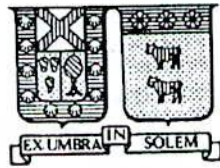


M
621.367
A284
c1
k

ANALISIS DE IMAGENES DIGITALES
BASADO EN TECNICAS DE
MORFOLOGIA MATEMATICA.



Ignacio Rodrigo Aguirre Kruger.

Profesor Guía: Hugo Palacios.

UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA
BIPLIOTECA CENTRAL
Inventario: M. 1089201

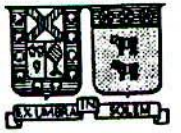
18/03/92



Dedico estas líneas a quienes me enseñaron desde pequeño,
de quienes aprendí la risa y el llanto.

Dedico estas líneas con todo mi amor a quienes un día
me dieron la vida...

... " a mis padres ".

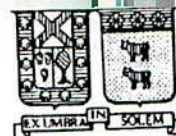


Agradesco en forma especial a Waldo Valderrama, gestor y colaborador de esta inquietud.

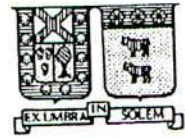


Table of Contents

1	Introducción.	1
1.1	Los computadores potentes frente al computador estandar.	2
1.2	De piedras a Picapiedras.	3
1.3	El analizador de textura: Un caballo de Troya notable.	5
1.4	La percepción como transformación.	5
1.5	Una extensa gama de aplicaciones.	8
1.6	Una historia de piedras.	12
2	Morfología matemática.	14
2.1	Notaciones	14
2.2	Operadores Morfológicos Erosión y Dilatación.	18
2.2.1	Propiedades de la dilatación morfológica.	20
2.2.1.1	Ley de Distributividad de la dilatación.	24
2.2.2	La erosión y sus propiedades.	26
2.3	Operadores de Apertura y clausura.	43
2.3.1	La antiextensividad de la apertura morfológica.	46
2.3.2	Extensividad de la clausura morfológica.	47
2.3.3	Teorema de dualidad de Apertura y Clausura.	48
2.4	Aplicaciones de operadores morfológicos en figuras binarias.	49
2.4.1	Transformada de erosión $X \ominus B$	51
2.4.2	Transformada de dilatación $X \oplus B$	51
2.4.3	Transformada de apertura $X \{ \oplus \} B$	51
2.4.4	Transformada de clausura $X \{ \ominus \} B$	52
3	Filtros morfológicos.	53
3.1	Filtros de orden superior.	53
3.2	Filtros morfológicos de primer orden.	57
3.2.1	Imagen de entrada y filtrado análogo.	57
3.2.1.1	Filtrado morfológico por erosión.	58
3.2.1.2	Filtrado morfológico por dilatación.	58
3.2.1.3	Filtrado morfológico por opening.	59
3.2.1.4	Filtrado morfológico por closing.	59
3.2.1.5	Filtrado morfológico por open-closing.	59
3.2.1.6	Filtrado morfológico por clos-opening.	60
3.2.2	Los filtros morfológicos como discriminadores de ruido en la transmisión de data.	60
4	Análisis de algoritmos de adelgazamiento.	61
4.1	Introducción.	61
4.2	Definiciones.	62
4.2.1	La transformada hit/miss.	62
4.2.2	Vecindades de "p".	66



4.2.2.1 Definición 1	66
4.2.2.2 Definición 2	66
4.2.2.3 Definición 3	67
4.2.2.4 Definición 4	67
4.2.2.5 Definición 5	68
4.2.2.6 Definición 6	70
4.2.2.7 Definición 7	70
4.2.2.8 Definición 8	70
4.2.2.9 Definición 9	71
4.3 Desarrollo de un algoritmo de adelgazamiento.	72
4.4 Análisis del algoritmo de adelgazamiento.	76
4.5 Implementación del algoritmo B.	93
4.6 En búsqueda de la distribución de energía en un molino de chancado: "Una aplicación particular".	97
4.7 Compactación de "bitmaps".	98
5 "Morlab" : Un paquete de aplicación.	99
5.1 "Menú File."	99
5.2 "Menú Edit."	99
5.3 "Menú Template."	99
5.4 "Menú Opción."	100
5.5 "Menú Demos."	100
6 Conclusiones.	109
7 Bibliografía.	110



1 Introducción.

De la imagen de un objeto, el cerebro humano extrae multitud de información. Con el desarrollo de la automatización es casi obvio preguntar si es posible aprovechar esta información en la programación de maquinas (dedicadas y no dedicadas) para la asistencia de labores tediosas y reiterativas que impliquen un ahorro de tiempo y optimización en procesos industriales, científicos, y de investigación.

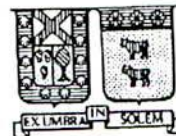
El análisis de una imagen en el espacio, como una estructura fija o que evoluciona en este, es una actividad que está ligada a dos aspectos bien diferenciados: el primero de ellos está relacionado con las formas visibles que la han generado o con sus propiedades físicas, biológicas u otras. La segunda está ligada al reconocimiento de la imagen o alguno de sus detalles con el objeto de sustituir la percepción del hombre por la de un autómata.

Ninguno de estos aspectos nos da una metodología para el análisis de imágenes. Así, la permeabilidad de un medio poroso ejemplifica el primer caso. En efecto, este fenómeno a nivel microscópico se rige por una ecuación de mecánica de fluidos que poco dice con la percepción visual intuitiva que podamos tener al respecto. En otras palabras el comportamiento del fluido no se puede deducir con la simple observación que hagamos de los espacios vacíos o llenos que lo constituyen.

Algo similar sucede con el segundo aspecto, el reconocimiento de formas. Los procesos del pensamiento humano recurren constantemente a un universo de significados que no tienen por que tener una interpretación geométrica de lo observado. Para nosotros es claro que un iglú y un castillo corresponden a una misma categoría de objetos, pero ¿cómo resolvería esta clasificación un autómata?

Los criterios visuales no se prestan para las cuantificaciones requeridas por los análisis. Por lo tanto se requiere un procedimiento más formal. Entre las formas de describir los distintos fenómenos que se manifiestan y desarrollan su estructura en el espacio hay una que es considerarlo como un objeto, que es lo mismo decir considerarlo como un subconjunto del espacio vectorial en el cual se ha manifestado y definido. El método de análisis en el cual se fundamenta dicha concepción se denomina MORFOLOGIA MATEMATICA.

En el area de Análisis de imagenes digitales se cuenta, dentro de otras herramientas, con la morfología matemática, nacido en Francia en el año 1964 y cuyos padres son dos académicos físicos-matemáticos del centro de matemática y geostática de la Escuela de minas de París, en Fontaineblau : Juan Serra y Georges Matheron. El primero de ellos abogado al



area de las matemáticas, mientras que el segundo se encuentra dedicado al área de la física de los materiales. De esta dualidad se explica las cualidades de potencialidad y simplicidad que constituyen la teoría desarrollada desde entonces. Dos obras publicadas han permitido la difusión del método desarrollado en el ámbito del análisis de imágenes : Random Sets and Integral Geometry [G. Matheron] e Image Analysis and Mathematical Morphology [J. Serra], publicados en Wiley-1972 y Londres-1982, respectivamente.

En términos generales la morfología matemática relaciona la estructura de un objeto definida en el espacio Euclidiano y su entorno con sus complementos en el mismo espacio, a través de subconjuntos vectoriales definidos a priori, a los cuales se les ha llamado "Elementos Estructurantes", es decir elementos geométricos sencillos. ¿Cómo escoger estos elementos estructurantes ?, ¿Cómo proceder a la comparación con el objeto de estudio, interactuar con la información obtenida y su posterior análisis ?. Preguntas que necesitamos hacer si se desea trabajar con un margen de rigurosa coherencia. La respuestas están en los resultados empíricos obtenidos a partir de la experimentación y contrastación con resultados válidos (coherentes). Dos ejemplos, uno de ellos tomado de la ciencia de materiales y otro de la robótica nos permiten responder con coherencia en el ámbito de la morfología matemática.

1.1 Los computadores potentes frente al computador estandar.

Las diferencias entre Europa y norteamérica, no se sitúa solamente en el plano teórico. Por un lado el hecho de tratar de analizar el mundo microscópico hace necesario el seguir en tiempo real los fenómenos que acontezcan. Esto llevado a un análisis más abstracto implica procesar una gran cantidad de información por unidad de tiempo, comparado con las relaciones o información que nos pueda entregar una fotografía satelital, en las cuales el procesamiento no implica un tiempo crítico de respuesta. Esto marca una diferencia en las necesidades de hardware.

Si en épocas de los años 1965-1977 Estados Unidos no requirió de la explotación de máquinas dedicadas al análisis, hoy la situación ha cambiado, adquiriendo esta área un acelerado crecimiento. En dicho crecimiento la fuente de los desarrollos han sido las numerosas investigaciones realizadas por Europa en décadas pasadas. Como hecho comprobable, a comienzos de los años 80 los adelantos realizados en el centro de tratamiento fotográfico de Michigan (ERIM), se descubría la morfología matemática gracias a los estudios de Stanley R. Sternberg, sin los cuales no habría sido posible dicho

desarrollo. Hoy en día, la morfología matemática es considerada como herramienta fundamental en el análisis de las ciencias naturales, en las cuales la percepción visual resulta fundamental.

1.2 De piedras a Picapiedras.

Por otra parte, y según su método, son susceptibles de cambios físicos, lo que en términos concretos implica una gran variedad de análisis de formas en función de los elementos estructurantes escogidos. De esta interacción (elemento estructurador y la imagen en cuestión), se obtienen: el porcentaje de inclusión y la imagen resultante, la cual es denominada en este caso "imagen erosionada", más pobre que la imagen inicial, pero dependiendo la naturaleza de esta última del experimentador, en función de lo que queramos poner de manifiesto. Una aplicación de gran atractivo visual resultan los procesos de animación como los desarrollados por la empresa Silicon-Graphics, gracias a la tecnología RISC, en la cual se puede procesar en tiempo real la filmación (señal de video) de una persona y obtener por pantalla en forma simultánea personajes tan conocidos como "Pedro Picapiedra", pero si no se dispone de este tipo de tecnología y contando con algoritmos eficientes se pueden obtener resultados como los que se observan en las figuras Nos 1.1, 1.2, 1.3 y 1.4, en las cuales fueron aplicadas en forma reiterativas elementos estructuradores definidos apriori para tal efecto.



Figura No 1.1



Figura No 1.2



Figura No 1.3

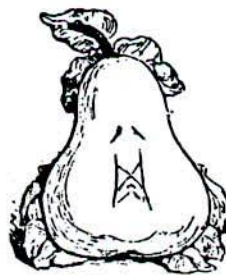
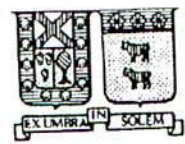


Figura No 1.4



1.3 El analizador de textura: Un caballo de Troya notable.

Una aplicación particular de la morfología y de gran interés es el análisis de texturas. El punto de partida: el instituto de siderurgia (IRSD), en 1964, tiempo en el cual Juan Serra evaluaba la calidad de los diversos minerales de hierro en función de sus respectivas texturas microscópicas. En cuanto se formalizaron las primeras nociones teóricas se hizo necesario un sistema electrónico capaz de procesar las nociones conjuntistas partiendo de las imágenes adquiridas por el microscopio. En 1970 la República Federal de Alemania, adquirió los derechos de este "analizador de texturas", y lo viene comercializando desde 1973 con el nombre de TAS. Este analizador a evolucionado notablemente combinado con el desarrollo de nuevas tecnologías y el desarrollo de nuevas transformadas morfológicas. Hoy en día no sólo es el sistema de análisis de imágenes microscópicas más importante de Francia sino que a servido como un verdadero caballo de Troya para introducir la morfología matemática en todas las latitudes.

Estos analizadores de texturas están constituidos por una cantidad considerable de entradas, una administración óptima de memoria y un número adecuado de procesadores que efectúan alrededor de 50 operaciones morfológicas por segundo. Por supuesto esta no es la única tecnología disponible, con el desarrollo de la computación alcanzados hoy, el uso de máquinas especializadas no es indispensable para la aplicación de estos algoritmos, de los cuales ya existen librerías para computadores convencionales.

1.4 La percepción como transformación.

Los elementos estructuradores han servido a través de estos ejemplos como medidas interpretables en términos cuantificables; ahora nos servirán como transformadas de imágenes según un método plenamente determinista. Si antes se establecen relaciones entre propiedades y estructuras, ahora se trata de reconocer su forma. En el caso de una imagen binaria, en la que cada punto pertenece o no a una estructura del objeto a analizar en perspectiva y que comprende partes con distintos matices de gris. Aquí el factor tiempo marcará una diferencia, si se desea una inspección breve no se podrá contar con algoritmos cuya ejecución demore un tiempo largo. Una aplicación es la automatización industrial desarrollado por S.R. Sternberg de la universidad de Michigan, quien lo implementó en una importante industria automovilística. Una cámara de video adquiría información sobre una correa transportadora de cajas de transmisión, suministrando imágenes del fondo de estas.

El constructor deseaba verificar si dos retenes determinados (Figura No 1.5) se encontraban en su sitio o no. Este problema resulta inmediato para un ser humano, pero no es un problema trivial si se desea programar un autómata para tales efectos. ¿Cómo soluciona este tipo de problemas la morfología matemática?. Para este efecto se considera la imagen inicial (Fig No 1.6) como un conjunto . Basta, a tal fin, añadir un eje perpendicular al conjunto anteriormente definido en R^2 (bidimensional), con el objeto que represente la información de los tonos de grises por pixel. Así a todo punto de la imagen posee un valor para el eje perpendicular y mayor será su valor mientras mayor luminosidad posea. Desde el punto de vista geométrico el conjunto de estos componentes corresponde a la superficie o relieve de la imagen a ser analizada, siendo el conjunto objeto del análisis los puntos que están por debajo de dicho relieve (bitmap). Después de una secuencia de transformadas (Figuras 1.5 a la 1.10) se obtiene respuesta a la presencia o no presencia de los retenes.

Una vez definido el peso por punto del bitmap (nivel de gris), así mayor será su altura a menor tono de gris, en consecuencia el negro tendrá el valor mínimo de la paleta soportada por el monitor (Fig 1.5), ahora imaginémonos que hacemos pasar por esta superficie una bola de un radio dado y que son eliminadas todas las áreas donde la bola no alcanza llegar, esto es las fisuras más claras al entorno inmediato, como se aprecian en la figura No 1.6, este criterio se define como filtrado morfológico. Eliminando una serie de detalles como una etapa intermedia entre filtrado morfológico y erosión se obtiene la imagen de la figura 1.7. Al término del análisis dos marcadores indican la presencia de los dos retenes en cuestión Figura 1.8, como la ausencia de dichos retenes (Figura No 1.9). En la figura 1.10 se aprecia la ausencia de unos de los retenes que se están siendo revisados. El tratamiento en su totalidad a durado sólo dos segundos, usando procesadores rápidos y de costo mayor a los comunes.



Figura 1.5



Figura 1.6



Figura 1.7

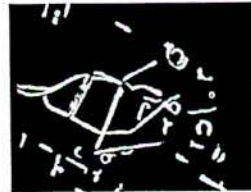


Figura 1.8



Figura 1.9

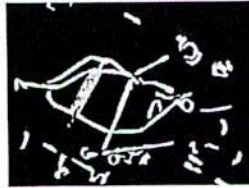


Figura 1.10

El concepto de filtrado resulta ya algo cotidiano para técnicos y científicos. Sin embargo el proceso de filtrado morfológico es diferente por naturaleza a los conceptos tradicionales ya existentes, sin perder por esto el grado de atractivo en su simplicidad.

1.5 Una extensa gama de aplicaciones.

Después de la revisión de algunos ejemplos es bueno tratar de distinguir los límites de acción para la morfología matemática, ¿sobre que fenómenos es realmente aplicable?. Esta respuesta no es muy clara, ya que esta herramienta es un conjunto de teorías en desarrollo, siendo su potencialidad una función en términos de resultados positivos a una gama muy extensa de posibles fenómenos a los que se pueda ver enfrentado. Esta herramienta fue concebida inicialmente para estudiar y resolver problemas de microscopía óptica. En este campo, la biología representa el estudio de los tejidos y células (Figura No 1.11), y en la ciencia de materiales el estudio de los metales, aleaciones, rocas, polvos y medios porosos.

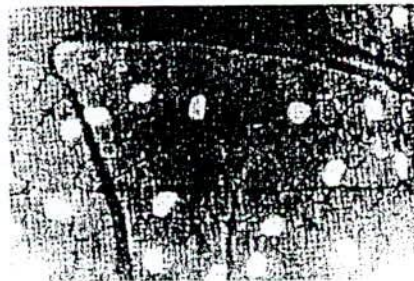


Figura No 1.11

En histología la morfología matemática permite precisar el tipo de relaciones existentes entre las fibras rápidas y las lentas y el tejido sostén, constituyentes de los músculos largos (Figura No 1.12). En la figura superior construida a partir del corte de la figura inferior, las fibras lentas y rápidas aparecen en tonos claros y oscuros respectivamente. El estudio detallado de esta partición desarrollado por el INRA en Francia ha supuesto una importante ayuda al diagnóstico de las miopatías o degeneraciones de estos músculos.

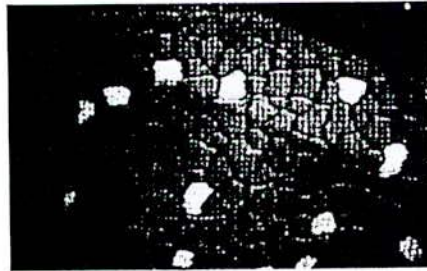


Figura No 1.12.

Fuera del campo de la microscopía y de la automatización robótica, la morfología matemática se presta preferentemente en análisis que no requieran y vinculen demasiados significados para la percepción humana. Su lógica geométrica se vería en problemas si se aplicase a la percepción de un grafólogo, por ejemplo, siendo una herramienta de gran utilidad en estructuras como la obtenida en una electroforesis (Figura No 1.13).

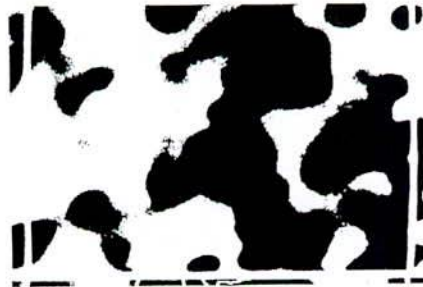


Figura No 1.13.

La electrofóresis bidimensional es un método de separación de proteínas, previamente extraídas de un tejido, al ser sometida a campos eléctricos perpendiculares entre sí. La distribución de estas macromoléculas, según su peso y su potencial eléctrico presenta características análogas en individuos emparentados (figura No 1.13). La interpretación de una electrofóresis requiere del aislamiento de cada una de estas proteínas y el estudio de su situación en el plano y sus relaciones de vecindad (figura No 1.14). Un tratamiento morfológico desarrollado por Serge Beucher de la Escuela de Minas de París e implementado en el analizador LEITZ-TAS efectúa esta tarea en forma automática, siendo su tiempo de ejecución mucho menor que los empleados por los métodos tradicionales.

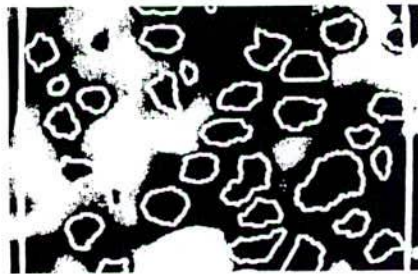


Figura No 1.14.

Otro campo de interés es el de la teledetección. En este campo se han diseñado satélites de propósitos específicos como el SPOT construido en Francia (1984). En el Spot las imágenes son adquiridas en tres bandas espectrales (de 0.51 a 0.58[μm], 0.63 a 0.69[μm] y de 0.79 a 0.89[μm]) en modo multispectral, con un pixel de 20x20 [m] y de una única banda espectral se 0.52 a 0.72 [μm], en modo policromático con un pixel de 10 x 10 [m]. Los objetivos del satélite Spot se centran en el conocimiento, inventario, vigilancia y gestión de los recursos terrestres. Para tales efectos se diseñan simulaciones de estas imágenes. En la figura superior se tiene la adquisición de un valle en la ciudad de Garona. La morfología matemática contribuye a la interpretación automatizada de dichas imágenes contrastadas posteriormente con las simulaciones, obteniéndose un alto porcentaje de inclusiones según elementos estructuradores predefinidos para tal efecto. Para el desarrollo de estas interpretaciones se tratan las entidades conexas como conjuntos de pixeles estandarizados que facilitan el análisis con elementos vecinos también estandarizados.



Figura No 1.15.

Debe hacerse notar que, fuera de los ejemplos presentados, la morfología matemática es aplicable a espacios matemáticos diferentes, tales como: retículos de puntos, campo de vectores, espacios no euclidianos, planos bidimensionales, etc. Tal como se ha presentado la morfología, pareciera ser autoconsistente, aislada de disciplinas vecinas. En su historia contemporánea, comenzando por los años sesenta y con el explosivo desarrollo tecnológico, su manifestación en Europa y Estados Unidos fue diferente, por lo menos en lo que a análisis de imágenes digitales se refiere. En Estados Unidos fue la NASA, la que determinó las pautas en el campo de la investigación americana. En Europa, si bien carecían de la industria aeroespacial, también se vio enfrentada a el tratamiento de ciencias tradicionalmente cualitativas.

De aquí en adelante fue desarrollado un avance sistemático, hasta la construcción de los primeros analizadores automáticos de imágenes (los quantiments). Era obvio que los resultados obtenidos en ambos continentes fueran divergentes. En microscopía óptica, los objetos suelen recortar el espacio en "fase": los granos y poros de una roca, núcleo y citoplasma de una célula, etc.; se trata de imágenes bastantes contrastadas con respecto a las imágenes de fotografía aéreas. De ello la concepción fundamental de la morfología modelada como un conjunto en su noción básica, y que se considere el espacio bidimensional como un subconjunto del espacio tridimensional. Así la morfología confiere una gran ponderancia a los conceptos de "máximo y mínimo", mientras en Estados Unidos se tendía por los cálculos numéricos. Por otra parte el uso constante del microscopio hace el modelamiento del mundo a objetos una consecuencia natural. Mientras el uso de adquisiciones satelitales hace tender al riguroso análisis algebraico, aplicado al uso de mallas de puntos, gráficos o matrices.

1.6 Una historia de piedras.

La explotación de minerales y su refinamiento es una actividad más importante de lo que pudiera parecer a primera vista. En un país con una buena ley de suelos el costo en energía eléctrica podría alcanzar a un 5% de la energía total en los procesos productivos del país, por lo tanto la optimización en dichos procesos resulta de una gran importancia. Comenzando con los trituradores y la roca a triturar deteniendo el proceso en el momento adecuado, diseñando trituradores en serie, etc. Para controlar estos procesos, es necesario examinar el resultado al final de cada etapa, determinando el tamaño exacto de lo desmenuzado y sobre todo la textura precisa de la roca triturada.

Al efecto se realiza una inclusión de las muestras del producto que sale del triturador en una resina polimerizante; de dicha inclusión se obtiene un corte plano, que acto seguido se pulimenta, como se observa en la figura No 8. El objetivo es elaborar un modelo descriptivo de estas secciones planas bajo la suposición de que los granos de la roca son triturados en cada choque por dos planos paralelos muy próximos entre sí. De este modo el espacio ocupado por la muestra analizada resulta determinada por rupturas (líneas) paralelas, cuya posición y orientación se disponen en forma aleatoria. Una simulación de esta muestra es el que se muestra en la figura No 1.17, en la cual se observa un cierto valor estético, en el cual quedan definidos pequeños polígonos que estadísticamente corresponden a la muestra de la figura No 1.16, así es posible el reconocimiento y análisis de formas y tamaños, a través de la medida de su superficie.



Figura No 1.16.

Comprobar este modelo con la realidad se reduce a verificar si la distribución de tallas y formas dentro de este "pavimento" de la figura No 1.17 previsto teóricamente coincide estadísticamente con la muestra obtenida. ¿Pero cómo establecer en la práctica este nivel de coincidencia? ¿Habría que tomar cada una de las partículas minerales, de

las que hay millones, y compararlas con todos los millones de partículas teóricamente posibles?. Aquí la morfología matemática opta por definir elementos "estructuradores" que pueden ser círculos, pares de puntos, etc. Si escogemos por ejemplo un círculo como elemento estructurante y desplazamos dicho elemento sobre la imagen a analizar podremos verificar la inclusión de este elemento en esta.

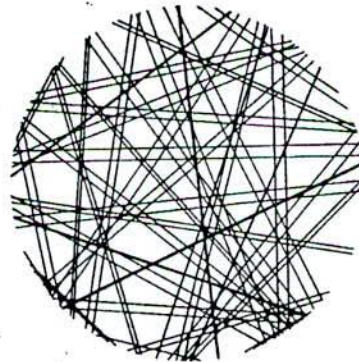
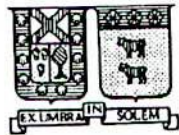


Figura No 1.17.

La proporción de inclusión en la imagen se denominará porcentaje de inclusión. Podemos posteriormente, según nos convenga, modificar el elemento estructurador obteniendo distintos porcentajes de inclusión en forma reiterativa, y así llegar a la contrastación de el modelo teórico definido a priori con la muestra real del mineral. La bondad de esta comparación será mejor tantas muestras o elementos estructurantes empleamos sobre la imagen analizada (en la práctica un par de decenas).

Gracias a este ejemplo queda de manifiesto la naturaleza de la morfología matemática. Se trata de una teoría conjuntista, en el sentido en que se fundamentan dichas inclusiones son intersecciones, uniones y desplazamientos en vez de sumas y multiplicaciones.



2 Morfología matemática.

2.1 Notaciones

En este capítulo, se formalizan las notaciones matemáticas empleadas y las definiciones morfológicas necesarias para el desarrollo de los algoritmos y su posterior análisis.

Conjunto de todos los enteros:

Z

Arreglo bidimensional de vectores :

Z^2

Subconjuntos de Z^2 :

A, B, C, X, Y, \dots

Conjunto vacío :

\emptyset

Transformada de X por β :

$\beta(X)$

Vectores de Z^2 :

a, b, c, x, y, \dots



x perteneciente a X :

$$x \in X$$

x no perteneciente a X :

$$x \notin X$$

X es subconjunto de Y :

$$X \subset Y$$

X es subconjunto impropio de Y :

$$X \subseteq Y$$

Conjunto intersección de X e Y :

$$X \cap Y$$

Conjunto unión de X e Y :

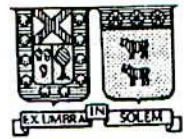
$$X \cup Y$$

Subtracción de Minkowski de X por Y :

$$X \ominus \bar{Y}$$

Adición de X por Y :

$$X \oplus \bar{Y}$$



Erosión de X por Y :

$$X \ominus Y$$

Dilatación de X por Y :

$$X \oplus Y$$

Transformada hit/miss de X por Y :

$$X \otimes Y$$

Borde de S :

$$\delta S$$

Interior de S :

$$\dot{S}$$

Complemento de X respecto a Z^2 :

$$X^c$$

Conjunto diferencia entre X e Y :

$$X/Y = (X^c \cup Y)^c$$

Convergencia secuencial monótona de X_i para valores de X :

$$X_i \vee X$$

Reflección de X respecto al origen :

$$-X \Rightarrow -x \in X.$$

Conjuntos de vectores que satisfacen la propiedad P :

$$\{x:P\}$$

Traslación de vector x por el vector b :

$$X_b$$

Unión de las traslaciones de X_b :

$$\cup_b \in BX_b$$

Intersección de las traslaciones de X_b :

$$\cap_b \in BX_b$$

Rotación de X por i x 90° :

$$\rho i(X)$$

2.2 Operadores Morfológicos Erosión y Dilatación.

Una imagen digital binaria está representada por un conjunto de puntos llamados píxeles, los cuales se definen pertenecientes a S . Una transformación morfológica X sobre una imagen se define como una nueva imagen, obtenida a partir de la imagen original sobre la cual se procesó un elemento estructurante. Todas las operaciones morfológicas aplicadas se basan en la adición y sustracción de Minkowski, las cuales están definidas como :

[1]

$$X \ominus T = \{a + b : a \in X, b \in T\} = \cup_{b \in T} X_b$$

[2]

$$X \ominus T = (X^c \oplus T)^c = \cap_{b \in T} T_b$$

Cabe hacer notar la dualidad existente entre la adición y sustracción de Minkowski.

La erosión y dilatación morfológicas son definidas desde un punto de vista geométrico, previa existencia de elementos estructuradores, los cuales son aplicados en las figuras de análisis iniciales. Así la erosión está definida matemáticamente por el conjunto de puntos x los cuales sumados vectorialmente con el conjunto T dan un conjunto solución T_x , el cual debe ser conjunto impropio de X , notacionalmente queda expresado como:

[3]

$$X \ominus T = \{x : T_x \subseteq X\} = \cap_{b \in T} X_b$$

De las definiciones dadas, se deduce que la sustracción de Minkowski y la erosión convergen a un mismo conjunto para elementos estructuradores nulos ($T = \{0,0\}$). Así la dilatación está definida como el conjunto resultante de: los puntos x tales que el conjunto T_x es unido con el conjunto X , notacionalmente queda expresado como:

[4]

$$X \oplus T = \{x: T_x \cap X \neq \emptyset\} = \cup_b \in TX_b$$

Examinando la erosión y dilatación un poco más profundo se tiene que dado dos conjuntos A y B , definidos por sus elementos :

$$A = \{ a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, \dots, a_n \} \text{ y}$$

$$B = \{ b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, \dots, b_n \} ,$$

entonces la dilatación de A por B estará dada por el conjunto de todos los posibles pares de elementos de la suma vectorial $a_i + b_i$ pertenecientes al conjunto solución C. Lo anterior queda definido como sigue :

Defenición 1 : Sea A y B subconjuntos de E , la dilatación de A por B está definido por :

[5]

$$C = A \oplus B = \{c \in E^n / c = a + b\}$$

con a perteneciente A y b perteneciente B. Como ejemplo se define dos conjuntos vectoriales ;

$$A = \{ (0,1), (1,1), (2,1), (2,2), (3,0) \} \text{ y}$$

$$B = \{ (0,0), (0,1) \}$$

así el conjunto solución está dado por :

$$C = \{(0,1), (0,2), (1,1), (1,2), (2,1), (2,2), (2,3), (3,0), (3,1)\},$$

esto queda representado como lo muestra la figura No 2.1 :

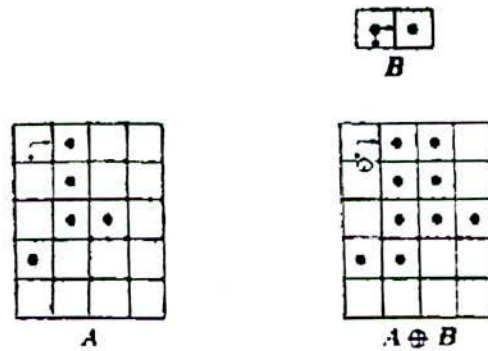


Figura No 2.1

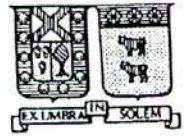
2.2.1 Propiedades de la dilatación morfológica.

La dilatación morfológica es simétrica con respecto a sus operadores, así se establece la conmutatividad para la erosión morfológica.

[6]

$$A \oplus B = B \oplus A$$

En el desarrollo de los algoritmos de gestión los operandos son claramente identificados según los propósitos e intereses en el análisis, así el conjunto A es definido como la "imagen de entrada" y el conjunto B como el "elemento estructurador". Así en el propósito de erosión la imagen A será erosionada por el elemento estructurador B. Como es lógico suponer existen distintos grupos de operadores morfológicos, lo cual es motivo de estudio en un capítulo posterior, sin embargo se tiene un claro criterio al tomar un disco como elemento estructurante, ya que este actúa en forma isotrópica en la imagen de entrada, siendo válido dicho criterio para la dilatación y erosión morfológica.



Así la dilatación de la imagen A por un elemento estructurador D puede ser expresado como, la iteración de dos elementos B y C, estableciendo así la asociatividad en la operación de erosión.

[7]

$$A \oplus D = A \oplus (B \oplus C) = (A \oplus B) \oplus C$$

Esta propiedad tiene especial interés dado que el elemento estructurador D puede ser definido por la erosión de dos elementos estructuradores B y C. Esta propiedad representa un ahorro en el costo computacional debido a que el conjunto D definido como la dilatación de B y C será conjunto impropio de D, siendo el número de elementos de D, B y C N_d , N_b y N_c respectivamente, así $N_d > N_b$ y $N_d > N_c$, por lo tanto el número de operaciones resultantes será de $N_a * N_d$, lo cual puede ser un ahorro considerable con respecto a $N_a * (N_b + N_c)$, si las dimensiones de los conjuntos A, B y C es muy grande.

Si los algoritmos de desarrollo de la dilatación se basan en barridos de pantalla (del tipo VGA 640x480) utilizando computadores a 16 Mhz, la dilatación por un elemento estructurador D (de dimensiones 5x5), podría tomar un tiempo de 7 seg. aproximadamente. Como contrapartida, si se considera la dilatación por dos elementos estructuradores B y C de dimensiones (3x3) y (2x2) respectivamente, la ejecución de dilatación tomará un tiempo de 14 seg. aproximadamente. Matemáticamente la diferencia en el orden de magnitud entre las dimensiones de 7 y 14 es despreciable, sin embargo computacionalmente la dilatación de una imagen de entrada por dos elementos estructuradores v/s la dilatación por un sólo elemento implica necesariamente barrer la pantalla por cada elemento estructurador, por lo tanto si la operación se define en base a "n" elementos estructuradores, la ineficiencia del algoritmo en términos de tiempo será del $(n-1) * 100\%$.

Una alternativa de carácter matemático para solventar dicha ineficiencia, es redefinir la dilatación como la traslación de A en términos del elemento estructurador.

Definición 2: Sea A un subconjunto de E^3 y x perteneciente a E^3 , la traslación de A por x se denota por $(A)_x$ y está definido por :

[8]

$$(A)_x = \{C \in E^n / c = a + x, \forall a \in A\}$$

así la dilatación de A por B se puede definir como la unión de la traslación de A por los elementos de B.

[9]

$$A \oplus B = \cup_{b \in B} A_b$$

Esta definición puede ser comprobada por inspección al suponer una imagen de entrada A cualquiera, y un elemento estructurador de un único elemento (x_i, y_i) , obteniendo como resultado la imagen de entrada A trasladada en las coordenadas $(ax_i + x_i, ay_i + y_i)$. La definición de la traslación de la imagen de entrada nos da las herramientas necesarias para enunciar la propiedad de Traslación Invariante de la Dilatación "Si se dilata la imagen de entrada $(A)_x$ (A dilatada por el elemento x) por el elemento estructurador B, se tendrá como conjunto solución la dilatación de A por B trasladada por el elemento x. Lo anterior queda expresado como:

[10]

$$A_x \oplus B = (A \oplus B)_x$$

Como se ha visto, los operadores morfológicos se pueden definir como la iteración de dilataciones de conjuntos impropios de estos, de aquí se deduce el siguiente corolario a partir de [10] :

[11]

$$A \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus (B_n)_x \oplus \dots \oplus B_p =$$

$$(A \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus (Bn) \oplus \dots \oplus Bp)_x$$

De la proposición anterior se puede deducir que si se dilata una imagen de entrada por un elemento estructurante no nulo x , seguidamente se dilata por un elemento no nulo y , donde se cumple que $x = -y$, el conjunto solución será la misma imagen de entrada. Lo anterior queda expresado como sigue :

[12]

$$A_x \oplus B_{(-x)} = A \oplus B$$

empleando un criterio similar al usado en [11] se puede deducir que :

[13]

$$A_x \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus (Bn)_{(-x)} \oplus \dots \oplus Bp =$$

$$A \oplus B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus (Bn) \oplus \dots \oplus Bp =$$

La dilatación es necesariamente extensiva cuando el origen pertenece al elemento estructurante, así el conjunto solución esta dado por todos los vectores $a_i + b_i$, incluyendo en origen (vector nulo).

Como ejemplo de lo anterior se ilustra en la figura No 2.2 el conjunto solución de la dilatación de la imagen de entrada A por el elemento estructurador B el cual no contiene al vector nulo y sus elementos son reflejados con respecto al origen.

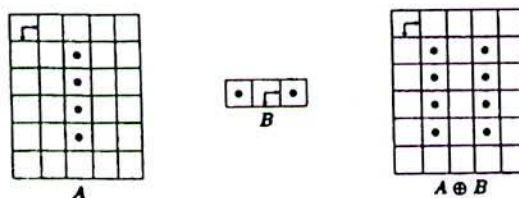


Figura No 2.2

De la situación anterior se deduce el corolario siguiente:

Corolario 14:

[14]

$$\text{Si } 0 \in B_i \Rightarrow B_m \in B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_n$$

Proposición 15: Si dos conjuntos A y B son erosionados en forma independiente por el mismo elemento estructurador D y se determina que A es subconjunto impropio de B, el conjunto solución de la dilatación de A por D será conjunto impropio de el conjunto solución de B dilatado por D. Lo anterior se resume como sigue:

[15]

$$A \subseteq B \Rightarrow A \oplus D \subseteq B \oplus D$$

De la proposición anterior y aplicando la propiedad conmutativa se obtiene:

[16]

$$A \subseteq B \Rightarrow D \oplus A \subseteq D \oplus B$$

2.2.1.1 Ley de Distributividad de la dilatación.

La distributividad de la dilatación de sobre la intersección de conjuntos está dada por:

[17] Proposición :

$$A \oplus (B \cap C) = (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$$

En forma análoga se tiene la distributividad sobre la unión de conjuntos:

[18] Proposición:

$$A \oplus (B \cup C) = (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$$

Aplicando los criterios y definiciones de [15] en forma conjunta a la propiedad distributiva de la dilatación en la unión e intersección de conjuntos morfológicos se establece que :

[19] Proposición

$$A \oplus (B \cup C) \subseteq (A \oplus B) \cup (A \oplus C)$$

Proposición 20 :

$$A \oplus (B \cap C) \subseteq (A \oplus B) \cap (A \oplus C)$$

La propiedad de la distributividad de la dilatación sobre la unión e intersección, es de real importancia ya que computacionalmente permite un ahorro en el tiempo de procesamiento en la ejecución de dilataciones de elementos estructuradores sobre imágenes de entrada definidas por una cardinalidad no despreciable. Así un elemento estructurador se puede descomponer en un número reducido de subconjuntos los cuales podrían ser pensados como el límite de la figura que describe tal elemento estructurador, de este modo, junto con expresar la dilatación como una unión de dilataciones, el mismo número de dilataciones se puede reducir a un número tal que el conjunto de vectores descriptores de el elemento estructurador describa o incorpore a los vectores de la periferia. La figura No 2.3 ejemplifica la situación anterior :

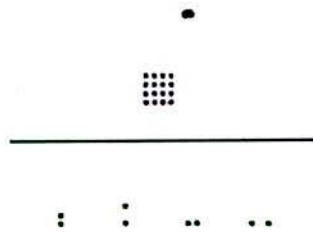


Figura No 2.3

2.2.2 La erosión y sus propiedades.

La erosión es definida como el dual morfológico la dilatación. Si se define una imagen de entrada A , sobre la cual se erosionará un elemento estructurador B , el conjunto solución de dicha transformación quedará definido como todo vector x perteneciente al espacio n -euclidiano tal que $x+b$ debe pertenecer a A para todo b perteneciente a B . Lo anterior queda sintetizado como sigue :

[21] Proposición

$$A \ominus B = \{x \in E^n / x + b \in A \wedge b \in B\}$$

Si definimos como ejemplo al conjunto A como :

$$A = \{ (1,0),(1,1),(1,2),(1,3),(1,4),(1,5),(2,1),(3,1),(4,1),(5,1) \}$$

y al conjunto B como :

$B = \{ (0,0),(0,1) \}$, el conjunto solución correspondiente a la erosión de A por B esta dada por :

$$C = A \ominus B = \{ (0, 1), (1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4) \}$$

La erosión morfológica también se puede definir como el conjunto de todos los vectores diferencia entre A y B , así :

[22]

$$A \ominus B = \{x \in E^n / b \in B \Rightarrow a \in A / x = a - b\}$$

La utilidad de la erosión es apreciada cuando es empleada para expresar una diferencia de formas. Así la erosión de una imagen de entrada A por un elemento estructurador B es el conjunto de todos los vectores x pertenecientes a E³ tales que trasladados de B están contenidos en A. De esta definición se deduce que un elemento del conjunto solución xi dilatado por el conjunto estructurador da por resultado un subconjunto de A. Lo anterior queda expresado como:

[23]

$$A \ominus B = \{x \in E^n / (B)_x \subseteq A\}$$

el efecto de erosionar una imagen de entrada A por un elemento estructurador B se puede visualizar en la figura No 2.4.

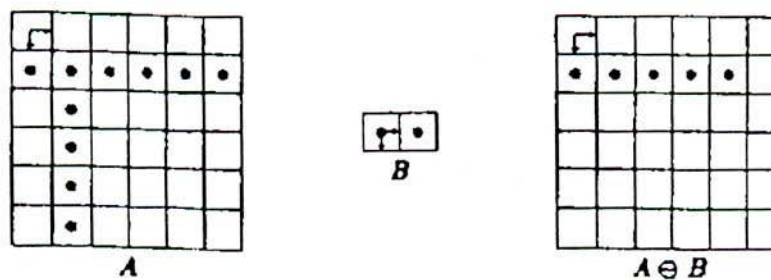
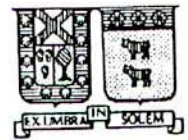


Figura No 2.4



Existe una diferencia entre las definiciones de la subtracción de Minkowski y la erosión morfológica, la primera define la traslación de todos los puntos de A por B, mientras la segunda ofrece una suerte de restricción al admitir sólo elementos que pertenezcan a la imagen de entrada. Así la erosión de A por B se redefine como la traslación de A por todos los bi pertenecientes a B intersectados por el conjunto A.

[24] Proposición :

$$A \ominus B = \bigcap_{b \in B} (A)_b$$

La figura No 2.5 define una figura de entrada A y un elemento estructurador B con el cual se erosionará la figura A. Para este efecto la figura A a sido trasladada por todos los elementos de B, teniendo un número n de conjuntos soluciones (sólo de traslación) y el conjunto solución correspondiente a la erosión de A por B estará dada por las intersecciones de todos los conjuntos soluciones de traslación antes mencionados.

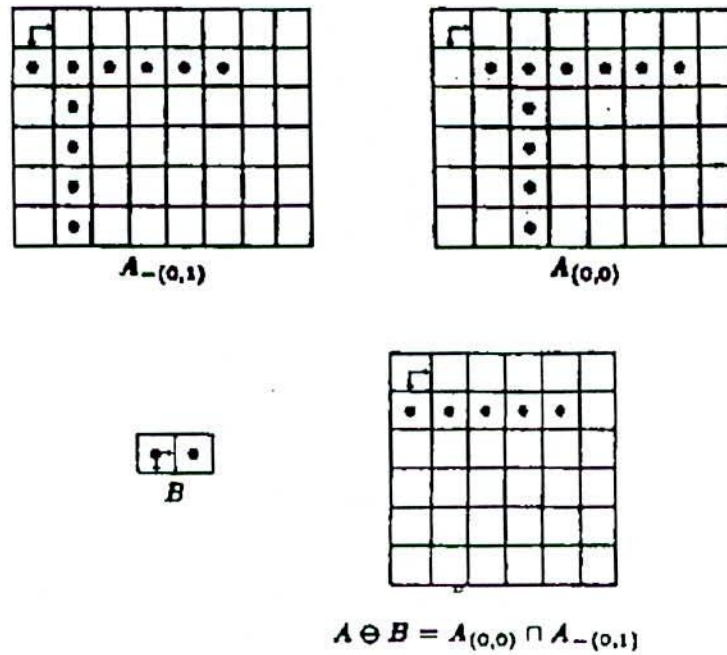


Figura No 2.5

[25] Proposición :

$$Si 0 \in B \Rightarrow A \ominus B \subseteq A$$

Por inspección se deduce, aplicando la definición de erosión, que al no estar contenido el origen en el elemento estructurador, el conjunto solución de la erosión de A por B no tendrá nada en común con la imagen de entrada A. La figura No 2.6 ejemplifica lo anterior.

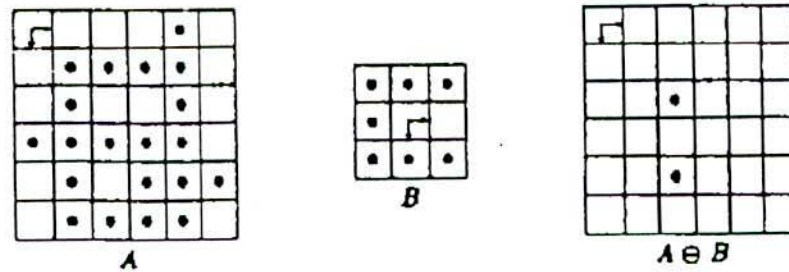


Figura No 2.6

Proposición 26 : La invariancia de traslación.

Si la imagen de entrada es trasladada por un vector x , el conjunto solución correspondiente a la erosión de A por B , estará desplazado por el vector x . Así si el elemento estructurador está desplazado por un vector x , el conjunto solución correspondiente a la erosión de A por B , estará desplazado por el vector $-x$. Lo anterior queda expresado como sigue :

[26]

$$A_x \ominus B = (A \ominus B)_{(-x)}$$

[27]

$$A \ominus B_{(-x)} = (A \ominus B)_{(-x)}$$

Proposición 28 : Si la imagen de entrada A está contenida en la imagen B , entonces la erosión del elemento A por un elemento K estará contenida en la erosión de B por un elemento K . Lo anterior queda sintetizado como sigue:

[28]

$$A \subseteq B \Rightarrow (A \ominus K) \subseteq (B \ominus K)$$

La proposición anterior esta ejemplificada en la figura No 2.7:

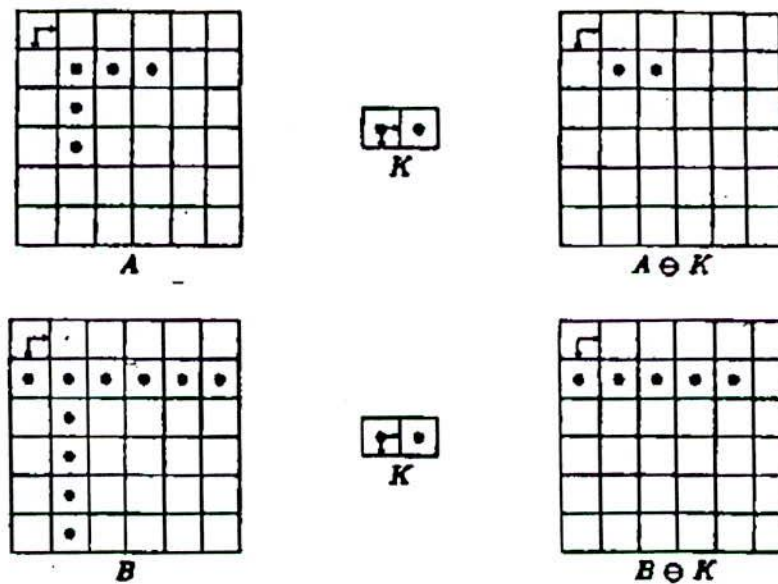


Figura No 2.7

Proposición 29 : Si A es subconjunto impropio de B, y la figura de entrada A es usado como elemento estructurador sobre una imagen D, y el elemento estructurador erosiona a una imagen de entrada D ; el conjunto solución correspondiente a la erosión de A por D será conjunto impropio del conjunto solución correspondiente a la erosión de D por B. Lo anterior queda expresado como sigue :

[29]

$$B \subseteq x \ominus A \Rightarrow (D \ominus A) \subseteq (D \ominus B)$$

La figura No 2.8 ejemplifica la proposición anterior :

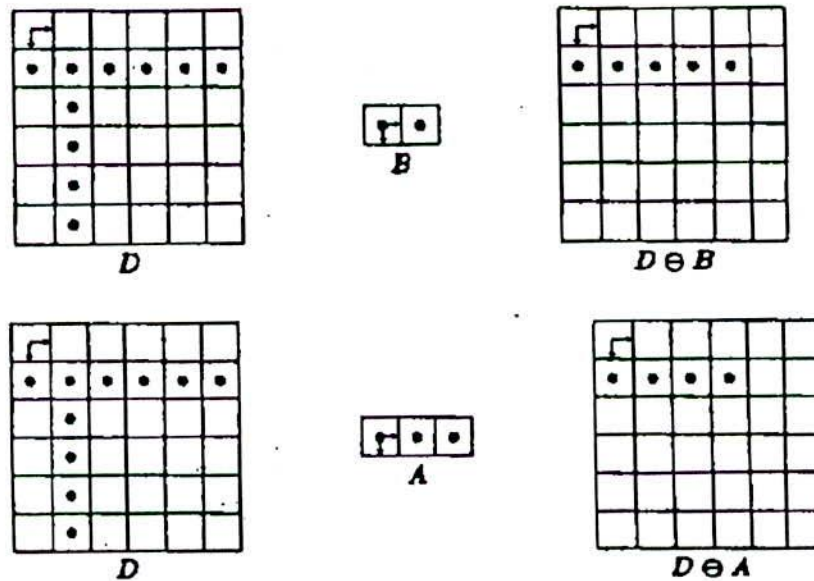


Figura No 2.8

La estructura de la erosión y dilatación es similar en cuanto a la dualidad existente. Esta dualidad es aplicable a operaciones de unión e intersección morfológica. Un ejemplo de ello se aprecia en las leyes de Morgan, donde se define las operaciones de complemento de un elemento estructurante y/o imagen de entrada.

[30]

$$(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$$

Morfológicamente la negación de un conjunto o vector es considerado como el inverso geométrico con respecto al vector nulo (centro geométrico del sistema de coordenadas). Este inverso geométrico es llamado "reflección" de X con respecto al origen.

Definición 31 : Sea B subconjunto impropio de E3. La reflexión de B es denotada por B^c y está definido por :

[31]

$$B = \{x/\exists b \in B, x = -b\}$$

La reflexión de B con respecto al origen es definido también como B transpuesto o el transpuesto de B.

[32] Teorema de Dualidad erosión dilación :

$$(A \ominus B)^c = A^c \oplus B^c$$

La figura No 2.9 ejemplifica lo señalado anteriormente.

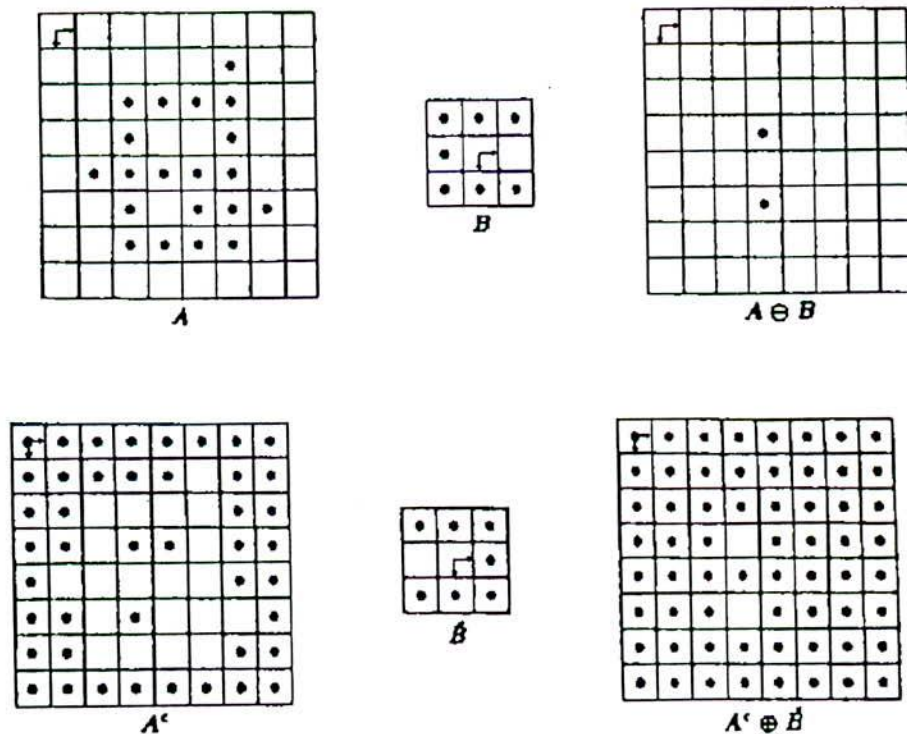
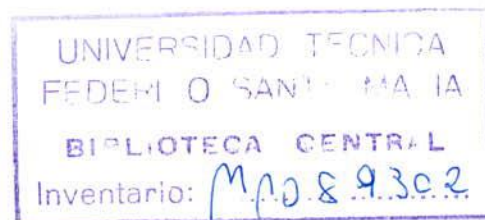
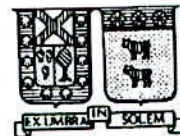


Figura No 2.9





[33] Proposición: La distributividad de la erosión sobre la intersección .

$$(A \cap B) \ominus K = (A \ominus K) \cap (B \ominus K)$$

La figura No 2.10 muestra la distributividad de la erosión sobre la intersección.

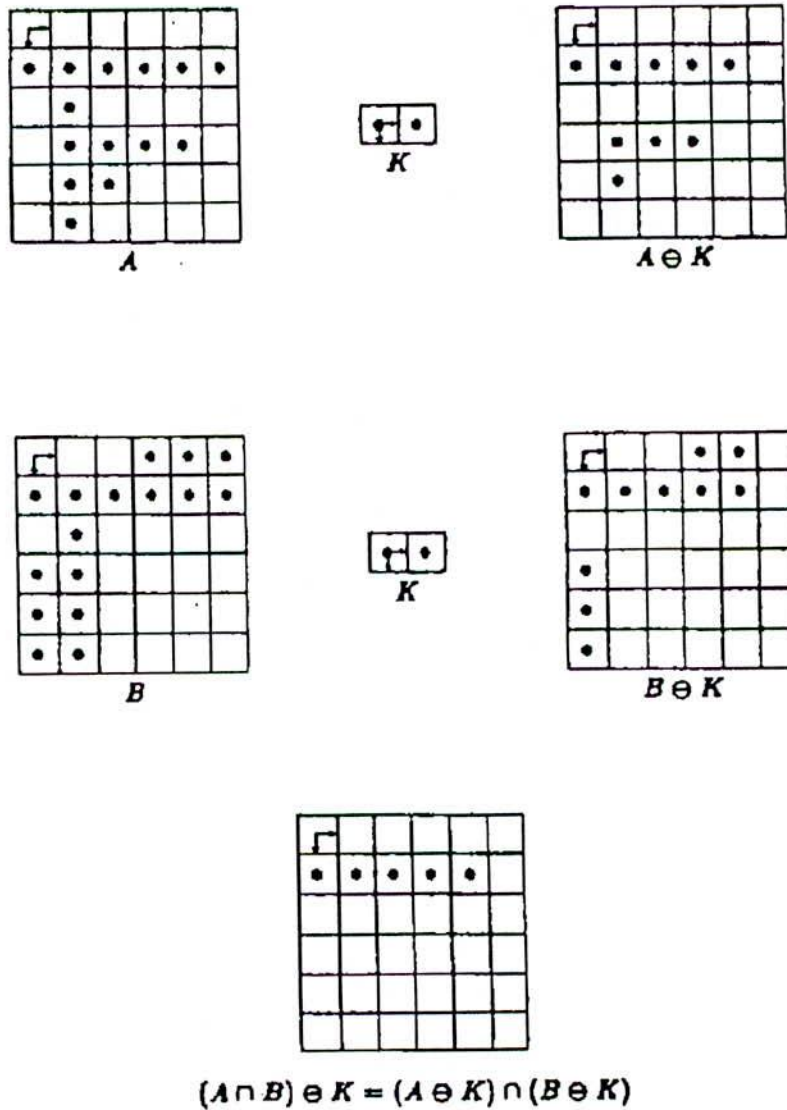


Figura No 2.10

[34] Proposición : La unión de las erosiones de A por K y B por K, será subconjunto impropio de la erosión de K por la unión de A por B. Lo anterior queda expresado como sigue :

$$(A \ominus K) \cap (B \ominus K) \subseteq (A \cup B) \ominus K$$

La figura No 2.11 ejemplifica la proposición anterior :

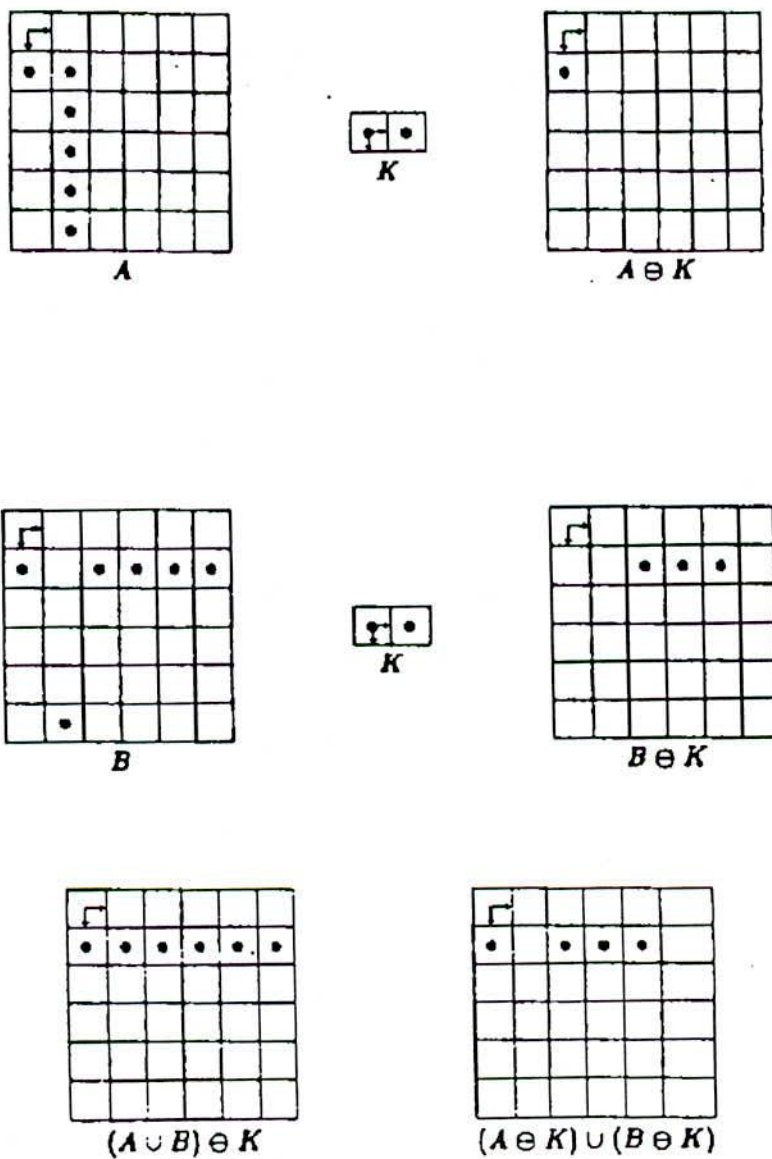


Figura No 2.11

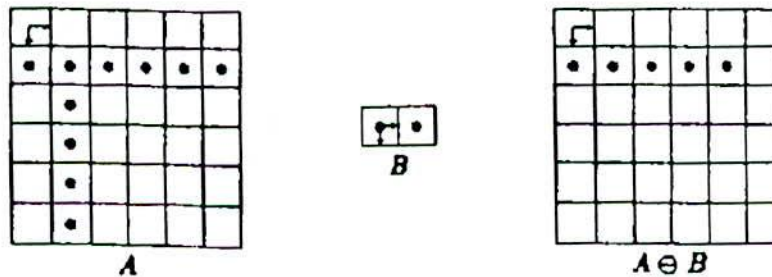
[35] Proposición : Por la naturaleza restrictiva de la definición de erosión esta transformada morfológica no cumple con la propiedad conmutativa, es decir :

$$(A \ominus B) \neq (B \ominus A)$$

así la distributividad de la erosión sobre la unión se restringe a la identificación de cuales serán los elementos estructuradores y cuales serán las imágenes de entrada.

$$A \ominus (B \cup C) = (A \ominus B) \cap (A \ominus C)$$

La figura No 2.12 ejemplifica la proposición anterior :



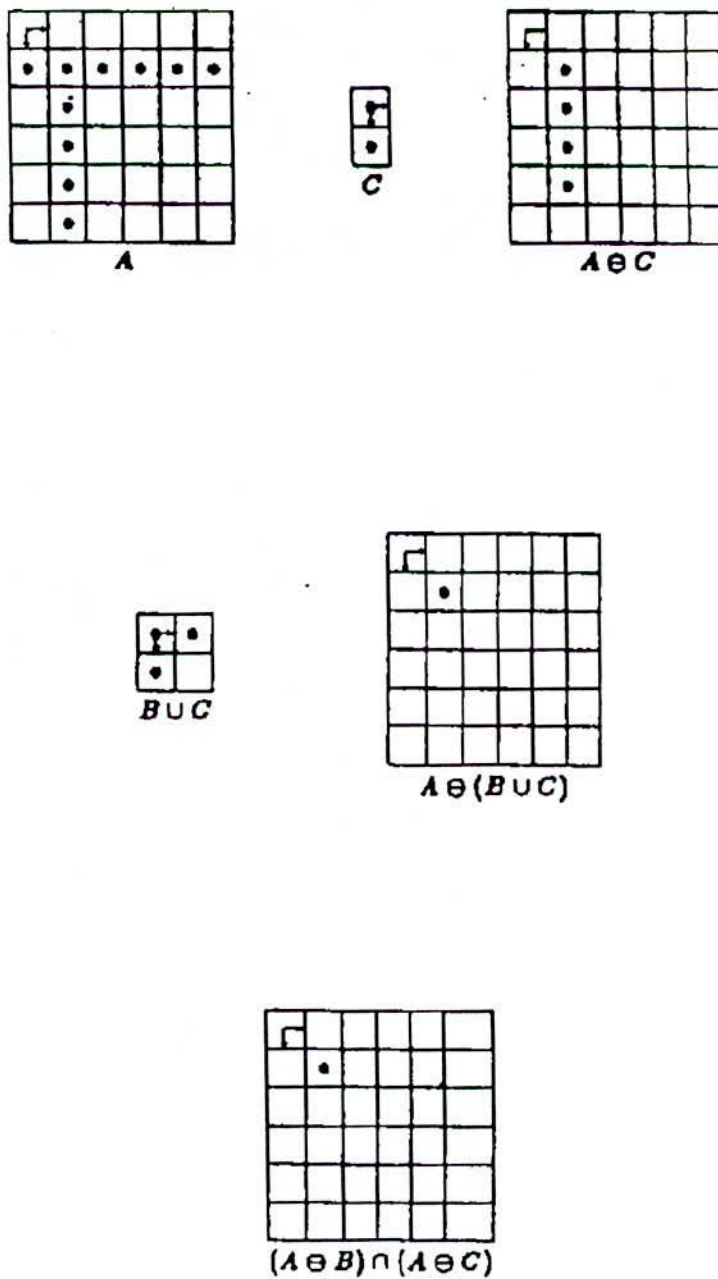


Figura No 2.12

La relevancia práctica de esta proposición reside en como desarrollar los algoritmos para el tratamiento de imágenes, así se debe considerar cuales serán los elementos estructuradores y su posible descomposición o también como una posible iteración de elementos estructuradores sobre una imagen de entrada, basados en la unión del elemento estructurante n con el elemento estructurante $n-1$.

Proposición 36 : La unión de los conjuntos soluciones dados por las erosiones de A por B y A por C será subconjunto impropio de la erosión de la imagen de entrada A por la unión de B por C . Lo anterior queda expresado como sigue :

[36]

$$(A \ominus B) \cup (A \ominus C) \subseteq A \ominus (B \cap C)$$

La proposición anterior queda representada por la figura No 2.13

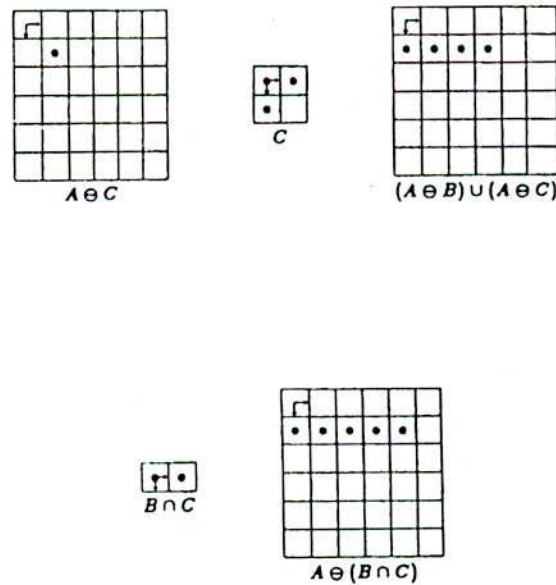
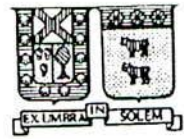


Figura No 2.13



Proposición 37 : Con respecto a la descomposición de los elementos estructuradores se tiene como regla expresar una erosión de un elemento de entrada A por K como una erosión de un elemento de entrada A por la suma de subconjuntos determinantes de K. Así si el elemento estructurador K está determinado por la dilatación de los subconjuntos B y C, se tiene que la erosión quedará expresada como:

[37]

$$A \ominus K = A \ominus (B \oplus C)$$

Proposición 38: En la optimización de el tiempo de ejecución involucrado por una erosión, según [37], se puede expresar el elemento estructurador como la dilatación de dos subconjuntos, así el algoritmo de erosión puede ser diseñado o implementado en dos etapas que consideren erosiones de orden de magnitud pequeña en comparación con la primera , por ejemplo si se tiene:

[38]

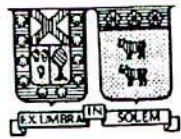
$$A \ominus (B \oplus C) = (A \ominus B) \ominus C$$

la optimización en el tiempo de ejecución se hará razonablemente considerable si el orden de magnitud de los conjuntos involucrados en el proceso de erosión es grande (entendiendo por conjunto grande a un conjunto de entrada con cardinalidad superior a los cien vectores descriptores y un conjunto estructurador con cardinalidad superior a los diez elementos o vectores descriptores).

Corolario 39 : De la proposición 38 se puede extender la descomposición de el elemento estructurador a una suma de k subconjuntos deterministas de K, así la erosión de A por K quedará determinada por :

[39]

$$A \ominus (B_1 \oplus \dots \oplus B_k) = (\dots (A \ominus B_1) \ominus \dots \ominus B_k)$$



Proposición 40: Revisando las precedencias de la erosión y dilatación de las dos proposiciones anteriores [38] y [39] no se obtiene una igualdad en términos de prioridades, así en este sentido el desarrollo de la erosión prioritariamente ante la dilatación establece una inclusión del desarrollo de la dilatación prioritaria ante la erosión. Lo anterior queda expresado como sigue:

[40]

$$A \oplus (B \ominus C) \subseteq (A \oplus B) \ominus C$$

La figura No 2.14 muestra el desarrollo de esta inclusión

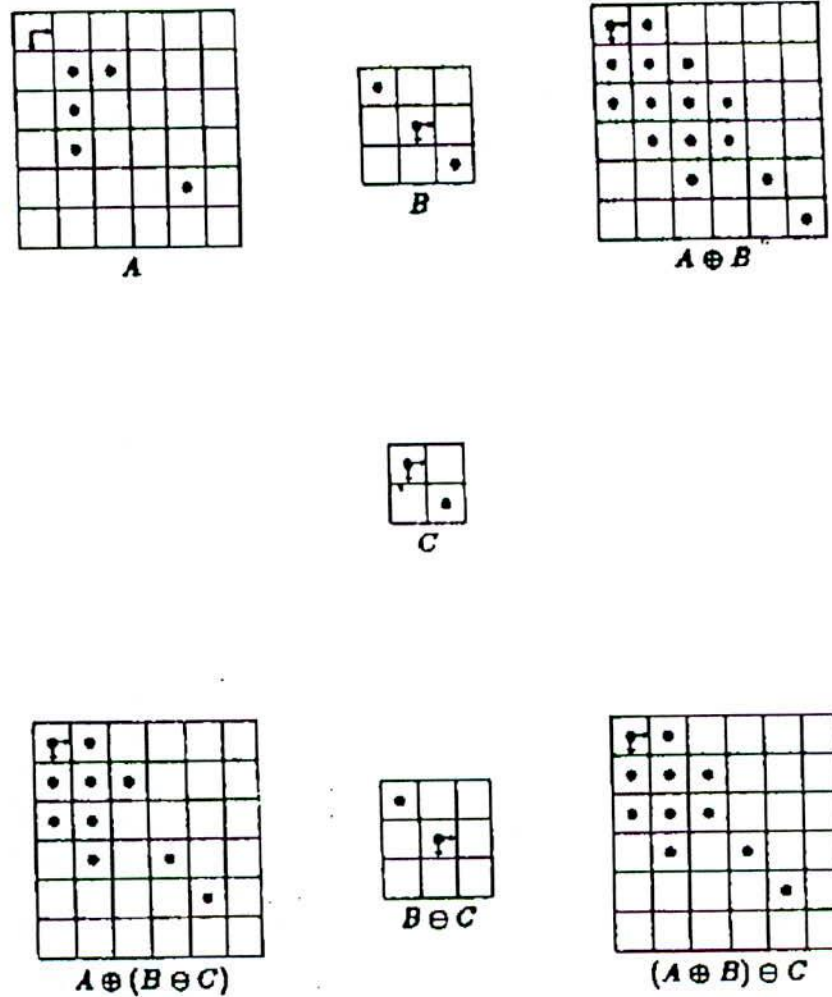
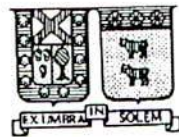


Figura No 2.14

Siendo la dilatación y erosión de carácter dual, no podemos suponer que la cancelación conjuntista (matemática) sea técnicamente correcta. Por ejemplo si una imagen de entrada A puede ser expresada como la erosión de dos conjuntos B y C , notacionalmente como :

$$A = B \ominus C$$



podríamos suponer que dilatando en ambos miembros de la igualdad, por el conjunto C llegaríamos a una igualdad del tipo $A [+] C = B$, sin embargo por ser conjuntos de tipo morfológicos existe una mantención en la relación de formas que obedece al siguiente criterio:

Proposición 41 : Una imagen de entrada A será subconjunto impropio de el conjunto resultante de la erosión de B por C si y solo si la dilatación de A por C es subconjunto impropio de B . Lo anterior queda sintetizado notacionalmente como sigue :

[41]

$$A \subseteq (B \ominus C) \Leftrightarrow (A \oplus C) \subseteq B$$

Corolario 42 : Como corolario de la proposición anterior se generaliza que una imagen de entrada será conjunto impropio de B erosionado por una secuencia de conjuntos C_k si y sólo si la imagen de entrada A dilatada por una cadena de conjuntos C_k es subconjunto impropio de B . Lo anterior queda notacionalmente expresado como :

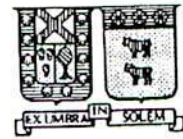
[42]

$$A \subseteq (\dots(B \ominus C_1 \dots) \ominus C_k) \Leftrightarrow$$

$$(\dots(A \oplus C_1 \oplus \dots) \oplus C_k \subseteq B$$

2.3 Operadores de Apertura y clausura.

En el procesamiento de imágenes binarias es prácticamente imposible encontrar que una imagen de entrada o imagen objeto sea procesada solamente por operadores de erosión u operadores de dilatación, salvo situaciones de carácter demostrativos . Así en la mayoría de los análisis se encuentran aplicaciones simultáneas y alternadas de



los operadores morfológicos vistos en los capítulos anteriores. Ejemplo de ello son iteraciones de dilataciones donde el conjunto solución es erosionado o iteraciones de erosiones donde el conjunto solución es dilatado.

En casos particulares en los cuales se desea destacar o eliminar características particulares de una imagen objeto sin distorsionar la interpretación morfológica de esta, entendiéndose por significancia o interpretación morfológica el "mensaje" intrínseco de la imagen, así cuando nuestra imagen de análisis sea un cuadrado y no queramos afectar su interpretación morfológica nos preocuparemos que en las iteraciones que efectuemos con los operadores morfológicos bajo distintos elementos estructuradores, la imagen inicial siga interpretando un cuadrado y no una circunferencia.

Como es obvio deducir el lazo de control está implementado "a priori" siendo el actuador de este lazo nuestra interpretación de cuadrado con respecto a una circunferencia. Siendo el margen de error pequeño se podrán establecer criterios para el análisis de formas. Así dentro de las implementaciones de "a pares" de los operadores morfológicos ya vistos se han definido dos operadores morfológicos de carácter secundarios, tomando como base las definiciones de erosión y dilatación y las propiedades que a estos los rigen.

Proposición 43 : Dado una imagen de entrada A y un elemento estructurador K , se define como apertura morfológica al conjunto solución de la erosión de A por K , dilatado por K . Notacionalmente lo anterior queda expresado como :

[43]

$$A \{ \oplus \} K = (A \ominus K) \oplus K$$

Proposición 44 : Dada una imagen de entrada A y un elemento estructurador K , se define como clausura morfológica al conjunto solución de la dilatación de A por K , erosionado por K . Notacionalmente lo anterior queda expresado como :

[44]

$$A \{ \ominus \} K = (A \oplus K) \ominus K$$

La característica de estas transformaciones es que son idempotentes, es decir la aplicación reiterativa de estas transformadas sobre el conjunto solución anterior no aporta cambios morfológicos en cuanto a su interpretación se refiere. Así, si deseamos transformar o aplicar la apertura morfológica a una imagen de entrada utilizando un disco como elemento estructurador se obtendrá como resultado la eliminación de islotes o puntas aguzadas y quiebres de istmos angostos. Si aplicamos la transformada de clausura sobre la imagen de entrada empleando el mismo elemento estructurador obtendremos los alargamientos de golfos y el desaparimiento de pequeños vacíos y/o lagunas internas de nuestra imagen de entrada .

Una vez aplicadas estos operadores a una imagen de entrada no obtendremos cambios significativos en la morfología de nuestra imagen, ya que una vez desaparecidos los istmos o lagunas el conjunto resultante ya no tendrá dichas características y solamente será objeto de efectos como la erosión y la dilatación. Esta propiedad morfológicamente se denomina idempotencia o transformadas morfológicas equipotenciales. La cual reviste una gran importancia en términos de no provocar una "reacción en cadena" que desemboque en una pérdida total de los propósitos de nuestro procesamiento.

Proposición 45 : Aprovechando la idempotencia de las transformadas de apertura y clausura se tiene una clase de conjuntos que son inalterados por la erosión seguido de dilataciones dado un elemento estructurador K . Esta clase de conjuntos consiste en todos los conjuntos que puedan ser expresados como algún conjunto dilatado por K . La proposición anterior queda expresada como sigue :

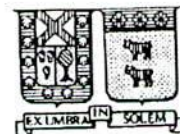
[45]

$$A \oplus K = (A \oplus K) \{\ominus\} K = (A \{\oplus\} K) \oplus K$$

Proposición 46 : La idempotencia de la clausura morfológica queda expresada como sigue :

[46]

$$A \{\ominus\} K \{\ominus\} K = A \{\ominus\} K$$



Proposición 47: En forma similar a la dilatación de una imagen erosionada por un elemento estructurador K se verá inalterado por nuevas dilataciones y erosiones. Esta proposición queda sintetizada como sigue :

[47]

$$A \ominus K = (A \{\oplus\} K) \ominus K = (A \ominus K) \{\ominus\} K$$

En forma similar la idempotencia de la apertura morfológica es sintetizada en la siguiente proposición :

Proposición 48 : Todo conjunto solución obtenido a partir de la apertura morfológica conservará sus vectores descriptivos al ser aplicada nuevamente la apertura dado el mismo elemento estructurador, así:

[48]

$$A \{\oplus\} K = (A \{\oplus\} K) \{\oplus\} K$$

Obviamente tanto para la idempotencia de la apertura como para la clausura esta será válida para un lazo iterativo de n ejecuciones, donde n sea el número de veces que es aplicado la apertura o clausura.

2.3.1 La antiextensibilidad de la apertura morfológica.

Sea una imagen de entrada A la cual es "abierta" por un conjunto vectorial B , entonces el conjunto solución de dicha transformación morfológica será conjunto impropio de la imagen de entrada A . Notacionalmente lo anterior queda expresado como sigue:

[49]

$$A \{\oplus\} B \subseteq A$$

La figura No 2.15 ejemplifica la autoconsistencia de la apertura sobre la imagen de entrada.

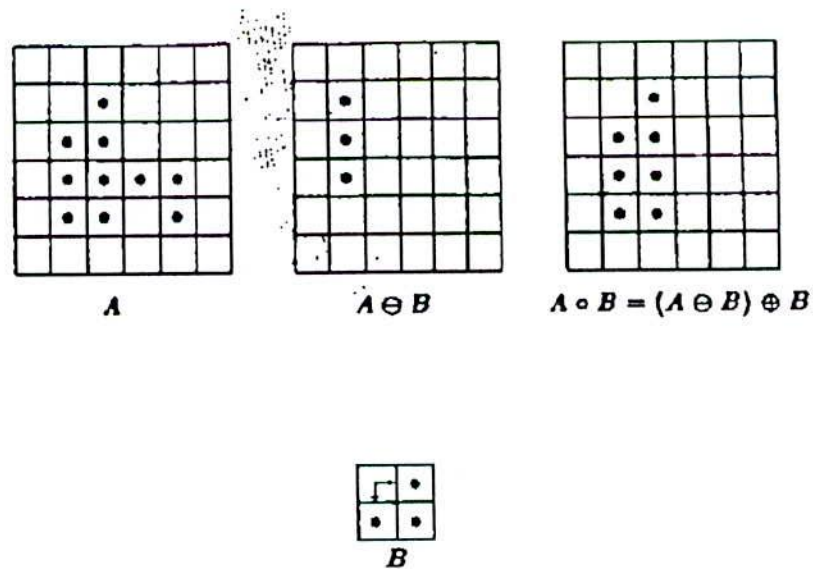


Fig. No 2.15

2.3.2 Extensividad de la clausura morfológica.

Dado una imagen de entrada A, esta será subconjunto impropio de la clausura de A por un elemento estructurador B. Lo anteriormente expuesto queda expresado notacionalmente como sigue:

[50]

$$A \subseteq (A \{ \ominus \} B)$$

La figura No 2.16 ejemplifica lo expuesto en la proposición anterior.

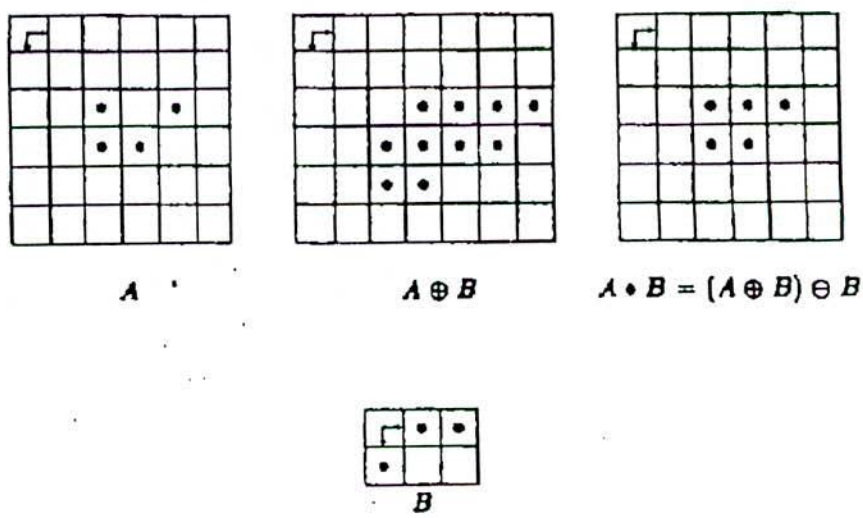


Fig. No 2.16

2.3.3 Teorema de dualidad de Apertura y Clausura.

Tanto la Apertura/clausura como la Erosión/dilatación son transformaciones duales. Es decir el complemento de la clausura de A por B es la apertura de los conjuntos A por B. Lo anterior queda expresado notacionalmente como sigue :

[51]

$$(A \{\ominus\} B)^c = A^c \{\oplus\} B$$

Geoméricamente la apertura morfológica se puede expresar como la unión de todas los vectores traslaciones de B que estén contenidos en la imagen de entrada A. Lo anteriormente expuesto queda expresado notacionalmente como sigue :

[52]

$$A \{\oplus\} B = \{x \in A / \exists y, x \in B, y \in A\}$$

$$= \cup B_y \{B_y \in A\}$$

En forma análoga, la clausura morfológica se puede expresar geoméricamente como la intersecciones de todos los vectores trasladados de B de forma tal que pertenezcan a la imagen de entrada A. Lo anterior queda expresado notacionalmente como sigue:

[53]

$$A \{\ominus\} B = \{x \in E^n / x \in B_y \Rightarrow B_y \cap A \neq \emptyset\}$$

$$= \cap B_y \{B_y \cap A \neq \emptyset\}$$

Así las proposiciones [52] y [53] implican que la apertura de A por B trasladado por un vector x será igual a A "abierto" por B trasladado por un vector y, con x perteneciente E³. Lo anterior se extiende a la operación de clausura morfológica. Estas implicancias quedan expresadas notacionalmente como:

[54]

$$A \{\oplus\} B_x = A \{\oplus\} B_y$$

De las proposiciones anteriores se deduce que el origen de los elementos estructuradores es idempotente sobre el conjunto solución obtenidos de las operaciones de clausura y apertura morfológicos.

2.4 Aplicaciones de operadores morfológicos en figuras binarias.

Dados los operadores morfológicos antes mencionados, se tiene un conjunto de operaciones características sobre imágenes binarias de características también preestablecidas. Así la aplicación de los operadores de dilatación, erosión, apertura y

clausura en conjunto con elementos estructuradores definidos previamente , dan sobre una imagen de entrada (imagen a ser procesada), los efectos que empíricamente se desean. Tales efectos se pueden clasificar en:

- a) Atenuación de características morfológicas.
- b) Alisamiento de contornos.
- c) Eliminación de istmos delgados.
- d) Eliminación de islotes y puntas aguzadas.

La clasificación de estos efectos , podrían parecer un tanto arbitrarios, pero en el estudio y clasificación de formas matemáticas, es decir figuras en las cuales su funcionalidad en R^2 están descritas por una función, hacen que estas características sean de interés. El comportamiento de los operadores morfológicos quedan de manifiesto en las siguientes figuras

Dado una imagen de entrada y un elemento estructurador, en este caso una circunferencia (escogido por sus características isotrópicas, es decir actúa "armónicamente en la geometría de la imagen a ser procesada", tanto en la convergencia como en la divergencia).

Sea una imagen de entrada X , la imagen a ser procesada por un elemento estructurador B , como se muestra en la figura No 2.17 :

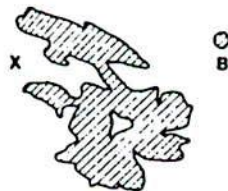


Fig. No 2.17

El procesamiento de esta imagen (o su transformada morfológica), por su elemento estructurador da como resultado el conjunto Y , los cuales son obtenidos según el operador morfológico respectivo, como se detalla a continuación :

2.4.1 Transformada de erosión $X \ominus B$

EROSION: $X \ominus B$

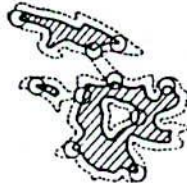


Fig. No 2.18.

2.4.2 Transformada de dilatación $X \oplus B$

DILATION: $X \oplus B$

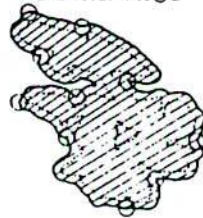


Fig. No 2.19.

2.4.3 Transformada de apertura $X \{ \ominus \oplus \} B$

OPENING: X_B



Fig. No 2.20

2.4.4 Transformada de clausura $X \{ \ominus \} B$



Fig. No 2.21

La "intensidad" de las características obtenidas a través de los cuatro operadores morfológicos sobre la imagen de entrada X , está en relación directa de la iteración del algoritmo respectivo, así, si se desea una atenuación sobre un efecto en particular deberá iterarse hasta que se obtenga el resultado deseado. Si la atenuación o la amplificación de estas características es controlable a través de el número de iteraciones efectuadas sobre la imagen de entrada X , la "cualidad" está en función directa de el elemento estructurador empleado en la transformación, lo cual se verá en detalle en el capítulo 3.

3 Filtros morfológicos.

3.1 Filtros de orden superior.

Se entenderá como filtros morfológicos superiores, aquellos filtros que sean empleados en imágenes en tonos de gris o en imágenes de color (pixmap). Los filtros de primer orden serán todos aquellos donde se apliquen transformadas morfológicas sobre un bitmap, o sea, en imágenes de carácter binario.

Los elementos estructuradores han servido a través de los capítulos anteriores como medidas interpretables; ahora nos servirán como transformadas de imágenes según un método plenamente determinista. Si antes se establecen relaciones entre propiedades y estructuras, ahora se trata de reconocer su forma. Si en el caso de una imagen binaria en la que cada punto pertenece o no a una estructura del objeto a analizar en perspectiva y que comprende partes con distintos matices de gris. Aquí el factor tiempo marcará una diferencia, si se desea una inspección breve no se podrá contar con algoritmos cuya ejecución sea breve.

Una aplicación es la automatización industrial desarrollado por S.R. Sternberg de la universidad de Michigan quien lo implementó en una importante industria automovilística. Una cámara de video adquiría información sobre una correa transportadora de cajas de transmisión, suministrando imágenes del fondo de estas. El constructor deseaba verificar si dos retenes determinados (Figuras Nos 3.1 a la 3.6) se disponían en su sitio o no. Este problema resulta inmediato para un ser humano, pero no es un problema trivial si se desea programar un autómata para tales efectos. ¿Cómo soluciona este tipo de problemas la morfología matemática?

Para este efecto se considera la imagen inicial (Fig No 3.1) como un conjunto. Basta, a tal fin, añadir un eje perpendicular al conjunto anterior definido en R^2 (bidimensional), con el objeto que represente la información de los tonos de grises por pixel. Así a todo punto de la imagen corresponde un valor para el eje perpendicular y mayor será su valor mientras mayor luminosidad posea. Desde el punto de vista geométrico el conjunto de estos componentes corresponde a la superficie o relieve de la imagen a ser analizada, siendo el conjunto objeto del análisis los puntos que están por debajo de dicho relieve.

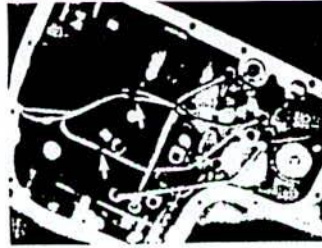


Figura No 3.1



Figura No 3.2

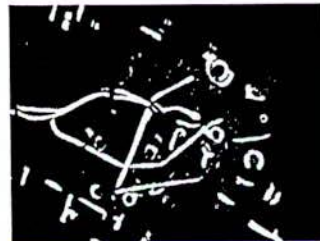


Figura No 3.3



Figura No 3.4

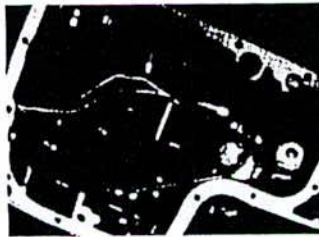


Figura No 3.5

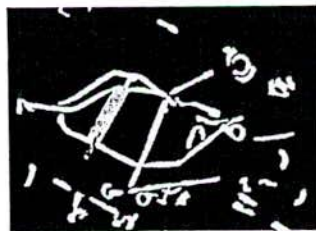


Figura No 3.6

Después de una secuencia de transformadas (Figuras 3.1 a 3.6) se obtiene respuesta a la presencia o no presencia de los retenes. Una vez definido las coordenadas por punto (nivel de gris), así mayor será su altura a menor tono de gris, en consecuencia el negro tendrá el valor mínimo de la paleta soportada por el monitor. Ahora imaginémonos que hacemos pasar por esta superficie una bola de un radio dado (elemento estructurador) y que son eliminadas todas las zonas donde la bola no alcanza llegar, esto es las fisuras más claras al entorno inmediato, como se aprecian en la figura No 3.2, este criterio se define como filtrado morfológico.

Eliminando una serie de detalles como una etapa intermedia entre filtrado morfológico y erosión se obtiene la imagen de la figura 3.3. Al término del análisis dos marcadores indican la presencia de los dos retenes en cuestión Figura 3.4, como la ausencia de dichos retenes (Figura No 3.5). En la figura 3.6 se aprecia la ausencia de unos de los retenes que se están siendo revisados. El tratamiento en su totalidad a durado sólo dos segundos, ocupando procesadores rápidos y de costo mayor a los comunes.

El concepto de filtrado resulta ya algo cotidiano para técnicos y científicos. Sin embargo el proceso de filtrado morfológico es diferente por naturaleza a los conceptos tradicionales ya existentes, sin perder por esto el grado de atractivo en su simplicidad.

En el tratamiento de imágenes basados en análisis espectral, se dependerá de o de las frecuencias de corte para obtener alguna información determinada, siendo esta información de carácter limitado en el sentido de que sólo otorgará información correspondiente al nivel de energía aludido (color de filtrado). En este sentido la morfología matemática retornará como información el nivel de energía que desea ser detectado, pero será capaz de retornar los patrones que cumplen con dichos requerimientos y discriminar aquellos que no lo cumplan.

Uno de los problemas clásicos es la detección de bordes en una vecindad de cuerpos, sin que entregue información incoherente (manchas interiores de los cuerpos que contengan frecuencias de filtrado). Este problema se soluciona en forma natural entregando a la función de filtrado morfológico, las frecuencias de cortes y el elemento estructurador, este último encargado de discriminar los interiores de las vecindades o límites de los cuerpos.

Lo anterior queda expresado notacionalmente como sigue:

$$f_e = F \{f_c 1, f_c 2\}$$

$$f_m = F \{f_c 1, f_c 2, B\}$$

donde:

$$f_e$$

: filtro de tipo espectrales.

$$f_m$$

: filtro de tipo morfológico

donde :

$$f_c 1$$

: frecuencia de corte 1.

$$f_c 2$$

: frecuencia de corte 2.

$$B$$

: Elemento estructurador.

3.2 Filtros morfológicos de primer orden.

Los filtros morfológicos de primer orden nacen como consecuencia natural de las aplicaciones de transformadas morfológicas simples y compuestas. Así se definen los filtros por erosión, dilatación, apertura, clausura, apertura-clausura y clausura-apertura, siendo estos últimos filtros de carácter compuesto.

En este capítulo se expondrá los filtrados de una señal análoga mostrada en la figura 3.7 y la señal filtrada por filtros análogos (figura 3.8). Estos filtros emplean como elementos estructuradores rectángulos, círculos y parábolas como se observan de la figura No 3.9 a la figura No 3.26

Cabe señalar que dichas aplicaciones tienen como restricción: el ancho de banda del ruido de la señal debe ser de dos ordenes de magnitud mayor como mínimo para que el filtro pueda discriminar entre la frecuencia de este y el de la señal. Por otra parte los resultados deben ser contrastados inicialmente con lo esperado, para la obtención de resultados coherentes.

3.2.1 Imagen de entrada y filtrado análogo.

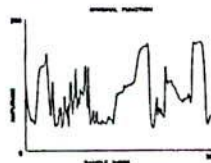
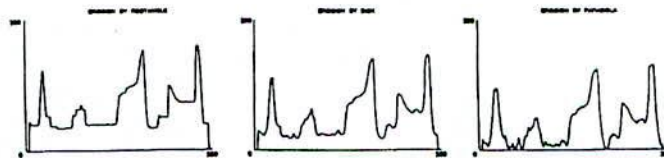


Figura No 3.7



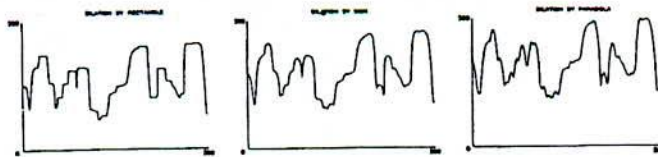
Figura No 3.8

3.2.1.1 Filtrado morfológico por erosión.



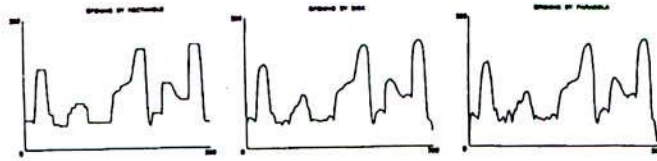
Figuras Nos 3.9 - 3.10 - 3.11

3.2.1.2 Filtrado morfológico por dilatación.



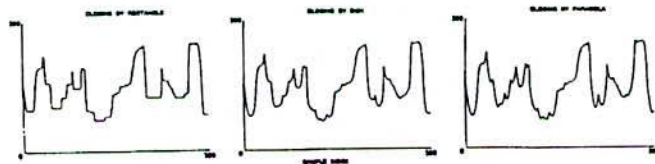
Figuras Nos 3.12 - 3.13 - 3.14

3.2.1.3 Filtrado morfológico por opening.



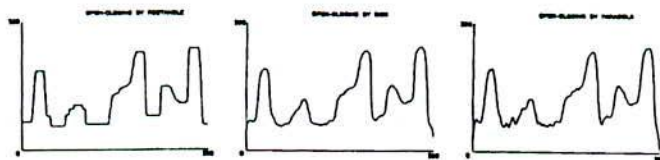
Figuras Nos 3.15 - 3.16 - 3.17

3.2.1.4 Filtrado morfológico por closing.



Figuras Nos 3.18 - 3.19 - 3.20

3.2.1.5 Filtrado morfológico por open-closing.



Figuras Nos 3.21 - 3.22 - 3.23

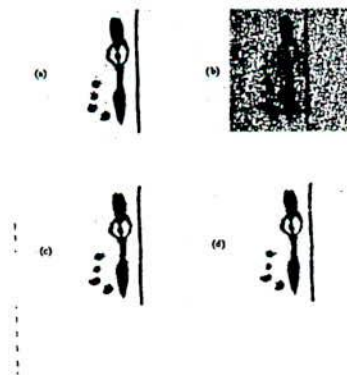
3.2.1.6 Filtrado morfológico por clos-opening.



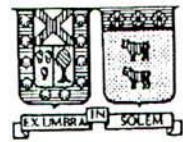
Figuras Nos 3.24 - 3.25 - 3.26

3.2.2 Los filtros morfológicos como discriminadores de ruido en la transmisión de data.

Otra aplicación como consecuencia natural de los operadores morfológicos básicos es el filtrado de ruido en la transmisión de data, particularmente en lo que hace referencia a la data de imágenes, el cual puede quedar de manifiesto en la figura No 3.27b. La transformada morfológica en este caso es desarrollada por el closing, con bajos niveles de iteración, siendo iguales a la unidad para obtener los resultados de la figura No 3.27a. Con niveles de iteración igual a dos y tres se obtienen los resultados obtenidos en las figuras Nos 3.27c y 3.27d respectivamente.



Figuras Nos 3.27a - 3.27d.



4 Análisis de algoritmos de adelgazamiento.

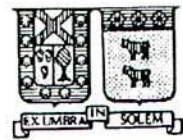
4.1 Introducción.

Con el desarrollo de la tecnología y sus múltiples aplicaciones en el campo de la computación, el análisis de formas e imágenes digitales ha adquirido una gran atención en el estudio de reconocimiento de patrones y su aplicación en algunas áreas de la automatización.

En la mayoría de los algoritmos empleados para el análisis de formas, se pueden encontrar dos tipos de técnicas a emplear: técnicas basadas en límites y técnicas basadas en regiones. Para el análisis de formas, basado en los límites de la figura, se extraen las características de estas basados en la información contenida en la periferia, por ejemplo: para el cálculo de superficies y momentos bidimensionales basta con analizar las características de la figura (entorno), para determinar el cálculo en cuestión, sin necesidad de entrar a analizar la cantidad de píxeles que estarían determinando la composición del objeto o figura en cuestión.

Por el contrario, en las técnicas basadas en regiones, como por ejemplo, en el estudio de la densidad de una figura (Skeletons o Esqueletos), para su clasificación en tipos de forma, el estudio de la composición interior de la figura se hace imprescindible. El desarrollo de este trabajo, está orientado al estudio de métodos digitales para generar "Skeletons" enlazados (continuos), denominándose dicho estudio ALGORITMOS DE ADELGAZAMIENTO.

Existen numerosos criterios para definir algoritmos de adelgazamiento, siendo estos, en general procesos en los cuales se generan acciones iterativas de movimientos de píxeles desde la periferia del objeto, haciéndolo converger sin perder su conectividad y su significado (interpretación) morfológica. Las condiciones antes mencionadas son estrictamente necesarias para definir cualquier algoritmo de adelgazamiento, sin embargo se hará necesario definir más rigurosamente los conceptos que involucran la interpretación morfológica de un cuerpo y su conectividad, así como definiciones de convergencia, razón de convergencia y precisión para un estudio sistemático de dichos algoritmos.



En el desarrollo de los algoritmos de adelgazamiento se emplearán operadores y transformadas morfológicas, las cuales son definidas en forma simultánea al estudio de los algoritmos. Estas definiciones han sido formalizadas por Matheron y Serra entre otros para desarrollar Skeletons de densidad uno (one-pixel). Antes del estudio de los algoritmos de adelgazamiento se hará necesario definir nociones básicas de operadores y transformadas morfológicas matemáticas.

4.2 Definiciones.

En este capítulo, se formalizan las notaciones matemáticas empleadas y las definiciones morfológicas necesarias para el desarrollo de los algoritmos y su posterior análisis.

4.2.1 La transformada hit/miss.

Un operador morfológico (transformada), de gran importancia en este estudio es la transformada "Hit/miss". Esta se define en base a un conjunto T compuesto de dos subconjuntos:

$$T_1 \wedge T_2$$

así la transformada "Hit/miss" de X por T es definido como el conjunto de todos los puntos donde:

$$T_{(x1)} \subseteq X \wedge T_{(x2)} \subseteq X^c$$

donde:

$$X^c$$

es el conjunto complemento de X y

$$T_\xi$$

($i=1,2$), hace referencia a la traslación de

$$T_i$$

por el vector x . Así la transformada Hit/miss queda definida como:

[1]

$$X \otimes T = \{x: T_1x \subset X; T_2x \subset X^c\}$$

$$= (X \ominus T_1) \cap (X^c \ominus T_2)$$

Si

$$T_1$$

es escogido como el el complemento de:

$$T_2$$

la ecuación [1] puede ser reescrita como:

[2]

$$X \otimes T = (X \ominus T_1) \cap (X^c \ominus (W \cap T_1^c))$$

donde W es la ventana que es definida a partir de la estructura T . Si T genera un espacio bidimensional de $n \times n$, entonces W estará definida como una estructura de $n \times n$ que contiene a T . En la operación Hit/miss se detecta la ocurrencia del patrón T en la imagen X . La figura No 4.1 muestra un ejemplo del reconocimiento del patrón T utilizando la transformada Hit/miss.

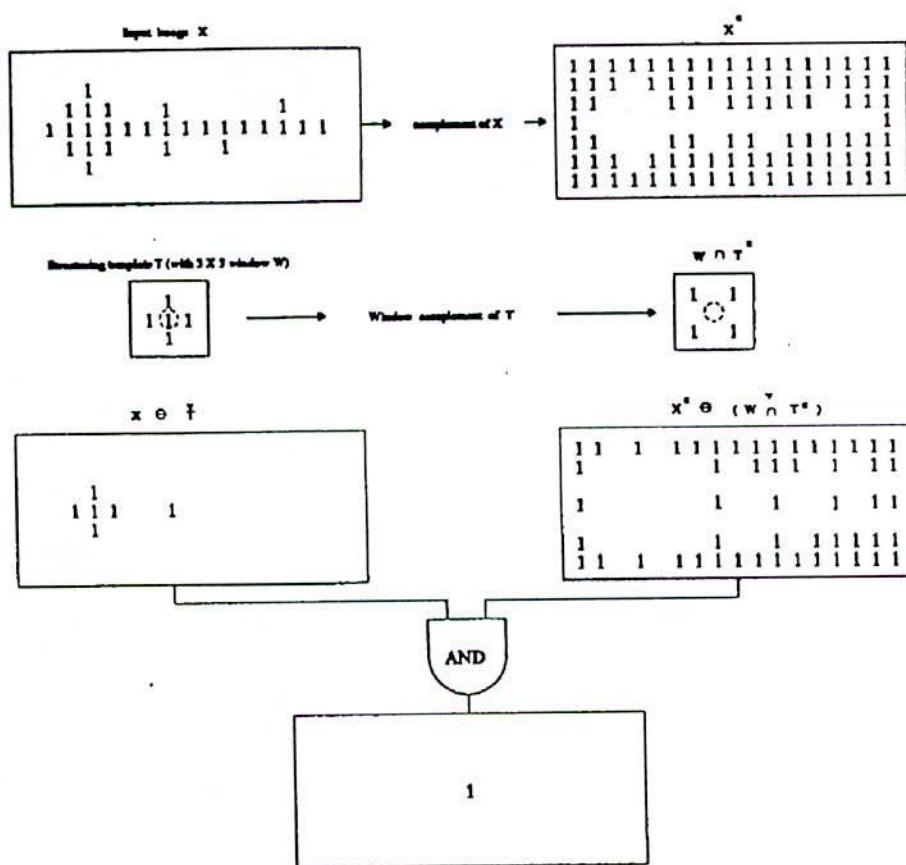


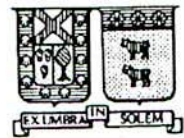
Figura N°4.1: Reconocimiento de patron usando la transformada "Hit/miss". El círculo punteado corresponde al origen y los espacios en blanco son ceros.

Finalmente el proceso de adelgazamiento se define como:

[3]

$$X \odot T = X / (X \otimes T)$$

el cual puede ser pensado como un proceso de búsqueda y borrado. La operación $X[*]T$ localiza todas las ocurrencias de la estructura T en X y la operación



/ remueve desde X los puntos que han sido localizados. Para el adelgazamiento simétrico de X se requieren de elementos estructuradores determinados. Así el adelgazamiento de X por T se define como una operación consecutiva de adelgazamientos por estructuras T_i .

[4]

$$X \odot T = (\dots((X \odot T_1) \odot T_2) \dots \odot T^n)$$

donde T representa la secuencia $\{T_n\}$ y el orden de n satisface la propiedad:

$$\rho_n(T) = T$$

La notación:

$$\rho_i$$

corresponde a la rotación del elemento estructurante T en sentido horario para $i \times 90^\circ$.

La erosión y transformada Hit/miss pueden ser redefinidas como:

[5]

$$X \ominus T = (X \ominus T_1) \cup (X \ominus T_2) \cup \dots \cup (X \ominus T^n)$$

[6]

$$X \otimes T = (X \otimes T_1) \cup (X \otimes T_2) \cup \dots \cup (X \otimes T^n)$$

Note la diferencia entre las ecuaciones [4],[5] y [6].La ecuación [4] es una operación secuencial de n etapas donde cada una depende de la etapa inmediatamente anterior, en tanto las ecuaciones [5] y [6] son operaciones paralelas, donde cada etapa puede ser procesada en forma simultánea.

4.2.2 Vecindades de "p".

Un conjunto se dice finito si y sólo si este contiene un número finito de elementos. Sea P un subconjunto finito de R^2 . Es decir P es una imagen finita conteniendo 0's y 1's (con extensión $Q=\{0,1\}$). Una imagen digital binaria se puede definir como una función de muestreo X de P en Q. Entonces la imagen X queda definida por :

[7]

$$S = \{p \in P : X(p) = 1\}$$

El conjunto P se puede definir a partir de otros subconjuntos, en este caso S es subconjunto arbitrario de P.

4.2.2.1 Definición 1

Un punto p tiene cuatro vecinos, llamados superior, inferior, derecho e izquierdo (puntos a,b,c y d de la figura No 4.2). Estos puntos son llamados vecinos-cuádruples de p (o adyacentes-cuádruples de p). Si U,V son conjuntos improprios de S y algunos puntos de U son adyacentes-cuádruples de V, entonces se dice que U es adyacente-cuádruple de V.

4.2.2.2 Definición 2

Un punto p tiene cuatro vecinos diagonales llamados e,f,g y h como se aprecia en la figura No 4.2. Estos, junto con los vecinos-cuádruples, son los

llamados vecinos-óctuples de p (o adyacentes-óctuples de p). Si U, V son conjuntos impropios de S y algún punto de U es adyacente-óctuple de V , entonces U se dice adyacente-óctuple de V .

e	a	f
d	p	b
h	c	g

$(-1,-1)$	$(0,-1)$	$(1,-1)$
$(-1,0)$	$(0,0)$	$(1,0)$
$(-1,1)$	$(0,1)$	$(1,1)$

...

Figura No 4.2: Los vecinos óctuples y cuádruples con sus respectivas coordenadas según p .

4.2.2.3 Definición 3

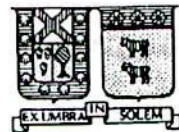
Una trayectoria óctuple (o cuádruple) denominada como

$$\pi_n(x, y)$$

de largo n desde x a y es un conjunto de puntos $\langle x=x_1, x_2, x_3, \dots, x_n=y \rangle$ tal que x_i es vecino-óctuple (cuádruple) de x_{i-1} , con $1 < i < n$.

4.2.2.4 Definición 4

Sean x e y dos puntos diferentes en S . Se dice que x es Trayectoria-conectada-óctuple (t-c-4) de y si allí existe una trayectoria-óctuple (ó t-4), en (x,y) . Esta definición implica que si x es trayectoria-conectada-cuádruple a y , es también t-c-8. La proposición inversa no es siempre verdadera.



4.2.2.5 Definición 5

Sea:

$$x \in S$$

el componente-óctuple (c-4) de S, denotado por $K_s(X)$ es definido por:

[8]

$$K_s(X) = \{y \in S\}$$

donde y es trayectoria-conectada-óctuple (t-c-4) de x}

El componente-óctuple o componente - cuádruple a veces es referido como componenete-conectado-óctuple, el cual puede ser definido como el subconjunto conectado-óctuple máximo de S.

La figura No 4.3 muestra un ejemplo de la definición anterior.

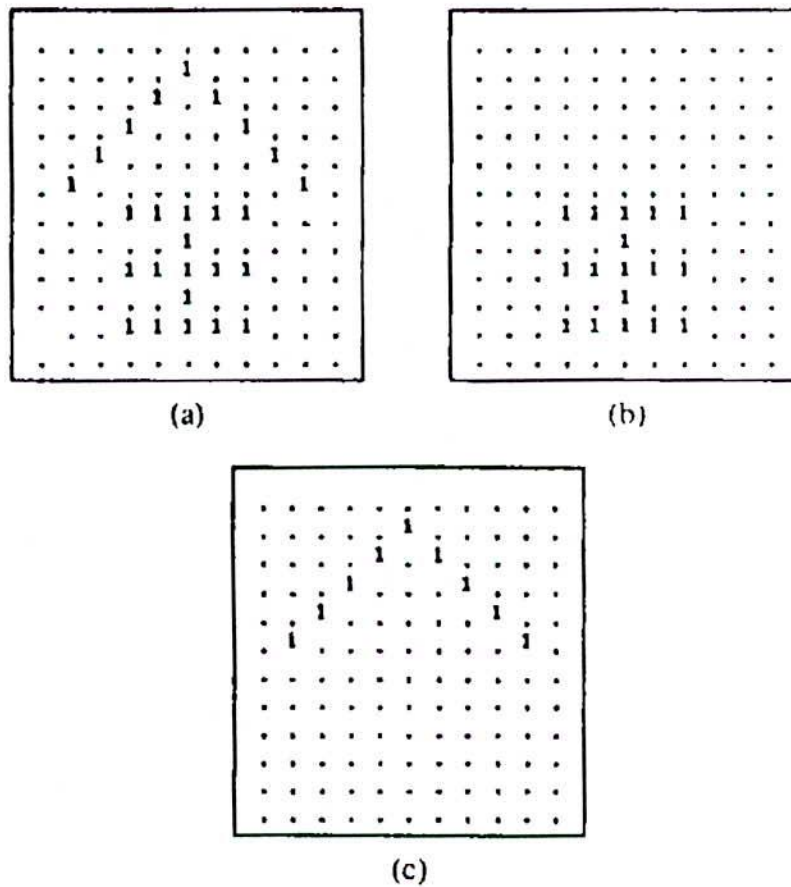
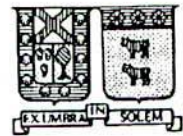


Figura N° 4.3: Los componentes conectados óctuples y cuádruples de p .

- a) Imagen S .
- b) Un componente conectado cuádruple (también óctuple) de S con S^* conectado-cuádruple.
- c) Un componente conectado-óctuple de S con conectado-cuádruple. Los puntos son ceros.



4.2.2.6 Definición 6

S es conectado-óctuple (c-4) si este tiene solo un componente-óctuple (c-4).

4.2.2.7 Definición 7

El borde de S esta definido por:

$$\delta S$$

= x: x es adyacente-cuádruple de y, $x \in S, y \in S^c$

El interior de S a su vez, está definido como el conjunto diferencia entre S y el borde, es decir:

[9]

$$\dot{S} = S / \delta S$$

4.2.2.8 Definición 8

El componente de:

$$\dot{S}$$

K_{sc} , que contiene las filas y columnas de una región rectangular el cual pertenece a S , es llamado el fondo de S (background). Los demás componentes de:

$$\dot{S}$$

son llamados agujeros en S (holes), como lo muestra la figura No 4.4.

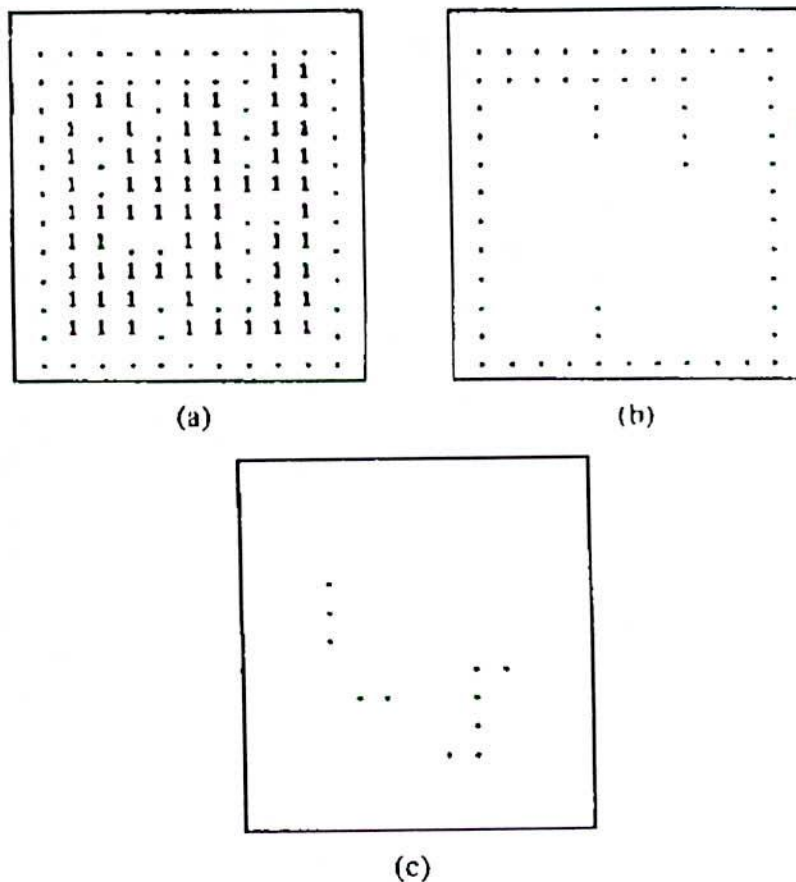


Figura N°4.4 : Background de la imagen y sus agujeros. a)Imagen de S . b) Background de S . c)Agujeros de S .Los puntos representan ceros.

4.2.2.9 Definición 9

S es simplemente conectado si S es conectado-óctuple y no posee agujeros. S será conectado-múltiple si es conectado-óctuple pero posee agujeros.

Los conectados-óctuples son referidos como simplemente conectados o múltiple-conectado y objeto-conectado-óctuple es referido como un componente-conectado-óctuple.

4.3 Desarrollo de un algoritmo de adelgazamiento.

El algoritmo descrito aquí, es llamado algoritmo A, este representa una clase general de algoritmos desarrollados por numerosos investigadores en el pasado ([4],[5] y [6]). Este consiste en dos ciclos. El primero de estos es un proceso iterativo paralelo compuesto por cuatro fases. Cada fase utiliza elementos estructurantes de 3x3 para trasladar el conjunto de puntos pertenecientes al borde de la figura. En otras palabras puntos que satisfacen la transformada Hit/miss son removidos de la periferia hacia las direcciones cardinales interiores de la figura. Para tal efecto son aplicados sobre la figura inicial cuatro elementos estructuradores en forma secuencial. Los cuatro elementos estructuradores están definidos en la figura No 4.5 como:

$$D = (D1, D2, D3, D4)$$

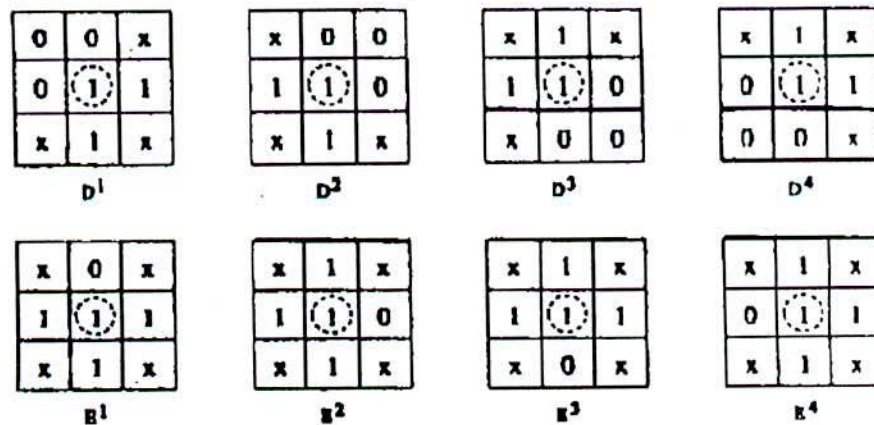


Figura N° 4.5: Algoritmo A: elementos estructuradores D y E con sus respectivos componentes. Los pixeles x son irrelevantes en el algoritmo.

Una vez finalizado el primer ciclo, se inicia el segundo, en el cual se aplica sobre la figura ya elaborada el elemento estructurador E definido como:

$$E = (E_1, E_2, E_3, E_4)$$

mostrados en la figura No 4.5. Sea S un componente conectado e I el Skeleton resultante de algún algoritmo. El proceso de iteración del primer y segundo ciclo son indexados por m y n respectivamente. Después de un número finito de iteraciones, dependiendo de la densidad de S, S converge al Skeleton I, el cual conserva la conectividad de S. En el desarrollo del algoritmo A se especifican dos transformadas como β_1 y β_2 las cuales hacen referencia al primer y segundo ciclo de iteraciones respectivamente. Así la primera transformada queda definida como:

[10]

$$\begin{aligned} \beta_1 = \{S, D, m\} &= \{S \odot D\}_m \\ &= (\dots((((((S \odot D_1) \odot D_2 \odot D_3 \odot D_4 \odot D_1) \dots \end{aligned}$$

donde :

$$S \odot D$$

es el adelgazamiento de S por cuatro elementos estructurantes en D y;

$$\{S \odot D\}_m$$

es la repetición de m veces el proceso de adelgazamiento. Suponiendo que la iteración m converge en M etapas, el procesamiento de S queda dado por:

[11]

$$S' = \beta_1\{S, D, M\}$$

La segunda transformación esta dada por:

[12]

$$\beta_2\{S', E, n\} = \{S' \odot E\}_n$$

el cual converge a I en N iteraciones. Diferentes ordenes de aplicaciones de los elementos estructurantes sobre S dan origen a distintos algoritmos de adelgazamiento. Por ejemplo se puede crear un algoritmo con el siguiente orden de elementos estructurantes: E1,D1,E2,D2,E3,D3,E4,D4 (este orden completa una iteración). La problemática es encontrar una secuencia dada que cumpla en forma óptima con los criterios de conectividad e interpretación morfológica. Para satisfacer este requerimiento así como un estudio más ordenado de este algoritmo se hace necesaria una definición más formal del concepto de Skeleton.

Definición 10: Dado un objeto S conectado-óctuple y S° contiene componentes-conectados-cuádruples, el Skeleton de S debe cumplir con las siguientes condiciones:

a) **Conectividad:** S e I tienen la misma Homotopia. Esto es, I es conectado-óctuple y estos complementos contienen componentes conectados-cuádruples (dos conjuntos finitos son Homotópicos si existe una correspondencia uno a uno entre los componentes conectados de S e I, y una correspondencia uno a uno entre los agujeros de S e I.

b) **One-pixel de densidad :** I es reducido a un a un pixel de densidad, es decir cada punto localizado en I pertenece a un patrón cuadrado de 2x2, como en la figura No 4.6 $A = \{A1, A2, A3, A4\}$, no existiendo en I patrones menores que estos, o sea puntos críticos, como se observa en la figura No 4.7 (un punto es llamado crítico si la traslación de este genera discontinuidad o un agujero). Toda posible configuración de punto crítico contiene uno de los patrones A en $B = \{B1, B2, B3, B4\}$ y C. Matemáticamente esta condición queda expresada como:

$$Si p \in (I \ominus A) \Rightarrow p \in (I \otimes B) \cup (I \otimes C)$$

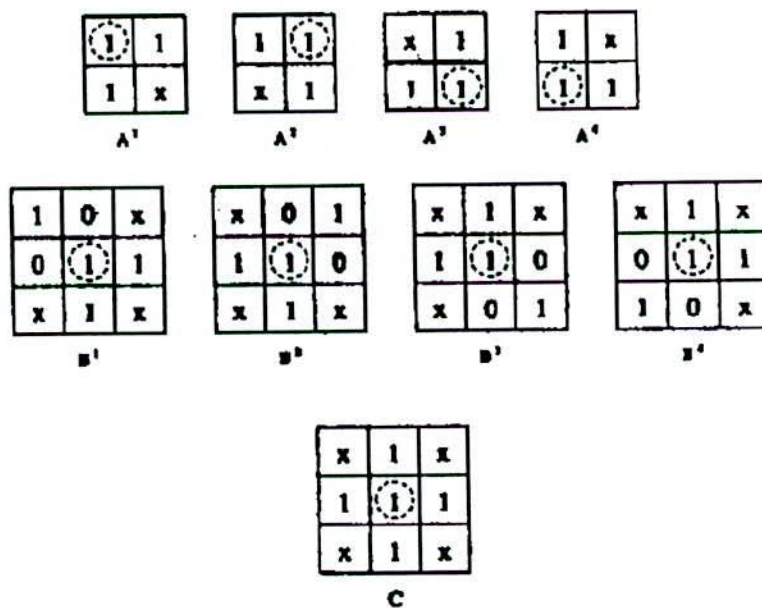


Figura N° 4.6: Elementos estructuradores A,B y C. Los elementos que definen al patrón A definen un Skeleton conectado. Los elementos de B y C son posibles configuraciones de puntos críticos de un Skeleton, estos contienen uno de los patrones A.

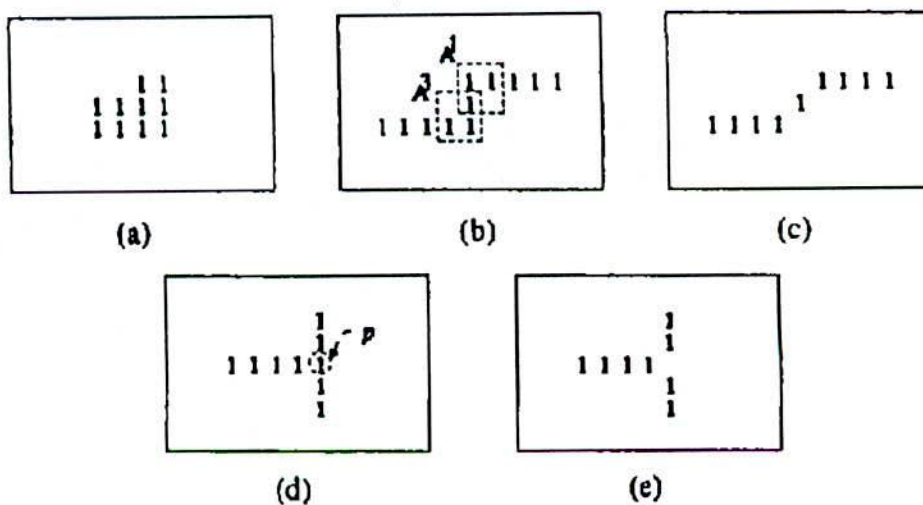


Figura N° 4.7: a) Patrón de no densidad de un pixel. b) En este patrón se detecta las estructuras A1 y A3 lo cual implica que no ha convergido a Skeleton. c) La eliminación de los dos pixeles de las esquinas hace converger a Skeleton de un pixel de densidad. El patrón T no es considerado como convergente ya que $p \in A2, A3$. e) convergencia del Skeleton en d)

c) Eje medio : I corresponde al eje medio de la representación de S. A cada punto $p \in I$ se asocia el máximo disco contenido en S con centro en p como $DD(p, r_p)$ donde r_p representa el radio continuo de la imagen digital del disco DD con centro en p. Note que $DD(p, 0) = \{p\}$. Bajo esta definición S se puede reescribir como:

[13]

$$\bar{S} = \cup_{p \in I} DD(p, r_p)$$

donde :

$$\bar{S} \subseteq S$$

e I es Homotópico a S. En forma ideal, si I corresponde al eje medio de S,

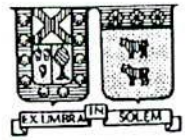
$$\bar{S}$$

debe ser idéntico a S. Con el desarrollo del algoritmo A en el próximo capítulo se analizará según las definiciones anteriores.

4.4 Análisis del algoritmo de adelgazamiento.

a) Convergencia.

El algoritmo de adelgazamiento borra de un elemento-conectado en cada iteración elementos (pixeles) del límite (frontera) de la figura S, sin alterar la configuración y



conectividad de S . En otras palabras es necesario que el algoritmo haga converger al Skeleton I de densidad uno sin que este pierda una representación razonable a partir de S . En esta sección se analizará la convergencia del algoritmo .

Proposición 1: Si S es un conjunto finito no vacío T que contiene el origen y más de un elemento, entonces el adelgazamiento de S por T es un conjunto no vacío.

Es obvio que:

$$S \odot T \neq \emptyset$$

S es no vacío y

$$S \odot T \subset S$$

(subconjunto impropio de S). Supóngase que S es conjunto vacío, lo cual implica que:

$$S \subseteq S \otimes T$$

Usando la definición de la transformada de Hit/miss se tiene que:

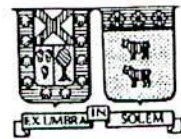
$$S \subseteq (S \ominus T) \cap (S^c \ominus T^c)$$

de aquí uno puede concluir que:

$$S \subseteq S \ominus T$$

Pero por la definición de erosión se tiene que :

$$S \ominus T = \bigcap_b \in TS_b$$



$$= S \cap (\cap_b), b \in T$$

donde:

$$S \ominus T \subseteq S$$

de aquí la contradicción con la suposición inicial de:

$$S \odot T = \emptyset$$

Entonces;

$$S \odot T \neq \emptyset$$

Un corolario de esta proposición para una secuencia finita de elementos estructurantes, puede ser deducida usando las siguientes reglas.

Corolario 2 : Si S es un conjunto finito no vacío y T es una secuencia finita de elementos estructuradores, cada cual conteniendo el origen y más de un elemento, entonces:

$$\{S \odot T\}_k = \beta(S, T, k)$$

es también un conjunto finito no vacío para algún k positivo.

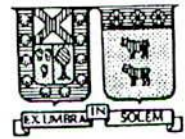
Teorema 3: S converge a un conjunto no vacío en un número finito de iteraciones.

Demostración: Asumiendo un valor no positivo para k que satisfaga la igualdad

:

$$\beta(S, T, k + 1) = \beta(S, T, k)$$

donde β es la transformada de adelgazamiento.



Aplicando la proposición 2 y el corolario 3 se tiene que:

[17]

$$\emptyset \subset \dots \subset \beta(S, T, k + 1) \dots \subset \beta(S, T, 1) \subset S$$

lo cual contradice de hecho cuando S es finito para algún entero positivo k . Por lo cual debe existir un entero positivo k , quedando demostrado que $\beta(S, T, K+t) = \beta(S, T, K)$ para algún entero positivo t .

En particular sobre la convergencia aplicado al algoritmo A , el cual es expresado como $I = \beta_2 \{S', E, N\}$, donde $S' = \beta \{S, D, M\}$, con D y E elementos estructurantes definidos en la figura No 5. De los tópicos vistos sobre convergencia se concluye que :

$$S' \otimes D = \emptyset$$

$$I \otimes E = \emptyset$$

b) Un pixel de densidad.

Es obvio que si el Skeleton I no contiene algún patrón de $A = \{A_1, A_2, A_3, A_4\}$ de dimensiones de 2×2 , el Skeleton I es de densidad uno. Sin embargo si son encontrados uno o más patrones en el Skeleton, por ejemplo:

$$I \ominus A_1 \neq \emptyset$$

se presentan una de las dos siguientes situaciones:

- i) I no es Skeleton de densidad uno o
- ii) I contiene un punto crítico.

Sea p un punto particular de I , tal que:

$$p \in I \ominus A_1$$

Ahora examinando el punto p en detalle, este punto crítico puede ser encontrado en cinco posibles configuraciones (patrones) de dimensiones 3×3 conteniendo al patrón A_1 , como se aprecia en la figura No 4.8. Notacionalmente queda expresado como :

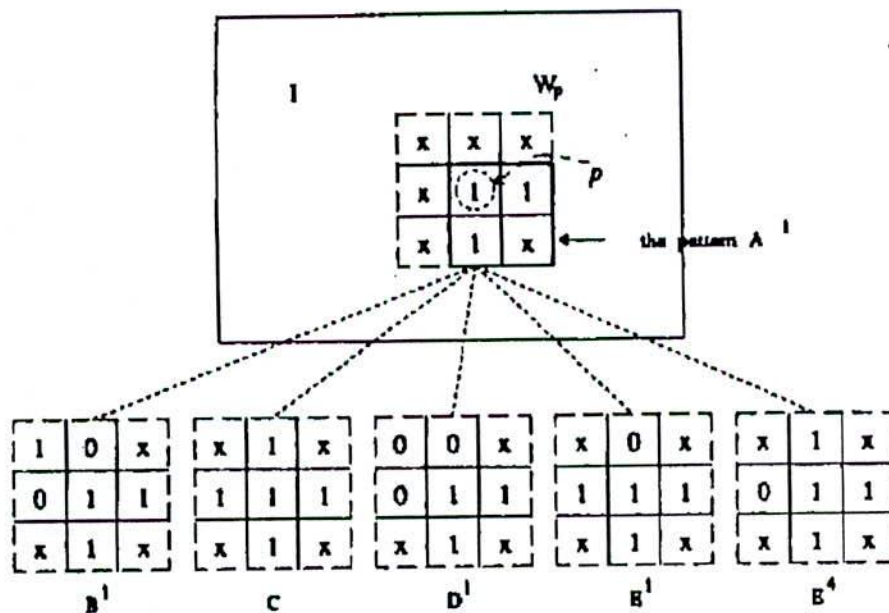


Figura N° 4.8: Cinco posibles configuraciones de imágenes de 3×3 W_p conteniendo el patrón A_1 . Los pixeles fuera de W_p son irrelevantes.

[18]

$$p \in (I \otimes B_1) \cup (I \ominus C) \cup (I \ominus D_1) \cup (I \ominus E_1) \cup (I \ominus E_4)$$

Similarmente, si

$$p \in (I \ominus A_2), p \in (I \ominus A_3) \text{ o } p \in (I \ominus A_4)$$

se tiene que :

[19]

$$p \in (I \otimes B_2) \cup (I \otimes C) \cup (I \otimes D_2) \cup (I \otimes E_1) \cup (I \otimes E_2)$$

[20]

$$p \in (I \otimes B_3) \cup (I \otimes C) \cup (I \otimes D_3) \cup (I \otimes E_2) \cup (I \otimes E_3)$$

[21]

$$p \in (I \otimes B_4) \cup (I \otimes C) \cup (I \otimes D_4) \cup (I \otimes E_3) \cup (I \otimes E_4)$$

respectivamente.

$$\exists p \in (I \ominus A)$$

y usando la relación [9] se tiene que:

$$p \in (I \ominus A_1) \cup (I \ominus A_2) \cup (I \ominus A_3) \cup (I \ominus A_4)$$

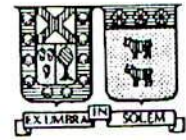
Por lo tanto se puede escribir como:

$$p \in (I \ominus A_1) \cup (I \ominus A_2) \cup (I \ominus A_3) \cup (I \ominus A_4)$$

usando la simetría para A_i , $1 \leq i \leq 4$. Finalmente usando las relaciones [18] y [19], se tiene que :

[22]

$$p \in (I \otimes B) \cup (I \otimes C) \cup (I \otimes D) \cup (I \otimes E)$$



Sin embargo, S' e I son los conjuntos representativos de los ciclos de convergencia B_1 y B_2 respectivamente, de aquí:

$$S' \odot D = \emptyset I \odot E = \emptyset$$

Por lo tanto de la relación [22] se obtiene que:

$$p \in (I \otimes B) \cup (I \otimes C) \cup (I \otimes D)$$

En forma siguiente examinando el término :

$$(I \otimes D),$$

se tiene que si S' no contiene algún patrón E , esto es,

$$(I \otimes E) = \emptyset,$$

entonces

$$I = S' \wedge (I \otimes D) = \emptyset,$$

en este caso existe un patrón estructurador E en el conjunto S' , por ejemplo:

$$E_1 \in S'$$

necesitamos conocer el resultado de la traslación del punto p desde :

$$S' \text{ por } (S \otimes E_1),$$

Este puede ser fácilmente verificado para:

$$(S' \otimes E) \neq \emptyset,$$

el patrón D nunca es subconjunto de:

$$(S \odot E) \Rightarrow I \otimes = \emptyset,$$

De aquí la relación [22] es reducida a la siguiente expresión :

[23]

$$p \in (I \otimes B) \cup (I \otimes C),$$

donde B y C son los posibles patrones críticos. En otras palabras, todo p existente a la erosión de I por A en I es punto crítico y el traslado de estos puntos podría causar desconectividad o generar un agujero. Por lo tanto I satisface el punto b) de la definición 10.

Referido al análisis es importante hacer notar que el adelgazamiento de S a un pixel de densidad no depende del orden de aplicación de los elementos estructuradores. Cuando todo el conjunto o secuencia completa de elementos D y E es aplicado sobre S, este siempre convergerá al Skeleton I, cumpliéndose que:

$$(I \otimes D) = \emptyset \wedge (I \otimes E) = \emptyset,$$

llegando a la densidad de un pixel.

c) Conectividad :

Resumiendo; se tiene que el desarrollo de este algoritmo denominado "A", se ha implementado bajo dos condiciones de tipo general; una es la conservación de la conectividad del Skeleton y la otra es que converga a la densidad de un pixel.

Proposición 4: Si S es conectado-óctuple, S adelgazado por D1 es también conectado-óctuple.

Demostración: Si S no contiene el patrón D1, entonces:

$$(S \otimes D_1) = \emptyset \Rightarrow S \odot D_1 = S,$$

siendo conectado-óctuple.. En el caso que:

$$D_1 \in S$$

se da la siguiente situación :sea p el centro de un patrón W como el descrito en la figura No 9, donde W es un elemento estructurador de 3x3 con los elementos a,b,e,g,n,y y z trayectorias-óctuples de p . Cada iteración del algoritmo de adelgazamiento A involucra la secuencia:

$$(((S \odot D_1) \odot D_2 \dots)),$$

en la cual cada operador Xi es aplicado en forma paralela sobre la imagen S. Considerando la ejecución particular de

$$S \odot D_1.$$

se debe ver que traslación de otro punto junto a p causa discontinuidad en S.

Usando el pixel de nivel de la figura No 4.9, se puede ver fácilmente que m,n y f no deben ser removidos porque ellos son vecinos-óctuples del patrón D1. Esto es

$$q \in \{m, n, f\}$$

de modo tal que satisface la condición :

$$W_q \odot D_1 = \emptyset,$$

donde Wq es una imagen de 3x3 centrada en q. El pixel debe ser removido cuando d=e=0 y h=1. Sin embargo la traslación de a y p no debe provocar discontinuidad en los elementos de S. La conexión de Wp y Wa es directa con los elementos m,f y h.

Una situación similar ocurre con la traslación de z , precisamente para $t \in \text{pwr}\{a, z\}$, $(W_p \cup W_t)/\{p, t\}$ es conectado. Siento t y p los centros de los elementos de W_t y W_p respectivamente. Entonces la proposición es válida *

La proposición se puede simplificar como sigue:

$$S \odot D_1$$

es conectado-óctuple si para todo elemento $b \in D_1$ una de las dos siguientes condiciones :

$$a) W_p + b \odot D_1$$

$$b) (W_p \cup W_{p+b})/\{p, p+b\}$$

es conectado-óctuple,

donde W_p es una imagen de 3×3 con centro en p W_{p+b} una imagen de 3×3 con centro en $p+b$. La condición a) especifica la relación existente entre el patrón D_1 y todas las posibles imágenes de 3×3 con centro en W_p , por lo tanto los pixeles no son removidos. La condición b) la remoción de p y otro elemento de W_p no debe provocar la desconectividad de una imagen de 5×5 con centro en p . El análisis de los otros elementos estructuradores D se pueden extender de la siguiente manera :

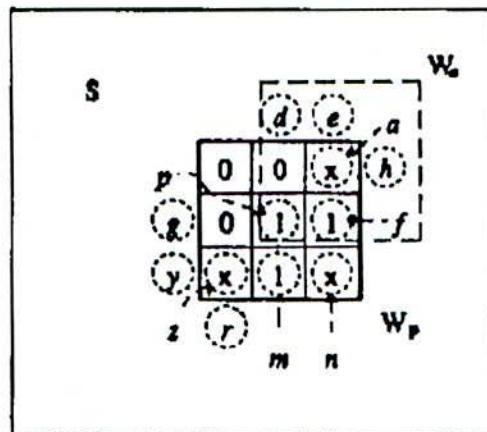


Fig. 4.9: W_p centrado en p contiene algunos de los patrones como D1. Todos los puntos fuera de W_p incluidos los punto d, e, g, h, r e y son irrelevantes.

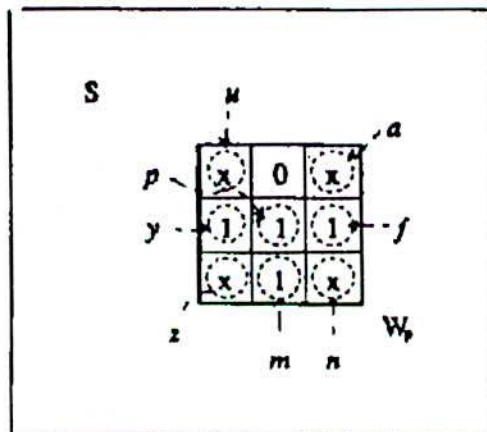


Fig. 4.10: Imagen W_p de 3×3 , el cual incluye al patrón E1 y p como centro de W_p .

Proposición 5: Si S es conectedo-óctuple, entonces

$$\{S \odot D\}_m$$

es conectado-óctuple.

Demostración : supóngase la existencia de $i \in \{2,3,4\}$ de modo tal que

$$S \odot D_i$$

no sea conectado-óctuple. Entonces la rotación

$$(-i + 1) \times 90^\circ, \rho_{(-i+1)}(S \odot D_i) = \rho_{(-i+1)}S \odot D_1$$

no es conectado-óctuple. Pero esto de hecho es una contradicción, dada la proposición 4

$$\rho_{(-i+1)}S$$

es conectado-óctuple. Por lo tanto la proposición es verdadera *

Teorema 6: Si S es conectado-óctuple, entonces I también es conectado-óctuple.

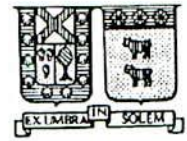
Demostración: Si S es conectado-óctuple basta con mostrar los patrones de la figura No 8 y considerando:

$$S \odot E_1$$

como conectado-óctuple. Sea la figura No 4.10 donde W_p tiene como centro a p y los elementos a, n, u y z irrelevantes. Es fácil ver que para b perteneciente a E_1 , se satisface entre otras la condición

$$W_{(p+b)} \otimes E_1 = \emptyset$$

o la condición en la cual



$$(W_p \cup W_{(p+b)})/\{p, p+b\}$$

es conectado-óctuple. Esta sola razón puede ser extendida a las demás estructuras aludidas, que corresponden a la rotación de E. Por lo tanto el teorema queda demostrado.

Teorema 7: Si \dot{S}

es conectado-cuádruple, entonces

$$I^c$$

es conectado-cuádruple.

Demostración : Este teorema es esencial ya que garantiza que el proceso de adelgazamiento no genera agujeros. Por ejemplo, en la remoción de algún punto por

$$S \odot D_1 \wedge S \odot E_1$$

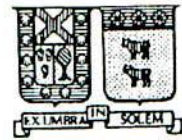
no incrementa el número de componentes conectados-cuádruples en \dot{S}

Esto se puede ver fácilmente de la siguiente manera ; Para algún valor de a,n y z en la estructura W_p (figura No 9), p en S° es siempre conectado- óctuple y esta eliminación debe sumar un elemento conectado-cuádruple a

\dot{S}

Una observación similar es válida para los agujeros de E_1 . Por lo tanto el número de componentes conectados-cuádruples no es incrementado en

\dot{S}



De los teoremas 6 y 7 se puede generalizar de puede generalizar en el teorema siguiente:

Teorema 8: Si S es conectado-óctuple, entonces el proceso de adelgazamiento β en algún paso conserva la misma homotopía y rama (o miembro con un extremo) de Skeleton si y solo si:

$$S/\beta(S) \subseteq (S \otimes D_i) \cup (S \otimes D_{(i+1)}) \cup (S \otimes E_i)$$

para $i=1,2,3$, ó 4 donde $S/\beta(S)$ es el conjunto diferencia entre la figura inicial S y el proceso de la imagen $\beta(S)$, lo cual es equivalente a un conjunto de puntos removidos por el proceso de adelgazamiento en cada paso. Cabe hacer notar que el conjunto de elementos estructuradores posee cuatro elementos, por lo tanto en cada iteración se debe tener en cuenta que se trabaja en módulo 4, por tanto $D_5=D_1$.

Demostración: Sea W una imagen de área 3×3 . El conjunto de todos los posibles patrones incluidos en W (F,G,H,Y), los cuales están definidos en la figura No 11, los cuales pueden ser considerados como patrones en el proceso de adelgazamiento. Como idea general el conjunto de pixeles removidos, es decir $S/\beta(S)$ debe satisfacer la siguiente condición :

$$S/\beta(S) \subseteq (S \otimes F) \cup (S \otimes G) \cup (S \otimes H) \cup Y$$

Sin embargo, si el proceso de adelgazamiento β conserva la conectividad y el extremo del Skeleton (Skeleton legs), los elementos estructuradores (F,G y H) no son los patrones adecuados ya que estos podrían provocar discontinuidad en S y cortar el terminal (extremo) del Skeleton en cuestión. Por lo tanto la ecuación [25] se ve reducida a:

[26]

$$S/\beta(S) \subseteq S \otimes Y$$

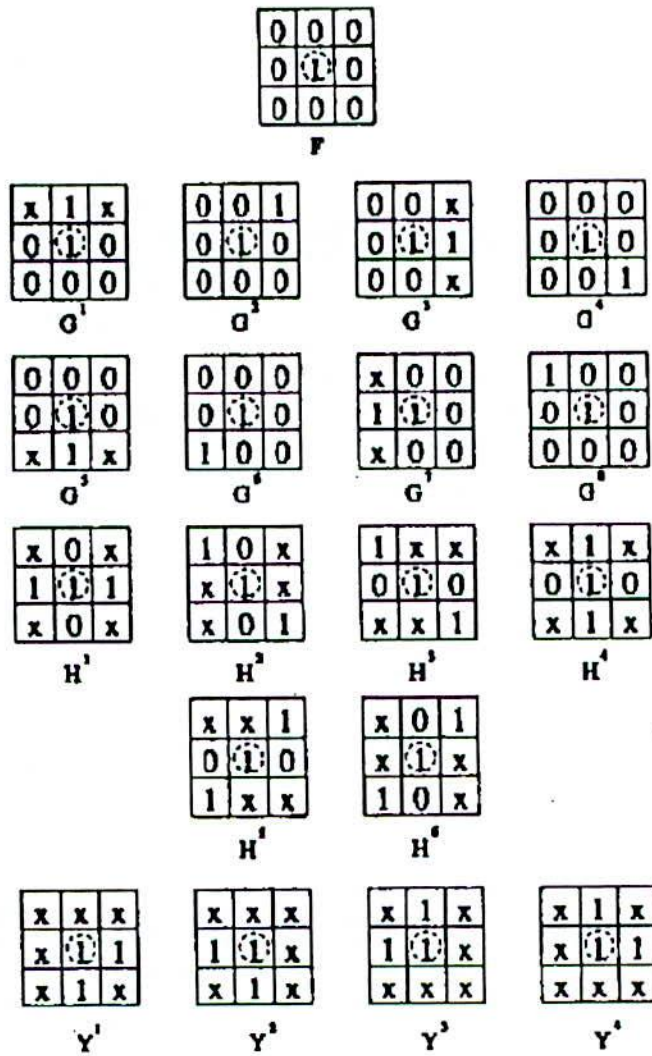
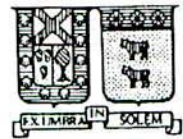


Figura N° 4.11 : Elementos estructurantes F,G,H e Y.

Se puede verificar fácilmente que los patrones B,C,D y E son subconjuntos de Y. Por lo tanto la relación [26] se puede reescribir como :

$$^{[27]}S/\beta(S) \subseteq \{(S \otimes D) \cup (S \otimes C) \cup (S \otimes B) \cup (S \otimes E)\}$$



Sin embargo el remover pixeles desde :

$$S \otimes B \wedge S \otimes C$$

podría generar una discontinuidad o un agujero. Por lo tanto B y C no son elementos estructuradores adecuados, siendo en consecuencia reducida la expresión anterior a :

[28]

$$\begin{aligned} S/\beta(S) &\subseteq (S \otimes D) \cup (S \otimes E) \\ &= \bigcup_{(i=1)}^4 ((S \otimes D_i) \cup (S \otimes E_i)) \end{aligned}$$

Ahora, siguiendo un análisis similar como el hecho en la proposición 4, sea W_p una imagen de 3x3 centrada en p, que contenga el patrón D1 y $W_{\{p+b\}}$ una imagen de 3x3 con centro en p+b. Para todo

$$b \in D_1$$

satisface entre otras condiciones :

$$W_{\{p+b\}} \otimes D_2 = \emptyset$$

o la condición :

$$W \cup W_{\{p+b\}} / \{p, p+b\}$$

es conectado-óctuple. Así D1 y D2 pueden ser aplicados en forma simultánea.

Sin embargo;

$$\exists b \in D_1/W_{\{p+b\}} \otimes D_3 \neq \emptyset \wedge$$

$$W \cup W_{\{p+b\}}/\{p, p+b\}$$

genera un quiebre en la conectividad como el mostrado en la figura No 4.12. Por lo tanto D1 y D3 no pueden ser usados en el mismo paso de la iteración.

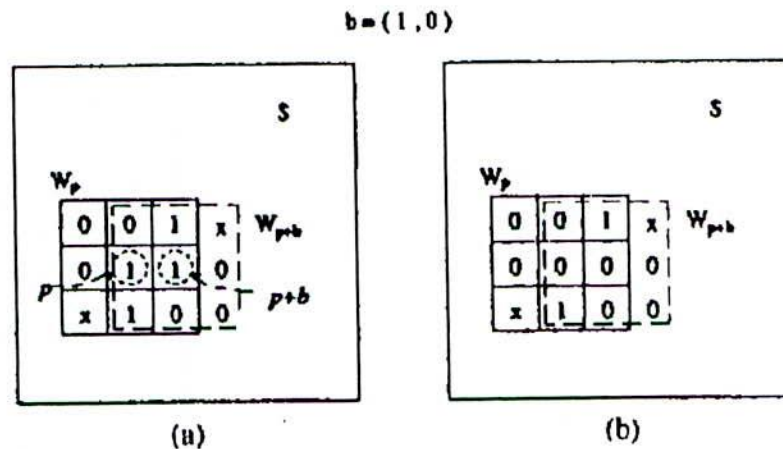


Figura N° 4.12: Elementos estructuradores D1 y D3 no pueden ser aplicados en forma simultánea, ya que generan discontinuidad en el Skeleton.

Un análisis similar aplicado al resto de las estructuras D y E, obteniéndose los siguientes resultados:

- a) D_i no puede ser aplicado simultáneamente con $D_{\{i+2\}}$
- b) E_i no puede ser aplicado simultáneamente con E_j para $i < j$.
- c) E_i no puede ser aplicado simultáneamente con $D_{\{i+2\}}$ o $D_{\{i+3\}}$.

donde $i=1,2,3$, ó 4 son los subíndices de los elementos estructuradores y $D_{\{i+k\}} = D_{\{i+k\}}$ (módulo 4), para un k entero y positivo.

Así, de la relación [28] se obtiene:

$$S/\beta(S) \subseteq (S \otimes D_i) \cup (S \otimes D_{(i+1)}) \cup (S \otimes E_i)$$

para $i=1,2,3$ ó 4 . De aquí el teorema queda demostrado.

4.5 Implementación del algoritmo B.

Este algoritmo ha sido desarrollado usando los resultados obtenidos a partir del teorema 8, esto es [24], debe garantizar la conectividad de I así como la densidad de un pixel. El algoritmo utiliza los mismos patrones estructuradores que los empleados en el algoritmo A, pero se determina otro orden de aplicación sobre la figura S de acuerdo a la ecuación [24], así más de una estructura o patrón es usado en forma simultánea en cada paso de la iteración. Así la transformada β del algoritmo B está dada por :

[29]

$$\beta(S, D, E, m) = \{(S \odot D_i) \cap (S \odot D_{(i+1)}) \cap (S \odot E_i)\}_m$$

donde $i=1,2,3$ ó 4 son los sub-índices de los elementos estructuradores. La figura No 4.12 muestra un diagrama de flujo del algoritmo B, el cual consta de cuatro pasos en cada iteración denotada por m , siendo aplicada en forma paralela las estructuras D_i , $D_{(i+1)}$ y E_i .

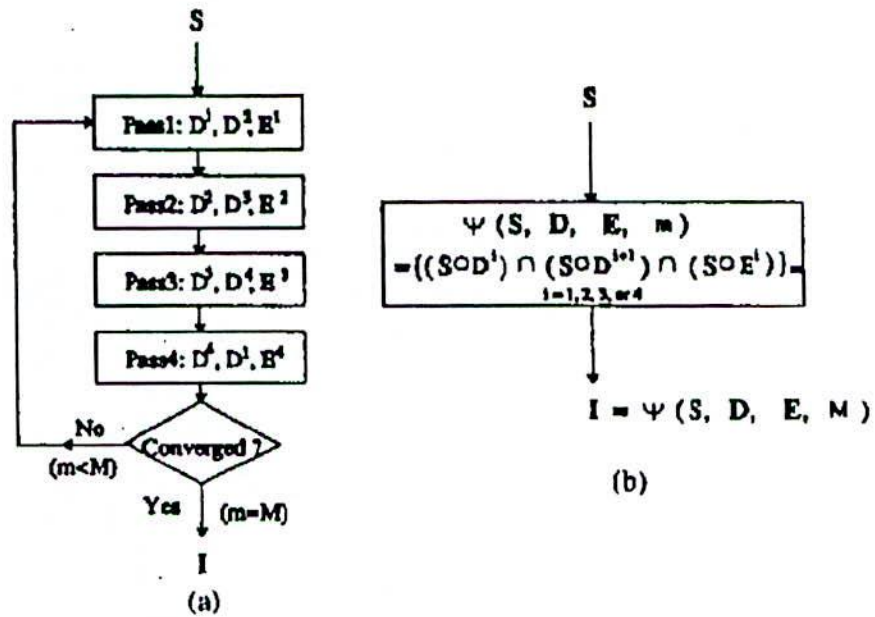


Figura No 4.13

Los resultados prácticos de los algoritmos A y B se observan en las figuras No 4.14 y No 4.15 respectivamente.

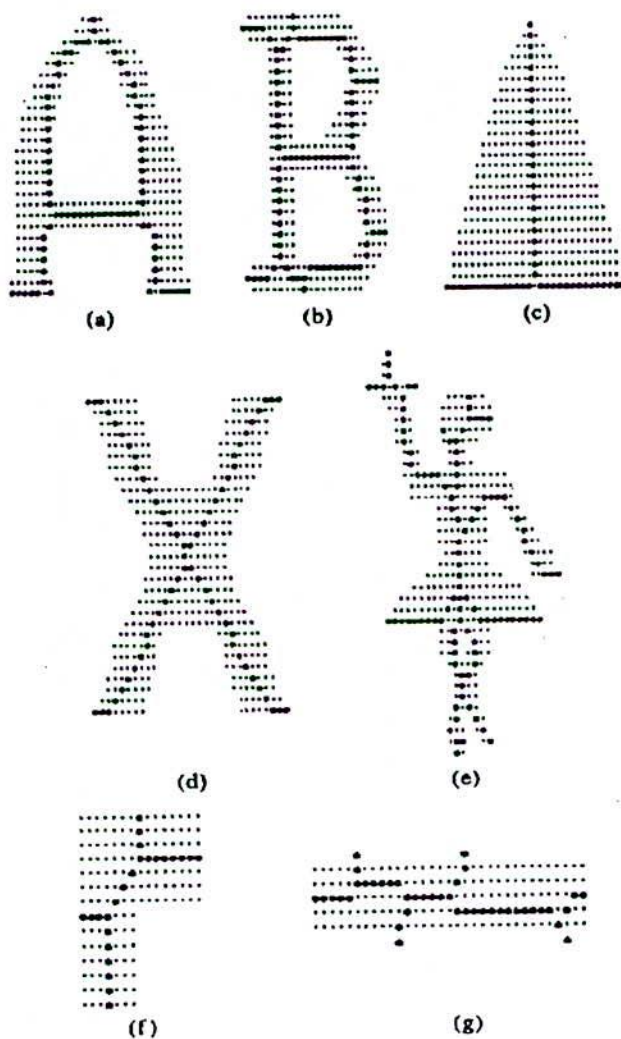


Figura N° 4.14: Resultados a obtener con la implementación de los algoritmos A .

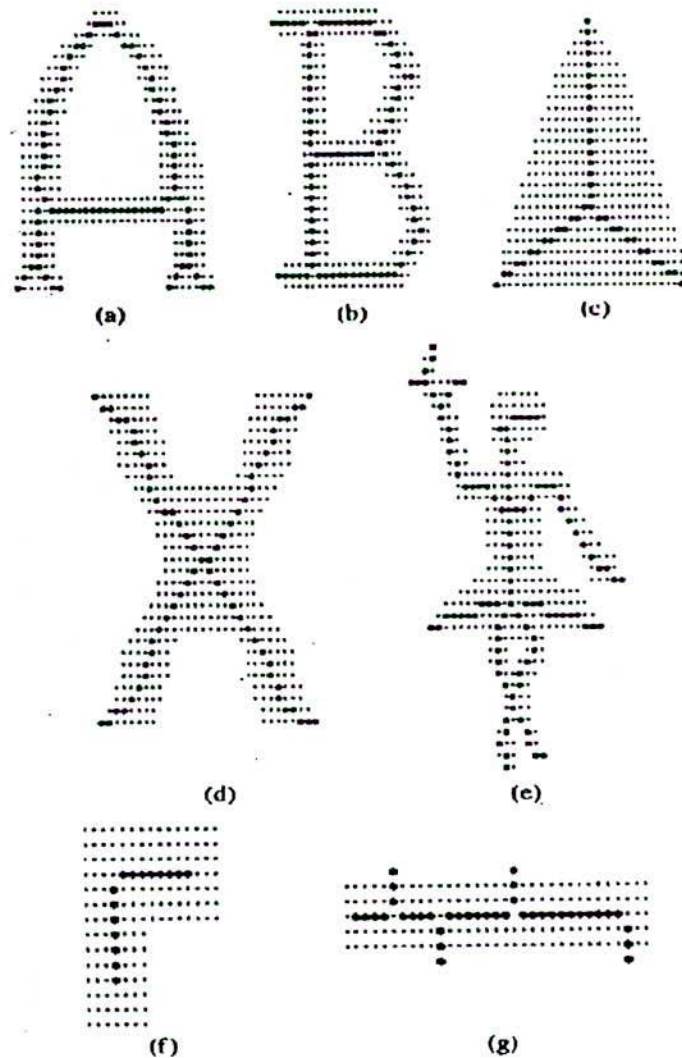


Figura N 4.15: Resultados a obtener con la implementación de los algoritmos B .

Según lo observado en las figuras anteriores el desarrollo del algoritmo A no conserva la morfología inicial de las imágenes de entrada.

En los resultados obtenidos a partir del algoritmo B, se observa que la interpretación morfológica de la imagen de entrada se conserva hasta la convergencia al "Skeleton" I, gracias a la correcta aplicación de los elementos estructurantes y la secuencia restrictiva de estos según lo obtenido en [29].

4.6 En búsqueda de la distribución de energía en un molino de chancado: "Una aplicación particular".

Como una aplicación particular a los desarrollos de este capítulo, se tiene, el análisis de distribución de energía de las bolas de un molino de chancado de minerales.

Dicha aplicación corresponde al estudio realizado por el Departamento de Metalurgia de la universidad Federico Santa María. En dicho estudio se filmaron las bolas en movimiento de un molino piloto, que fueron procesadas digitalmente para su posterior análisis (trabajo de tesis del ingeniero Jaime Serrat C.). En dichas imágenes, las bolas del molino se disponen como se observa en la figura No 4.16.

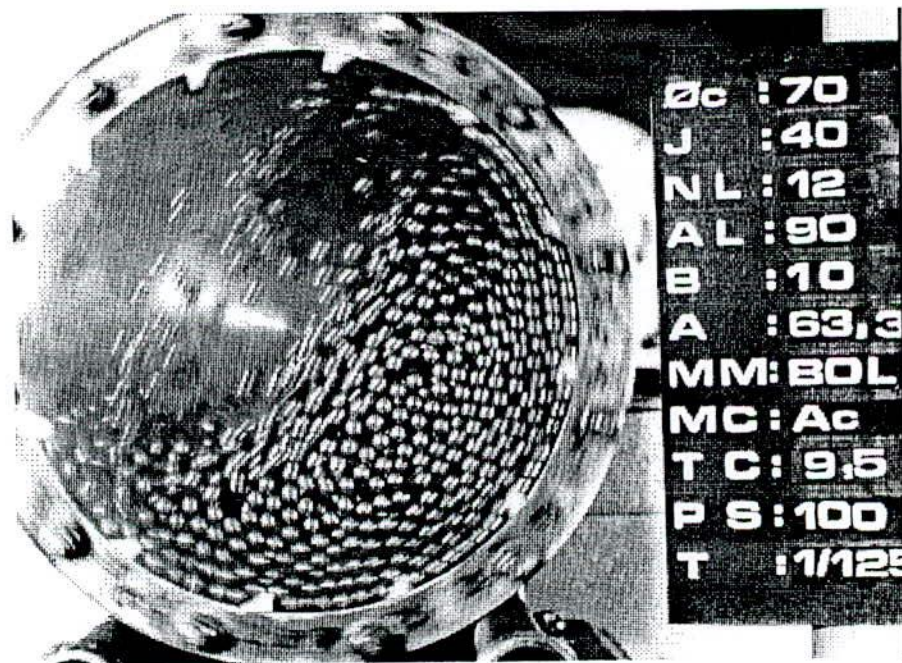
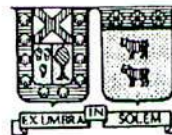


Figura No 4.16.

En la distribución de las bolas se observa que los desplazamientos en su periferia son relativamente rectilíneos, pudiéndose por lo tanto, aplicar criterios de geometría básicos. Pero en el centro de giro de las bolas, se observan desplazamientos en los cuales dichos criterios arrojarían distancias de desplazamientos con errores porcentuales prohibitivos.



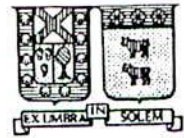
La solución: la aplicación de algoritmos de adelgazamientos. Los cuales conservando la morfología inicial, permiten el conteo por defecto del desplazamiento de la bola en cuestión, con errores porcentuales despreciables.

4.7 Compactación de "bitmaps".

Una de las megatendencias para esta década, prevee el uso de bases de datos que coexistan con campos definidos como gráficos (bitmap de fotografías), lo cual hará crecer el tamaño en orden de 10.000 Bytes por base.

Si se define como f la función de skeleton aplicada a la imagen analizada, se define por consecuencia una función inversa que permita restituir la imagen original, a partir del skeleton.

Estudios teóricos y resultados prácticos han obtenido un nivel de compactación (por concepto de bitmap) de hasta un 75%, con lo cual el orden de magnitud de dichas bases de datos relacionales, haría una aplicación, por cierto atractiva, de un costo accesible a cualquier estación de trabajo.



5 "Morlab" : Un paquete de aplicación.

En el presente trabajo, se desarrolló un paquete de aplicaciones llamado "Morlab", desarrollado en "C", que tiene un tamaño de 87[KB].

Dicho "software" tiene por objetivo el tratamiento morfológico de imágenes digitales. El desarrollo del sistema, se basó en un ambiente de trabajo tipo "pull-down", implementado en modo gráfico y con soporte de "mouse" para una óptima utilización de los recursos del sistema (como se observa en la figura No 5.1). El menú principal consta de cinco opciones, las cuales llevan por nombres: "File", "Edit", "Template", "Opcion" y "Demos".

5.1 "Menú File."

La opción "File" tiene por función la apertura de archivos en formato GIF, la creación de nuevos archivos en ambiente de trabajo, salvar pantallas en formatos ".mor" (formato interno de "morlab"), imprimir pantallas y retornar al ambiente "DOS". El despliegue de los submenús de "File" se observa en la figura No 5.2.

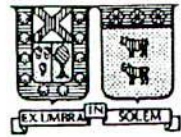
5.2 "Menú Edit."

La opción "Edit" tiene por función el manejo de pantalla, para lo cual se tienen submenús para copiar, cortar y restituir zonas de pantallas previamente seleccionadas (como se observa en la figura No 5.3).

Una opción de gran utilidad es "Filter", el cual tiene por objetivo el filtrado espectral de la pantalla. Para tal efecto se procede al filtrado por color de "paleta" que se desea rescatar para su posterior análisis morfológico. Dicho procedimiento queda de manifiesto en las figuras Nos 5.4 y 5.5.

5.3 "Menú Template."

La opción "Template" tiene por objetivo la selección del elemento estructurador para la posterior aplicación de algún proceso morfológico. Si no se selecciona el elemento estructurador, se asumirá por defecto "Square (3x3)". El despliegue de las opciones de "Template" se observan en la figura No 5.6.



5.4 "Menú Opcion."

El menú "Opcion" tiene por objetivo la aplicación de alguna transformada morfológica: dilatación, erosión, apertura, clausura o "skeleton" sobre la imagen de entrada que se encuentre en pantalla. El despliegue de las opciones de este menú se observa en la figura No 5.7.

5.5 "Menú Demos."

La opción "Demos" tiene por objetivo la demostración de las transformadas morfológicas implementadas. Para el despliegue de estas demostraciones se asume por defecto el "Square (3x3)" como elemento estructurador. (Figura No 5.8).

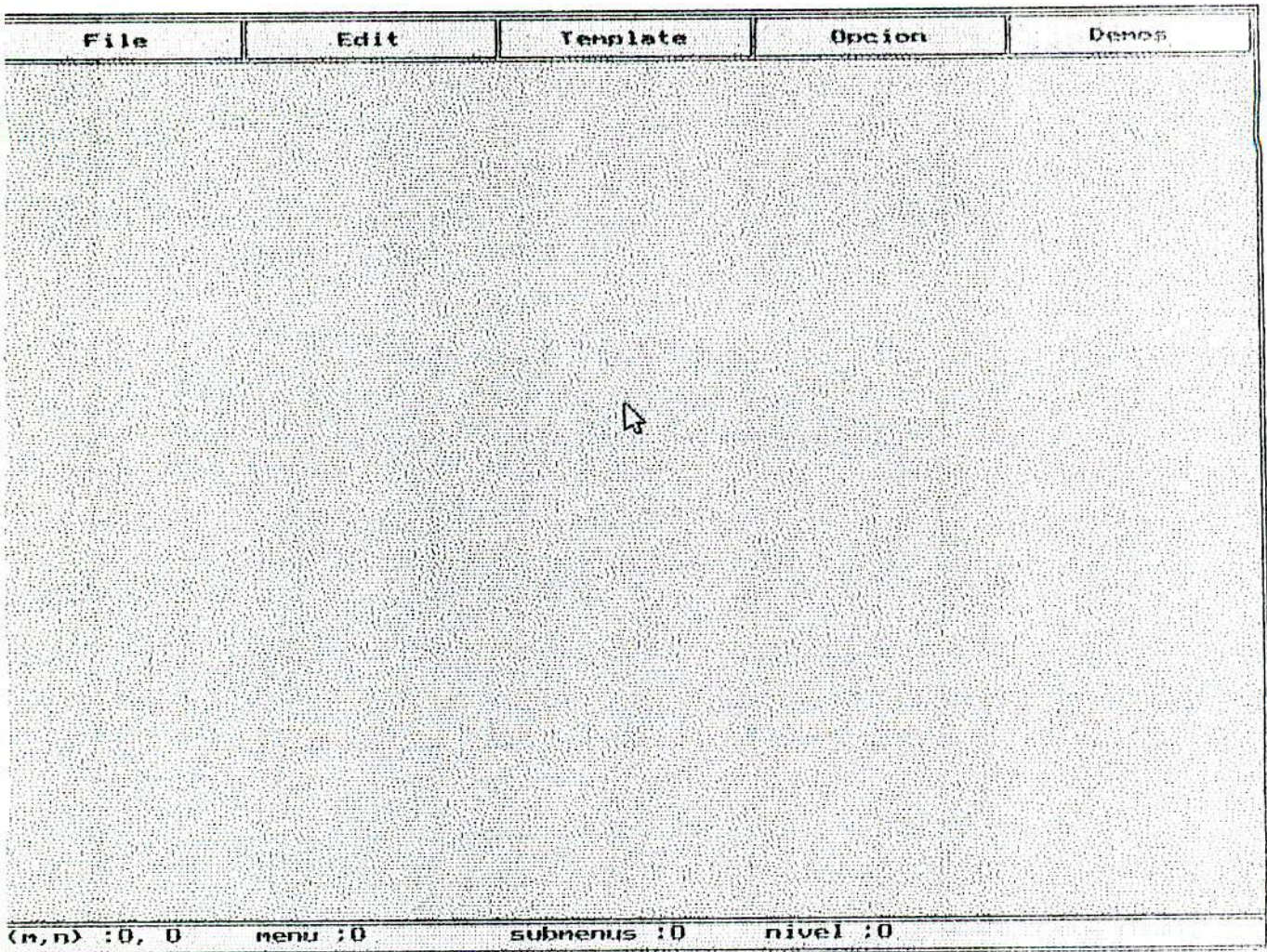


Figura No 5.1

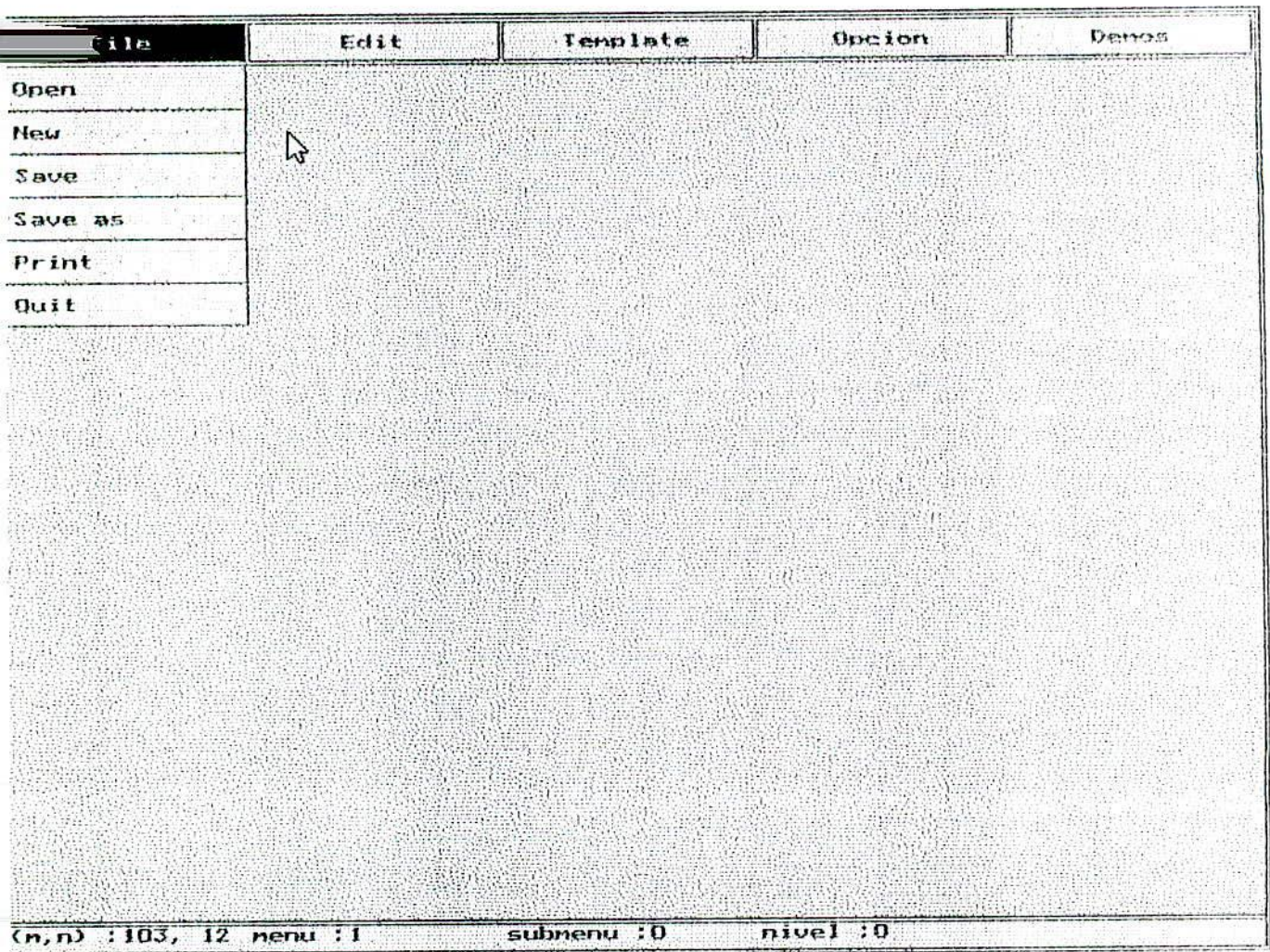


Figura No 5.2

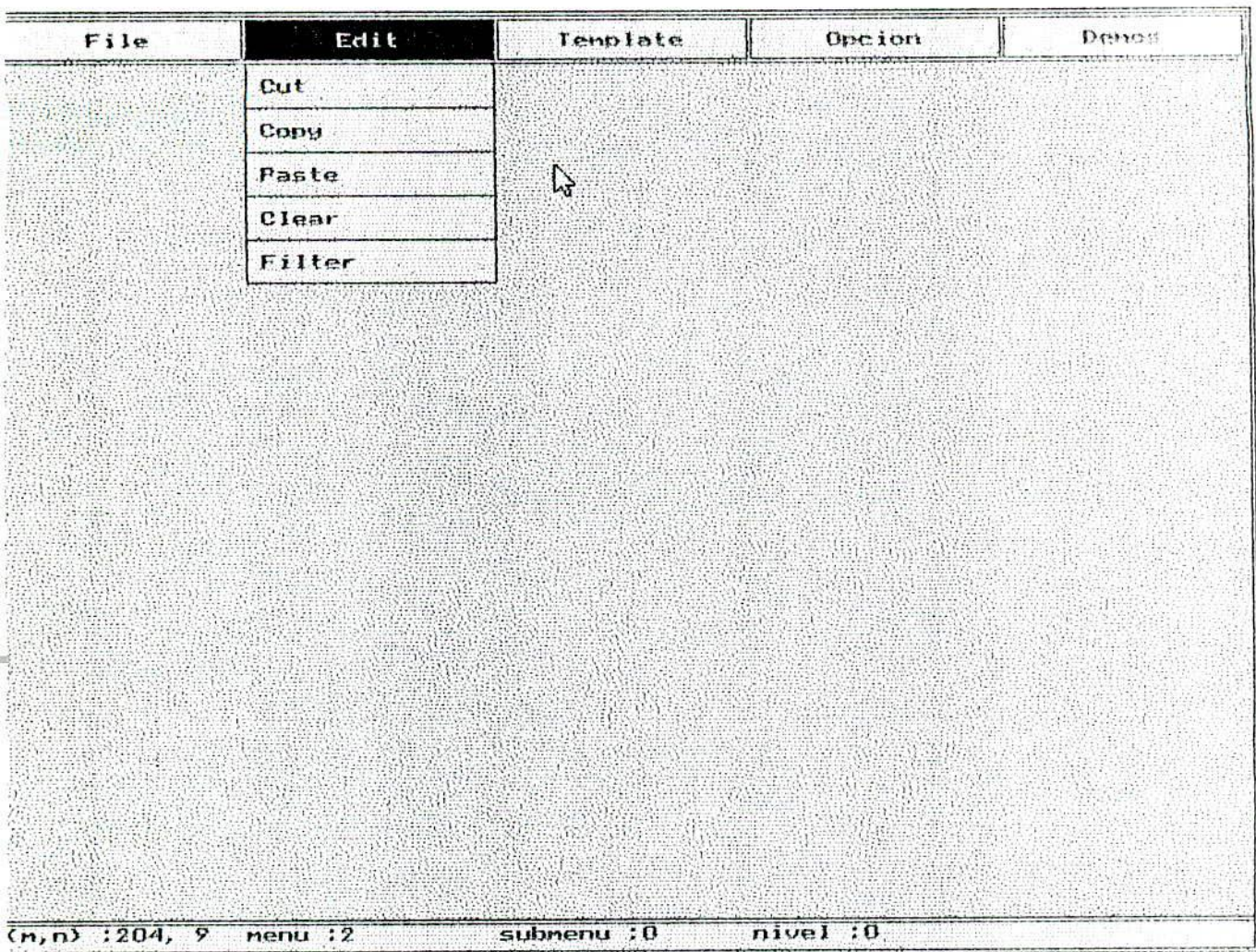


Figura No 5.3

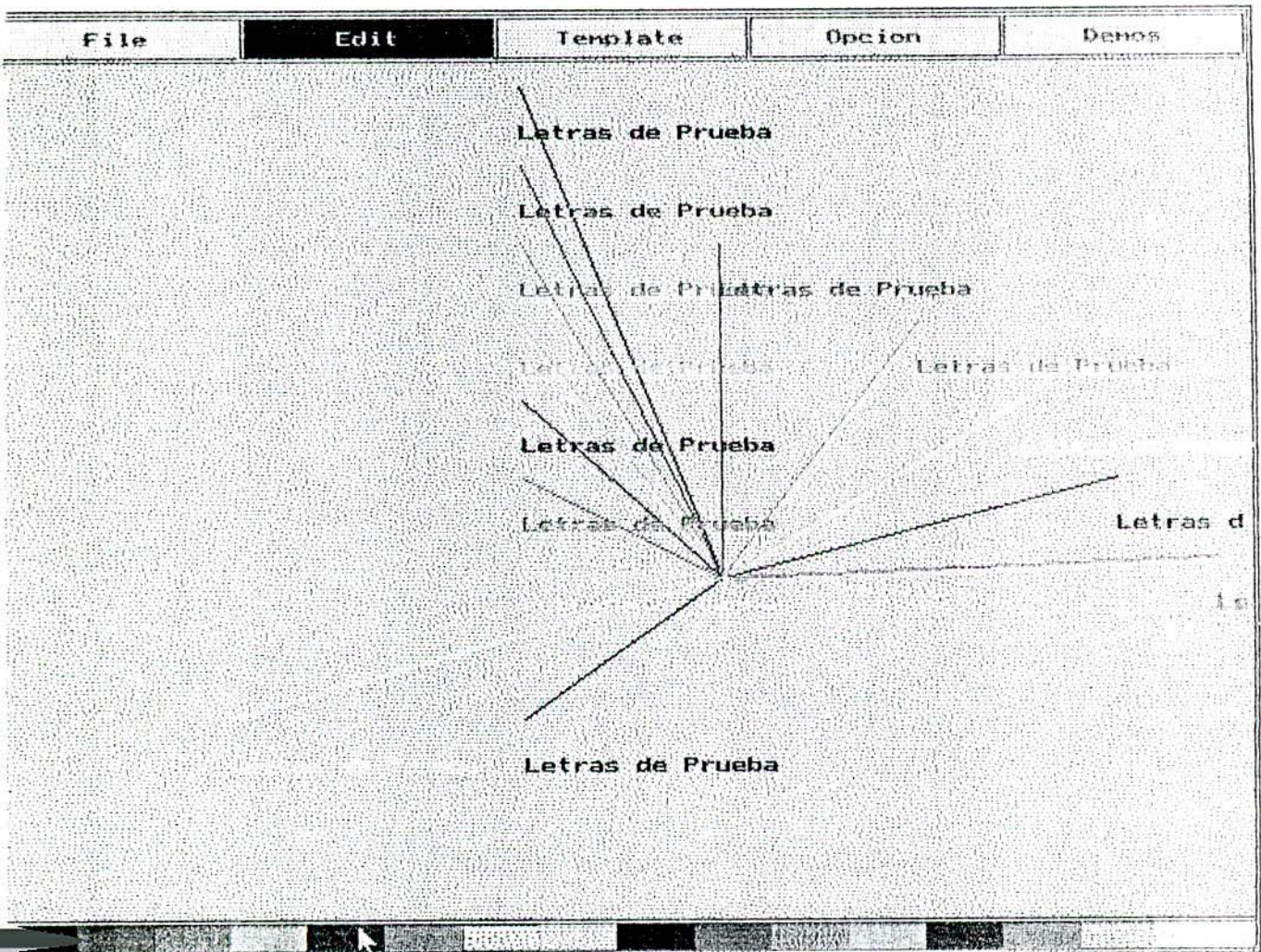


Figura No 5.4

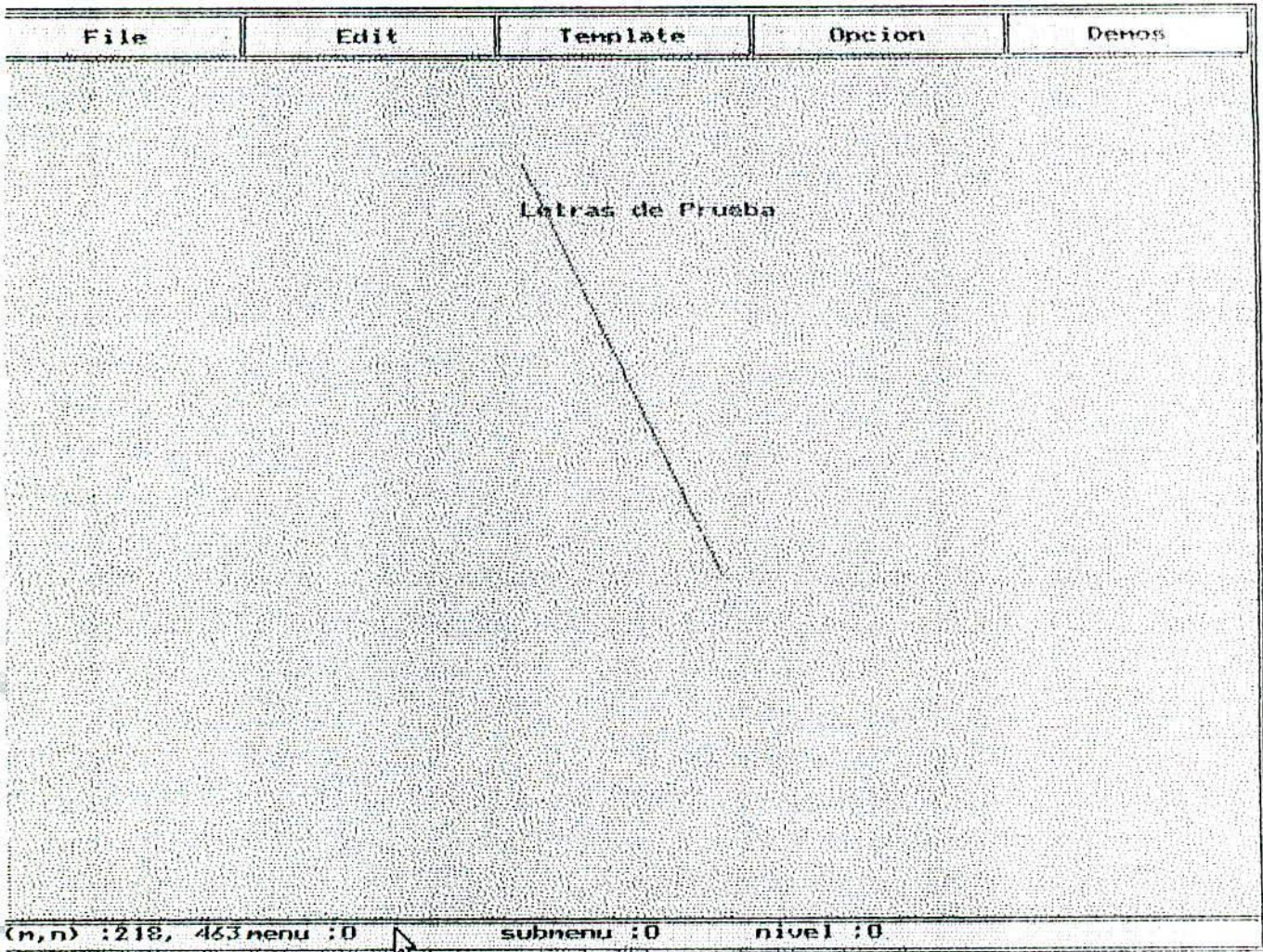


Figura No 5.5

File	Edit	Template	Opcion	Demos
		Square (3x3)		
		Circle (5x5)		
		Cross (3x3)		
		Triangle (5x5)		
		Parable (5x5)		

m,n) :325, 10 menu :3 submenu :0 nivel :0

Figura No 5.6

File	Edit	Template	Option	Demos
			Erosion	
			Dilation	
			Opening	
			Closing	
			Skeleton	

(n,n) :436, 9 menu :4 submenu :0 nivel :0

Figura No 5.7

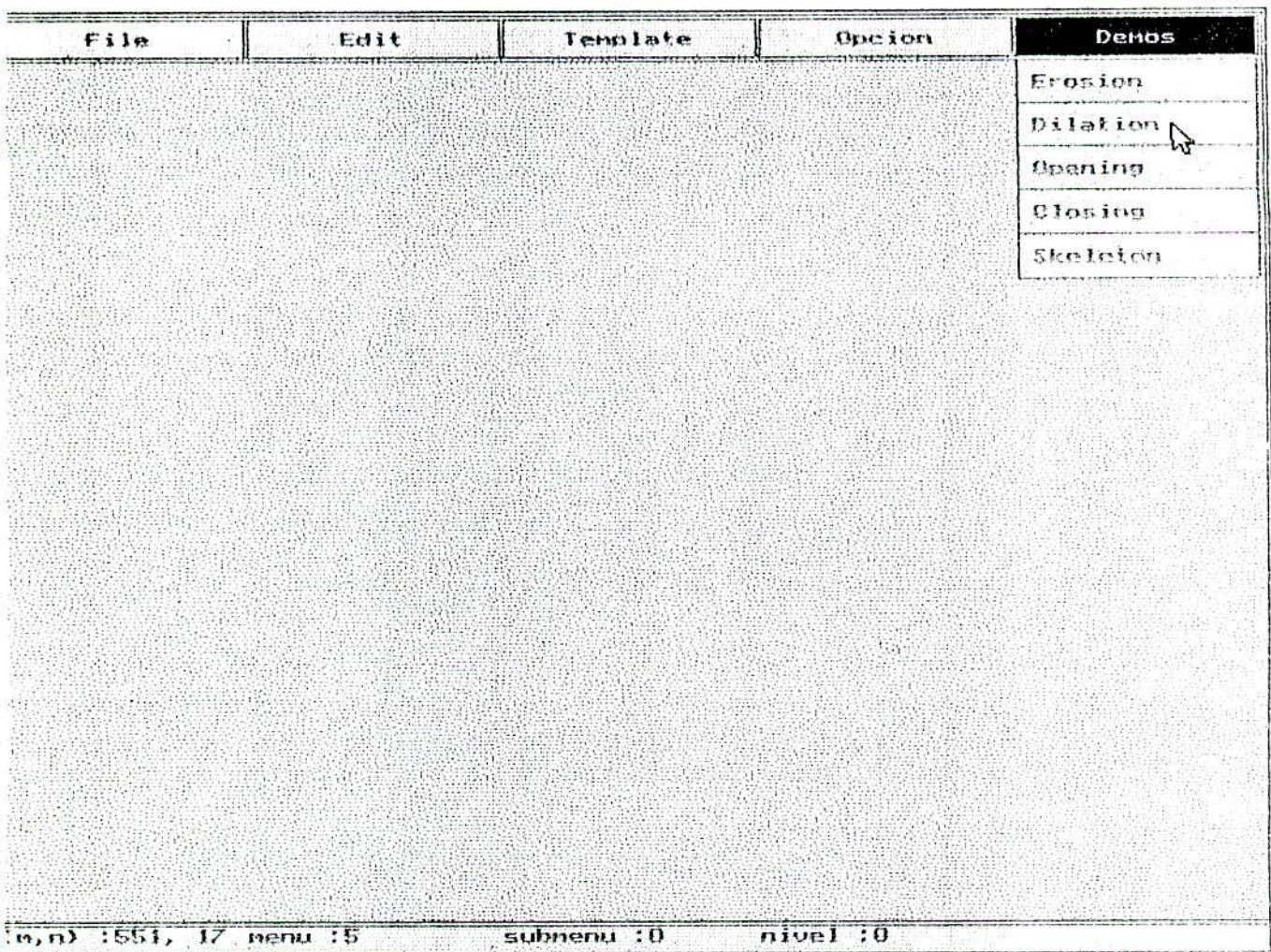
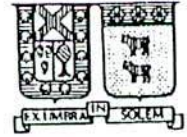


Figura No 5.8



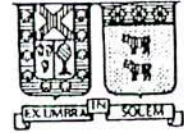
La solución: la aplicación de algoritmos de adelgazamientos. Los cuales conservando la morfología inicial, permiten el conteo por defecto del desplazamiento de la bola en cuestión, con errores porcentuales despreciables.

4.7 Compactación de "bitmaps".

Una de las megatendencias para esta década, prevee el uso de bases de datos que coexistan con campos definidos como gráficos (bitmap de fotografías), lo cual hará crecer el tamaño en orden de 10.000 Bytes por base.

Si se define como f la función de skeleton aplicada a la imagen analizada, se define por consecuencia una función inversa que permita restituir la imagen original, a partir del skeleton.

Estudios teóricos y resultados prácticos han obtenido un nivel de compactación (por concepto de bitmap) de hasta un 75%, con lo cual el orden de magnitud de dichas bases de datos relacionales, haría una aplicación, por cierto atractiva, de un costo accesible a cualquier estación de trabajo.



5 "Morlab" : Un paquete de aplicación.

En el presente trabajo, se desarrolló un paquete de aplicaciones llamado "Morlab", desarrollado en "C", que tiene un tamaño de 87[KB].

Dicho "software" tiene por objetivo el tratamiento morfológico de imágenes digitales. El desarrollo del sistema, se basó en un ambiente de trabajo tipo "pull-down", implementado en modo gráfico y con soporte de "mouse" para una óptima utilización de los recursos del sistema (como se observa en la figura No 5.1). El menú principal consta de cinco opciones, las cuales llevan por nombres: "File", "Edit", "Template", "Opcion" y "Demos".

5.1 "Menú File."

La opción "File" tiene por función la apertura de archivos en formato GIF, la creación de nuevos archivos en ambiente de trabajo, salvar pantallas en formatos ".mor" (formato interno de "morlab"), imprimir pantallas y retornar al ambiente "DOS". El despliegue de los submenús de "File" se observa en la figura No 5.2.

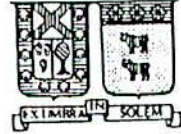
5.2 "Menú Edit."

La opción "Edit" tiene por función el manejo de pantalla, para lo cual se tienen submenús para copiar, cortar y restituir zonas de pantallas previamente seleccionadas (como se observa en la figura No 5.3).

Una opción de gran utilidad es "Filter", el cual tiene por objetivo el filtrado espectral de la pantalla. Para tal efecto se procede al filtrado por color de "paleta" que se desea rescatar para su posterior análisis morfológico. Dicho procedimiento queda de manifiesto en las figuras Nos 5.4 y 5.5.

5.3 "Menú Template."

La opción "Template" tiene por objetivo la selección del elemento estructurador para la posterior aplicación de algún proceso morfológico. Si no se selecciona el elemento estructurador, se asumirá por defecto "Square (3x3)". El despliegue de las opciones de "Template" se observan en la figura No 5.6.

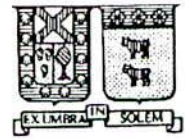


5.4 "Menú Opcion."

El menú "Opcion" tiene por objetivo la aplicación de alguna transformada morfológica: dilatación, erosión, apertura, clausura o "skeleton" sobre la imagen de entrada que se encuentre en pantalla. El despliegue de las opciones de este menú se observa en la figura No 5.7.

5.5 "Menú Demos."

La opción "Demos" tiene por objetivo la demostración de las transformadas morfológicas implementadas. Para el despliegue de estas demostraciones se asume por defecto el "Square (3x3)" como elemento estructurador. (Figura No 5.8).



6 Conclusiones.

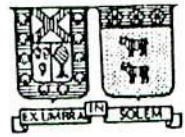
Es necesario hacer notar, que si los análisis de imágenes digitales han logrado dar resultados satisfactorios, estos por su naturaleza son obtenidos a partir de la contrastación con lo que "visualmente nos parezca coherente" o nos de algún tipo de información "histórica".

Así, dentro de las alternativas de algoritmos de análisis de imágenes digitales se cuenta con dos grandes ramas: una, la más estudiada y ligada a las ciencias de la ingeniería, la espectral (procesamiento de las frecuencias f_i , donde f_i será el rango de frecuencias muestreadas). La segunda el análisis y estudio de formas, relacionada con las ciencias naturales como el procesamiento de conectividades, eliminación de istmos, vacíos, etc.

Actualmente, la convergencia de ambas ramas de la ciencias, hace imprescindible el uso de herramientas que permitan cuantificar informaciones de caracter cualitativo. Los algoritmos desarrollados basados en términos de frecuencias, no pueden, como consecuencia natural, discriminar en lo que respecta a el objeto analizado y su entorno, salvo que la distribución de frecuencia permita la discriminación de ambos.

Aquí la morfología matemática surge como una poderosa herramienta, capaz de poder actuar en campos de información de caracter cualitativo, pudiendo en muchos casos cuantificar lo que antes no era cuantificable.

Un papel fundamental son los elementos estructuradores, gracias a los cuales podemos interactuar con el objeto observado y su entorno. Así podemos modelar en función de estos elementos estructuradores, lo observado y por consecuencia lo que deseamos cuantificar.



7 Bibliografía.

- [1] Ben-Kwei Jang, "Analysis of thinning algorithms using mathematical morphology", IEEE Trans. Anal. Machine Intell. vol.12 PAMI No 6, pp 541-551, June 1990.
- [2] G. Matheron, Random Sets and integral Geometry. New York: Wiley, 1975.
- [3] J. Serra, Image Analysis and Mathematical Morphology. London: Academic, 1982.
- [4] Mike James, Pattern Recognition. A wiley-Interscience Publication, 1988.
- [5] R.M. Haralick, S.R. Stenberg, and X. Zhuang, Image analysis using mathematical morphology, "IEEE Trans. Anal. Machine Intell. vol. PAMI No 4, pp 532-550, July 1987.