENE es positivo.

Los componentes fundamentales del DVA son simétricos a los del CVA:

1. **Exposición Negativa (Negative Exposure):** Solo se obtiene un "beneficio" por DVA si la entidad incumple cuando el valor del portafolio de derivados es negativo para ella ($V(t) < 0$), es decir, cuando representa un pasivo. La métrica clave es la *Exposición Esperada Negativa (ENE)*, $\text{ENE}(t) = \mathbb{E}_Q[-\min(V(t), 0)]$. El cálculo del perfil de ENE a lo largo del tiempo, al igual que el EPE para el CVA, típicamente requiere simulación de Monte Carlo (Glasserman, 2003; Gregory, 2020). Se simulan trayectorias de factores de riesgo, se revalora el portafolio, se aplican efectos de netting y colateral, y se promedian los valores absolutos de las exposiciones negativas.
2. **Probabilidad de Incumplimiento Propia (Own PD):** Cuantifica la probabilidad de que la propia entidad que realiza la valoración incumpla. Al igual que con el CVA, se utilizan probabilidades de incumplimiento *neutrales al riesgo* derivadas de los precios de mercado de sus propios instrumentos de crédito (e.g., sus propios CDS spreads) o de un conjunto de entidades comparables si sus CDS no son líquidos (Hull, 2022). La curva de supervivencia propia $S_{\text{propia}}(t)$ y las tasas de intensidad $\lambda_{\text{propia}}(t)$ se calculan de manera análoga.
3. **Pérdida Dado el Incumplimiento Propia (Own LGD):** Representa la proporción de la deuda de la entidad que sus acreedores (en este caso, sus contrapartes de derivados) esperarían perder si la entidad incumple. Se expresa como $\text{LGD}_{\text{propia}} = 1 - R_{\text{propia}}$. La estimación de la R_{propia} puede ser un desafío y a menudo se basa en la LGD de su propia clase de deuda o de comparables.

Análogamente al CVA, el DVA se calcula en la práctica utilizando una aproximación discreta, sumando los "beneficios" esperados descontados en cada intervalo de tiempo $[t_{i-1}, t_i]$:

$$\text{DVA} \approx \sum_{i=1}^N \text{LGD}_{\text{propia}} \cdot D(0, t_i^*) \cdot \text{ENE}(t_i^*) \cdot \text{PD}_{\text{propia}}(t_{i-1}, t_i) \quad (2.47)$$

donde:

- $\text{LGD}_{\text{propia}} = 1 - R_{\text{propia}}$.
- $D(0, t_i^*)$ es el factor de descuento libre de riesgo promedio para el intervalo.
- $\text{ENE}(t_i^*)$ es la Exposición Esperada Negativa representativa para el intervalo, calculada bajo la medida Q .
- $\text{PD}_{\text{propia}}(t_{i-1}, t_i)$ es la probabilidad marginal de incumplimiento propio en el intervalo $[t_{i-1}, t_i]$, calculada como $S_{\text{propia}}(t_{i-1}) - S_{\text{propia}}(t_i)$.

El cálculo de $\text{ENE}(t_i)$ mediante Monte Carlo sigue un proceso similar al de EPE:

1. Se simulan M trayectorias de los factores de riesgo de mercado bajo la medida Q .
2. Para cada trayectoria j y tiempo t_i , se valora el portafolio $V_j(t_i)$.
3. Se calcula la exposición negativa, aplicando netting y colateral: $\text{NE}_j(t_i) = -\min(\text{NetValue}_j(t_i) - \text{Collateral}_j(t_i), 0)$. (Obsérvese el signo para asegurar que $\text{NE}_j(t_i)$ sea positivo o cero).
4. La Exposición Esperada Negativa en t_i se estima como: $\text{ENE}(t_i) \approx \frac{1}{M} \sum_{j=1}^M \text{NE}_j(t_i)$.

Este perfil de $\text{ENE}(t_i)$ se utiliza en la Ecuación (2.47).

El DVA es el componente simétrico al CVA. Mientras el CVA captura el riesgo de la contraparte, el DVA captura el riesgo propio. Juntos, forman la base del ajuste por riesgo de crédito bilateral. A menudo se define el *Bilateral CVA (BCVA)* como:

$$\text{BCVA} = \text{CVA}_{\text{costo}} - \text{DVA}_{\text{beneficio}} \quad (2.48)$$

donde CVA se considera un costo (reducción de valor) y DVA un beneficio (aumento de valor). Alternativamente, si CVA se define como positivo y DVA también como positivo (como en la Ecuación 2.46), entonces $\text{BCVA} = \text{DVA} - \text{CVA}$ (reflejando el ajuste neto al valor). Es crucial la consistencia en las convenciones de signo.

La inclusión de DVA es necesaria para evitar que una entidad pueda generar beneficios artificiales simplemente negociando derivados y luego experimentando un deterioro en su propia calidad crediticia. No obstante, la volatilidad del DVA (que aumenta con la propia probabilidad de incumplimiento) puede generar efectos pro-cíclicos y ha sido una fuente de preocupación para reguladores y analistas (Gregory, 2020).

Los factores que impulsan el DVA son análogos a los del CVA, pero desde la perspectiva del riesgo propio:

- **Calidad Crediticia Propia:** Una mayor probabilidad de incumplimiento propio (spreads de CDS propios más altos) aumenta el DVA.



- **Volatilidad de Mercado:** Similar al CVA, mayor volatilidad puede aumentar la ENE.
- **Correlaciones:** El Wrong-Way Risk para DVA ocurriría si la exposición negativa de la entidad (su pasivo) tiende a aumentar cuando su propia calidad crediticia se deteriora. Esto podría reducir el beneficio del DVA.
- **Vencimiento y Características del Portafolio:** Similar al CVA.
- **Acuerdos de Mitigación de Riesgo:** Netting y colateralización reducen la exposición neta (tanto positiva como negativa) y, por lo tanto, impactan tanto al CVA como al DVA. Un CSA eficiente que mantenga la exposición neta cercana a cero minimizaría ambos ajustes.

A pesar de su obligatoriedad contable, la "monetización real del DVA es un tema complejo. Un banco no puede vender su propio riesgo de crédito para realizar el beneficio del DVA de la misma manera que puede cubrir el CVA comprando protección crediticia sobre una contraparte. Sin embargo, su cálculo es fundamental para una valoración completa que refleje el riesgo de crédito desde ambas perspectivas de la transacción.

Capítulo 3

Desarrollo Integral del Modelo CVA/DVA: Fundamentos Teóricos y Solución Computacional

3.1. Marco de Trabajo y Fases del Proyecto.

La presente investigación adoptará un enfoque cuantitativo y computacional para abordar el objetivo general de desarrollar un modelo de cálculo de CVA y DVA. La metodología se estructurará en fases secuenciales y complementarias, diseñadas para cumplir sistemáticamente con cada uno de los objetivos específicos planteados.

3.1.1. Fase 1: Revisión Teórica y Marco Normativo (Objetivo Específico 1)

Esta fase inicial se centrará en establecer una base conceptual sólida mediante una revisión exhaustiva de la literatura académica y la normativa relevante. Se realizará un análisis detallado de:

- Los fundamentos matemáticos y financieros del riesgo de crédito de contraparte (CCR).
- Las definiciones, componentes y formulaciones teóricas del Credit Value Adjustment (CVA) y Debit Value Adjustment (DVA).
- Los principios de valoración a valor razonable bajo **IFRS 13**, con énfasis en los requerimientos sobre ajustes por riesgo de crédito.
- Los marcos regulatorios de capital de **Basilea III**, específicamente los relacionados con los cargos por riesgo de CVA y CCR.
- Las definiciones, convenciones y recomendaciones publicadas por la **International Swaps and Derivatives Association (ISDA)**, particularmente en lo referente a documentación contractual (Master Agreements, CSA) y definiciones estándar.



- La teoría de valoración de derivados (incluyendo forwards, swaps, opciones) bajo el marco neutral al riesgo.
- Los principios de cálculo estocástico, procesos como el Movimiento Browniano (Aritmético y Geométrico) y modelos de tasas de interés relevantes.
- Las metodologías de simulación de Monte Carlo aplicadas a la ingeniería financiera, incluyendo la generación de números aleatorios, la discretización de SDEs y la estimación de expectativas.
- Técnicas para modelar la correlación entre factores de riesgo, como la descomposición de Cholesky.

El resultado de esta fase será un marco teórico robusto que guiará el diseño y la implementación del modelo.

3.1.2. Fase 2: Definición del Alcance y Especificaciones del Modelo (Objetivo Específico 2)

Basándose en los hallazgos de la Fase 1 y considerando las necesidades prácticas de Deloitte y la viabilidad del proyecto, se definirá con precisión el alcance operativo del modelo a desarrollar. Esto implicará tomar decisiones y documentar especificaciones sobre:

- **Clases de Derivados Soportadas:** Se determinará qué tipos de instrumentos financieros derivados serán incluidos en el modelo (e.g., Interest Rate Swaps (IRS), Cross Currency Swaps (CCS), FX Forwards, Opciones Europeas sobre FX). Se priorizarán aquellos más relevantes para la práctica de la firma.
- **Factores de Riesgo:** Se identificarán los factores de riesgo de mercado clave a modelar (e.g., curvas de tasas de interés en diferentes monedas, tipos de cambio, posiblemente volatilidades).
- **Horizontes Temporales:** Se definirá la granularidad de la simulación (pasos de tiempo) y el horizonte máximo de valoración.
- **Características de Contrapartes:** Se establecerá cómo se incorporará la información crediticia de las contrapartes (e.g., a través de curvas de Credit Default Swap - CDS).
- **Supuestos de Neteo:** Se definirá si el modelo operará a nivel de transacción individual o si implementará reglas de neteo bajo acuerdos marco (Master Agreements).
- **Modelado de Colateral:** Se especificará el nivel de detalle con el que se incorporarán los acuerdos de colateralización (Credit Support Annex - CSA), considerando umbrales (thresholds), mínimos montos transferibles (Minimum Transfer Amounts - MTA) y posibles rezagos en la liquidación.

Esta fase es crucial para acotar el problema y asegurar que el modelo resultante sea relevante y manejable dentro de los límites del proyecto.

3.1.3. Fase 3: Diseño de la Arquitectura Matemática (Objetivo Específico 3)

En esta fase se traducirán las especificaciones funcionales en una estructura matemática concreta. Se seleccionarán y definirán formalmente los modelos y fórmulas a implementar:

- **Modelos Estocásticos para Factores de Riesgo:** Se elegirán modelos específicos para la dinámica de los factores de riesgo identificados (e.g., Movimiento Geométrico Browniano para FX, modelos de tasa corta como Vasicek o CIR, o modelos de curva completa como HJM/LMM para tasas de interés), especificando sus SDEs bajo la medida neutral al riesgo.
- **Modelo de Incumplimiento:** Se definirá cómo se modelarán las probabilidades de incumplimiento (PD), típicamente derivándolas de curvas de spreads de CDS, asumiendo un proceso de Poisson o similar para los tiempos de default.
- **Fórmulas de Valoración de Derivados:** Se especificarán las funciones o métodos (analíticos o numéricos) para valorar los derivados incluidos en el alcance en cualquier punto de las trayectorias simuladas.
- **Cálculo de Exposición:** Se definirán matemáticamente la Exposición Futura (Exposure at Default - EAD), la Exposición Esperada Positiva (Expected Positive Exposure - EPE) y la Exposición Esperada Negativa (Expected Negative Exposure - ENE), incorporando los efectos de netting y colateral según las especificaciones de la Fase 2.
- **Fórmulas de CVA y DVA:** Se establecerán las fórmulas integrales o sumatorias discretas que combinan la exposición esperada descontada, la probabilidad de incumplimiento marginal y la tasa de pérdida dado el incumplimiento (Loss Given Default - LGD) para calcular el CVA y el DVA.
- **Curvas de Descuento:** Se especificará el uso de curvas libres de riesgo (e.g., OIS) y curvas ajustadas por crédito (derivadas de PD y LGD) para el descuento apropiado de flujos y exposiciones.
- **Manejo de Correlaciones:** Se definirá el uso de la descomposición de Cholesky para generar incrementos correlacionados de los factores de riesgo Brownianos.

El entregable de esta fase será un documento detallado con toda la formulación matemática del modelo CVA/DVA.

3.1.4. Fase 4: Desarrollo Computacional del Modelo (Objetivo Específico 4)

Esta fase consistirá en la implementación práctica del modelo matemático diseñado en la Fase 3 utilizando el lenguaje de programación **Python**, aprovechando sus librerías científicas y de análisis de datos. Las tareas principales incluirán:

- **Configuración del Entorno:** Preparación del entorno de desarrollo Python con las librerías necesarias (e.g., NumPy para cálculo numérico, SciPy para funciones científicas, Pandas para manejo de datos, Matplotlib/Seaborn para visualización).
- **Implementación de la Simulación Monte Carlo:** Desarrollo del motor de simulación que genere múltiples trayectorias (N simulaciones) de los factores de riesgo a lo largo de la malla temporal (M pasos), implementando la generación de números aleatorios y la aplicación de Cholesky para las correlaciones.
- **Implementación de Modelos Estocásticos:** Codificación de las fórmulas de discretización (e.g., Euler-Maruyama o soluciones exactas como para GBM) para cada factor de riesgo.
- **Implementación de Funciones de Valoración:** Desarrollo de funciones que calculen el valor de los derivados soportados en cualquier nodo (tiempo, trayectoria) de la simulación.
- **Cálculo de Exposición y Agregación:** Implementación de la lógica para calcular la exposición (considerando netting y colateral) en cada nodo y agregarla para obtener los perfiles de EPE y ENE.
- **Cálculo de CVA/DVA:** Implementación de las fórmulas finales de CVA y DVA, integrando los perfiles de exposición, las PDs y LGDs.
- **Manejo de Inputs/Outputs:** Diseño de interfaces o funciones para cargar los datos de entrada necesarios (parámetros de mercado, datos del portafolio, curvas de crédito) y para presentar los resultados (valores de CVA/DVA, perfiles de exposición, etc.).
- **Documentación del Código:** Comentar adecuadamente el código para asegurar su mantenibilidad y comprensión.

El resultado será un prototipo funcional del modelo CVA/DVA en Python.

3.1.5. Fase 5: Validación y Pruebas del Modelo (Objetivo Específico 5)

La última fase se dedicará a verificar y validar el modelo desarrollado para asegurar su correcta implementación, precisión y robustez. Se emplearán diversas técnicas:

- **Pruebas Unitarias:** Verificación de componentes individuales del código (e.g., generador de números aleatorios, implementación de Cholesky, funciones de valoración para casos simples).
- **Pruebas de Integración:** Comprobación de que los diferentes módulos del modelo interactúan correctamente.
- **Análisis de Convergencia de Monte Carlo:** Evaluación de cómo los resultados (CVA/DVA) cambian al aumentar el número de simulaciones y/o pasos de tiempo, para verificar la estabilidad.

- **Comparación con Casos Conocidos/Benchmarks:** Validación de los resultados del modelo para casos simples donde existan soluciones analíticas o resultados conocidos (e.g., CVA para un único swap de tasas con parámetros simples). Si es posible, comparar con resultados de herramientas estándar o fuentes publicadas.
- **Análisis de Sensibilidad:** Estudio de cómo varían los resultados del CVA/DVA ante cambios en los parámetros de entrada clave (volatilidades, correlaciones, spreads de crédito, tasas de recuperación), para evaluar la robustez y el comportamiento económico esperado del modelo.
- **Revisión Conceptual:** Verificación de que la implementación se alinea con la teoría y las especificaciones definidas en fases anteriores.

Los resultados de esta fase permitirán evaluar la fiabilidad del modelo desarrollado y identificar posibles áreas de mejora o limitaciones.

Esta metodología estructurada garantiza que el desarrollo del modelo CVA/DVA sea riguroso, fundamentado teóricamente, especificado claramente, implementado de forma robusta y validado adecuadamente, cumpliendo así con los objetivos propuestos para la tesis.

3.2. Diseño del Modelo de Valoración: Principios y Formulación

Con base en los fundamentos teóricos establecidos en los capítulos precedentes, esta sección se adentra en la arquitectura y la implementación del modelo cuantitativo desarrollado para la estimación del Credit Value Adjustment (CVA) y el Debit Value Adjustment (DVA). El objetivo de este modelo es proporcionar una valoración completa de un portafolio de contratos forward de divisas, trascendiendo la valoración clásica libre de riesgo para incorporar el impacto económico del riesgo de crédito bilateral. La metodología seleccionada para este propósito es la **simulación de Monte Carlo**, un enfoque de primer orden en la ingeniería financiera moderna.

La elección de la simulación de Monte Carlo no es arbitraria; responde a la naturaleza intrínseca del problema de valoración de XVA. El CVA, como se definió teóricamente, es una expectativa descontada de pérdidas futuras, las cuales dependen de tres variables estocásticas interrelacionadas: la exposición futura del portafolio, el momento del incumplimiento de la contraparte y la tasa de recuperación. De estas, la **exposición futura** es particularmente compleja, ya que su valor en cualquier momento del futuro, $V(t)$, es en sí mismo una variable aleatoria cuya distribución depende de la evolución conjunta de todos los factores de riesgo de mercado subyacentes (tasas de interés, tipos de cambio, etc.). Salvo en los casos más triviales, no existe una fórmula analítica cerrada para la distribución de $V(t)$, y por lo tanto, tampoco para la Exposición Esperada. La simulación de Monte Carlo emerge como la herramienta más flexible y poderosa para aproximar estas expectativas (Glasserman, 2003). Permite generar miles de "futuros posibles." trayectorias para los factores de riesgo, valorar el portafolio en cada una de ellas y, finalmente, promediar los resultados para obtener una estimación robusta de los perfiles de exposición (Gregory, 2020).

El modelo propuesto ha sido diseñado con tres principios rectores en mente:

1. **Consistencia Teórica:** Cada componente del modelo se basa en principios financieros y matemáticos establecidos, como la valoración neutral al riesgo, la paridad de tasas de interés y los modelos estocásticos estándar para la dinámica de los factores de riesgo. El objetivo es asegurar que el modelo sea conceptualmente sólido y defendible.
2. **Modularidad:** El código y la metodología están estructurados en módulos lógicos y secuenciales. Esta separación de componentes (carga de datos, calibración, simulación, valoración, cálculo de XVA) no solo facilita la comprensión y la implementación, sino que también permite futuras extensiones o el reemplazo de un módulo específico (por ejemplo, cambiar el modelo de tasas de interés) sin alterar el resto del sistema.
3. **Transparencia y Replicabilidad:** Todos los parámetros, supuestos e inputs del modelo se definen explícitamente. Mediante el uso de una semilla fija para la generación de números aleatorios, los resultados son totalmente replicables, una característica indispensable para la validación, la auditoría y el análisis de sensibilidad.

El flujo de trabajo que se detallará en las siguientes secciones sigue una progresión lógica que imita el proceso de valoración en la práctica. Se comenzará por la **Sección 3.2.3**, que define con precisión todos los datos contractuales y de mercado necesarios para alimentar el modelo. A continuación, la **Sección 3.2.4** identificará los factores de riesgo clave y sentará las bases para su modelado. Las secciones subsecuentes se adentrarán en el corazón del modelo: la especificación de los **procesos estocásticos** para las tasas de interés y los tipos de cambio, la crucial incorporación de sus **correlaciones** mediante la descomposición de Cholesky, y la **valoración del portafolio** en cada escenario simulado. Posteriormente, se explicará cómo se agregan estas valoraciones para obtener los perfiles de **Exposición Esperada** y cómo se modela el **riesgo de crédito** a partir de los datos de CDS. Finalmente, todos estos elementos convergerán en la sección final, que detalla la formulación y el cálculo del **CVA y DVA**, incluyendo la implementación del **neteo por contraparte**, que es un mecanismo de mitigación de riesgo fundamental en los mercados OTC.

3.2.1. Marco Regulatorio y Contable del Riesgo de Contraparte

La cuantificación del CVA y DVA no es meramente un ejercicio académico de valoración, sino una exigencia fundamental impuesta por los marcos contables y regulatorios que gobiernan el sistema financiero global. La crisis financiera de 2008 actuó como un catalizador, revelando que una gestión inadecuada del riesgo de crédito de contraparte (CCR) podía tener consecuencias sistémicas. Como resultado, tanto los emisores de normas contables como los reguladores prudenciales han establecido marcos explícitos que obligan a las instituciones financieras a medir, reportar y capitalizar este riesgo. Esta sección analiza tres de los pilares que conforman este entorno: la norma contable IFRS 13, el marco de capital de Basilea III y los estándares contractuales de ISDA.

3.2.1.1. Valoración a Valor Razonable bajo IFRS 13

La Norma Internacional de Información Financiera 13 (IFRS 13), *Medición del Valor Razonable*, establece un marco único para medir el valor razonable de activos y pasivos. El principio central de la IFRS 13 es que el valor razonable es un precio de **salida basado en el mercado** (*market-based exit price*): el precio que se recibiría por vender un activo o que se pagaría por transferir un pasivo en una transacción ordenada entre participantes del mercado en la fecha de la medición (International Accounting Standards Board (IASB), 2011, párrafo 9).

Una de las implicaciones más directas de esta norma para la valoración de derivados es el requisito de incorporar todos los riesgos que los participantes del mercado considerarían al fijar un precio. Esto incluye, de manera explícita, el **riesgo de crédito**. La norma establece que la medición del valor razonable debe considerar las características del activo o pasivo que un participante del mercado tomaría en cuenta, lo que incluye, entre otras cosas, el riesgo de incumplimiento (International Accounting Standards Board (IASB), 2011, párrafo 11).

- **Inclusión del Riesgo de Crédito de la Contraparte (CVA):** IFRS 13 requiere que el valor razonable de un activo derivado refleje el riesgo de incumplimiento de la contraparte. Específicamente, el párrafo 42 señala que el riesgo de incumplimiento relacionado con un activo (como el de una contraparte en un contrato de derivados) debe ser considerado al medir el valor razonable. La práctica de mercado predominante para cumplir con este requisito es el cálculo del CVA, que ajusta a la baja el valor del activo para reflejar la pérdida esperada por un posible default.
- **Inclusión del Riesgo de Crédito Propio (DVA):** De manera simétrica, la norma exige que el valor razonable de un pasivo derivado refleje el efecto del **riesgo de no cumplimiento** (*non-performance risk*) de la propia entidad, el cual incluye, pero no se limita a, el propio riesgo de crédito de la entidad (International Accounting Standards Board (IASB), 2011, párrafo 42). El párrafo 43 aclara que este riesgo se asume que sería transferido al receptor del pasivo. Este ajuste es el DVA. Aunque contablemente se reconoce como una ganancia cuando la calidad crediticia propia se deteriora, su inclusión es mandatoria para una valoración a valor razonable completa y bilateral.

En resumen, IFRS 13, a través de sus principios generales y párrafos específicos, transforma el CVA y el DVA de ser métricas opcionales de gestión de riesgos a ser componentes **integrales y obligatorios** del valor contable de los derivados, con un impacto directo en los estados de resultados y el patrimonio de las entidades.

3.2.1.2. Requerimientos de Capital bajo Basilea III

Mientras que IFRS 13 se enfoca en la valoración contable, el marco de capital de **Basilea III**, desarrollado por el Comité de Supervisión Bancaria de Basilea (BCBS), se centra en la solvencia y la adecuación del capital de los bancos. Basilea III introdujo cambios significativos para abordar las debilidades expuestas por la crisis, incluyendo un tratamiento mucho más riguroso del riesgo de crédito de contraparte.

El marco establece dos cargos de capital principales relacionados con el CCR (Basel Committee on Banking Supervision (BCBS), 2011a):

1. **Cargo de Capital por Riesgo de Default:** Este es el cargo tradicional que cubre las pérdidas potenciales si una contraparte incumple. Los bancos deben calcular una "Exposición en Caso de Default" (Exposure at Default - EAD) para sus carteras de derivados y mantener capital contra ella, ponderada por el riesgo de la contraparte.
2. **Cargo de Capital por Riesgo de CVA:** Esta fue una de las innovaciones más importantes de Basilea III, introducida para cubrir un riesgo que previamente no se capitalizaba. El marco reconoce que, incluso si la contraparte no incumple, el banco está expuesto a pérdidas si el **valor del CVA mismo fluctúa** debido a cambios en los spreads de crédito de la contraparte. Como se establece en el documento del BCBS, el objetivo es capitalizar el riesgo de que la contraparte incumpla y el riesgo de que el spread de crédito de la contraparte se amplíe" (Basel Committee on Banking Supervision (BCBS), 2011b, párrafo 52). Para cubrir este **riesgo de volatilidad del CVA**, Basilea III exige a los bancos mantener un capital adicional, calculado mediante un enfoque estandarizado o, para bancos más sofisticados, un enfoque de modelos internos (Advanced CVA).

La introducción del cargo de capital por riesgo de CVA tuvo un profundo impacto en la industria. Transformó el CVA de ser simplemente un ajuste de valoración a ser un **riesgo gestionado activamente**. Los bancos ahora tienen un fuerte incentivo regulatorio no solo para calcular el CVA, sino también para cubrir (hacer "hedging") su sensibilidad a los cambios en los spreads de crédito, lo que llevó a la creación de "CVA Desks" dedicados a gestionar y mitigar este riesgo.

3.2.2. Estándares Contractuales de ISDA

La International Swaps and Derivatives Association (ISDA) es la organización global que establece los estándares para el mercado de derivados OTC. Aunque no es un regulador, su documentación contractual es la base sobre la que se realizan la gran mayoría de las transacciones de derivados en el mundo. Dos documentos son particularmente relevantes para la gestión del CCR y el cálculo de XVA:

- **ISDA Master Agreement:** Este es el contrato marco que gobierna todas las transacciones individuales entre dos contrapartes. Su disposición más crítica en el contexto del CCR es la **cláusula de neteo por terminación anticipada (close-out netting)**. Esta cláusula estipula que, en caso de un evento de incumplimiento de una de las partes, todas las transacciones cubiertas por el acuerdo se terminan y se consolidan en una única suma neta a pagar por una parte a la otra. Este mecanismo de neteo es el mitigante de riesgo más poderoso, ya que evita que una entidad tenga que pagar sus pasivos si la contraparte ha incumplido en sus activos. El cálculo de la exposición en cualquier modelo de XVA debe, por lo tanto, realizarse sobre el portafolio neto cubierto por el Master Agreement.
- **Credit Support Annex (CSA):** El CSA es un anexo al Master Agreement que detalla los términos para el intercambio de **colateral** (garantías). Especifica qué

tipo de colateral es elegible (e.g., efectivo, bonos gubernamentales), cómo se valora, con qué frecuencia se intercambia, y define parámetros clave como el **umbral (threshold)** (un monto de exposición por debajo del cual no se requiere colateral) y el **monto mínimo de transferencia (MTA)**. Un CSA bien estructurado puede reducir la exposición neta a casi cero, disminuyendo drásticamente el CVA y DVA. Si bien el modelo actual de esta tesis no implementa el colateral, es crucial entender que el CSA es el siguiente paso lógico en la mitigación del riesgo después del neteo.

En conclusión, la valoración y gestión del riesgo de contraparte no existen en un vacío teórico. Están profundamente arraigadas en un ecosistema de normas contables que exigen su reconocimiento en el valor razonable, regulaciones prudenciales que imponen costos de capital sobre ellos, y marcos contractuales estándar que definen cómo se mitigan. Un modelo de CVA y DVA, para ser relevante, debe operar con un conocimiento claro de estas tres dimensiones.

3.2.3. Inputs Necesarios para el Modelo

La robustez y precisión de cualquier modelo cuantitativo dependen críticamente de la calidad y la pertinencia de sus datos de entrada. El modelo desarrollado requiere un conjunto específico de inputs, que se obtienen de fuentes de mercado estándar y de la información contractual de las operaciones. Estos inputs se pueden clasificar en tres categorías principales: datos del portafolio, parámetros de riesgo de crédito y datos de mercado.

3.2.3.1. Datos Contractuales del Portafolio

Esta categoría comprende toda la información estática que define los términos legales y económicos de cada contrato forward de divisas incluido en el análisis. Para cada transacción, los siguientes campos son indispensables:

- **Identificador de la Transacción (ID):** Un código único que permite el seguimiento y la atribución de resultados a cada operación individual.
- **Contraparte:** El nombre de la entidad con la que se ha celebrado el contrato. Este dato es fundamental para agrupar las operaciones y aplicar los acuerdos de neteo.
- **Fechas del Contrato:**
 - *Fecha de Inicio (Trade Date):* Fecha en que se acordó la transacción.
 - *Fecha de Vencimiento (Maturity Date):* Fecha en la que se realiza el intercambio final de flujos de caja y el contrato expira.
- **Detalles de los Flujos de Caja:**
 - *Flujo Activo y Moneda:* El monto nocional y la divisa del flujo de caja que la entidad que valora tiene derecho a recibir al vencimiento.
 - *Flujo Pasivo y Moneda:* El monto nocional y la divisa del flujo de caja que la entidad que valora está obligada a pagar al vencimiento.

La especificación explícita de las dos patas del forward (activa y pasiva) en lugar de un único notional y un precio de ejercicio (strike) proporciona una representación más fundamental de la transacción, eliminando ambigüedades.

3.2.3.2. Parámetros de Riesgo de Crédito

Estos parámetros cuantifican la calidad crediticia de cada entidad involucrada en el portafolio y son la base para modelar la probabilidad y el impacto del default.

- **Spreads de Credit Default Swaps (CDS):** El input principal para derivar las probabilidades de incumplimiento neutrales al riesgo. Se requieren los spreads de CDS en puntos base (bps) para la entidad propia y para cada contraparte. Estos datos se obtienen de proveedores de información financiera como Bloomberg o Refinitiv, y reflejan el costo de mercado de asegurar la deuda de dichas entidades.
- **Tasa de Recuperación (Recovery Rate):** La fracción del valor de mercado de la exposición que se espera recuperar en un evento de default. Es un parámetro crucial para determinar la Pérdida Dado el Incumplimiento ($LGD = 1 - \text{Recovery Rate}$). En ausencia de datos de mercado específicos para la recuperación, se suelen utilizar supuestos estándar de la industria, como un 40 % para deuda senior no garantizada, de acuerdo con las prácticas comunes de gestión de riesgos (Gregory, 2020).

3.2.3.3. Datos de Mercado

Esta categoría incluye todas las variables de mercado necesarias para la calibración de los modelos estocásticos y para la valoración inicial del portafolio. Todos los datos de mercado se recopilan con fecha de corte correspondiente a la fecha de valoración (t_0).

- **Curvas de Descuento (Yield Curves):** Para cada moneda del portafolio (ej. USD y CLP), se necesita la curva de tasas de interés cero (zero-coupon). Estas curvas son indispensables para descontar los flujos de caja futuros y obtener su valor presente. En este modelo, las curvas de descuento son obtenidas directamente de la plataforma Bloomberg. Para el USD, se utiliza la curva construida a partir de los swaps de tasas de interés (OIS) basados en la tasa SOFR, que es la referencia estándar libre de riesgo. Para el CLP, se utiliza la curva de swaps de tasas de interés en pesos chilenos.
- **Series de Tiempo Históricas:** Se requieren datos históricos para calibrar los parámetros de los procesos estocásticos (deriva, volatilidad) y la matriz de correlación.
 - **Tasas de Interés a Corto Plazo:** Para cada moneda, se necesita una serie de tiempo de una tasa de interés representativa del mercado monetario a corto plazo. Para el USD, se utiliza la tasa **SOFR (Secured Overnight Financing Rate)**, que es la tasa de referencia principal. Para el CLP, se emplea la tasa de swaps de cámara a 90 días (**curva SPC a 90 días**), un indicador relevante del costo de financiamiento a corto plazo en el mercado chileno.
 - **Tipos de Cambio Spot:** Se utiliza una serie de tiempo histórica del tipo de cambio spot entre las monedas relevantes (ej. USD/CLP).

Todos los datos de series de tiempo históricas para este modelo fueron obtenidos de la base de datos de Bloomberg.

La correcta recopilación y el pre-procesamiento de estos inputs (como la limpieza de datos y la alineación de fechas) son pasos críticos que preceden a la ejecución del modelo y garantizan la fiabilidad de los resultados finales.

3.2.4. Factores de Riesgo: Las Fuentes de Incertidumbre del Mercado

Una vez establecidos los parámetros contractuales fijos de los derivados, el núcleo de la valoración dinámica y la gestión de riesgos reside en la identificación y el modelado de los **factores de riesgo**. Estos factores son las variables de mercado observables, pero inherentemente inciertas, cuya evolución futura dictará el valor de los flujos de caja del portafolio. En esencia, son las fuentes de aleatoriedad que impulsan las fluctuaciones en el valor de los instrumentos financieros. Para el problema específico de valorar el CVA y DVA de un portafolio de forwards de divisas, es fundamental aislar los factores de riesgo primarios que determinan su valor y, por lo tanto, su exposición futura.

El modelo desarrollado se centra en dos clases de factores de riesgo fundamentales, cuya interacción captura la mayor parte de la dinámica de valor de los forwards de divisas. La decisión de limitar el modelo a estos factores se basa en un análisis de parsimonia: se busca capturar las fuentes de riesgo más significativas sin introducir una complejidad innecesaria que podría oscurecer los resultados o hacer el modelo computacionalmente intratable.

3.2.4.1. Tasas de Interés y la Estructura Temporal

El primer factor de riesgo sistémico es la **tasa de interés**. Su influencia es doble y fundamental en la valoración de cualquier instrumento con flujos de caja futuros.

1. **Efecto Descuento:** El valor presente de cualquier pago futuro depende directamente de la tasa de descuento aplicada. Cambios en la estructura temporal de tasas de interés (ETTI), o *yield curve*, alteran el valor presente de los flujos de caja fijos de los forwards, modificando así su valor de mercado actual. Por lo tanto, toda la curva de tipos para cada moneda es, en principio, un factor de riesgo.
2. **Efecto Deriva (Cost of Carry):** En el marco de valoración neutral al riesgo, la trayectoria esperada del precio de un activo (como el tipo de cambio en un forward) depende del diferencial de tasas de interés. Este componente, conocido como la deriva o *cost of carry*, es crucial para determinar el precio forward teórico y, por ende, el valor del contrato.

Modelar la evolución estocástica de toda la curva de tipos, que es un objeto de dimensión infinita, es una tarea compleja. La literatura ha desarrollado modelos multifactoriales (como los de la familia HJM o LMM) que pueden capturar movimientos no paralelos de la curva, como cambios en la pendiente y la curvatura (Shreve, 2004). Sin embargo, estudios empíricos, como los análisis de componentes principales (PCA) sobre los movimientos de

las curvas de tipos, han demostrado consistentemente que una gran parte de la varianza total (a menudo más del 80-90 %) puede ser explicada por un único factor, que se interpreta como un movimiento paralelo o un cambio en el "nivel" general de las tasas (Litterman, 1991).

Basado en esta evidencia y en la búsqueda de un modelo tratable y robusto, el enfoque adoptado en esta tesis es el de un **modelo de un solo factor**. Se postula que la dinámica de toda la curva de tipos puede ser razonablemente aproximada por la evolución estocástica de una única variable representativa: la **tasa de interés a corto plazo** (o tasa corta, $r(t)$), definida como la tasa de interés instantánea libre de riesgo. En consecuencia, para cada moneda relevante en el portafolio (e.g., USD y CLP), se modelará y simulará la trayectoria de su respectiva tasa corta. La evolución de las curvas de descuento completas se derivará entonces de la dinámica simulada de esta tasa corta, un proceso que se detallará en la Sección 3.2.6.

3.2.4.2. Tipos de Cambio Spot

El segundo factor de riesgo, y el más directo y visible para un portafolio de forwards de divisas, es el **tipo de cambio spot**, $S(t)$. Este se define como el precio relativo de dos monedas en el mercado al contado, es decir, para entrega inmediata. Para los fines del modelo, se expresa como el número de unidades de la moneda de valoración (doméstica) por cada unidad de moneda extranjera.

El valor de un forward de divisas al vencimiento está determinado de manera unívoca por la diferencia entre el tipo de cambio spot en ese momento, $S(T)$, y el tipo de cambio pactado en el contrato, K . Por lo tanto, la incertidumbre sobre la evolución futura de $S(t)$ es la principal fuente de variabilidad en el valor del contrato y, consecuentemente, en la exposición crediticia. A diferencia de un activo como una acción, el tipo de cambio es inherentemente un precio relativo, y su dinámica esperada, como se verá, está íntimamente ligada al diferencial de tasas de interés de las dos economías, de acuerdo con el principio de paridad de tasas de interés. El modelo debe, por tanto, capturar no solo su volatilidad intrínseca, sino también esta relación fundamental con el otro factor de riesgo.

3.2.4.3. Interdependencia y Correlación de los Factores de Riesgo

Una premisa fundamental en el modelado financiero realista es que los factores de riesgo no operan en el vacío. La suposición de independencia entre las tasas de interés y los tipos de cambio, o incluso entre las tasas de interés de diferentes países, sería una simplificación ingenua y peligrosa. Los mercados globales están interconectados por flujos de capital, políticas monetarias coordinadas (o divergentes) y shocks macroeconómicos comunes que inducen una **estructura de correlación** observable entre los movimientos de los diferentes factores de riesgo.

Por ejemplo:

- Una subida inesperada de las tasas de interés en Estados Unidos por parte de la Reserva Federal (un shock en $r_{USD}(t)$) probablemente provocará una apreciación del dólar frente a otras monedas, incluido el peso chileno (un shock en $S_{USD/CLP}(t)$).

- La dinámica de las tasas de interés en economías emergentes como la chilena ($r_{CLP}(t)$) suele estar influenciada, al menos en parte, por las condiciones monetarias en las economías desarrolladas.

Ignorar estas correlaciones al generar los escenarios de Monte Carlo resultaría en una distribución conjunta de los factores de riesgo que no es representativa de la realidad del mercado. Esto podría llevar a una subestimación o sobreestimación sistemática de la exposición del portafolio. Por ejemplo, si se ignora una correlación positiva entre la exposición y la probabilidad de default de la contraparte (un fenómeno conocido como *Wrong-Way Risk*), el CVA resultante sería incorrectamente bajo (Gregory, 2020).

Por consiguiente, un pilar del diseño de este modelo es la incorporación explícita de la estructura de dependencia entre todos los factores de riesgo simulados. Esto se logrará mediante el cálculo de la **matriz de covarianza histórica** de los shocks de los factores y el uso de la **descomposición de Cholesky** para generar trayectorias simuladas que, por construcción, respeten esta estructura de correlación. Este enfoque garantiza un conjunto de escenarios de mercado más coherente y realista, lo que a su vez conduce a una estimación más fiable de la exposición crediticia y de los ajustes XVA (Glasserman, 2003). La metodología específica para este fin se desarrollará en la Sección 3.2.8.

3.2.5. Modelo de Tasas de Interés: Hull-White Extendido (Libre de Arbitraje)

La selección de un modelo para la dinámica de las tasas de interés es una de las decisiones metodológicas más importantes en la valoración de derivados. Para este estudio, se ha implementado el **modelo de Hull-White** de un factor (Hull and White, 1990), también conocido como modelo de Vasicek extendido. La elección de este modelo se fundamenta en su capacidad para cumplir con dos requisitos indispensables para la valoración de derivados:

1. **Captura de la Dinámica Económica:** Al igual que el modelo de Vasicek, conserva la propiedad de **reversión a la media**, lo que es consistente con la visión de que las tasas de interés están ancladas por la política monetaria y no divergen indefinidamente.
2. **Consistencia con el Mercado (Libre de Arbitraje):** A diferencia de los modelos de equilibrio como Vasicek, el modelo de Hull-White es un modelo de **no-arbitraje**. Esto significa que está diseñado para ajustarse perfectamente a la estructura temporal de tasas de interés (ETTI) observada en el mercado en el momento de la valoración. Esta propiedad es crucial, ya que garantiza que el modelo no genere precios para instrumentos básicos (como bonos) que contradigan sus precios de mercado, eliminando así oportunidades de arbitraje teóricas.

El modelo sigue siendo de un solo factor, lo que implica que la aleatoriedad de toda la curva de tipos es impulsada por la tasa de interés a corto plazo, $r(t)$.

3.2.5.1. Formulación Matemática y Propiedades

El modelo de Hull-White postula que la dinámica de la tasa corta $r(t)$ sigue un proceso de Ornstein-Uhlenbeck modificado, descrito por la siguiente Ecuación Diferencial Estocástica (SDE):

$$dr(t) = (\theta(t) - ar(t))dt + \sigma dW(t) \quad (3.1)$$

El cambio instantáneo en la tasa se descompone en dos componentes:

- **Deriva de Reversión a la Media Ajustada al Mercado $((\theta(t) - ar(t))dt)$:** Este término determinístico gobierna la tendencia del proceso. El parámetro $a > 0$ sigue siendo la **velocidad de reversión**. Sin embargo, en lugar de revertir a una media constante, la tasa revierte a un nivel dependiente del tiempo, $\theta(t)/a$. La función $\theta(t)$ se calibra de manera única para forzar al modelo a ajustarse a la curva de tasas de mercado. Su forma está dada por:

$$\theta(t) = \frac{\partial f(0, t)}{\partial t} + af(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}) \quad (3.2)$$

donde $f(0, t)$ es la tasa forward instantánea del mercado en el tiempo cero para un vencimiento t . Esta formulación es el corazón de la propiedad de no-arbitraje del modelo.

- **Difusión Estocástica $(\sigma dW(t))$:** Este término introduce la incertidumbre. El parámetro σ es la **volatilidad** de la tasa corta. En el marco del modelo integrado, a y σ se calibran a partir de datos históricos, pero el shock final que afecta a la tasa es un output del **proceso de simulación correlacionada**, que se detallará en la Sección [3.2.8](#).

Al ser un proceso Gaussiano, Hull-White permite la posibilidad de tasas de interés negativas. Lejos de ser una debilidad teórica, esta propiedad se ha vuelto una característica necesaria para modelar las tasas en varias economías desarrolladas en la última década ([Hull, 2022](#)).

3.2.5.2. Calibración de los Parámetros del Proceso Estocástico

Los parámetros que definen el comportamiento estocástico de cada tasa, la velocidad de reversión (a) y la volatilidad (σ), se estiman para cada moneda utilizando datos históricos. Para asegurar la máxima robustez estadística, se emplea un método de **Máxima Verosimilitud (MLE)**. Este enfoque encuentra los parámetros que maximizan la probabilidad de haber observado la serie de tiempo histórica de las tasas, basándose en la función de densidad de probabilidad del proceso de Ornstein-Uhlenbeck.

La función de log-verosimilitud (L) a maximizar (o su negativo a minimizar) es:

$$\log L(a, \sigma | r) \propto -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n-1} \left[\log(V_i) + \frac{(r_{i+1} - E_i)^2}{V_i} \right] \quad (3.3)$$

donde la media y varianza condicional del proceso en un intervalo Δt son, respectivamente:

$$E_i = r_i e^{-a\Delta t} \quad (3.4)$$

$$V_i = \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2a\Delta t}) \quad (3.5)$$

Una consideración crucial en la implementación es el tratamiento de la tasa CLP, cuya serie histórica presenta cambios de régimen violentos. Calibrar los parámetros con el historial completo llevaría a una sobreestimación de la volatilidad esperada. Para mitigar esto, se ha implementado una **calibración por régimen**:

- Para la mayoría de las monedas (ej. USD), los parámetros se calibran utilizando la serie histórica completa disponible.
- Para la tasa CLP, la calibración se realiza utilizando una ventana de datos más reciente y representativa del entorno de política monetaria actual (post-peak inflacionario). Esto produce parámetros que reflejan de manera más fidedigna la dinámica de mercado esperada, mejorando el realismo de las simulaciones.

3.2.5.3. Implementación de la Simulación y Valoración

La simulación de las trayectorias de la tasa corta se realiza utilizando la discretización de Euler-Maruyama de la Ecuación [3.1](#):

$$r(t + \Delta t) = r(t) + (\theta(t) - ar(t))\Delta t + (\mathbf{Z}_{corr}^{\Delta t})_{comp, r} \quad (3.6)$$

donde:

- $r(t)$: es el valor simulado de la tasa al inicio del paso.
- a y $\theta(t)$: son los parámetros calibrados y la función de ajuste al mercado.
- $(\mathbf{Z}_{corr}^{\Delta t})_{comp, r}$: es el **shock correlacionado y escalado** para la tasa de interés en cuestión, extraído del vector generado por la descomposición de Cholesky. Este término ya incorpora la volatilidad apropiada para el intervalo Δt y la correlación con los demás factores de riesgo.

A pesar de la calibración por régimen, la fuerte inversión de la curva de mercado CLP aún puede inducir al modelo Gaussiano a generar tasas negativas. Dado que las tasas nominales en CLP no son observables en territorio negativo, se introduce una restricción explícita como decisión de modelado pragmática. El valor simulado $r(t + \Delta t)$ para el CLP es sometido a un piso en cero:

$$r_{CLP}(t + \Delta t) = \max\{0, r_{simulada}\} \quad (3.7)$$

Esta intervención asegura la viabilidad económica de las trayectorias simuladas para esta moneda específica.

Finalmente, una ventaja clave del modelo de Hull-White es que permite la valoración de bonos cupón cero (y, por extensión, factores de descuento) a través de una **fórmula analítica cerrada**, lo que incrementa significativamente la eficiencia y precisión del modelo. El precio de un bono en el tiempo t con vencimiento T es $P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)}$, donde $A(t, T)$ y $B(t, T)$ son funciones determinísticas conocidas. Esta propiedad se explota directamente en la valoración del portafolio.

3.2.6. Curvas de Descuento Simuladas

La valoración de cualquier instrumento financiero con flujos de caja futuros depende de manera fundamental de la capacidad de descontar dichos flujos a su valor presente. Esta tarea se realiza mediante el uso de factores de descuento, los cuales se derivan de la estructura temporal de tasas de interés (ETTI), o *yield curve*. Mientras que la ETTI en la fecha de valoración (t_0) es un dato de mercado observable, la valoración de la exposición futura requiere proyectar cómo evolucionará esta curva en cada escenario de mercado simulado.

El modelo de Hull-White, como se describió en la Sección 3.2.5, proporciona una dinámica para un único punto de la curva: la tasa de interés a corto plazo, $r(t)$. Una de las principales ventajas teóricas y prácticas de este modelo es que la evolución de la tasa corta $r(t)$ implica una dinámica endógena y coherente para toda la curva de tipos, eliminando la necesidad de supuestos simplificadores como el de "shift" paralelo.

3.2.6.1. La Solución Analítica para los Factores de Descuento

El modelo de Hull-White es un modelo **afín**, lo que significa que el precio de un bono cupón cero (y, por lo tanto, el factor de descuento) puede expresarse como una función exponencial-afín de la tasa corta. Formalmente, el precio en el tiempo t de un bono que paga una unidad monetaria en el tiempo T , $P(t, T)$, está dado por:

$$P(t, T) = A(t, T)e^{-B(t, T)r(t)} \quad (3.8)$$

donde $A(t, T)$ y $B(t, T)$ son funciones determinísticas conocidas que dependen únicamente del tiempo, de los parámetros del modelo (a, σ) y de la curva de mercado inicial.

La función $B(t, T)$ captura la sensibilidad del precio del bono a los cambios en la tasa corta:

$$B(t, T) = \frac{1}{a} (1 - e^{-a(T-t)}) \quad (3.9)$$

La función $A(t, T)$ es más compleja y actúa como un término de ajuste que asegura la propiedad de no-arbitraje. Se puede expresar en términos de la curva de bonos cupón cero del mercado inicial, $P(0, T)$, y la tasa forward instantánea, $f(0, T)$:

$$\ln A(t, T) = \ln \frac{P(0, T)}{P(0, t)} + B(t, T)f(0, t) - \frac{\sigma^2}{4a}(1 - e^{-2at})B(t, T)^2 \quad (3.10)$$

Esta formulación analítica es la piedra angular de la implementación, ya que permite calcular el factor de descuento para cualquier vencimiento T en cualquier punto de la simulación t , utilizando directamente el valor simulado de la tasa corta $r(t)$ para esa trayectoria específica.

3.2.6.2. Generación de Curvas de Descuento Coherentes

El proceso para generar una familia completa de curvas de descuento simuladas es el siguiente:

1. **Simular la Tasa Corta:** Primero, se generan N_{sim} trayectorias de la tasa corta $r(t)$ a lo largo del horizonte de tiempo, como se describió en la sección anterior. Esto resulta en una matriz de valores $r(t_i)$ para cada escenario y cada paso de tiempo.

2. **Calcular Factores de Descuento:** Para un punto de simulación $(t_i, \text{escenario}_j)$, se toma el valor correspondiente de la tasa corta, $r_j(t_i)$. Luego, para cada tenor T_k de la curva de mercado, se calculan los valores de $A(t_i, T_k)$ y $B(t_i, T_k)$.
3. **Aplicar la Fórmula Analítica:** Se utiliza la Ecuación 3.8 para obtener el factor de descuento $P_j(t_i, T_k)$ para cada tenor.

Este procedimiento se repite para cada punto en el espacio de simulación (tiempo, escenario), resultando en un cubo de datos que contiene una familia de curvas de descuento completas, internamente consistentes y libres de arbitraje. Este enfoque es teóricamente superior al de shift paralelo, ya que permite que la forma de la curva (su pendiente y curvatura) cambie de manera endógena, en lugar de asumirse constante.

3.2.6.3. Interpolación para Vencimientos Arbitrarios

Aunque el modelo permite calcular el factor de descuento para cualquier vencimiento T de forma analítica, en la práctica, los flujos de caja de los contratos se descuentan utilizando la curva de descuento completa que se ha generado. Los contratos pueden vencer en fechas que no coinciden con los tenores estándar para los cuales se construyó la curva simulada.

Para valorar dichos flujos, es necesario obtener el factor de descuento para un vencimiento arbitrario. El modelo implementa la **interpolación lineal** sobre los factores de descuento simulados para este fin. Si se necesita el factor de descuento para un vencimiento T^* que se encuentra entre dos tenores de la curva, T_1 y T_2 (con $T_1 < T^* < T_2$), y se conocen sus respectivos factores de descuento simulados $P_{sim}(t_i, T_1)$ y $P_{sim}(t_i, T_2)$, el factor de descuento interpolado se calcula como:

$$P_{sim}(t_i, T^*) = P_{sim}(t_i, T_1) + \frac{P_{sim}(t_i, T_2) - P_{sim}(t_i, T_1)}{T_2 - T_1} \cdot (T^* - T_1) \quad (3.11)$$

Es importante notar que la interpolación se realiza sobre los factores de descuento (o a veces sobre sus logaritmos), en lugar de sobre las tasas cero directamente, ya que esto tiende a producir resultados más estables y consistentes con la ausencia de arbitraje (Hagan and West, 2006). Esta capacidad de interpolación es crucial para la valoración precisa de cada contrato del portafolio en cualquier punto de la simulación.

3.2.7. Modelo del Tipo de Cambio

El tipo de cambio spot, $S(t)$, es el factor de riesgo más directo y sensible para la valoración de un forward de divisas. Su evolución estocástica es la principal fuente de variabilidad en el valor del contrato. Por lo tanto, la elección de un modelo para su dinámica no es una mera decisión técnica, sino una que debe estar profundamente anclada en los principios de la economía financiera para asegurar la coherencia y la ausencia de oportunidades de arbitraje en el marco de valoración.

El modelo implementado para el tipo de cambio se basa en el **Movimiento Geométrico Browniano (GBM)**, el cual es el estándar canónico para la modelización de precios de activos que, como las divisas, no pueden tomar valores negativos (Hull, 2022). Sin embargo, a diferencia de un GBM estándar para una acción, la dinámica de un tipo

de cambio tiene una característica económica única: es un precio *relativo* entre dos economías. Esta relatividad se incorpora formalmente a través del principio de **paridad de tasas de interés**, que dicta la deriva del proceso y lo acopla directamente a los modelos de tasas de interés.

3.2.7.1. Fundamento Teórico: Paridad de Tasas de Interés y Valoración Neutral al Riesgo

La **paridad de tasas de interés (Interest Rate Parity - IRP)** es una condición de equilibrio fundamental en los mercados financieros internacionales. Postula que el rendimiento de una inversión en un bono doméstico libre de riesgo debe ser igual al rendimiento de una inversión en un bono extranjero libre de riesgo equivalente, cuando este último es cubierto contra el riesgo de tipo de cambio mediante un contrato forward (Hull, 2022). Cualquier desviación sistemática de esta relación permitiría a los arbitrajistas obtener beneficios sin riesgo.

En el contexto de la valoración de derivados en tiempo continuo y bajo la medida neutral al riesgo ($\mathbb{Q}$), este principio tiene una implicación directa sobre la deriva esperada del tipo de cambio spot. Para que no existan oportunidades de arbitraje, la tasa de crecimiento esperada del tipo de cambio, $S(t)$, debe ser exactamente igual al diferencial entre la tasa de interés instantánea libre de riesgo de la moneda doméstica (de valoración), $r_d(t)$, y la de la moneda extranjera, $r_f(t)$.

Por lo tanto, la deriva neutral al riesgo del proceso del tipo de cambio no es un parámetro a estimar libremente, sino que está dictada por la teoría:

$$\text{Deriva Neutral al Riesgo} = r_d(t) - r_f(t) \quad (3.12)$$

3.2.7.2. Formulación Matemática y Acoplamiento con los Modelos de Tasas

El modelo implementado formaliza esta idea dentro de la estructura de un Movimiento Geométrico Browniano. La Ecuación Diferencial Estocástica (SDE) que describe la dinámica de $S(t)$ es:

$$dS(t) = (r_d(t) - r_f(t))S(t)dt + \sigma_{FX}(t)S(t)dW_{FX}(t) \quad (3.13)$$

Vamos a analizar cada componente en detalle:

- **Deriva Dinámica** $(r_d(t) - r_f(t))S(t)dt$: Este término captura la tendencia del tipo de cambio. Es crucial notar que $r_d(t)$ y $r_f(t)$ no son constantes, sino que son los **mismos procesos estocásticos de Hull & White** simulados para las dos monedas. Esto crea un **acoplamiento dinámico** fundamental: la deriva del tipo de cambio en cualquier momento de la simulación depende del estado de las tasas de interés en ese mismo instante y en esa misma trayectoria de Monte Carlo.
- **Difusión Proporcional** $\sigma_{FX}(t)S(t)dW_{FX}(t)$: Este término introduce la aleatoriedad. En el marco de este modelo, la volatilidad del tipo de cambio, σ_{FX} , no se calibra como un parámetro aislado. En su lugar, la magnitud total del shock aleatorio, $(\sigma_{FX}(t)dW_{FX}(t))$, se obtiene directamente del mecanismo de simulación correlacionada que se describirá en la Sección 3.2.8. Esto asegura que la volatilidad

utilizada sea consistente con la varianza histórica observada y su covarianza con los otros factores de riesgo.

3.2.7.3. Implementación de la Simulación

La implementación práctica de la simulación del tipo de cambio está completamente integrada con el motor de simulación de riesgos. No requiere una calibración de volatilidad por separado, ya que esta se infiere conjuntamente con las demás volatilidades y correlaciones.

1. **Inferencia Conjunta de la Volatilidad:** La volatilidad del tipo de cambio se determina a partir de la **matriz de covarianza** de los shocks históricos de todos los factores de riesgo. La varianza de los log-retornos históricos del tipo de cambio constituye uno de los elementos diagonales de dicha matriz. Por lo tanto, σ_{FX}^2 es un output del proceso de análisis de datos históricos, no un input a calibrar por separado.
2. **Esquema de Simulación Discreta:** Para generar las trayectorias, se utiliza la solución exacta de la SDE (3.13). Para un paso de tiempo Δt , la evolución del tipo de cambio es:

$$S(t_{i+1}) = S(t_i) \exp \left((r_d(t_i) - r_f(t_i) - \frac{1}{2} \text{Var}_{FX}) \Delta t + (\mathbf{Z}_{corr}^{\Delta t})_{\text{comp. FX}} \right) \quad (3.14)$$

donde:

- $S(t_i)$: es el valor simulado del tipo de cambio al inicio del paso.
- $r_d(t_i)$ y $r_f(t_i)$: son los valores simulados de las tasas de interés al inicio del paso, para la misma trayectoria.
- Var_{FX} : es la **varianza anualizada** del log-retorno del tipo de cambio, obtenida directamente de la diagonal de la matriz de covarianza anualizada, Σ . El término $-\frac{1}{2} \text{Var}_{FX} \Delta t$ es la corrección por convexidad de Itô.
- $(\mathbf{Z}_{corr}^{\Delta t})_{\text{comp. FX}}$: es el **shock correlacionado y escalado** para el tipo de cambio, extraído directamente del vector generado por la descomposición de Cholesky. Este término ya incorpora tanto la volatilidad apropiada como la correlación con los shocks de las tasas de interés para el intervalo Δt .

Este enfoque unificado es metodológicamente más robusto. Asegura que todos los parámetros de segundo orden (volatilidades y correlaciones) se deriven de una única fuente coherente —la matriz de covarianza histórica— y se apliquen de manera consistente en todo el motor de simulación. Esto elimina la posibilidad de inconsistencias o doble conteo de efectos de volatilidad, resultando en un conjunto de escenarios de mercado internamente consistentes y teóricamente sólidos.

3.2.8. Correlación de Factores de Riesgo

Los modelos estocásticos individuales para las tasas de interés y los tipos de cambio, presentados en las secciones anteriores, capturan la volatilidad inherente a cada factor de riesgo. Sin embargo, una simulación realista del entorno de mercado no puede tratar estos procesos como eventos aislados. Los mercados financieros globales forman un sistema complejo y altamente interconectado, donde los shocks económicos no afectan a las variables de forma independiente. Por ejemplo, una decisión de política monetaria de un banco central importante puede influir simultáneamente en las tasas de interés domésticas, las tasas de interés de otros países y los tipos de cambio. La modelización de esta **interdependencia** es, por lo tanto, un requisito no negociable para la credibilidad y la precisión de un modelo de XVA.

Ignorar la estructura de correlación empírica entre los factores de riesgo conduciría a la generación de escenarios de mercado que, aunque individualmente posibles, serían conjuntamente improbables o incluso incoherentes desde un punto de vista económico. Esto podría llevar a una distorsión significativa en la distribución de probabilidad del valor futuro del portafolio y, en consecuencia, a una estimación errónea de los perfiles de exposición y de los ajustes de valoración (Gregory, 2020).

El presente modelo aborda este desafío implementando un marco robusto para la simulación de shocks aleatorios correlacionados, utilizando la **descomposición de Cholesky** de la matriz de covarianza histórica. Este método es un estándar en la ingeniería financiera para infundir una estructura de dependencia realista en las simulaciones de Monte Carlo (Glasserman, 2003).

3.2.8.1. Cuantificación de la Dependencia Histórica: La Matriz de Covarianza

El primer paso para modelar la correlación es medirla a partir de datos históricos. Esta medición se realiza sobre las **innovaciones** o **shocks** de los factores de riesgo, no sobre sus niveles. Se asume que estos shocks son (al menos débilmente) estacionarios, permitiendo el cálculo de sus momentos estadísticos.

1. **Definición y Cálculo de los Shocks:** Para cada uno de los k factores de riesgo del modelo (las tasas cortas de cada moneda y los tipos de cambio), se transforma su serie de tiempo histórica en una serie de cambios diarios:
 - **Para las Tasas de Interés (r_t):** El shock se define como la **diferencia aritmética**, $\Delta r_t = r_t - r_{t-1}$. Esta elección es consistente con la SDE aditiva del modelo de Vasicek.
 - **Para los Tipos de Cambio (S_t):** El shock se define como el **retorno logarítmico**, $\Delta \ln(S_t) = \ln(S_t) - \ln(S_{t-1})$. Esta es la práctica estándar, ya que los log-retornos poseen propiedades estadísticas más favorables y son consistentes con la dinámica multiplicativa del Movimiento Geométrico Browniano (Hull, 2022).
2. **Construcción de la Matriz de Covarianza (Σ):** Una vez obtenidas las series de tiempo de los k shocks, se alinean por fecha y se utilizan para calcular la **matriz de covarianza empírica**, Σ , de dimensiones $k \times k$. Esta matriz es el corazón de la estructura de dependencia:

- Los elementos de la **diagonal**, Σ_{ii} , representan la **varianza** de los shocks del factor de riesgo i . La raíz cuadrada de la varianza es la volatilidad del shock.
- Los elementos **fuera de la diagonal**, Σ_{ij} (con $i \neq j$), representan la **covarianza** entre los shocks del factor i y el factor j . Un valor positivo indica que tienden a moverse en la misma dirección, mientras que un valor negativo indica una tendencia a moverse en direcciones opuestas.

La matriz Σ resultante es, por construcción, simétrica. Para que la descomposición de Cholesky sea aplicable, también debe ser definida positiva, una condición que generalmente se cumple si los factores de riesgo no son linealmente dependientes.

3.2.8.2. Generación de Shocks Correlacionados mediante Descomposición de Cholesky

El objetivo es generar vectores de shocks aleatorios, $\mathbf{Z}_{corr}$, para la simulación de Monte Carlo, de tal manera que su distribución conjunta sea normal multivariada con media cero y matriz de covarianza Σ . La descomposición de Cholesky proporciona el mecanismo para lograrlo.

El método factoriza la matriz de covarianza Σ en el producto de una matriz triangular inferior L y su transpuesta L^T :

$$\Sigma = LL^T \quad (3.15)$$

La matriz L actúa como una transformación lineal que convierte un conjunto de ruidos independientes en un conjunto de ruidos con la estructura de covarianza deseada. El proceso de simulación es el siguiente:

1. Se calcula la matriz L a partir de Σ utilizando un algoritmo numérico para la descomposición de Cholesky.
2. En cada paso de tiempo Δt de cada trayectoria de Monte Carlo, se genera un vector ϵ de k variables aleatorias independientes, extraídas de una distribución normal estándar, $N(0, 1)$. Este vector representa los shocks "puros." fundamentales, sin correlación ni escala de volatilidad.
3. Se genera el vector de shocks de mercado correlacionados, $\mathbf{Z}_{corr}^{\Delta t}$, mediante la transformación:

$$\mathbf{Z}_{corr}^{\Delta t} = L \cdot \epsilon \cdot \sqrt{\Delta t} \quad (3.16)$$

Es fundamental entender la naturaleza del vector resultante, $\mathbf{Z}_{corr}^{\Delta t}$. Gracias a la propiedad de la covarianza de las transformaciones lineales, la matriz de covarianza de este vector es:

$$\text{Cov}(\mathbf{Z}_{corr}^{\Delta t}) = \text{Cov}(L\epsilon\sqrt{\Delta t}) = L \cdot \text{Cov}(\epsilon) \cdot L^T \cdot (\sqrt{\Delta t})^2 = L \cdot I \cdot L^T \cdot \Delta t = \Sigma \Delta t \quad (3.17)$$

Esto significa que el vector $\mathbf{Z}_{corr}^{\Delta t}$ no contiene simplemente números $N(0, 1)$ correlacionados. Cada componente de este vector ya es un shock aleatorio con la **varianza y correlación correctas para el intervalo de tiempo Δt** . Es decir, el i -ésimo componente de $\mathbf{Z}_{corr}^{\Delta t}$ ya tiene una varianza de $\sigma_i^2 \Delta t$, donde σ_i^2 es la varianza anualizada del i -ésimo factor de riesgo.

3.2.8.3. Integración en los Modelos Estocásticos

Esta propiedad del vector de shocks correlacionados simplifica y clarifica su integración en las ecuaciones de simulación. El término de difusión de las SDEs ya no requiere una multiplicación explícita por el parámetro de volatilidad σ , ya que este efecto ya está embebido en la matriz L y, por lo tanto, en el shock generado.

La ecuación de simulación para la tasa de interés de Vasicek (Ecuación 3.18) se reescribe como:

$$r(t + \Delta t) = r(t) + a(b - r(t))\Delta t + (\mathbf{Z}_{corr}^{\Delta t})_{comp. r} \quad (3.18)$$

donde $(\mathbf{Z}_{corr}^{\Delta t})_{comp. r}$ es el componente del vector de shocks correspondiente a esta tasa de interés.

De manera similar, la ecuación para el tipo de cambio se simplifica, ya que el término $\sigma_{FX}\sqrt{\Delta t}Z_{FX,i+1}$ es reemplazado directamente por el componente correspondiente del vector de shocks:

$$S(t + \Delta t) = S(t) \exp \left((r_d(t) - r_f(t) - \frac{1}{2}\sigma_{FX}^2)\Delta t + (\mathbf{Z}_{corr}^{\Delta t})_{comp. FX} \right) \quad (3.19)$$

El término σ_{FX}^2 se mantiene en la deriva como parte de la corrección por convexidad de Itô, y se obtiene de la diagonal de la matriz de covarianza Σ (es la varianza anualizada del log-retorno del tipo de cambio).

3.2.9. Valoración de Forwards en las Simulaciones (Mark-to-Future)

Las simulaciones de Monte Carlo generan un vasto conjunto de trayectorias futuras para los factores de riesgo. Sin embargo, estos escenarios de tasas de interés y tipos de cambio son solo un medio para un fin. El objetivo final es determinar cómo estos escenarios impactan el valor del portafolio. Esta sección detalla el proceso de **valoración "Mark-to-Future" (MtF)**, que consiste en recalculer el valor de mercado (Mark-to-Market, MtM) de cada contrato forward en cada nodo (paso de tiempo, trayectoria) de la simulación. El resultado de este proceso es un cubo tridimensional de valores de portafolio que constituye la materia prima para el cálculo de los perfiles de exposición.

El principio de valoración aplicado en cada punto de la simulación es el mismo que se utilizaría para valorar el contrato en la realidad en esa fecha, bajo el supuesto de que el escenario de mercado simulado se ha materializado: el valor del forward es el **valor presente neto** de sus flujos de caja futuros esperados.

3.2.9.1. Principio de Valoración por Descuento de Flujos de Caja

Un contrato forward de divisas es, en esencia, un acuerdo para intercambiar un monto nominal de una moneda por un monto nominal de otra en una fecha de vencimiento futura, T . El valor de este contrato en cualquier momento $t < T$ puede descomponerse en el valor de sus dos "patas":

1. **La Pata Activa:** El derecho a recibir un flujo de caja futuro. Su valor es el valor presente de dicho flujo.

2. **La Pata Pasiva:** La obligación de pagar un flujo de caja futuro. Su valor es el valor presente de dicho pago.

El valor de mercado neto del contrato es simplemente la diferencia entre el valor de la pata activa y el de la pata pasiva. Formalmente, para una trayectoria de simulación j y en un paso de tiempo t_i , el MtM del forward es:

$$\text{MtM}_j(t_i) = \text{VP}_j(\text{Pata Activa}, t_i) - \text{VP}_j(\text{Pata Pasiva}, t_i) \quad (3.20)$$

donde $\text{VP}_j(\cdot, t_i)$ denota el valor presente calculado utilizando los datos de mercado de la trayectoria j en el tiempo t_i .

El cálculo del valor presente de un flujo de caja futuro, C , a ser recibido en la fecha de vencimiento T en una moneda específica, requiere dos componentes clave del escenario simulado:

$$\text{VP}_j(C, t_i) = C \cdot P_{j,\text{moneda}}(t_i, T) \cdot S_{j,\text{conversión}}(t_i) \quad (3.21)$$

- $P_{j,\text{moneda}}(t_i, T)$: Es el **factor de descuento simulado** para la moneda del flujo de caja. Este factor descuenta el flujo desde el vencimiento T hasta el tiempo de valoración t_i y se obtiene de la curva de descuento simulada para esa moneda y en esa trayectoria específica, como se describió en la Sección [3.2.6](#)
- $S_{j,\text{conversión}}(t_i)$: Es el **tipo de cambio spot simulado** en el tiempo t_i . Es necesario para convertir el valor presente del flujo (que está en su moneda original) a la moneda de valoración del portafolio (e.g., USD). Si la moneda del flujo ya es la moneda de valoración, este factor es simplemente 1.

3.2.9.2. Implementación Práctica y Manejo de Vencimientos

El proceso de valoración se implementa iterando a través de cada forward del portafolio. Para cada forward, en cada nodo (t_i, j) de la simulación, se realizan los siguientes pasos:

1. **Cálculo del Tiempo Remanente:** Se determina el tiempo que falta desde el punto de valoración t_i hasta el vencimiento del contrato T . Este tiempo remanente, $\tau = T - t_i$, es el período sobre el cual se debe aplicar el descuento.
2. **Obtención del Factor de Descuento mediante Interpolación:** Como se detalló en la Sección [3.2.6](#), las curvas de descuento simuladas se definen para un conjunto discreto de tenores. Es altamente improbable que el tiempo remanente τ coincida exactamente con uno de estos tenores. Por lo tanto, un paso crítico es la **interpolación lineal** para obtener el factor de descuento preciso, $P(t_i, T)$, para el vencimiento exacto del contrato. Esta interpolación se realiza sobre la curva de factores de descuento simulada para la moneda correspondiente en el nodo (t_i, j) . Este paso es fundamental para la precisión de la valoración, ya que un pequeño error en el factor de descuento puede tener un impacto significativo en el valor presente de flujos de caja grandes.

3. Valoración de Cada Pata:

- Se calcula el valor presente de la pata activa, descontando su flujo nocional con el factor de descuento interpolado de su propia moneda y convirtiéndolo a la moneda de valoración con el tipo de cambio spot simulado.
 - Se repite el proceso para la pata pasiva, utilizando la curva de descuento y el tipo de cambio correspondientes a su moneda.
4. **Cálculo del MtM Neto:** Se resta el valor presente de la pata pasiva del de la pata activa para obtener el MtM del forward en ese nodo específico de la simulación. Este valor se almacena en el cubo"de valoraciones.

Este procedimiento se repite para todos los forwards, en todos los pasos de tiempo y para todas las trayectorias de Monte Carlo. El resultado es una matriz tridimensional exhaustiva ('n_forwards' x 'n_simulaciones' x 'n_pasos_tiempo') que contiene la distribución completa de los posibles valores futuros del portafolio. Esta distribución es la base para entender no solo el valor esperado del portafolio, sino también su riesgo, su volatilidad y, lo más importante para este estudio, su exposición al riesgo de crédito. La valoración en el tiempo inicial, t_0 , es un caso particular de este proceso y sirve como un punto de validación crucial, ya que su resultado debe coincidir con la valoración tradicional del forward utilizando los datos de mercado iniciales.

3.2.10. Cuantificación de la Exposición Futura

El proceso de valoración "Mark-to-Future", descrito en la Sección 3.2.9, produce una distribución completa de los posibles valores de mercado (MtM) del portafolio en cada instante futuro. Si bien esta distribución es rica en información, para el cálculo del CVA y DVA es necesario agregarla en métricas específicas que cuantifiquen la **exposición al riesgo de crédito**. La exposición no es simplemente el valor esperado del portafolio, sino que se define como la pérdida económica que se sufriría en caso de un incumplimiento de la contraparte. Por lo tanto, solo los valores de mercado positivos (cuando la contraparte nos debe dinero) contribuyen a la exposición para el cálculo del CVA.

Esta sección detalla cómo se procesa el cubo"de valoraciones simuladas para derivar los perfiles de exposición esperada, que son el input principal para las fórmulas de CVA y DVA.

3.2.10.1. Definición de las Métricas de Exposición

La exposición al riesgo de crédito es, por naturaleza, asimétrica. El riesgo para una entidad solo se materializa cuando el valor del portafolio con una contraparte es positivo. Si es negativo, la entidad tiene una obligación, no una exposición al riesgo de crédito de su contraparte (aunque sí tiene una exposición a su propio riesgo de crédito, lo que es relevante para el DVA). Para capturar esta asimetría, se definen dos métricas de exposición clave (Gregory, 2020; Hull, 2022):

1. **Exposición Futura (Exposure, E):** En un tiempo futuro t_i y para una trayectoria de simulación j , la exposición al riesgo de crédito de la contraparte se define como el valor de mercado del portafolio, $V_j(t_i)$, si este es positivo, y cero en caso contrario.

$$E_j(t_i) = \max(V_j(t_i), 0) \quad (3.22)$$

Esta función ' $\max(V, 0)$ ' es análoga al payoff de una opción de compra (call), lo que resalta la naturaleza opcional del riesgo de crédito: la pérdida solo ocurre en los estados del mundo favorables para la entidad.

2. **Exposición Negativa (Negative Exposure, NE):** De manera simétrica, la exposición negativa representa la obligación de la entidad hacia la contraparte. Se define como el valor absoluto del valor de mercado del portafolio cuando este es negativo, y cero en caso contrario.

$$NE_j(t_i) = \max(-V_j(t_i), 0) = -\min(V_j(t_i), 0) \quad (3.23)$$

Esta métrica es el insumo para el cálculo del DVA.

3.2.10.2. Cálculo de los Perfiles de Exposición Esperada

El CVA y el DVA no se basan en la exposición de un único escenario, sino en la **exposición esperada** a través de todos los escenarios posibles, calculada bajo la medida neutral al riesgo $\mathbb{Q}$. A partir de las exposiciones calculadas en cada nodo de la simulación, se derivan los perfiles de exposición esperada promediando a través de las N_{sims} trayectorias de Monte Carlo.

- **Exposición Esperada (EE) o Expected Positive Exposure (EPE):** La EE en el tiempo t_i es el promedio de todas las exposiciones futuras positivas en ese instante. Es la métrica central para el cálculo del CVA.

$$EE(t_i) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[\max(V(t_i), 0)] \approx \frac{1}{N_{sims}} \sum_{j=1}^{N_{sims}} \max(V_j(t_i), 0) \quad (3.24)$$

El resultado es un perfil, o vector, $EE(t_i)$ que muestra cómo se espera que evolucione la exposición crediticia a lo largo del tiempo. Típicamente, para un forward, este perfil tiene una forma de "joroba", comenzando en un valor bajo, aumentando a medida que la incertidumbre crece y luego disminuyendo a cero al acercarse al vencimiento.

- **Exposición Esperada Negativa (ENE):** De forma análoga, la ENE en el tiempo t_i es el promedio de todas las exposiciones negativas y es la métrica utilizada para el cálculo del DVA.

$$ENE(t_i) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[-\min(V(t_i), 0)] \approx \frac{1}{N_{sims}} \sum_{j=1}^{N_{sims}} -\min(V_j(t_i), 0) \quad (3.25)$$

3.2.10.3. Impacto del Neteo (Netting)

Un aspecto fundamental en la gestión del riesgo de contraparte es la existencia de acuerdos de neteo, formalizados a través de un **ISDA Master Agreement**. Estos acuerdos permiten que, en caso de incumplimiento de una de las partes, todas las transacciones cubiertas por el acuerdo se liquiden por un único monto neto, en lugar de liquidar cada transacción individualmente. Esto tiene un efecto drástico en la reducción de la exposición.

El modelo implementa el neteo a nivel de contraparte. El cálculo de la exposición no se realiza sumando las exposiciones individuales de cada contrato, sino siguiendo estos pasos:

1. **Agregación del MtM del Portafolio:** Para cada contraparte, en cada nodo (t_i, j) de la simulación, se suman los valores de mercado de *todos* los contratos vigentes con esa contraparte para obtener un MtM de portafolio neto.

$$V_{j,\text{portafolio}}(t_i) = \sum_{k \in \text{PortafolioCp}} V_{j,k}(t_i) \quad (3.26)$$

2. **Cálculo de la Exposición Neta:** Las métricas de exposición (EE y ENE) se calculan aplicando las funciones 'max' y 'min' sobre este **MtM de portafolio neto**, no sobre los MtM individuales. Por ejemplo:

$$EE_{\text{neta}}(t_i) \approx \frac{1}{N_{\text{sim}}} \sum_{j=1}^{N_{\text{sim}}} \max \left(\sum_{k \in \text{PortafolioCp}} V_{j,k}(t_i), 0 \right) \quad (3.27)$$

Es importante destacar la desigualdad fundamental del neteo:

$$EE_{\text{neta}}(t_i) \leq \sum_{k \in \text{PortafolioCp}} EE_k(t_i) \quad (3.28)$$

La exposición del portafolio neto es siempre menor o igual que la suma de las exposiciones individuales, ya que las operaciones con MtM negativo compensan a aquellas con MtM positivo dentro del mismo conjunto de neteo. El modelo, por lo tanto, captura correctamente este importante mecanismo de mitigación de riesgo, lo que resulta en un cálculo de CVA y DVA más realista y alineado con la práctica de la industria.

3.2.11. Modelado del Riesgo de Crédito

Una vez cuantificada la exposición futura a través de los perfiles de EE y ENE, el siguiente paso es ponderar esta exposición por la probabilidad de que ocurra un evento de crédito y por la severidad de la pérdida en dicho evento. Esta sección detalla cómo el modelo traduce los precios de mercado de los instrumentos de crédito en los componentes fundamentales del riesgo de crédito: la Probabilidad de Default (PD) y la Pérdida Dado el Incumplimiento (LGD).

Para la valoración de CVA y DVA, es imperativo utilizar parámetros de crédito que sean consistentes con los precios de mercado, es decir, derivados bajo la **medida neutral al riesgo** ($\mathbb{Q}$). La fuente de información por excelencia para estos parámetros son los **Credit Default Swaps (CDS)**.

3.2.11.1. Credit Default Swaps (CDS) como Insumo de Mercado

Un Credit Default Swap es un derivado financiero que funciona como un seguro contra el incumplimiento de una entidad de referencia (un gobierno o una corporación). El comprador del CDS realiza pagos periódicos (el "spread" del CDS) al vendedor. A cambio,

si la entidad de referencia incumple, el vendedor del CDS compensa al comprador por la pérdida sufrida en su exposición a dicha entidad (Hull, 2022).

El spread de un CDS, cotizado en puntos base (bps), es el precio de mercado de este seguro y, por lo tanto, es un indicador directo y líquido de la percepción del mercado sobre la calidad crediticia de la entidad de referencia. Un spread más alto implica un mayor riesgo percibido. El modelo utiliza los spreads de CDS como el principal input para derivar las probabilidades de default, ya que estos precios reflejan el consenso del mercado bajo la medida neutral al riesgo.

3.2.11.2. Pérdida Dado el Incumplimiento (LGD)

La Pérdida Dado el Incumplimiento (LGD) representa la proporción de la exposición que se anticipa que no será recuperada en un proceso de liquidación o reestructuración tras un default. Se define como:

$$\text{LGD} = 1 - R \quad (3.29)$$

donde R es la **Tasa de Recuperación** (Recovery Rate).

La tasa de recuperación es un parámetro exógeno en el modelo. Su estimación precisa es un desafío, ya que depende de factores complejos como la jurisdicción legal, la antigüedad de la deuda y las condiciones económicas en el momento del default. En la práctica industrial, a menudo se utilizan valores estándar basados en estudios empíricos sobre datos históricos de defaults. Para este modelo, y en línea con prácticas comunes, se asume una tasa de recuperación fija (e.g., 40 %), lo que implica una LGD del 60 % para deuda senior no garantizada, aunque este parámetro es configurable (Gregory, 2020).

3.2.11.3. De Spreads de CDS a Probabilidades de Default

El proceso de convertir un spread de CDS en una curva de probabilidades de default es un ejercicio de "bootstrapping." inferencia. El principio fundamental es que el valor presente de los pagos esperados por el comprador del seguro (la pata de primas) debe ser igual al valor presente de los pagos esperados por el vendedor (la pata de contingencia o protección).

3.2.11.4. La Tasa de Riesgo (Hazard Rate, λ)

Para modelar los tiempos de default, se utiliza el concepto de **tasa de riesgo** o **tasa de intensidad de default**, denotada por λ . Esta representa la probabilidad instantánea de default, condicional a que la entidad ha sobrevivido hasta ese momento. Asumiendo, por simplicidad, que la tasa de riesgo λ es constante a lo largo del tiempo, existe una aproximación robusta y ampliamente utilizada que la relaciona directamente con el spread del CDS (S_{CDS}) y la LGD (Hull, 2022):

$$S_{CDS} \approx \lambda \cdot \text{LGD} \quad (3.30)$$

Esta relación se puede invertir para extraer la tasa de riesgo implícita en el precio de mercado del CDS:

$$\lambda = \frac{S_{CDS}}{\text{LGD}} = \frac{S_{CDS}}{1 - R} \quad (3.31)$$

Esta tasa de riesgo λ es el parámetro fundamental que gobernará la distribución de probabilidad del tiempo de default.

3.2.11.5. Probabilidad de Supervivencia y Probabilidad de Default Acumulada

Con una tasa de riesgo constante λ , la probabilidad de que una entidad sobreviva (es decir, no incumpla) más allá de un tiempo futuro t , denotada como $PS(t)$, sigue un decaimiento exponencial:

$$PS(t) = e^{-\lambda t} \quad (3.32)$$

Consecuentemente, la probabilidad de que el default ocurra en cualquier momento *antes* o *en* el tiempo t (la probabilidad de default acumulada) es:

$$PD_{accum}(t) = 1 - PS(t) = 1 - e^{-\lambda t} \quad (3.33)$$

3.2.11.6. Probabilidad de Default Marginal

Para el cálculo de CVA y DVA, que es una suma de pérdidas esperadas en diferentes períodos de tiempo, se necesita la **probabilidad de default marginal**. Esta es la probabilidad de que el default ocurra específicamente dentro de un intervalo de tiempo futuro, $(t_{i-1}, t_i]$, dado que la entidad ha sobrevivido hasta t_{i-1} . Se calcula como la disminución de la probabilidad de supervivencia durante ese intervalo:

$$PD(t_{i-1}, t_i] = PS(t_{i-1}) - PS(t_i) = e^{-\lambda t_{i-1}} - e^{-\lambda t_i} \quad (3.34)$$

Esta es la probabilidad que se multiplicará por la exposición esperada en cada período para calcular la pérdida esperada en ese intervalo. El modelo calcula este perfil de probabilidades marginales para cada contraparte y para la entidad propia, utilizando sus respectivos parámetros de CDS y recuperación, creando así el conjunto completo de inputs de riesgo de crédito necesarios para la formulación final de XVA.

3.2.12. Cálculo de CVA, DVA y Ajuste por Neteo

Las secciones precedentes han establecido los bloques de construcción fundamentales del modelo: los perfiles de exposición futura (EE y ENE) derivados de la simulación de Monte Carlo, y los perfiles de probabilidad de default (PD) inferidos de los precios de mercado de los CDS. Esta sección final detalla cómo estos componentes se integran en un marco de valoración coherente para calcular el Credit Value Adjustment (CVA), el Debit Value Adjustment (DVA) y, por extensión, el ajuste bilateral (BVA), incorporando el efecto crucial de los acuerdos de neteo.

3.2.12.1. Formulación del CVA y DVA en Tiempo Discreto

Teóricamente, el CVA y el DVA son integrales sobre el tiempo del valor presente de las pérdidas o beneficios esperados en caso de default. En la práctica, para su implementación computacional, estas integrales se aproximan mediante una suma sobre una partición discreta del tiempo, $[t_0, t_1, \dots, t_N]$, donde $t_0 = 0$ y t_N es el horizonte de la simulación.

3.2.12.2. Credit Value Adjustment (CVA)

El CVA cuantifica el costo del riesgo de incumplimiento de la contraparte. Se calcula como la suma, a través de todos los intervalos de tiempo futuros, del producto de tres factores: la exposición esperada a la contraparte, la probabilidad de que la contraparte incumpla en ese intervalo, y la pérdida que se sufriría en tal evento, todo ello descontado a valor presente. La fórmula discreta implementada en el modelo es:

$$\text{CVA} = \text{LGD}_{\text{cp}} \sum_{i=1}^N \text{DF}(0, t_i) \cdot \text{EE}_{\text{cp}}(t_i) \cdot \text{PD}_{\text{cp}}(t_{i-1}, t_i] \quad (3.35)$$

donde:

- LGD_{cp} : Es la Pérdida Dado el Incumplimiento de la contraparte $(1 - R_{\text{cp}})$.
- $\text{DF}(0, t_i)$: Es el factor de descuento libre de riesgo desde el tiempo futuro t_i hasta el presente $t_0 = 0$. Se obtiene de la curva de descuento inicial de la moneda de valoración.
- $\text{EE}_{\text{cp}}(t_i)$: Es la Exposición Esperada neta a la contraparte en el tiempo t_i , como se definió en la Sección [3.2.10](#).
- $\text{PD}_{\text{cp}}(t_{i-1}, t_i]$: Es la probabilidad marginal de que la contraparte incumpla en el intervalo $(t_{i-1}, t_i]$, calculada en la Sección [3.2.11](#).

El CVA resultante es un valor monetario único que representa el costo total del riesgo de crédito de la contraparte a lo largo de la vida del portafolio. Por convención, se trata como un costo, reduciendo el valor del portafolio.

3.2.12.3. Debit Value Adjustment (DVA)

El DVA es el ajuste simétrico que cuantifica el beneficio contable derivado del riesgo de incumplimiento propio. Su formulación es análoga a la del CVA, pero utiliza la exposición de la contraparte hacia la entidad (la ENE) y la probabilidad de incumplimiento propia.

$$\text{DVA} = \text{LGD}_{\text{propia}} \sum_{i=1}^N \text{DF}(0, t_i) \cdot \text{ENE}(t_i) \cdot \text{PD}_{\text{propia}}(t_{i-1}, t_i] \quad (3.36)$$

donde los componentes (LGD, ENE, PD) corresponden ahora a la entidad que realiza la valoración. El DVA es un beneficio que aumenta el valor del portafolio.

3.2.12.4. Ajuste de Valoración Bilateral (BVA)

El ajuste total por riesgo de crédito bilateral (Bilateral Valuation Adjustment - BVA) es simplemente la combinación del CVA y el DVA. Refleja el valor neto del riesgo de crédito desde ambas perspectivas.

$$\text{BVA} = \text{DVA} - \text{CVA} \quad (3.37)$$

Un BVA positivo indica que el beneficio del riesgo propio supera el costo del riesgo de la contraparte, mientras que un BVA negativo indica lo contrario.

3.2.12.5. Implementación del Neteo por Contraparte

Un aspecto metodológico fundamental y una característica clave del modelo es la correcta implementación de los **acuerdos de neteo (netting sets)**. En los mercados OTC, es estándar que las contrapartes operen bajo un ISDA Master Agreement, que estipula que en caso de default, todas las transacciones pendientes se netean para determinar una única obligación de pago final. Este mecanismo es uno de los mitigantes de riesgo de crédito más efectivos (Gregory, 2020).

El modelo incorpora este principio de la siguiente manera:

1. **Agregación a Nivel de Contraparte:** El bucle principal de cálculo no se realiza por transacción, sino que se agrupan todas las transacciones por contraparte.
2. **Cálculo de la Exposición Neta:** Como se describió en la Sección 3.2.10, el perfil de Exposición Esperada (EE) para una contraparte se calcula sobre la suma de los MtM de *todos* los contratos con esa contraparte. Es decir, primero se netea el valor del portafolio en cada nodo de la simulación, y solo después se calcula la exposición ($\max(MtM_{neto}, 0)$).
3. **Cálculo del XVA a Nivel de Contraparte:** Las Ecuaciones (3.35) y (3.36) se aplican a nivel de contraparte, utilizando el perfil de exposición neta. Esto produce un único valor de CVA y DVA para el portafolio total con esa contraparte.

3.2.12.6. Prorratio a Nivel de Transacción

Si bien el CVA y el DVA son, en esencia, riesgos a nivel de portafolio (o de conjunto de neteo), para fines de contabilidad, gestión de la rentabilidad y asignación de costos, a menudo es necesario asignar una porción de estos ajustes a cada transacción individual. El modelo implementa un método de **prorratio** para realizar esta asignación.

Una vez que se ha calculado el CVA total para una contraparte, CVA_{total_cp} , este se distribuye entre las M transacciones individuales con esa contraparte. El método de asignación se basa en la contribución de cada transacción a la exposición total del portafolio. Específicamente, el CVA asignado a la transacción k es:

$$CVA_k = CVA_{total_cp} \cdot \left(\frac{\int_0^T DF(0, t) \cdot EE_k(t) \cdot dPD(t)}{\sum_{m=1}^M \int_0^T DF(0, t) \cdot EE_m(t) \cdot dPD(t)} \right) \quad (3.38)$$

donde $EE_k(t)$ es la exposición esperada de la transacción k calculada de forma *standalone* (sin neteo). En la práctica, el modelo simplifica este cálculo ponderado utilizando una proxy, como la contribución de la exposición standalone total de cada operación. El mismo principio de prorratio se aplica para el DVA, utilizando la ENE como base de asignación.

Este enfoque de calcular globalmente, asignar localmente, asegura que el beneficio de la diversificación y el neteo se capture correctamente a nivel de portafolio, al tiempo que proporciona una atribución granular de los costos y beneficios del riesgo de crédito a nivel de transacción individual.

Capítulo 4

Implementación computacional del Modelo

4.1. Del Diseño Matemático al Prototipo Funcional

Los capítulos precedentes han establecido el marco teórico y la arquitectura matemática para la valoración del riesgo de crédito de contraparte. Se ha detallado la formulación del CVA y DVA, la especificación de los modelos estocásticos para los factores de riesgo y la metodología de simulación de Monte Carlo. Sin embargo, la transición de un conjunto de ecuaciones y conceptos teóricos a una herramienta de análisis cuantitativo funcional y fiable es un desafío en sí mismo, que requiere un diseño de software cuidadoso y decisiones de implementación informadas.

Este capítulo se dedica a documentar precisamente ese proceso: la **implementación computacional** del modelo de XVA. El objetivo no es realizar una exégesis del código línea por línea, lo cual sería impropio de un trabajo de esta naturaleza, sino más bien describir la **arquitectura del software**, justificar las **decisiones tecnológicas** y explicar cómo se han abordado los **desafíos prácticos** inherentes a un proyecto de simulación financiera. En esencia, se busca responder a la pregunta: ¿cómo se ha construido una herramienta de software que traduce fielmente la metodología matemática en cálculos prácticos, eficientes y robustos?

Para lograr este objetivo, el prototipo computacional se ha desarrollado siguiendo tres principios rectores fundamentales, que han guiado todas las decisiones de diseño e implementación:

1. **Consistencia Metodológica:** El principio primordial ha sido asegurar una correspondencia unívoca y rigurosa entre la formulación matemática descrita en la metodología y su implementación en el código. Cada función y cada algoritmo deben ser una traducción directa y validable de la teoría subyacente, desde la discretización de las Ecuaciones Diferenciales Estocásticas hasta la agregación de las exposiciones neteadas.
2. **Modularidad y Mantenibilidad:** Conscientes de que los modelos financieros están en constante evolución y que los prototipos a menudo sirven de base para herramientas más complejas, el software ha sido diseñado con una arquitectura estrictamente modular. Cada etapa lógica del proceso de cálculo (carga de datos,

calibración, simulación, valoración, cálculo de XVA y generación de reportes) está encapsulada en funciones independientes y bien definidas. Este enfoque no solo mejora la legibilidad y la claridad del código, sino que también facilita las pruebas unitarias de cada componente, simplifica la depuración de errores y permite futuras extensiones o modificaciones con un impacto mínimo en el resto del sistema.

3. **Eficiencia y Robustez:** Las simulaciones de Monte Carlo son, por naturaleza, computacionalmente intensivas. Por ello, se ha puesto un énfasis especial en la eficiencia, favoreciendo el uso de operaciones vectoriales y librerías numéricas de alto rendimiento. Al mismo tiempo, se ha priorizado la robustez, implementando controles y validaciones en puntos críticos (como la carga de datos) para proteger el modelo contra inputs erróneos y asegurar la fiabilidad de los resultados.

Las secciones siguientes detallarán los aspectos prácticos de esta implementación. Se comenzará por justificar la elección de la plataforma tecnológica (Python y su ecosistema científico), para luego describir la arquitectura modular del software con mayor detalle. Finalmente, se discutirán algunos de los desafíos de implementación específicos que se encontraron y las soluciones que se adoptaron, ofreciendo una visión completa del proceso de construcción del prototipo computacional.

4.2. Selección de la Plataforma Tecnológica

La elección de un entorno de programación para un proyecto de modelado cuantitativo es una decisión estratégica que trasciende la mera preferencia sintáctica. La plataforma seleccionada debe proporcionar un ecosistema robusto que equilibre el rendimiento computacional, la capacidad analítica y la velocidad de desarrollo. Para la implementación del prototipo de CVA y DVA, se ha optado por el lenguaje de programación **Python**, una decisión fundamentada en su posición preeminente como estándar de facto en gran parte de la industria financiera y la ciencia de datos. Esta elección se debe a su potente ecosistema de librerías científicas, su legibilidad y su flexibilidad.

El principal activo de Python para el análisis cuantitativo no reside en el lenguaje base en sí, sino en su vasto **ecosistema científico** de código abierto. La librería **NumPy** (**Numerical Python**) constituye el pilar de todo el cálculo numérico, proporcionando estructuras de datos de matrices multidimensionales de alto rendimiento y un conjunto de funciones matemáticas optimizadas. La capacidad de NumPy para realizar **operaciones vectoriales**, aplicando cálculos a arreglos completos de datos de una sola vez, es la clave para la eficiencia del motor de simulación de Monte Carlo. Dado que el núcleo de NumPy está implementado en lenguajes compilados de bajo nivel como C, estas operaciones se ejecutan a una velocidad órdenes de magnitud superior a la de los bucles nativos de Python, haciendo viables las simulaciones a gran escala.

Sobre esta base numérica, la librería **Pandas** introduce el ‘DataFrame’, una estructura de datos tabular intuitiva y poderosa, indispensable para la manipulación de datos financieros. En este proyecto, Pandas es la herramienta principal para la ingesta, limpieza y organización de los datos de entrada, como los portafolios de derivados y las series de tiempo históricas obtenidas de Bloomberg. Su capacidad para alinear datos, gestionar fe-

chas y manejar información faltante simplifica drásticamente la fase de pre-procesamiento de datos, una tarea a menudo compleja y propensa a errores.

Además, el ecosistema ofrece herramientas especializadas que garantizan la robustez metodológica. Para la calibración del modelo de tasas de interés de Vasicek, se recurre a la librería **Scikit-learn**, el estándar en aprendizaje automático. Aprovechar su módulo de regresión lineal asegura que la estimación de parámetros se base en un algoritmo numéricamente estable y ampliamente validado por la comunidad científica, evitando la necesidad de implementar rutinas de optimización propias. Del mismo modo, el acceso a las rutinas de álgebra lineal de **SciPy**, como la descomposición de Cholesky, proporciona una base sólida para la generación de variables aleatorias correlacionadas.

Más allá de la potencia computacional, la sintaxis de Python promueve una notable **productividad y legibilidad**. Su diseño limpio permite que las fórmulas matemáticas y la lógica del modelo se traduzcan en código de una manera casi directa, funcionando como una suerte de "pseudo-código ejecutable". Esta claridad no solo acelera el ciclo de desarrollo y prueba, sino que también hace que el código sea más fácil de auditar, validar y mantener a largo plazo, un aspecto crucial en un entorno corporativo.

Finalmente, la **flexibilidad e interoperabilidad** de Python son determinantes. Su capacidad para interactuar de forma nativa con formatos de archivo omnipresentes en el mundo financiero, como los libros de Excel, permite que el modelo se integre sin fricciones en los flujos de trabajo existentes, leyendo datos de entrada y exportando resultados detallados para su análisis por parte de los usuarios finales. Su naturaleza de código abierto y multiplataforma garantiza además la portabilidad y la ausencia de costos de licencia, asegurando que el prototipo pueda ser desplegado y extendido en el futuro sin barreras tecnológicas.

En resumen, la selección de Python no responde a una única característica, sino a la sinergia de su ecosistema: la potencia de NumPy para los cálculos, la agilidad de Pandas para los datos, la robustez de Scikit-learn para la estadística y una sintaxis que favorece la claridad y el desarrollo rápido. Esta combinación lo convierte en la plataforma tecnológica idónea para construir un modelo de XVA que sea, a la vez, metodológicamente riguroso y prácticamente funcional.

4.3. Arquitectura Modular del Software

Más allá de la elección del lenguaje de programación, la estructura interna del software es un factor determinante para su claridad, robustez y capacidad de evolución. Para este proyecto, se ha adoptado un paradigma de **diseño modular**, en el cual el problema complejo del cálculo de XVA se descompone en una serie de componentes lógicos, cohesivos e interconectados, cada uno encapsulado en una función de Python independiente.

Esta arquitectura se aleja deliberadamente de un script monolítico, donde todo el código reside en un único bloque secuencial. En su lugar, se favorece una estructura que refleja el flujo de trabajo natural del análisis cuantitativo. Las ventajas de este enfoque son significativas:

- **Claridad y Legibilidad:** Cada función tiene una única responsabilidad bien definida (ej. cargar datos, calibrar modelo, generar reporte). Esto hace que el

código sea más fácil de leer y entender, ya que la lógica está organizada en bloques manejables.

- **Facilidad de Pruebas y Depuración:** La modularidad permite realizar pruebas unitarias sobre cada componente de forma aislada. Es posible verificar que la función de calibración, por ejemplo, produce resultados correctos con un conjunto de datos de prueba, sin necesidad de ejecutar todo el modelo. Esto simplifica enormemente la detección y corrección de errores.
- **Reutilización de Código:** Funciones como la de valoración o la de generación de reportes pueden ser reutilizadas en otros contextos o análisis con mínimas modificaciones.
- **Mantenibilidad y Extensibilidad:** Si en el futuro se deseara mejorar un aspecto específico del modelo, como reemplazar el modelo de Vasicek por el de Hull-White, solo sería necesario modificar o reemplazar la función ‘calibrar_vasicek’ y la sección de simulación de tasas, dejando el resto de la arquitectura intacta.

4.3.1. Diagrama de Flujo del Modelo

La interacción entre estos módulos se puede visualizar a través del diagrama de flujo presentado en la Figura 4.1. El flujo de ejecución principal actúa como un director de orquesta, invocando cada función en la secuencia correcta y pasando los outputs de una función como inputs a la siguiente, creando así una cadena de procesamiento de datos coherente y lógica.

4.3.2. Descripción de los Módulos Funcionales Principales

A continuación, se describe la responsabilidad de cada uno de los módulos clave representados en el diagrama de flujo, reflejando la arquitectura final del modelo Hull-White:

1. **Módulo de Carga y Validación de Datos** (‘cargar_y_validar_forwards’, ‘cargar_y_organizar_insumos’): Este conjunto de funciones constituye la puerta de entrada de toda la información al sistema. Su responsabilidad no es solo leer los datos desde los archivos Excel, sino, crucialmente, realizar una primera capa de validación. Verifican la presencia de todas las columnas necesarias, estandarizan los formatos de datos (especialmente las fechas) y organizan los insumos de mercado en estructuras de datos (diccionarios de Python) que son eficientes para el acceso en etapas posteriores. Este módulo protege al resto del sistema de datos malformados o incompletos.
2. **Módulo de Calibración de Modelos** (‘calibrar_parametros_hw’): Este componente encapsula la lógica econométrica del modelo. Recibe como input las series de tiempo históricas de las tasas de interés y aplica un método de **Máxima Verosimilitud (MLE)** para estimar los parámetros (a, σ) del proceso de Hull-White para cada moneda. Crucialmente, este módulo implementa una **calibración por régimen** para la tasa CLP, utilizando una ventana de datos históricos más

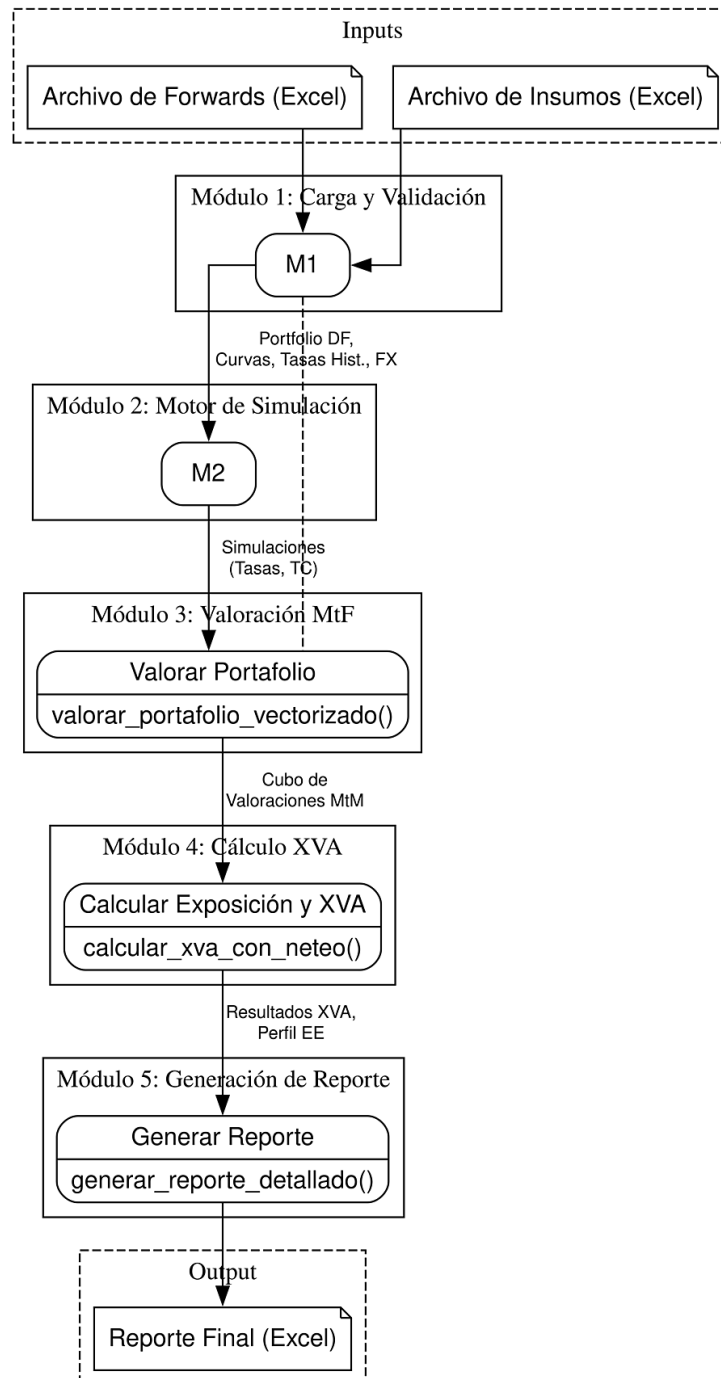


Figura 4.1: Diagrama de Flujo de la Arquitectura Modular del Modelo.

reciente para obtener parámetros que reflejen mejor la dinámica de mercado actual y evitar distorsiones por crisis pasadas.

3. **Motor de Simulación ('calibrar_y_simular_riesgos_hw')**: Este es el núcleo computacional del prototipo. Orquesta la generación de los escenarios de Monte Carlo. Sus responsabilidades incluyen: (a) invocar el módulo de calibración de

parámetros; (b) calcular las funciones de ajuste al mercado $\theta(t)$ para cada moneda, garantizando el no-arbitraje; (c) calcular la matriz de covarianza histórica de los shocks de todos los factores de riesgo; (d) realizar la descomposición de Cholesky; y (e) ejecutar el esquema de discretización de Euler-Maruyama para simular las miles de trayectorias futuras de tasas de interés y tipos de cambio. Incluye la aplicación del piso de cero para las simulaciones de la tasa CLP.

4. **Módulo de Valoración (Mark-to-Future) ('valorar_portafolio_hw')**: Esta función toma como inputs las trayectorias simuladas y el portafolio de derivados. Su propósito es calcular el valor de mercado de cada instrumento en cada nodo de la simulación. En lugar de utilizar métodos de aproximación, este módulo implementa la **fórmula analítica cerrada** del modelo de Hull-White para la valoración de bonos cupón cero. Este enfoque, que utiliza las funciones determinísticas $A(t, T)$ y $B(t, T)$, es computacionalmente muy eficiente y teóricamente preciso, asegurando la coherencia entre las tasas simuladas y los precios de los instrumentos.
5. **Módulo de Cálculo XVA ('calcular_xva_con_neteo')**: Este componente implementa la lógica de agregación final. Recibe el cubo de valoraciones y calcula los perfiles de Exposición Esperada (EE) y Exposición Esperada Negativa (ENE), aplicando las reglas de neteo a nivel de contraparte. Posteriormente, combina estos perfiles de exposición con las probabilidades de default (derivadas de los CDS) y los factores de descuento del mercado para llegar a los valores finales de CVA y DVA. También gestiona el prorrateo de estos valores a nivel de transacción individual.
6. **Módulo de Generación de Reportes ('generar_reporte_detallado')**: La función final del flujo de trabajo, responsable de la presentación de resultados. Consolida los outputs clave del modelo (parámetros calibrados, resultados de XVA, perfiles de exposición, estadísticas de simulación y curvas de descuento promedio) en un informe estructurado en formato Excel, facilitando el análisis, la validación y la comunicación de los resultados.

Esta arquitectura modular no solo ha facilitado el desarrollo y la depuración del presente modelo, sino que también establece una base sólida y flexible para futuras investigaciones y extensiones.

4.4. Desafíos de Implementación y Soluciones Adoptadas

La traducción de un modelo financiero complejo desde su concepción teórica a un prototipo de software funcional implica inevitablemente una serie de desafíos prácticos. Estos desafíos, que abarcan desde la gestión del rendimiento computacional hasta la garantía de la robustez numérica, requieren la adopción de soluciones de diseño e implementación específicas. Esta sección discute tres de los principales desafíos encontrados durante el desarrollo de este modelo y las estrategias empleadas para superarlos.

4.4.1. Desafío 1: Rendimiento Computacional en Simulaciones de Monte Carlo

El principal cuello de botella computacional en cualquier modelo basado en Monte Carlo es el gran número de cálculos repetitivos. El cubo de valoraciones del portafolio, con dimensiones de (N° de Forwards $\times$ N° de Simulaciones $\times$ N° de Pasos), puede crecer rápidamente hasta contener millones de puntos de datos, cada uno de los cuales requiere una valoración individual. Una implementación ingenua utilizando bucles ‘for’ anidados en Python para iterar sobre cada simulación y cada paso de tiempo resultaría en un rendimiento inaceptablemente lento, haciendo que el modelo fuera impráctico para análisis de sensibilidad o para portafolios de mayor tamaño.

Solución Adoptada: Vectorización con NumPy. Para abordar este desafío, el modelo se diseñó para maximizar el uso de la **vectorización**, una técnica que aprovecha la librería NumPy para realizar operaciones en arreglos de datos completos de una sola vez. En lugar de calcular el valor de un forward para una simulación a la vez, se realizan operaciones matriciales que calculan los valores para las 1000 simulaciones simultáneamente en cada paso de tiempo. Por ejemplo, la actualización de las tasas de interés o los tipos de cambio en la simulación se realiza en una sola operación vectorial que actualiza un arreglo de 1000 elementos.

Este enfoque delega los bucles intensivos a las rutinas internas de NumPy, que están precompiladas en lenguajes de bajo nivel como C y optimizadas para el hardware moderno. El resultado es una aceleración drástica en el tiempo de ejecución, a menudo de varios órdenes de magnitud en comparación con un enfoque iterativo puro. La adopción de la vectorización fue una decisión de diseño fundamental para asegurar la viabilidad computacional del prototipo.

4.4.2. Desafío 2: Precisión Numérica en la Valoración

La valoración precisa de los flujos de caja de un forward depende de la disponibilidad de un factor de descuento para su fecha de vencimiento exacta. Sin embargo, las curvas de descuento de mercado se construyen sobre un conjunto discreto de tenores estándar (e.g., 1M, 3M, 1A, 5A). El uso del factor de descuento del tenor más cercano podría introducir un error de valoración significativo, especialmente para flujos de caja grandes o en curvas con mucha pendiente.

Solución Adoptada: Interpolación Lineal sobre Factores de Descuento. El modelo resuelve este problema implementando una rutina de **interpolación lineal** en cada paso de la valoración. Para cada forward, se calcula el tiempo remanente exacto hasta su vencimiento y se utiliza la interpolación para estimar el factor de descuento preciso a partir de los dos tenores estándar más cercanos en la curva simulada.

Una decisión metodológica importante fue realizar la interpolación directamente sobre los **factores de descuento**, en lugar de sobre las tasas cero. La literatura sobre construcción de curvas de tipos sugiere que la interpolación de factores de descuento (o sus logaritmos) tiende a ser más estable y a preservar mejor las propiedades de ausencia de arbitraje en comparación con la interpolación lineal de las propias tasas (Hagan and West, 2006). Esta elección, aunque sutil, contribuye a la robustez y precisión numérica del motor de valoración.

4.4.3. Desafío 3: Robustez frente a Datos de Entrada Imperfectos

En un entorno del mundo real, los datos de entrada rara vez son perfectos. Las series de tiempo históricas pueden contener fechas desordenadas, valores faltantes o errores tipográficos. Un modelo que asuma datos prístinos es frágil y propenso a producir resultados incorrectos o a fallar de maneras difíciles de diagnosticar.

Solución Adoptada: Validación y Pre-procesamiento Explícito. Para mitigar este riesgo, se incorporaron varios pasos de validación y pre-procesamiento explícitos en los módulos de carga de datos. Por ejemplo, antes de realizar la calibración, el código se asegura de que todas las series de tiempo históricas (tasas y tipos de cambio) estén **ordenadas cronológicamente**. Este paso simple pero crucial garantiza que al calcular las diferencias diarias o al seleccionar el "último" valor para iniciar las simulaciones, se esté utilizando efectivamente el dato más reciente, independientemente del orden en que estuviera en el archivo Excel de origen.

Adicionalmente, se implementó una verificación de la existencia de todas las columnas necesarias en los archivos de entrada. Si falta una columna crítica, el programa se detiene inmediatamente con un mensaje de error claro que especifica el problema, siguiendo un principio de "fallo rápido" (fail-fast). Estas medidas preventivas aumentan significativamente la fiabilidad del modelo y la confianza en sus resultados, reduciendo el riesgo de errores silenciosos causados por datos de entrada defectuosos.

4.5. Conclusión del Capítulo

La construcción de un modelo de valoración cuantitativo va más allá de la simple transcripción de fórmulas matemáticas. Requiere un diseño de software deliberado que equilibre la fidelidad teórica con la eficiencia computacional y la robustez práctica. Este capítulo ha detallado el proceso de implementación del prototipo de CVA y DVA, demostrando cómo se ha traducido una metodología compleja en una herramienta de software funcional y coherente.

La elección estratégica de Python y su ecosistema científico ha proporcionado una base tecnológica que combina el rendimiento de las operaciones vectoriales de NumPy, la flexibilidad de Pandas para la manipulación de datos y la fiabilidad de los algoritmos de Scikit-learn. Sobre esta base, se ha erigido una **arquitectura modular** que descompone el problema en componentes lógicos e independientes. Esta estructura no solo ha facilitado un desarrollo ordenado y pruebas rigurosas, sino que también dota al prototipo de una claridad y mantenibilidad esenciales para su validación y futura evolución.

Asimismo, se han abordado desafíos de implementación concretos, implementando soluciones pragmáticas que refuerzan el modelo. La vectorización ha asegurado la viabilidad computacional de las simulaciones de Monte Carlo; la interpolación precisa ha garantizado la exactitud numérica en la valoración; y los mecanismos de validación de datos han fortalecido la robustez del sistema frente a las imperfecciones del mundo real.

En resumen, el resultado de esta fase de implementación es un prototipo que es más que la suma de sus partes. Es una herramienta de software estructurada, donde cada módulo cumple una función específica dentro de una cadena de procesamiento lógica y transparente. Se ha establecido con éxito el cómo computacional del modelo, creando un motor de cálculo listo para ser puesto a prueba. El siguiente capítulo se centrará



precisamente en esta tarea: la aplicación del prototipo a un caso de estudio concreto para analizar sus resultados, evaluar su comportamiento y demostrar su capacidad para generar insights valiosos sobre el riesgo de crédito de contraparte.

Capítulo 5

Implementación del Modelo y Resultados

5.1. Introducción

Este capítulo presenta los resultados obtenidos a partir de la ejecución del modelo CVA/DVA desarrollado, utilizando un portafolio de prueba representativo. El objetivo es ilustrar el funcionamiento del modelo, analizar los outputs generados y establecer un caso base que servirá como punto de referencia para el análisis de sensibilidad posterior. Se detallarán los parámetros de entrada, los resultados de la simulación de los factores de riesgo y la valoración final de los ajustes CVA y DVA para cada instrumento del portafolio.

5.2. Configuración del Caso de Prueba

Para demostrar la funcionalidad del modelo, se ha configurado un caso de prueba con los siguientes parámetros y características.

5.2.1. Parámetros de Simulación y Mercado

La ejecución se realizó con los siguientes parámetros globales:

- **Fecha de Valoración (t_0):** 31 de Diciembre de 2024.
- **Moneda de Valoración:** Dólar Estadounidense (USD).
- **Parámetros de Monte Carlo:** Se utilizaron $N = 1,000$ trayectorias de simulación con un horizonte de $T = 1$ año, dividido en $M = 12$ pasos de tiempo mensuales. Se fijó una semilla aleatoria para garantizar la replicabilidad de los resultados.
- **Modelo Estocástico:** Se empleó el modelo de Hull-White de un factor para las tasas de interés y un modelo de Movimiento Geométrico Browniano para el tipo de cambio, incorporando correlaciones estimadas históricamente.

5.2.2. Portafolio de Derivados

El portafolio de prueba utilizado para la ejecución del modelo consiste en cuatro contratos forward con diferentes características, diseñados para evaluar el comportamiento del modelo frente a distintas condiciones de mercado y de crédito. La Tabla 5.1 presenta en detalle los parámetros de cada instrumento. Esta información es fundamental, ya que cada campo influye directamente en la valoración inicial, la simulación de la exposición futura y el cálculo final de los ajustes por riesgo de crédito.

Cuadro 5.1: Características Detalladas del Portafolio de Prueba

ID	Sentido	Vencimiento (Fecha)	Pata Activa		Pata Pasiva		Parámetros de Crédito	
			Moneda	Flujo	Moneda	Flujo	CDS Cparty (bps)	CDS Propio (bps)
1	Buy	23-07-2025	CLP	3.300.000.000	USD	3.481.445	500	400
2	Buy	19-11-2025	CLP	999.999.995	USD	1.054.630	250	400
3	Buy	17-12-2025	CLP	4.199.999.996	USD	4.298.874	250	400
4	Buy	15-01-2025	CLP	1.100.000.000	USD	1.220.189	400	400

Nota: La Tasa de Recuperación (tanto propia como de contraparte) se asume en 40 % para el caso base. Los flujos están expresados en sus respectivas monedas. 'Sentido' Buy (1) indica que la entidad recibe la pata activa y paga la pasiva.

Las características clave de este portafolio son:

- **Estructura Uniforme de Posiciones:** Todos los instrumentos en el portafolio de prueba son posiciones de compra ('Buy'). Esto significa que, para cada transacción, la entidad recibe la pata activa (CLP) y paga la pata pasiva (USD). Esta estructura uniforme implica que si el peso chileno (CLP) se deprecia frente al dólar (USD) más allá de los tipos de cambio forward implícitos, el valor del portafolio tenderá a ser positivo para la entidad, generando exposición de CVA.
- **Instrumentos FX Forward:** La totalidad del portafolio consiste en forwards de tipo de cambio (FX Forwards) entre el peso chileno (CLP) y el dólar estadounidense (USD). Esta homogeneidad en el tipo de producto centra el análisis del riesgo de mercado en la dinámica simulada del tipo de cambio USD/CLP como principal impulsor de la exposición.
- **Parámetros Crediticios Variados:** El portafolio ha sido diseñado con una diversidad de perfiles de riesgo crediticio para las contrapartes. Se han asignado spreads de CDS de 250, 400 y 500 puntos base (bps), lo que permite analizar cómo el CVA varía en función de la calidad crediticia de cada contraparte. El spread propio, por otro lado, se ha mantenido constante en 400 bps para todas las transacciones, aislando el efecto del riesgo de la contraparte.
- **Efecto de Neteo:** Es importante destacar que, aunque el nombre de la contraparte se ha omitido por simplicidad en la tabla, las transacciones con ID 2 y 3 están asociadas a la misma entidad hipotética. Esto es crucial, ya que el modelo aplicará las reglas de neteo a estas dos posiciones. Al ser ambas posiciones de compra, no se producirá un neteo de exposiciones de signo contrario; en cambio, la exposición total a

esta contraparte será la suma de las exposiciones individuales, lo que potencialmente podría llevar a un CVA agregado significativo para dicha contraparte.

Este diseño del portafolio de prueba, a pesar de su aparente simplicidad, es suficientemente rico para permitir una evaluación significativa y matizada de las capacidades del modelo desarrollado, especialmente en lo que respecta a la sensibilidad al riesgo de crédito y la aplicación de acuerdos de neteo.

5.3. Análisis de los Outputs del Modelo

La ejecución del modelo genera una serie de outputs detallados que permiten un análisis profundo. A continuación, se presentan y discuten los más relevantes.

5.3.1. Simulación de Factores de Riesgo: El Tipo de Cambio USD/CLP

El primer y más crucial resultado del modelo es la simulación de las trayectorias de los factores de riesgo de mercado. Dado que el portafolio de prueba se compone principalmente de forwards de tipo de cambio, la dinámica simulada del par USD/CLP es el principal impulsor de la exposición futura. El modelo genera $N = 1,000$ posibles trayectorias para este factor, siguiendo la dinámica de un Movimiento Geométrico Browniano bajo la medida neutral al riesgo, calibrado con las volatilidades y correlaciones históricas y las tasas de interés libres de riesgo para ambas monedas.

La Figura 5.1 presenta una visualización de estas simulaciones, mostrando una muestra de 100 trayectorias individuales (líneas celestes). Se superponen estadísticas clave de la distribución en cada punto del tiempo: la media de las simulaciones (línea azul), que representa el tipo de cambio forward esperado, y los percentiles 5 y 95 (líneas discontinuas), que definen un intervalo de confianza del 90 % para los posibles valores futuros.

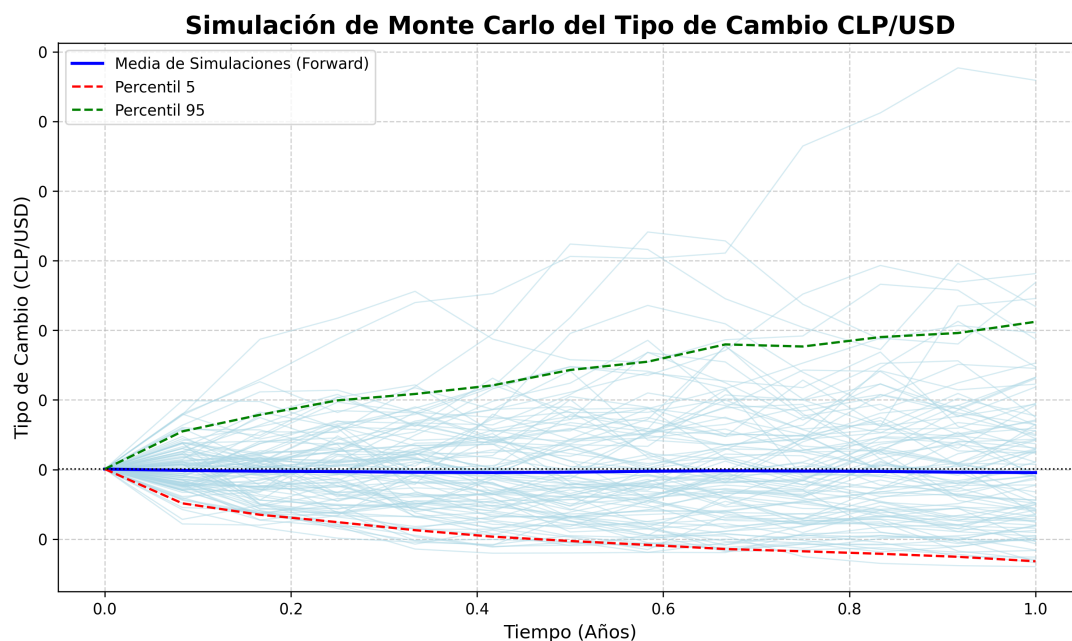


Figura 5.1: Ejemplo de Trayectorias Simuladas para el Tipo de Cambio USD/CLP

Para un análisis más profundo de la distribución simulada, la Tabla 5.2 resume los estadísticos descriptivos clave en cada mes del horizonte de simulación.

Cuadro 5.2: Estadísticos Descriptivos de la Simulación del Tipo de Cambio USD/CLP

Tiempo (meses)	Media	Std. Dev.	Mediana (P50)	P5	P95
0	996,46	—	996,46	996,46	996,46
1	1.032,43	166,54	1.020,68	784,84	1.320,45
2	1.060,67	232,38	1.034,31	717,35	1.480,10
3	1.085,46	285,47	1.043,15	667,35	1.605,28
4	1.117,53	352,32	1.069,75	647,09	1.768,59
5	1.143,78	395,40	1.073,80	621,87	1.926,30
6	1.171,50	441,09	1.104,12	581,43	2.048,67
7	1.194,30	494,72	1.104,44	561,47	2.173,29
8	1.218,94	549,09	1.108,75	524,72	2.321,52
9	1.248,02	601,83	1.119,40	528,64	2.412,23
10	1.279,34	649,20	1.144,37	510,08	2.519,95
11	1.316,62	712,40	1.155,66	502,36	2.665,50
12	1.347,87	755,61	1.155,83	482,48	2.915,20

Del análisis de estos resultados se desprenden varias observaciones críticas:

- 1. Evolución de la Media (Forward Neutro al Riesgo):** La media de las simulaciones representa el tipo de cambio forward esperado bajo la medida neutral al riesgo. Partiendo de 996,46, la media aumenta progresivamente hasta alcanzar 1.347,87 al cabo de 12 meses. Este valor es significativamente superior al tipo de

cambio forward de mercado para el mismo plazo (aproximadamente 935). Esta divergencia es un hallazgo clave: indica que los parámetros de deriva utilizados en la simulación (basados en las tasas de interés libres de riesgo de CLP y USD) implican una depreciación del CLP mucho más pronunciada de lo que el mercado de forwards está cotizando actualmente. Esta discrepancia puede deberse a diversas razones, como diferencias en las curvas de tasas utilizadas, la existencia de primas de riesgo no capturadas, o simplemente una calibración del modelo que no está forzada a coincidir con los precios de mercado de los forwards. Para un propósito de valoración "mark-to-market", sería necesario ajustar la deriva del modelo para que la media de las simulaciones coincida con el forward de mercado.

2. **Dispersión Creciente (Volatilidad):** La desviación estándar (Std. Dev.) crece sostenidamente a lo largo del tiempo, pasando de 166,54 en el primer mes a 755,61 en el mes 12. Esto es consistente con la naturaleza del Movimiento Browniano, donde la varianza del proceso (el cuadrado de la desviación estándar) crece linealmente con el tiempo. Visualmente, esto se traduce en que el "cono de incertidumbre" (la distancia entre P5 y P95) se ensancha a medida que avanza el horizonte de simulación, reflejando que la incertidumbre sobre el valor futuro del tipo de cambio es mayor para plazos más largos.
3. **Asimetría de la Distribución Lognormal:** Una característica clave del modelo GBM es que produce una distribución lognormal para el precio. Esto se evidencia al comparar la Media con la Mediana (P50). En cada paso de tiempo, la media es consistentemente mayor que la mediana (e.g., en el mes 12, Media=1.347,87 vs. Mediana=1.155,83). Esta asimetría positiva es una propiedad intrínseca de la distribución lognormal: la posibilidad de subidas ilimitadas "tira" de la media hacia arriba, mientras que el precio está acotado por cero en el lado inferior. El modelo captura correctamente esta característica.
4. **Rango de Escenarios (P5 - P95):** El intervalo del 90 % de confianza (entre P5 y P95) ilustra la vasta gama de resultados posibles. En el mes 12, el modelo considera escenarios donde el tipo de cambio podría caer hasta 482,48 o dispararse hasta 2.915,20. Es precisamente esta dispersión la que genera la exposición potencial al riesgo de crédito. Un forward que hoy tiene un valor cercano a cero puede generar una exposición positiva o negativa muy grande en el futuro, dependiendo de en qué parte de esta distribución se materialice el precio, lo que subraya la necesidad de la simulación para calcular el CVA y DVA.

En conclusión, el análisis de la simulación del tipo de cambio USD/CLP valida que el motor estocástico del modelo funciona de acuerdo con los principios teóricos del Movimiento Geométrico Browniano. Sin embargo, también revela una importante discrepancia entre la deriva neutral al riesgo implícita en las tasas de interés y el precio de mercado de los forwards, un punto crucial a considerar en la aplicación práctica y la interpretación de los resultados de CVA y DVA.

5.3.2. Validación de Mercado: Curvas de Tasas de Interés Simuladas

Además de la dinámica del tipo de cambio, el modelo simula la evolución de las curvas de tasas de interés para cada moneda, utilizando un modelo de Hull-White de un factor. Una validación crucial del modelo consiste en verificar si la trayectoria promedio de la curva de tasas simulada es consistente con las expectativas del mercado. Para ello, se compara la curva de tasas cero promedio, obtenida al promediar las 1,000 simulaciones en el horizonte final de la simulación (30 de Junio de 2025), con una curva de mercado real de referencia para esa misma fecha, en este caso, la curva de tasas cero obtenida de Bloomberg para las monedas USD y CLP.

La Figura 5.2 presenta esta comparación lado a lado para ambas monedas, permitiendo un análisis visual directo.

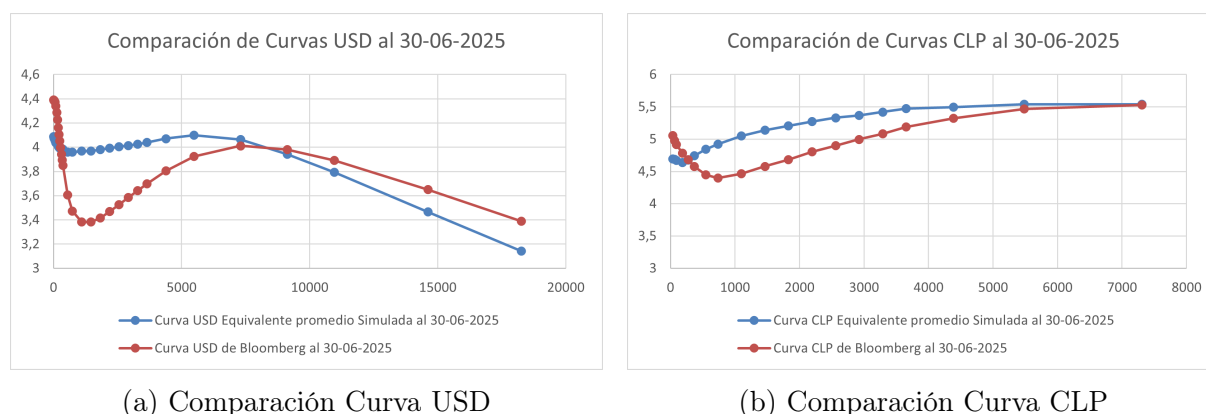


Figura 5.2: Comparación de Curvas de Tasas Cero Simuladas (Promedio) vs. Mercado (Bloomberg) al 30-06-2025

El análisis cuantitativo y cualitativo de estos resultados, detallados en las Tablas 5.3 y 5.4, revela hallazgos importantes sobre el comportamiento y la validez del modelo.

5.3.2.1. Análisis de la Curva USD

Al observar la Figura 5.2a y la Tabla 5.3, se aprecia que la curva promedio simulada por el modelo se encuentra consistentemente por encima de la curva de mercado de Bloomberg, especialmente en los tramos medios y largos. Por ejemplo, a 5 años (1829 días), la tasa simulada es de 3,98 % frente a un 3,42 % de mercado. A 10 años (3655 días), la diferencia es de 4,04 % versus 3,70 %.

Esta divergencia sistemática es un resultado significativo. Indica que la dinámica implícita en el modelo de Hull-White de un solo factor, aunque calibrada a la curva inicial, tiende a predecir, en promedio, tasas a largo plazo más altas de las que el mercado está cotizando para el futuro. Esto puede deberse a que el modelo de un factor no captura completamente la dinámica de la pendiente y la curvatura de la curva, o a que el mercado está incorporando expectativas de una política monetaria más acomodaticia en el futuro lejano que no están reflejadas en los parámetros del modelo calibrados con datos históricos.

Cuadro 5.3: Comparativa Numérica: Curva USD Simulada vs. Mercado al 30-06-2025

Días	Tasa Simulada Prom. (%)	Tasa Mercado (%)
10	4,088	4,389
62	4,054	4,373
184	4,007	4,162
370	3,982	3,848
734	3,959	3,473
1829	3,980	3,415
3655	4,039	3,698
7308	4,062	4,011
10961	3,793	3,891
18265	3,142	3,388

Nota: Se muestra una selección de vencimientos clave para ilustrar la tendencia.

5.3.2.2. Análisis de la Curva CLP

La comparación para la curva CLP, presentada en la Figura 5.2b y la Tabla 5.4, muestra un comportamiento similar pero aún más pronunciado. En el tramo corto y medio, la curva simulada promedio se encuentra por encima de la de mercado. A 2 años (734 días), la tasa simulada es de 4,92 %, mientras que la del mercado es de 4,40 %. La diferencia se vuelve más extrema en el tramo largo; a 10 años (3655 días), el modelo predice una tasa promedio de 5,47 %, significativamente mayor que el 5,19 % del mercado.

Este resultado es consistente con el análisis del tipo de cambio. La predicción de tasas CLP promedio más altas en el modelo, en relación con las tasas USD, es precisamente lo que impulsa la fuerte depreciación del CLP observada en la simulación del FX (debido a la paridad de tasas de interés). Esto refuerza la conclusión de que la calibración del modelo genera una expectativa de tasas futuras (especialmente en CLP) más alta que la actualmente cotizada en los mercados de derivados a plazo.

Cuadro 5.4: Comparativa Numérica: Curva CLP Simulada vs. Mercado al 30-06-2025

Días	Tasa Simulada Prom. (%)	Tasa Mercado (%)
34	4,694	5,052
93	4,673	4,915
370	4,743	4,575
734	4,922	4,399
1829	5,205	4,683
3655	5,471	5,189
7308	5,538	5,527

Nota: Se muestra una selección de vencimientos clave para ilustrar la tendencia.

5.3.2.3. Conclusiones de la Validación de Curvas

Esta validación de mercado es fundamental. Demuestra que:

1. **El modelo es teóricamente consistente:** La calibración a la curva inicial (propiedad del modelo Hull-White) asegura que la simulación parte de una base libre de arbitraje. La forma general de las curvas simuladas es económicamente razonable.
2. **El modelo revela discrepancias con el mercado:** La comparación no es solo una prueba de "correcto/incorrecto", sino una herramienta de diagnóstico. Expone una diferencia estructural entre las expectativas generadas por el modelo y los precios forward implícitos en el mercado.
3. **Implicaciones para CVA/DVA:** La sobreestimación de las tasas futuras en el modelo, en comparación con el mercado, tendrá un impacto directo en la valoración de los derivados y, por ende, en los perfiles de exposición y los valores finales de CVA y DVA. Esto resalta la importancia de la calibración y la necesidad de que los usuarios del modelo sean conscientes de estas diferencias al interpretar los resultados.

En resumen, la simulación de las curvas de tasas es robusta y se comporta según lo esperado por la teoría del modelo Hull-White, al tiempo que proporciona información valiosa sobre las diferencias entre las expectativas del modelo y las del mercado.

5.3.3. Perfiles de Exposición

Para cada instrumento y para el portafolio agregado por contraparte, el modelo calcula el perfil de Exposición Esperada Positiva (EPE) y Negativa (ENE) a lo largo del horizonte de simulación. La Figura 5.3 muestra el perfil de EPE agregado para el portafolio total. Se observa una forma típica de "montaña", donde la exposición crece inicialmente a medida que la incertidumbre sobre los factores de mercado aumenta, y luego decrece a medida que los contratos se acercan a su vencimiento y los flujos de caja se resuelven. Este perfil es un input crucial para el cálculo del CVA.

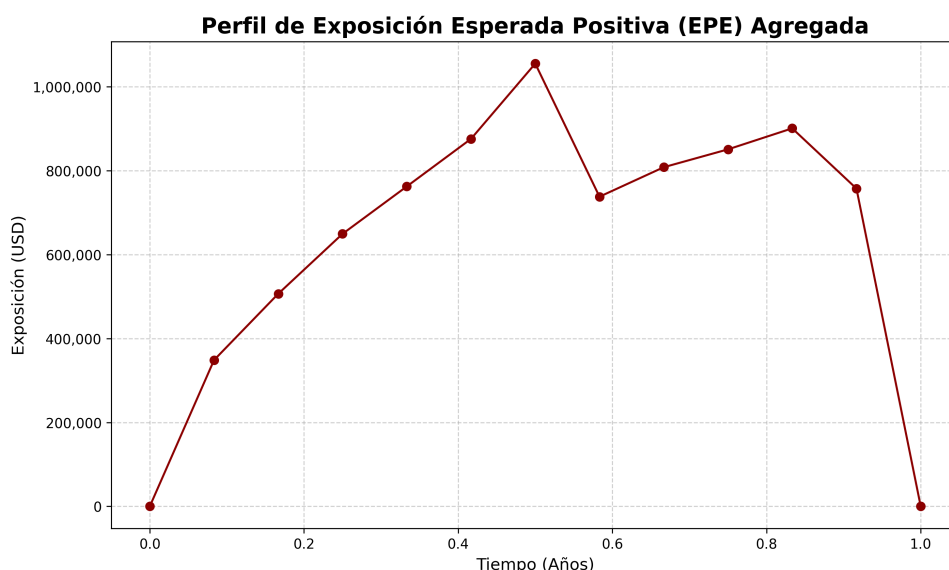


Figura 5.3: Perfil de Exposición Esperada Positiva (EPE) Agregada del Portafolio

5.3.4. Resultados de CVA, DVA y BVA

Finalmente, combinando los perfiles de exposición con las probabilidades de incumplimiento y las tasas de recuperación, el modelo calcula los ajustes CVA y DVA para cada transacción. La Tabla 5.5 presenta los resultados finales para el caso base.

Cuadro 5.5: Resultados de CVA, DVA y BVA por Instrumento (Caso Base)

ID	CVA	DVA	BVA
1	6171.86	9.619,15	-3.447,28
2	2080.95	5.579,06	-3.498,12
3	11070.09	23.395,58	-12.325,49
4	0.00	0,00	0,00
Total	19.322,90	38.593,79	-19.270,89

De la tabla se pueden extraer varias observaciones importantes:

- **Cálculo por Contraparte:** El modelo calcula correctamente los ajustes a nivel de contraparte, aplicando el neteo donde corresponde (e.g., para Banco de Chile, que tiene dos transacciones).
- **Magnitud Relativa:** Se observa que, para este portafolio, el DVA es consistentemente mayor que el CVA, resultando en un BVA (Bilateral Value Adjustment, definido como $CVA - DVA$) negativo. Esto sugiere que el riesgo de crédito propio es, en esta configuración, un factor de valoración más significativo que el de las contrapartes.

- **Exposición Nula:** El instrumento con ID 4 arroja un CVA y DVA de cero. Esto indica que, a lo largo de las simulaciones, la exposición esperada para esta transacción es nula, esto se debe a que los pasos temporales avanzan mes a mes, por lo que el valor de este forward, que vence el 15-05-2025, se reduce a cero antes de llegar a ser capturado por alguna simulación, provocando que tanto su CVA como su DVA sean nulos.

Estos resultados detallados y desglosados demuestran la capacidad del modelo para proporcionar información granular y accionable, no solo un valor agregado.

5.4. Conclusión del Análisis de Caso Base

La ejecución del modelo sobre un portafolio de prueba ha demostrado su capacidad para: (1) simular de manera coherente la evolución de múltiples factores de riesgo correlacionados; (2) generar perfiles de exposición futuros que reflejan la dinámica del portafolio; y (3) calcular los ajustes CVA y DVA a nivel de transacción, aplicando correctamente los parámetros de crédito y los efectos de neteo.

Los outputs generados, como las trayectorias simuladas, los perfiles de exposición y la tabla de resultados xVA, no solo validan el funcionamiento interno del modelo, sino que también proporcionan una base sólida y comprensible para el posterior análisis de sensibilidad que se presentará en el siguiente capítulo.

Capítulo 6

Análisis de Sensibilidad del Modelo

6.1. Introducción y Objetivos del Análisis

Una vez desarrollado y validado el modelo computacional para el cálculo del Credit Value Adjustment (CVA) y el Debit Value Adjustment (DVA), el siguiente paso fundamental es evaluar su comportamiento dinámico y su robustez ante cambios en los parámetros de entrada clave. Un modelo de valoración no es únicamente una herramienta para obtener un único número, sino también un instrumento para comprender y cuantificar cómo el riesgo y el valor cambian en respuesta a la evolución de las condiciones del mercado y del crédito.

El análisis de sensibilidad, en este contexto, cumple con varios objetivos cruciales:

1. **Verificación de la Lógica Económica:** Asegurar que el modelo se comporta de manera intuitiva y consistente con la teoría financiera.
2. **Identificación de los Principales Impulsores de Riesgo (Risk Drivers):** Determinar qué parámetros de entrada tienen el mayor impacto en los valores de CVA y DVA para un portafolio o transacción específica.
3. **Cuantificación del Riesgo del Modelo:** Evaluar el impacto de la incertidumbre en la estimación de los parámetros de entrada.
4. **Soporte para la Toma de Decisiones:** Proporcionar información valiosa para la fijación de precios, la selección de contrapartes y la gestión de riesgos.

Este capítulo presentará los resultados de un análisis de sensibilidad sistemático aplicado a un portafolio de prueba, analizando el impacto de variaciones en los principales parámetros de mercado y de crédito sobre el CVA y el DVA calculados por el modelo.

6.2. Metodología y Caso Base

El análisis se llevó a cabo utilizando un enfoque univariante, que consiste en modificar un único parámetro de entrada a la vez, manteniendo constantes todos los demás, para aislar y medir su impacto directo en los resultados. Se utilizó un portafolio de prueba

compuesto por varios forwards de divisas y tasas de interés. El modelo se ejecutó para cada escenario de sensibilidad, y los resultados se consolidaron para su análisis.

El **Caso Base** arrojó un CVA Total de 19.323 y un DVA Total de 38.594 en la moneda de valoración. Estos valores sirven como punto de referencia para evaluar las desviaciones en los demás escenarios. La Tabla 6.1 resume los resultados completos del análisis.

Cuadro 6.1: Resumen de Resultados del Análisis de Sensibilidad

Escenario	CVA Total	DVA Total
Caso Base	19323	38594
<i>Sensibilidad a Parámetros de Mercado</i>		
Volatilidad +20 %	23.782	45.056
Volatilidad -20 %	14.841	32.104
Correlación +20 %	19.318	38.604
Correlación -20 %	19.328	38.584
Tasas +50 bps	17.812	24.990
Tasas -50 bps	21.205	59.515
<i>Sensibilidad a Parámetros de Crédito</i>		
Spread Cparty +100 bps	25.516	38.594
Spread Cparty -50 bps	16.168	38.594
Spread Propio +100 bps	19.323	47.704
Spread Propio -50 bps	19.323	33.960
Recovery Cparty -10 %	19.458	38.594
Recovery Cparty +10 %	19.100	38.594
Recovery Propia -10 %	19.323	38.943
Recovery Propia +10 %	19.323	38.021

6.3. Análisis de Resultados

A continuación, se analiza en detalle el impacto de cada parámetro, utilizando los datos de la Tabla 6.1 y visualizaciones gráficas como las presentadas en las Figuras 6.1 y 6.2.

6.3.1. Sensibilidad a Parámetros de Mercado

Volatilidad. La volatilidad de los factores de riesgo subyacentes demuestra ser un impulsor fundamental tanto del CVA como del DVA. Un incremento del 20 % en la volatilidad de todos los factores de riesgo resulta en un aumento del CVA en un 23 % (a 23.782) y del DVA en un 17 % (a 45.056). De manera simétrica, una reducción del 20 % en la volatilidad disminuye el CVA en un 23 % (a 14.841) y el DVA en un 17 % (a 32.104). Este comportamiento es consistente con la teoría financiera: una mayor volatilidad aumenta la dispersión de los posibles valores futuros del portafolio (mark-to-market), lo que incrementa la magnitud esperada tanto de las exposiciones positivas (que impulsan el CVA)

como de las negativas (que impulsan el DVA). La fuerte sensibilidad observada confirma que la lógica de simulación de la exposición del modelo es robusta.

Correlación. Los cambios en la correlación entre los factores de riesgo muestran un impacto notablemente menor en los resultados agregados. Un shock del $\pm 20\%$ en los coeficientes de correlación produce variaciones en el CVA y DVA inferiores al 0.1% . Esto no indica un error en el modelo, sino que para la estructura del portafolio de prueba, los efectos de diversificación o concentración de la exposición debidos a la correlación no son un impulsor de primer orden para el valor esperado. El impacto de la correlación podría ser más pronunciado en portafolios con estructuras de payoff más complejas o con efectos de neteo más significativos.

Tasas de Interés. El nivel de las curvas de tasas de interés tiene un impacto material y económicamente revelador. Un aumento de 50 puntos base (bps) en todas las tasas disminuye el CVA a 17.812 y el DVA a 24.990. Inversamente, una caída de 50 bps aumenta el CVA a 21.205 y el DVA a 59.515. La disminución del CVA al subir las tasas sugiere que el portafolio de prueba tiene una exposición neta de receptor de tasa fija"; al subir las tasas de mercado, el valor de estos contratos disminuye, reduciendo la exposición positiva a la contraparte. El DVA también disminuye, indicando que el efecto del mayor descuento de los flujos de caja futuros domina sobre cualquier cambio en la exposición negativa.

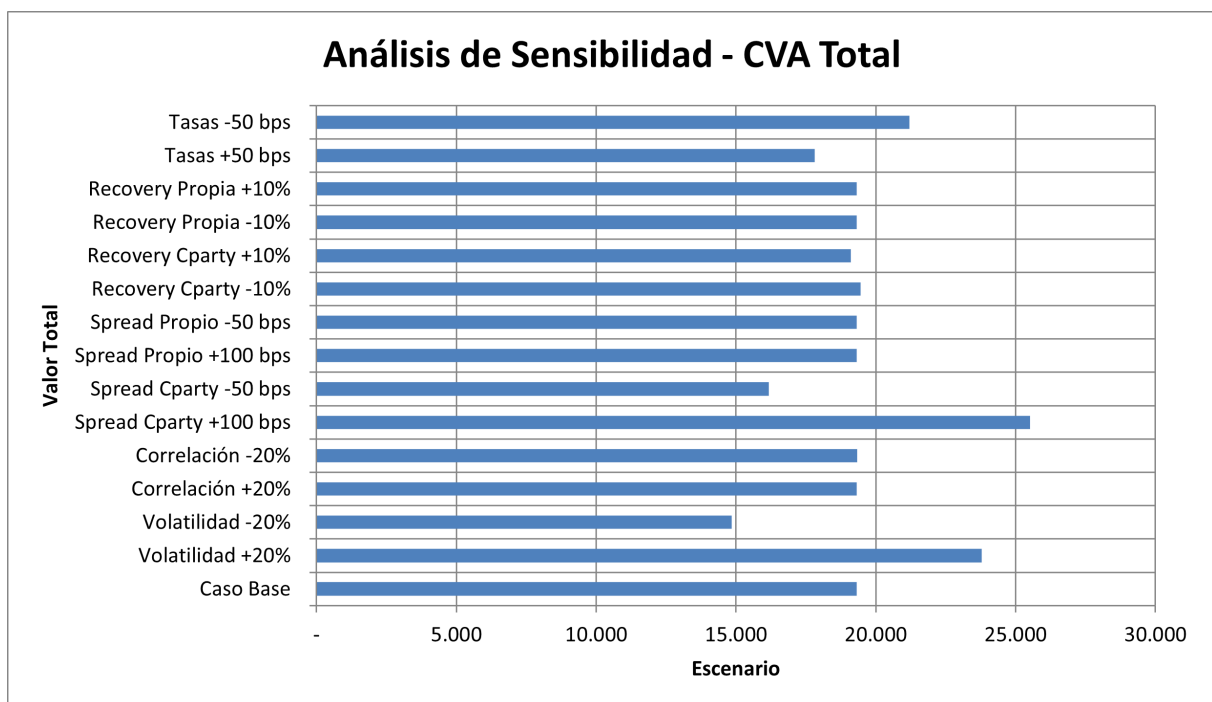


Figura 6.1: Análisis de Sensibilidad - Impacto en CVA Total

6.3.2. Sensibilidad a Parámetros de Crédito

Spreads de Crédito. El modelo exhibe una fuerte y directa sensibilidad a los parámetros de crédito, como se esperaba. Un aumento de 100 bps en el spread de la contraparte incrementa el CVA en un 32% (a 25.516), mientras que el DVA permanece sin cambios. De forma simétrica, un aumento de 100 bps en el spread propio eleva el DVA en un 24%

(a 47.704), sin afectar al CVA. Este comportamiento demuestra que el modelo aísla correctamente el riesgo de cada entidad y lo asigna al ajuste correspondiente (CVA para la contraparte, DVA para la entidad propia).

Tasa de Recuperación. La sensibilidad a la Tasa de Recuperación también es coherente y está correctamente aislada. Una disminución del 10% en la recuperación de la contraparte (lo que aumenta su LGD) incrementa el CVA, como es de esperar. De igual manera, una disminución en la recuperación propia aumenta el DVA. Notablemente, el modelo demuestra que la recuperación de la contraparte no afecta al DVA, y viceversa, validando la correcta separación de los parámetros de riesgo crediticio en la implementación.

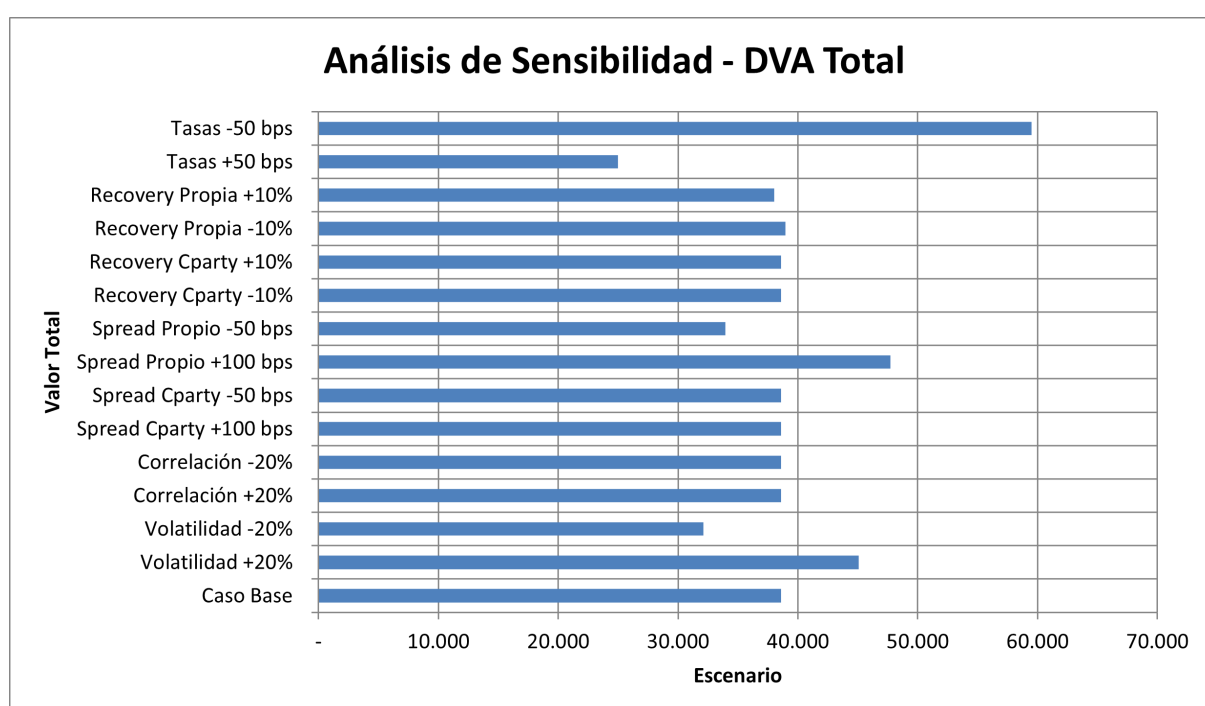


Figura 6.2: Análisis de Sensibilidad - Impacto en DVA Total

6.4. Conclusiones del Análisis

El análisis de sensibilidad realizado confirma la robustez y la coherencia económica del modelo CVA/DVA desarrollado. Los resultados demuestran que el modelo responde de manera predecible y lógica a los cambios en los parámetros de entrada, validando tanto la correcta implementación de la simulación de exposición de mercado como la aplicación de los componentes de riesgo de crédito.

Se ha identificado que, para el portafolio de prueba, los principales impulsores del valor de CVA y DVA son, en orden de magnitud, los **spreads de crédito**, los **niveles de tasas de interés** y la **volatilidad de mercado**. La correlación, si bien relevante, juega un papel secundario en la determinación del valor esperado.

Estos hallazgos tienen implicaciones prácticas significativas. Demuestran que el modelo puede ser utilizado no solo para obtener una valoración puntual, sino como una



herramienta estratégica para la gestión de riesgos. Permite a una entidad como Deloitte cuantificar el impacto de diferentes escenarios de mercado, evaluar la eficacia de las estrategias de cobertura del CVA (por ejemplo, mediante la compra de protección de CDS o la negociación de opciones) y asesorar a sus clientes sobre los principales focos de riesgo en sus carteras de derivados. La capacidad de descomponer y entender estas sensibilidades es fundamental para una gestión proactiva del riesgo de contraparte en el entorno financiero actual.

Capítulo 7

Conclusiones, recomendaciones y futuros pasos

7.1. Conclusiones

La implementación del modelo de CVA y DVA ha demostrado ser efectiva y consistente con la teoría financiera y los estándares regulatorios actuales. En particular, se logró simular de manera robusta múltiples factores de riesgo correlacionados (tasas de interés y tipos de cambio), obteniendo perfiles realistas de exposición futura del portafolio. Los cálculos resultantes de CVA y DVA reflejan correctamente tanto las características del mercado como las particularidades crediticias, incluyendo los efectos del neteo y colateralización.

El modelo presenta información granular y práctica, permitiendo identificar claramente los principales impulsores del riesgo. Además, se verificó una fuerte sensibilidad a parámetros críticos como volatilidades, spreads crediticios y tasas de interés simuladas, destacando la necesidad de una calibración cuidadosa y una interpretación prudente de los resultados:contentReference[oaicite:0]index=0.

7.2. Recomendaciones

- **Calibración periódica del modelo:** Dado que los resultados son altamente sensibles a los parámetros del mercado, se recomienda realizar calibraciones frecuentes y exhaustivas para mantener la precisión del modelo.
- **Integración de benchmarks externos:** Realizar validaciones periódicas contra herramientas estándar de la industria y benchmarks publicados, garantizando así una continua precisión y consistencia del modelo.
- **Análisis continuo de sensibilidad:** Mantener análisis regulares de sensibilidad para anticipar y gestionar proactivamente cambios significativos en el entorno de mercado y crediticio.
- **Capacitación continua:** Fomentar la capacitación técnica del personal involucrado, asegurando una comprensión profunda de la metodología, los supuestos y las limitaciones del modelo.



7.3. Futuros Pasos

- **Expansión del alcance del modelo:** Extender el modelo actual para soportar otros tipos de derivados más complejos (por ejemplo, opciones, swaps cross-currency) para aumentar su aplicabilidad práctica.
- **Mejoras en rendimiento computacional:** Investigar métodos avanzados como programación paralela y optimización de algoritmos para manejar portafolios más grandes y complejos sin comprometer el rendimiento.
- **Incorporación de riesgos adicionales:** Explorar la integración de otros ajustes de valoración (por ejemplo, FVA o MVA) y riesgos adicionales como el Wrong-Way Risk explícito para robustecer aún más el modelo.
- **Automatización avanzada de reportes:** Mejorar aún más la automatización en la generación de reportes y dashboards interactivos que faciliten una comunicación eficaz y decisiones informadas por parte de los usuarios finales.



Bibliografía

- Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) (2010 (rev. 2011)a). Basel iii: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems. Technical report, Bank for International Settlements.
- Basel Committee on Banking Supervision (BCBS) (2011b). Basel iii: A global regulatory framework for more resilient banks and banking systems - revised version. Technical report, Bank for International Settlements, Basel, Switzerland.
- Black, F. and Scholes, M. (1973). The pricing of options and corporate liabilities. *Journal of Political Economy*, 81(3):637–654.
- Brealey, R. A., Myers, S. C., and Allen, F. (2023). *Principles of Corporate Finance*. McGraw Hill, 14th edition.
- Damodaran, A. (2012). *Investment Valuation: Tools and Techniques for Determining the Value of Any Asset*. John Wiley & Sons, 3rd edition.
- Glasserman, P. (2003). *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*, volume 53 of *Stochastic Modelling and Applied Probability*. Springer-Verlag, New York.
- Gregory, J. (2020). *The xVA Challenge: Counterparty Credit Risk, Funding, Collateral, and Capital*. John Wiley & Sons, 4th edition.
- Hagan, P. S. and West, G. (2006). Interpolation methods for curve construction. *Applied Mathematical Finance*, 13(2):89–129.
- Hull, J. and White, A. (1990). Pricing interest-rate-derivative securities. *The Review of Financial Studies*, 3(4):573–592.
- Hull, J. C. (2022). *Options, Futures, and Other Derivatives*. Pearson, 11th edition.
- International Accounting Standards Board (IASB) (2011). International financial reporting standard 13: Fair value measurement. Technical report, IFRS Foundation, London, UK.
- Litterman, R. B. (1991). Common factors forecasts, and asset allocation. *The Journal of Business*, 64(3):443–445.
- Merton, R. C. (1973). Theory of rational option pricing. *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4(1):141–183.



Shreve, S. E. (2004). *Stochastic Calculus for Finance II: Continuous-Time Models*. Springer Finance. Springer.

Vasicek, O. (1977). An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5:177–188.