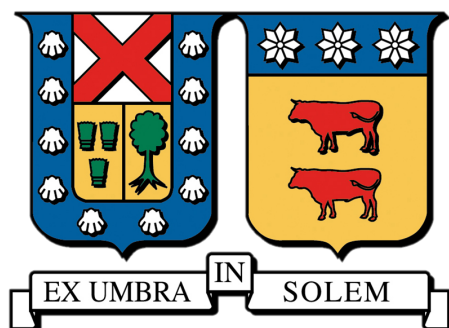




UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS

ESTUDIO DEL IMPACTO DE LA CRISIS FINANCIERA GLOBAL 2020
MEDIANTE ESTRUCTURAS DE ASOCIACIÓN

MEMORIA/TESIS PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

AUTOR

MARÍA IGNACIA GALARCE OLIVARES

PROFESOR GUÍA

WERNER KRISTJANPOLLER

PROFESOR CO-REFERENTE

BERNARDO PINCHEIRA

VALPARAÍSO DE CHILE, 06 DE ENERO 2025

Tabla de Contenidos

1. Introducción	11
2. Problema de Investigación	14
3. Objetivos	17
3.1. Objetivo General	17
3.2. Objetivos Específicos	17
4. Marco teórico	18
4.1. Concepto de globalización	18
4.2. Relación entre globalización y el concepto de contagio	21
4.3. Definición de contagio financiero	22
4.4. Teorías económicas de contagio financiero	24
4.5. Antecedentes de crisis económicas	26
4.6. Impacto del COVID-19 en la economía global	29
4.7. Políticas de gestión de riesgos	37
4.8. Tipos de contagios	39
4.8.1. Contagio en los retornos	39
4.8.2. Contagio en las volatilidades	40
4.8.3. Contagio y efectos asimétricos en las correlaciones	41
5. Metodología	43
5.1. Procesos estocásticos	43

5.1.1.	Series de Tiempo	44
5.1.2.	Ergodicidad en Media y Varianza	46
5.1.3.	Estacionariedad	47
5.1.4.	Función de autocovarianza	49
5.1.5.	Autocorrelación parcial	50
5.1.6.	Ruido Blanco	51
5.1.7.	Proceso predecible	53
5.1.8.	Pruebas estadísticas	55
5.1.9.	Retornos Financieros	61
5.2.	Modelos de series de tiempo financieras	66
5.2.1.	Modelos lineales	66
5.2.2.	Modelos heterocedásticos	74
5.3.	Modelos de Dependencia Financiera	81
5.3.1.	Medición del riesgo	81
5.3.2.	Optimización del portafolio de Markowitz	82
5.3.3.	Coeficiente de Correlación de Pearson	84
5.3.4.	Cópulas	86
5.3.5.	Cópulas Arquimedianas	90
5.3.6.	Cópulas Elípticas	92
5.3.7.	Modelos Ocultos de Markov (HMM) con Cópulas Dinámicas	95
5.3.8.	Métricas de dependencia	101
5.3.9.	Pruebas de bondad de ajuste	104

6. Análisis empírico	111
6.1. Datos	111
6.2. Análisis de retornos	113
6.2.1. Ajuste de datos	119
6.3. Análisis univariado del Modelo SWARCH	125
7. Análisis de cópulas	132
7.1. Análisis de par de índices de América	133
7.1.1. Bovespa - IPC	133
7.1.2. Bovespa - IPSA	137
7.1.3. Bovespa - SP500	141
7.1.4. IPSA - IPC	146
7.1.5. SP500 - IPC	150
7.1.6. SP500 - IPSA	155
7.2. Análisis de par de índices de Europa	159
7.2.1. CAC40 - DAX	159
7.2.2. CAC40 - FTSE100	163
7.2.3. CAC40 - IBEX35	168
7.2.4. DAX - FTSE100	172
7.2.5. DAX - IBEX35	176
7.2.6. FTSE100 - IBEX35	181
7.3. Análisis par de índices Europa-América: FTSE100 - SP500	185
8. Conclusiones y recomendaciones	190

A. Fórmulas de cópulas	206
B. Códigos R	206
B.1. Test de autoregresivos	206
B.2. Convergencia de Matriz Hessiana de SWARCH(2,1)	211
C. Códigos Python	213
C.1. Función para estimar las cópulas con régimen de Markov	213
C.2. Función que entrega los parámetros a partir del Tau de Kendall	217
C.3. Función de algoritmo EM (Expectation-Maximization)	218

Lista de Tablas

1.	Caída del Producto Interno Bruto (PIB) en países afectados por las crisis de 1929, 1997 y 2008.	27
2.	Impacto de las principales crisis económicas en los índices bursátiles	28
3.	Dependencia de colas y coeficiente de Kendall's τ para diferentes cópulas.	103
4.	Estadísticas descriptivas de los índices bursátiles	116
5.	Matriz de correlación entre índices bursátiles de la muestra completa	117
6.	Matriz de correlación entre índices bursátiles pre-crisis (antes del 20/01/2020) . . .	118
7.	Matriz de correlación entre índices bursátiles durante la crisis (20/01/2020 - 05/05/2023)	119
8.	Resultados de Pruebas Estadísticas para Bovespa	122
9.	Resultados de Pruebas Estadísticas para CAC40	122
10.	Resultados de Pruebas Estadísticas para DAX	123
11.	Resultados de Pruebas Estadísticas para FTSE100	123
12.	Resultados de Pruebas Estadísticas para IBEX35	124
13.	Resultados de Pruebas Estadísticas para S&P500	124
14.	Resultados de Pruebas Estadísticas para IPSA	125
15.	Resultados de Pruebas Estadísticas para IPC	125
16.	Resultados univariados del modelo SWARCH(2,1): mercado Americano	128
17.	Resultados univariados del modelo SWARCH(2,1): mercado Europeo	129
18.	Resumen de parámetros para Bovespa-IPC	134
19.	Métricas de dependencia para Bovespa-IPC	134
20.	Métricas de calidad para Bovespa-IPC	135

21.	Resumen de parámetros para Bovespa-IPSA	138
22.	Métricas de dependencia para Bovespa-IPSA	139
23.	Métricas de calidad para Bovespa-IPSA	139
24.	Resumen de parámetros para Bovespa-SP500	142
25.	Métricas de dependencia para Bovespa-SP500	143
26.	Métricas de calidad para Bovespa-SP500	143
27.	Resumen de parámetros para IPSA-IPC	147
28.	Métricas de dependencia para IPSA-IPC	147
29.	Métricas de calidad para IPSA-IPC	147
30.	Resumen de parámetros para SP500-IPC	151
31.	Métricas de dependencia para SP500-IPC	152
32.	Métricas de calidad para SP500-IPC	152
33.	Resumen de parámetros para SP500-IPSA	156
34.	Métricas de dependencia para SP500-IPSA	156
35.	Métricas de calidad para SP500-IPSA	156
36.	Resumen de parámetros para CAC40-DAX	160
37.	Métricas de dependencia para CAC40-DAX	160
38.	Métricas de calidad para CAC40-DAX	161
39.	Resumen de parámetros para CAC40-FTSE100	164
40.	Métricas de dependencia para CAC40-FTSE100	165
41.	Métricas de calidad para CAC40-FTSE100	165
42.	Resumen de parámetros para CAC40-IBEX35	169
43.	Métricas de dependencia para CAC40-IBEX35	169

44.	Métricas de calidad para CAC40-IBEX35	170
45.	Resumen de parámetros para DAX-FTSE100	173
46.	Métricas de dependencia para DAX-FTSE100	173
47.	Métricas de calidad para DAX-FTSE100	173
48.	Resumen de parámetros para DAX-IBEX35	177
49.	Métricas de dependencia para DAX-IBEX35	178
50.	Métricas de calidad para DAX-IBEX35	178
51.	Resumen de parámetros para FTSE100-IBEX35	182
52.	Métricas de dependencia para FTSE100-IBEX35	182
53.	Métricas de calidad para FTSE100-IBEX35	182
54.	Resumen de parámetros para FTSE100-SP500	186
55.	Métricas de dependencia para FTSE100-SP500	186
56.	Métricas de calidad para FTSE100-SP500	187
57.	Cópulas comúnmente mencionadas en la literatura	206
58.	Función generadora ($\phi(t)$) y cópulas límite para algunas cópulas de Arquímedes . .	206

Lista de Figuras

1.	Inflación incluyendo todos los componentes, contribuciones de los diferentes componentes (excepto alimentos y energía), contribución de alimentos y contribución de energía.	31
2.	Cambios en el tipo de cambio efectivo real, abril de 2020 a marzo de 2021.	32
3.	Gráficos de series temporales de los índices industriales diarios S&P 500.	34
4.	Gráficos de series temporales de las volatilidades condicionales de los índices industriales S&P 500 de 01/04/2016 al 12/11/2020.	36
5.	Mapa de calor del grupo de las correlaciones de volatilidad condicional para los índices industriales diarios S&P 500 antes y después del COVID-19.	37
6.	Evolución de los rendimientos logarítmicos de los índices bursátiles de América (2012-2023).	114
7.	Evolución de los rendimientos logarítmicos de los índices bursátiles de Europa (2012-2023).	115
8.	Probabilidades suavizadas de los regímenes para los índices del continente América.	130
9.	Probabilidades suavizadas de los regímenes para los índices del continente Europa.	131
10.	Diagrama de dispersión de Bovespa-IPC Régimen 1 (baja volatilidad)	136
11.	Diagrama de dispersión de Bovespa-IPC Régimen 2 (alta volatilidad)	137
12.	Diagrama de dispersión de Bovespa-IPSA Régimen 1 (baja volatilidad)	140
13.	Diagrama de dispersión de Bovespa-IPSA Régimen 2 (alta volatilidad)	141
14.	Diagrama de dispersión de Bovespa-SP500 Régimen 1 (baja volatilidad)	145
15.	Diagrama de dispersión de Bovespa-SP500 Régimen 2 (alta volatilidad)	145

16.	Diagrama de dispersión de IPSA-IPC Régimen 1 (baja volatilidad)	149
17.	Diagrama de dispersión de IPSA-IPC Régimen 2 (alta volatilidad)	150
18.	Diagrama de dispersión de SP500-IPC Régimen 1 (baja volatilidad)	154
19.	Diagrama de dispersión de SP500-IPC Régimen 2 (alta volatilidad)	154
20.	Diagrama de dispersión de SP500-IPSA Régimen 1 (baja volatilidad)	158
21.	Diagrama de dispersión de SP500-IPSA Régimen 2 (alta volatilidad)	158
22.	Diagrama de dispersión de CAC40-DAX Régimen 1 (baja volatilidad)	162
23.	Diagrama de dispersión de CAC40-DAX Régimen 2 (alta volatilidad)	163
24.	Diagrama de dispersión de CAC40-FTSE100 Régimen 1 (baja volatilidad)	167
25.	Diagrama de dispersión de CAC40-FTSE100 Régimen 2 (alta volatilidad)	167
26.	Diagrama de dispersión de CAC40-IBEX35 Régimen 1 (baja volatilidad)	171
27.	Diagrama de dispersión de CAC40-IBEX35 Régimen 2 (alta volatilidad)	171
28.	Diagrama de dispersión de DAX-FTSE100 Régimen 1 (baja volatilidad)	175
29.	Diagrama de dispersión de DAX-FTSE100 Régimen 2 (alta volatilidad)	176
30.	Diagrama de dispersión de DAX-IBEX35 Régimen 1 (baja volatilidad)	180
31.	Diagrama de dispersión de DAX-IBEX35 Régimen 2 (alta volatilidad)	180
32.	Diagrama de dispersión de FTSE100-IBEX35 Régimen 1 (baja volatilidad)	184
33.	Diagrama de dispersión de FTSE100-IBEX35 Régimen 2 (alta volatilidad)	184
34.	Diagrama de dispersión de FTSE100-SP500 Régimen 1 (baja volatilidad)	189
35.	Diagrama de dispersión de FTSE100-SP500 Régimen 2 (alta volatilidad)	189

Agradecimientos

Al finalizar mi formación académica en la Universidad Técnica Federico Santa María, tras 6 años de esfuerzo, siento una inmensa gratitud hacia quienes me acompañaron en este camino. Este trabajo refleja perseverancia, dedicación y la capacidad de superar desafíos.

Gracias a mis profesores Werner y Bernardo los cuales me orientaron, acompañaron y mantuvieron mi motivación en este trabajo, agradecer por su comprensión, análisis y tiempo en esta memoria.

Agradezco profundamente a mis padres por su constante motivación, consejos y apoyo incondicional, así como a mis hermanas, quienes han sido ejemplos de fortaleza e independencia. Mi gratitud también va a mi abuelita, mi tía y mi tío por sus rezos y buenos deseos que me brindaron esperanza en momentos difíciles.

Dentro de este proceso lleno de estrés, ansiedad y una que otra lágrima estuvo acompañándome Gonzalo, que con mucha paciencia me brindaba tranquilidad y atención ante estas eventualidades que son propias del camino. Muchas gracias por enseñarme que lo mejor que uno puede entregar es la compañía, el amor y la paz, sigo aprendiendo día a día a tu lado de lo bonito que se puede llegar a construir siendo un equipo.

También agradecer a mis amigos y todas las personas que han pasado a lo largo de mi vida, me hicieron disfrutar esta etapa, tener un montón de recuerdos y distintas anécdotas que guardo en mi corazón con mucho cariño.

Por último agradecerme a mí por cumplir con este hito y sacar el máximo provecho de mi potencial, soy un buen soldado y siempre lo seré.

1. Introducción

La crisis financiera global de 2020, originada por la pandemia de COVID-19, marcó un hito sin precedentes en la historia económica reciente. Este evento puso a prueba la resiliencia de los mercados financieros, exponiendo vulnerabilidades sistémicas y generando perturbaciones en la estabilidad económica mundial. Desde el inicio de la pandemia, los mercados experimentaron una volatilidad extrema, resultado de la incertidumbre económica, las restricciones gubernamentales y la rápida propagación de un fenómeno global que afectó tanto a economías desarrolladas como emergentes.

La presente investigación aborda el análisis del impacto financiero durante el contexto de la pandemia global del COVID-19, un evento que transformó drásticamente las dinámicas económicas y sociales a nivel mundial. En particular, se pone énfasis en cómo las estructuras de dependencia entre los mercados financieros globales evidencian patrones de contagio económico, utilizando modelos matemáticos avanzados como las cópulas dinámicas y las series de tiempo con regímenes de Markov. Este enfoque permite capturar la complejidad intrínseca de los mercados financieros modernos, caracterizados por una alta interconexión e interdependencia.

El fenómeno de contagio financiero, ampliamente estudiado en la literatura, se intensificó durante la crisis sanitaria. Este concepto, definido como el incremento significativo de la interdependencia entre mercados tras un choque, cobra especial relevancia en un contexto de globalización e integración financiera. Las estructuras de dependencia, como las modeladas mediante cópulas, se han convertido en herramientas esenciales para comprender y medir las relaciones complejas entre mercados en tiempos de crisis.

En un contexto de creciente globalización, la interrelación de los mercados financieros ha

intensificado la transmisión de choques entre regiones, destacando la vulnerabilidad del sistema económico global frente a eventos de alta magnitud como el COVID-19. Los mercados bursátiles, indicadores clave de la actividad económica, experimentaron fluctuaciones significativas durante la crisis sanitaria. Esta volatilidad puede ser entendida desde un marco de dependencia y contagio financiero, lo cual justifica la implementación de metodologías robustas para su análisis y comprensión.

El objetivo principal de este trabajo es estudiar y modelar las dinámicas de contagio financiero en diversos índices bursátiles, considerando cambios estructurales en la volatilidad a lo largo del tiempo. Para ello, se integran herramientas estadísticas y econométricas que permiten identificar y cuantificar las relaciones de dependencia entre diferentes mercados bajo distintas condiciones de volatilidad. Este enfoque contribuye a un entendimiento más profundo de los mecanismos de transmisión de riesgo financiero y proporciona una base sólida para diseñar estrategias efectivas de diversificación y mitigación de riesgos que los inversores puedan implementar bajo escenarios de contagio financiero.

En este escenario, los índices bursátiles mundiales experimentaron comportamientos divergentes y patrones de correlación cambiantes. Mientras algunos mercados lograron recuperarse rápidamente tras los picos de volatilidad, otros enfrentaron desafíos persistentes debido a factores internos y externos. La alta sincronización entre mercados durante eventos extremos plantea preguntas críticas sobre el impacto del contagio financiero y las estrategias necesarias para mitigar sus efectos en portafolios de inversión.

La estructura del presente documento se organiza de la siguiente forma: en la **Sección II**, se definen los objetivos y el alcance de la investigación, proporcionando una visión clara de las metas planteadas. La **Sección III** examina los antecedentes teóricos y conceptuales sobre el fenómeno

del contagio financiero, incluyendo una revisión de las metodologías utilizadas en estudios previos. La **Sección IV** detalla la metodología empleada, con un enfoque específico en los modelos de series temporales y cópulas dinámicas. La **Sección V** presenta el análisis empírico, destacando los resultados obtenidos a partir de los datos analizados. Finalmente, en las **Secciones VI y VII**, se discuten las implicancias de los hallazgos y se formulan conclusiones y recomendaciones basadas en los resultados de esta investigación.

2. Problema de Investigación

La pandemia de COVID-19, originada en la ciudad china de Wuhan, ha tenido un impacto global sin precedentes. Desde su declaración por parte de la Organización Mundial de la Salud (OMS) en diciembre de 2019, ha afectado a millones de personas en todo el mundo y ha generado una gran incertidumbre en los mercados financieros, afectando a importantes divisas de intercambio global y arrastrando consigo a mercados de turismo, tecnología, aerolíneas e inestabilidad económica en naciones e industrias débiles financieramente.

A diferencia de brotes anteriores, como la Gripe Española, que dejaron apenas rastros en el mercado de valores estadounidense, el COVID-19 ha generado reacciones extremadamente significativas. Durante el período comprendido entre el 24 de febrero y el 30 de abril de 2020, se registró un aumento notable en el número de saltos diarios en el mercado de valores de EE. UU. mayores al 2.5 %, con un total de 27, en comparación con el período anterior. De estos saltos, 13.4 se atribuyen al impacto económico de la pandemia, mientras que 10.4 se relacionan con las respuestas políticas a la misma (Baker *et al.*, 2020). Esta evidencia refleja la gran volatilidad y la influencia significativa que tanto la pandemia como las medidas gubernamentales tuvieron en el mercado financiero durante ese período.

Cabe destacar que se ha confirmado mediante estudios que las restricciones gubernamentales y el distanciamiento social han sido los principales impulsores de esta reacción sin precedentes en el mercado de valores de Estados Unidos frente a la pandemia mundial (Fasanya *et al.*, 2020)

Una de las investigaciones de análisis de datos respecto al impacto de los anuncios oficiales de COVID-19 en la volatilidad financiera, durante la fase pandémica de la crisis, obtuvo que los nuevos casos de infección reportados tanto a nivel global como en EE.UU aumentan signifi-

cativamente la volatilidad financiera, lo que repercute en el ciclo financiero mundial (Albulescu, 2021). El modelo utilizado en la investigación se fundamentó en la recopilación de datos diarios procedentes de dos fuentes principales: los informes de situación de la Organización Mundial de la Salud (OMS) que detallaban las estadísticas relacionadas con COVID-19, y la base de datos de índices S&P Dow Jones, que proporcionaba información sobre la volatilidad realizada (RV). Para evaluar el impacto del nuevo coronavirus en la volatilidad financiera, se llevó a cabo una regresión simple por mínimos cuadrados ordinarios (MCO), utilizando un enfoque de procedimiento por pasos. Asimismo, se aplicó una estimación por mínimos cuadrados robustos (MCR) con el fin de confirmar la solidez de los resultados obtenidos y contrarrestar posibles efectos de valores atípicos presentes en los datos.

Históricamente las crisis financieras son eventos que se producen con cierta regularidad que se manifiesta en todos los ámbitos del mercado, las cuales exhiben notables similitudes entre sí (Reinhart y Rogoff, 2008). Ante aquello nace el concepto de *contagio financiero*, que tal como indica Forbes y Rigobon es, “un aumento significativo de los vínculos entre los mercados después de un choque a un país” (Forbes y Rigobon, 2002), pero sólo se trata de contagio si el comovimiento entre mercados aumenta significativamente después del shock. Por lo tanto, existe un interés en la capacidad para medir y supervisar estos niveles de co-movimiento y la correlación entre mercados con tal de estudiar las estructuras de los vínculos de los mercados bursátiles.

Basándose en los aspectos previamente mencionados y considerando el continuo avance de la globalización económica y la integración financiera, los mercados de valores han adquirido niveles de interconexión significativos, lo que supone un desafío crucial para mantener la estabilidad del sistema. En este contexto, resulta imperativo evaluar y vigilar detalladamente tanto la dirección como la magnitud del riesgo sistémico, con el objetivo de anticipar y gestionar eficazmente

posibles amenazas con planes de contingencia.

Entre los modelos que permiten cuantificar el aumento de los vínculos, se encuentra el de cópulas dinámicas ajustadas a las series de retornos diarios, analizando los puntos de cambio en los parámetros de asociación, tal como realiza Danilo Pezo al estudiar las estructuras de asociación del fenómeno *Subprime* (Pezo, 2011). En la memoria, se utilizaron modelos estadísticos tales como el ARMA-GARCH para analizar tanto la media como la varianza condicional de los retornos financieros y análisis de punto de cambio en los modelos GARCH con el fin de identificar posibles cambios estructurales en la volatilidad.

Se plantea la pregunta, ¿Es correcto afirmar que existió contagio financiero entre los índices del mercado financiero europeo y entre los índices del mercado financiero americano, durante el período de COVID-19? Y en base a esto, ¿Qué se les recomienda como gestión de riesgos a los inversores con tal de mitigar el impacto en el portafolio?

El presente estudio tiene como objetivo evidenciar patrones de contagio financiero de los mercados financieros de América y Europa durante períodos de alta y baja volatilidad en el período comprendido entre 2012 y 2023. Asimismo, busca identificar las diferencias y similitudes en los patrones de contagio financiero entre índices bursátiles de ambas regiones, basándose en la revisión de literatura existente, modelos de estructuras de dependencia aplicados en crisis financieras previas y las experiencias observadas en otros países.

3. Objetivos

3.1. Objetivo General

Analizar el fenómeno de *contagio financiero*, en el contexto de la Crisis Global 2020, focalizándose en índices IPSA (Chile) y SP500 (Estados Unidos), además de 8 índices bursátiles a nivel mundial, con datos del 2012 al 2023, buscando estudiar y evidenciar vínculos entre mercados con la finalidad de proponer estrategias de diversificación y mitigación de riesgos para inversores.

3.2. Objetivos Específicos

Identificar y analizar los modelos de series de retornos temporales a partir del precio de cierre de los índices bursátiles, mediante modelos *Switching-ARCH* y pruebas estadísticas durante el período de pandemia.

Comparar las dependencias dinámicas entre los índices bursátiles involucrados utilizando en modelos de cópulas dinámicas ajustadas a los residuales estandarizados del modelo *SWARCH*, con el objetivo de detectar cambios estructurales en la volatilidad y correlación de los mercados en diferentes regímenes de volatilidad durante la crisis sanitaria global.

Evaluar el efecto del contagio financiero en los mercados globales, proponiendo estrategias de gestión de riesgos para el portafolio con tal de mitigar los impactos de eventos extremos, considerando la pandemia como un ejemplo de choque externo significativo en la interconexión de los mercados.

4. Marco teórico

4.1. Concepto de globalización

De acuerdo con Al-Rodhan, la globalización puede definirse como “un proceso que abarca las causas, curso y consecuencias de la integración transnacional y transcultural de actividades humanas y no humanas” (Al-Rodhan, 2006). La globalización implica la creación de interconexiones y flujos no solo entre diferentes naciones y sus fronteras, sino también entre diversas regiones del mundo, continentes y culturas.

La globalización se inicia desde hace milenios, pero ha cobrado fuerza desde 1991 tras el colapso de la Unión Soviética, lo que implica la interconexión transfronteriza de diversos elementos como el capital, el trabajo, la gestión, las noticias, las imágenes y los datos (Tehrani, 1998). Sus impulsores principales son las corporaciones y medios de comunicación transnacionales, así como diversas organizaciones intergubernamentales, no gubernamentales y alternativas. Desde una perspectiva humanista, la globalización tiene efectos ambivalentes, influyendo tanto en la ampliación como en la reducción de las brechas económicas, políticas y culturales entre naciones y dentro de ellas.

Con respecto a los inicios de la globalización, existen distintas teorías, de las cuales algunas no reconocen formas incipientes de globalización en los contactos interregionales tempranos en la historia humana (Stearns, 2017). Las conexiones comerciales y otros intercambios desde épocas antiguas son los primeros patrones de comercio, pero Peter Stearns anuncia que reconocer la globalización desde ahí es arriesgar la pérdida de su significado. Sin embargo, describe que estos intercambios tempranos antes del año 1000 EC son telón de fondo para cambios más decisivos en los contactos humanos.

Se sostiene que la historia mundial puede considerarse en su totalidad como una progresión hacia la mayor integración y globalización de los sistemas sociales. En base a lo anterior para comprender verdaderamente la globalización, es crucial examinar su evolución a lo largo del tiempo, identificando tendencias, hitos importantes y variaciones a través del uso de una línea temporal, permitiendo entender los niveles de impacto en la sociedad y una vista panorámica de su desarrollo histórico.

La primera instancia en que la globalización experimentó un aumento significativo fue durante finales del siglo XV y principios del XVI hasta finales del XVIII. Uno de los eventos clave de esta época fue el descubrimiento de América del Norte por parte de Colón en 1492, aunque ya había comunidades de pescadores de Escandinavia y del País Vasco en la parte norte del continente, el descubrimiento de Colón marcó el comienzo del colonialismo, que tuvo repercusiones políticas, sociales y económicas duraderas, especialmente en los continentes africano y asiático. Mientras que el segundo evento clave, entre los años 1500 y 1799, fue cuando el comercio internacional experimentó una tasa de crecimiento promedio anual del 1.06 por ciento, un aumento notable nunca visto, el cual resultó del descubrimiento de las islas del Caribe y los recursos de América del Norte, así como al desarrollo tecnológico que permitió la expansión de las rutas comerciales.

La segunda instancia fue durante la Revolución Industrial, que ocurrió a finales del siglo XVIII y principios del XIX, donde la introducción de nuevas tecnologías como la máquina de vapor y el barco de vapor permitió una mayor conectividad global y transformó radicalmente la producción industrial. Esto marcó un cambio significativo en la forma en que se producían bienes y en cómo se organizaba el trabajo, sentando así las bases para la industrialización moderna.

Existen otros autores, como Abu-Lughod, que afirman que la invención del dinero y el crédito fue un factor determinante en el desarrollo del mundo del comercio para la globalización,

especialmente en el contexto de la globalización. Según Abu-Lughod: “antes de la existencia de sistemas monetarios y mecanismos de crédito, el intercambio de bienes y servicios se limitaba a transacciones directas o al trueque, lo que dificultaba el comercio a larga distancia”. Sin embargo, con la introducción del dinero, que facilitaba el intercambio indirecto de bienes y servicios, y el crédito, que permitía diferir los pagos y ampliar las posibilidades comerciales, se abrieron nuevas oportunidades para la expansión del comercio (Abu-Lughod, 1991).

La disponibilidad de moneda y crédito facilitó la realización de transacciones comerciales a larga distancia, lo que llevó al surgimiento de sistemas monetarios estandarizados, respaldados por estados o instituciones confiables. Este contexto histórico de crecimiento de las redes comerciales globales proporcionó el escenario inicial para el surgimiento de lo que hoy conocemos como globalización económica.

El análisis escéptico sobre la globalización económica destaca la tendencia hacia la concentración de la actividad económica mundial en tres bloques principales: Europa, Asia-Pacífico y las Américas (Lloyd, 1992). En contraste con la idea de una era de globalización económica, se sostiene que el presente se caracteriza por la creciente segmentación de la economía mundial en zonas regionales dominadas por fuerzas mercantilistas de competencia económica y rivalidad nacional (Held y McGrew, 2003).

La globalización económica, según Zürn, ha trascendido el alcance regulatorio de los gobiernos nacionales, mientras que, al mismo tiempo, las instituciones multilaterales existentes de gobernanza económica global tienen una autoridad limitada debido a la reticencia de los estados a cederles poder (Zürn, 1995). Desde esta perspectiva, se sostiene que los gobiernos no tienen más opción que adaptarse a las fuerzas de la globalización económica.

Por otro lado, las instituciones multilaterales de gobernanza económica global, como el

FMI, el Banco Mundial y la OMC, se han convertido en agentes del capital global y de los estados del G7. Estas instituciones, en lugar de regular la globalización económica, parecen nutrir y reproducir las fuerzas de esta, actuando como entes disciplinarios de la “civilización del mercado global”.

La globalización económica ha llevado a una profunda integración de los gobiernos nacionales en un sistema de gobernanza económica multinivel. Para algunos globalistas, los estados-nación se perciben cada vez más como modos de organización y regulación económica transitorios, incapaces de gestionar eficazmente sus propias economías nacionales en una era de mercados globales (Ömae y Ohmae, 1995). Esta situación ha llevado a los gobiernos nacionales de todo el mundo a adoptar estrategias económicas cada vez más similares, principalmente de corte neoliberal, que promueven la disciplina financiera, el gobierno limitado y una gestión económica sólida.

4.2. Relación entre globalización y el concepto de contagio

La globalización ha dado lugar a una integración sin precedentes de los mercados financieros a nivel mundial. Esta integración, impulsada por la liberalización del comercio y la inversión, la innovación tecnológica y la expansión de las comunicaciones, ha creado un sistema financiero global interconectado. En este contexto, el contagio financiero se refiere a la propagación rápida y amplia de crisis financieras entre países y mercados. Según Claessens y Forbes, el contagio financiero puede ser entendido como el “incremento significativo en la probabilidad de que una crisis en un país afecte a otros” (Claessens y Forbes, 2001). La interconexión financiera global permite que eventos adversos en una economía, como la quiebra de una institución financiera importante o una devaluación significativa de la moneda, se propaguen rápidamente a otras economías debido a

las estrechas relaciones comerciales y financieras.

El fenómeno del contagio financiero se ha vuelto más pronunciado en el marco de la globalización económica debido a varios factores. Primero, la interdependencia de los mercados de capital y la alta movilidad del capital financiero han permitido que los shocks financieros se transmitan rápidamente a través de las fronteras (Eichengreen *et al.*, 1996). Segundo, la homogeneización de políticas económicas y la adopción de prácticas financieras similares entre países, como resultado de la influencia de instituciones financieras internacionales y la competencia económica, han reducido la capacidad de los países para aislarse de las crisis externas (Kaminsky *et al.*, 2003). Por ejemplo, la crisis financiera asiática de 1997 y la crisis financiera global de 2008 son ejemplos emblemáticos de cómo los problemas financieros en un grupo de países pueden extenderse rápidamente a nivel mundial, afectando tanto a economías desarrolladas como en desarrollo (Radelet y Sachs, 1998; Stiglitz, 2010).

De este modo, la relación entre globalización y contagio financiero pone de relieve los riesgos inherentes a un sistema financiero altamente interconectado y la necesidad de una mayor cooperación internacional para gestionar y mitigar los efectos de tales crisis. Además, resalta la importancia de desarrollar mecanismos de regulación y supervisión financiera más robustos a nivel global, para prevenir y controlar el contagio financiero, protegiendo así la estabilidad económica mundial (Obstfeld, 2009).

4.3. Definición de contagio financiero

El concepto de contagio financiero se refiere a la propagación de perturbaciones financieras de un mercado o país a otros, especialmente durante períodos de crisis. Este fenómeno ha sido

objeto de estudio por numerosos economistas y académicos, quienes han desarrollado diversas definiciones y enfoques para comprender su naturaleza y mecanismos.

King y Wadhwani definen el contagio financiero como la transmisión de shocks económicos a través de canales reales y financieros entre países, subrayando la interdependencia de los mercados globales. Según ellos, “la correlación de los retornos del mercado de valores aumenta significativamente durante las crisis, lo que sugiere una fuerte propagación de los efectos negativos” (King y Wadhwani, 1990).

Masson clasifica el contagio en tres categorías: efectos de spillover, efectos de pánico y cambios en los fundamentos económicos. Los efectos de *spillover* ocurren cuando los shocks económicos se transmiten a otros países debido a la interconexión comercial y financiera. Los efectos de pánico se producen cuando los inversores reaccionan de manera exagerada a una crisis en un país, retirando sus inversiones de otros países percibidos como vulnerables. Finalmente, los cambios en los fundamentos económicos implican que los shocks pueden desencadenar ajustes en las políticas económicas y financieras de otros países (Masson, 1999).

Kaminsky, Reinhart y Végh destacan el papel de las redes financieras globales en la propagación de crisis, argumentando que “los vínculos financieros y comerciales profundos entre países facilitan la rápida transmisión de shocks financieros” (Kaminsky *et al.*, 2003). Su investigación muestra cómo la globalización ha intensificado el riesgo de contagio financiero, ya que las crisis en un país pueden tener repercusiones globales debido a la interdependencia de los mercados.

Por otro lado, Dornbusch, Park y Claessens sugieren que el contagio financiero puede ser explicado por comportamientos de mercado y factores psicológicos, como el efecto de manada y la sobre-reacción de los inversores. Según ellos, “los inversores tienden a seguir las acciones de otros durante las crisis, lo que amplifica la transmisión de shocks” (Dornbusch *et al.*, 2000).

Con base en estas diferentes perspectivas, este estudio adoptará la definición de contagio financiero propuesta por Forbes y Rigobon. Según estos autores, el contagio financiero se define como “un aumento significativo de los vínculos entre los mercados después de un choque a un país” (Forbes y Rigobon, 2002). Esta definición es particularmente útil porque captura tanto la dimensión cuantitativa como cualitativa del fenómeno, permitiendo una comprensión más precisa de cómo y por qué los shocks financieros se propagan entre mercados globales.

4.4. Teorías económicas de contagio financiero

Las teorías económicas del contagio financiero se centran en explicar cómo los shocks en un mercado pueden transmitirse a otros mercados, generando efectos negativos en cascada. Estas teorías abordan distintos mecanismos y escenarios de transmisión del contagio financiero, destacando la complejidad y la interconexión de los mercados globales.

Uno de los enfoques más básicos en el estudio del contagio financiero son los modelos de transmisión directa, que se centran en los vínculos financieros y comerciales entre países. Según Dornbusch *et al.* (2000), los *spillovers* ocurren cuando un shock en un país afecta directamente a sus socios comerciales, quienes a su vez transmiten el shock a otros países. Este mecanismo se ha observado en varias crisis financieras, incluyendo la crisis asiática de 1997 y la crisis financiera global de 2008 (Dornbusch *et al.*, 2000). Durante la crisis asiática de 1997, el índice *Nikkei 225* de Japón cayó un 24 % en el transcurso de un año, y el *Hang Seng* de Hong Kong experimentó una caída del 35 %, demostrando el impacto global de los *spillovers*.

La teoría de la información asimétrica postula que el contagio financiero puede ser exacerbado por la falta de información completa y precisa entre los inversores. Calvo y Mendoza

argumentan que, en situaciones de crisis, los inversores suelen reaccionar de manera exagerada debido a la incertidumbre y la falta de información, lo que lleva a una retirada masiva de capitales. Este comportamiento puede tener un efecto domino, afectando a otros mercados que no están directamente relacionados con el origen del shock (Calvo y Mendoza, 2000). Por ejemplo, durante la crisis financiera global de 2008, el índice S&P 500 de Estados Unidos cayó un 38.5 % en 2008, mientras que el FTSE 100 del Reino Unido bajó un 31.3 %, reflejando el impacto inmediato de la retirada de capitales por parte de los inversores.

Otro enfoque importante en el estudio del contagio financiero son los modelos de redes financieras. Allen y Gale desarrollaron un modelo que muestra cómo la estructura de la red financiera global puede amplificar los shocks financieros. Argumentan que la interconexión de los mercados financieros a través de una red de préstamos interbancarios puede propagar rápidamente los shocks a través de la red global. Este enfoque destaca la importancia de la interconexión financiera en la propagación del contagio (Allen y Gale, 2000). Durante la crisis de Lehman Brothers en 2008, las repercusiones se sintieron ampliamente en los mercados globales, con el DAX alemán cayendo un 40.4 % en el mismo año, lo que evidencia cómo los shocks pueden transmitirse rápidamente a través de las redes financieras.

La teoría de las expectativas y coordinación sugiere que las crisis financieras pueden ser el resultado de problemas de coordinación entre los inversores. Morris y Shin argumentan que la falta de coordinación puede llevar a una retirada simultánea de inversiones, incluso si los fundamentos económicos de los países afectados no justifican tal reacción. Este enfoque destaca el papel de las expectativas y la psicología en la propagación de crisis (Morris y Shin, 2004). En la crisis de deuda soberana europea de 2010-2012, los índices bursátiles de varios países periféricos se vieron fuertemente afectados. El índice IBEX 35 de España cayó un 17 % en 2010, mientras que el FTSE

MIB de Italia se redujo un 13.2 %, demostrando cómo la falta de coordinación y las expectativas negativas pueden agravar las crisis financieras.

Las teorías económicas del contagio financiero ofrecen diversos marcos analíticos para entender cómo y por qué los shocks financieros se propagan entre mercados y países. Desde los *spillovers* y la información asimétrica hasta las redes financieras y las expectativas de los inversores, estas teorías subrayan la complejidad y la interdependencia de los mercados globales. Para este estudio, se utilizará una combinación de estas teorías para analizar el fenómeno del contagio financiero, proporcionando un enfoque integral y multifacético.

4.5. Antecedentes de crisis económicas

Las crisis económicas han sido un fenómeno recurrente a lo largo de la historia, y su estudio es crucial para comprender las dinámicas y vulnerabilidades de los mercados mundiales. Cada crisis económica, aunque única en sus desencadenantes y características, ofrece lecciones valiosas sobre cómo las perturbaciones económicas pueden afectar a las economías globales de manera profunda y duradera.

Uno de los ejemplos más emblemáticos es la Gran Depresión de 1929, que tuvo repercusiones devastadoras en la economía global. La caída del mercado de valores en Estados Unidos desencadenó una cadena de quiebras bancarias, deflación y un desempleo masivo que afectó a múltiples países. Según Bernanke (1983), la Gran Depresión "no solo fue un colapso de la economía estadounidense, sino también un fenómeno global que afectó severamente a las economías de Europa y América Latina".

Otra crisis significativa fue la crisis financiera asiática de 1997. Comenzando en Tailan-

dia con la devaluación del baht, la crisis rápidamente se extendió a otros países asiáticos como Indonesia, Corea del Sur y Malasia. El FMI estimó que el PIB de Indonesia cayó un 13.1 % en 1998, mientras que Corea del Sur y Tailandia vieron descensos del 5.8 % y 10.5 %, respectivamente (International Monetary Fund, 1999). Esta crisis resaltó la vulnerabilidad de las economías emergentes ante la fuga de capitales y la importancia de una gestión prudente de las políticas económicas.

La crisis financiera global de 2008, originada en el mercado de hipotecas subprime de Estados Unidos, es otro ejemplo crucial. La quiebra de Lehman Brothers en septiembre de 2008 marcó el comienzo de una serie de colapsos bancarios y una severa recesión económica global. De acuerdo con Reinhart y Rogoff (2009), "la crisis resultó en una severa contracción global del PIB del 2.1 % en 2009, con una pérdida de empleo masiva y una caída del comercio internacional".

Para ilustrar el impacto de estas crisis en los mercados mundiales, la siguiente Tabla 1 presenta datos estadísticos sobre las caídas del PIB en varios países afectados por estas crisis:

Tabla 1

Caída del Producto Interno Bruto (PIB) en países afectados por las crisis de 1929, 1997 y 2008.

AÑO	CRISIS	PAÍSES PRINCIPALES AFECTADOS	CAÍDA DEL PIB (%)
1929	Gran Depresión	Estados Unidos, Alemania, Reino Unido	-30 % (EE.UU. 1929-1933)
1997	Crisis Financiera Asiática	Indonesia, Corea del Sur, Tailandia	-13.1 % (Indonesia, 1998), -5.8 % (Corea del Sur, 1998), -10.5 % (Tailandia, 1998)
2008	Crisis Financiera Global	Estados Unidos, Reino Unido, Eurozona	-4.2 % (EE. UU., 2009), -4.8 % (Reino Unido, 2009), -4.5 % (Eurozona, 2009)

Nota: Elaboración propia con datos extraídos de autores mencionados anteriormente en el análisis.

Por otro lado, las caídas porcentuales significativas de algunos de los principales índices bursátiles mundiales durante las tres crisis económicas mencionadas anteriormente se tiene lo representado en la Tabla 2. Estas cifras destacan la magnitud del impacto que las crisis económicas pueden tener en los mercados financieros globales (Baker *et al.*, 2020; Albulescu, 2021).

Tabla 2

Impacto de las principales crisis económicas en los índices bursátiles

Año	Crisis	Índice Bursátil	Caída (%)
1929	Gran Depresión	Dow Jones Industrial	-89 %
1997	Crisis Financiera Asiática	Nikkei 225	-50 %
2008	Crisis Financiera Global	S&P500	-57 %

Nota: Elaboración propia con datos extraídos de autores referenciados en el análisis.

La Gran Depresión de 1929, que llevó al Dow Jones Industrial a perder un 89 % de su valor, marcó el inicio de una profunda recesión económica que afectó a millones de personas en todo el mundo. La Crisis Financiera Asiática de 1997 causó una disminución del 50 % en el índice Nikkei 225, reflejando la severa contracción económica en Asia. Finalmente, la Crisis Financiera Global de 2008 resultó en una caída del 57 % en el S&P 500, subrayando la vulnerabilidad del sistema financiero global y desencadenando una recesión económica mundial. Estos eventos ponen de manifiesto cómo las perturbaciones económicas pueden provocar volatilidades extremas en los mercados de valores, afectando no solo a inversores individuales, sino también a la estabilidad económica global.

4.6. Impacto del COVID-19 en la economía global

La pandemia del COVID-19, iniciada en diciembre de 2019 en Wuhan, China, ha tenido efectos profundos en la economía global. A medida que el virus se propagó rápidamente a nivel mundial, las medidas de contención necesarias para limitar su propagación generaron impactos económicos significativos, afectando tanto la oferta como la demanda a través de diversos canales. A diferencia de crisis financieras anteriores, la pandemia de COVID-19 ha demostrado ser única en su impacto debido a la alta interconexión de los mercados globales.

El impacto de la pandemia de COVID-19 en la economía global es extenso y multifacético, afectando tanto a las cadenas de suministro como al crecimiento económico general, marcada por desafíos significativos en las cadenas de suministro, fluctuaciones en los precios de las materias primas y la aparición de nuevas variantes del virus, como la variante Omicron. Las disrupciones en las cadenas de suministro han sido particularmente significativas, evidenciadas por el aumento en los tiempos de entrega de proveedores, lo cual refleja tensiones en las redes de producción global. Estos retrasos han sido más severos en economías avanzadas como Estados Unidos, la zona euro y el Reino Unido, y han impactado de manera destacada sectores como el de equipos tecnológicos y maquinaria.

A pesar de que durante el segundo trimestre del 2020 el Producto Interno Bruto (PIB) experimentó una contracción significativa del 6.9 %, comparada con el mismo período anterior (International Monetary Fund, 2021), en 2021 el PIB global, excluyendo el área del euro, registró un incremento estimado del 6.0 %. Este crecimiento fue impulsado inicialmente por una fuerte demanda reprimida y la reapertura gradual de las economías, aunque fue moderado hacia finales de año debido a los persistentes cuellos de botella en el suministro y el impacto de la inflación en el

poder adquisitivo. La demanda externa en el área del euro experimentó una expansión considerable, estimada en un 8.9 % durante el mismo año, aunque esta cifra fue revisada a la baja respecto a proyecciones anteriores debido a los desafíos logísticos globales que impactaron las importaciones (European Central Bank, 2021).

La inflación también presentó un comportamiento notable en 2021, con una tasa elevada del 4.9 % en noviembre, reflejando un incremento significativo en los precios de la energía, que constituyeron más de la mitad de la inflación total. Los precios del combustible, gas y electricidad vieron aumentos pronunciados, exacerbados por la interrupción en las cadenas de suministro y una oferta limitada frente a una demanda robusta. Este fenómeno inflacionario no solo afectó a los bienes duraderos, sino también a los servicios que empezaban a reabrir tras los confinamientos (European Central Bank, 2021).

En particular, el reporte de Eurosystem señala que las economías avanzadas vieron cómo la inflación del Índice de Precios al Consumidor (IPC) permanecía elevada y superaba consistentemente su promedio histórico durante las últimas dos décadas. Este fenómeno se atribuyó en parte a efectos base positivos resultantes de los niveles de precios suprimidos durante los confinamientos más intensos de la pandemia en 2020 (European Central Bank, 2021).

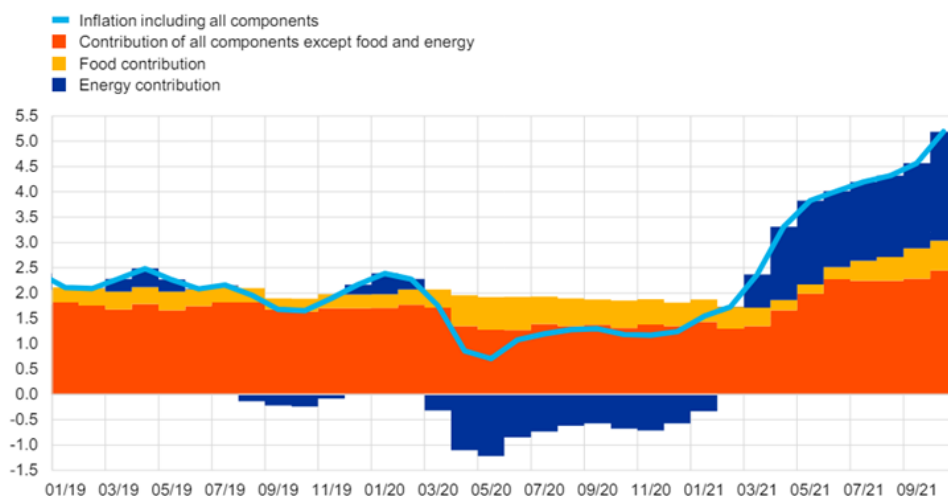
A partir de la Figura 1, en octubre de 2021, la inflación del IPC en los países miembros de la Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) alcanzó un 5.2 %, un aumento desde el 4.6 % registrado en septiembre. Este aumento se vio impulsado principalmente por un alza en los precios de la energía, que alcanzaron el nivel más alto en cuatro décadas, marcando un 24.2 % en términos anuales (European Central Bank, 2021). Además, la inflación básica del IPC de la OCDE, que excluye alimentos y energía, también subió a 3.5 % en octubre desde el 3.2 % del mes anterior, reflejando cómo las presiones inflacionarias se extendieron más allá de los

productos energéticos.

En contraste, en las economías de mercados emergentes (EME), aunque la inflación del IPC también aumentó, los desarrollos fueron más variados y, en promedio, menos pronunciados en comparación con las economías avanzadas. Este contraste subraya cómo los efectos de la pandemia y las respuestas económicas variaron considerablemente entre diferentes regiones y niveles de desarrollo económico.

Figura 1

Inflación incluyendo todos los componentes, contribuciones de los diferentes componentes (excepto alimentos y energía), contribución de alimentos y contribución de energía.

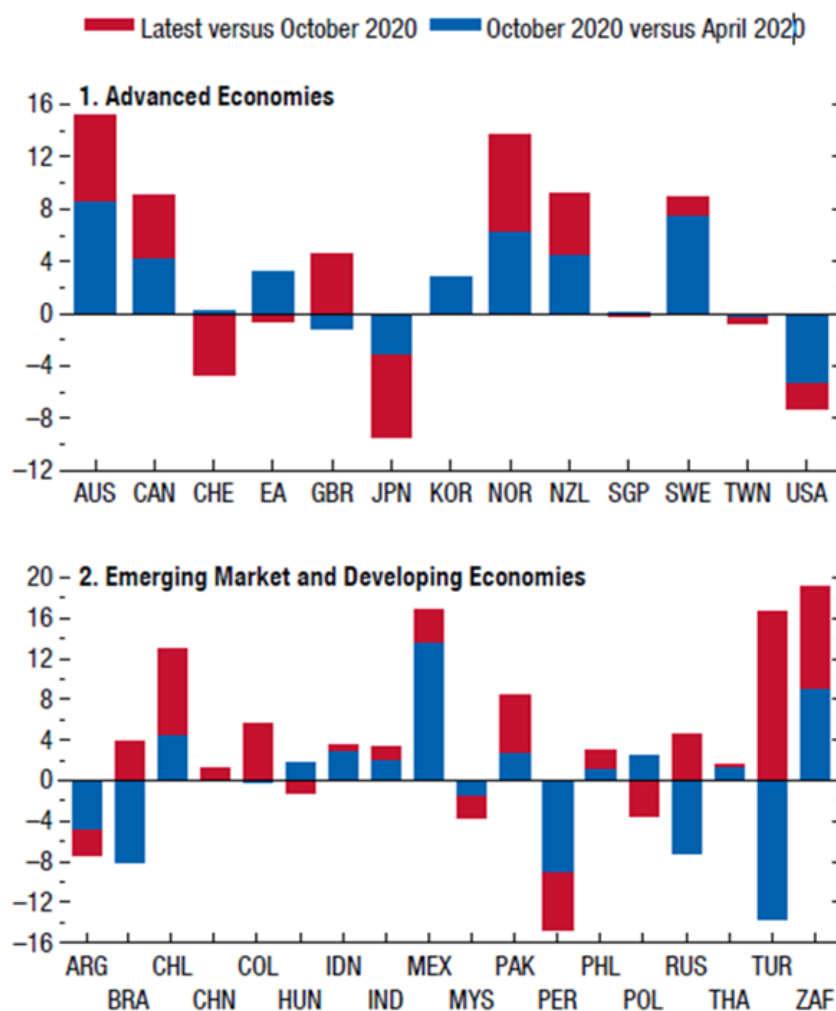


Nota. Gráfico que muestra los cambios porcentuales año tras año y contribuciones en puntos porcentuales. Tomado de Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE), 2021 y cálculos del European Central Bank, 2021, sf.

Los cuellos de botella en la producción, la escasez de mano de obra en ciertos sectores y el aumento de los costos energéticos fueron problemas persistentes que ralentizaron la recuperación en sectores como la manufactura y la construcción, mientras que el sector servicios comenzó a ver una mejora a medida que las grandes economías reabrieron. Sin embargo, estas dificultades se proyectaba que comenzaran a aliviarse durante el año 2022 (European Central Bank, 2021).

Figura 2

Cambios en el tipo de cambio efectivo real, abril de 2020 a marzo de 2021.



Nota. El gráfico indica en porcentaje los movimientos en las principales monedas han reflejado cambios en el sentimiento de riesgo y diferencias en las posturas de política monetaria. El cambio positivo indica apreciación. Los últimos datos disponibles son para 19 de marzo de 2021. EA = zona del euro. Las etiquetas de datos utilizan códigos de país de la Organización Internacional de Normalización (ISO). Tomado de World Economic Outlook: Managing Divergent Recoveries (International Monetary Fund, 2021).

La Figura 2 proporciona en detalle las variaciones en las tasas de cambio efectivas reales entre octubre de 2020 y abril de 2021 para economías avanzadas y economías de mercados emergentes y en desarrollo. Este análisis ofrece una visión de cómo diferentes países han respondido

a la pandemia y a los cambios en las políticas económicas globales, además de cómo han sido afectados por las fluctuaciones en el sentimiento de riesgo global.

En el segmento de las economías avanzadas, en base al Reporte del FMI, se observa una mezcla de apreciaciones y depreciaciones en las monedas. Países como Japón, Noruega y Suecia experimentaron apreciaciones, lo que podría indicar una efectiva respuesta política o una mejora en las perspectivas económicas. En contraste, Estados Unidos muestra una notable depreciación de su moneda, reflejando el relajamiento de su política monetaria y los estímulos fiscales masivos que se introdujeron para mitigar los efectos económicos negativos de la pandemia (International Monetary Fund, 2021).

En cuanto a las economías de mercados emergentes y en desarrollo, las variaciones son más pronunciadas, reflejando mayor volatilidad y diferentes grados de vulnerabilidad a la pandemia y a los cambios en el entorno económico global. Turquía, por ejemplo, muestra una depreciación significativa, posiblemente influenciada por crisis internas y políticas monetarias expansivas que han llevado a presiones inflacionarias. Por otro lado, China y Rusia exhiben apreciaciones considerables, sugiriendo una recuperación económica más robusta y la efectividad de sus políticas durante la crisis (International Monetary Fund, 2021).

Estos movimientos en las tasas de cambio efectivas reales son cruciales para entender las dinámicas económicas globales durante la pandemia, ya que influyen en la competitividad de las exportaciones, la inflación importada y las futuras decisiones de política económica. La depreciación del dólar estadounidense destaca la intensidad de las medidas de estímulo en el país, mientras que las apreciaciones en naciones como China y Rusia podrían indicar fortalezas económicas relativas durante este período turbulento.

Figura 3

Gráficos de series temporales de los índices industriales diarios S&P 500.



Nota. Este gráfico muestra las fluctuaciones diarias de los índices de las industrias del S&P 500 durante el período estudiado. Es útil para visualizar el impacto inicial de la pandemia en los mercados financieros y cómo evolucionaron las volatilidades a lo largo del tiempo. La línea de puntos vertical separa los períodos antes y después de la propagación del COVID-19 en Estados Unidos. Tomado de Lúcio y Caiado, 2022.

El estudio “COVID-19 and Stock Market Volatility: A Clustering Approach for S&P 500 Industry Indices”⁷ realizado por Lúcio y Caiado (2022) investiga cómo la pandemia de COVID-19 ha influido en la volatilidad condicional de diversas industrias dentro del índice S&P 500, tal como indica la Figura 3, utilizando un método innovador de clustering basado en modelos TGARCH (Threshold Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity). A diferencia de estudios anteriores que emplearon modelos estándar como regresión o análisis de datos panel, este estudio propone un enfoque de clustering que captura mejor las estructuras de dependencia en las volatilidades a lo largo del tiempo, lo cual es crucial en contextos de alta incertidumbre como

una pandemia.

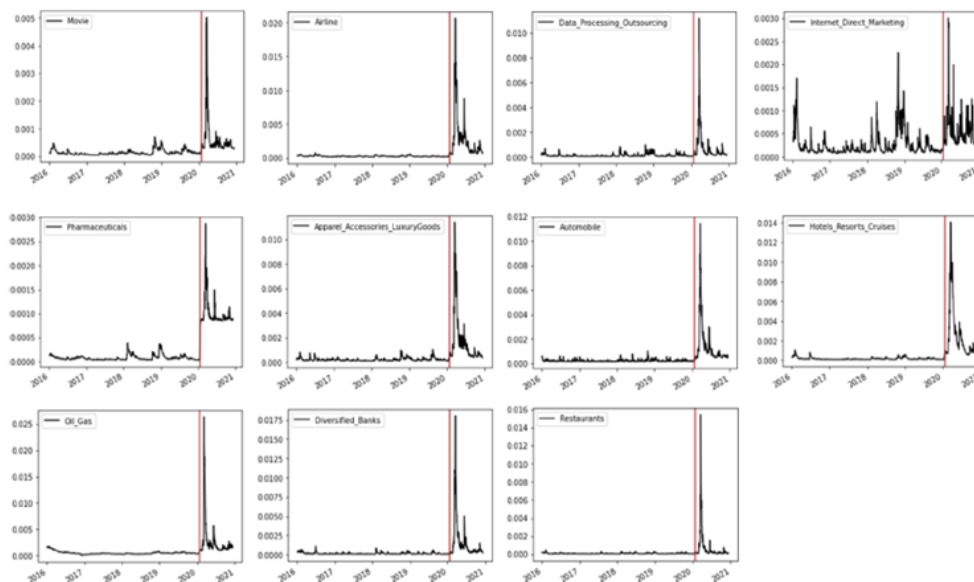
A partir de la Figura 4 el estudio se demuestra que todas las industrias experimentaron un aumento significativo en la volatilidad durante la pandemia, excepto la industria de Retail de Internet y Marketing Directo. Este incremento se refleja claramente en las variaciones de la volatilidad condicional antes y después de la detección del primer caso de COVID-19 en EE.UU (Lúcio y Caiado, 2022).

La metodología empleada incluyó el uso de algoritmos jerárquicos y no jerárquicos para agrupar las industrias en clusters basados en las autocorrelaciones de sus varianzas condicionales. Estos clusters revelaron cambios claros en la composición de las agrupaciones industriales antes y durante la pandemia, lo que indica que la crisis sanitaria global alteró significativamente las dinámicas del mercado (Lúcio y Caiado, 2022).

Por ejemplo, en la Figura 5 se observó que la correlación entre las volatilidades de los fabricantes de automóviles y la industria de exploración y producción de petróleo y gas aumentó de 0.18 a 0.61 durante la pandemia. Este tipo de análisis proporciona una comprensión más profunda de cómo las crisis afectan de manera diferente a distintos sectores económicos, dependiendo de su exposición a los shocks externos (Lúcio y Caiado, 2022).

Figura 4

Gráficos de series temporales de las volatilidades condicionales de los índices industriales S&P 500 de 01/04/2016 al 12/11/2020.

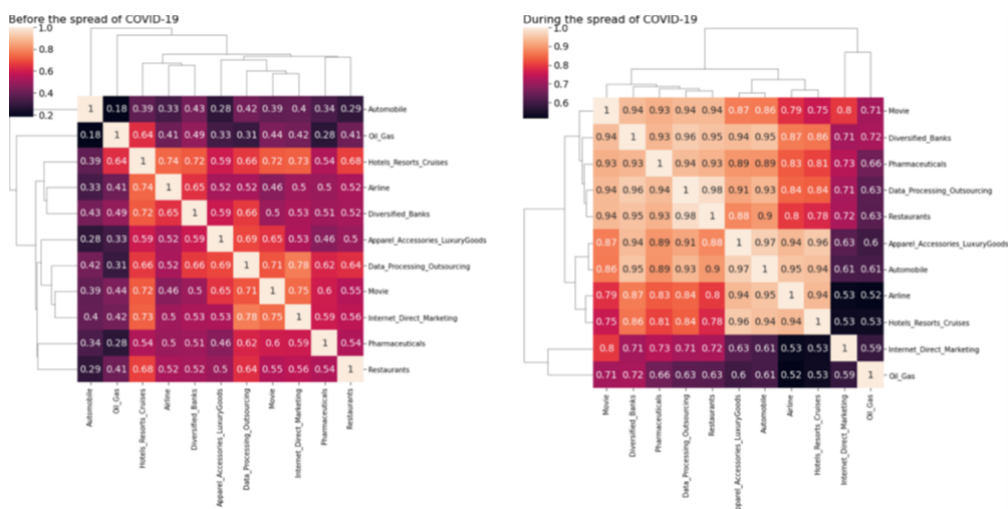


Nota. El gráfico muestra las volatilidades condicionales de las industrias a partir del parsimonioso modelo TGARCH. La línea roja vertical separa el período anterior y posterior al inicio de la pandemia en EE.UU. Tomado de Lúcio y Caiado, 2022.

Este estudio no solo proporciona una visión detallada de cómo la pandemia ha influido en la volatilidad del mercado de acciones de EE.UU., sino que también demuestra la utilidad de las técnicas avanzadas de clustering para analizar series temporales financieras. Los resultados indican que, en períodos de crisis, las correlaciones entre las industrias pueden aumentar significativamente, lo que es crucial para los gestores de riesgos y los inversores al reevaluar las estrategias de diversificación y gestión de riesgos.

Figura 5

Mapa de calor del grupo de las correlaciones de volatilidad condicional para los índices industriales diarios S&P 500 antes y después del COVID-19.



Nota. Los mapas de correlación muestran cómo las relaciones entre las volatilidades de las diferentes industrias se intensificaron o disminuyeron durante la pandemia. Este gráfico es particularmente valioso para discutir cómo la interconexión entre diferentes sectores se vio afectada por la crisis sanitaria global. Tomado de Lúcio y Caiado, 2022.

4.7. Políticas de gestión de riesgos

Durante la pandemia de COVID-19, los países implementaron diversas políticas de gestión de riesgos financieros para enfrentar los impactos económicos adversos y promover una recuperación efectiva. Estas políticas variaron en enfoque y escala, dependiendo de las necesidades específicas y las condiciones económicas de cada nación.

En Estados Unidos, la Reserva Federal tomó medidas decisivas y rápidas al reducir las tasas de interés a casi cero en marzo de 2020, una de las acciones más rápidas en su historia, con el objetivo de aliviar el estrés financiero y mantener el flujo de crédito a hogares y empresas (Sara *et al.*, 2020). Además, la Fed implementó programas de compra de activos a gran escala, incluyendo bonos del Tesoro y valores respaldados por hipotecas. Estas compras ayudaron a inyectar liquidez

en los mercados financieros y apoyaron el funcionamiento eficiente de los mercados durante la crisis, con un incremento aproximado de \$3 billones en su balance en los primeros cinco meses de la pandemia (Central to America's Economy, 2020; Carpenter, 2020).

En Europa, el Banco Central Europeo (BCE) expandió su Programa de Compras de Emergencia Pandémica (PEPP) en junio de 2020, incrementando el total de compras previstas a 1.35 billones de euros. Esta medida fue crucial para asegurar condiciones favorables de financiamiento en todos los sectores y jurisdicciones de la zona euro durante la crisis (European Central Bank, 2021; Jones y Smith, 2020).

Por otro lado, Japón se enfocó en la flexibilización cuantitativa y la expansión de programas de préstamos para apoyar a las empresas afectadas por la pandemia. El Banco de Japón incrementó su compra de activos y proporcionó más apoyo a través de operaciones de préstamo en condiciones favorables para mantener el flujo de crédito a las empresas, especialmente a las pequeñas y medianas empresas (Bank of Japan, 2020; Tanaka, 2021).

Estas políticas no solo buscaban mitigar los efectos inmediatos de la pandemia en los mercados financieros, sino también establecer bases más sólidas para la recuperación económica. La coordinación internacional jugó un papel crucial en la mitigación de los efectos transfronterizos de la pandemia en los mercados financieros y promovió una recuperación resiliente y eficaz a nivel global (International Monetary Fund, 2021).

4.8. Tipos de contagios

4.8.1. Contagio en los retornos

El estudio del contagio en los retornos de los mercados financieros se ha intensificado debido a eventos globales significativos, como la crisis financiera de 2008 y, más recientemente, la pandemia de COVID-19. Estos estudios han aplicado una variedad de modelos econométricos para entender cómo los shocks en un mercado pueden afectar a otros a nivel global.

Durante la crisis financiera de 2008, investigadores como Longstaff (2010) utilizaron modelos de regresión para demostrar cómo las perturbaciones en el mercado de crédito de EE.UU. se transmitieron a otros mercados financieros y economías en todo el mundo. Estos estudios subrayaron la interconexión global de los mercados financieros y cómo los inversores internacionales reaccionan a las incertidumbres en un mercado clave. Longstaff (2010) explicó que las correlaciones entre mercados se intensificaron durante la crisis, reflejando un aumento en el contagio financiero.

Avanzando a la pandemia de COVID-19, investigadores como Brunnermeier y Nagel (2021) aplicaron modelos VAR (Vector Autoregressive) para analizar cómo las noticias sobre la pandemia influían casi instantáneamente en los mercados globales. Estos modelos ayudaron a captar la dinámica de los mercados en tiempos de alta incertidumbre y cómo la información relacionada con la salud pública podría afectar las economías globales (Brunnermeier y Nagel, 2021).

Por otro lado, estudios como los de Forbes y Rigobon (2002) han sido fundamentales para entender la naturaleza del contagio. Ellos introdujeron técnicas que distinguen entre el aumento de la correlación debido a la co-movilidad de los mercados en respuesta a shocks globales comunes y el contagio verdadero, que es un cambio en la forma en que los mercados interactúan después

de un shock (Forbes y Rigobon, 2002). Esta distinción es crucial para desarrollar estrategias de mitigación de riesgos y políticas financieras eficaces.

En conjunto, estos estudios muestran cómo los modelos econométricos avanzados, como los modelos VAR y las técnicas de correlación dinámica, son herramientas indispensables para los analistas financieros y los responsables de la formulación de políticas. Estos métodos permiten a los expertos prever y responder a los efectos del contagio financiero, ayudando a estabilizar los mercados y a preparar mejor a las economías para futuros shocks.

4.8.2. Contagio en las volatilidades

El estudio del contagio en las volatilidades de los mercados financieros ha cobrado especial importancia en períodos de crisis económica global, donde las fluctuaciones en un mercado pueden precipitar una reacción en cadena en otros. Este fenómeno se ha observado repetidamente en eventos económicos significativos, y los modelos econométricos han jugado un papel crucial en la comprensión de estas dinámicas.

Durante la crisis financiera global de 2008, la volatilidad de los mercados financieros se disparó, y los estudios de ese tiempo utilizaron modelos GARCH (*Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*) para analizar la propagación de la volatilidad entre los mercados de crédito y de acciones. Investigadores como Engle (2002), quien desarrolló el modelo ARCH (*Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), proporcionaron la base metodológica para estos análisis, permitiendo entender cómo las innovaciones en un mercado pueden influir en las expectativas y percepciones de riesgo en otros mercados (Engle, 2002).

Con la llegada de la pandemia de COVID-19, la volatilidad del mercado alcanzó niveles sin precedentes, provocando un interés renovado en el estudio del contagio de volatilidades. In-

investigaciones recientes han aplicado variantes del modelo GARCH para capturar la dinámica de la volatilidad durante la pandemia, observando cómo los anuncios relacionados con la salud y las políticas económicas afectaban los mercados globales casi instantáneamente. Estos estudios indican que las respuestas de los mercados a las noticias de COVID-19 no sólo aumentaron la volatilidad interna, sino que también exacerbaron la transmisión de volatilidad entre los mercados internacionales.

La investigación también ha demostrado que las respuestas de política monetaria durante la pandemia, como las intervenciones de los bancos centrales, han tenido un papel ambiguo en la contención de la volatilidad del mercado. Mientras algunos estudios argumentan que estas políticas estabilizaron los mercados, otros sugieren que en ocasiones aumentaron la incertidumbre y la volatilidad del mercado, destacando la complejidad del contagio de volatilidades en un contexto global interconectado (Diebold y Yilmaz, 2014).

4.8.3. Contagio y efectos asimétricos en las correlaciones

El estudio del contagio y los efectos asimétricos en las correlaciones entre mercados financieros ha proporcionado una comprensión valiosa de cómo los shocks financieros impactan a los mercados de manera desigual. Este campo ha utilizado avanzados modelos estadísticos para capturar cómo las correlaciones entre mercados pueden cambiar dinámicamente en respuesta a eventos económicos globales y crisis financieras.

La crisis financiera global de 2008 y la pandemia de COVID-19 han sido períodos críticos para estudiar estos fenómenos. Durante estos eventos, las correlaciones entre los mercados financieros mostraron una marcada asimetría, lo que sugiere que los efectos de contagio no son uniformes y varían según la intensidad y el origen del shock. Los estudios de Cappiello *et al.* (2006)

introdujeron métodos para analizar estas correlaciones dinámicas y destacaron que las correlaciones entre mercados pueden aumentar significativamente durante períodos de alta volatilidad, una señal clara del contagio financiero (Cappiello *et al.*, 2006).

Durante la pandemia de COVID-19, investigadores como Nguyen y Bhattacharai (2021) aplicaron modelos de correlación condicional dinámica para examinar cómo las políticas de confinamiento y los anuncios de vacunas influían en las correlaciones entre los mercados de acciones y bonos. Descubrieron que las correlaciones se intensificaron durante los anuncios de confinamiento y se moderaron con los anuncios de vacunas, reflejando la naturaleza asimétrica del impacto de estas noticias en los diferentes sectores y mercados (Nguyen y Bhattacharai, 2021).

Además, la investigación ha demostrado que la respuesta de las correlaciones a las noticias económicas puede ser inmediata o retrasada, dependiendo de la naturaleza del evento y de las expectativas del mercado. Esto fue evidenciado en trabajos como los de Forbes y Rigobon (2002), quienes argumentaron que las pruebas estándar de contagio pueden estar sesgadas debido a la heterocedasticidad condicional de las volatilidades y propusieron metodologías ajustadas para medir con precisión el contagio real (Forbes y Rigobon, 2002).

5. Metodología

5.1. Procesos estocásticos

Un proceso estocástico se define como una familia de variables aleatorias $\{X_t\}$, donde t representa un parámetro de tiempo que puede ser continuo o discreto. Este concepto modela la evolución de fenómenos aleatorios a lo largo del tiempo, permitiendo analizar su comportamiento y realizar predicciones basadas en probabilidades. Matemáticamente, un proceso estocástico es una colección de funciones medibles $\{X_t(\omega)\}_{t \in T}$, donde ω pertenece a un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ (Doob, 1942).

La evolución de un proceso estocástico se describe mediante su función de distribución conjunta. Para un conjunto finito de tiempos $\{t_1, t_2, \dots, t_n\}$, la distribución conjunta de las variables aleatorias $(X_{t_1}, X_{t_2}, \dots, X_{t_n})$ está determinada por:

$$F(x_1, x_2, \dots, x_n) = P(X_{t_1} \leq x_1, X_{t_2} \leq x_2, \dots, X_{t_n} \leq x_n),$$

donde F es la función de distribución acumulativa conjunta.

Existen ciertos tipos de procesos estocásticos clásicos tales como:

- **Procesos estacionarios:** En estos procesos, las propiedades estadísticas no dependen del tiempo. Si $\{X_t\}$ es estacionario, entonces la función de correlación $\rho(h)$, definida como $\text{Cov}(X_t, X_{t+h})$, solo depende de h , la separación temporal.
- **Procesos de incrementos independientes:** Para un proceso $\{X_t\}$ con incrementos independientes, las diferencias $X_{t_2} - X_{t_1}, X_{t_3} - X_{t_2}, \dots$ son independientes para intervalos no

superpuestos. Un ejemplo típico es el proceso de Poisson.

- **Procesos de Markov:** En este caso, la probabilidad condicional de un estado futuro $\{X_{t+1}\}$ depende únicamente del estado presente X_t , y no de los estados anteriores. Esto se expresa como:

$$P(X_{t+1}|X_t, X_{t-1}, \dots) = P(X_{t+1}|X_t).$$

5.1.1. Series de Tiempo

Un enfoque destacado dentro del análisis de procesos estocásticos es su relación con las *series de tiempo*, donde las observaciones de un proceso aleatorio se registran y analizan en momentos específicos. Las series de tiempo permiten modelar dinámicamente fenómenos estocásticos mediante la identificación de patrones temporales, tendencias y estacionalidades. Este análisis se enriquece al considerar procesos estacionarios y no estacionarios, proporcionando herramientas fundamentales para aplicaciones como la predicción de variables económicas, climatológicas o financieras (Doob, 1942).

En este contexto, una serie de tiempo se define como una colección de observaciones indexadas en el tiempo, generalmente denotadas como $\{y_t\}_{t=1}^T$, donde t indica el momento específico de cada observación y_t . Matemáticamente, una serie de tiempo es una secuencia de valores $\{y_t\}$ registrados en distintos puntos en el tiempo, siendo t típicamente un conjunto de enteros que representan periodos discretos.

Según Hamilton (1994), una serie de tiempo se puede describir también como un segmento finito de una secuencia doblemente infinita, expresada como:

$$\{y_t\}_{t=-\infty}^{\infty} = \{\dots, y_{-1}, y_0, y_1, y_2, \dots, y_T, y_{T+1}, y_{T+2}, \dots\},$$

donde la secuencia $\{y_t\}$ representa una realización del proceso estocástico subyacente (Hamilton, 1994).

Cada observación de la serie de tiempo está asociada a una fecha particular, y es común trabajar con una parte finita de la secuencia completa. Un ejemplo de una serie de tiempo es una tendencia temporal, que se define como:

$$y_t = t,$$

donde el valor de la serie en cada momento t simplemente corresponde al tiempo.

Otro ejemplo importante es el proceso de ruido blanco gaussiano, denotado como:

$$y_t = \epsilon_t,$$

donde $\{\epsilon_t\}$ es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas, con una distribución $N(0, \sigma^2)$ (Hamilton, 1994). Este proceso se utiliza frecuentemente como base para modelar series de tiempo, ya que presenta propiedades estadísticas que permiten evaluar la independencia temporal.

En términos de operadores, las series de tiempo también se pueden describir mediante operadores de retardo. Por ejemplo, el operador de retardo L se aplica a una serie $\{y_t\}$ para desplazarla en el tiempo, de modo que:

$$Ly_t = y_{t-1},$$

lo cual se describe como la aplicación del operador de retardo sobre la serie (Hamilton, 1994). Estos operadores permiten describir de forma compacta las relaciones entre observaciones consecutivas de una serie de tiempo, facilitando el análisis y la modelización de dependencias temporales.

5.1.2. Ergodicidad en Media y Varianza

La ergodicidad es una propiedad fundamental para el análisis de series de tiempo, ya que asegura que las propiedades estadísticas calculadas a partir de una única realización sean representativas del proceso estocástico completo. Un proceso se considera ergódico si las propiedades estimadas a partir de una única realización tienden a coincidir con las propiedades esperadas del conjunto de realizaciones cuando el número de observaciones tiende a infinito.

- **Ergodicidad en Media:** La ergodicidad en media se define formalmente de la siguiente manera:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left(\left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T X_t - \mu \right| \right) = 0,$$

donde μ es la media del proceso (Hamilton, 1994). Esto implica que, si un proceso es ergódico en media, la media muestral convergerá a la media verdadera del proceso conforme aumente el número de observaciones.

- **Ergodicidad en Varianza:** La ergodicidad en varianza se refiere a la convergencia de la varianza muestral a la varianza verdadera del proceso. Formalmente, un proceso es ergódico en varianza si:

$$\lim_{T \rightarrow \infty} E \left(\left| \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (X_t - \mu)^2 - \sigma^2 \right| \right) = 0,$$

donde σ^2 es la varianza del proceso. Esta propiedad asegura que las fluctuaciones en la media muestral disminuyen conforme aumenta el tamaño de la muestra, permitiendo una estimación precisa de la varianza.

5.1.3. Estacionariedad

Según Kirchgässner y Wolters (2007), un proceso estocástico debe estar en equilibrio estadístico para ser ergódico, lo cual implica necesariamente que sea estacionario. En el análisis de series de tiempo, la estacionariedad se refiere a la constancia de las propiedades estadísticas, tales como la media, la varianza y las autocovarianzas, a lo largo del tiempo, lo que permite asumir que las características observadas en un subconjunto de la serie son representativas del comportamiento general del proceso. Así, la estacionariedad garantiza que los modelos estadísticos generen predicciones confiables y, en consecuencia, que la ergodicidad asegure que, con un horizonte temporal suficientemente extenso, las propiedades estadísticas muestrales converjan hacia las propiedades poblacionales subyacentes, permitiendo realizar inferencias robustas a partir de las observaciones disponibles.

La estacionariedad en series de tiempo puede ser clasificada principalmente en dos tipos: **estacionariedad estricta** y **covarianza-estacionariedad** o **estacionariedad débil**. Ambos conceptos se abordan en los textos de Hamilton (1994) y Arratia (2014), y se presentan de manera formal a continuación.

Estacionariedad Estricta: Un proceso estocástico $\{Y_t\}$ se considera estrictamente estacionario si para cualquier conjunto finito de tiempos $\{t_1, t_2, \dots, t_k\}$ y cualquier desplazamiento temporal $h \in Z$, la distribución conjunta de $(Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_k})$ es idéntica a la distribución conjunta de $(Y_{t_1+h}, Y_{t_2+h}, \dots, Y_{t_k+h})$. Formalmente, esto se expresa como:

$$F_{Y_{t_1}, Y_{t_2}, \dots, Y_{t_k}}(y_1, y_2, \dots, y_k) = F_{Y_{t_1+h}, Y_{t_2+h}, \dots, Y_{t_k+h}}(y_1, y_2, \dots, y_k), \quad (1)$$

para todo $t_1, t_2, \dots, t_k$ y cualquier h (Hamilton, 1994). Este tipo de estacionariedad implica que todas las propiedades estadísticas del proceso son invariantes frente a un desplazamiento temporal, lo cual incluye tanto los momentos de primer y segundo orden como todos los momentos superiores.

Covarianza-Estacionariedad: Por otro lado, el concepto de covarianza-estacionariedad, también denominado **estacionariedad débil**, es menos restrictivo que la estacionariedad estricta, ya que se enfoca únicamente en los momentos de primer y segundo orden del proceso estocástico. Un proceso $\{Y_t\}$ se considera covarianza-estacionario si cumple con las siguientes condiciones (Hamilton, 1994; Arratia, 2014):

1. La **media** del proceso es constante e independiente del tiempo:

$$E(Y_t) = \mu, \quad \forall t. \quad (2)$$

2. La **varianza** del proceso es finita y constante:

$$\text{Var}(Y_t) = E[(Y_t - \mu)^2] = \sigma^2, \quad \forall t. \quad (3)$$

3. La **covarianza** entre Y_t y Y_{t+h} depende únicamente del desfase h y no de los tiempos específicos t y $t + h$:

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = \gamma_h = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+h} - \mu)], \quad \forall t, h. \quad (4)$$

Para un proceso covarianza-estacionario, la covarianza γ_h se denomina **autocovarianza** de desfase h . Esta propiedad implica que las dependencias entre los valores del proceso solo dependen de la distancia temporal entre ellos y no del momento específico en el tiempo en el cual se encuentran.

Un proceso estrictamente estacionario que tiene varianza finita también es covarianza-estacionario (Hamilton, 1994). No obstante, la recíproca no siempre es cierta. Un proceso puede ser covarianza-estacionario sin ser estrictamente estacionario; por ejemplo, si un proceso tiene una media constante y autocovarianzas constantes que cumplen con las condiciones mencionadas anteriormente, pero posee momentos superiores que dependen del tiempo, entonces dicho proceso sería covarianza-estacionario, pero no estrictamente estacionario (Arratia, 2014).

5.1.4. Función de autocovarianza

La **autocovarianza** es una medida fundamental en el análisis de series de tiempo que describe el grado de dependencia lineal entre los valores de una serie en diferentes puntos temporales, evaluando la relación entre un valor del proceso estocástico y su correspondiente valor desplazado en el tiempo. Esta medida resulta esencial para modelar de manera adecuada las dinámicas subyacentes de un proceso estocástico, permitiendo capturar la estructura temporal de dependencia entre las observaciones (Arratia, 2014).

Formalmente, la autocovarianza de un proceso estocástico $\{Y_t\}$, para un desfase h , se define según James D. Hamilton (1994) como:

$$\gamma_h = \text{Cov}(Y_t, Y_{t+h}) = E[(Y_t - \mu)(Y_{t+h} - \mu)], \quad (5)$$

donde Cov representa la covarianza entre dos valores de la serie en diferentes instantes de tiempo y μ es la media del proceso.

De acuerdo con Hamilton (1994), la autocovarianza es un momento de segundo orden que se utiliza para describir la estructura de dependencia temporal de un proceso. En esta línea, Arratia (2014) indica que la autocovarianza puede interpretarse como la covarianza entre una variable y una versión rezagada de sí misma, lo cual es fundamental para cuantificar el “co-movimiento” en series temporales. Asimismo, Kirchgässner y Wolters (2007) destacan que la autocovarianza sirve como herramienta para inferir la relación entre diferentes instantes de un proceso estocástico, especialmente cuando se dispone de una única realización de la serie, lo que implica asumir que tanto la media como la varianza permanecen constantes a lo largo del tiempo.

5.1.5. Autocorrelación parcial

La **autocorrelación parcial** es una medida esencial en el análisis de series temporales que cuantifica la relación lineal entre un valor de la serie y un valor desfase h , eliminando el efecto de las observaciones intermedias. Formalmente, la autocorrelación parcial de orden h , denotada como $\alpha_h^{(h)}$, mide la correlación entre Y_t y Y_{t+h} , después de descontar los efectos lineales de las observaciones intermedias $Y_{t+1}, \dots, Y_{t+h-1}$. Esto permite capturar únicamente la dependencia directa entre dos puntos de la serie, eliminando la influencia de los valores intermedios, lo cual es crucial para identificar estructuras autorregresivas en los datos (Hamilton, 1994; Dürre *et al.*, 2015).

La autocorrelación parcial se puede obtener mediante un modelo autorregresivo de orden m , donde se estima la relación lineal de Y_t sobre sus m valores más recientes. Matemáticamente, la proyección de Y_{t+1} sobre $Y_t, Y_{t-1}, \dots, Y_{t-m+1}$ se expresa como:

$$Y_{t+1} - \mu = \alpha_1^{(m)}(Y_t - \mu) + \alpha_2^{(m)}(Y_{t-1} - \mu) + \cdots + \alpha_m^{(m)}(Y_{t-m+1} - \mu), \quad (6)$$

donde μ es la media del proceso y los coeficientes $\alpha_h^{(m)}$ representan la autocorrelación parcial de orden h (Hamilton, 1994).

En términos de identificación de modelos ARMA, la autocorrelación parcial es especialmente útil, ya que permite determinar el orden p de un modelo autorregresivo (AR). Si un proceso es $AR(p)$, la autocorrelación parcial será significativa hasta el desfase p , y para valores superiores tenderá a cero. Esto se debe a que, en un proceso $AR(p)$, solo los p valores más recientes son relevantes para la predicción, mientras que las correlaciones de mayor orden dejan de ser significativas:

$$\alpha_m^{(m)} = 0, \quad \text{para } m = p + 1, p + 2, \dots \quad (7)$$

Por otro lado, en procesos de media móvil (MA), la autocorrelación parcial decrece asintóticamente a cero conforme aumenta el desfase h (Dürre *et al.*, 2015).

5.1.6. Ruido Blanco

El **ruido blanco** se define como una secuencia de variables aleatorias que presenta propiedades específicas que lo convierten en un componente fundamental en el análisis de series temporales. En primer lugar, un proceso de ruido blanco se caracteriza por tener media cero y varianza constante y finita σ^2 , lo cual se expresa matemáticamente como:

$$E(e_t) = 0, \quad (8)$$

$$E(e_t^2) = \sigma^2, \quad (9)$$

y además, los términos del proceso están incorrelacionados en el tiempo, lo cual implica que la covarianza entre cualquier par de observaciones en diferentes momentos es igual a cero:

$$E(e_t e_\tau) = 0, \quad \text{para } t \neq \tau. \quad (10)$$

Por otro lado, si además de estar incorrelacionados, los términos del proceso presentan independencia temporal, el proceso se denomina **ruido blanco independiente**. Esta independencia implica que la información contenida en una observación no proporciona información relevante sobre cualquier otra observación del proceso, garantizando así que no exista una dependencia sistemática entre las observaciones:

$$e_t, e_\tau \quad \text{independientes para } t \neq \tau. \quad (11)$$

Finalmente, si un proceso de ruido blanco independiente sigue una distribución normal con media cero y varianza constante, se clasifica como un **ruido blanco gaussiano**. Esto se expresa como:

$$e_t \sim N(0, \sigma^2). \quad (12)$$

Este tipo de proceso es particularmente importante debido a que la normalidad facilita la aplicación de herramientas analíticas y la obtención de resultados exactos, proporcionando una base sólida para el análisis estadístico en series temporales (Hamilton, 1994).

5.1.7. Proceso predictable

El teorema del proceso predictable y estacionario establece una relación fundamental entre la predictibilidad de un proceso estocástico y su estructura espectral, señalando que un proceso es **predictible** si puede representarse como una combinación lineal de sus valores pasados. Esto implica que es posible anticipar los valores futuros del proceso a partir de sus observaciones anteriores, sin incurrir en errores en dicha predicción. En términos matemáticos, un proceso $\{x[n]\}$ se considera predictable si existe un conjunto de constantes $\{a_k\}$ que satisfagan la siguiente relación:

$$x[n] = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x[n - k], \quad (13)$$

donde $x[n]$ es el valor actual del proceso y a_k son los coeficientes que ponderan los valores pasados $x[n - k]$. Esta combinación lineal permite predecir el valor actual a partir de sus observaciones pasadas. Para que el proceso sea completamente predictable, el error de predicción en media cuadrática (MS) debe anularse, es decir:

$$P = E(e^2[n]) = 0, \quad (14)$$

donde $e[n]$ representa el error de predicción, definido como la diferencia entre el valor observado $x[n]$ y el valor predicho a partir de los valores pasados. La condición $P = 0$ garantiza que no haya error al predecir el valor de $x[n]$, lo cual implica que la información contenida en los valores pasados es suficiente para describir el comportamiento futuro del proceso.

Según el teorema presentado por Papoulis (1985), un proceso estocástico es predictable si, y solo si, su espectro está compuesto únicamente por líneas, lo que implica que tiene componentes

espectrales discretas. Formalmente, el espectro de un proceso predecible está dado por:

$$S(\omega) = \sum_i a_i \delta(\omega - \omega_i), \quad (15)$$

donde $S(\omega)$ es la densidad espectral de potencia del proceso, $\delta(\omega - \omega_i)$ es la función delta de Dirac que indica que la energía del proceso está concentrada en frecuencias discretas, y a_i son coeficientes que determinan la magnitud de cada componente espectral. Esta característica indica que el proceso predecible posee únicamente componentes espectrales en frecuencias específicas, lo cual facilita la modelización y predicción del proceso.

En relación con la estacionariedad, un proceso predecible también debe ser **estacionario**, lo que significa que sus propiedades estadísticas, como la media y la varianza, son constantes a lo largo del tiempo. La predictibilidad depende directamente de la constancia de estas propiedades, ya que solo en procesos estacionarios es posible predecir con exactitud, dado que el comportamiento estadístico no cambia con el tiempo. De esta forma, un proceso predecible tiene una estructura estable en el dominio de las frecuencias, lo cual permite su modelado a partir de las observaciones pasadas sin que existan cambios significativos en su comportamiento a medida que evoluciona temporalmente.

Finalmente, la predictibilidad y la estacionariedad están estrechamente relacionadas con la descomposición espectral de los procesos estocásticos, ya que únicamente aquellos procesos que poseen componentes espectrales discretas pueden considerarse completamente predecibles.

5.1.8. Pruebas estadísticas

■ Test de raíz unitaria:

Dado que un proceso predecible depende de su capacidad para representar los valores futuros mediante una combinación lineal de sus valores pasados, resulta esencial verificar la estacionariedad de la serie temporal. Para ello, el **test de raíz unitaria** es una herramienta crucial que permite determinar si la serie presenta una raíz unitaria; esto indicaría que no es estacionaria y tiene una tendencia estocástica, lo cual implica que sus propiedades estadísticas, como la media y la varianza, no son constantes en el tiempo, dificultando así el uso de métodos que asumen estacionariedad.

Matemáticamente, se considera una serie temporal y_t que sigue el siguiente modelo autorregresivo:

$$y_t = \rho y_{t-1} + \epsilon_t, \quad t = 1, 2, \dots, T, \quad (16)$$

donde ρ es el coeficiente autorregresivo y ϵ_t es un término de error con media cero y varianza constante. El objetivo del test de raíz unitaria es evaluar la hipótesis nula (H_0) de que el proceso tiene una raíz unitaria:

$$H_0 : \rho = 1, \quad (17)$$

lo cual indica que la serie y_t es no estacionaria. Por otro lado, la hipótesis alternativa (H_1) establece que:

$$H_1 : |\rho| < 1, \quad (18)$$

lo cual implica que la serie es estacionaria, ya sea alrededor de una tendencia determinista

o sin tendencia. Para evaluar estas hipótesis, se puede reescribir el modelo de la siguiente manera:

$$\Delta y_t = (\rho - 1)y_{t-1} + \epsilon_t = \delta y_{t-1} + \epsilon_t, \quad (19)$$

donde $\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$ representa la primera diferencia de la serie y $\delta = \rho - 1$. En este contexto, la hipótesis nula se convierte en:

$$H_0 : \delta = 0. \quad (20)$$

Si la hipótesis nula es verdadera, la serie presenta una raíz unitaria y, por lo tanto, es no estacionaria; si se rechaza, se concluye que la serie es estacionaria.

El test de Dickey-Fuller es uno de los métodos clásicos para evaluar la presencia de una raíz unitaria y consiste en estimar el modelo reescrito mediante mínimos cuadrados ordinarios (OLS) y evaluar si el coeficiente δ es significativamente distinto de cero. Sin embargo, el **test de Dickey-Fuller aumentado (ADF)**, presentado por Said y Dickey (1984), extiende este enfoque incluyendo retardos adicionales de la variable dependiente para abordar la posible correlación serial en los errores, que puede invalidar las conclusiones del test estándar.

El modelo del test de Dickey-Fuller aumentado se expresa de la siguiente manera:

$$\Delta y_t = \delta y_{t-1} + \sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta y_{t-i} + \epsilon_t, \quad (21)$$

donde los términos $\sum_{i=1}^p \alpha_i \Delta y_{t-i}$ se agregan para capturar las dinámicas autorregresivas adicionales presentes en los errores, asegurando una inferencia más robusta sobre la presencia

de una raíz unitaria.

En el test ADF, la hipótesis nula sigue siendo que $\delta = 0$, lo cual indica la presencia de una raíz unitaria. Si el valor del estadístico ADF cae por debajo de un valor crítico preestablecido, se rechaza la hipótesis nula, concluyendo que la serie es estacionaria. La ventaja del test de Dickey-Fuller aumentado es su capacidad para trabajar con series más complejas, donde los errores presentan correlación serial, facilitando así la correcta identificación de la no estacionariedad, ya sea de origen estocástico o determinista.

■ Prueba de Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva (ARCH):

La prueba de heterocedasticidad condicional autorregresiva (ARCH), desarrollada por Engle *et al.* (1985), es una herramienta fundamental para detectar y modelar la varianza condicional en series temporales financieras y económicas, donde la volatilidad tiende a cambiar a lo largo del tiempo. El objetivo principal del test ARCH es identificar si la varianza de los errores de un modelo de regresión depende de los valores pasados, lo cual sugiere la presencia de heterocedasticidad condicional.

Matemáticamente, un proceso ARCH(p) puede ser descrito como sigue:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2, \quad (22)$$

donde h_t es la varianza condicional en el tiempo t , ϵ_{t-i} son los errores pasados, y $\alpha_0, \alpha_1, \dots, \alpha_p$ son los parámetros a estimar, con $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_i \geq 0$ para $i > 0$. Estos parámetros reflejan cómo la varianza condicional depende de los errores al cuadrado de períodos anteriores (Engle *et al.*, 1985).

Para aplicar el test ARCH, se estima primero el modelo de regresión original mediante Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS). Luego, se realiza una regresión de los residuos al cuadrado sobre sus valores rezagados para verificar si existe heterocedasticidad condicional. La hipótesis nula (H_0) establece que no hay heterocedasticidad condicional, es decir:

$$H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_p = 0, \quad (23)$$

lo cual implica que la varianza de los errores no varía sistemáticamente en el tiempo. Si se rechaza la hipótesis nula, se concluye que existe heterocedasticidad condicional, indicando la presencia de efectos ARCH en los errores (Weiss, 1986).

La función de log-verosimilitud del modelo ARCH se puede definir como:

$$L(\theta) = -\frac{T}{2} \log(2\pi) - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left(\log h_t + \frac{\epsilon_t^2}{h_t} \right), \quad (24)$$

donde θ es el vector de parámetros a estimar y h_t es la varianza condicional en el tiempo t . Estos parámetros se estiman mediante el método de Máxima Verosimilitud, lo cual garantiza la eficiencia asintótica de los estimadores (Engle *et al.*, 1985; Weiss, 1986).

■ Test de Ljung-Box:

La **prueba de Ljung-Box**, desarrollada por Ljung y Box (1978), es una herramienta estadística que extiende el trabajo original de Box y Pierce (1970) para evaluar la autocorrelación en los residuos de un modelo de series temporales. La prueba de Ljung-Box mejora la aproximación del test de Box-Pierce en muestras finitas, proporcionando un criterio más robusto

para determinar la adecuación del modelo. La hipótesis nula (H_0) establece la ausencia de autocorrelación en los residuos hasta un cierto retardo m :

$$H_0 : \rho_1 = \rho_2 = \dots = \rho_m = 0, \quad (25)$$

donde ρ_i es el coeficiente de autocorrelación en el retardo i . La hipótesis nula indica que los residuos son independientes, lo cual es fundamental para garantizar que el modelo captura adecuadamente la dinámica de la serie.

El estadístico de la prueba se define como:

$$Q = T(T+2) \sum_{k=1}^m \frac{\hat{\rho}_k^2}{T-k}, \quad (26)$$

donde T es el tamaño de la muestra, m es el número de retardos considerados, y $\hat{\rho}_k$ es el coeficiente de autocorrelación muestral en el retardo k . El valor de Q se compara con los valores críticos de una distribución χ^2 con m grados de libertad; si Q excede el valor crítico, se rechaza la hipótesis nula, indicando la presencia de autocorrelación significativa en los residuos.

La prueba de Ljung-Box es crucial para validar un modelo de series temporales, ya que identifica patrones en los residuos que el modelo no ha capturado. Si la prueba indica autocorrelación, es necesario ajustar el modelo para eliminar dicha dependencia, mejorando así su capacidad predictiva (Ljung y Box, 1978).

■ Prueba de Jarque-Bera:

El **test de Jarque-Bera** es una prueba estadística diseñada para evaluar si los residuos de un modelo de regresión siguen una distribución normal. Esta prueba, desarrollada por Jarque y Bera (1980), utiliza el procedimiento del multiplicador de Lagrange para derivar un estadístico eficiente que permita evaluar la normalidad, homocedasticidad e independencia serial de los residuos.

La hipótesis nula (H_0) del test establece que los residuos siguen una distribución normal, mientras que la hipótesis alternativa (H_1) indica lo contrario. La prueba se basa en los coeficientes de **asimetría** (S) y **curtosis** (K), que se combinan para construir el estadístico de prueba de Jarque-Bera (JB), definido como:

$$JB = \frac{n}{6} \left(S^2 + \frac{(K - 3)^2}{4} \right), \quad (27)$$

donde n representa el tamaño de la muestra, S mide la simetría de la distribución de los residuos, y K evalúa la concentración de los valores en las colas de la distribución. En una distribución normal, se espera que $S = 0$ y $K = 3$.

El estadístico JB sigue una distribución χ^2 con dos grados de libertad bajo la hipótesis nula. Esta se rechaza si el valor de JB excede el valor crítico de la distribución χ^2 , lo que indicaría que los residuos no siguen una distribución normal.

El test de Jarque-Bera es especialmente útil cuando la normalidad de los residuos es un supuesto clave para la validez de los resultados inferenciales. Al evaluar simultáneamente la asimetría y la curtosis de los residuos, proporciona un diagnóstico integral sobre la adecua-

ción de la distribución de los errores (Jarque y Bera, 1980).

5.1.9. Retornos Financieros

El análisis de series temporales financieras plantea una cuestión fundamental: ¿qué variable modelar? Aunque a primera vista puede parecer razonable enfocarse en los precios de los activos, ya que reflejan directamente su valor de mercado, los retornos financieros representan una alternativa metodológicamente más robusta. Según Gonedes y Dopuch (1974), los retornos constituyen una herramienta más precisa para capturar las preferencias de los agentes en mercados eficientes, en los cuales los precios reflejan de manera inmediata y sin sesgos toda la información relevante.

En comparación con los precios, los retornos ofrecen ventajas significativas que los hacen más adecuados para el análisis financiero. Por un lado, son independientes de la escala, lo que facilita la comparación entre activos denominados en diferentes monedas y permite evaluar la conveniencia de una inversión sin considerar su precio inicial. Esta propiedad resulta particularmente valiosa en contextos internacionales o al gestionar portafolios diversificados (Campbell *et al.*, 1996). Por otro lado, los retornos poseen propiedades estadísticas superiores, como la estacionariedad y la ergodicidad. La estacionariedad garantiza que sus propiedades estadísticas, tales como la media y la varianza, permanezcan constantes a lo largo del tiempo, lo que simplifica tanto su modelado como su análisis. A su vez, la ergodicidad asegura que los resultados obtenidos a partir de una muestra sean representativos del comportamiento general del sistema, reforzando así la validez de los análisis econométricos.

Asimismo, los retornos permiten evaluar con mayor precisión cómo los cambios en las técnicas contables impactan las expectativas de los inversionistas y sus decisiones de asignación de recursos en las empresas. Esta capacidad los convierte en una herramienta clave para conectar

las ganancias contables con las expectativas de flujos de caja futuros y con las distribuciones de probabilidad utilizadas en los mercados financieros. De manera complementaria, estudios como los de Kothari y Zimmerman (1995) resaltan que los modelos basados en retornos presentan menores complicaciones econométricas, como la heterocedasticidad o las especificaciones incorrectas, en comparación con los modelos centrados en precios.

Sin embargo, los retornos no están exentos de limitaciones. Un desafío importante es el sesgo potencial en los coeficientes estimados, el cual puede surgir debido a la anticipación de información futura en los precios actuales. Aunque este problema es relevante, no disminuye las ventajas inherentes de los retornos frente a los precios, especialmente en términos de robustez analítica y capacidad predictiva.

Por tanto, aunque el modelado de precios puede parecer intuitivo, los retornos financieros se posicionan como una alternativa superior debido a sus propiedades estadísticas y metodológicas. Su independencia de escala, estabilidad estadística y menor susceptibilidad a problemas econométricos los convierten en una herramienta clave para comprender y predecir el comportamiento de los mercados financieros, así como para evaluar decisiones en el ámbito de los mercados de capitales.

Dado su papel central en el análisis de mercados, los retornos financieros se definen matemáticamente a partir de los precios de los activos, incorporando, en ocasiones, elementos como los dividendos acumulados. Estas características permiten clasificarlos principalmente en dos categorías: los retornos simples y los retornos logarítmicos, cada uno con aplicaciones específicas que responden a distintos objetivos financieros y analíticos.

El *retorno simple* se expresa mediante la ecuación:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1} + D_t}{P_{t-1}}, \quad (28)$$

donde P_t y P_{t-1} representan los precios del activo en los períodos t y $t-1$, respectivamente, mientras que D_t corresponde al dividendo acumulado durante dicho intervalo. Este tipo de retorno refleja directamente el cambio porcentual en el valor del activo, ajustado por los dividendos, y es ampliamente utilizado en contextos prácticos para calcular el rendimiento acumulado o total de una inversión.

Por su parte, el *retorno logarítmico* se define como:

$$r_t = \ln \left(\frac{P_t}{P_{t-1}} \right), \quad (29)$$

y es frecuentemente preferido en estudios econométricos y académicos debido a sus propiedades estadísticas más favorables. Entre estas ventajas destaca la aditividad a lo largo del tiempo, que facilita el análisis en horizontes temporales más amplios, así como su capacidad para aproximarse a los retornos simples cuando los cambios en los precios son relativamente pequeños.

Además de estas dos definiciones principales, los retornos financieros pueden incluir ajustes específicos, como los *retornos ajustados por dividendos*, los cuales incorporan los ingresos periódicos generados por los activos. Este enfoque permite una evaluación más completa del rendimiento total, proporcionando una visión más detallada del desempeño financiero.

De acuerdo con Fama (1965), los retornos financieros presentan características que los diferencian de las distribuciones normales, como colas gruesas y asimetrías, lo que los hace especialmente adecuados para ser modelados mediante distribuciones alternativas, como la t de Student

o mezclas de distribuciones normales. Este comportamiento no solo destaca por su relevancia teórica, sino que también tiene implicaciones prácticas, como lo señala Dissanaiké (1994), al mostrar cómo diferentes métodos para calcular retornos pueden afectar significativamente los resultados en estudios sobre la sobre-reacción del mercado.

En el contexto de las series temporales financieras, los retornos pueden calcularse con diferentes frecuencias dependiendo del horizonte de análisis. Estas frecuencias incluyen retornos mensuales, semanales, diarios, intradía o incluso de alta frecuencia, cada una con aplicaciones y propiedades específicas según el objetivo del estudio. Sin embargo, al enfocarse en los retornos bursátiles diarios, que capturan las variaciones diarias en los precios de los activos, es posible analizar propiedades estadísticas fundamentales que son críticas para comprender la dinámica del mercado. Estas propiedades, documentadas extensamente en la literatura por autores como Mandelbrot y Fama, proporcionan una base sólida para modelar y predecir el comportamiento financiero.

A continuación, se describen las principales características estadísticas de los retornos bursátiles diarios:

- **No estacionariedad de los precios y estacionariedad de los retornos:** De acuerdo con Fama (1965), las series de precios de los activos financieros se comportan como un paseo aleatorio, lo que implica que los cambios sucesivos en los precios son independientes y no estacionarios. Sin embargo, los retornos, definidos como las diferencias logarítmicas entre precios consecutivos, son compatibles con procesos estacionarios de segundo orden. Esto significa que los retornos tienen una media y una varianza constantes en el tiempo, lo que facilita su modelado econométrico.

- **Distribuciones leptocúrticas y colas pesadas:** Mandelbrot (1963) introdujo el concepto de distribuciones Paretianas estables para modelar los cambios especulativos en los precios financieros. Estas distribuciones se caracterizan por colas gruesas, lo que indica que los eventos extremos, como grandes variaciones en los retornos, son significativamente más frecuentes de lo que predice una distribución normal. Esta leptocurtosis sugiere que los retornos financieros presentan una curtosis superior a tres, lo que los convierte en candidatos ideales para modelos no gaussianos.
- **Autocorrelación de los retornos y sus transformaciones:** Según Fama (1965), los retornos diarios generalmente no muestran autocorrelación significativa, lo que es consistente con la hipótesis de eficiencia del mercado. Sin embargo, las transformaciones de los retornos, como sus cuadrados (r_t^2) o valores absolutos ($|r_t|$), exhiben autocorrelación positiva. Esto indica la presencia de patrones de dependencia no lineal, un comportamiento capturado por modelos como ARCH y GARCH.
- **Clústeres de volatilidad:** Los retornos financieros tienden a agruparse en periodos de alta o baja volatilidad, fenómeno conocido como “clústeres de volatilidad”. Fama (1965) sugiere que, tras grandes cambios en los precios (positivos o negativos), es más probable observar movimientos igualmente grandes en los periodos subsiguientes. Este comportamiento refuerza la necesidad de modelar la varianza condicional de los retornos.
- **Efecto estacionalidad:** El trabajo de Fama (1970) identifica patrones estacionales en los retornos, como el conocido “efecto enero”, en el que los retornos al inicio del año tienden a ser más altos que en otros meses. Estas anomalías temporales reflejan la influencia de factores externos, como decisiones fiscales o estrategias de inversión, que afectan sistemáticamente

el comportamiento del mercado.

En resumen, los retornos bursátiles diarios exhiben propiedades estadísticas únicas que los distinguen de las series de precios. Estas características son fundamentales para entender la dinámica de los mercados financieros y sirven como base para el desarrollo de modelos avanzados de análisis y predicción.

5.2. Modelos de series de tiempo financieras

5.2.1. Modelos lineales

Los **modelos lineales de series temporales** constituyen una herramienta fundamental en el análisis de fenómenos estocásticos, ya que permiten describir la dinámica de una serie mediante relaciones lineales entre sus valores pasados y componentes aleatorias. La idea principal de estos modelos es que el valor actual de la serie se puede expresar como una combinación lineal de los valores anteriores junto con un término de error aleatorio, facilitando así la identificación de patrones de dependencia temporal y la predicción del comportamiento futuro.

Matemáticamente, un modelo lineal de serie temporal se puede representar mediante la siguiente ecuación:

$$\sum_{i=0}^q B_i(\theta)x(n-i) = \sum_{i=0}^p A_i(\theta)\epsilon(n-i), \quad (30)$$

donde $x(n)$ representa el valor de la serie temporal en el tiempo n y $\epsilon(n)$ son los términos de error (o perturbaciones), que siguen un proceso de ruido blanco. Los coeficientes $B_i(\theta)$ y $A_i(\theta)$ dependen de los parámetros del modelo, denotados por θ , y determinan la influencia de los valores pasados y los errores rezagados sobre el valor actual de la serie (Dunsmuir y Hannan, 1976).

Para garantizar que el modelo sea identificable y posea propiedades adecuadas como la **estacionariedad** y la **ergodicidad**, es necesario cumplir con ciertas restricciones sobre los parámetros. En particular, se deben satisfacer las siguientes condiciones:

- **Condición A1:** Los polinomios $g(e^{i\omega}; \theta)$ y $h(e^{i\omega}; \theta)$ deben ser continuos en el dominio $\omega \in [-\pi, \pi]$ y para θ dentro de un espacio compacto Θ . Además, sus elementos deben ser analíticos dentro del círculo unidad, y sus determinantes no deben tener ceros dentro de este círculo, lo cual asegura que el proceso sea **estacionario**.
- **Condición A2:** La matriz de covarianza $K(\theta)$, que describe la estructura de covarianza del proceso, debe ser una función continua de los parámetros θ , con una norma acotada uniformemente por un valor finito. Esto garantiza que la matriz de covarianza sea positiva definida, asegurando la constancia de la varianza del proceso.
- **Condición A3:** Para los coeficientes autorregresivos y de medias móviles, denotados por $A(j)$ y $B(k)$, respectivamente, se impone una restricción que asegura que estos parámetros se mantengan dentro de una esfera en un espacio de dimensión $R^{(p+q)s^2}$, cumpliendo la condición:

$$\text{tr} [A(j)A(j)^* + B(k)B(k)^*] < b < \infty, \quad (31)$$

donde $A(j)^*$ y $B(k)^*$ son las matrices conjugadas traspuestas de $A(j)$ y $B(k)$. Esta restricción garantiza que los coeficientes de los polinomios $g(z)$ y $h(z)$ estén uniformemente acotados, proporcionando la estabilidad del proceso.

Estas restricciones resultan fundamentales para asegurar que los modelos lineales de series temporales tengan una representación única y que los parámetros sean estimables de manera con-

sistente. Además, dichas condiciones garantizan la estabilidad del proceso, permitiendo determinar adecuadamente las propiedades estadísticas y evitando problemas de sobreajuste o inestabilidad (Dunsmuir y Hannan, 1976).

■ *Procesos de Medias Móviles (MA):*

Dentro de los modelos lineales, los **procesos de medias móviles (MA)** representan una serie temporal como una combinación ponderada de choques aleatorios previos. Un proceso de medias móviles de orden q , denominado $MA(q)$, se define como:

$$Y_t = \mu + \sum_{j=0}^q \theta_j \epsilon_{t-j}, \quad (32)$$

donde Y_t es el valor de la serie en el tiempo t , μ es la media constante del proceso, ϵ_t es un término de ruido blanco con media cero y varianza constante, y θ_j son coeficientes que determinan la influencia de los errores pasados ϵ_{t-j} sobre el valor actual de la serie (Anderson, 1975; Ansley *et al.*, 1977). Estos coeficientes deben estar adecuadamente acotados para garantizar la estabilidad y la ergodicidad del proceso, asegurando que las propiedades estadísticas permanezcan constantes a lo largo del tiempo.

Un proceso de medias móviles de primer orden, denotado como $MA(1)$, se describe de la siguiente manera:

$$Y_t = \mu + \epsilon_t + \theta \epsilon_{t-1}, \quad (33)$$

donde el parámetro θ cuantifica la influencia del error en el retardo inmediato anterior (ϵ_{t-1})

sobre el valor actual de la serie Y_t . La varianza del proceso se define como:

$$\text{Var}(Y_t) = (1 + \theta^2)\sigma^2, \quad (34)$$

y la autocovarianza en el primer retardo ($k = 1$) está dada por:

$$\text{Cov}(Y_t, Y_{t-1}) = \theta\sigma^2, \quad (35)$$

mientras que, para retardos mayores ($k > 1$), la autocovarianza es cero, implicando que la dependencia temporal se limita a un retardo específico determinado por el orden q .

En este contexto, la **descomposición de Wold** establece que cualquier proceso estacionario y no determinista puede representarse como la suma de un proceso de medias móviles de orden infinito y un componente determinista. De este modo, cualquier proceso estacionario puede representarse mediante:

$$Y_t = \mu + \sum_{j=0}^{\infty} \psi_j \epsilon_{t-j}, \quad (36)$$

donde μ es la media del proceso, ϵ_t es un término de ruido blanco, y ψ_j son coeficientes que describen la relación entre el valor actual y los errores pasados, proporcionando una estructura sólida para analizar la dependencia temporal (Ansley *et al.*, 1977).

Para que la descomposición de Wold sea válida, los coeficientes ψ_j deben ser absolutamente sumables:

$$\sum_{j=0}^{\infty} |\psi_j| < \infty, \quad (37)$$

lo cual garantiza la **ergodicidad** del proceso, permitiendo estimar las características estadísticas de la serie a partir de una única realización.

Adicionalmente, Anderson (1975) y Ansley *et al.* (1977) argumentan que, para garantizar la estabilidad y la ergodicidad del proceso, los coeficientes θ_j deben asegurar una representación única, evitando así la aparición de soluciones espurias. Las soluciones espurias se refieren a configuraciones en las cuales los coeficientes, aunque satisfacen las ecuaciones del modelo, no cumplen con las propiedades esenciales de estacionariedad y ergodicidad, comprometiendo la validez del análisis.

Para garantizar tanto la estabilidad como la identificabilidad del proceso, es necesario que los coeficientes θ_j sean absolutamente sumables, lo cual asegura la representatividad adecuada de las propiedades estadísticas y la ergodicidad del proceso. La identificabilidad implica, además, que cada conjunto de parámetros del modelo esté asociado a una única estructura del proceso, evitando ambigüedades en la estimación. Formalmente, esto se traduce en la necesidad de que el determinante de la matriz de covarianza del proceso, denotada como $K(\theta)$, sea estrictamente positivo para todos los valores posibles de θ :

$$\det(K(\theta)) > 0, \quad \forall \theta \in \Theta, \quad (38)$$

donde Θ es el espacio de parámetros. Esta condición garantiza la consistencia de los estimadores, asegurando que, a medida que aumenta el tamaño de la muestra, estos converjan a los valores verdaderos de los parámetros subyacentes.

■ *Procesos Autorregresivos (AR):*

Los **procesos autorregresivos (AR)** son fundamentales en el análisis de series temporales, ya que permiten describir la dinámica temporal de una serie mediante una relación lineal entre sus valores pasados y un componente aleatorio. Un proceso autorregresivo de orden p , denotado como $AR(p)$, se define mediante la siguiente ecuación de diferencia:

$$Y_t = c + \phi_1 Y_{t-1} + \phi_2 Y_{t-2} + \cdots + \phi_p Y_{t-p} + \epsilon_t, \quad (39)$$

donde Y_t es el valor de la serie en el tiempo t , c es una constante que permite un desplazamiento de la media, $\phi_1, \phi_2, \dots, \phi_p$ son los coeficientes autorregresivos, y ϵ_t es un término de ruido blanco con media cero y varianza constante σ_ϵ^2 .

Para que el proceso sea **estacionario**, es fundamental que las raíces del polinomio característico asociado estén fuera del círculo unidad. En términos matemáticos, el polinomio se expresa como:

$$\phi(z) = 1 - \phi_1 z - \phi_2 z^2 - \cdots - \phi_p z^p = 0, \quad (40)$$

y la condición de estacionariedad requiere que todas las raíces de $\phi(z) = 0$ cumplan que $|z_i| > 1$. Esta condición asegura que el proceso no diverja y que las propiedades estadísticas, tales como la media y la varianza, permanezcan constantes.

Un proceso $AR(p)$ puede representarse de manera equivalente como un proceso de medias móviles de orden infinito ($MA(\infty)$), cumpliendo así con las mismas restricciones de estabilidad y ergodicidad ya descritas para los procesos MA.

■ *Procesos autorregresivos de Media Móvil (ARMA):*

Un modelo ARMA(p, q) combina un componente autorregresivo de orden p y un componente de media móvil de orden q , y se puede representar matemáticamente como:

$$Y_t = c + \sum_{i=1}^p \phi_i Y_{t-i} + \varepsilon_t + \sum_{j=1}^q \theta_j \varepsilon_{t-j} \quad (41)$$

donde Y_t es el valor de la serie en el tiempo t , c es una constante, ϕ_i son los coeficientes autorregresivos, θ_j son los coeficientes de media móvil, y ε_t es un ruido blanco con media cero y varianza constante.

Para facilitar la manipulación algebraica, el modelo ARMA se puede expresar mediante el operador de rezago L , definido por $LY_t = Y_{t-1}$, de la siguiente manera:

$$(1 - \sum_{i=1}^p \phi_i L^i) Y_t = c + (1 + \sum_{j=1}^q \theta_j L^j) \varepsilon_t \quad (42)$$

La estacionariedad del proceso se garantiza si las raíces del polinomio autorregresivo:

$$1 - \sum_{i=1}^p \phi_i z^i = 0 \quad (43)$$

se encuentran fuera del círculo unitario, lo cual asegura que los efectos de los choques externos disminuyan con el tiempo. De manera similar, para la invertibilidad del modelo, las raíces del polinomio de media móvil deben estar fuera del círculo unitario:

$$1 + \sum_{j=1}^q \theta_j z^j = 0 \quad (44)$$

En algunos casos, el modelo ARMA puede estar sobreparametrizado si los operadores autorregresivo y de media móvil comparten raíces comunes. En tales situaciones, es posible reducir el orden del modelo dividiendo por el factor común, lo que resulta en un modelo equivalente de menor complejidad y evita redundancias.

La función de autocovarianza de un proceso ARMA sigue una relación en diferencias de orden p después de q rezagos:

$$\gamma_j = \sum_{i=1}^p \phi_i \gamma_{j-i}, \quad \text{para } j > q \quad (45)$$

Esto implica que la estructura de la autocorrelación (ACF) de un proceso ARMA depende tanto de los coeficientes autorregresivos como de los de media móvil. Esta representación combinada permite modelar tanto la persistencia en los datos como el impacto de los choques aleatorios, siendo una herramienta útil en diversas aplicaciones de análisis de series temporales.

Los modelos anteriores se centran en describir el comportamiento promedio de la serie temporal, pero las características particulares de las series financieras requieren de modelos capaces de representar la variabilidad de la serie. Específicamente, es necesario abordar el segundo momento, es decir, la varianza, que está directamente vinculada al riesgo inherente en activos o instrumentos financieros.

5.2.2. Modelos heterocedásticos

■ *Modelo de Heterocedasticidad Condicional Autorregresiva (ARCH):*

El modelo ARCH, propuesto por Robert Engle en 1982, es una herramienta fundamental para modelar series temporales cuya volatilidad varía a lo largo del tiempo. Su principal característica es que la varianza de los errores no es constante, sino que depende de errores pasados, un comportamiento común en los mercados financieros, donde los períodos de alta volatilidad tienden a agruparse, fenómeno conocido como “clusters” de volatilidad o heterocedasticidad condicional (Engle *et al.*, 1985).

Un modelo ARCH(p) se define como:

$$y_t = x_t' \beta + \epsilon_t, \quad \epsilon_t \sim N(0, h_t) \quad (46)$$

donde y_t representa la variable de interés, x_t es un vector de variables explicativas, y β son los coeficientes a estimar. La varianza condicional h_t depende de los errores pasados según:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^p \alpha_i \epsilon_{t-i}^2 \quad (47)$$

Para garantizar que la varianza condicional sea siempre positiva, se requiere que $\alpha_0 > 0$ y $\alpha_i \geq 0$ para $i = 1, \dots, p$. Esta estructura permite modelar cómo la magnitud de los errores pasados influye en la volatilidad actual, siendo especialmente útil para describir el comportamiento de los retornos financieros (Bollerslev *et al.*, 1992).

En el caso específico de un modelo ARCH(1), la varianza condicional se define como:

$$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \epsilon_{t-1}^2 \quad (48)$$

Un valor elevado de ϵ_{t-1}^2 incrementa h_t , lo que refleja cómo los períodos de alta volatilidad pueden prolongarse. Este mecanismo captura el fenómeno de “clusters” de volatilidad.

La varianza incondicional del proceso ϵ_t está dada por:

$$\text{Var}(\epsilon_t) = \frac{\alpha_0}{1 - \sum_{i=1}^p \alpha_i} \quad (49)$$

Este resultado es válido si $\sum_{i=1}^p \alpha_i < 1$, lo cual asegura que la varianza incondicional sea finita. Cuando esta suma es cercana a uno, la volatilidad condicional se vuelve altamente persistente, una característica típica de muchas series financieras.

Por último, suponiendo que ϵ_t sigue una distribución normal, la función de densidad condicional está definida como:

$$f(\epsilon_t | \mathcal{F}_{t-1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi h_t}} \exp\left(-\frac{\epsilon_t^2}{2h_t}\right) \quad (50)$$

donde $\mathcal{F}_{t-1}$ representa la información disponible hasta el período $t - 1$. Esta función es fundamental para estimar los parámetros del modelo mediante el método de máxima verosimilitud, cuyo logaritmo está dado por:

$$\ell(\omega, \alpha_1, \dots, \alpha_p) = -\frac{1}{2} \sum_{t=p+1}^T \left(\ln(2\pi) + \ln(h_t) + \frac{\epsilon_t^2}{h_t} \right) \quad (51)$$

La maximización de esta función produce estimadores consistentes y asintóticamente normales, aunque pueden presentar sesgos en muestras pequeñas (Engle *et al.*, 1985).

Finalmente, la persistencia de la volatilidad, que mide cuánto tiempo un choque impacta la varianza condicional futura, es un aspecto crucial del modelo. En un ARCH(1), esta persistencia depende del valor de α_1 : si α_1 se aproxima a uno, el impacto de un choque en t se extiende durante varios períodos posteriores, lo cual es particularmente relevante en el análisis de riesgos financieros.

■ *Cadenas de Markov*

Basándose en la investigación realizada por Hamilton (1994), se considera que s_t es una variable aleatoria que solo puede asumir valores enteros pertenecientes al conjunto $\{1, 2, \dots, N\}$. En una cadena de Markov, la probabilidad de que s_t tome un valor específico j depende exclusivamente del valor inmediatamente anterior s_{t-1} :

$$P(s_t = j \mid s_{t-1} = i) = p_{ij} \quad (52)$$

Este proceso se denomina *cadena de Markov de N estados*, y se caracteriza por una matriz de probabilidades de transición $\{p_{ij}\}_{i,j=1,2,\dots,N}$. La suma de las probabilidades de transición desde cualquier estado i a todos los posibles estados siempre debe ser igual a 1:

$$p_{i1} + p_{i2} + \dots + p_{iN} = 1 \quad (53)$$

Estas probabilidades de transición se organizan habitualmente en una matriz de dimensión $(N \times N)$, conocida como *matriz de transición*:

$$P = \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \cdots & p_{1N} \\ p_{21} & p_{22} & \cdots & p_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{N1} & p_{N2} & \cdots & p_{NN} \end{bmatrix} \quad (54)$$

Cada elemento p_{ij} en la matriz P representa la probabilidad de transición del estado i al estado j .

■ *Representación de una Cadena de Markov mediante Autorregresión Vectorial*

La representación de una cadena de Markov puede llevarse a cabo mediante el uso de un vector que indica el estado del sistema en un momento determinado. Se define un vector ξ_t de tamaño $N \times 1$ para representar el estado actual. Este vector tiene todos sus elementos iguales a cero, excepto uno, que tomará el valor de 1 para indicar el estado presente del sistema. Por ejemplo, si $s_t = 2$, el vector ξ_t será:

$$\xi_t = (0, 1, 0, \dots, 0)^T, \quad (55)$$

es decir, el segundo elemento del vector será 1, mientras que los demás serán 0.

La representación del vector ξ_t permite el uso de operaciones matriciales para describir cómo el sistema cambia de un estado a otro a lo largo del tiempo. Si la cadena de Markov está representada por una matriz de transición P , entonces se puede calcular la expectativa del siguiente estado de la cadena de Markov como:

$$E(\xi_{t+1} \mid \xi_t) = P\xi_t, \quad (56)$$

De este modo, para determinar la probabilidad de encontrarse en cualquier estado en el momento $t + 1$, se debe multiplicar la matriz de transición P por el vector que describe el estado actual ξ_t .

En términos generales, si se desea modelar cómo evoluciona el estado del sistema a lo largo del tiempo, se puede escribir:

$$\xi_{t+1} = P\xi_t + v_{t+1}, \quad (57)$$

donde v_{t+1} es un vector de innovaciones que representa el “ruido” o el componente aleatorio que afecta la evolución del estado. Este modelo tiene la forma de una autorregresión vectorial de primer orden.

■ *Modelo Switching ARCH (SWARCH)*

El modelo SWARCH (*Switching Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*), desarrollado por Hamilton y Susmel (1994), constituye una extensión de los modelos ARCH, y está diseñado para capturar las dinámicas de las series temporales financieras que presentan cambios estructurales en la volatilidad. Este modelo combina la capacidad de los modelos ARCH para representar heterocedasticidad condicional con la flexibilidad de las cadenas de Markov, las cuales permiten modelar transiciones entre diferentes regímenes de mercado.

Matemáticamente, el retorno de la serie temporal y_t se define como:

$$y_t^i = \mu + \phi y_{t-1}^i + u_t^i, \quad (58)$$

donde u_t^i es el término de error, el cual se modela de la siguiente forma para capturar cambios en la volatilidad:

$$u_t^i = \sqrt{g_{s_t^i}} \times \tilde{u}_t^i, \quad (59)$$

y $\tilde{u}_t^i$ sigue un proceso ARCH(q) estándar:

$$\tilde{u}_t^i = \sqrt{h_t^i} v_t^i, \quad (60)$$

donde h_t^i es la varianza condicional, y está dada por:

$$h_t^i = a_t^i + a_1^i \tilde{u}_{t-1}^{i2}. \quad (61)$$

En este contexto, a_t^i representa un término constante de la varianza condicional, capturando la parte fija de la volatilidad para un régimen específico. Por otro lado, a_1^i mide la sensibilidad de la varianza condicional h_t^i al cuadrado de los errores pasados ($\tilde{u}_{t-1}^{i2}$), describiendo cómo los choques previos afectan la volatilidad actual. En conjunto, estos parámetros permiten modelar de forma dinámica la varianza condicional como una combinación de una base constante y un componente que responde a la historia reciente de los errores.

Por otro lado, v_t^i se asume que sigue una distribución t de Student con n grados de libertad, lo cual permite capturar colas pesadas (grandes movimientos en los rendimientos).

La variable de escala $g_{s_t^i}$ es un multiplicador que cambia según el régimen s_t , lo que permite capturar distintos niveles de volatilidad dependiendo del estado del mercado. La variable latente s_t sigue un proceso de cadena de Markov de primer orden, lo que significa que la probabilidad de transición entre estados $s_t \in \{1, 2, \dots, K\}$ depende únicamente del estado

inmediatamente anterior s_{t-1} , tal como fue explicado en la sección anterior.

La estimación de los parámetros del modelo se realiza mediante la maximización de la log-verosimilitud total:

$$\ell(\theta) = \sum_{t=1}^T \log f(u_t^i | \mathcal{F}_{t-1}, s_t^i), \quad (62)$$

donde $f(u_t^i | \mathcal{F}_{t-1}, s_t^i)$ es la densidad condicional de los residuos:

$$f(u_t^i | \mathcal{F}_{t-1}, s_t^i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi g_{s_t^i} h_t^i}} \exp \left(-\frac{u_t^{i2}}{2g_{s_t^i} h_t^i} \right). \quad (63)$$

El modelo SWARCH tiene una aplicación extensa en el análisis financiero, destacando en la identificación de regímenes de volatilidad, la evaluación de la persistencia de choques de mercado, y la caracterización de transiciones entre períodos de calma y crisis. A continuación, se presenta una implementación práctica para un modelo SWARCH(2,1) utilizando R:

```
library(MSGARCH)

spec <- CreateSpec(

  variance.spec = list(model = "sARCH"),

  distribution.spec = list(distribution = "norm"),

  switch.spec = list(K = 2))

fit <- FitML(spec = spec, data = time_series_data)
```

■ *Pronósticos para una Cadena de Markov*

Una de las principales ventajas de utilizar esta representación matricial es que se facilita el proceso de realizar pronósticos de manera directa. Para calcular el estado esperado del sistema después de m períodos a partir de un estado inicial ξ_t , se utiliza la matriz de transición P elevada a la potencia m , lo cual se denota como P^m . Esto permite calcular:

$$E(\xi_{t+m} \mid \xi_t) = P^m \xi_t. \quad (64)$$

Por ejemplo, si el sistema comienza en el estado 1, se puede utilizar P^m para determinar la probabilidad de que el sistema esté en cualquiera de los estados luego de m períodos. Esto se realiza multiplicando P^m por el vector ξ_t que representa el estado inicial.

Específicamente, el j -ésimo elemento del vector resultante corresponde a la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado j después de m períodos, dado que se inició en el estado representado por ξ_t .

5.3. Modelos de Dependencia Financiera

5.3.1. Medición del riesgo

En el ámbito financiero, los factores de riesgo interactúan continuamente dentro de los portafolios, generando interdependencias que pueden amplificar o mitigar las pérdidas. Estas relaciones resultan fundamentales para comprender el comportamiento conjunto de los activos y, en consecuencia, gestionar el riesgo de manera eficiente. Por esta razón, las medidas de dependencia constituyen herramientas esenciales para evaluar y modelar cómo los activos están relacionados

entre sí.

La dependencia entre activos desempeña un papel determinante en la evaluación de la diversificación y el riesgo sistémico en portafolios financieros, producto de que una dependencia elevada entre activos puede incrementar significativamente las pérdidas durante eventos extremos, mientras que una baja dependencia favorece la diversificación y contribuye a la reducción del riesgo global del portafolio. En este contexto, el modelo introducido por Markowitz (1952) constituye una aproximación pionera, al establecer un marco matemático que relaciona el riesgo y el retorno, permitiendo identificar combinaciones óptimas de activos.

5.3.2. Optimización del portafolio de Markowitz

El modelo de optimización propuesto por Markowitz (1952) se basa en la construcción de portafolios eficientes que equilibran el riesgo y el rendimiento esperado de los activos. Este enfoque emplea la media como medida del rendimiento esperado y la varianza como indicador del riesgo. Matemáticamente, el problema de optimización de Markowitz se formula de la siguiente manera:

Sea un portafolio compuesto por N activos. Se define:

- $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \dots, x_N)^T$: el vector de pesos de los activos en el portafolio, donde x_i representa la proporción de inversión en el activo i , con $\sum_{i=1}^N x_i = 1$ y $x_i \geq 0$ (sin ventas en corto).
- $\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_N)^T$: el vector de rendimientos esperados de los activos.
- $\boldsymbol{\Sigma}$: la matriz de covarianzas de los rendimientos de los activos, donde σ_{ij} denota la covarianza entre los activos i y j .
- R_p : el rendimiento esperado del portafolio.

- σ_p^2 : la varianza del portafolio.

El rendimiento esperado del portafolio está dado por:

$$R_p = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\mu}. \quad (65)$$

El riesgo del portafolio, representado por la varianza, se calcula como:

$$\sigma_p^2 = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x}. \quad (66)$$

El problema de optimización propuesto minimiza el riesgo del portafolio para un nivel de rendimiento esperado dado R_p , según la siguiente expresión:

$$\min_{\mathbf{x}} \quad \sigma_p^2 = \mathbf{x}^T \boldsymbol{\Sigma} \mathbf{x}, \quad (67)$$

sujeto a las restricciones:

$$\mathbf{x}^T \boldsymbol{\mu} = R_p, \quad (68)$$

$$\sum_{i=1}^N x_i = 1, \quad (69)$$

$$x_i \geq 0, \quad \forall i \in \{1, \dots, N\}. \quad (70)$$

La solución a este problema da origen a la denominada *frontera eficiente*, que representa el conjunto de portafolios que minimizan el riesgo para un rendimiento esperado específico o que maximizan el rendimiento esperado para un nivel de riesgo dado.

La matriz de covarianzas refleja la interacción entre los activos y permite evaluar cómo la diversificación puede reducir el riesgo del portafolio. En este marco, la diversificación se logra mediante la inclusión de activos cuya correlación sea baja o negativa, lo que reduce la varianza total del portafolio. Este principio subraya la relevancia de las medidas de dependencia lineal, como la *correlación de Pearson*, para analizar las interacciones entre activos.

5.3.3. Coeficiente de Correlación de Pearson

El coeficiente de correlación de Pearson, propuesto originalmente por Karl Pearson, es una medida estadística que evalúa la relación lineal entre dos variables aleatorias. Su definición se basa en la proporción entre la covarianza de las variables y el producto de sus desviaciones estándar, según la siguiente expresión matemática:

$$\rho(a, b) = \frac{E(ab)}{\sigma_a \sigma_b}, \quad (71)$$

donde $E(ab)$ representa la covarianza entre las variables a y b , mientras que σ_a y σ_b son las desviaciones estándar de a y b , respectivamente (Cohen *et al.*, 2009). El valor de $\rho(a, b)$ se encuentra en el intervalo $[-1, 1]$, donde:

- Un valor cercano a 1 indica una fuerte relación lineal positiva entre las variables.
- Un valor cercano a -1 indica una fuerte relación lineal negativa.
- Un valor cercano a 0 sugiere la ausencia de una relación lineal.

A pesar de su amplia utilidad, el coeficiente de correlación de Pearson presenta varias limitaciones importantes que deben ser cuidadosamente consideradas antes de su aplicación (Arms-

trong, 2019):

1. **Suposición de linealidad:** El coeficiente de Pearson evalúa exclusivamente relaciones lineales entre dos variables. Cuando la relación es curvilínea, ρ no puede capturar adecuadamente la dependencia existente. En estos casos, resulta más adecuado modelar la relación con una función cuadrática o polinómica. Por ejemplo, si la relación entre X e Y se describe mediante:

$$Y = a + bX + cX^2, \quad (72)$$

el coeficiente de Pearson no considerará el término no lineal cX^2 , subestimando así la verdadera naturaleza de la relación.

2. **Dependencia de la distribución normal bivariada:** La interpretación del coeficiente de correlación de Pearson asume que las variables involucradas siguen una distribución normal bivariada. Si los datos no cumplen esta suposición, pueden surgir interpretaciones erróneas. En tales casos, métodos no paramétricos como los coeficientes de Spearman o Kendall son alternativas más apropiadas.
3. **Sensibilidad a valores atípicos:** Los valores atípicos (*outliers*) pueden tener un impacto desproporcionado en ρ , alterando significativamente su magnitud y dirección. Por ejemplo, un solo valor extremo puede sugerir una relación lineal inexistente ¹.
4. **No implica causalidad:** Una correlación significativa entre X e Y no implica necesariamente una relación causal entre ambas variables. Este fenómeno puede deberse a factores

¹La demostración matemática completa se encuentra en el texto “Should Pearson’s correlation coefficient be avoided?” realizado por Armstrong (2019)

externos o a relaciones espurias. La correlación no establece direccionalidad, y por ello debe interpretarse con precaución.

Las limitaciones señaladas evidencian la necesidad de emplear metodologías más avanzadas para capturar de manera precisa las relaciones de dependencia entre variables en el ámbito financiero, especialmente en el marco de la teoría de portafolios, donde las interacciones entre riesgos o factores son determinantes.

5.3.4. Cópulas

En el ámbito financiero, las cópulas son herramientas fundamentales para modelar la dependencia entre activos, riesgos o factores macroeconómicos. Su capacidad para separar el análisis de las distribuciones individuales de los activos del análisis de su dependencia conjunta permite una evaluación más precisa de las interrelaciones en escenarios complejos (Nelsen, 2006).

En particular, las cópulas de cola, como la t -Student (cópula elíptica) o las Arquimedianas (por ejemplo, Clayton y Gumbel), son esenciales para capturar la dependencia en los extremos, una característica crucial en el análisis del riesgo extremo. Estas herramientas permiten identificar patrones de dependencia que no son evidentes mediante medidas tradicionales como la correlación de Pearson, haciendo de las cópulas un recurso indispensable para la gestión de riesgos financieros.

En estadística y teoría de probabilidades, las cópulas son funciones que permiten modelar y analizar la dependencia entre variables aleatorias. Introducidas formalmente por Sklar en 1959, estas funciones vinculan distribuciones marginales univariadas para formar una distribución conjunta, manteniendo las propiedades individuales de las marginales (Sklar, 1959).

Definición de Función de Distribución. Para una variable aleatoria X , la **función de distribución** $F(x)$ se define como:

$$F(x) = P[X \leq x] \quad (73)$$

Esta expresión indica que $F(x)$ da la probabilidad acumulada de que la variable aleatoria X tome un valor menor o igual a x .

Definición (Quasi-inversa). Dada una función de distribución F , su quasi-inversa F^{-1} se define como:

$$F^{-1}(t) = \inf\{x : F(x) \geq t\}, \quad \text{para } t \in [0, 1]. \quad (74)$$

Si F es estrictamente creciente, la quasi-inversa coincide con la inversa ordinaria (Nelsen, 2006).

Teorema 1 (Teorema de Sklar). Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ un vector aleatorio con funciones de distribución marginal $F_1, F_2, \dots, F_d$. La función de distribución conjunta $H(x_1, x_2, \dots, x_d)$ puede expresarse mediante una cópula C de la forma:

$$H(x_1, x_2, \dots, x_d) = C(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_d(x_d)), \quad (75)$$

donde $C : [0, 1]^d \rightarrow [0, 1]$ es una función que captura la dependencia entre las variables. Si las distribuciones marginales son continuas, C es única. En caso contrario, la cópula es única en el soporte de las distribuciones marginales (Nelsen, 2006).

Teorema 2. Sea G_n una función de distribución en n dimensiones con márgenes $F_1, F_2, \dots, F_n$. Existe una función única H_n , con dominio en el producto cartesiano $R_1 \times R_2 \times \dots \times R_n$, tal que:

$$G_n(x_1, x_2, \dots, x_n) = H_n(F_1(x_1), F_2(x_2), \dots, F_n(x_n)). \quad (76)$$

Esta propiedad subraya que cada distribución conjunta puede representarse mediante márgenes y una cópula.

Teorema 3. Dada una cópula C , satisface las siguientes propiedades:

1. C es creciente en cada componente.
2. Los valores extremos de C están delimitados por las cotas de Fréchet-Hoeffding:

$$W(u, v) = \max(u + v - 1, 0), \quad M(u, v) = \min(u, v). \quad (77)$$

3. Si las márgenes son continuas, C es única.

Las cópulas abarcan una amplia variedad de modelos que permiten capturar diferentes estructuras de dependencia. Entre los modelos más destacados se encuentran:

- **Cópula de independencia:**

$$C(u_1, u_2, \dots, u_d) = u_1 u_2 \cdots u_d, \quad (78)$$

que describe variables independientes.

- **Cotas de Fréchet-Hoeffding:** Estas cotas delimitan los valores extremos que cualquier cópula puede asumir, como se muestra en las ecuaciones anteriores.

La estimación de cópulas empíricas es un método común para analizar dependencias en datos observados. Dado un conjunto de datos $\{(X_{1i}, X_{2i}, \dots, X_{di})\}_{i=1}^n$, las distribuciones marginales

empíricas $F_{j,n}(x)$ se calculan como:

$$F_{j,n}(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n I(X_{ji} \leq x), \quad (79)$$

donde I es la función indicadora. A partir de estas, se construye la cópula empírica $\hat{C}_n$:

$$\hat{C}_n(u_1, u_2, \dots, u_d) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \prod_{j=1}^d I(F_{j,n}(X_{ji}) \leq u_j). \quad (80)$$

Cópula bivariada

A partir de del estudio realizado por Palaro y Hotta (2006), se define (X_1, X_2) como un vector de dos variables aleatorias con función de distribución conjunta H y distribuciones marginales F_1 y F_2 , respectivamente. Cada distribución marginal depende del parámetro ϑ . Denotemos el vector desconocido de parámetros como $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2, \theta)$, donde θ corresponde a los parámetros de la cópula C_θ , completamente conocida excepto por θ . De acuerdo con el teorema de Sklar, se tiene:

$$H(x_1, x_2) = C(F_1(x_1; \vartheta_1), F_2(x_2; \vartheta_2); \theta). \quad (81)$$

La función de distribución conjunta H queda así especificada completamente por el vector de parámetros ϑ . Al diferenciar la ecuación anterior con respecto a todas las variables, se obtiene la función de densidad conjunta:

$$h(x_1, x_2) = c(F_1(x_1), F_2(x_2)) f_1(x_1) f_2(x_2), \quad (82)$$

donde f_i es la función de densidad asociada a la distribución marginal F_i , y c es la densidad

de la cópula, definida como:

$$c(u_1, u_2) = \frac{\partial^2 C(u_1, u_2)}{\partial u_1 \partial u_2}. \quad (83)$$

5.3.5. Cópulas Arquimedianas

Las cópulas Arquimedianas representan una clase especialmente flexible de funciones diseñadas para modelar la dependencia entre variables aleatorias. Estas cópulas se caracterizan por estar definidas mediante un generador, una función estrictamente decreciente φ , que mapea el intervalo $[0, 1]$ en $[0, \infty)$ y satisface $\varphi(1) = 0$. La forma general de una cópula Arquimediana se expresa como:

$$C(u, v) = \varphi^{-1}(\varphi(u) + \varphi(v)), \quad (84)$$

donde φ^{-1} es la pseudo-inversa de φ , definida como:

$$\varphi^{-1}(t) = \begin{cases} \varphi^{-1}(t), & \text{si } 0 \leq t \leq \varphi(0), \\ 1, & \text{si } t \geq \varphi(0). \end{cases} \quad (85)$$

La convexidad de φ^{-1} es una condición clave para garantizar que $C(u, v)$ sea una cópula válida. Además, si $\varphi(0) = \infty$, la cópula se denomina estricta, lo que implica que el generador no alcanza un valor finito en el límite del intervalo.

Una de las propiedades más importantes de las cópulas Arquimedianas es su simetría, expresada como $C(u, v) = C(v, u)$ para todos $u, v \in [0, 1]$. Esta característica las hace especialmente útiles en aplicaciones donde la dependencia conjunta no tiene un orden predefinido entre las variables. Además, estas cópulas son capaces de capturar estructuras de dependencia tanto en las colas

superiores como en las inferiores, lo cual es esencial para modelar eventos extremos en sistemas financieros.

La derivada parcial de una cópula Arquimediana se relaciona directamente con las propiedades del generador. En particular, se cumple que:

$$\varphi'(u) \frac{\partial C(u, v)}{\partial v} = \varphi'(v) \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}. \quad (86)$$

Esta relación destaca la importancia del generador φ en la construcción de una dependencia conjunta robusta y bien definida. Además, la convexidad del generador puede verificarse mediante la desigualdad:

$$\varphi^{-1}(a) + \varphi^{-1}(b + c) \leq \varphi^{-1}(b) + \varphi^{-1}(a + c), \quad (87)$$

para $a, b, c \geq 0$. Esta propiedad asegura que la combinación de variables mediante la cópula respete las restricciones impuestas por la teoría de probabilidades.

Ejemplo del Generador. Un generador típico para una cópula Arquimediana estricta es:

$$\varphi(t) = -\ln(t), \quad \text{lo que implica que } \varphi^{-1}(s) = e^{-s}. \quad (88)$$

Este generador produce una cópula que modela estructuras de dependencia con propiedades de simetría y flexibilidad, permitiendo su aplicación en escenarios multivariantes. Las cópulas Arquimedianas, por lo tanto, representan un marco altamente adaptable para abordar problemas complejos de dependencia no lineal en diversas áreas, desde finanzas hasta estadística aplicada.

5.3.6. Cópulas Elípticas

Las distribuciones elípticas representan una clase fundamental dentro de las distribuciones multivariadas, generalizando la estructura de la distribución normal multivariada hacia configuraciones más flexibles. Una cópula elíptica se deriva de una distribución elíptica multivariada y permite separar la estructura de dependencia de las distribuciones marginales individuales (Jaworski *et al.*, 2010).

Sea $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_d)$ un vector aleatorio con distribución elíptica, denotado como $\mathbf{X} \sim \mathcal{E}_d(\boldsymbol{\mu}, \boldsymbol{\Sigma}, g)$, donde:

- $\boldsymbol{\mu} \in R^d$: es el vector de medias que describe los valores esperados de las variables.
- $\boldsymbol{\Sigma} = (\sigma_{ij})$: es la matriz de covarianza que caracteriza la dispersión y la correlación entre las variables.
- $g : [0, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$: es la función generadora que determina la forma específica de la distribución.

La forma general del vector aleatorio $\mathbf{X}$ se expresa como:

$$\mathbf{X} = \boldsymbol{\mu} + R\mathbf{A}\mathbf{U}, \quad (89)$$

donde:

- $\mathbf{A}$: es una matriz que satisface $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top = \boldsymbol{\Sigma}$. Una elección común para $\mathbf{A}$ es la descomposición de Cholesky de $\boldsymbol{\Sigma}$, que produce una matriz triangular inferior $\mathbf{A}$ tal que $\mathbf{A}\mathbf{A}^\top$ reproduce la matriz de covarianza. Esta matriz captura la estructura de correlación entre las variables.

- $\mathbf{U}$: es un vector aleatorio uniformemente distribuido en la esfera unitaria S^{d-1} en R^d , definida como $S^{d-1} = \{\mathbf{u} \in R^d : u_1^2 + u_2^2 + \dots + u_d^2 = 1\}$. Este vector captura la dirección del vector aleatorio, mientras que su magnitud está determinada por R .
- R : es una variable aleatoria positiva, independiente de $\mathbf{U}$, que define la magnitud del vector aleatorio $\mathbf{X}$. Su distribución está determinada por la densidad $f_g(r)$, que se da por:

$$f_g(r) = \frac{2\pi^{d/2}}{\Gamma(d/2)} r^{d-1} g(r^2), \quad r > 0, \quad (90)$$

donde $g(r^2)$ está directamente relacionado con la función generadora g de la distribución elíptica.

Si la función de densidad $h_g(\mathbf{x})$ de $\mathbf{X}$ existe, está dada por:

$$h_g(\mathbf{x}) = |\Sigma|^{-1/2} g((\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})^\top \Sigma^{-1} (\mathbf{x} - \boldsymbol{\mu})), \quad (91)$$

donde el argumento de g es la distancia cuadrática de Mahalanobis entre $\mathbf{x}$ y $\boldsymbol{\mu}$, ponderada por Σ^{-1} .

Un caso particular es la distribución t -Student multivariada, donde la función generadora $g(t)$ se define como:

$$g(t) = c(1 + t/\nu)^{-(d+\nu)/2}, \quad (92)$$

con ν representando los grados de libertad y c como una constante de normalización. Esta elección de $g(t)$ produce una distribución elíptica robusta, útil en situaciones donde las colas pesadas son necesarias para modelar eventos extremos.

La función de distribución acumulada marginal estandarizada de cada componente $X_i/\sqrt{\sigma_{ii}}$ se denota como F_g . La cópula elíptica de $\mathbf{X}$ se define entonces como la función de distribución conjunta del siguiente vector:

$$\left(F_g \left(\frac{X_1}{\sqrt{\sigma_{11}}} \right), F_g \left(\frac{X_2}{\sqrt{\sigma_{22}}} \right), \dots, F_g \left(\frac{X_d}{\sqrt{\sigma_{dd}}} \right) \right). \quad (93)$$

Una característica clave de las cópulas elípticas es que la dependencia entre las variables está completamente determinada por la matriz de correlación implícita en Σ , independientemente de las distribuciones marginales. Esto las hace especialmente útiles en aplicaciones donde la separación entre las propiedades marginales y la estructura de dependencia es crucial, como en finanzas y modelos de riesgo.

Cópula t-student

La cópula t-Student, también conocida como t-cópula, se define matemáticamente como:

$$C_{R_{12}, \nu}^t(u, v) = \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u)} \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(v)} \frac{1}{2\pi(1 - R_{12}^2)^{1/2}} \left\{ 1 + \frac{s^2 - 2R_{12}st + t^2}{\nu(1 - R_{12}^2)} \right\}^{-(\nu+2)/2} ds dt, \quad (94)$$

donde t_{ν}^{-1} representa la inversa de la distribución t univariada con ν grados de libertad. Si las distribuciones marginales F_1 y F_2 son distribuciones t-Student con los mismos grados de libertad ν , y C es una cópula t-Student parametrizada por ν y R_{12} , entonces la función de distribución bivariada H puede expresarse como $H(x, y) = C(F_1(x), F_2(y))$. Esta función está definida por la distribución t bivariada estandarizada, con media $\mu = 0$, coeficiente de correlación lineal R_{12} y ν grados de libertad (Palaro y Hotta, 2006).

5.3.7. Modelos Ocultos de Markov (HMM) con Cópulas Dinámicas

Una metodología robusta y eficaz para analizar estructuras de dependencia dinámica en series temporales multivariantes combina los Modelos Ocultos de Markov (HMM, por sus siglas en inglés) con funciones de cópulas. Este enfoque innovador permite representar dependencias no lineales, asimetrías y colas pesadas de manera dinámica, superando así las limitaciones de los modelos tradicionales que se basan en distribuciones normales multivariantes (Wang *et al.*, 2014)

Un HMM es un modelo probabilístico en el que una secuencia de observaciones $\{Y_t\}_{t=1}^T$ está gobernada por una secuencia no observable de estados ocultos $\{X_t\}_{t=1}^T$. Su estructura básica se describe mediante:

$$P(X_t = j | X_{t-1} = i) = p_{ij}, \quad i, j \in \{1, 2, \dots, M\}, \quad (95)$$

$$P(Y_t | X_t = j) = f_j(Y_t; \theta_j), \quad (96)$$

donde p_{ij} son las probabilidades de transición entre estados y f_j es la densidad condicional de las observaciones dado el estado j .

Cada estado i tiene una distribución asociada $f_i(Y_t) = P(Y_t | X_t = i)$, que describe la probabilidad condicional de observar Y_t . También existe la distribución inicial de los estados está dada por $\pi = \{\pi_i\}$, donde:

$$\pi_i = P(X_1 = i). \quad (97)$$

En el marco de cópulas dinámicas, el HMM se utiliza para modelar la transición entre diferentes estructuras de dependencia representadas por funciones de cópulas. La densidad conjunta

de las observaciones se expresa como:

$$P(Y_1, \dots, Y_T) = \sum_{X_1, \dots, X_T} \pi_{X_1} \prod_{t=1}^T p_{X_{t-1}, X_t} f_{X_t}(Y_t; \theta_{X_t}), \quad (98)$$

donde π_{X_1} es la distribución inicial de los estados.

Dependencia dinámica con cópulas: En este enfoque, las cópulas permiten separar la estructura de dependencia de las distribuciones marginales. La función de cópula dinámica incorpora un parámetro de dependencia θ_{ct, S_t} que varía en el tiempo según:

$$\theta_{ct, S_t} = \Lambda(\omega_{S_t} + \beta_c \theta_{ct-1} + \psi_t), \quad (99)$$

donde:

- ω_{S_t} es el término independiente que depende del estado S_t .
- β_c controla la persistencia temporal de la dependencia.
- ψ_t es una variable de forzamiento que incorpora información reciente.
- $\Lambda(\cdot)$ es una transformación logística que asegura que θ_{ct, S_t} esté dentro de un intervalo predefinido.

Algoritmo Expectation-Maximization (EM): El algoritmo Expectation-Maximization (EM) es una técnica iterativa ampliamente utilizada para la estimación de parámetros en modelos estadísticos con variables latentes o datos incompletos. Este algoritmo permite ajustar modelos como los

Modelos de Markov Ocultos (Hidden Markov Models, HMM), donde tanto los regímenes latentes como las relaciones entre las variables observadas juegan un papel fundamental (Wang *et al.*, 2014).

■ **Función de Verosimilitud:**

La log-verosimilitud marginal de las observaciones $Y_1, \dots, Y_T$, considerando los estados ocultos $X_1, \dots, X_T$, se define como:

$$\log P(Y_1, \dots, Y_T) = \log \sum_{X_1, \dots, X_T} \pi_{X_1} \prod_{t=1}^T p_{X_{t-1}, X_t} f_{X_t}(Y_t), \quad (100)$$

donde:

- π_{X_1} es la probabilidad inicial del estado X_1 ,
- p_{X_{t-1}, X_t} es la probabilidad de transición entre los estados X_{t-1} y X_t ,
- $f_{X_t}(Y_t)$ es la densidad condicional de Y_t dado X_t .

■ **Algoritmo Expectation-Maximization (EM):**

La estimación de los parámetros θ del modelo se realiza mediante el algoritmo EM, que alterna entre los pasos de expectativa (E) y maximización (M):

• **Paso E (Expectation):**

En este paso, se calcula la esperanza de la log-verosimilitud conjunta $\log P(Y_{1:T}, X_{1:T} \mid \theta)$, ponderada por la distribución posterior de los estados latentes:

$$Q(\theta; \theta^{(r)}) = E_{\theta^{(r)}} [\log P(Y_{1:T}, X_{1:T} \mid \theta) \mid Y_{1:T}]. \quad (101)$$

Aquí, $E_{\theta^{(r)}}$ representa la esperanza calculada con respecto a la distribución posterior de los estados latentes $X_{1:T}$, utilizando los parámetros actuales del modelo, $\theta^{(r)}$.

Para calcular esta expectativa, se utiliza el algoritmo **forward-backward**, que incluye:

- **Forward Pass:** Se calcula la probabilidad de observar $Y_1, \dots, Y_t$ y que el estado en el tiempo t sea i :

$$\alpha_t(i) = P(Y_1, \dots, Y_t, X_t = i \mid \theta). \quad (102)$$

Se evalúa recursivamente como:

$$\alpha_t(i) = f_i(Y_t) \sum_{j=1}^M \alpha_{t-1}(j) p_{ji}. \quad (103)$$

Aquí:

- ◊ $f_i(Y_t)$ es la función de densidad condicional de la observación Y_t dado que el estado oculto es i .
- ◊ $\alpha_{t-1}(j)$ representa la probabilidad de observar las secuencias $Y_1, \dots, Y_{t-1}$ y que el estado en $t - 1$ sea j .
- ◊ p_{ji} es la probabilidad de transición del estado j al estado i .
- **Backward Pass:** Se calcula la probabilidad de observar $Y_{t+1}, \dots, Y_T$ dado que $X_t = i$:

$$\beta_t(i) = P(Y_{t+1}, \dots, Y_T \mid X_t = i, \theta). \quad (104)$$

Se evalúa recursivamente como:

$$\beta_t(i) = \sum_{j=1}^M p_{ij} f_j(Y_{t+1}) \beta_{t+1}(j). \quad (105)$$

Aquí:

- ◇ $f_j(Y_{t+1})$ es la densidad condicional de la observación Y_{t+1} dado que el estado en $t + 1$ es j .
- ◇ $\beta_{t+1}(j)$ es la probabilidad de observar $Y_{t+1}, \dots, Y_T$ dado que el estado en $t + 1$ es j .

- **Probabilidades A Posteriori:** Las probabilidades necesarias para el cálculo de $Q(\theta; \theta^{(r)})$

son:

$$P(X_t = i \mid Y_{1:T}, \theta) = \frac{\alpha_t(i) \beta_t(i)}{\sum_{j=1}^M \alpha_t(j) \beta_t(j)}, \quad (106)$$

$$P(X_{t-1} = i, X_t = j \mid Y_{1:T}, \theta) = \frac{\alpha_{t-1}(i) p_{ij} f_j(Y_t) \beta_t(j)}{\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_{t-1}(i) p_{ij} f_j(Y_t) \beta_t(j)}. \quad (107)$$

1. **Probabilidad posterior de estado individual** $P(X_t = i \mid Y_{1:T}, \theta)$: Esta probabilidad representa la probabilidad posterior de que el sistema esté en el estado $X_t = i$ en el tiempo t , dado toda la secuencia de observaciones $Y_{1:T}$ y los parámetros actuales del modelo θ .

a) $\alpha_t(i)$: La probabilidad de observar las observaciones desde el inicio ($Y_1, \dots, Y_t$)

y que el estado en t sea i . Se calcula en el forward pass.

b) $\beta_t(i)$: La probabilidad de observar las observaciones futuras ($Y_{t+1}, \dots, Y_T$)

dado que el estado en t es i . Se calcula en el backward pass.

c) $\sum_{j=1}^M \alpha_t(j)\beta_t(j)$: El denominador que asegura que la probabilidad total sea igual a 1 al considerar todos los posibles estados j en el tiempo t .

2. Probabilidad posterior de una transición de estados $P(X_{t-1} = i, X_t = j \mid$

$Y_{1:T}, \theta)$: Esta probabilidad representa la probabilidad conjunta posterior de que el sistema esté en el estado $X_{t-1} = i$ en el tiempo $t - 1$ y transite al estado $X_t = j$ en el tiempo t , dado toda la secuencia de observaciones $Y_{1:T}$ y los parámetros θ .

a) $\alpha_{t-1}(i)$: La probabilidad de observar $Y_1, \dots, Y_{t-1}$ y que el estado en $t - 1$ sea i .

b) p_{ij} : La probabilidad de transición del estado i en $t - 1$ al estado j en t .

c) $f_j(Y_t)$: La densidad condicional de la observación Y_t dado el estado j en t .

d) $\beta_t(j)$: La probabilidad de observar $Y_{t+1}, \dots, Y_T$ dado que el estado en t es j .

e) $\sum_{i=1}^M \sum_{j=1}^M \alpha_{t-1}(i)p_{ij}f_j(Y_t)\beta_t(j)$: El denominador que normaliza la probabilidad conjunta para todos los pares de estados posibles.

Esta probabilidad es crucial para ajustar los parámetros de transición p_{ij} durante el paso de maximización en el algoritmo EM.

• Paso M (Maximization):

En esta etapa, se actualizan los parámetros θ maximizando $Q(\theta; \theta^{(r)})$:

$$\theta^{(r+1)} = \arg \max_{\theta} Q(\theta; \theta^{(r)}). \quad (108)$$

La matriz de transición se actualiza como:

$$p_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^{T-1} P(X_{t-1} = i, X_t = j \mid Y_{1:T}, \theta^{(r)})}{\sum_{t=1}^{T-1} P(X_{t-1} = i \mid Y_{1:T}, \theta^{(r)})}. \quad (109)$$

5.3.8. Métricas de dependencia

■ *Dependencia de colas*

La *dependencia asintótica de colas* es un concepto clave en el análisis de estructuras de dependencia, particularmente para evaluar la propensión de los mercados a experimentar eventos extremos conjuntos, como caídas o aumentos simultáneos (Embrechts *et al.*, 2003).

Dependencia de colas superior en términos de cópulas: Formalmente, considere un vector de variables aleatorias continuas (X, Y) con funciones de distribución marginal F y G . Definiendo $u = F(X)$ y $v = G(Y)$, el coeficiente de dependencia de colas superior (λ_U) se expresa como:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} P\{Y > G^{-1}(u) \mid X > F^{-1}(u)\}. \quad (110)$$

Esta medida describe la probabilidad de eventos simultáneos extremos en las colas superiores de las distribuciones F y G .

Si una cópula bivariada C caracteriza la dependencia entre X e Y , el coeficiente de dependencia de colas superior también puede definirse como:

$$\lambda_U = \lim_{u \rightarrow 1} \frac{1 - 2u + C(u, u)}{1 - u}. \quad (111)$$

Según esta definición:

- $\lambda_U \in (0, 1]$ indica la existencia de dependencia de colas superior.
- $\lambda_U = 0$ implica independencia en la cola superior.

Dependencia de colas inferior: De manera análoga, el coeficiente de dependencia de colas inferior (λ_L) se define como:

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} P\{Y \leq G^{-1}(u) | X \leq F^{-1}(u)\}, \quad (112)$$

y en términos de cópulas, esto se traduce en:

$$\lambda_L = \lim_{u \rightarrow 0} \frac{C(u, u)}{u}. \quad (113)$$

En este contexto:

- $\lambda_L \in (0, 1]$ indica dependencia en la cola inferior.
- $\lambda_L = 0$ sugiere independencia en la cola inferior.

■ *Tau de Kendall*

El *tau* de Kendall es una medida de dependencia entre variables aleatorias que captura la probabilidad de concordancia menos la probabilidad de discordancia entre pares de observaciones. En el caso bivariado, esta medida se define como:

$$\tau(X_1, X_2) = P\{(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) > 0\} - P\{(X_1 - Y_1)(X_2 - Y_2) < 0\}, \quad (114)$$

donde X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes con distribución conjunta F (Jaworski *et al.*, 2010).

Para casos más generales, cuando F tiene una cópula bivariada C , el τ de Kendall se puede expresar como:

$$\tau(C) = 4 \int_{[0,1]^2} C(u, v) dC(u, v) - 1. \quad (115)$$

En el contexto de cópulas Archimedeanas, el τ de Kendall también se puede calcular directamente a partir del generador ϕ_C de la cópula:

$$\tau(C) = 1 + 4 \int_0^1 \frac{\phi_C(t)}{\phi'_C(t)} dt. \quad (116)$$

Tabla 3

Dependencia de colas y coeficiente de Kendall's τ para diferentes cópulas.

Cópula	λ_L	λ_U	Kendall's τ
t-Student	$2t_{\nu+1} \left(\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right)$	$2t_{\nu+1} \left(\sqrt{\frac{(\nu+1)(1-\rho)}{1+\rho}} \right)$	$\frac{2}{\pi} \arcsin(\rho)$
Clayton	$2^{-1/\theta}$	0	$\frac{\theta}{\theta+2}$
Gumbel	0	$2 - 2^{1/\theta}$	$1 - \frac{1}{\theta}$
Frank	0	0	$\frac{\ln(\theta)^2 + 4 \ln(\theta) + 4 \cdot \text{Spence}(\theta)}{\ln(\theta)^2}$

Nota: Elaboración propia con datos extraídos de autores mencionados anteriormente respecto a la teoría de cópulas. λ_L es el coeficiente de dependencia de cola inferior. λ_U es el coeficiente de dependencia de cola superior. La independencia se refiere a las restricciones en los parámetros que producen una cópula independiente. En la cópula t-Student, ρ es el coeficiente de correlación lineal y ν representa los grados de libertad.

5.3.9. Pruebas de bondad de ajuste

■ *Criterio de información de Akaike (AIC)*

El criterio de información de Akaike (AIC), propuesto por Joe (1997), es una métrica utilizada para comparar modelos estadísticos y seleccionar el más adecuado entre ellos. Se basa en una combinación entre el ajuste del modelo y la penalización por la cantidad de parámetros estimados, lo que busca evitar el sobreajuste. El AIC se define matemáticamente como:

$$AIC = -2\ell + 2n_p \quad (117)$$

donde:

- ℓ es el valor de la log-verosimilitud maximizada del modelo.
- n_p es el número de parámetros estimados en el modelo.

Este criterio penaliza modelos más complejos (con más parámetros) para fomentar la parsimonia, asegurando que el modelo seleccionado no solo ajuste bien a los datos, sino que también sea eficiente en términos de simplicidad.

■ *Prueba de Kolmogorov-Smirnov para Cópulas*

La prueba de Kolmogorov-Smirnov (KS) es un procedimiento estadístico ampliamente utilizado para evaluar la bondad de ajuste entre una distribución empírica y una distribución teórica. En el contexto de las cópulas, esta prueba permite verificar si la cópula propuesta describe adecuadamente la dependencia entre las variables aleatorias. El estadístico de Kolmogorov-Smirnov, denotado como D_{KS} , mide la máxima discrepancia entre la función

de distribución acumulativa empírica (EDF) y la función de distribución acumulativa teórica (CDF). Su cálculo proporciona una medida robusta para contrastar la hipótesis de ajuste del modelo (Malevergne y Sornette, 2003).

En este contexto, el cálculo de la función de distribución acumulativa teórica y la evaluación de la especificación de la cópula requieren la utilización de derivadas parciales. Para una cópula $C(u, v)$, donde $u = F(x)$ y $v = G(y)$, un resultado conocido establece que la distribución condicional de $Y|X = x$ puede expresarse como:

$$H_{Y|X}(y|x) = \frac{\partial C(u, v)}{\partial u}, \quad (118)$$

donde $\frac{\partial C(u, v)}{\partial u}$ está uniformemente distribuida en $[0, 1]$. Este resultado no solo permite calcular la densidad condicional, sino también evaluar la adecuación de la especificación de la cópula al analizar sus derivadas respecto a cada argumento. Así, las diferencias entre la EDF y la CDF pueden relacionarse directamente con la estructura de dependencia que modela la cópula.

La prueba KS evalúa las siguientes hipótesis estadísticas:

- H_0 : establece que la cópula teórica propuesta describe correctamente la estructura de dependencia entre las variables aleatorias. Esto implica que las pseudo-observaciones generadas a partir de los datos siguen una distribución uniforme en el intervalo $[0, 1]$.
- H_1 : plantea que la cópula teórica propuesta no es adecuada para describir la dependencia entre las variables aleatorias.

El cálculo de la prueba de Kolmogorov-Smirnov para cópulas comienza transformando los

datos originales x_i en pseudo-observaciones mediante las distribuciones marginales empíricas, $\hat{F}_i(x_i)$. Para cada observación x_i , se calcula:

$$u_i = \hat{F}_i(x_i). \quad (119)$$

Estas pseudo-observaciones u_i tienen soporte en el intervalo $[0, 1]$ y representan la entrada principal para evaluar la cópula. A partir de estas pseudo-observaciones, se construye la función de distribución empírica (EDF), que se define como:

$$F_{\text{emp}}(z) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n 1_{\{u_i \leq z\}}, \quad (120)$$

donde $1_{\{\cdot\}}$ es la función indicadora, y n corresponde al tamaño de la muestra. La función de distribución acumulativa teórica (CDF) se obtiene a partir de la cópula propuesta, denotada como $C(u_1, u_2, \dots, u_n)$, que describe la dependencia esperada bajo la hipótesis nula.

El estadístico de Kolmogorov-Smirnov se calcula como la máxima discrepancia entre la EDF y la CDF teórica en el intervalo $[0, 1]$:

$$D_{\text{KS}} = \sup_{z \in [0,1]} |F_{\text{emp}}(z) - F_{\text{teo}}(z)|. \quad (121)$$

Este valor mide la magnitud de la desviación entre las distribuciones empírica y teórica. Finalmente se interpreta si D_{KS} es un valor bajo sugiere un buen ajuste, mientras que valores altos indican discrepancias significativas entre las distribuciones empírica y teórica, proporcionando un criterio objetivo para validar la especificación de una cópula en modelos de

dependencia.

■ *Cramér-von Mises*

La estadística de Cramer-von Mises mide la desviación entre las pseudo-observaciones generadas a partir de los datos y la distribución uniforme teórica en el intervalo $[0, 1]$, complementando el análisis de bondad de ajuste realizado previamente con la prueba de Kolmogorov-Smirnov. A diferencia de esta última, la estadística de Cramer-von Mises pone un mayor énfasis en las discrepancias integradas en lugar de las máximas discrepancias puntuales, proporcionando así una perspectiva más global del ajuste del modelo.

El cálculo de la estadística de Cramer-von Mises se basa en el proceso empírico ψ_n , definido como

$$\psi_n(t) = \sqrt{n} (H_n(t) - C(t)), \quad (122)$$

donde $H_n(t)$ es la función de distribución empírica construida a partir de las pseudo-observaciones y $C(t)$ es la función de distribución acumulativa teórica de la cópula bajo la hipótesis nula.

A partir de este proceso empírico, la estadística se define como

$$T_{CM} = \int_0^1 \psi_n^2(t) dC(t), \quad (123)$$

lo que representa una medida integrada de la discrepancia entre las distribuciones empírica y teórica (Jaworski *et al.*, 2010). En la práctica, esta integral se evalúa numéricamente utilizando las pseudo-observaciones ordenadas, permitiendo un cálculo computacionalmente eficiente.

El procedimiento para calcular esta estadística aprovecha las pseudo-observaciones ya obtenidas y el cálculo de la función de distribución empírica previamente discutidos. La estadística se evalúa como

$$T_{\text{CM}} = \sum_{i=1}^n (H_n(t_i) - C(t_i))^2 w(t_i), \quad (124)$$

donde $w(t_i)$ es un peso asociado al punto t_i , generalmente derivado de $C(t)$. Este enfoque numérico permite capturar las discrepancias entre la distribución empírica y la teórica en todo el rango de las pseudo-observaciones, proporcionando una visión más completa del ajuste del modelo.

Un valor bajo de T_{CM} indica que la distribución empírica está cerca de la distribución teórica, lo que respalda la hipótesis nula de que la cópula describe adecuadamente la dependencia entre las variables. Por el contrario, un valor alto sugiere discrepancias significativas, lo que llevaría al rechazo de la hipótesis nula.

- *Test de razón de verosimilitud (LR test)*

La prueba de razón de verosimilitud, conocida en inglés como *Likelihood Ratio Test (LR Test)*, es un procedimiento estadístico utilizado para comparar dos modelos anidados. Este test permite evaluar si un modelo más complejo, denominado *modelo no restringido*, ofrece un ajuste significativamente mejor que un modelo más simple, llamado *modelo restringido*, en términos de la información proporcionada por los datos. Se basa en el principio de la máxima verosimilitud, que establece que el mejor ajuste a un conjunto de datos se obtiene al maximizar la función de verosimilitud, expresada como:

$$L(\theta) = \sum_{i=1}^n \log f(x_i; \theta), \quad (125)$$

donde $f(x_i; \theta)$ es la función de densidad del modelo evaluada en los datos x_i y parametrizada por θ . El LR Test compara los valores de la log-verosimilitud máxima entre dos modelos anidados: el modelo no restringido y el modelo restringido (Rodriguez, 2007).

El estadístico de razón de verosimilitud (LR) se define como:

$$LR_{stat} = 2 \left(L(\hat{\theta}_{\text{no restringido}}) - L(\hat{\theta}_{\text{restringido}}) \right), \quad (126)$$

donde $L(\hat{\theta}_{\text{no restringido}})$ es la log-verosimilitud máxima obtenida al estimar el modelo no restringido, y $L(\hat{\theta}_{\text{restringido}})$ es la log-verosimilitud máxima obtenida al estimar el modelo restringido. Este estadístico mide la mejora en el ajuste que proporciona el modelo no restringido respecto al modelo restringido. Un valor elevado de LR indica que el modelo no restringido puede explicar mejor los datos.

La diferencia entre los dos modelos radica en el número de parámetros que se ajustan libremente. Por tanto, los grados de libertad (df) del test corresponden a la diferencia en el número de parámetros entre ambos modelos:

$$\text{df} = \text{N}^\circ \text{ de parámetros del modelo no restringido} - \text{N}^\circ \text{ de parámetros del modelo restringido} \quad (127)$$

Esto refleja la cantidad de restricciones impuestas en el modelo restringido. Bajo la hipótesis nula (H_0), que establece que las restricciones del modelo restringido son correctas, el

estadístico LR sigue aproximadamente una distribución chi-cuadrado (χ^2) con grados de libertad df . Esta propiedad se basa en el teorema de Wilks, que establece la convergencia asintótica del estadístico hacia esta distribución.

El valor p asociado al test se calcula utilizando la distribución chi-cuadrado. Representa la probabilidad de observar un valor del estadístico LR tan extremo o más extremo bajo la hipótesis nula:

$$p\text{-value} = P(\chi_{df}^2 > LR). \quad (128)$$

El resultado del test se interpreta de la siguiente manera. Un p -value bajo (para este estudio $p < 0,05$) indica que el modelo no restringido proporciona un ajuste significativamente mejor que el modelo restringido. Esto sugiere que las restricciones impuestas en el modelo restringido no son consistentes con los datos. Por el contrario, un p -value alto implica que no hay evidencia suficiente para rechazar el modelo restringido, indicando que las restricciones son razonables y el modelo restringido puede describir adecuadamente los datos.

6. Análisis empírico

6.1. Datos

Este estudio se basa en los *log-retornos* (ver Subsubsección 5.1.9), calculados a partir de las series de precios de cierre diario (expresados en moneda local) de los siguientes índices bursátiles: IPSA (Chile), SP500 (Estados Unidos), DAX (Alemania), CAC40 (Francia), FTSE100 (Reino Unido), BOVESPA (Brasil), IPC (México) e IBEX35 (España). El período analizado abarca desde el 3 de enero de 2012 hasta el 28 de diciembre de 2023, y los datos fueron obtenidos de la plataforma *Investing.com*. El período de crisis se define desde el 20 de enero de 2020 hasta el 5 de mayo de 2023. La fecha inicial corresponde a la detección del primer caso de COVID-19 en Estados Unidos, mientras que la fecha final marca el día en que la Organización Mundial de la Salud (OMS) declaró el fin de la emergencia sanitaria global por la pandemia.

Se presenta a continuación una breve descripción de los índices bursátiles considerados en el estudio, destacando sus principales características y los eventos más relevantes que los afectaron durante el período analizado. Estos índices permiten evaluar el comportamiento de mercados clave a nivel global y regional, proporcionando un panorama general de cómo distintos acontecimientos económicos y políticos, incluyendo la pandemia de COVID-19, influyeron en su desempeño:

- **S&P 500:** El S&P 500 es un índice compuesto por 500 de las principales empresas estadounidenses, representando aproximadamente el 80 % de la capitalización de mercado de los Estados Unidos. Durante la pandemia, el S&P 500 experimentó una caída significativa en marzo de 2020, perdiendo casi un tercio de su valor. Sin embargo, se recuperó notablemente en los meses siguientes, impulsado principalmente por el crecimiento en el sector

tecnológico (Smith *et al.*, 2021).

- **IPSA:** El Índice de Precios Selectivo de Acciones (IPSA) es el principal índice bursátil de Chile, que incluye las acciones más líquidas de la Bolsa de Santiago. Durante la pandemia, el IPSA mostró una gran volatilidad, reflejando los desafíos económicos locales y la incertidumbre política del país (Rodríguez y González, 2022).
- **FTSE 100:** El FTSE 100 agrupa las 100 empresas más grandes listadas en la Bolsa de Valores de Londres y es un indicador clave del mercado británico. Este índice también experimentó fuertes caídas al inicio de la pandemia, pero su recuperación ha sido más lenta en comparación con los índices estadounidenses, afectado por las preocupaciones en torno al Brexit y sus efectos económicos (Johnson, 2021).
- **DAX 30:** El DAX 30 alemán incluye las 30 principales empresas de Alemania. Similar a otros índices, el DAX sufrió caídas dramáticas en 2020 debido a la pandemia, pero posteriormente mostró una recuperación robusta, apoyado por medidas de estímulo fiscal y monetario de la Unión Europea (Weber, 2021).
- **CAC 40:** El CAC 40 francés, que está compuesto por las 40 empresas más grandes de Francia, siguió un patrón similar al del DAX, con caídas importantes seguidas por una recuperación gradual, influenciada por la respuesta política del gobierno francés y las intervenciones del Banco Central Europeo (Dubois, 2022).
- **Bovespa:** El índice Bovespa de Brasil agrupa a las empresas más grandes del mercado bursátil brasileño y mostró una alta volatilidad durante la pandemia, reflejando la inestabilidad política interna y los retos en la gestión de la salud pública (Silva, 2021).

- **IBEX 35:** El IBEX 35, que agrupa las 35 principales empresas de la Bolsa de Madrid en España, fue severamente afectado por la pandemia, especialmente debido al impacto inicial del COVID-19 en España. No obstante, ha mostrado signos de recuperación, apoyado por los fondos de recuperación de la UE y diversas reformas estructurales (Ramírez, 2021).
- **IPC:** El Índice de Precios y Cotizaciones (IPC) de México agrupa a las 35 empresas más líquidas de la Bolsa Mexicana de Valores. El IPC sufrió caídas significativas durante los primeros meses de la pandemia, aunque ha mostrado una recuperación gradual a medida que la economía mexicana comenzó a reabrirse (Lopez, 2021).

6.2. Análisis de retornos

La inspección visual de las series de rendimientos logarítmicos revela un comportamiento irregular y una volatilidad variable a lo largo del tiempo, como se observa en la Figura 6 y la Figura 7. Es evidente la presencia de clusters de volatilidad, donde períodos de alta dispersión de los rendimientos se alternan con intervalos de mayor estabilidad. Además, se identifican movimientos extremos o datos atípicos, especialmente en momentos de crisis, que destacan como picos abruptos en las series.

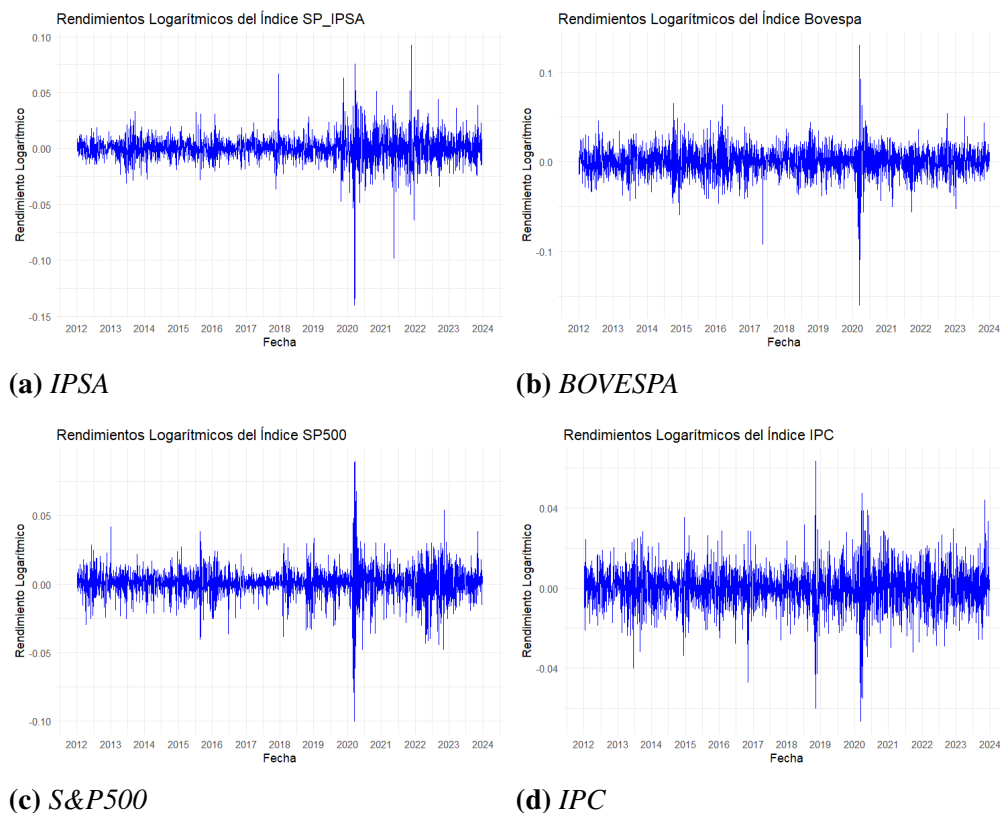
Durante el período analizado, de 2012 a 2023, sobresale un incremento notable en la volatilidad en torno al año 2020, coincidente con la pandemia de COVID-19. Este fenómeno se manifiesta como picos significativos en todas las series, reflejando un aumento abrupto de la amplitud de los rendimientos. Posteriormente, las series muestran una gradual disminución de la volatilidad, aunque sin retornar completamente a los niveles previos, lo cual es visible en todas las economías estudiadas.

Al observar individualmente las series, se destacan diferencias importantes en la magnitud y persistencia de la volatilidad. Los índices Bovespa e IBEX35 exhiben mayores oscilaciones, reflejadas en amplitudes más pronunciadas de los rendimientos a lo largo del tiempo. Por el contrario, los índices CAC40, DAX y FTSE100 muestran patrones visualmente similares, con una recuperación más progresiva después de los picos de volatilidad.

El S&P 500 presenta un comportamiento claramente distinguishible: aunque experimentó un fuerte incremento de la volatilidad en 2020, dicha oscilación se redujo con mayor rapidez en comparación con otros índices. Finalmente, las series correspondientes a IPSA e IPC evidencian una volatilidad persistente, con episodios puntuales de mayores fluctuaciones.

Figura 6

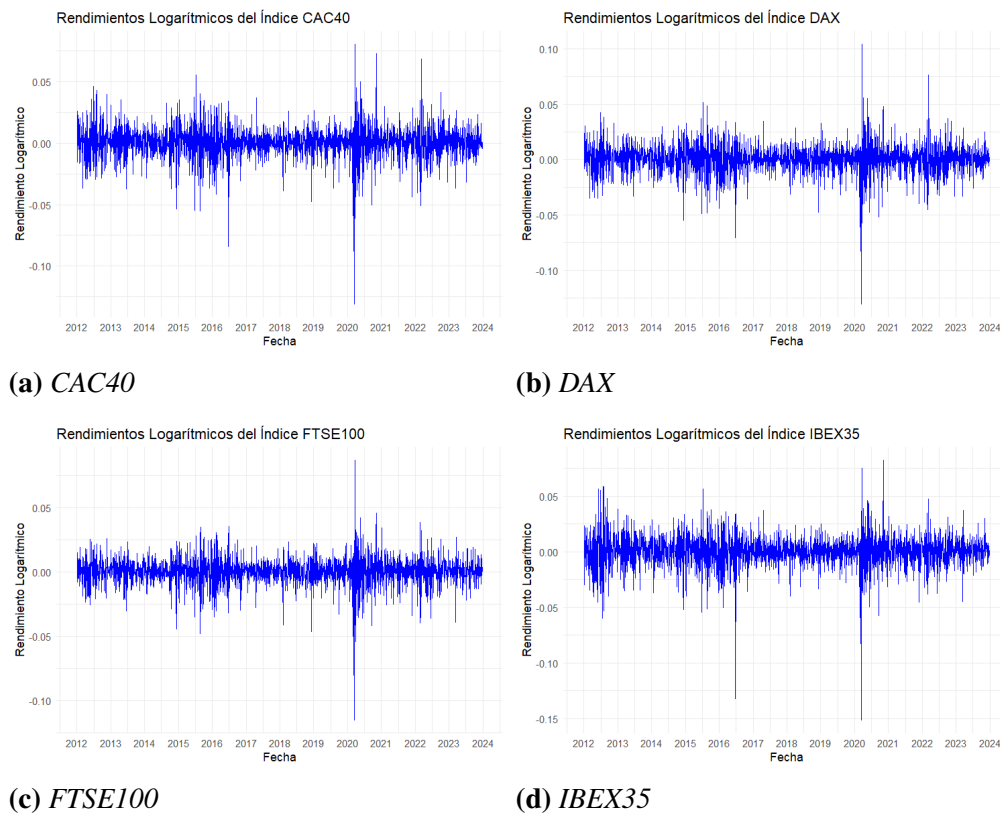
Evolución de los rendimientos logarítmicos de los índices bursátiles de América (2012-2023).



Fuente. Elaboración propia.

Figura 7

Evolución de los rendimientos logarítmicos de los índices bursátiles de Europa (2012-2023).



Fuente. Elaboración propia.

En la Tabla 4 se puede observar que el S&P 500 presenta la media más alta (0,0005), lo que sugiere un leve rendimiento positivo en comparación con los demás. En contraste, el IBEX35 muestra la media más baja (0,0001), evidenciando un retorno promedio menor.

Respecto a la desviación estándar el Bovespa presenta la desviación estándar más alta (0,0160), lo que indica una mayor volatilidad relativa en el mercado brasileño. Por otro lado, el FTSE100 y el IPC exhiben las desviaciones estándar más bajas (0,0103 y 0,0101, respectivamente), lo que refleja una menor volatilidad en estos mercados.

En cuanto a la asimetría, todos los índices muestran valores negativos, lo que indica dis-

tribuciones sesgadas hacia la izquierda, con una mayor probabilidad de caídas extremas. El IPSA presenta la asimetría más pronunciada (-0,9802), lo que sugiere una alta incidencia de movimientos negativos extremos. En contraste, el IPC exhibe la asimetría menos marcada (-0,2484), indicando una distribución más equilibrada de los rendimientos.

La curtosis muestra que las distribuciones de todos los índices presentan colas más pesadas que la distribución normal, un fenómeno característico de las series financieras. El IPSA registra la curtosis más elevada (22,3616), lo que implica una alta concentración de valores extremos. Por el contrario, el IPC tiene la curtosis más baja (6,6066), aunque aún por encima de lo esperado en una distribución normal.

Finalmente, los resultados de la prueba de Jarque-Bera y sus respectivos p-values confirman que las distribuciones de los rendimientos logarítmicos no siguen una distribución normal, ya que con un nivel de significancia del 5 %, los p-values iguales a 0,0000 en todos los casos permiten rechazar la hipótesis nula de normalidad.

Tabla 4

Estadísticas descriptivas de los índices bursátiles

Índice	Media	Desv. Estándar	Asimetría	Curtosis	Sesgo	Jarque-Bera	P-value JB
Bovespa	0,0003	0,0160	-0,6269	12,7538	-0,6269	10774	0,0000
CAC40	0,0003	0,0128	-0,6649	11,5077	-0,6649	8261	0,0000
DAX	0,0004	0,0128	-0,5108	11,4376	-0,5108	8048	0,0000
FTSE100	0,0001	0,0103	-0,8401	14,1480	-0,8401	14161	0,0000
IBEX35	0,0001	0,0138	-0,8986	14,0152	-0,8986	13878	0,0000
SP500	0,0005	0,0111	-0,4198	13,1513	-0,4198	11559	0,0000
SP_IPSA	0,0002	0,0118	-0,9802	22,3616	-0,9802	42195	0,0000
IPC	0,0002	0,0101	-0,2484	6,6066	-0,2484	1476	0,0000

Fuente. Elaboración propia.

En la muestra completa (Tabla 5), se aprecia que los índices europeos (CAC40, DAX, FTSE100 e IBEX35) mantienen altos niveles de correlación entre sí, con valores superiores a

0,75. Destaca la fuerte relación entre el CAC40 y el DAX (0,9337) y entre el FTSE100 y CAC40 (0,8595), lo cual refleja la alta integración económica y financiera de los mercados europeos. Por otro lado, los índices americanos, como el Bovespa, el S&P 500, el IPSA y el IPC, muestran correlaciones moderadas entre sí y con los índices europeos. El S&P 500 sobresale como el índice con mayor influencia en América, con correlaciones significativas con el Bovespa (0,5474) y el IPC (0,5585).

Tabla 5

Matriz de correlación entre índices bursátiles de la muestra completa

	Bovespa	CAC40	DAX	FTSE100	IBEX35	SP500	SP_IPSA	IPC
Bovespa	1,0000							
CAC40	0,4338	1,0000						
DAX	0,4114	0,9337	1,0000					
FTSE100	0,4040	0,8595	0,8274	1,0000				
IBEX35	0,4180	0,8648	0,8120	0,7593	1,0000			
SP500	0,5474	0,5922	0,5932	0,5554	0,5247	1,0000		
SP_IPSA	0,4246	0,3969	0,3892	0,3964	0,3564	0,4009	1,0000	
IPC	0,5123	0,4868	0,4669	0,4884	0,4477	0,5585	0,4177	1,0000

Fuente. Elaboración propia.

Durante el período pre-crisis (Tabla 6), los índices europeos mantienen una correlación elevada, aunque ligeramente inferior, con valores destacados entre el CAC40 y el DAX (0,9229) y entre el FTSE100 y CAC40 (0,8364). En contraste, los índices americanos muestran relaciones más débiles, ya que el Bovespa mantiene correlaciones moderadas con el S&P 500 (0,4571) y el IPC (0,4477). Sin embargo, el IPSA presenta las correlaciones más bajas del grupo, siendo su relación más significativa con el Bovespa (0,3998). Esto sugiere que, antes de la crisis, el mercado chileno tenía una menor dependencia externa en comparación con otros índices.

Tabla 6*Matriz de correlación entre índices bursátiles pre-crisis (antes del 20/01/2020)*

	Bovespa	CAC40	DAX	FTSE100	IBEX35	SP500	SP_IPSA	IPC
Bovespa	1,0000							
CAC40	0,3658	1,0000						
DAX	0,3374	0,9229	1,0000					
FTSE100	0,3718	0,8364	0,7996	1,0000				
IBEX35	0,3559	0,8508	0,7813	0,6975	1,0000			
SP500	0,471	0,5955	0,5765	0,5534	0,5254	1,0000		
SP_IPSA	0,3998	0,3647	0,3611	0,3726	0,3338	0,3563	1,0000	
IPC	0,4477	0,4273	0,4069	0,4097	0,3792	0,5353	0,4301	1,0000

Fuente. Elaboración propia.

En el período de crisis (Tabla 7), se evidencia un aumento significativo en las correlaciones entre los índices bursátiles, lo que sugiere un mayor contagio financiero global debido a la pandemia de COVID-19. Los índices europeos muestran un fortalecimiento de sus relaciones, con una correlación notable entre el CAC40 y el DAX (0,9498) y entre el FTSE100 y el CAC40 (0,8954).

El Bovespa presenta correlaciones más altas con el S&P 500 (0,6459) y el IPC (0,6024), lo que refleja una mayor sincronización de los mercados brasileño y mexicano con el estadounidense en este período. El IPSA también evidencia un aumento en sus correlaciones, alcanzando 0,4593 con el Bovespa y 0,4245 con el S&P 500, lo que sugiere un mayor impacto de los mercados globales sobre el mercado chileno durante la crisis.

En términos individuales, el índice chileno IPSA presenta, en los tres períodos analizados, una correlación generalmente baja con los demás índices. Sin embargo, durante la crisis, su relación con el Bovespa y el S&P 500 aumentó significativamente, lo que indica una mayor exposición del mercado chileno a las tensiones externas. Por otro lado, el índice brasileño Bovespa mantiene una fuerte correlación con los mercados americanos y europeos, con un aumento destacado durante la crisis, especialmente con el S&P 500 y el IPC.

En cuanto al índice estadounidense S&P 500, se mantiene como un referente importante en las tres etapas, mostrando correlaciones moderadas a altas con todos los índices, particularmente con el Bovespa y el IPC. Este comportamiento resalta la influencia del mercado estadounidense en América Latina y en los mercados globales, especialmente en períodos de alta volatilidad.

Tabla 7

Matriz de correlación entre índices bursátiles durante la crisis (20/01/2020 - 05/05/2023)

	Bovespa	CAC40	DAX	FTSE100	IBEX35	SP500	SP_IPSA	IPC
Bovespa	1,0000							
CAC40	0,5261	1,0000						
DAX	0,5073	0,9498	1,0000					
FTSE100	0,5525	0,8954	0,8678	1,0000				
IBEX35	0,5133	0,8958	0,8642	0,8587	1,0000			
SP500	0,6459	0,6110	0,6226	0,5741	0,5578	1,0000		
SP_IPSA	0,4593	0,4413	0,4244	0,4222	0,4066	0,4245	1,0000	
IPC	0,6024	0,5751	0,5528	0,6014	0,5582	0,6024	0,4263	1,0000

Fuente. Elaboración propia.

En síntesis, durante la crisis, las correlaciones entre los índices bursátiles aumentan significativamente, evidenciando un mayor contagio financiero y una sincronización global en respuesta a la pandemia. Los índices europeos mantienen una alta integración en los tres períodos analizados, mientras que los índices americanos, como el Bovespa y el S&P 500, incrementan su influencia en este contexto. Por su parte, el IPSA y el IPC, aunque muestran correlaciones más bajas en general, reflejan una mayor vulnerabilidad y exposición a factores externos durante la crisis.

6.2.1. Ajuste de datos

Para evaluar el comportamiento de los rendimientos logarítmicos de cada índice, se implementó un test de lags que permite identificar el número óptimo de rezagos en los modelos autoregresivos (AR). Se aplicaron distintas pruebas estadísticas con el objetivo de garantizar la

estacionariedad de las series y evaluar la presencia de problemas estructurales en los datos. Las pruebas realizadas son las siguientes:

1. **Prueba ADF (Augmented Dickey-Fuller):** Utilizada para verificar la estacionariedad de las series mediante las funciones `adf.test` de la librería `tseries` y `ur.df` de la librería `urca`, obteniendo los valores críticos y estadísticos correspondientes.
2. **Prueba ARCH:** Aplicada con la función `ArchTest` para detectar heterocedasticidad condicional en las series temporales.
3. **Prueba de heterocedasticidad de Breusch-Pagan:** Realizada mediante la función `bptest` de la librería `lmtest`, con el fin de evaluar la existencia de varianzas no constantes en los residuos de los modelos.
4. **Criterios de información AIC y BIC:** Calculados para seleccionar el modelo más parsimonioso y con el mejor ajuste posible.
5. **Prueba Ljung-Box:** Implementada con la función `Box.test`, para analizar la autocorrelación en los residuos y verificar su independencia.
6. **Prueba Durbin-Watson:** Utilizada para evaluar la autocorrelación de primer orden en los residuos de los modelos ajustados.

El análisis se llevó a cabo para cada índice en un rango de 1 a 10 lags, generando un reporte detallado de los resultados. Como se observa en los resultados presentados en las siguientes tablas 8, 9, 10, 11, 12, 13, 15 y 14, la prueba ADF confirma la estacionariedad de todas las series temporales, ya que los valores estadísticos obtenidos son negativos y altamente significativos, con un p-value

constante de 0,01 en todos los lags analizados. Esto asegura que los rendimientos logarítmicos no presentan raíz unitaria, condición esencial para la modelación AR.

En cuanto a la prueba ARCH, los resultados muestran p-valores extremadamente bajos (expresados en notación científica) en los primeros rezagos, confirmando la presencia de heterocedasticidad condicional en las series. Esta evidencia es característica de datos financieros y sugiere la necesidad de modelos que capturen la volatilidad dinámica de los rendimientos. Por su parte, la prueba de Breusch-Pagan, cuyos resultados se encuentran en las mismas tablas, indica p-valores iguales a 0 en todos los rezagos, corroborando la presencia de heterocedasticidad en los residuos.

Los criterios de información AIC y BIC presentan un comportamiento decreciente en los primeros lags y tienden a estabilizarse conforme los rezagos aumentan. En todas las tablas, el menor valor de AIC se alcanza en el primer rezago (AR(1)), lo que sugiere que este modelo es el más adecuado en términos de simplicidad y parsimonia. Al mismo tiempo, la prueba Ljung-Box evidencia que los residuos de los modelos AR(1) no presentan autocorrelación significativa para lags superiores, ya que los p-valores tienden rápidamente a valores cercanos a 1,0000.

Por último, el estadístico de Durbin-Watson se mantiene muy cercano a 2 en todos los rezagos y para todos los índices, lo cual indica la ausencia de autocorrelación de primer orden en los residuos, fortaleciendo la validez del modelo AR(1).

En conclusión, los resultados obtenidos en las pruebas ADF, ARCH, Breusch-Pagan, Ljung-Box y los criterios de información AIC y BIC permiten determinar que un modelo autoregresivo de orden 1 (AR(1)) es el más adecuado para modelar los rendimientos logarítmicos de los índices analizados. La elección del modelo AR(1), además de ser parsimoniosa y sencilla de interpretar, será la base para la implementación del modelo SWARCH en la siguiente etapa del análisis.

Bovespa**Tabla 8***Resultados de Pruebas Estadísticas para Bovespa*

Lag	ADF		ARCH PValue	Breusch-Pagan PValue	AIC/BIC		Ljung-Box PValue	Durbin-Watson Stat
	Stat	PValue			AIC	BIC		
1	-38,623	0,01	5,604E-170	0	-14522	-14504	0,9458	1,999928
2	-28,629	0,01	6,306E-186	0	-14524	-14500	0,9869	1,999829
3	-26,089	0,01	7,376E-211	0	-14538	-14508	0,9976	1,999767
4	-23,399	0,01	2,795E-212	0	-14540	-14505	0,9999	1,999754
5	-21,118	0,01	3,678E-211	0	-14539	-14497	1,0000	1,999754
6	-18,870	0,01	3,213E-211	0	-14537	-14490	1,0000	1,999751
7	-17,761	0,01	4,883E-210	0	-14538	-14485	1,0000	1,999768
8	-16,366	0,01	1,650E-209	0	-14536	-14477	1,0000	1,999767
9	-14,767	0,01	8,058E-211	0	-14536	-14471	1,0000	1,999757
10	-14,265	0,01	2,167E-213	0	-14542	-14471	1,0000	1,999750

CAC40**Tabla 9***Resultados de Pruebas Estadísticas para CAC40*

Lag	ADF		ARCH PValue	Breusch-Pagan PValue	AIC/BIC		Ljung-Box PValue	Durbin-Watson Stat
	Stat	PValue			AIC	BIC		
1	-36,434	0,01	8,3906E-08	0	-15732	-15714	0,9999	1,999381
2	-29,966	0,01	1,5741E-12	0	-15730	-15706	1,0000	1,999381
3	-26,571	0,01	1,1652E-79	0	-15728	-15698	1,0000	1,999380
4	-24,190	0,01	1,4643E-83	0	-15727	-15692	1,0000	1,999378
5	-21,067	0,01	3,4934E-85	0	-15727	-15686	1,0000	1,999383
6	-20,386	0,01	3,6026E-84	0	-15729	-15682	1,0000	1,999381
7	-18,756	0,01	2,7130E-94	0	-15732	-15679	1,0000	1,999379
8	-17,696	0,01	1,3250E-94	0	-15731	-15672	1,0000	1,999378
9	-16,926	0,01	7,9579E-94	0	-15729	-15664	1,0000	1,999376
10	-15,606	0,01	3,3013E-93	0	-15727	-15656	1,0000	1,999377

DAX**Tabla 10***Resultados de Pruebas Estadísticas para DAX*

Lag	ADF		ARCH PValue	Breusch-Pagan PValue	AIC/BIC		Ljung-Box PValue	Durbin-Watson Stat
	Stat	PValue			AIC	BIC		
1	-35,8049	0,01	0,0017	0	-15705	-15688	0,9991	1,999771
2	-29,4592	0,01	2,5137E-07	0	-15705	-15681	0,9996	1,999771
3	-26,3189	0,01	2,6648E-58	0	-15703	-15673	1,0000	1,999770
4	-23,5428	0,01	5,5389E-63	0	-15703	-15667	1,0000	1,999767
5	-20,6688	0,01	2,2421E-63	0	-15701	-15659	1,0000	1,999768
6	-20,0987	0,01	1,7590E-62	0	-15702	-15655	1,0000	1,999767
7	-18,3846	0,01	5,2570E-95	0	-15706	-15653	1,0000	1,999769
8	-17,2790	0,01	2,5873E-94	0	-15705	-15646	1,0000	1,999770
9	-16,5976	0,01	5,3751E-95	0	-15703	-15638	1,0000	1,999770
10	-15,4624	0,01	2,6567E-94	0	-15701	-15631	1,0000	1,999772

FTSE100**Tabla 11***Resultados de Pruebas Estadísticas para FTSE100*

Lag	ADF		ARCH PValue	Breusch-Pagan PValue	AIC/BIC		Ljung-Box PValue	Durbin-Watson Stat
	Stat	PValue			AIC	BIC		
1	-37,9652	0,01	7,30599E-17	0	-16876	-16858	0,98843	1,999856
2	-30,3485	0,01	1,61148E-17	0	-16877	-16853	0,99798	1,999839
3	-27,1355	0,01	4,33917E-98	0	-16875	-16846	0,99990	1,999841
4	-23,8089	0,01	2,00915E-97	0	-16877	-16841	0,99987	1,999848
5	-20,7533	0,01	2,41353E-96	0	-16875	-16834	0,99998	1,999847
6	-20,3186	0,01	1,71159E-95	0	-16877	-16830	1,00000	1,999832
7	-18,5581	0,01	3,43072E-137	0	-16883	-16830	1,00000	1,999794
8	-17,1537	0,01	1,529E-137	0	-16882	-16823	1,00000	1,999784
9	-16,4759	0,01	9,1847E-137	0	-16881	-16816	1,00000	1,999788
10	-15,5591	0,01	8,4266E-139	0	-16879	-16808	1,00000	1,999789

IBEX35**Tabla 12***Resultados de Pruebas Estadísticas para IBEX35*

Lag	ADF		ARCH PValue	Breusch-Pagan PValue	AIC/BIC		Ljung-Box PValue	Durbin-Watson Stat
	Stat	PValue			AIC	BIC		
1	-36,5103	0,01	1,00894E-5	0	-15316	-15298	0,9873	1,999380
2	-29,6874	0,01	2,53157E-7	0	-15314	-15291	0,9993	1,999387
3	-27,1473	0,01	1,46508E-23	0	-15312	-15283	0,9998	1,999387
4	-23,6471	0,01	5,7349E-26	0	-15318	-15282	0,9999	1,999386
5	-20,6811	0,01	1,36519E-25	0	-15316	-15275	1,0000	1,999377
6	-19,3380	0,01	2,37967E-25	0	-15318	-15271	1,0000	1,999375
7	-17,5364	0,01	1,05979E-30	0	-15317	-15264	1,0000	1,999374
8	-16,7686	0,01	2,02172E-30	0	-15317	-15258	1,0000	1,999366
9	-16,2585	0,01	2,90517E-30	0	-15315	-15251	1,0000	1,999363
10	-15,5664	0,01	5,27909E-32	0	-15314	-15244	1,0000	1,999369

SP500**Tabla 13***Resultados de Pruebas Estadísticas para S&P500*

Lag	ADF		ARCH PValue	Breusch-Pagan PValue	AIC/BIC		Ljung-Box PValue	Durbin-Watson Stat
	Stat	PValue			AIC	BIC		
1	-37,589	0,01	3,685E-116	0	-16500	-16482	0,9698	1,999939
2	-30,285	0,01	5,38E-161	0	-16498	-16474	0,9991	1,999927
3	-27,649	0,01	4,828E-173	0	-16496	-16466	0,9972	1,999925
4	-25,063	0,01	2,848E-173	0	-16503	-16467	0,9998	1,999892
5	-22,879	0,01	7,015E-175	0	-16503	-16461	1,0000	1,999888
6	-19,877	0,01	1,87E-181	0	-16501	-16454	1,0000	1,999893
7	-18,353	0,01	4,931E-187	0	-16506	-16453	1,0000	1,999892
8	-17,228	0,01	6,777E-186	0	-16504	-16445	1,0000	1,999898
9	-15,682	0,01	8,358E-186	0	-16502	-16438	1,0000	1,999898
10	-14,682	0,01	8,379E-185	0	-16505	-16434	1,0000	1,999894

IPSA

Tabla 14*Resultados de Pruebas Estadísticas para IPSA*

Lag	ADF		ARCH PValue	Breusch-Pagan PValue	AIC/BIC		Ljung-Box PValue	Durbin-Watson Stat
	Stat	PValue			AIC	BIC		
1	-36,7179	0,01	8,582E-95	0	-16200	-16182	0,6896	1,988893
2	-29,4166	0,01	7,909E-96	0	-16210	-16186	0,9978	1,999540
3	-25,0082	0,01	7,984E-97	0	-16209	-16179	0,9950	1,999512
4	-23,1454	0,01	3,804E-98	0	-16208	-16173	0,9985	1,999951
5	-20,5198	0,01	2,244E-98	0	-16208	-16167	1,0000	1,999950
6	-19,3158	0,01	3,438E-104	0	-16208	-16161	1,0000	1,999967
7	-18,6687	0,01	1,268E-107	0	-16207	-16154	1,0000	1,999967
8	-17,9761	0,01	1,222E-108	0	-16207	-16148	1,0000	1,999994
9	-16,4042	0,01	8,781E-108	0	-16207	-16142	1,0000	2,000015
10	-15,1619	0,01	8,586E-108	0	-16208	-16137	1,0000	2,000024

IPC

Tabla 15*Resultados de Pruebas Estadísticas para IPC*

Lag	ADF		ARCH PValue	Breusch-Pagan PValue	AIC/BIC		Ljung-Box PValue	Durbin-Watson Stat
	Stat	PValue			AIC	BIC		
1	-37,6385	0,01	4,0574E-18	0	-16996	-16978	0,8480	1,999437
2	-31,4522	0,01	2,7185E-26	0	-17004	-16980	0,9898	1,999827
3	-26,8992	0,01	2,1378E-92	0	-17005	-16975	1,0000	1,999870
4	-24,1506	0,01	1,534E-91	0	-17003	-16967	1,0000	1,999869
5	-21,5506	0,01	6,3643E-93	0	-17001	-16960	1,0000	1,999863
6	-20,0899	0,01	1,1848E-94	0	-17000	-16952	1,0000	1,999859
7	-18,3839	0,01	6,342E-96	0	-16998	-16945	1,0000	1,999841
8	-16,8502	0,01	7,774E-101	0	-16997	-16938	1,0000	1,999830
9	-15,8170	0,01	7,048E-100	0	-16997	-16932	1,0000	1,999821
10	-15,2482	0,01	2,26E-104	0	-16995	-16924	1,0000	1,999826

6.3. Análisis univariado del Modelo SWARCH

Para explorar si las varianzas de las series estudiadas son dependientes del estado y realizar un análisis de cópulas, los retornos logarítmicos se ajustan a través de modelos **Switching-ARCH** (**SWARCH**). Estos modelos permiten capturar de manera efectiva períodos de alta y baja volatilidad, al incorporar cambios de régimen en la varianza condicional mediante un proceso de **Markov**,

lo que los hace particularmente adecuados para analizar dinámicas de volatilidad en series financieras durante contextos de estabilidad y crisis.

El procedimiento inicia con una **iteración sistemática** sobre diferentes combinaciones de parámetros, donde los residuos se modelan utilizando una **distribución t-Student**. Esta distribución es preferida en el contexto financiero por su capacidad para capturar **colas pesadas** en los retornos de activos, un fenómeno común durante períodos de crisis. En particular, se exploran valores del número de regímenes K , que representan los niveles de varianza, y el orden de rezagos Q en la estructura ARCH. Para este estudio, se consideran combinaciones donde $K \leq 2$ y $Q \leq 2$. La elección final de $K = 2$ corresponde a la existencia de **dos regímenes** de volatilidad: uno de **baja volatilidad**, típico de períodos de calma, y otro de **alta volatilidad**, característico de crisis financieras. Por su parte, el rezago $Q = 1$ permite capturar la influencia de los choques pasados inmediatos sobre la varianza condicional.

Una vez seleccionada la estructura óptima mediante el **Criterio de Información de Akaike (AIC)** y otras métricas de ajuste, se obtiene el modelo **SWARCH(2,1)** ajustado bajo la distribución t-Student. En este modelo, la varianza condicional σ_t^2 se define como:

$$\sigma_t^2 = a_0^{(S_t)} + a_1^{(S_t)} \epsilon_{t-1}^2, \quad \epsilon_t \sim t(\nu), \quad (129)$$

donde $a_0^{(S_t)}$ y $a_1^{(S_t)}$ representan los términos constantes y los coeficientes ARCH específicos para cada régimen, respectivamente, y $t(\nu)$ denota la distribución t-Student con grados de libertad ν . Aquí, S_t sigue un proceso de cambio de régimen de Markov, gobernado por una **matriz de transición** P con elementos P_{11} y P_{22} , que representan las probabilidades de permanecer en los regímenes de baja y alta volatilidad, respectivamente.

La estimación de los parámetros del modelo se realiza mediante el método de **máxima verosimilitud (ML)**, el cual optimiza la función de verosimilitud conjunta de los retornos observados, garantizando así que los coeficientes, las probabilidades de transición entre regímenes y los grados de libertad de la distribución t-Student sean óptimos y estables. Una vez ajustado el modelo, se procede a validar la estimación verificando la **convergencia de la matriz Hessiana**. Esta matriz, que caracteriza la curvatura de la función de verosimilitud alrededor de su máximo, debe ser **invertible** para confirmar la estabilidad de la solución. La invertibilidad se asegura evaluando los **valores propios** de la matriz, donde la condición de positividad indica que se ha alcanzado un óptimo local adecuado.

Los resultados obtenidos para los mercados de **América y Europa**, en base a la Tabla 16 y Tabla 17 respectivamente, muestran que los parámetros P_{11} y P_{22} son cercanos a 1, lo que indica que tanto la **baja volatilidad** como la **alta volatilidad** son estados **persistentes**. Por ejemplo, los índices IPC e IPSA presentan valores particularmente altos de P_{11} (0,9976 y 0,9956), reflejando una notable estabilidad en períodos de baja volatilidad. En contraste, índices como SP500 y FTSE100 muestran valores ligeramente menores, lo que sugiere una mayor probabilidad de transición hacia estados de alta volatilidad.

El parámetro g , que mide la **sensibilidad** del modelo a los cambios en la volatilidad, resulta significativamente mayor en algunos índices como **Bovespa** (0,3713) y **DAX** (0,2599), sugiriendo que estos mercados son más reactivos a choques de volatilidad. Por otro lado, los coeficientes ARCH (a_1) en el régimen de alta volatilidad indican una mayor respuesta a los choques previos, siendo más pronunciados en índices europeos como **FTSE100**.

El parámetro ϕ , que captura la **persistencia** de la volatilidad, presenta valores más elevados en el mercado americano, especialmente en el índice **Bovespa**. Esto sugiere que los choques en la

volatilidad tienden a durar más tiempo en este mercado en comparación con otros índices, como **CAC40** o **IBEX35**.

En términos de ajuste del modelo, las métricas AIC y BIC confirman que la especificación **SWARCH(2,1)** proporciona un ajuste robusto en todas las series analizadas. El índice **SP500** en América y el **FTSE100** en Europa muestran los valores más bajos de AIC y BIC, lo que sugiere un ajuste superior en estos mercados. Por último, los valores del **p-value** reportados para todos los índices son cercanos a 0, lo que indica que el modelo **SWARCH(2,1)** es **estadísticamente significativo**, lo cual sugiere que la incorporación de regímenes de volatilidad mejora significativamente el ajuste del modelo, respaldando la presencia de cambios estructurales en la varianza condicional de las series analizadas.

Tabla 16

Resultados univariados del modelo SWARCH(2,1): mercado Americano

Parámetro	Bovespa	SP500	IPSA	IPC
P_{11}	0,9945	0,9809	0,9956	0,9976
P_{22}	0,9709	0,9686	0,9903	0,9500
g	0,3713	0,1961	0,1800	0,1276
$a_{0_{reg1}}$	0,0002	0,0000	0,0000	0,0001
$a_{1_{reg1}}$	0,0008	0,0469	0,0968	0,1184
$a_{0_{reg2}}$	0,0004	0,0002	0,0003	0,0006
$a_{1_{reg2}}$	0,2832	0,2187	0,1275	0,0342
v_{reg1}	0,0002	0,0000	0,0000	0,0001
v_{reg2}	0,0004	0,0002	0,0003	0,0006
μ_{reg1}	0,0002	0,0001	0,0001	0,0001
μ_{reg2}	0,0005	0,0003	0,0003	0,0006
ϕ	0,0236	0,0122	0,0053	0,0477
LF	7.552	8.831	8.687	8.695
LF*	7.497	8.699	8.569	8.654
p-value	0,000	0,000	0,000	0,000
AIC	-15.088	-17.647	-17.359	-17.375
BIC	-15.041	-17.600	-17.312	-17.328

Nota.

LF = valor máximo de la función de verosimilitud.

LF* = valor máximo de la función de verosimilitud restringida (sin cambio de régimen).

p-value = valor de probabilidad de una prueba LR estándar (nula = sin cambio de régimen).

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 17*Resultados univariados del modelo SWARCH(2,1): mercado Europeo*

Parámetro	CAC40	DAX	FTSE100	IBEX35
P_{11}	0,9877	0,9943	0,9878	0,9912
P_{22}	0,9783	0,9864	0,9616	0,9706
g	0,2336	0,2599	0,2144	0,2133
a_{0reg1}	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001
a_{1reg1}	0,0703	0,0341	0,1109	0,0425
a_{0reg2}	0,0003	0,0003	0,0002	0,0004
a_{1reg2}	0,1044	0,0003	0,1771	0,0724
v_{reg1}	0,0001	0,0001	0,0000	0,0001
v_{reg2}	0,0003	0,0003	0,0002	0,0004
μ_{reg1}	0,0001	0,0001	0,0001	0,0001
μ_{reg2}	0,0003	0,0003	0,0002	0,0004
ϕ	0,0095	0,0079	0,0262	0,0206
LF	8.267	8.206	8.872	8.039
LF*	8.182	8.119	8.804	7.954
p-value	0,000	0,000	0,0000	0,0000
AIC	-16.518	-16.396	-17.728	-16.062
BIC	-16.471	-16.349	-17.681	-16.015

LF = valor máximo de la función de verosimilitud.

LF* = valor máximo de la función de verosimilitud restringida (sin cambio de régimen).

p-value = valor de probabilidad de una prueba LR estándar (nula = sin cambio de régimen).

Fuente. Elaboración propia.

El análisis visual de las probabilidades suavizadas obtenidas del modelo SWARCH(2,1) complementa los resultados observados en las tablas paramétricas para los mercados de América y Europa (Figura 8 y Figura 9). En general, se confirma la persistencia del Régimen 1 (baja volatilidad) durante largos períodos, con transiciones abruptas al Régimen 2 (alta volatilidad) en momentos específicos.

En el Bovespa, el Régimen 1 domina la mayor parte del tiempo, mientras que el Régimen 2 surge de forma puntual, reflejando episodios de inestabilidad. Un comportamiento similar se observa en el SP500, aunque con mayor frecuencia de alternancia entre regímenes, especialmente en años como 2015, 2018 y 2020.

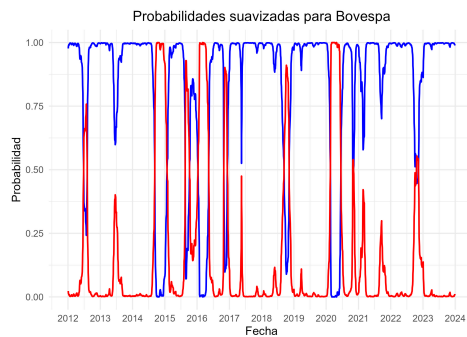
En los mercados europeos, como el CAC40 y el DAX, las probabilidades suavizadas mues-

tran transiciones más frecuentes entre regímenes, evidenciando una mayor exposición a períodos de alta volatilidad. Tanto el FTSE100 como el IBEX35 presentan patrones similares, con episodios recurrentes de Régimen 2 intercalados con períodos más estables.

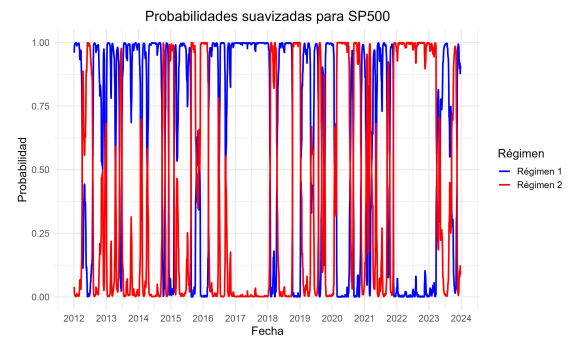
Por su parte, los índices de América Latina, como el IPC y el IPSA, exhiben una predominancia clara del Régimen 1, interrumpida por picos de Régimen 2 que indican crisis puntuales. Estos cambios son más abruptos y menos recurrentes en comparación con los índices europeos.

Figura 8

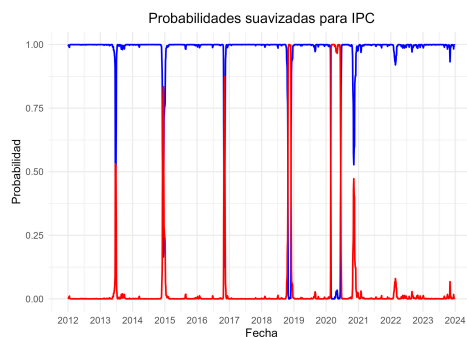
Probabilidades suavizadas de los regímenes para los índices del continente América.



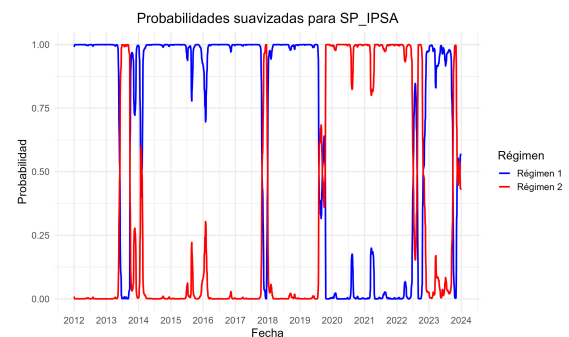
(a) *Bovespa*



(b) *SP500*



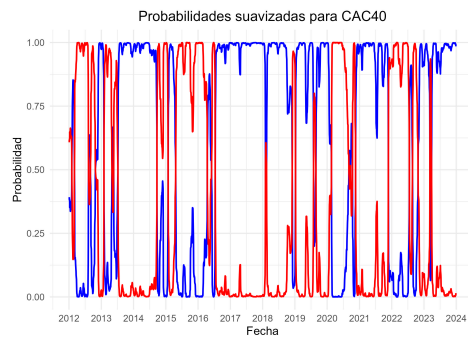
(c) *IPC*



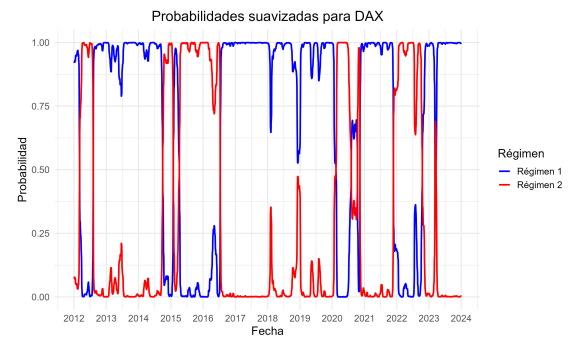
(d) *SP_IPSA*

Figura 9

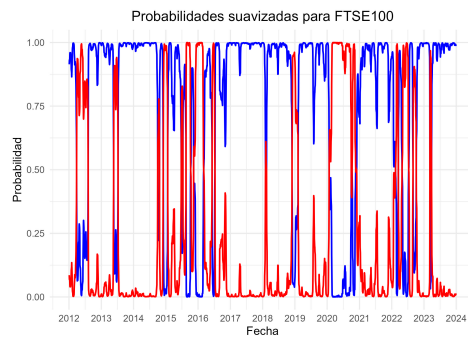
Probabilidades suavizadas de los regímenes para los índices del continente Europa.



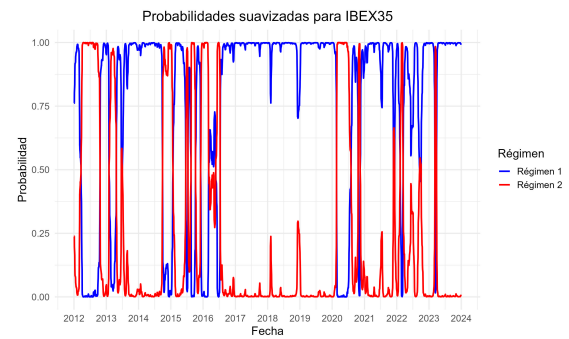
(a) CAC40



(b) DAX



(c) FTSE100



(d) IBEX35

7. Análisis de cópulas

El siguiente análisis es el resultado del ajuste bivariado de las series de los residuales previamente mencionados. En este análisis se estudia la dependencia entre los pares de índices bur-sátiles mediante el ajuste de diferentes familias de cópulas: T-Student, Clayton, Frank y Gumbel. Las métricas obtenidas permiten evaluar la capacidad de cada cópula para capturar la estructura de dependencia bajo diferentes regímenes, así como seleccionar la mejor representación mediante criterios estadísticos (CVM y Akaike).

Es importante mencionar que, posterior a seleccionar la cópula que mejor represente el par de índices, se procede a realizar una simulación de datos bajo un modelo con cambio de régimen, la cual permite generar datos sintéticos que preservan la estructura de dependencia estimada y facilita un análisis detallado en diferentes contextos.

En base a lo anterior, para visualizar la dependencia conjunta entre las variables, se estiman las curvas de nivel utilizando la técnica no paramétrica de Kernel Density Estimation (KDE). La ecuación general de la estimación de densidad bidimensional se expresa como:

$$\hat{f}(x, y) = \frac{1}{nh_x h_y} \sum_{i=1}^n K\left(\frac{x - x_i}{h_x}\right) K\left(\frac{y - y_i}{h_y}\right), \quad (130)$$

donde $\hat{f}(x, y)$ es la densidad estimada en el punto (x, y) , n es el número total de observaciones, K es la función kernel utilizada (generalmente una distribución normal), y h_x y h_y son los parámetros de suavizamiento (bandwidth) para cada variable, representando la probabilidad conjunta de ocurrencia de los valores simulados.

7.1. Análisis de par de índices de América

7.1.1. Bovespa - IPC

El análisis se enfoca en la dependencia entre los índices bursátiles Bovespa (Brasil) y IPC (México) mediante modelos de cópulas con cambio de régimen de Markov, evaluando los resultados de las tablas 18, 19 y 20.

La cópula Frank emerge como la opción más adecuada debido a su menor valor de AIC (-747,80) y un estadístico de Crámer-von Mises moderado (0,0830), lo que indica un ajuste global eficiente. Aunque la Frank no captura la dependencia en las colas ($\lambda_L = 0,0000$ y $\lambda_U = 0,0000$), su desempeño general es aceptable. Además, a pesar de que su p-valor es 0,0000, lo cual indica una alta significancia estadística, este resultado debe interpretarse con cautela debido a las limitaciones en eventos extremos.

Por otro lado, la cópula t-Student, si bien presenta métricas de calidad equilibradas como un CVM bajo (0,0599) y valores consistentes en la prueba KS (0,6215 y 0,6227), no puede considerarse una opción viable debido a su p-valor elevado (0,8212), indicando que el modelo no es estadísticamente significativo, lo cual invalida su uso a pesar de su flexibilidad para capturar colas pesadas.

La cópula Clayton, aunque presenta un AIC competitivo (-699,07), exhibe un ajuste deficiente reflejado en un CVM extremadamente alto (13,9599). Además, su fuerte asimetría hacia la cola inferior limita su aplicabilidad en un análisis que requiere un ajuste balanceado en ambos regímenes. Finalmente, la cópula Gumbel, con un AIC intermedio (-651,65) y un CVM más elevado (0,1613), captura adecuadamente la dependencia en la cola superior ($\lambda_U = 0,4794$), pero su desempeño general es inconsistente, especialmente en el régimen de baja volatilidad.

Entonces se utiliza la cópula de Frank para modelar la relación entre este par de índices, ya que de forma global la hace estadísticamente relevante para representar la dependencia entre los índices, aunque con limitaciones en la captura de eventos extremos.

Tabla 18*Resumen de parámetros para Bovespa-IPC*

Cópula	π_L	π_H	θ_1	θ_2	$\nu(global)$
T-Student	0,5013	0,4996	0,4731	0,4444	12,6184
Clayton	0,8468	0,9552	1,9791	0,4506	-
Frank	0,8824	0,8332	4,5724	1,2923	-
Gumbel	0,5035	0,5350	1,6539	1,2045	-

Nota. π_L representa la probabilidad de pertenecer al régimen de baja dependencia, mientras que π_H es la probabilidad de pertenecer al régimen de alta dependencia. θ_1 y θ_2 corresponden a los parámetros de dependencia en los regímenes de baja y alta dependencia, respectivamente. $\nu(global)$ indica los grados de libertad globales del modelo, aplicables únicamente a la cópula T-Student.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 19*Métricas de dependencia para Bovespa-IPC*

Cópula	Q_{10}	Q_{01}	λ_L	λ_U	τ_L	τ_U
T-Student	0,4987	0,5004	0,0450	0,0386	0,3137	0,2931
Clayton	0,1532	0,0448	0,7045	0,0000	0,4974	0,1839
Frank	0,1176	0,1668	0,0000	0,0000	0,4288	0,1413
Gumbel	0,4965	0,4650	0,0000	0,4794	0,3954	0,1698

Nota. λ_L representa la probabilidad de eventos extremos en la cola inferior, y λ_U describe la probabilidad de eventos extremos en la cola superior. τ_L corresponde a la dependencia ordinal (Tau de Kendall) en el régimen de baja dependencia, y τ_U a la dependencia ordinal en el régimen de alta dependencia.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 20*Métricas de calidad para Bovespa-IPC*

Cópula	CVM	KS Stat (Regime 1)	KS Stat (Regime 2)	LF	LF*	p value	AIC
T-Student	0,0599	0,6215	0,6227	319,45	318,99	0,8212	-628,91
Clayton	13,9599	0,0907	0,0157	353,53	185,57	0,0000	-699,07
Frank	0,0830	0,0442	0,0178	377,90	293,63	0,0000	-747,80
Gumbel	0,1613	0,0442	0,0226	329,83	-2596,78	0,0000	-651,65

CVM = estadístico de la prueba de Crámer-von Mises.

KS Stat = Estadístico de la prueba de Kolmogórov-Smirnov para régimen 1 y 2.

LF = valor máximo de la función de verosimilitud.

LF* = valor máximo de la función de verosimilitud restringida (sin cambio de régimen).

p-value = valor de probabilidad de una prueba LR estándar (nula = sin cambio de régimen).

Fuente. Elaboración propia.

En el régimen de baja volatilidad (Figura 10), las curvas de nivel presentan una mayor concentración de densidad en las áreas centrales del gráfico, alcanzando valores de probabilidad de aproximadamente 0.6. Las pseudo-observaciones se agrupan predominantemente en sectores intermedios, reflejando una dependencia moderada en este contexto. El parámetro $\theta_1 = 4,5724$ de la cópula de Frank confirma esta dependencia moderada, respaldada por los valores de $\tau_L = 42,88\%$ y $\tau_U = 14,13\%$, que evidencian una mayor correlación en condiciones de baja volatilidad. Estos resultados sugieren que los movimientos conjuntos entre los índices están más sincronizados bajo condiciones normales, una característica típica de entornos de menor incertidumbre.

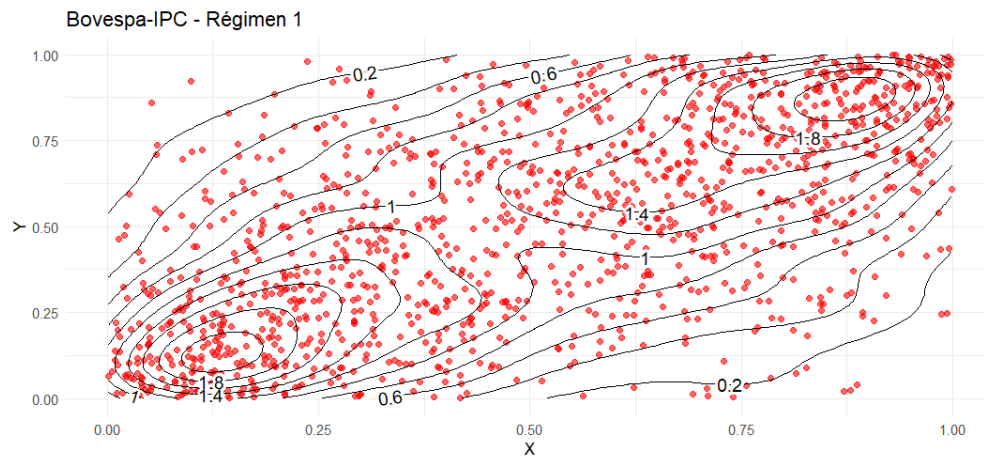
Por otro lado, en el régimen de alta volatilidad (Figura 11), las curvas de nivel muestran una dispersión más amplia y una disminución general en los valores de probabilidad, con máximos cercanos a 1.2 en las áreas centrales. Las pseudo-observaciones se distribuyen hacia regiones más extremas del gráfico, reflejando una mayor heterogeneidad en la dependencia. El parámetro $\theta_2 = 1,2923$ evidencia una menor dependencia global en comparación con el régimen de baja volatilidad, consistente con los valores reducidos de τ_L y τ_U . La dispersión de las curvas de nivel y la expansión de las pseudo-observaciones hacia los extremos indican un comportamiento más

independiente entre los índices durante períodos de alta incertidumbre.

El análisis de ambos regímenes revela que la relación entre los índices Bovespa e IPC es más fuerte y consistente bajo condiciones de baja volatilidad, como lo demuestran la mayor densidad en las regiones centrales y los parámetros de dependencia elevados. En contraste, la alta volatilidad reduce significativamente la correlación y promueve una mayor independencia entre los índices, reflejando un entorno financiero más incierto y heterogéneo.

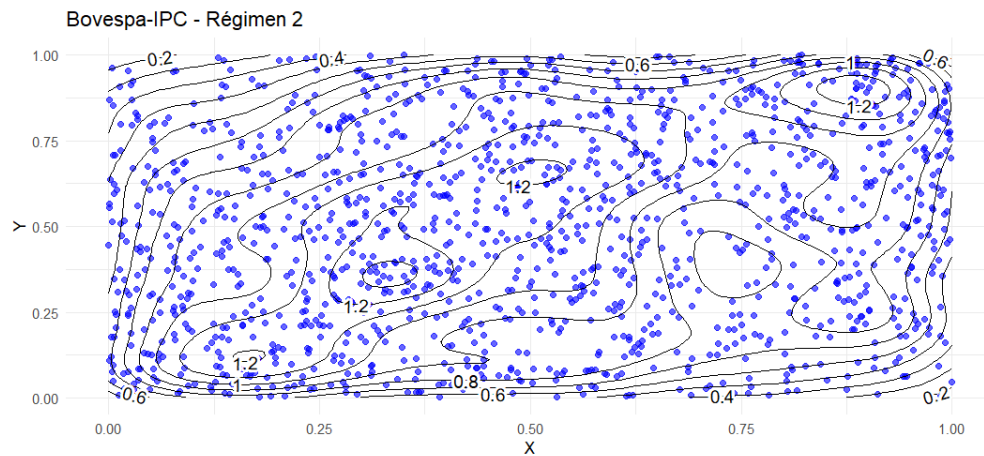
Figura 10

Diagrama de dispersión de Bovespa-IPC Régimen 1 (baja volatilidad)



Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Frank con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

Figura 11*Diagrama de dispersión de Bovespa-IPC Régimen 2 (alta volatilidad)*

Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Frank con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

7.1.2. Bovespa - IPSA

El análisis se enfoca en la dependencia entre los índices bursátiles Bovespa (Brasil) y IPSA (Chile) mediante modelos de cópulas con cambio de régimen de Markov, evaluando los resultados de las tablas 21, 22 y 23.

La cópula Frank destaca como la opción más adecuada debido a su ajuste consistente y robusto. Presenta el menor estadístico de CVM con un valor de 0,0345 y resultados favorables en las pruebas KS para ambos regímenes, con valores de 0,0316 y 0,0137. Aunque su AIC de -515,95 es ligeramente superior al de la cópula Gumbel, las métricas de calidad respaldan su capacidad para modelar adecuadamente la dependencia entre estos índices. Sin embargo, se observa una limitación en su incapacidad para capturar eventos extremos.

Por otro lado, la cópula t-Student, aunque equilibrada en sus parámetros entre regímenes ($\theta_1 = 0,4276$ y $\theta_2 = 0,3959$), es descartada debido a su p-valor elevado de 0,8050, lo que indica

falta de significancia estadística. A pesar de tener métricas de ajuste aceptables como un CVM de 0,0852 y valores consistentes de KS, estos resultados no son suficientes para considerarla como la mejor opción. La cópula Clayton, aunque con un AIC competitivo de -517,93, presenta un CVM elevado de 11,6552 y un desempeño débil en el régimen de baja volatilidad, lo que evidencia problemas de ajuste general. Finalmente, la cópula Gumbel, a pesar de capturar la dependencia en la cola superior ($\lambda_U = 0,4554$) y contar con el menor AIC de -543,29, es descartada debido a su CVM alto de 0,1693 y una falta de robustez en las pruebas KS.

En conclusión, la cópula Frank es la que mejor modela la relación entre Bovespa e IPSA, dado su ajuste general robusto y métricas de bondad de ajuste consistentes, a pesar de no capturar eventos extremos. Las demás cópulas presentan limitaciones significativas en su ajuste o carecen de significancia estadística, lo que las excluye como opciones viables.

Tabla 21*Resumen de parámetros para Bovespa-IPSA*

Cópula	π_L	π_H	θ_1	θ_2	$\nu(global)$
T-Student	0,5011	0,4991	0,4276	0,3959	13,2442
Clayton	0,4621	0,5293	0,9749	0,3022	-
Frank	0,5035	0,4997	3,6602	1,7167	-
Gumbel	0,4972	0,5041	1,5944	1,1321	-

Nota. π_L representa la probabilidad de pertenecer al régimen de baja dependencia, mientras que π_H es la probabilidad de pertenecer al régimen de alta dependencia. θ_1 y θ_2 corresponden a los parámetros de dependencia en los regímenes de baja y alta dependencia, respectivamente. $\nu(global)$ indica los grados de libertad globales del modelo, aplicables únicamente a la cópula T-Student.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 22

Métricas de dependencia para Bovespa-IPSA

Cópula	Q_{10}	Q_{01}	λ_L	λ_U	τ_L	τ_U
T-Student	0,4989	0,5009	0,0312	0,0261	0,2813	0,2591
Clayton	0,5379	0,4707	0,4912	0,0000	0,3277	0,1313
Frank	0,4965	0,5003	0,0000	0,0000	0,3621	0,1854
Gumbel	0,5028	0,4959	0,0000	0,4554	0,3728	0,1167

Nota. λ_L representa la probabilidad de eventos extremos en la cola inferior, y λ_U describe la probabilidad de eventos extremos en la cola superior. τ_L corresponde a la dependencia ordinal (Tau de Kendall) en el régimen de baja dependencia, y τ_U a la dependencia ordinal en el régimen de alta dependencia.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 23

Métricas de calidad para Bovespa-IPSA

Cópula	CVM	KS Stat (Regime 1)	KS Stat (Regime 2)	LF	LF*	p value	AIC
T-Student	0,0852	0,6171	0,6185	251,98	251,49	0,8050	-493,96
Clayton	11,6552	0,0366	0,0178	262,96	114,67	0,0000	-517,93
Frank	0,0345	0,0316	0,0137	261,98	231,19	0,0000	-515,95
Gumbel	0,1693	0,0371	0,0208	275,65	-2995,91	0,0000	-543,29

CVM = estadístico de la prueba de Crámer-von Mises.

KS Stat = Estadístico de la prueba de Kolmogórov-Smirnov para régimen 1 y 2.

LF = valor máximo de la función de verosimilitud.

LF* = valor máximo de la función de verosimilitud restringida (sin cambio de régimen).

p-value = valor de probabilidad de una prueba LR estándar (nula = sin cambio de régimen).

Fuente. Elaboración propia.

En el régimen de baja volatilidad (Figura 12), las curvas de nivel presentan una notable concentración en las áreas centrales del gráfico, alcanzando probabilidades máximas cercanas a 1.4. Este comportamiento evidencia una dependencia significativa entre los índices Bovespa e IPSA, reflejada en la distribución predominante de las pseudo-observaciones en sectores intermedios. El parámetro $\theta_1 = 3,6602$ de la cópula de Frank confirma una dependencia global moderada, respaldada por los valores de Tau de Kendall, que destacan una correlación más fuerte en las colas inferiores que en las superiores, lo cual indica que, en condiciones a la baja del mercado, los movimientos conjuntos de los índices están más sincronizados, sugiriendo un contagio financiero más

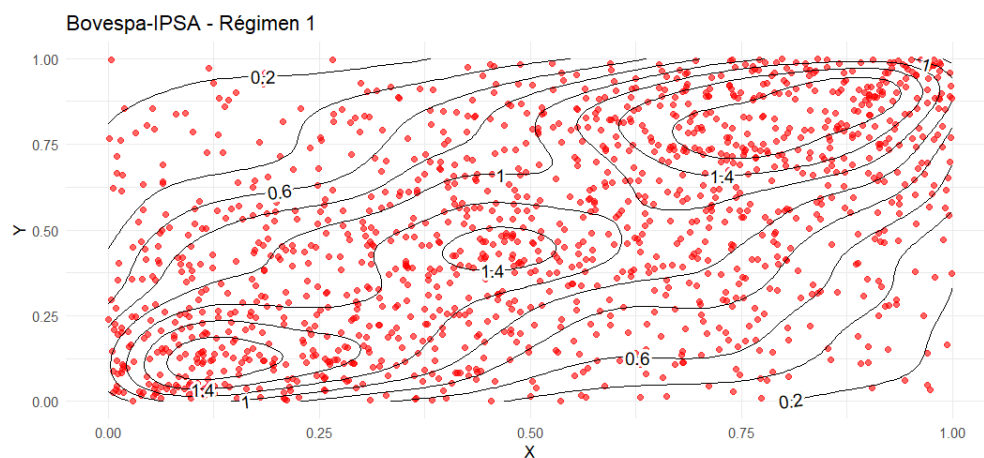
acentuado en este régimen.

En el régimen de alta volatilidad (Figura 13), las curvas de nivel se dispersan significativamente, y las probabilidades máximas descienden a valores cercanos a 1.3, con las pseudo-observaciones extendiéndose hacia las regiones extremas del gráfico. Este patrón refleja una disminución en la dependencia entre los índices, consistente con el parámetro $\theta_2 = 1,7167$, que evidencia una reducción notable en la sincronización conjunta. Los valores de Tau de Kendall confirman esta tendencia, mostrando una menor correlación en las superiores, lo que indica una mayor independencia entre los índices bajo condiciones de alta incertidumbre.

En conjunto, el análisis muestra que la relación entre los índices Bovespa e IPSA es más pronunciada en entornos de baja volatilidad, donde se observa una mayor densidad en las regiones centrales del gráfico y parámetros de dependencia más elevados. En contraste, la alta volatilidad atenúa significativamente el contagio financiero, reflejado en la dispersión de las curvas de nivel y la reducción de los parámetros de dependencia.

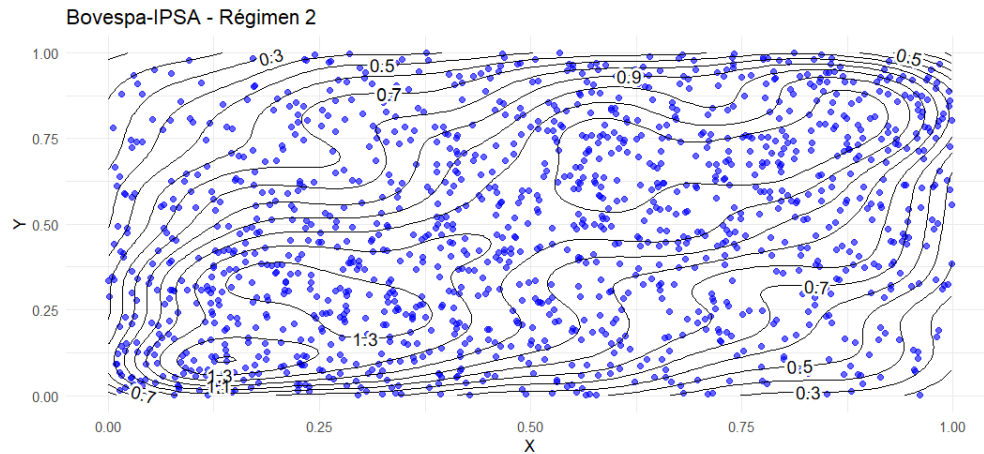
Figura 12

Diagrama de dispersión de Bovespa-IPSA Régimen 1 (baja volatilidad)



Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Frank con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

Figura 13*Diagrama de dispersión de Bovespa-IPSA Régimen 2 (alta volatilidad)*

Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Frank con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

7.1.3. Bovespa - SP500

El análisis se enfoca en la dependencia entre los índices bursátiles Bovespa (Brasil) y SP500 (Estados Unidos) mediante modelos de cópulas con cambio de régimen de Markov, evaluando los resultados de las tablas 24, 25 y 26.

La cópula Frank presenta el menor AIC (-841,82) y métricas aceptables de calidad. Aunque el estadístico de CVM de 0,1691 es superior al de otras opciones como la t-Student, sus valores en las pruebas KS, tanto para el Régimen 1 como para el Régimen 2 (0,0176 y 0,0606, respectivamente), sugieren un ajuste consistente.

Por otro lado, la cópula t-Student presenta parámetros balanceados entre regímenes ($\theta_1 = 0,4694$ y $\theta_2 = 0,4713$), reflejando una dependencia moderada y simétrica. Sus métricas de calidad incluyen un CVM de 0,0999 y valores consistentes en las pruebas KS (0,6179 y 0,6178), pero su p-valor elevado (0,8879) la excluye como una opción válida, ya que no cumple con la significancia

estadística requerida.

La cópula Clayton, a pesar de lograr un AIC competitivo de -720,25, presenta un CVM elevado de 15,2704, indicando un ajuste general deficiente. Además, su fuerte dependencia en la cola inferior ($\lambda_L = 0,1805$) y la falta de flexibilidad en la cola superior ($\lambda_U = 0,0000$) limitan su aplicabilidad en este análisis. Finalmente, la cópula Gumbel, aunque captura la dependencia en la cola superior ($\lambda_U = 0,2264$), presenta inconsistencias en las métricas de calidad, como un CVM elevado de 0,3347, lo que la descarta como una opción robusta, a pesar de su AIC intermedio de -703,66.

Finalmente, se puede decir la cópula Frank sobresale como la mejor opción para modelar la relación entre los índices Bovespa y SP500 debido a su menor AIC y ajuste consistente en las pruebas KS.

Tabla 24

Resumen de parámetros para Bovespa-SP500

Cópula	π_L	π_H	θ_1	θ_2	$\nu(global)$
T-Student	0,4995	0,5006	0,4694	0,4713	10,7145
Clayton	0,9774	0,9695	0,4049	1,2676	-
Frank	0,7956	0,7971	1,3204	5,3575	-
Gumbel	0,9812	0,9770	1,2097	1,7225	-

Nota. π_L representa la probabilidad de pertenecer al régimen de baja dependencia, mientras que π_H es la probabilidad de pertenecer al régimen de alta dependencia. θ_1 y θ_2 corresponden a los parámetros de dependencia en los regímenes de baja y alta dependencia, respectivamente. $\nu(global)$ indica los grados de libertad globales del modelo, aplicables únicamente a la cópula T-Student.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 25

Métricas de dependencia para Bovespa-SP500

Cópula	Q_{10}	Q_{01}	λ_L	λ_U	τ_L	τ_U
T-Student	0,5005	0,4994	0,0627	0,0632	0,3111	0,3124
Clayton	0,0226	0,0305	0,1805	0,0000	0,1683	0,3879
Frank	0,2044	0,2029	0,0000	0,0000	0,1442	0,4784
Gumbel	0,0188	0,0230	0,0000	0,2264	0,1733	0,4194

Nota. λ_L representa la probabilidad de eventos extremos en la cola inferior, y λ_U describe la probabilidad de eventos extremos en la cola superior. τ_L corresponde a la dependencia ordinal (Tau de Kendall) en el régimen de baja dependencia, y τ_U a la dependencia ordinal en el régimen de alta dependencia.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 26

Métricas de calidad para Bovespa-SP500

Cópula	CVM	KS Stat (Regime 1)	KS Stat (Regime 2)	LF	LF*	p value	AIC
T-Student	0,0999	0,6179	0,6178	345,07	344,76	0,8879	-680,15
Clayton	15,2704	0,0209	0,0429	364,12	247,92	0,0000	-720,25
Frank	0,1691	0,0176	0,0606	424,91	302,36	0,0000	-841,82
Gumbel	0,3347	0,0239	0,0506	355,83	-2533,36	0,0000	-703,66

CVM = estadístico de la prueba de Crámer-von Mises.

KS Stat = Estadístico de la prueba de Kolmogórov-Smirnov para régimen 1 y 2.

LF = valor máximo de la función de verosimilitud.

LF* = valor máximo de la función de verosimilitud restringida (sin cambio de régimen).

p-value = valor de probabilidad de una prueba LR estándar (nula = sin cambio de régimen).

Fuente. Elaboración propia.

Según los parámetros obtenidos, la persistencia en cada régimen es notablemente alta, con probabilidades de permanencia del 79,56 % en el Régimen 1 (π_L) y del 79,71 % en el Régimen 2 (π_H). Asimismo, las probabilidades de transición entre regímenes son moderadas, con un 20,44 % de probabilidad de pasar del Régimen 1 al Régimen 2 (Q_{10}) y un 20,29 % en la transición inversa (Q_{01}). Estos valores indican que ambos regímenes son relativamente estables, aunque permiten una cierta dinámica de cambio.

En lo que respecta al Régimen 1, las observaciones muestran una dispersión moderada, como se evidencia en las curvas de nivel del gráfico. Las densidades conjuntas alcanzan valores

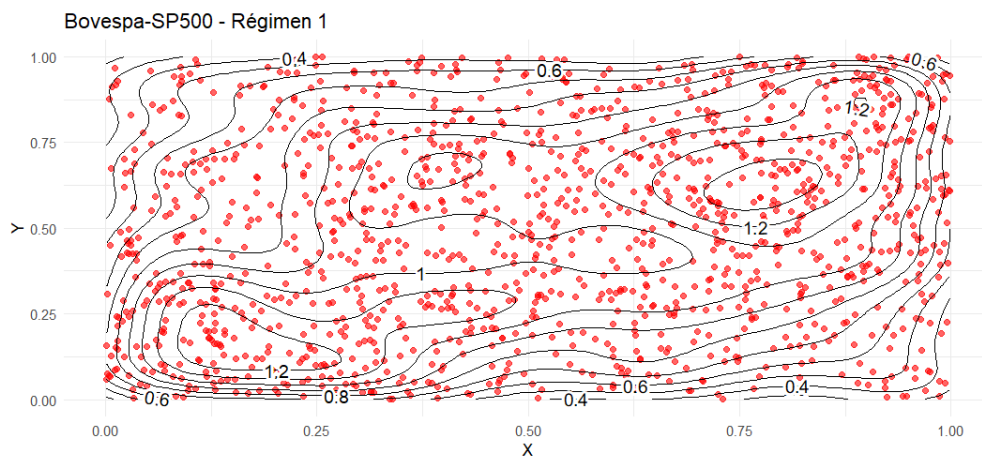
máximos de aproximadamente 1.2, y los puntos se concentran en las regiones centrales del espacio bivariado. Esto sugiere una dependencia moderada entre los índices, respaldada por un valor de Tau de Kendall bajo ($\tau_L = 14,42\%$). Esta configuración implica que, en este régimen, la sincronización entre los índices existe pero no es dominante.

Por otro lado, el Régimen 2 exhibe una estructura más definida y concentrada, con densidades conjuntas que alcanzan un máximo de 1.8. Las curvas de nivel en este régimen son más pronunciadas, destacando concentraciones significativas de puntos en áreas específicas del gráfico. Este patrón refleja una mayor dependencia entre los índices, corroborado por un valor de Tau de Kendall notablemente más alto ($\tau_U = 47,84\%$). La estructura observada en este régimen evidencia una sincronización más fuerte durante periodos de alta volatilidad, lo que indica un mayor grado de riesgo de contagio en este escenario.

En definitiva, el contagio financiero es más pronunciado en el Régimen 2, donde la fuerte dependencia y la concentración de datos reflejan una mayor sincronización entre los índices Bovespa y SP500. Este comportamiento está asociado a un mayor riesgo de interconexión durante eventos extremos, lo que sugiere que los movimientos en uno de los índices tienen un impacto más significativo en el otro en este régimen. Por el contrario, el Régimen 1 presenta una menor dependencia y dispersión en las observaciones, lo que implica que el contagio financiero en este estado es menos severo.

Figura 14

Diagrama de dispersión de Bovespa-SP500 Régimen 1 (baja volatilidad)

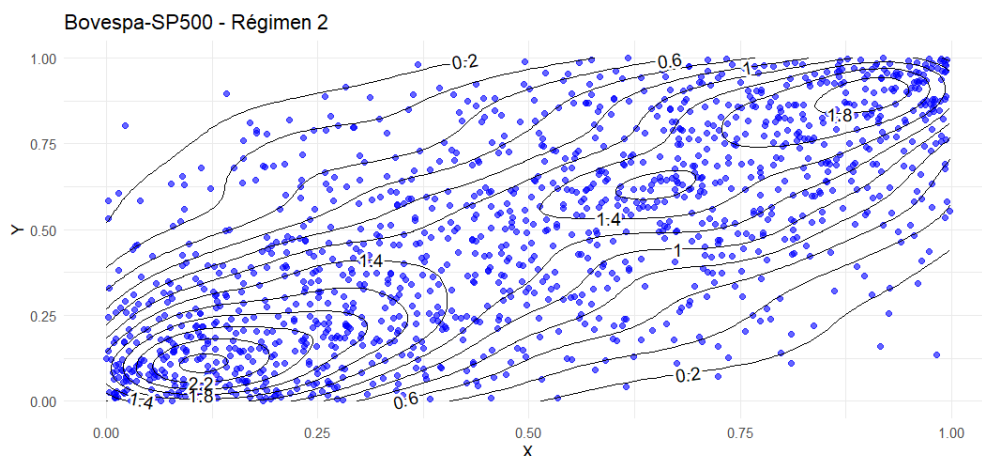


Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Frank con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

Figura 15

Diagrama de dispersión de Bovespa-SP500 Régimen 2 (alta volatilidad)



Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Frank con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

7.1.4. IPSA - IPC

El análisis se enfoca en la dependencia entre los índices bursátiles IPSA (Chile) y IPC (México) mediante modelos de cópulas con cambio de régimen de Markov, evaluando los resultados de las tablas 27, 28 y 29.

En este contexto, la cópula de Frank emerge como la alternativa más robusta debido a su menor AIC (-663,73) y un CVM bajo (0,0722), lo que sugiere un ajuste global más eficiente en comparación con las demás opciones evaluadas. Además, las pruebas KS, con valores de 0,0457 y 0,0212 para los regímenes 1 y 2 respectivamente, refuerzan su capacidad para capturar la dependencia en los datos de manera consistente. Estas métricas reflejan no solo una mejor representación de los patrones de dependencia, sino también una mayor estabilidad en ambos regímenes.

Por otro lado, aunque la cópula Gumbel destaca por su capacidad para modelar eventos extremos en la cola superior ($\lambda_U = 0,6532$), su AIC más alto (-659,51) y un CVM mayor (0,1775) limitan su idoneidad en este caso. Igualmente, la cópula Clayton, a pesar de capturar de manera efectiva la cola inferior ($\lambda_L = 0,8260$), presenta un AIC menos competitivo (-656,20) y un CVM excesivamente elevado (9,8834), lo que la excluye como una opción viable para modelar esta relación.

En contraste, la cópula t-Student no resulta adecuada para este análisis debido a sus grados de libertad extremadamente altos ($\nu = 2,69 \times 10^9$), lo que indica que no logra modelar de forma eficiente las dependencias observadas entre los índices IPSA e IPC en los diferentes regímenes.

En definitiva, considerando el equilibrio entre las métricas de calidad y las pruebas de dependencia, la cópula de Frank se consolida como la mejor opción. Su menor AIC, junto con su desempeño consistente en las pruebas KS y CVM, la posicionan como el modelo más eficaz para

describir la interacción financiera entre estos índices en ambos regímenes.

Tabla 27

Resumen de parámetros para IPSA-IPC

Cópula	π_L	π_H	θ_1	θ_2	$\nu(global)$
T-Student	0,5006	0,4741	0,6288	0,1827	2,69,E+09
Clayton	0,2404	0,8946	3,6255	0,4116	-
Frank	0,5049	0,4965	4,6149	1,2176	-
Gumbel	0,5645	0,8935	2,3283	1,2153	-

Nota. π_L representa la probabilidad de pertenecer al régimen de baja dependencia, mientras que π_H es la probabilidad de pertenecer al régimen de alta dependencia. θ_1 y θ_2 corresponden a los parámetros de dependencia en los regímenes de baja y alta dependencia, respectivamente. $\nu(global)$ indica los grados de libertad globales del modelo, aplicables únicamente a la cópula T-Student.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 28

Métricas de dependencia para IPSA-IPC

Cópula	Q_{10}	Q_{01}	λ_L	λ_U	τ_L	τ_U
T-Student	0,4994	0,5259	0,0000	0,0000	0,4329	0,1170
Clayton	0,7596	0,1054	0,8260	0,0000	0,6445	0,1707
Frank	0,4951	0,5035	0,0000	0,0000	0,4317	0,1333
Gumbel	0,4355	0,1065	0,0000	0,6532	0,5705	0,1772

Nota. λ_L representa la probabilidad de eventos extremos en la cola inferior, y λ_U describe la probabilidad de eventos extremos en la cola superior. τ_L corresponde a la dependencia ordinal (Tau de Kendall) en el régimen de baja dependencia, y τ_U a la dependencia ordinal en el régimen de alta dependencia.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 29

Métricas de calidad para IPSA-IPC

Cópula	CVM	KS Stat (Regime 1)	KS Stat (Regime 2)	LF	LF*	p value	AIC
T-Student	0,0520	0,6122	0,6320	359,56	248,87	0,0000	-709,12
Clayton	9,8834	0,1670	0,0173	332,10	79,74	0,0000	-656,20
Frank	0,0722	0,0457	0,0212	335,87	245,59	0,0000	-663,73
Gumbel	0,1775	0,1094	0,0201	333,75	-2903,13	0,0000	-659,51

CVM = estadístico de la prueba de Crámer-von Mises.

KS Stat = Estadístico de la prueba de Kolmogórov-Smirnov para régimen 1 y 2.

LF = valor máximo de la función de verosimilitud.

LF* = valor máximo de la función de verosimilitud restringida (sin cambio de régimen).

p-value = valor de probabilidad de una prueba LR estándar (nula = sin cambio de régimen).

Fuente. Elaboración propia.

Los gráficos correspondientes a los regímenes de baja y alta volatilidad (Figura 16 y Figura 17, respectivamente) exhiben diferencias claras en la interacción entre los índices IPSA e IPC, las cuales son evidentes tanto en la distribución de las pseudo-observaciones como en la forma de las curvas de nivel. En el régimen de baja volatilidad, las curvas muestran un claro patrón de concentración en las regiones centrales del gráfico, alcanzando su valor máximo en 2.2, que indica una alta densidad en los movimientos conjuntos, especialmente en los niveles intermedios de los índices. Las pseudo-observaciones se agrupan de manera uniforme en torno a estas regiones de alta densidad, lo que sugiere una sincronización más estable y consistente entre ambos índices en este contexto. Este comportamiento es corroborado por el parámetro θ_1 , que señala una dependencia bien estructurada y coherente, mientras que los valores de Kendall lower, el cual evidencia una cohesión destacada en estos movimientos conjuntos, particularmente en las tendencias hacia niveles bajos.

Por otro lado, en el régimen de alta volatilidad, las curvas de nivel se dispersan considerablemente, con valores que no superan 1.2 en las áreas de mayor probabilidad. Este cambio en la distribución implica una dinámica mucho más fragmentada entre los índices. Las pseudo-observaciones tienden a desplazarse hacia zonas más extremas, lo que refleja una mayor diversidad en los movimientos relativos de los índices, típicos de entornos de incertidumbre elevada. El parámetro θ_2 , que reduce notablemente su magnitud respecto al régimen de baja volatilidad, captura esta pérdida de cohesión general.

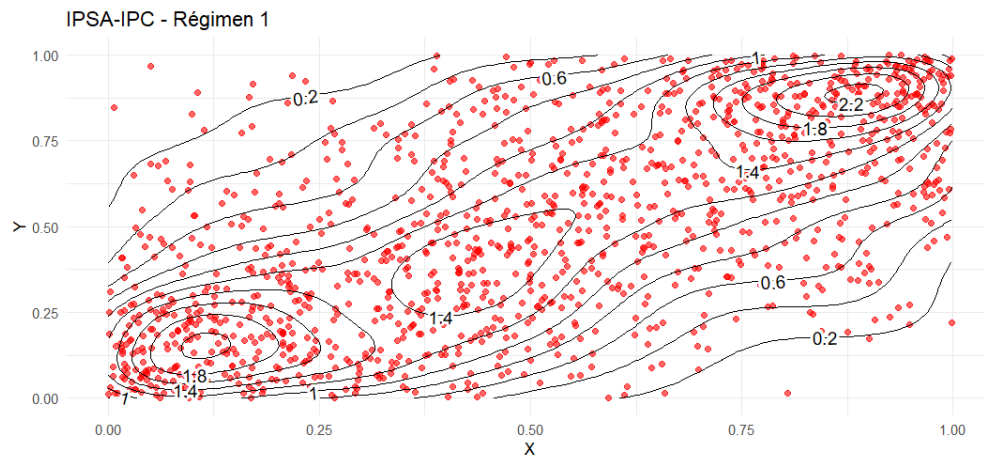
Al analizar las curvas de nivel con mayor detalle, se observa que en el régimen de baja volatilidad las líneas siguen un patrón elíptico y cerrado, concentrándose en un área compacta del gráfico. Esto sugiere que las variaciones conjuntas de los índices están altamente correlacionadas y que los movimientos extremos son menos probables en estos períodos. En cambio, las curvas

del régimen de alta volatilidad presentan formas más abiertas y menos definidas, lo que implica que las interacciones entre los índices pierden consistencia y que la probabilidad de eventos más dispersos o asimétricos aumenta.

En definitiva, el análisis comparativo de ambos regímenes resalta que los índices IPSA e IPC mantienen una relación más sólida y predecible en condiciones de baja volatilidad, mientras que esta conexión se diluye significativamente en escenarios más inciertos.

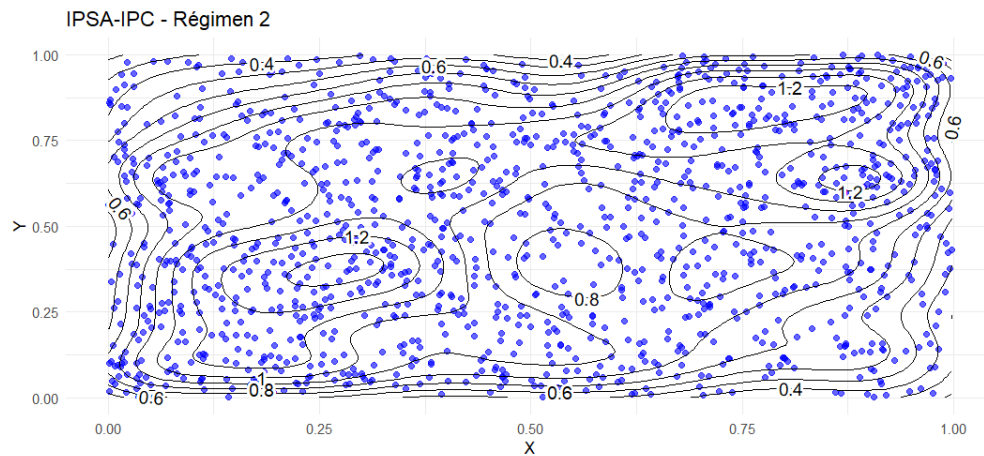
Figura 16

Diagrama de dispersión de IPSA-IPC Régimen 1 (baja volatilidad)



Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Frank con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

Figura 17*Diagrama de dispersión de IPSA-IPC Régimen 2 (alta volatilidad)*

Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Frank con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

7.1.5. SP500 - IPC

El análisis se enfoca en la dependencia entre los índices bursátiles SP500 (Estados Unidos) y IPC (México) mediante modelos de cópulas con cambio de régimen de Markov, evaluando los resultados de las tablas 30, 31 y 32.

Tras descartar la cópula t-Student debido a sus grados de libertad extremadamente altos ($\nu = 2, 64 \times 10^{11}$), el enfoque se centró en las alternativas restantes para identificar la opción más adecuada.

La cópula Frank se posiciona como la mejor alternativa debido a su desempeño consistente en métricas de calidad. Aunque su AIC (-953,85) es comparable al de la cópula Clayton (-957,19), su estadístico de Crámer-von Mises ($CVM = 0,1007$) es significativamente menor, lo que indica un ajuste más preciso a los datos. Además, las pruebas KS para ambos regímenes (0,0533 y 0,0216) refuerzan la estabilidad de esta cópula en diferentes escenarios de volatilidad.

Por otro lado, la cópula Clayton, aunque logra capturar patrones específicos de dependencia, presenta un CVM elevado (19,1934), lo que afecta su capacidad para representar de manera robusta la relación entre los índices. A pesar de su AIC competitivo, esta limitación la posiciona como una opción menos confiable en comparación con Frank.

En cuanto a la cópula Gumbel, su desempeño global es el más débil entre las opciones evaluadas. Con un CVM de 0,3783 y un AIC de -894,68, esta cópula no logra alcanzar la calidad de ajuste esperada, lo que la descarta como alternativa para este análisis.

En conclusión, la cópula Frank será la elegida para modelar la relación entre los índices SP500 e IPC. Su balance entre un AIC competitivo y un CVM bajo, junto con un desempeño estable en las pruebas de calidad, la convierte en la opción más apropiada para representar esta relación.

Tabla 30

Resumen de parámetros para SP500-IPC

Cópula	π_L	π_H	θ_1	θ_2	$\nu(global)$
T-Student	0,5575	0,5389	0,7072	0,2923	2,64,E+11
Clayton	0,3467	0,8366	2,8018	0,5741	-
Frank	0,5446	0,5095	5,5486	1,8720	-
Gumbel	0,4133	0,7819	2,3293	1,2719	-

Nota. π_L representa la probabilidad de pertenecer al régimen de baja dependencia, mientras que π_H es la probabilidad de pertenecer al régimen de alta dependencia. θ_1 y θ_2 corresponden a los parámetros de dependencia en los regímenes de baja y alta dependencia, respectivamente. $\nu(global)$ indica los grados de libertad globales del modelo, aplicables únicamente a la cópula T-Student.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 31

Métricas de dependencia para SP500-IPC

Cópula	Q_{10}	Q_{01}	λ_L	λ_U	τ_L	τ_U
T-Student	0,4425	0,4611	0,0000	0,0000	0,5001	0,1889
Clayton	0,6533	0,1634	0,7808	0,0000	0,5835	0,2230
Frank	0,4554	0,4905	0,0000	0,0000	0,4895	0,2011
Gumbel	0,5867	0,2181	0,0000	0,6534	0,5707	0,2138

Nota. λ_L representa la probabilidad de eventos extremos en la cola inferior, y λ_U describe la probabilidad de eventos extremos en la cola superior. τ_L corresponde a la dependencia ordinal (Tau de Kendall) en el régimen de baja dependencia, y τ_U a la dependencia ordinal en el régimen de alta dependencia.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 32

Métricas de calidad para SP500-IPC

Cópula	CVM	KS Stat (Regime 1)	KS Stat (Regime 2)	LF	LF*	p value	AIC
T-Student	0,0501	0,6021	0,6236	524,99	387,28	0,0000	-1039,98
Clayton	19,1934	0,1116	0,0239	482,59	316,02	0,0000	-957,19
Frank	0,1007	0,0533	0,0216	480,93	382,98	0,0000	-953,85
Gumbel	0,3783	0,0984	0,0310	451,34	-2281,02	0,0000	-894,68

CVM = estadístico de la prueba de Crámer-von Mises.

KS Stat = Estadístico de la prueba de Kolmogórov-Smirnov para régimen 1 y 2.

LF = valor máximo de la función de verosimilitud.

LF* = valor máximo de la función de verosimilitud restringida (sin cambio de régimen).

p-value = valor de probabilidad de una prueba LR estándar (nula = sin cambio de régimen).

Fuente. Elaboración propia.

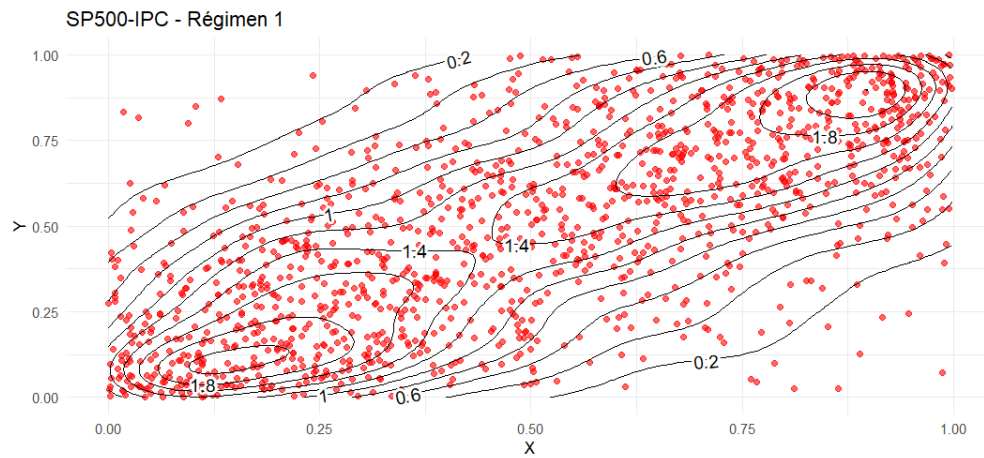
En el régimen de baja volatilidad (Figura 18), las curvas de nivel exhiben una disposición compacta y elíptica, alcanzando un máximo de 1.8 en las regiones centrales. Este patrón visual indica una correlación bien definida, en la que los movimientos conjuntos de los índices se concentran en rangos intermedios de valores. Las pseudo-observaciones se agrupan densamente en estas áreas centrales, lo que sugiere una relación estable y sincronizada entre ambos índices. Esta estructura se ve reforzada por el parámetro $\theta_1 = 5,5486$, que refleja una dependencia global considerable. Además, los valores de τ de Kendall, con un 48.95 % en la cola inferior y un 20.11 % en la cola superior, confirman que la conexión entre los índices es especialmente fuerte en las tendencias

descendentes, aunque también se mantiene moderada en los movimientos superiores.

Por otro lado, en el régimen de alta volatilidad (Figura 19), se observa un cambio significativo en la disposición de las curvas de nivel, que ahora adoptan una forma más dispersa y difusa, con valores máximos que no superan 1.4. Este patrón indica una pérdida de cohesión en los movimientos conjuntos, lo que se traduce en una relación más débil y variable entre los índices. Las pseudo-observaciones están más dispersas en todo el gráfico, alcanzando regiones periféricas, lo que evidencia una interacción menos estructurada. Este comportamiento es consistente con el valor $\theta_2 = 1,8720$, que refleja una disminución en la dependencia global.

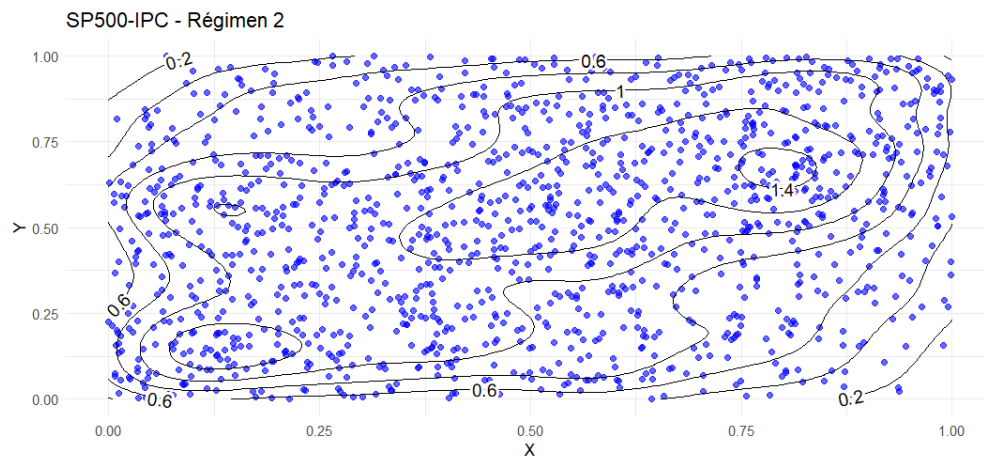
Desde el análisis gráfico, las curvas de nivel en el régimen de baja volatilidad se orientan hacia la diagonal principal, lo que refuerza la idea de una sincronización sólida entre los índices en respuesta a factores comunes. En contraste, en el régimen de alta volatilidad, las curvas se abren y adoptan formas más irregulares, lo que indica que los índices responden de manera más independiente y posiblemente divergente. Este cambio sugiere que, durante períodos de incertidumbre, los movimientos conjuntos pierden consistencia, aumentando la probabilidad de comportamientos no correlacionados.

En resumen, el análisis de los gráficos y las métricas demuestra que la relación entre los índices SP500 e IPC es marcadamente dependiente del entorno de volatilidad. Mientras que en el régimen de baja volatilidad prevalece una conexión robusta y predecible, en el régimen de alta volatilidad esta interacción se fragmenta, reflejando una mayor dispersión e independencia en los movimientos conjuntos.

Figura 18*Diagrama de dispersión de SP500-IPC Régimen 1 (baja volatilidad)*

Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Frank con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

Figura 19*Diagrama de dispersión de SP500-IPC Régimen 2 (alta volatilidad)*

Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Frank con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

7.1.6. SP500 - IPSA

El análisis se enfoca en la dependencia entre los índices bursátiles SP500 (Estados Unidos) y IPSA (Chile) mediante modelos de cópulas con cambio de régimen de Markov, evaluando los resultados de las tablas 33, 34 y 35.

La cópula t-Student, aunque muestra un estadístico de Crámer-von Mises (CVM) bajo (0,0475) y pruebas KS consistentes en ambos regímenes (0,6183 y 0,6185), no logra un desempeño competitivo en términos de AIC (-397,26). Este resultado, junto con su falta de ventaja en otros aspectos clave, la excluye como una opción viable para este análisis.

En cambio, la cópula Gumbel sobresale como la mejor opción, respaldada por el AIC más bajo entre las alternativas (-571,01). Además, su capacidad para capturar eventos extremos en la cola superior ($\lambda_U = 0,7260$) resulta especialmente relevante en este contexto. Aunque su CVM (0,1515) no es el menor de todas las opciones, su desempeño general en las métricas evaluadas la posiciona como el modelo más robusto para describir la relación entre los índices.

Por su parte, la cópula Clayton exhibe una notable dependencia en la cola inferior ($\lambda_L = 0,7707$); sin embargo, su AIC (-543,12) y su elevado CVM (9,7613) limitan su capacidad para capturar de manera global la relación entre los índices. En cuanto a la cópula Frank, aunque cuenta con el CVM más bajo (0,0384) y resultados sólidos en las pruebas KS, su AIC (-512,06) no es suficiente para superar el desempeño global de la cópula Gumbel, lo que la posiciona como una opción menos robusta.

A partir de lo anterior, la cópula Gumbel destaca como el modelo más adecuado para representar la dependencia entre los índices SP500 e IPSA. Su superioridad en términos de AIC y su habilidad para modelar eventos extremos en la cola superior la convierten en la opción más

confiable para este análisis.

Tabla 33

Resumen de parámetros para SP500-IPSA

Cópula	π_L	π_H	θ_1	θ_2	$\nu(global)$
T-Student	0,5001	0,4999	0,3772	0,3712	15,1432
Clayton	0,4766	0,9320	2,6614	0,3990	-
Frank	0,4980	0,4966	3,9782	0,9864	-
Gumbel	0,4902	0,9330	2,8623	1,1973	-

Nota. π_L representa la probabilidad de pertenecer al régimen de baja dependencia, mientras que π_H es la probabilidad de pertenecer al régimen de alta dependencia. θ_1 y θ_2 corresponden a los parámetros de dependencia en los regímenes de baja y alta dependencia, respectivamente. $\nu(global)$ indica los grados de libertad globales del modelo, aplicables únicamente a la cópula T-Student.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 34

Métricas de dependencia para SP500-IPSA

Cópula	Q_{10}	Q_{01}	λ_L	λ_U	τ_L	τ_U
T-Student	0,4999	0,5001	0,0156	0,0150	0,2462	0,2421
Clayton	0,5234	0,0680	0,7707	0,0000	0,5709	0,1663
Frank	0,5020	0,5034	0,0000	0,0000	0,3865	0,1085
Gumbel	0,5098	0,0670	0,0000	0,7260	0,6506	0,1648

Nota. λ_L representa la probabilidad de eventos extremos en la cola inferior, y λ_U describe la probabilidad de eventos extremos en la cola superior. τ_L corresponde a la dependencia ordinal (Tau de Kendall) en el régimen de baja dependencia, y τ_U a la dependencia ordinal en el régimen de alta dependencia.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 35

Métricas de calidad para SP500-IPSA

Cópula	CVM	KS Stat (Regime 1)	KS Stat (Regime 2)	LF	LF*	p value	AIC
T-Student	0,0475	0,6183	0,6185	203,63	203,62	0,9985	-397,26
Clayton	9,7613	0,1320	0,0134	275,56	57,76	0,0000	-543,12
Frank	0,0384	0,0429	0,0123	260,03	186,96	0,0000	-512,06
Gumbel	0,1515	0,1654	0,0148	289,51	-3277,47	0,0000	-571,01

CVM = estadístico de la prueba de Crámer-von Mises.

KS Stat = Estadístico de la prueba de Kolmogórov-Smirnov para régimen 1 y 2.

LF = valor máximo de la función de verosimilitud.

LF* = valor máximo de la función de verosimilitud restringida (sin cambio de régimen).

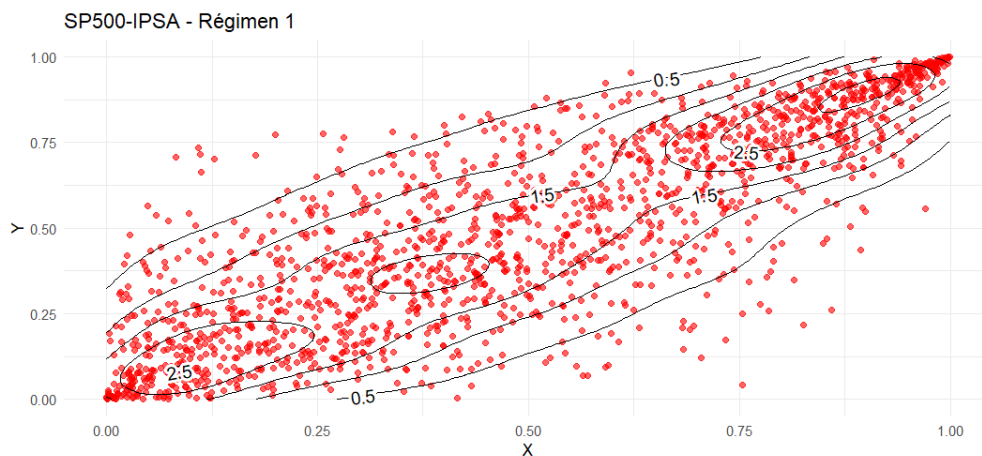
p-value = valor de probabilidad de una prueba LR estándar (nula = sin cambio de régimen).

Fuente. Elaboración propia.

En el régimen de baja volatilidad (Figura 20), las curvas de nivel presentan un patrón alargado y concentrado hacia la diagonal principal del gráfico, con densidades máximas de 2.5 en las regiones centrales. Esto refleja una fuerte dependencia estructurada entre los índices, confirmada por el parámetro $\theta_1 = 2,8623$. Las pseudo-observaciones se agrupan en las zonas de mayor densidad, evidenciando un comportamiento sincronizado. Además, el coeficiente de Kendall *lower*, de 65.06 %, señala una correlación especialmente robusta en movimientos extremos, lo que sugiere una influencia de factores compartidos que generan una conexión estable y predecible.

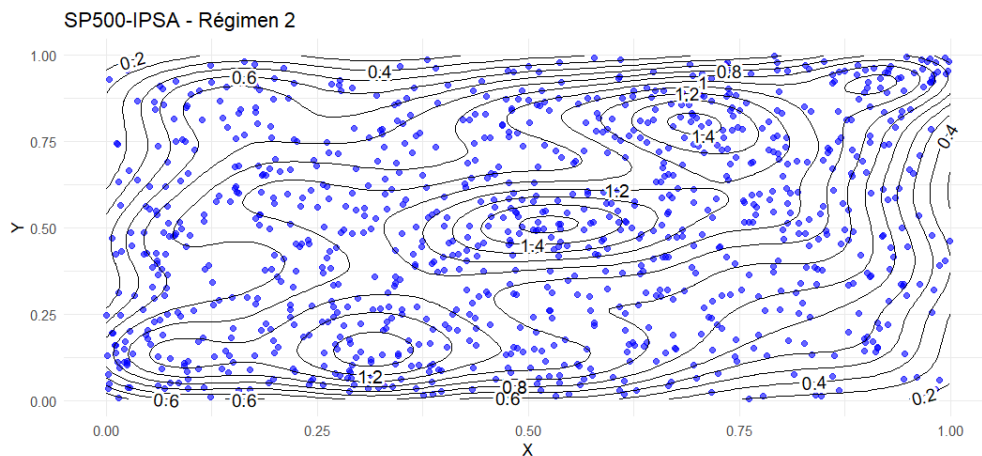
En el régimen de alta volatilidad (Figura 21), las curvas de nivel adoptan un diseño disperso e irregular, con densidades máximas de 1.4. Esta transformación denota una pérdida de cohesión entre los índices y una interacción menos estructurada. Las pseudo-observaciones están más distribuidas en el gráfico, alcanzando zonas periféricas, lo que refleja una mayor variabilidad en los movimientos conjuntos. El parámetro $\theta_2 = 1,1973$ confirma esta reducción en la dependencia, indicando que en contextos de incertidumbre los índices responden de manera más autónoma.

En conclusión, la relación entre los índices SP500 e IPSA depende significativamente del régimen de volatilidad. En escenarios de baja volatilidad, la interacción es consistente y bien estructurada, indicando una fuerte sincronización impulsada por factores comunes. En contraste, bajo alta volatilidad, esta conexión se debilita, adoptando un comportamiento más disperso y menos coherente, con los índices reaccionando de manera más independiente a influencias particulares.

Figura 20*Diagrama de dispersión de SP500-IPSA Régimen 1 (baja volatilidad)*

Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Gumbel con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

Figura 21*Diagrama de dispersión de SP500-IPSA Régimen 2 (alta volatilidad)*

Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Gumbel con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

7.2. Análisis de par de índices de Europa

7.2.1. CAC40 - DAX

El análisis se enfoca en la dependencia entre los índices bursátiles CAC40 (Francia) y DAX (Alemania) mediante modelos de cópulas con cambio de régimen de Markov, evaluando los resultados de las tablas 36, 37 y 38.

La cópula t-Student se destaca como la mejor opción para modelar la relación entre estos índices. Aunque su estadístico de CVM es moderado (0,1214), los resultados en las pruebas KS para ambos regímenes (0,6370 y 0,6453) son consistentes, lo que refleja un ajuste robusto en general. Además, presenta el menor AIC de -4879,48, indicando el mejor ajuste global según los criterios de información. Su capacidad para capturar dependencia en ambas colas ($\lambda_L = 0,6550$ y $\lambda_U = 0,3681$) refuerza su idoneidad, ya que refleja un comportamiento equilibrado entre los regímenes de alta y baja volatilidad.

Por otro lado, la cópula Clayton, aunque presenta una fuerte dependencia en la cola inferior ($\lambda_L = 0,9190$), es descartada debido a su elevado CVM (102,5493) y un AIC significativamente mayor (-4468,33). Estos resultados indican un ajuste deficiente, particularmente en el Régimen 2, donde su desempeño en la prueba KS es limitado (0,0626).

La cópula Frank, si bien muestra un ajuste aceptable con un CVM de 0,4010, carece de dependencia en las colas lo que limita su aplicabilidad en contextos financieros donde es importante capturar eventos extremos. Además, su AIC de -4546,08 es considerablemente mayor que el de la t-Student, lo que refuerza su posición como una opción menos óptima.

Finalmente, la cópula Gumbel, a pesar de capturar la dependencia en la cola superior ($\lambda_U = 0,8744$), presenta un CVM elevado (0,7834) y un desempeño inferior en las pruebas KS. Su AIC

de -4631,91 tampoco logra competir con el de la t-Student, lo que la descarta como una opción viable.

Entonces se tiene que la cópula T-Student es la mejor opción para modelar la relación entre CAC40 y DAX, ya que combina el mejor AIC con métricas de calidad consistentes y un ajuste robusto en ambas colas. Las demás cópulas presentan limitaciones significativas, ya sea en términos de ajuste global o en la captura de eventos extremos, lo que las hace menos adecuadas para este análisis.

Tabla 36*Resumen de parámetros para CAC40-DAX*

Cópula	π_L	π_H	θ_1	θ_2	$\nu(global)$
T-Student	0,9188	0,9625	0,9668	0,8687	11,4122
Clayton	0,7050	0,8028	8,2019	2,3786	-
Frank	0,8540	0,9472	28,0328	9,9374	-
Gumbel	0,8944	0,9456	5,8583	2,6824	-

Nota. π_L representa la probabilidad de pertenecer al régimen de baja dependencia, mientras que π_H es la probabilidad de pertenecer al régimen de alta dependencia. θ_1 y θ_2 corresponden a los parámetros de dependencia en los regímenes de baja y alta dependencia, respectivamente. $\nu(global)$ indica los grados de libertad globales del modelo, aplicables únicamente a la cópula T-Student.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 37*Métricas de dependencia para CAC40-DAX*

Cópula	Q_{10}	Q_{01}	λ_L	λ_U	τ_L	τ_U
T-Student	0,0812	0,0375	0,6550	0,3681	0,8355	0,6701
Clayton	0,2950	0,1972	0,9190	0,0000	0,8040	0,5432
Frank	0,1460	0,0528	0,0000	0,0000	0,8657	0,6641
Gumbel	0,1056	0,0544	0,0000	0,8744	0,8293	0,6272

Nota. λ_L representa la probabilidad de eventos extremos en la cola inferior, y λ_U describe la probabilidad de eventos extremos en la cola superior. τ_L corresponde a la dependencia ordinal (Tau de Kendall) en el régimen de baja dependencia, y τ_U a la dependencia ordinal en el régimen de alta dependencia.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 38*Métricas de calidad para CAC40-DAX*

Cópula	CVM	KS Stat (Regime 1)	KS Stat (Regime 2)	LF	LF*	p value	AIC
T-Student	0,1214	0,6370	0,6453	2444,74	1149,97	0,0000	-4879,48
Clayton	102,5493	0,1178	0,0626	2238,17	0,00	0,0000	-4468,33
Frank	0,4010	0,1394	0,0366	2277,04	2031,56	0,0000	-4546,08
Gumbel	0,7834	0,1153	0,0587	2319,95	2049,83	0,0000	-4631,91

CVM = estadístico de la prueba de Crámer-von Mises.

KS Stat = Estadístico de la prueba de Kolmogórov-Smirnov para régimen 1 y 2.

LF = valor máximo de la función de verosimilitud.

LF* = valor máximo de la función de verosimilitud restringida (sin cambio de régimen).

p-value = valor de probabilidad de una prueba LR estándar (nula = sin cambio de régimen).

Fuente. Elaboración propia.

En el régimen de baja volatilidad (Figura 22), las curvas de nivel del gráfico del par CAC40-DAX exhiben una notable alineación a lo largo de la diagonal principal, alcanzando valores máximos de probabilidad cercanos a 2.5. Este patrón sugiere una dependencia significativamente alta entre ambos índices, apoyada en el parámetro $\theta_1 = 0,9668$ de la cópula T-Student y los valores de $\tau_L = 83,55\%$ y $\tau_U = 67,01\%$, que reflejan una fuerte sincronización en los extremos de la distribución. Las pseudo-observaciones, concentradas predominantemente en la región central del gráfico, indican que los movimientos conjuntos de los índices están altamente correlacionados en condiciones de estabilidad, lo que evidencia un fuerte contagio financiero en este entorno.

Por otra parte, bajo el régimen de alta volatilidad (Figura 23), se observa una mayor dispersión en las curvas de nivel, con probabilidades máximas que disminuyen a aproximadamente 2.2. Aunque las pseudo-observaciones continúan mostrando cierta tendencia a alinearse diagonalmente, su distribución se extiende hacia zonas periféricas, lo que refleja una reducción en la dependencia conjunta entre los índices. Este comportamiento se corresponde con el valor de $\theta_2 = 0,8687$, que apunta a una moderación en la relación entre CAC40 y DAX en este régimen. Además, los valores reducidos de τ_L y τ_U refuerzan la idea de una menor sincronización, especialmente en los

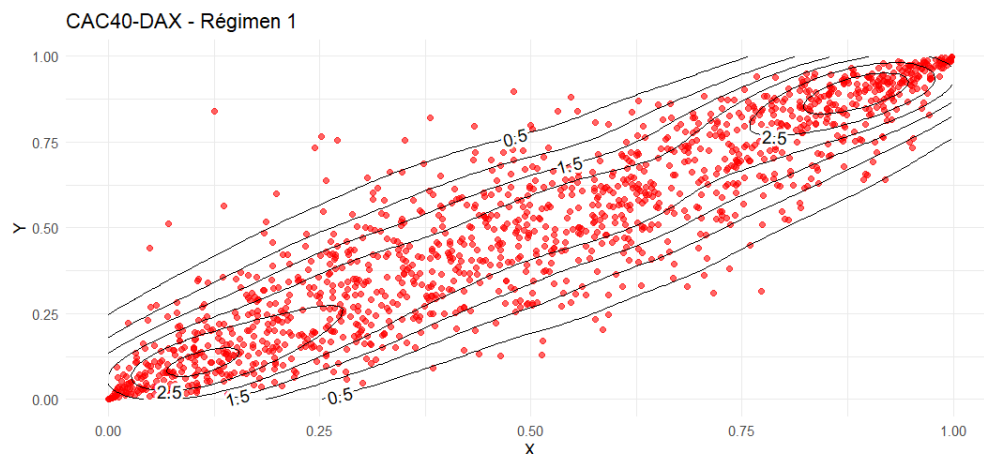
movimientos extremos, durante periodos de alta volatilidad.

Los gráficos permiten identificar un cambio importante en la relación entre los índices al comparar ambos regímenes. Mientras que en baja volatilidad la concentración de las curvas de nivel y la acumulación de pseudo-observaciones en la diagonal principal reflejan una interacción conjunta fuerte, en alta volatilidad la dispersión de estas curvas y la expansión de las pseudo-observaciones hacia los extremos indican un menor grado de dependencia. Este contraste evidencia que, en entornos de mayor incertidumbre, los índices reaccionan de forma más independiente, atenuando el impacto del contagio financiero.

En definitiva, el análisis de estos gráficos resalta cómo las condiciones de volatilidad influyen en la dinámica de dependencia entre CAC40 y DAX. En escenarios de baja volatilidad, la relación es mucho más consistente y predecible, mientras que en alta volatilidad la conexión se debilita, generando patrones más heterogéneos.

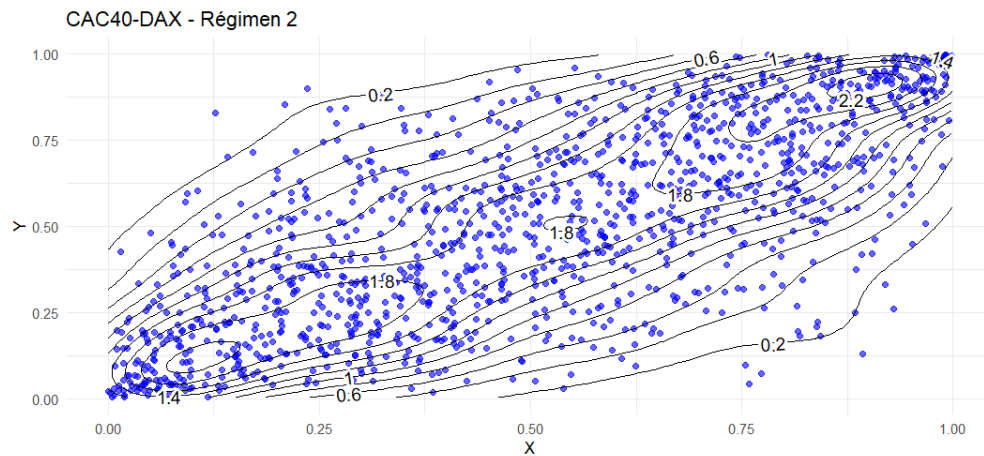
Figura 22

Diagrama de dispersión de CAC40-DAX Régimen 1 (baja volatilidad)



Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de T-student con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

Figura 23*Diagrama de dispersión de CAC40-DAX Régimen 2 (alta volatilidad)*

Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de T-student con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

7.2.2. CAC40 - FTSE100

El análisis se enfoca en la dependencia entre los índices bursátiles CAC40 (Francia) y FTSE100 (Reino Unido) mediante modelos de cópulas con cambio de régimen de Markov, evaluando los resultados de las tablas 39, 40 y 41.

El análisis de dependencia entre los índices CAC40 y FTSE100 permite identificar la cópula que mejor describe su relación en distintos regímenes de volatilidad, evaluando métricas de calidad y parámetros asociados. En este caso, la cópula t-Student emerge como la mejor opción debido a su desempeño global en las métricas de bondad de ajuste.

La cópula t-Student destaca por su equilibrio entre las métricas analizadas. Su estadístico de Crámer-von Mises (CVM) de 0,0646, junto con valores consistentes en las pruebas KS para los regímenes 1 y 2 (0,6160 y 0,6302, respectivamente), indica un ajuste sólido y confiable en ambos regímenes de volatilidad. Además, presenta el menor AIC de -2936,86, lo que confirma

su superioridad en términos de ajuste global. Su capacidad para capturar tanto la cola inferior ($\lambda_L = 0,3395$) como la superior ($\lambda_U = 0,0825$) refuerza su idoneidad en contextos financieros, donde es crucial modelar comportamientos extremos.

En contraste, la cópula Clayton presenta un ajuste menos consistente, con un CVM elevado de 61,1820 y un desempeño limitado en las pruebas KS, particularmente en el Régimen 2 (0,0477). Aunque captura de forma efectiva la cola inferior ($\lambda_L = 0,8546$), su incapacidad para modelar la cola superior ($\lambda_U = 0,0000$) y su AIC más alto (-2612,41) limitan su utilidad en este análisis.

La cópula Frank, aunque presenta un CVM razonable de 0,1684 y valores aceptables en las pruebas KS, carece de estructura en ambas colas, lo que la hace menos adecuada para representar eventos extremos. Además, su AIC de -2669,39 no compite con el de la t-Student. Por último, la cópula Gumbel, con un AIC intermedio de -2704,12, muestra deficiencias en las métricas de calidad, con un CVM de 0,4790.

A partir de lo anterior, se utiliza la cópula t-Student para modelar la relación entre CAC40 y FTSE100, debido a su sólido ajuste y capacidad para capturar colas.

Tabla 39

Resumen de parámetros para CAC40-FTSE100

Cópula	π_L	π_H	θ_1	θ_2	$\nu(global)$
T-Student	0,9415	0,9722	0,9143	0,7307	20,3312
Clayton	0,8804	0,9398	4,4127	1,4121	-
Frank	0,9567	0,9754	12,1894	5,9907	-
Gumbel	0,9370	0,9626	3,4346	1,8584	-

Nota. π_L representa la probabilidad de pertenecer al régimen de baja dependencia, mientras que π_H es la probabilidad de pertenecer al régimen de alta dependencia. θ_1 y θ_2 corresponden a los parámetros de dependencia en los regímenes de baja y alta dependencia, respectivamente. $\nu(global)$ indica los grados de libertad globales del modelo, aplicables únicamente a la cópula T-Student.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 40*Métricas de dependencia para CAC40-FTSE100*

Cópula	Q_{10}	Q_{01}	λ_L	λ_U	τ_L	τ_U
T-Student	0,0585	0,0278	0,3395	0,0825	0,7346	0,5216
Clayton	0,1196	0,0602	0,8546	0,0000	0,6881	0,4139
Frank	0,0433	0,0246	0,0000	0,0000	0,7161	0,5137
Gumbel	0,0630	0,0374	0,0000	0,7764	0,7088	0,4619

Nota. λ_L representa la probabilidad de eventos extremos en la cola inferior, y λ_U describe la probabilidad de eventos extremos en la cola superior. τ_L corresponde a la dependencia ordinal (Tau de Kendall) en el régimen de baja dependencia, y τ_U a la dependencia ordinal en el régimen de alta dependencia.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 41*Métricas de calidad para CAC40-FTSE100*

Cópula	CVM	KS Stat (Regime 1)	KS Stat (Regime 2)	LF	LF*	p value	AIC
T-Student	0,0646	0,6160	0,6302	1473,43	913,61	0,0000	-2936,86
Clayton	61,1820	0,0995	0,0477	1310,21	1103,44	0,0000	-2612,41
Frank	0,1684	0,0790	0,0291	1338,69	1222,28	0,0000	-2669,39
Gumbel	0,4790	0,0891	0,0474	1356,06	562,00	0,0000	-2704,12

CVM = estadístico de la prueba de Crámer-von Mises.

KS Stat = Estadístico de la prueba de Kolmogórov-Smirnov para régimen 1 y 2.

LF = valor máximo de la función de verosimilitud.

LF* = valor máximo de la función de verosimilitud restringida (sin cambio de régimen).

p-value = valor de probabilidad de una prueba LR estándar (nula = sin cambio de régimen).

Fuente. Elaboración propia.

En el régimen de baja volatilidad (Figura 24), las curvas de nivel para el par CAC40-FTSE100 se encuentran notablemente concentradas a lo largo de la diagonal principal, alcanzando valores máximos de probabilidad de aproximadamente 2.5. Este patrón revela una relación estrecha entre ambos índices, consistente con el parámetro $\theta_1 = 0,9143$ de la cópula T-Student y los elevados valores de $\tau_L = 73,46\%$ y $\tau_U = 52,16\%$, que reflejan una dependencia considerable en las colas inferiores y superiores. Las pseudo-observaciones se acumulan en las regiones intermedias, lo que indica una sincronización significativa en los movimientos conjuntos. Esto sugiere que, bajo condiciones normales de mercado, los índices muestran una correlación sólida, evidenciando

una interacción financiera estrecha y un posible contagio entre estos mercados.

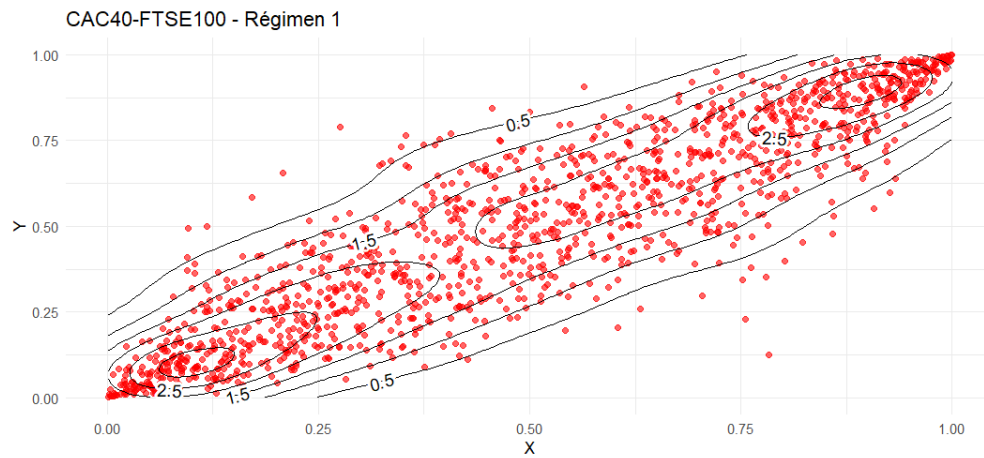
En contraste, en el régimen de alta volatilidad (Figura 25), las curvas de nivel se distribuyen de manera más dispersa, con valores máximos de probabilidad que descienden a 2.2. Aunque las pseudo-observaciones conservan cierta alineación diagonal, estas se extienden hacia las regiones más extremas del gráfico, evidenciando una menor dependencia entre los índices. El parámetro $\theta_2 = 0,7307$ confirma una disminución en la intensidad de la relación, mientras que el valor reducido de τ_U refleja una sincronización más débil, especialmente en los movimientos extremos. Este cambio en el patrón de dependencia sugiere que, bajo condiciones de alta incertidumbre, los índices reaccionan de forma más independiente a los eventos del mercado.

Comparando ambos regímenes, se puede observar cómo la transición de baja a alta volatilidad modifica de forma notable la relación entre los índices. En el primero, las curvas de nivel densamente agrupadas y la concentración de pseudo-observaciones en el centro destacan una interacción conjunta fuerte, mientras que en el segundo, la mayor dispersión de las curvas y la distribución de las pseudo-observaciones hacia los extremos sugieren un debilitamiento en la correlación. Este contraste refleja cómo la volatilidad influye en la dinámica de dependencia, aumentando la independencia entre los mercados durante periodos de estrés.

En conclusión, el análisis evidencia que la relación entre CAC40 y FTSE100 es sólida y altamente correlacionada en entornos de baja volatilidad, pero se debilita significativamente en contextos de alta volatilidad. Este comportamiento subraya la importancia de la volatilidad como un factor clave para entender la interacción financiera entre estos índices, con implicaciones relevantes para la gestión del riesgo y la toma de decisiones estratégicas en mercados europeos interconectados.

Figura 24

Diagrama de dispersión de CAC40-FTSE100 Régimen 1 (baja volatilidad)

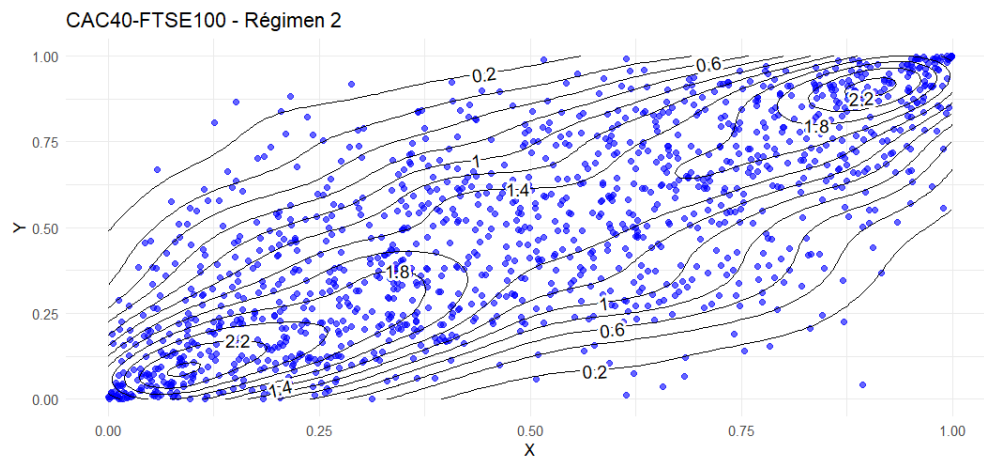


Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de T-student con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

Figura 25

Diagrama de dispersión de CAC40-FTSE100 Régimen 2 (alta volatilidad)



Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de T-student con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

7.2.3. CAC40 - IBEX35

El análisis se enfoca en la dependencia entre los índices bursátiles CAC40 (Francia) y IBEX35 (España) mediante modelos de cópulas con cambio de régimen de Markov, evaluando los resultados de las tablas 42, 43 y 44.

En primer lugar, la cópula t-Student destaca por su bajo estadístico de CVM, con un valor de 0,0617, y un desempeño robusto en las pruebas KS, alcanzando valores de 0,6228 en el Régimen 1 y 0,6346 en el Régimen 2. Estos indicadores reflejan un ajuste sólido en ambos escenarios. Adicionalmente, su AIC de $-3246,17$, el más bajo entre las cópulas evaluadas, subraya su superioridad en la modelización de la dependencia global. Además, esta cópula es capaz de capturar tanto la cola inferior ($\lambda_L = 0,3760$) como la cola superior ($\lambda_U = 0,1255$), lo que refuerza su idoneidad para representar eventos extremos en el contexto financiero.

En contraste, la cópula Clayton se distingue por su fuerte dependencia en la cola inferior ($\lambda_L = 0,8663$); sin embargo, presenta un CVM extremadamente elevado (65,6309) y un desempeño insuficiente en las pruebas KS, especialmente en el Régimen 2, donde registra un valor de 0,0617. Estas observaciones ponen de manifiesto un ajuste limitado, lo que lleva a descartarla como una alternativa viable. Por su parte, la cópula Frank muestra un CVM aceptable de 0,2204, pero adolece de estructura en las colas ($\lambda_L = 0,0000$ y $\lambda_U = 0,0000$), lo que resulta inapropiado para analizar eventos extremos. Aunque su AIC de $-3000,13$ es competitivo, no alcanza los resultados obtenidos por la t-Student.

Por otro lado, la cópula Gumbel captura adecuadamente la cola superior ($\lambda_U = 0,8156$); no obstante, exhibe inconsistencias en sus métricas de calidad. Su CVM elevado de 0,5185 y su AIC de $-3026,43$ la posicionan por debajo de la t-Student en términos de ajuste global.

En resumen, la cópula t-Student se consolida como la mejor alternativa para modelar la relación entre los índices CAC40 e IBEX35. Su capacidad para capturar la dependencia en ambas colas, junto con su desempeño consistente en las métricas de calidad, la convierten en la opción más destacada frente a las demás alternativas evaluadas.

Tabla 42*Resumen de parámetros para CAC40-IBEX35*

Cópula	π_L	π_H	θ_1	θ_2	$\nu(global)$
T-Student	0,9399	0,9662	0,9173	0,7623	18,0420
Clayton	0,6147	0,7240	4,8283	1,3656	-
Frank	0,9383	0,9736	14,6134	6,8782	-
Gumbel	0,9070	0,9708	4,0967	2,1569	-

Nota. π_L representa la probabilidad de pertenecer al régimen de baja dependencia, mientras que π_H es la probabilidad de pertenecer al régimen de alta dependencia. θ_1 y θ_2 corresponden a los parámetros de dependencia en los regímenes de baja y alta dependencia, respectivamente. $\nu(global)$ indica los grados de libertad globales del modelo, aplicables únicamente a la cópula T-Student.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 43*Métricas de dependencia para CAC40-IBEX35*

Cópula	Q_{10}	Q_{01}	λ_L	λ_U	τ_L	τ_U
T-Student	0,0601	0,0338	0,3760	0,1255	0,7392	0,5518
Clayton	0,3853	0,2760	0,8663	0,0000	0,7071	0,4058
Frank	0,0617	0,0264	0,0000	0,0000	0,7571	0,5568
Gumbel	0,0930	0,0292	0,0000	0,8156	0,7559	0,5364

Nota. λ_L representa la probabilidad de eventos extremos en la cola inferior, y λ_U describe la probabilidad de eventos extremos en la cola superior. τ_L corresponde a la dependencia ordinal (Tau de Kendall) en el régimen de baja dependencia, y τ_U a la dependencia ordinal en el régimen de alta dependencia.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 44*Métricas de calidad para CAC40-IBEX35*

Cópula	CVM	KS Stat (Regime 1)	KS Stat (Regime 2)	LF	LF*	p value	AIC
T-Student	0,0617	0,6228	0,6346	1628,08	969,37	0,0000	-3246,17
Clayton	65,6309	0,0966	0,0617	1456,22	1167,00	0,0000	-2904,44
Frank	0,2204	0,0954	0,0267	1504,06	1376,65	0,0000	-3000,13
Gumbel	0,5185	0,1083	0,0498	1517,22	958,58	0,0000	-3026,43

CVM = estadístico de la prueba de Crámer-von Mises.

KS Stat = Estadístico de la prueba de Kolmogórov-Smirnov para régimen 1 y 2.

LF = valor máximo de la función de verosimilitud.

LF* = valor máximo de la función de verosimilitud restringida (sin cambio de régimen).

p-value = valor de probabilidad de una prueba LR estándar (nula = sin cambio de régimen).

Fuente. Elaboración propia.

En el régimen de baja volatilidad (Figura 26), por un lado, las curvas de nivel del par CAC40-IBEX35 muestran una notable concentración a lo largo de la diagonal principal, alcanzando valores máximos de probabilidad cercanos a 2.5. Este patrón sugiere una elevada sincronización entre ambos índices, una interpretación respaldada por el parámetro $\theta_1 = 0,9173$ y los valores de $\tau_L = 73,92\%$ y $\tau_U = 55,18\%$. Asimismo, la acumulación de pseudo-observaciones en las zonas centrales evidencia una correlación significativa en los movimientos conjuntos, indicando que bajo condiciones de estabilidad, los índices tienden a comportarse de manera altamente sincronizada.

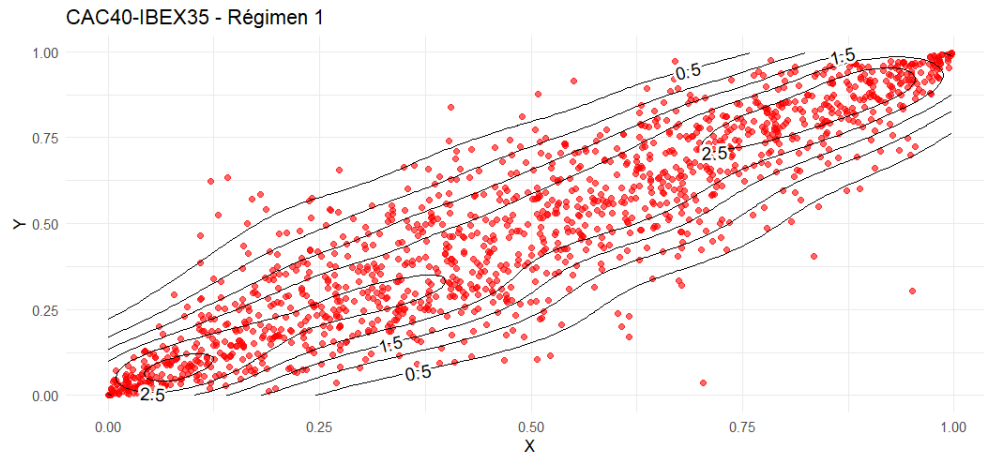
En cambio, durante el régimen de alta volatilidad (Figura 27), se observa una mayor dispersión de las curvas de nivel, con probabilidades máximas que disminuyen a aproximadamente 2.2. A pesar de que las pseudo-observaciones aún mantienen cierta alineación diagonal, estas se distribuyen hacia regiones más extremas, reflejando una menor dependencia entre los índices. Del mismo modo, el parámetro $\theta_2 = 0,7623$ y la reducción en τ_U confirman un debilitamiento en la sincronización, lo que sugiere que, bajo condiciones de alta incertidumbre, los índices muestran comportamientos más independientes.

Por último, al comparar ambos regímenes, queda en evidencia cómo la volatilidad altera

significativamente la relación entre CAC40 e IBEX35. En baja volatilidad, los índices mantienen una interacción conjunta fuerte y predecible, mientras que en alta volatilidad la conexión se debilita, dando paso a una mayor independencia.

Figura 26

Diagrama de dispersión de CAC40-IBEX35 Régimen 1 (baja volatilidad)

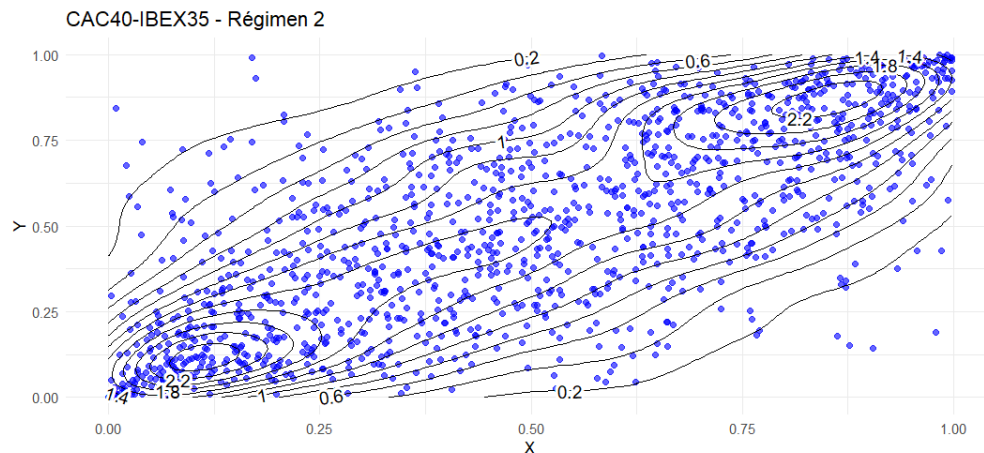


Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de T-student con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

Figura 27

Diagrama de dispersión de CAC40-IBEX35 Régimen 2 (alta volatilidad)



Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de T-student con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

7.2.4. DAX - FTSE100

El análisis se enfoca en la dependencia entre los índices bursátiles DAX (Alemania) y FTSE100 (Reino Unido) mediante modelos de cópulas con cambio de régimen de Markov, evaluando los resultados de las tablas 45, 46 y 47.

En primera instancia, la cópula t-Student demuestra un desempeño destacado en algunas métricas, como el menor valor de Crámer-von Mises ($CVM = 0,0275$) y resultados consistentes en las pruebas KS (0,6150 y 0,6334 para los regímenes 1 y 2). Sin embargo, sus grados de libertad extremadamente elevados ($\nu = 3,25 \times 10^{11}$) limitan su aplicabilidad práctica, lo que lleva a descartarla a pesar de contar con el menor AIC (-2677,14).

Por otro lado, la cópula Gumbel emerge como una alternativa sólida, respaldada por su AIC más competitivo entre las alternativas restantes (-2370,36). Además, su capacidad para modelar eventos extremos en la cola superior ($\lambda_U = 0,7508$) resulta particularmente relevante en este análisis. Aunque su CVM (0,4202) no es el más bajo, su desempeño global en las métricas evaluadas la posiciona como la opción más consistente para describir la relación entre los índices.

En cuanto a la cópula Clayton, aunque logra capturar una fuerte dependencia en la cola inferior ($\lambda_L = 0,8365$), su desempeño general es menos convincente. Esto se refleja en su AIC (-2299,28) y su elevado CVM (52,6177), que indican limitaciones significativas en su capacidad de ajuste. De manera similar, la cópula Frank presenta un AIC de -2338,39 y valores aceptables en las pruebas KS, pero su desempeño no supera al de Gumbel en términos globales.

En síntesis, la cópula Gumbel se posiciona como la mejor opción para modelar la dependencia entre DAX y FTSE100, por sus métricas de calidad adecuadas.

Tabla 45

Resumen de parámetros para DAX-FTSE100

Cópula	π_L	π_H	θ_1	θ_2	$\nu(global)$
T-Student	0,7506	0,7760	0,8862	0,6367	3,25E+11
Clayton	0,7977	0,8911	3,8836	1,1881	-
Frank	0,9364	0,9593	11,0021	5,0610	-
Gumbel	0,9057	0,9362	3,1154	1,6968	-

Nota. π_L representa la probabilidad de pertenecer al régimen de baja dependencia, mientras que π_H es la probabilidad de pertenecer al régimen de alta dependencia. θ_1 y θ_2 corresponden a los parámetros de dependencia en los regímenes de baja y alta dependencia, respectivamente. $\nu(global)$ indica los grados de libertad globales del modelo, aplicables únicamente a la cópula T-Student.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 46

Métricas de dependencia para DAX-FTSE100

Cópula	Q_{10}	Q_{01}	λ_L	λ_U	τ_L	τ_U
T-Student	0,2494	0,2240	0,0000	0,0000	0,6934	0,4394
Clayton	0,2023	0,1089	0,8365	0,0000	0,6601	0,3727
Frank	0,0636	0,0407	0,0000	0,0000	0,6908	0,4605
Gumbel	0,0943	0,0638	0,0000	0,7508	0,6790	0,4107

Nota. λ_L representa la probabilidad de eventos extremos en la cola inferior, y λ_U describe la probabilidad de eventos extremos en la cola superior. τ_L corresponde a la dependencia ordinal (Tau de Kendall) en el régimen de baja dependencia, y τ_U a la dependencia ordinal en el régimen de alta dependencia.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 47

Métricas de calidad para DAX-FTSE100

Cópula	CVM	KS Stat (Regime 1)	KS Stat (Regime 2)	LF	LF*	p value	AIC
T-Student	0,0275	0,6150	0,6334	1343,57	842,66	0,0000	-2677,14
Clayton	52,6177	0,0945	0,0441	1153,64	947,42	0,0000	-2299,28
Frank	0,1992	0,0851	0,0237	1173,19	1043,53	0,0000	-2338,39
Gumbel	0,4202	0,0869	0,0510	1189,18	151,62	0,0000	-2370,36

CVM = estadístico de la prueba de Crámer-von Mises.

KS Stat = Estadístico de la prueba de Kolmogórov-Smirnov para régimen 1 y 2.

LF = valor máximo de la función de verosimilitud.

LF* = valor máximo de la función de verosimilitud restringida (sin cambio de régimen).

p-value = valor de probabilidad de una prueba LR estándar (nula = sin cambio de régimen).

Fuente. Elaboración propia.

En el régimen de baja volatilidad (Figura 28), las curvas de nivel se caracterizan por una estructura alargada y bien definida, con valores máximos de densidad cercanos a 2.5. Este comportamiento sugiere una correlación significativa entre los índices, en la que los movimientos conjuntos se alinean predominantemente en torno a la diagonal principal. Las pseudo-observaciones están concentradas en las regiones centrales de mayor densidad, indicando una relación altamente estructurada y consistente. El parámetro $\theta_1 = 3,1154$ refuerza esta interpretación al reflejar un alto grado de dependencia global. Además, el coeficiente de Kendall, con un promedio de 67.90 %, confirma la intensidad de esta conexión, particularmente en los movimientos extremos hacia valores altos, evidenciando una sincronización robusta influenciada por factores compartidos.

En el régimen de alta volatilidad (Figura 29), las curvas de nivel adquieren una forma más dispersa y menos compacta, con densidades máximas que disminuyen a 2.2. Este cambio refleja una disminución en la cohesión de los movimientos conjuntos, lo que se traduce en una relación menos estructurada entre los índices. Las pseudo-observaciones, aunque aún se concentran en zonas de mayor densidad, se distribuyen más ampliamente en el gráfico, alcanzando áreas periféricas. Este comportamiento indica una mayor variabilidad en la interacción conjunta, característica de escenarios de incertidumbre. El parámetro $\theta_2 = 1,6968$ cuantifica esta pérdida de intensidad en la dependencia, mientras que el coeficiente de Kendall, aunque medianamente elevado, sugiere que la interacción persiste, pero con menor consistencia en los patrones de movimientos conjuntos.

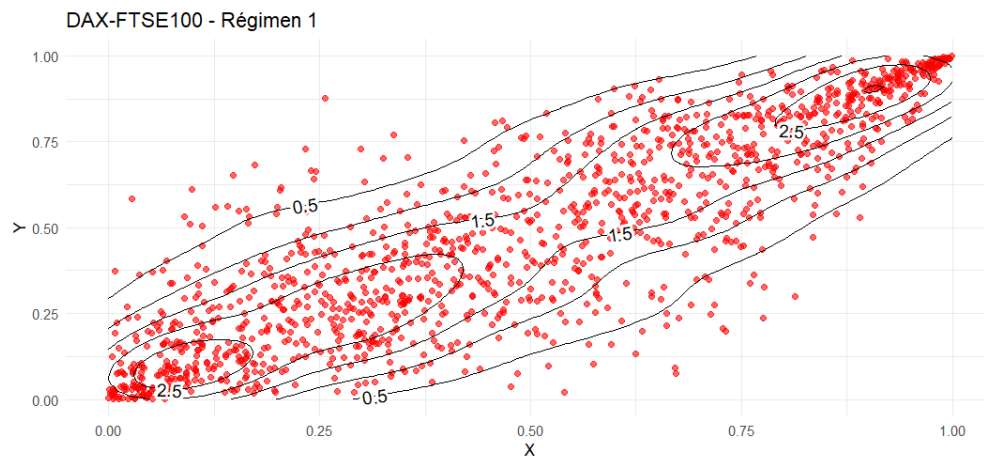
Desde una perspectiva técnica, las curvas de nivel en el régimen de baja volatilidad indican que los índices responden de manera alineada a factores macroeconómicos compartidos, lo que genera una relación predecible y bien estructurada. En cambio, en el régimen de alta volatilidad, la mayor dispersión de las curvas revela un incremento en la autonomía de los índices, posiblemente debido a la influencia de factores locales o específicos de cada mercado, que desestabilizan la

sincronización observada en el régimen estable.

En síntesis, el análisis gráfico evidencia que la relación entre los índices DAX y FTSE100 es altamente dependiente del régimen de volatilidad. Mientras que en escenarios de estabilidad la interacción es fuerte y predecible, en condiciones de incertidumbre se observa una fragmentación de la relación, con patrones más dispersos y menos estructurados.

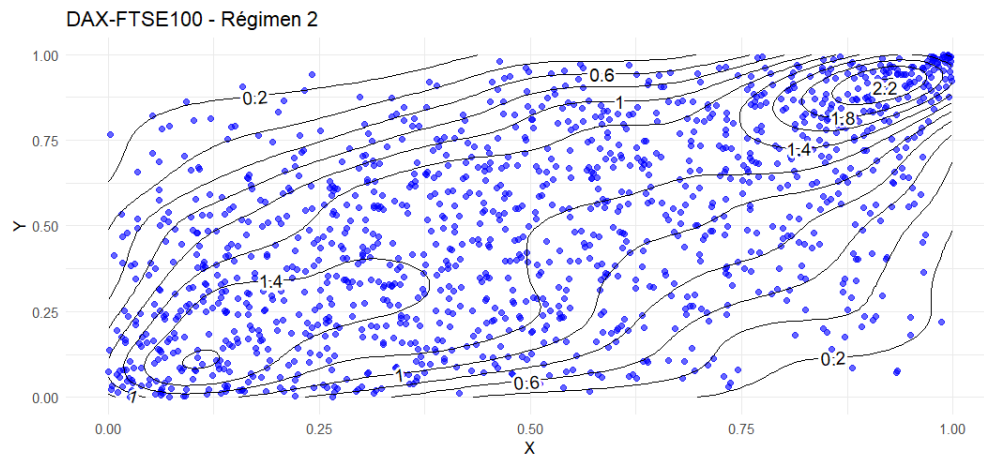
Figura 28

Diagrama de dispersión de DAX-FTSE100 Régimen 1 (baja volatilidad)



Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Gumbel con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

Figura 29*Diagrama de dispersión de DAX-FTSE100 Régimen 2 (alta volatilidad)*

Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Gumbel con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

7.2.5. DAX - IBEX35

El análisis se enfoca en la dependencia entre los índices bursátiles DAX (Alemania) y IBEX35 (España) mediante modelos de cópulas con cambio de régimen de Markov, evaluando los resultados de las tablas 48, 49 y 50.

En primer lugar, la cópula t-Student exhibe un desempeño aceptable en las pruebas KS (0,6295 y 0,6276) y una estructura de dependencia moderada en las colas ($\lambda_L = 0,2949$, $\lambda_U = 0,3244$). Sin embargo, su AIC de -2381,51, aunque competitivo, no supera a las alternativas evaluadas. Adicionalmente, su CVM de 0,2149 refleja un ajuste menos preciso, lo que limita su idoneidad para este caso específico.

Por otra parte, la cópula Gumbel se distingue por un AIC de -2432,08 y una capacidad destacada para modelar eventos extremos en la cola superior ($\lambda_U = 0,5067$). No obstante, su CVM de 0,4143 es considerablemente más alto en comparación con otras opciones, lo que sugiere un

ajuste menos preciso en términos globales. Aunque inicialmente parece prometedora, la diferencia mínima en el AIC respecto a la cópula Frank la relega en esta evaluación.

En cuanto a la cópula Clayton, esta destaca por presentar el menor AIC (-2463,50) y una fuerte dependencia en la cola inferior ($\lambda_L = 0,5775$). Sin embargo, su CVM excesivamente alto (53,2944) revela problemas significativos de ajuste, descartándola como una opción viable para este análisis.

Finalmente, la cópula Frank ofrece un balance entre un AIC competitivo (-2401,76) y el CVM más bajo entre todas las alternativas evaluadas (0,1568). Este resultado sugiere que, a pesar de una menor capacidad para capturar dependencia extrema en comparación con Gumbel, su ajuste global es notablemente superior. Además, sus pruebas KS (0,0189 y 0,1297) demuestran una estabilidad consistente en ambos regímenes, consolidando su idoneidad.

En conclusión, considerando la diferencia marginal en el AIC entre las cópulas Gumbel y Frank, junto con el CVM más bajo de esta última, se elige la cópula Frank como la opción más adecuada para modelar la dependencia entre DAX e IBEX35.

Tabla 48

Resumen de parámetros para DAX-IBEX35

Cópula	π_L	π_H	θ_1	θ_2	$\nu(global)$
T-Student	0,4992	0,5056	0,7527	0,7795	7,7918
Clayton	0,7992	0,4275	1,2624	6,0401	-
Frank	0,9713	0,8704	6,0243	15,2806	-
Gumbel	0,8065	0,7900	1,7285	2,8581	-

Nota. π_L representa la probabilidad de pertenecer al régimen de baja dependencia, mientras que π_H es la probabilidad de pertenecer al régimen de alta dependencia. θ_1 y θ_2 corresponden a los parámetros de dependencia en los regímenes de baja y alta dependencia, respectivamente. $\nu(global)$ indica los grados de libertad globales del modelo, aplicables únicamente a la cópula T-Student.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 49*Métricas de dependencia para DAX-IBEX35*

Cópula	Q_{10}	Q_{01}	λ_L	λ_U	τ_L	τ_U
T-Student	0,5008	0,4944	0,2949	0,3244	0,5425	0,5690
Clayton	0,2008	0,5725	0,5775	0,0000	0,3870	0,7512
Frank	0,0287	0,1296	0,0000	0,0000	0,5154	0,7664
Gumbel	0,1935	0,2100	0,0000	0,5067	0,4215	0,6501

Nota. λ_L representa la probabilidad de eventos extremos en la cola inferior, y λ_U describe la probabilidad de eventos extremos en la cola superior. τ_L corresponde a la dependencia ordinal (Tau de Kendall) en el régimen de baja dependencia, y τ_U a la dependencia ordinal en el régimen de alta dependencia.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 50*Métricas de calidad para DAX-IBEX35*

Cópula	CVM	KS Stat (Regime 1)	KS Stat (Regime 2)	LF	LF*	p value	AIC
T-Student	0,2149	0,6295	0,6276	1195,76	864,36	0,0000	-2381,51
Clayton	53,2944	0,0461	0,1447	1235,75	933,87	0,0000	-2463,50
Frank	0,1568	0,0189	0,1297	1204,88	1084,58	0,0000	-2401,76
Gumbel	0,4143	0,0424	0,0616	1220,04	318,62	0,0000	-2432,08

CVM = estadístico de la prueba de Crámer-von Mises.

KS Stat = Estadístico de la prueba de Kolmogórov-Smirnov para régimen 1 y 2.

LF = valor máximo de la función de verosimilitud.

LF* = valor máximo de la función de verosimilitud restringida (sin cambio de régimen).

p-value = valor de probabilidad de una prueba LR estándar (nula = sin cambio de régimen).

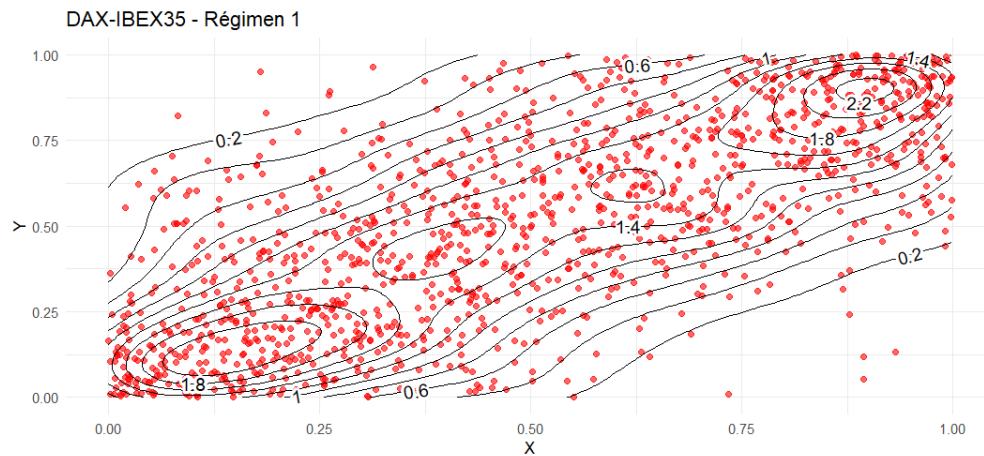
Fuente. Elaboración propia.

En el régimen de baja volatilidad (Figura 30), la dependencia entre los índices es moderada, con curvas de nivel que alcanzan un máximo de densidad de 2.2 y se distribuyen de manera más amplia en las regiones centrales. Las pseudo-observaciones, concentradas principalmente en estos sectores, indican que la correlación entre los índices es estable pero no estrictamente rígida. Este comportamiento se traduce en un valor del parámetro $\theta_1 = 6,0243$, que refleja una conexión relevante pero sin una sincronización completa. Además, el coeficiente de Kendall promedio del 51.54 % confirma que, si bien existe una relación importante, los movimientos conjuntos de los índices conservan cierta autonomía en este régimen.

En contraste, el régimen de alta volatilidad (Figura 31) está marcado por una mayor cohesión en los movimientos conjuntos. Las curvas de nivel, que ahora alcanzan una densidad máxima de 2.5, se compactan y alinean claramente a lo largo de la diagonal principal del gráfico. Este cambio en la configuración sugiere una correlación más intensa, donde los índices responden de manera similar a factores comunes. Las pseudo-observaciones se agrupan en torno a las zonas de mayor densidad, reforzando la idea de una relación más estructurada en este escenario. El parámetro $\theta_2 = 15,2806$ cuantifica esta intensificación de la dependencia, mientras que el coeficiente de Kendall promedio, que asciende al 76.64 %, evidencia un fuerte contagio financiero en situaciones de mayor incertidumbre.

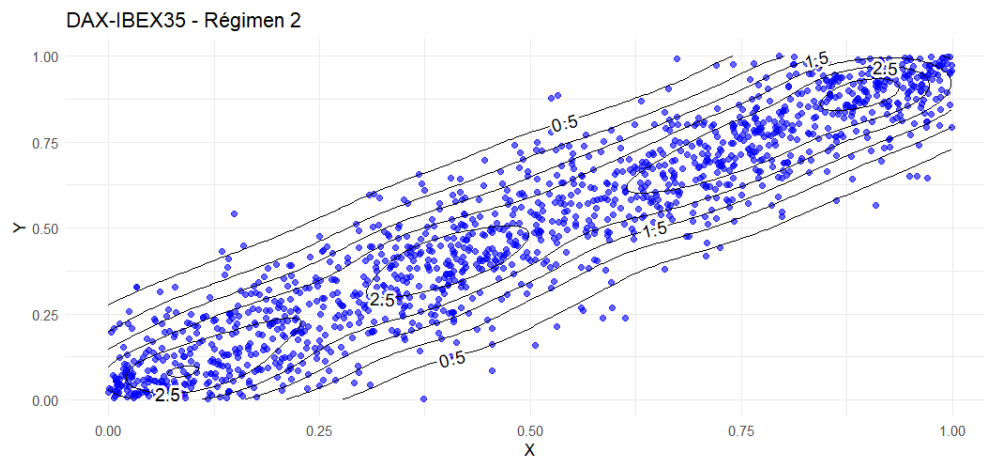
Al comparar ambos gráficos, las diferencias entre ambos regímenes son particularmente evidentes al analizar las curvas de nivel. En baja volatilidad, estas curvas muestran mayor dispersión, indicando que los índices no están completamente sincronizados y mantienen cierta independencia en sus trayectorias. Por otro lado, en alta volatilidad, la compactación de las curvas y la concentración de las pseudo-observaciones reflejan una alineación más fuerte, lo que sugiere que los índices están más influenciados por factores externos compartidos.

Se puede decir que, a partir de lo anterior, los índices DAX e IBEX35 experimentan una relación dinámica que varía según el régimen de volatilidad. En condiciones de baja volatilidad, la interacción es moderada y permite cierta independencia entre los índices, mientras que en alta volatilidad la dependencia se intensifica, mostrando movimientos conjuntos altamente sincronizados.

Figura 30*Diagrama de dispersión de DAX-IBEX35 Régimen 1 (baja volatilidad)*

Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Frank con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

Figura 31*Diagrama de dispersión de DAX-IBEX35 Régimen 2 (alta volatilidad)*

Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Frank con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

7.2.6. FTSE100 - IBEX35

El análisis se enfoca en la dependencia entre los índices bursátiles FTSE100 (Reino Unido) y IBEX35 (España) mediante modelos de cópulas con cambio de régimen de Markov, evaluando los resultados de las tablas 51, 52 y 53.

Al examinar la cópula t-Student, se observa que posee el AIC más bajo y un CBM de 0,0573 que es bastante aceptable. Sin embargo, se descarta este ajuste producto de que muestra inestabilidad al tener grados de libertad mayores a 35, un indicio de sobreajuste.

Por otro lado, la cópula Clayton presenta un AIC de -1835,14, siendo inferior al de la t-Student. Aunque muestra una capacidad notable para capturar dependencia en la cola inferior ($\lambda_L = 0,4550$), su CVM elevado (39,4973) refleja problemas significativos de ajuste global, lo que reduce su idoneidad para describir la relación entre estos índices.

La cópula Gumbel, a pesar de su AIC de -1716,39, presenta un CVM alto (0,5785) y una dependencia marcada en la cola superior ($\lambda_U = 0,4530$). No obstante, el elevado CVM sugiere que este modelo no es el más adecuado en términos de ajuste general.

En contraste, la cópula Frank se posiciona como una alternativa intermedia, con un AIC de -1820,01 y un CVM moderado de 0,2198. Aunque no alcanza el mejor AIC, su ajuste global es más consistente que el de Clayton y Gumbel, como lo demuestran sus pruebas KS (0,0304 y 0,0606). Esta combinación de resultados hace que la cópula Frank sea una opción más robusta en comparación con las otras alternativas.

En resumen, a pesar de no tener el AIC más bajo, la cópula Frank se elige como la mejor opción debido a su equilibrio entre ajuste general y precisión, respaldado por su CVM más bajo en comparación con Clayton y Gumbel.

Tabla 51

Resumen de parámetros para FTSE100-IBEX35

Cópula	π_L	π_H	θ_1	θ_2	$\nu(global)$
T-Student	0,6579	0,6913	0,5312	0,8265	2,20,E+10
Clayton	0,6969	0,4289	0,8802	3,4284	-
Frank	0,7113	0,7024	3,7947	8,3110	-
Gumbel	0,9461	0,8951	1,5886	2,5647	-

Nota. π_L representa la probabilidad de pertenecer al régimen de baja dependencia, mientras que π_H es la probabilidad de pertenecer al régimen de alta dependencia. θ_1 y θ_2 corresponden a los parámetros de dependencia en los regímenes de baja y alta dependencia, respectivamente. $\nu(global)$ indica los grados de libertad globales del modelo, aplicables únicamente a la cópula T-Student.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 52

Métricas de dependencia para FTSE100-IBEX35

Cópula	Q_{10}	Q_{01}	λ_L	λ_U	τ_L	τ_U
T-Student	0,3421	0,3087	0,0000	0,0000	0,3565	0,6194
Clayton	0,3031	0,5711	0,4550	0,0000	0,3056	0,6316
Frank	0,2887	0,2976	0,0000	0,0000	0,3726	0,6138
Gumbel	0,0539	0,1049	0,0000	0,4530	0,3705	0,6101

Nota. λ_L representa la probabilidad de eventos extremos en la cola inferior, y λ_U describe la probabilidad de eventos extremos en la cola superior. τ_L corresponde a la dependencia ordinal (Tau de Kendall) en el régimen de baja dependencia, y τ_U a la dependencia ordinal en el régimen de alta dependencia.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 53

Métricas de calidad para FTSE100-IBEX35

Cópula	CVM	KS Stat (Regime 1)	KS Stat (Regime 2)	LF	LF*	p value	AIC
T-Student	0,0573	0,6334	0,6123	1015,06	710,28	0,0000	-2020,13
Clayton	39,4973	0,0431	0,0977	921,57	699,38	0,0000	-1835,14
Frank	0,2198	0,0304	0,0606	914,01	804,22	0,0000	-1820,01
Gumbel	0,5785	0,0428	0,0688	862,20	-569,58	0,0000	-1716,39

CVM = estadístico de la prueba de Crámer-von Mises.

KS Stat = Estadístico de la prueba de Kolmogórov-Smirnov para régimen 1 y 2.

LF = valor máximo de la función de verosimilitud.

LF* = valor máximo de la función de verosimilitud restringida (sin cambio de régimen).

p-value = valor de probabilidad de una prueba LR estándar (nula = sin cambio de régimen).

Fuente. Elaboración propia.

En primer lugar, durante los periodos de baja volatilidad (Figura 32), las curvas de nivel

reflejan una dispersión moderada, con una densidad máxima de 1.8, concentrada en las zonas centrales del gráfico. Las pseudo-observaciones se agrupan principalmente en estas áreas, lo que señala una dependencia estructurada y relativamente estable. Este comportamiento se traduce en un parámetro $\theta_1 = 3,7947$, que cuantifica una relación significativa, aunque lejos de ser extrema. Asimismo, el coeficiente de Kendall promedio, que asciende al 37,26 %, refuerza la percepción de una conexión moderada, donde los movimientos conjuntos muestran cierta alineación sin dejar de ser parcialmente independientes.

Por otro lado, al considerar los periodos de alta volatilidad (Figura 33), se observa un cambio sustancial en las curvas de nivel, que adquieren mayor compactación y alcanzan una densidad máxima de 2.2. Este patrón se orienta claramente hacia la diagonal principal del gráfico, lo que evidencia una dependencia más intensa y una sincronización acentuada entre los movimientos de los índices. Las pseudo-observaciones en este contexto se concentran en mayor medida en las áreas de máxima densidad, reflejando una interacción más cohesionada y menos dispersa. Este fenómeno queda respaldado por un parámetro $\theta_2 = 8,3110$, mientras que el coeficiente de Kendall promedio, del 61.38 %, pone de manifiesto un contagio financiero más marcado bajo estas condiciones de incertidumbre.

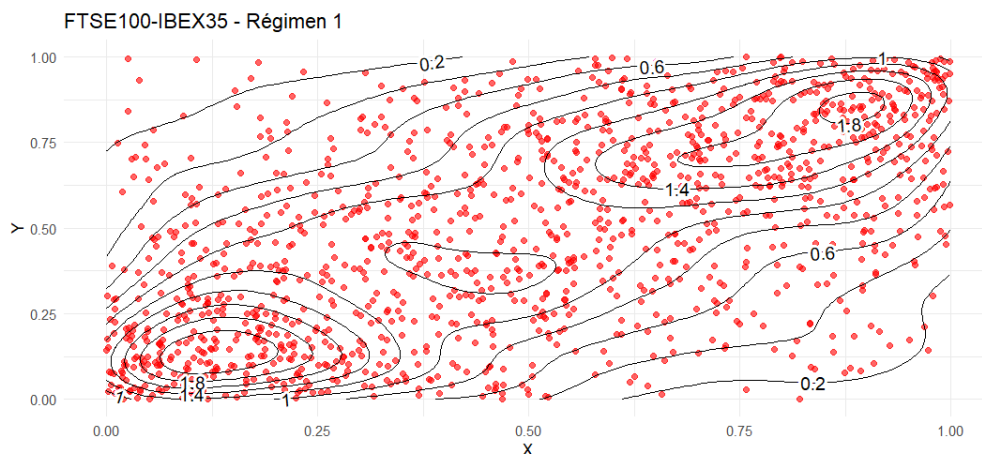
Desde otra perspectiva, las curvas de nivel en regímenes de baja volatilidad indican que la relación entre los índices responde a una combinación de factores compartidos y elementos individuales, lo que genera una correlación moderada y una autonomía relativa en sus movimientos. En contraste, en escenarios de alta volatilidad, la alineación más marcada de las curvas y la elevada concentración de pseudo-observaciones sugieren que los índices se ven impulsados por factores externos comunes que sincronizan de manera evidente sus comportamientos.

En conclusión, los índices FTSE100 e IBEX35 presentan interacciones que varían signifi-

cativamente según el régimen de volatilidad. En contextos de estabilidad, la relación es moderada y conserva ciertos grados de independencia; sin embargo, en condiciones de alta volatilidad, la dependencia se intensifica, destacando una sincronización notable en sus movimientos conjuntos.

Figura 32

Diagrama de dispersión de FTSE100-IBEX35 Régimen 1 (baja volatilidad)

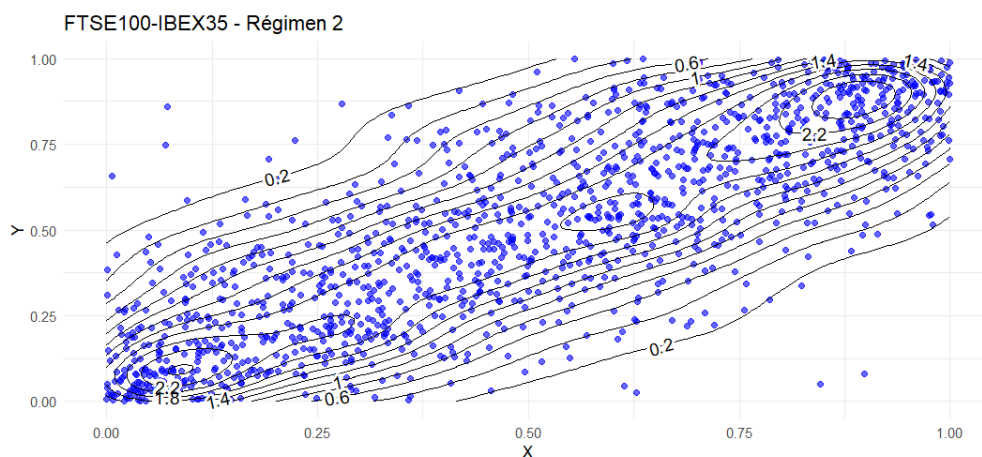


Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Frank con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

Figura 33

Diagrama de dispersión de FTSE100-IBEX35 Régimen 2 (alta volatilidad)



Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Frank con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

7.3. Análisis par de índices Europa-América: FTSE100 - SP500

El análisis se enfoca en la dependencia entre los índices bursátiles FTSE100 (Reino Unido) y SP500 (Estados Unidos) mediante modelos de cópulas con cambio de régimen de Markov, evaluando los resultados de las tablas 54, 55 y 56.

El análisis realizado sobre los índices FTSE100 y SP500 demuestra que, si bien la cópula t-Student inicialmente parece ofrecer el mejor ajuste debido a su AIC más bajo (-1090,20) y un CVM reducido (0,0428), los grados de libertad estimados para este modelo superan el umbral de 35 ($\nu = 37,2363$). Este comportamiento, como se indica en la referencia proporcionada, puede considerarse un indicador de inestabilidad en el ajuste del modelo, especialmente cuando se evalúan series de tiempo en escenarios de alta y baja volatilidad.

La presencia de grados de libertad tan elevados en la cópula t-Student sugiere que el modelo pierde especificidad y puede no ser adecuado para capturar de manera precisa la estructura de dependencia en los extremos de la distribución, particularmente en regímenes de alta volatilidad. Por esta razón, se desestima su uso como la mejor opción para representar la relación entre los índices.

Dado esto, se reconsideran las demás alternativas, y la cópula Frank emerge como la más adecuada. A pesar de que su AIC (-984,68) es ligeramente superior al de la t-Student, presenta un CVM razonablemente bajo (0,0749), lo que indica un ajuste más equilibrado y robusto en términos generales. Además, su capacidad para mantener consistencia entre los regímenes de volatilidad refuerza su selección como el modelo más apropiado para describir la dependencia entre FTSE100 y SP500.

En conclusión, considerando la inestabilidad atribuida a los grados de libertad elevados en

la cópula t-Student, se opta por la cópula Frank como la mejor representación de la relación entre los índices analizados, destacando por su balance entre calidad del ajuste y robustez en escenarios de cambio de régimen.

Tabla 54*Resumen de parámetros para FTSE100-SP500*

Cópula	π_L	π_H	θ_1	θ_2	$\nu(global)$
T-Student	0,6931	0,7023	0,7252	0,3011	37,2363
Clayton	0,6853	0,8805	2,5383	0,4896	-
Frank	0,5863	0,5650	5,7995	1,7050	-
Gumbel	0,6672	0,9390	2,8302	1,3585	-

Nota. π_L representa la probabilidad de pertenecer al régimen de baja dependencia, mientras que π_H es la probabilidad de pertenecer al régimen de alta dependencia. θ_1 y θ_2 corresponden a los parámetros de dependencia en los regímenes de baja y alta dependencia, respectivamente. $\nu(global)$ indica los grados de libertad globales del modelo, aplicables únicamente a la cópula T-Student.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 55*Métricas de dependencia para FTSE100-SP500*

Cópula	Q_{10}	Q_{01}	λ_L	λ_U	τ_L	τ_U
T-Student	0,3069	0,2977	0,0182	0,0001	0,5165	0,1947
Clayton	0,3147	0,1195	0,7610	0,0000	0,5593	0,1967
Frank	0,4137	0,4350	0,0000	0,0000	0,5035	0,1842
Gumbel	0,3328	0,0610	0,0000	0,7225	0,6467	0,2639

Nota. λ_L representa la probabilidad de eventos extremos en la cola inferior, y λ_U describe la probabilidad de eventos extremos en la cola superior. τ_L corresponde a la dependencia ordinal (Tau de Kendall) en el régimen de baja dependencia, y τ_U a la dependencia ordinal en el régimen de alta dependencia.

Fuente. Elaboración propia.

Tabla 56*Métricas de calidad para FTSE100-SP500*

Cópula	CVM	KS Stat (Regime 1)	KS Stat (Regime 2)	LF	LF*	p value	AIC
T-Student	0,0428	1,0000	1,0000	550,10	409,69	0,0000	-1090,20
Clayton	19,6252	0,1057	0,0266	499,43	297,80	0,0000	-990,86
Frank	0,0749	0,0659	0,0206	496,34	376,09	0,0000	-984,68
Gumbel	0,1554	0,1271	0,0225	481,08	-2104,99	0,0000	-954,17

CVM = estadístico de la prueba de Crámer-von Mises.

KS Stat = Estadístico de la prueba de Kolmogórov-Smirnov para régimen 1 y 2.

LF = valor máximo de la función de verosimilitud.

LF* = valor máximo de la función de verosimilitud restringida (sin cambio de régimen).

p-value = valor de probabilidad de una prueba LR estándar (nula = sin cambio de régimen).

Fuente. Elaboración propia.

En el Régimen 1 (Figura 34), las observaciones se encuentran altamente concentradas en regiones específicas del espacio bivariado, como se aprecia en las curvas de nivel bien definidas del gráfico correspondiente. Los máximos de densidad conjunta alcanzan valores cercanos a 1.8, reflejando una fuerte concentración en las regiones centrales del gráfico. Esta configuración indica una sincronización más marcada entre los índices bursátiles en este régimen, lo cual se encuentra respaldado por el valor de Tau de Kendall ($\tau_L = 50,35\%$) que muestra una dependencia moderada entre los índices. Además, la persistencia de este régimen es alta, con una probabilidad de permanencia del 58,63 %, lo que refuerza la idea de que este escenario está asociado a periodos de estabilidad relativa en los mercados financieros.

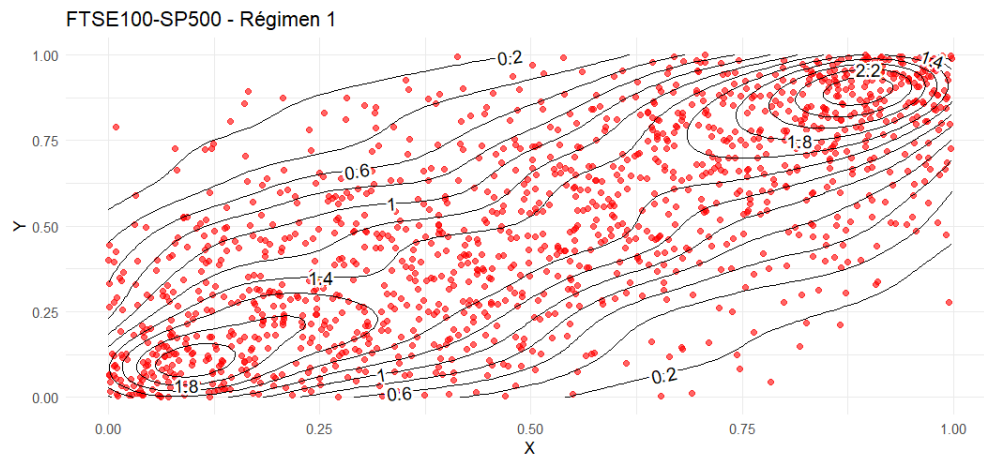
Por otro lado, el Régimen 2 (Figura 35) presenta un patrón diferente, caracterizado por una mayor dispersión de las observaciones. Las curvas de nivel en este régimen son más difusas y alcanzan valores máximos de densidad conjunta más bajos, alrededor de 1.2. Esto refleja una menor estructura en la dependencia entre los índices y una disminución en la sincronización de sus movimientos. El valor de Tau de Kendall para este régimen es significativamente menor ($\tau_U = 18,42\%$), lo que confirma la reducción en la dependencia. Además, la persistencia en este régimen

es del 56,50 %, lo que sugiere que, aunque menos estructurado, este escenario también tiene una estabilidad moderada en términos de la probabilidad de mantenerse en dicho estado.

Desde la perspectiva del contagio financiero, el Régimen 1 es el que presenta un mayor riesgo de interdependencia entre los índices FTSE100 y SP500. La alta concentración de las observaciones y la dependencia moderada en este régimen sugieren que los movimientos de uno de los índices pueden influir significativamente en el otro durante este estado. Esto podría estar relacionado con periodos de menor volatilidad, donde las condiciones del mercado favorecen una mayor interconexión. En contraste, el Régimen 2 refleja un escenario con menor sincronización y dispersión en los movimientos conjuntos de los índices, lo que sugiere una menor influencia mutua durante periodos de alta volatilidad o estrés financiero.

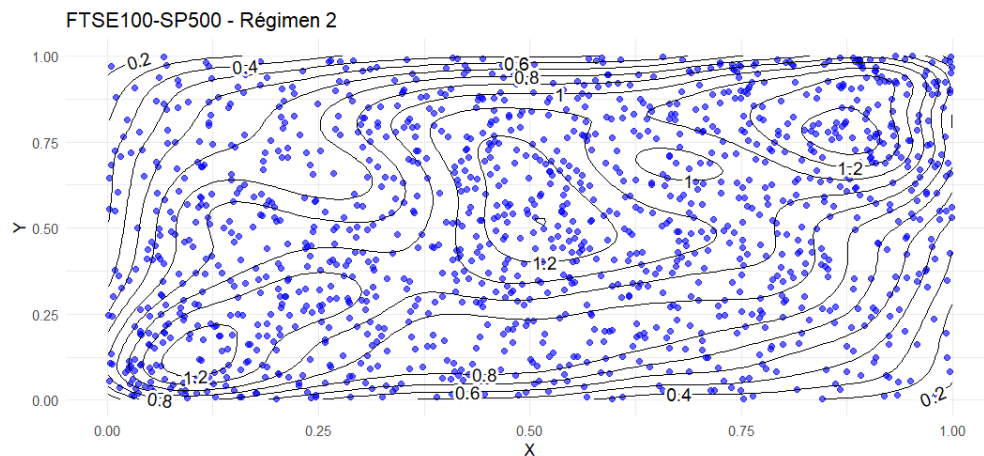
Las probabilidades de transición entre regímenes refuerzan esta dinámica. La probabilidad de pasar del Régimen 1 al Régimen 2 es del 41,37 %, mientras que la probabilidad de transición inversa es del 43,50 %. Estas cifras indican que los regímenes son relativamente inestables, lo que implica una dinámica rápida entre periodos de alta y baja dependencia. Este comportamiento es coherente con la naturaleza de los mercados financieros, donde las condiciones pueden cambiar abruptamente dependiendo de factores internos y externos.

En conclusión, el análisis de la dependencia entre los índices FTSE100 y SP500 destaca que el Régimen 1 está asociado a una mayor sincronización y dependencia moderada, mientras que el Régimen 2 refleja una estructura más dispersa y menor interdependencia. Las gráficas generadas, con sus curvas de nivel bien definidas y diferencias en la densidad conjunta, corroboran estas observaciones y muestran cómo la estructura de la dependencia cambia entre regímenes.

Figura 34*Diagrama de dispersión de FTSE100-SP500 Régimen 1 (baja volatilidad)*

Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Frank con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

Figura 35*Diagrama de dispersión de FTSE100-SP500 Régimen 2 (alta volatilidad)*

Nota. Diagrama de dispersión de cópulas simuladas de Frank con régimen de Markov utilizando los parámetros de la cópula para este par de índices.

Fuente. Elaboración propia.

8. Conclusiones y recomendaciones

La pandemia de COVID-19 generó un impacto sin precedentes en la economía global, transformando de manera significativa las dinámicas de los mercados financieros. Las medidas de contención implementadas para frenar la propagación del virus paralizaron las actividades económicas, provocando severas disrupciones en las cadenas de suministro globales. Sectores clave, como la tecnología y la energía, experimentaron fluctuaciones abruptas. En este contexto, el Producto Interno Bruto (PIB) mundial se contrajo un 6,9 % durante el segundo trimestre de 2020, reflejando los efectos iniciales de la crisis. Sin embargo, en 2021 se observó una recuperación con un crecimiento estimado del 6,0 %, aunque este impulso se moderó hacia finales del año debido a cuellos de botella persistentes y al aumento de la inflación. En particular, las economías avanzadas registraron incrementos históricos en el Índice de Precios al Consumidor (IPC). Estos acontecimientos evidenciaron la vulnerabilidad de los mercados globales ante shocks externos, especialmente en un contexto de creciente interconexión económica.

En este contexto, el análisis del contagio financiero es esencial para entender cómo las crisis afectan las relaciones entre los mercados globales. Este fenómeno, entendido como un aumento significativo en la dependencia entre mercados durante periodos de crisis en comparación con momentos de estabilidad, ha sido ampliamente estudiado en la literatura económica. En este estudio, se utilizó un enfoque basado en cópulas dinámicas con régimen de Markov y modelos SWARCH para estudiar la interacción entre índices bursátiles de América y Europa bajo diferentes condiciones de volatilidad. Estas herramientas permitieron identificar transiciones entre regímenes y modelar dinámicas complejas, proporcionando una visión integral de las interacciones entre los activos financieros.

El análisis de los índices bursátiles americanos y europeos, mediante modelos de cópulas y cambio de régimen, evidenció patrones claros de dependencia diferenciados entre períodos de estabilidad y crisis. Para los índices americanos, las cópulas de Frank y Gumbel ofrecieron los mejores ajustes, destacando en particular la capacidad de las cópulas de Gumbel para capturar la dependencia en las colas superiores durante escenarios de alta volatilidad, como en el caso de SP500-IPSA y SP500-IPC. Esto refleja que, en momentos de estrés financiero, la relación entre estos mercados tiende a intensificarse, lo que evidencia cierto contagio financiero. Sin embargo, en regímenes de baja volatilidad, las dependencias son más homogéneas, permitiendo una mayor estabilidad en las interacciones entre estos índices.

En contraste, para los índices europeos, las cópulas t-Student fueron predominantes, especialmente en pares como DAX-FTSE100 y CAC40-FTSE100, donde la dependencia estructural en períodos de baja volatilidad fue más fuerte, mostrando una sincronización significativa en los movimientos conjuntos de estos mercados. Sin embargo, durante períodos de alta volatilidad, las cópulas de Frank capturaron mejor la dinámica en pares como FTSE100-IBEX35, evidenciando que las relaciones entre estos índices se vuelven más asimétricas y dispersas, concentrándose en valores extremos y reflejando una mayor exposición a eventos críticos.

El análisis del par Bovespa-IPC, ajustado mediante una cópula Frank, resalta diferencias significativas en la dependencia entre los regímenes de volatilidad. En el régimen de baja volatilidad, el parámetro $\theta_1 = 4,5724$ sugiere una relación más estrecha entre ambos índices, lo cual se refleja en un Kendall's Tau del 42,88 %, evidenciando una fuerte conexión. Por otro lado, en el régimen de alta volatilidad, el parámetro $\theta_2 = 1,2923$ y un Kendall's Tau reducido al 14,13 % indican una menor sincronización en escenarios más inestables. Las métricas Q_{10} y Q_{01} que son 11,76 % y 16,68 % respectivamente, refuerzan la idea de que las probabilidades de permanencia en

el mismo régimen son consistentes, especialmente en contextos de baja incertidumbre. Esto se alinea con las probabilidades estimadas por el modelo SWARCH(2,1), que muestran una persistencia notable en ambos regímenes: en el caso del Bovespa, $P_{11} = 99,45\%$ y $P_{22} = 97,09\%$, mientras que para el IPC, $P_{11} = 99,76\%$ y $P_{22} = 95,00\%$. Desde una perspectiva temporal, las probabilidades suavizadas sugieren una prevalencia del régimen de baja volatilidad, aunque con momentos puntuales de alta volatilidad asociados a crisis económicas. Adicionalmente, los gráficos de densidad kernel muestran un comportamiento claramente diferenciado: el régimen de baja volatilidad presenta una alta concentración de puntos en valores centrales, reflejando una relación más fuerte y estable, mientras que en alta volatilidad la dispersión aumenta, indicando una conexión más débil entre los índices. Finalmente, al analizar la evolución histórica de las correlaciones, se observa un incremento durante periodos de crisis, pasando del 44,77 % antes de 2020 al 60,24 % durante el periodo crítico, lo que evidencia una mayor sensibilidad entre ambos mercados ante eventos globales, subrayando la importancia de evaluar estos patrones de dependencia dinámica.

El comportamiento entre el par de índices Bovespa e IPSA revela una marcada dependencia durante períodos de baja volatilidad, especialmente cuando ambos mercados experimentan caídas simultáneas. Las métricas de la cópula de Frank muestran un tau de Kendall del 36,21 % en este régimen, junto con una alta probabilidad de persistencia (50,35 %) y una mayor probabilidad de transición del régimen de alta a baja volatilidad (50,3 %), lo que sugiere que, ante eventos de riesgo financiero, los índices tienden a permanecer más tiempo sincronizados en un régimen de menor volatilidad. Las densidades generadas por la cópula indican una concentración de pseudo-observaciones con mayor dependencia en las colas inferiores que en las superiores durante el estado de baja volatilidad, lo que refuerza la sincronización de los movimientos conjuntos en estas condiciones. Este comportamiento se alinea con los parámetros positivos y de mayor magnitud

observados en este régimen, que reflejan una fuerte interdependencia entre ambos índices. Además, la correlación lineal de Pearson evidencia un incremento durante la crisis sanitaria, pasando del 39,98 % antes del evento al 45,93 % durante el mismo, mientras que las probabilidades suavizadas del modelo SWARCH confirman la predominancia del Régimen 1, con mayores niveles de persistencia en escenarios de baja volatilidad.

En cuanto al par de índices Bovespa y SP500 se evidencia una marcada interdependencia, especialmente durante períodos de alta volatilidad. En el Régimen 2 (alta volatilidad), las métricas de la cópula de Frank destacan una mayor intensidad de contagio financiero, con un parámetro $\theta_2 = 5,3575$ frente a $\theta_1 = 1,3204$ en el Régimen 1 (baja volatilidad). Además, los valores de Kendall's Tau ($\tau_L = 0,1442$ y $\tau_U = 0,4784$) confirman que la sincronización es considerablemente más fuerte en las colas superiores durante eventos extremos. Por otro lado, las densidades generadas por la cópula muestran una dispersión uniforme en el Régimen 1, reflejando menor dependencia, mientras que en el Régimen 2 se observan acumulaciones significativas en áreas específicas, lo que subraya la intensificación de la interdependencia en escenarios críticos. Asimismo, la correlación lineal de Pearson aumentó de 47,1 % antes de la crisis sanitaria a 64,59 % durante la misma, reafirmando la creciente sincronización entre ambos mercados. Finalmente, las probabilidades suavizadas del modelo SWARCH(2,1) corroboran transiciones más frecuentes hacia el Régimen 2 en momentos de alta volatilidad. Estos hallazgos destacan el mayor contagio financiero en alta volatilidad y enfatizan la relevancia de implementar estrategias robustas de gestión de riesgos frente a episodios de estrés financiero.

La relación del par IPSA e IPC revela una mayor dependencia durante períodos de baja volatilidad, como lo indica la cópula de Frank con una probabilidad de persistencia del 50,49 % en el Régimen 1 y parámetros $\theta_1 = 4,6149$, que contrastan con el Régimen 2, donde $\theta_2 = 1,2176$ y la

probabilidad de persistencia es del 49,65 %, por lo que las condiciones de baja volatilidad poseen mayor fuerza. Las métricas de dependencia destacan una sincronización más marcada en las colas inferiores durante eventos extremos dado que el Tau de Kendall lower es mucho mayor (43,17 %), que se ve apoyado por las densidades generadas las cuales muestran que las pseudo-observaciones se concentran mayormente en baja volatilidad, reforzando la interdependencia en este régimen. Los parámetros del modelo SWARCH(2,1) confirman esta dinámica, con alta persistencia en el Régimen 1 y transiciones menos frecuentes hacia el Régimen 2 para ambos índices por separado. Las varianzas condicionales reflejan niveles más bajos de volatilidad en el Régimen 1, mientras que el Régimen 2 muestra un aumento moderado. Además, la correlación de Pearson, aumenta del 41,77 % al 43,01 %, lo cual también evidencia, de forma lineal, que existe mayor interdependencia durante períodos de crisis.. En conjunto, estos resultados resaltan que la interdependencia entre IPSA e IPC es más pronunciada en períodos de baja volatilidad.

El análisis del par de índices SP500 e IPC pone de manifiesto una dependencia estructural más pronunciada durante períodos de baja volatilidad, representada en el Régimen 1. Según los parámetros de la cópula de Frank, este régimen muestra una probabilidad de persistencia del 54,46 %, con un parámetro $\theta_1 = 5,5486$, indicando una fuerte dependencia en baja volatilidad, y con mayor probabilidad de mantenerse en ese estado. Las métricas de Kendall's Tau indican que hay un 48,95 % de dependencia cuando ambos pares de índices tienden a la baja, es decir, hay una mayor sincronización en las colas inferiores en este régimen, donde se concentra la mayoría de las pseudo-observaciones en los extremos, según los gráficos de densidad. Por el contrario, en el Régimen 2 (alta volatilidad), la probabilidad de persistencia disminuye a 50,95 %, y el parámetro $\theta_2 = 1,8720$ evidencia una menor dependencia, con las pseudo-observaciones dispersas de manera menos homogénea. Además, la correlación de Pearson creció de 0,5353 antes de la crisis a 0,6024

durante esta, reflejando un aumento en la sincronización durante contextos de estrés financiero. Las probabilidades suavizadas del modelo SWARCH(2,1) corroboran la predominancia del Régimen 1 en condiciones normales, donde se observa una mayor concentración en el centro y en los extremos para cada índice por separado.

El análisis entre los índices SP500 e IPSA, basado en la cópula de Gumbel, evidencia una dependencia significativa en eventos extremos, especialmente en las colas superiores existiendo mayor interdependencia en el régimen de baja volatilidad. Los parámetros de la cópula, $\pi_L = 49,02\%$ y $\pi_H = 93,30\%$, indican una mayor probabilidad de ocurrencia en el Régimen 2 (alta volatilidad), mientras que los valores de $\theta_1 = 2,8623$ y $\theta_2 = 1,1973$ reflejan una dependencia más acentuada en el Régimen 1 (baja volatilidad). En términos de transición, las probabilidades $Q_{10} = 50,98\%$ y $Q_{01} = 6,70\%$ destacan una moderada probabilidad de pasar de baja a alta volatilidad y una baja probabilidad de retornar a la estabilidad, lo cual enfatiza la dificultad de revertir periodos de mayor riesgo. El análisis de dependencia conjunta, a través del τ de Kendall, revela valores de $65,06\%$ en el Régimen 1 y $16,48\%$ en el Régimen 2, lo que demuestra una mayor sincronización entre ambos índices en escenarios de baja volatilidad. Desde una perspectiva individual, el modelo SWARCH(2,1) aplicado al SP500 muestra una alta persistencia en sus regímenes, con probabilidades de $P_{11} = 98,09\%$ y $P_{22} = 96,86\%$, mientras que el IPSA presenta aún mayor estabilidad, con $P_{11} = 99,56\%$ y $P_{22} = 99,03\%$. Los parámetros relacionados con la volatilidad condicional confirman que el IPSA exhibe niveles más bajos de volatilidad en comparación con el SP500. Adicionalmente, los gráficos de densidad de la cópula Gumbel refuerzan estas observaciones, ya que en el Régimen 1 las pseudo-observaciones están más concentradas en el centro, lo que refleja una sincronización homogénea en momentos de estabilidad, mientras que en el Régimen 2 se observa una mayor dispersión, indicando una sincronización menos intensa durante eventos

extremos. Finalmente, las correlaciones de Pearson, que aumentaron de 35,63 % en la etapa previa a la crisis a 42,45 % durante esta, subrayan una intensificación de la interdependencia en contextos de estrés financiero.

El análisis del contagio financiero entre los índices CAC40 y DAX, utilizando una cópula t-Student y el modelo SWARCH(2,1), revela una mayor dependencia durante la baja volatilidad (Régimen 1) en comparación con la alta volatilidad (Régimen 2). En Régimen 1, la persistencia es alta (91,88 %), con un Tau de Kendall de 83,55 % y una notable dependencia en las colas ($\lambda_L = 65,55 \%$, $\lambda_U = 83,55 \%$), reflejando una fuerte sincronización y un mayor riesgo de contagio en eventos extremos, mientras que en Régimen 2, aunque la persistencia aumenta (96,25 %), la dependencia disminuye ($\tau = 67,01 \%$, $\lambda_L = 38,04 \%$, $\lambda_U = 67,01 \%$), indicando una sincronización más débil y dispersa. Las correlaciones de Pearson durante la crisis (94,98 %) muestran un ligero incremento frente al periodo pre-crisis (92,29 %), aunque con una dependencia menos estructurada en alta volatilidad. Los gráficos de densidad kernel confirman que en baja volatilidad las distribuciones son más concentradas y sincronizadas, mientras que en alta volatilidad son más dispersas. Las probabilidades suavizadas del modelo SWARCH(2,1) muestran que el CAC40 y el DAX presentan alta persistencia en ambos regímenes ($P_{11} = 98,77 \%$, $P_{22} = 97,83 \%$ para el CAC40; $P_{11} = 99,43 \%$, $P_{22} = 98,64 \%$ para el DAX), con transiciones ocasionales hacia alta volatilidad en momentos de crisis. Los parámetros univariados confirman estas dinámicas: para el CAC40, el coeficiente $g = 0,2336$ refleja una sensibilidad moderada a los cambios de régimen, mientras que los coeficientes ARCH ($a_{1,reg1} = 0,0703$, $a_{1,reg2} = 0,1044$) indican mayor volatilidad en alta volatilidad; en el DAX, $g = 0,2599$ y los coeficientes ARCH ($a_{1,reg1} = 0,0341$, $a_{1,reg2} = 0,1003$) muestran un comportamiento similar. En conjunto, los resultados evidencian que el contagio financiero es más marcado y estructurado en baja volatilidad, mientras que en alta volatilidad, aunque

la sincronización persiste, el comportamiento es más errático y menos predecible.

Respecto al análisis del contagio financiero entre los índices CAC40 y FTSE100, utilizando una cópula t-Student y el modelo SWARCH(2,1), revela una mayor dependencia estructural durante la baja volatilidad (Régimen 1), donde la persistencia entregada por la cópula es del 94,15 %, el Tau de Kendall alcanza 73,46 %, y la dependencia en las colas es notable ($\lambda_L = 33,95 \%$, reflejando un riesgo mayor de contagio en eventos de caída; en contraste, en alta volatilidad (Régimen 2), aunque la persistencia es mayor (97,22 %), la dependencia disminuye ($\tau = 52,16 \%$, $\lambda_U = 8,25 \%$), indicando una sincronización más débil. Las correlaciones de Pearson muestran un aumento durante la crisis (89,54 %) respecto al periodo pre-crisis (83,64 %), reflejando mayor sincronización lineal en eventos de crisis. Los gráficos de densidad kernel confirman estas diferencias, con contornos más concentrados y definidos en Régimen 1, mientras que en Régimen 2 son más dispersos. Las probabilidades suavizadas del modelo SWARCH(2,1) destacan alta persistencia en ambos regímenes para ambos índices ($P_{11} = 98,77 \%$, $P_{22} = 97,3 \%$ para CAC40; $P_{11} = 98,78 \%$, $P_{22} = 96,16 \%$ para FTSE100), con transiciones ocasionales a alta volatilidad en periodos críticos. Los parámetros univariados refuerzan esta interpretación: el CAC40 presenta sensibilidad moderada a los cambios de régimen ($g = 0,2336$) y mayor volatilidad en alta volatilidad ($a_{1,reg1} = 0,0703$, $a_{1,reg2} = 0,1044$), mientras que el FTSE100, con menor sensibilidad ($g = 0,2144$), muestra un impacto significativo de la volatilidad en ambos regímenes ($a_{1,reg1} = 0,1109$, $a_{1,reg2} = 0,1771$). Se puede concluir que el contagio financiero es más estructurado y marcado en baja volatilidad para este par de índices, fundamentado por tanto el análisis gráfico y métrico.

Se obtiene que para los índices CAC40 e IBEX35, utilizando una cópula t-Student y el modelo SWARCH(2,1), hay una mayor dependencia estructural durante la baja volatilidad (Régimen

1), donde la persistencia es del 93,99 %, el Tau de Kendall alcanza 70,72 %, y las colas presentan una dependencia moderada ($\lambda_L = 37,60$ %, lo que indica un riesgo significativo de contagio en eventos extremos. En Régimen 2, aunque la persistencia aumenta a 96,62 %, la dependencia general disminuye ($\tau = 55,18$ %), con colas menos pronunciadas $\lambda_U = 12,55$ %, reflejando una sincronización más débil y menos estructurada en alta volatilidad. Las correlaciones de Pearson muestran un aumento durante la crisis (89,58 %) en comparación con el periodo pre-crisis (85,08 %), reflejando una mayor sincronización lineal en alta volatilidad, aunque menos estructurada. Por otro lado, los gráficos de densidad kernel confirman estas observaciones, dado que en Régimen 1, los contornos son más definidos, con mayores niveles de densidad concentrados, lo que evidencia una fuerte sincronización entre ambos índices en periodos de calma. En Régimen 2, los contornos se dispersan, y los niveles de densidad son más bajos, reflejando una menor interdependencia estructural durante eventos de alta volatilidad. Las probabilidades suavizadas del modelo SWARCH(2,1) destacan alta persistencia en ambos regímenes para ambos índices ($P_{11} = 98,77$ %, $P_{22} = 97,83$ % para CAC40; $P_{11} = 99,12$ %, $P_{22} = 97,06$ % para IBEX35), con transiciones ocasionales a alta volatilidad en periodos críticos. Finalmente, los parámetros univariados refuerzan esta interpretación: el CAC40 muestra sensibilidad moderada a los cambios de régimen ($g = 0,2336$) y mayor volatilidad en alta volatilidad ($a_{1,reg1} = 0,0703$, $a_{1,reg2} = 0,1044$), mientras que el IBEX35, con una menor sensibilidad ($g = 0,2133$), presenta un impacto moderado de la volatilidad en ambos regímenes ($a_{1,reg1} = 0,0425$, $a_{1,reg2} = 0,0724$).

Al ajustar una cópula de Gumbel para el par de índices DAX y FTSE100, se evidencian características distintivas de dependencia entre regímenes de volatilidad alta y baja. Según los parámetros obtenidos, en el Régimen 1, correspondiente a baja volatilidad, las probabilidades de permanencia ($\pi_L = 90,57$ %) y transición ($_{10} = 9,43$ %) sugieren estabilidad moderada en este

estado. Por otro lado, el Régimen 2, asociado a alta volatilidad, presenta una probabilidad de permanencia ($\pi_L = 93,62\%$) y de transición ($\alpha_{01} = 6,38\%$), lo que indica una mayor persistencia en este régimen. Los parámetros $\theta_1 = 3,1154$ y $\theta_2 = 1,6968$ reflejan mayor dependencia en la cola superior en baja volatilidad, característica clave de la cópula de Gumbel. Los resultados de dependencia obtenidos por Tau de Kendall ($\tau_L = 67,9\%$ en Régimen 1 y $\tau_H = 41,07\%$ en Régimen 2, junto a la dependencia estructural evidencian una fuerte relación en baja volatilidad y una dispersión más moderada en escenarios de alta volatilidad. Esto concuerda con los contornos generados por el análisis gráfico de densidad kernel, donde en el Régimen 1 se observan curvas bien definidas y concentradas, mientras que en el Régimen 2 las curvas son más dispersas, indicando menor sincronización en alta volatilidad. En cuanto a las probabilidades suavizadas del modelo SWARCH(2,1), los gráficos muestran una clara alternancia entre regímenes, con predominancia de Régimen 1 en periodos de estabilidad y de Régimen 2 en eventos de alta volatilidad, como crisis o choques significativos. El comportamiento probabilístico es consistente con las transiciones observadas en la dinámica de los índices, de hecho la correlación de Pearson crece considerando desde la pre-crisis (79,96 %) hasta la crisis desde el día 20 de enero del 2020, obteniendo una correlación lineal del 86,78 %, lo que refleja el aumento del grado de dependencia a pesar de no contar con la misma robustez que las copulas.

El análisis conjunto para los índices DAX e IBEX35 utilizando una cópula de Frank evidencia una estructura de dependencia caracterizada por una relación asimétrica con énfasis en valores centrales. Según los parámetros obtenidos las probabilidades de permanencia en los regímenes muestran estabilidad significativa, con $\pi_L = 97,13\%$ y $\pi_H = 87,04\%$, lo que sugiere que ambos regímenes son bien definidos, pero que hay mayor probabilidad de permanecer en el régimen de baja volatilidad. Además, los valores $\theta_1 = 6,0243$ y $\theta_2 = 15,2806$ reflejan un aumento en la inten-

sidad de la dependencia en el régimen de alta volatilidad, alineado con una mayor sincronización durante periodos de crisis. En cuanto a las métricas de dependencia, como los valores de Tau de Kendall indican una mayor interdependencia (76,64 %) en el estado en que ambos pares de índices presentan un comportamiento de alta volatilidad. Por otro lado, los gráficos de probabilidades suavizadas de los regímenes, extraídos del modelo SWARCH(2,1), demuestran transiciones en las gráficas de las probabilidades suavizadas para los índices DAX e IBEX35, donde se observa que el régimen 2 se intensifica en momentos críticos, como la crisis de la pandemia en 2020. Volviendo a los resultados de las cópulas, los gráficos de densidad generados para los regímenes muestran diferencias significativas. En el régimen 1 (baja volatilidad), los contornos se concentran cerca de los valores centrales, con una menor dispersión, indicando una correlación moderada pero estable entre ambos índices. Por el contrario, en el régimen 2 (alta volatilidad), las curvas de nivel exhiben mayor dispersión y concentraciones hacia los extremos, lo que sugiere una dependencia más intensa pero menos uniforme durante periodos de mayor riesgo financiero. Se puede identificar que existe una relación de dependencia moderada entre los índices DAX e IBEX35, particularmente relevante en contextos de alta volatilidad, donde la sincronización de movimientos entre ambos índices aumenta significativamente.

El análisis del par de índices FTSE100-IBEX35 utilizando una cópula Frank evidencia una dependencia moderada a alta, predominante en el régimen 2, donde los parámetros estimados $\theta_1 = 3,7947$ en baja volatilidad y $\theta_2 = 8,311$ en alta volatilidad reflejan una sincronización más fuerte entre los índices durante escenarios de mayor incertidumbre. Este comportamiento también se refleja en los valores de Kendall's Tau, que muestran una dependencia del 37,26 % en el régimen de baja volatilidad y del 61,38 % en alta volatilidad, indicando un aumento notable de la interdependencia en contextos más volátiles. Las métricas de dependencia revelan una simetría

en los valores de $Q_{10} = 28,87\%$ y $Q_{01} = 29,07\%$ en el régimen 1, lo que sugiere que es más probable que los índices permanezcan en cada estado en lugar de cambiar simultáneamente entre regímenes. En términos univariados, el modelo SWARCH(2,1) evidencia alta persistencia en ambos regímenes, con probabilidades de permanencia en baja y alta volatilidad de $98,78\%$ y $96,16\%$ para el FTSE100, y de $99,12\%$ y $97,06\%$ para el IBEX35, respectivamente, lo cual refleja una notable estabilidad dentro de cada régimen, como se observa en los gráficos de probabilidades suavizadas, que confirman la predominancia de regímenes de baja volatilidad en la mayoría de los periodos analizados. Desde el punto de vista gráfico, las densidades kernel del régimen 2 muestran una concentración en valores centrales, lo que indica una relación más estable y homogénea entre los índices en momentos de alta incertidumbre, mientras que en el régimen 1 los contornos de densidad son más dispersos, reflejando una menor dependencia en escenarios de baja volatilidad. Además, las correlaciones históricas entre estos índices aumentaron significativamente durante la crisis financiera, pasando de $69,75\%$ en el periodo pre-crisis a $85,87\%$ durante la crisis, lo que sugiere un fortalecimiento de la relación debido a factores sistémicos comunes en contextos de estrés financiero.

En el análisis del par FTSE100-SP500, representativo de los mercados europeo y estadounidense, se empleó una cópula Frank, que evidenció una mayor dependencia en contextos de alta volatilidad. Los parámetros estimados, con $\theta_1 = 5,7995$ para el régimen de baja volatilidad y $\theta_2 = 1,7050$ para el de alta volatilidad, reflejan una sincronización creciente entre ambos índices en escenarios donde ambos tienden a la baja. Este comportamiento se ve corroborado por los valores de Kendall's Tau, que muestran una dependencia del $50,35\%$ en baja volatilidad y del $18,42\%$ en alta volatilidad. Además, las métricas de dependencia señalan valores simétricos de $Q_{10} = 41,37\%$ y $Q_{01} = 43,50\%$ en el régimen 1, lo que sugiere una mayor estabilidad en los

estados individuales de los índices en lugar de transiciones simultáneas. Por otro lado, el modelo SWARCH(2,1) destaca por su alta persistencia en ambos regímenes, con probabilidades de permanencia del 98,78 % y 96,16 % para el FTSE100, y del 98,09 % y 96,86 % para el SP500 en baja y alta volatilidad, respectivamente. Estas probabilidades suavizadas, observadas en los gráficos temporales, confirman la predominancia de regímenes de baja volatilidad, con cambios ocasionales asociados a eventos disruptivos en los mercados. Asimismo, desde un enfoque gráfico, las densidades kernel muestran una mayor concentración y regularidad en el régimen 1, indicando una relación más sólida durante periodos de baja volatilidad, mientras que el régimen 2 presenta contornos dispersos que reflejan una relación más débil en escenarios de baja volatilidad. Por último, las correlaciones históricas entre ambos índices revelan un incremento significativo durante la crisis financiera global, pasando de 55,34 % en el periodo pre-crisis a 57,41 % durante la crisis, lo que pone en evidencia la intensificación de la interdependencia entre mercados globales en momentos de tensión financiera donde ambos índices tienden de forma simultánea a la baja.

Finalmente, en modo de concluir se puede observar que los índices bursátiles americanos, el régimen de baja volatilidad predomina como el escenario principal para el contagio financiero, evidenciando relaciones más sólidas y predecibles. Este comportamiento facilita la diversificación de portafolios, ya que las dependencias estructurales son más estables en condiciones normales. Sin embargo, en casos específicos, como Bovespa-SP500, se observa un contagio financiero más intenso bajo condiciones de alta volatilidad, especialmente en las colas superiores. Esto resalta la necesidad de estrategias de mitigación más robustas para proteger las inversiones durante periodos de crisis, cuando los mercados tienden a sincronizarse de manera más extrema.

En los índices europeos, también se identifica que el régimen de baja volatilidad es el predominante, con relaciones más homogéneas y consistentes. Por ejemplo, los pares CAC40-FTSE100

y DAX-CAC40 presentan dependencias bien estructuradas en este régimen, lo que refuerza la estabilidad de sus interacciones durante condiciones normales. Sin embargo, algunos pares, como DAX-IBEX35 y FTSE100-IBEX35, muestran una intensificación del contagio financiero en periodos de alta volatilidad, reflejando una mayor sensibilidad a eventos extremos en el mercado. En estos casos, la dependencia se vuelve más dispersa y asimétrica, subrayando la importancia de medidas preventivas para gestionar el riesgo en escenarios de incertidumbre elevada.

Un caso particular es el par FTSE100-SP500, que conecta mercados europeos y estadounidenses, evidencia una dinámica de dependencia marcada por regímenes de volatilidad. En contextos de baja volatilidad, la relación entre ambos índices es más estable y predecible, existiendo mayor interdependencia y probabilidad de persistencia en aquel estado.

En ambos continentes, el régimen de baja volatilidad ofrece mayor estabilidad y predecibilidad en las relaciones entre índices, facilitando estrategias de diversificación. Por otro lado, en condiciones de alta volatilidad, se observan casos específicos de contagio financiero intensificado, donde las relaciones entre índices son más vulnerables y sensibles a eventos extremos.

Entonces, mediante la estimación y ajuste de distintos modelos de cópulas dinámicas y cambio de régimen, se identificó que la mayoría de los pares de índices bursátiles presentan un contagio financiero más pronunciado durante periodos de baja volatilidad, donde las relaciones entre los mercados son más sólidas y predecibles. Sin embargo, pares específicos como DAX-IBEX35, FTSE100-IBEX35 y Bovespa-SP500 mostraron una mayor dependencia durante los periodos de alta volatilidad, reflejando un incremento en la interconexión bajo condiciones de incertidumbre extrema. Este comportamiento es coherente con los hallazgos recientes, que destacan cómo factores globales, como la pandemia del COVID-19, amplificaron las dinámicas de contagio financiero.

En el caso chileno, los resultados muestran que los índices IPSA, Bovespa, IPC y SP500

tienen una mayor interdependencia durante períodos de baja volatilidad. Este fenómeno destaca la importancia de implementar estrategias específicas para gestionar el contagio financiero en escenarios de estabilidad aparente. La reciente reducción de la Tasa de Política Monetaria (TPM) al 5 %, adoptada en diciembre de 2024 por el Banco Central, crea oportunidades para inversiones en renta fija y variable local, particularmente en bonos en UF y sectores orientados al consumo interno. Sin embargo, es fundamental incorporar coberturas frente a riesgos internacionales, como futuros o contratos de diferencia vinculados a índices clave. Además, diversificar hacia activos con menor correlación internacional, como bienes raíces o instrumentos en sectores estratégicos con menor exposición global, puede reducir vulnerabilidades ante choques externos. Para maximizar los beneficios de esta política monetaria expansiva, los inversores deben priorizar instrumentos con vencimientos ajustados a los ciclos económicos y evitar concentraciones excesivas en sectores sensibles a la dependencia estructural de los mercados internacionales, como el cobre.

Por otro lado, las reformas políticas en discusión, orientadas a fortalecer la estabilidad institucional y evitar gobiernos fragmentados, son fundamentales para crear un entorno de inversión más predecible. Estas reformas podrían incentivar la entrada de inversión extranjera directa (IED) en sectores clave, aumentando la liquidez del mercado chileno. En este contexto, los inversores deben monitorear de cerca indicadores clave como las tasas de desempleo, los precios de las materias primas y los flujos de capital hacia economías emergentes. Evaluar continuamente la influencia de factores externos, como las fluctuaciones en el precio del cobre o los movimientos de la Reserva Federal de Estados Unidos, es crucial para ajustar estrategias de inversión oportunamente. Asimismo, la incorporación de análisis avanzados mediante herramientas como cópulas dinámicas puede mejorar la capacidad de los inversores para anticipar cambios en las correlaciones entre mercados. Finalmente, reforzar posiciones en instrumentos de bajo riesgo, como bonos soberanos

o instrumentos ligados al mercado local, y combinar estas inversiones con activos internacionales diversificados, puede generar un portafolio robusto capaz de enfrentar los desafíos de un entorno económico global dinámico.

A nivel general, para todos los inversores, se recomienda implementar herramientas avanzadas como cópulas dinámicas para evaluar dependencias en diferentes regímenes de volatilidad. Asimismo, mantener una porción significativa del portafolio en activos refugio, como bonos soberanos o monedas fuertes, puede proporcionar estabilidad en escenarios de incertidumbre. Para los inversores chilenos, en particular, el análisis de las interdependencias con Bovespa, IPC y SP500 debe ser integrado en las decisiones de asignación de activos, priorizando inversiones en sectores que ofrezcan un retorno ajustado al riesgo más favorable durante períodos de baja volatilidad. Con estas estrategias, se puede fortalecer la resiliencia de las carteras y optimizar los rendimientos frente a un entorno financiero global cada vez más complejo.

Apéndice A

A. Fórmulas de cópulas

Tabla 57

Cópulas comúnmente mencionadas en la literatura

Cópula	Fórmula	Parámetros
t-Student	$\int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_1)} \int_{-\infty}^{t_{\nu}^{-1}(u_2)} \frac{1}{2\pi\sqrt{1-\theta^2}} \left(1 + \frac{x^2 - 2\theta xy + y^2}{\nu(1-\theta^2)}\right)^{-\frac{\nu+2}{2}} dx dy$	$\theta \in [-1, 1], \nu$: grados de libertad
Clayton	$(u_1^{-\theta} + u_2^{-\theta} - 1)^{-1/\theta}$	$\theta \in (0, \infty)$
Gumbel	$\exp \left\{ - [(-\log(u_1))^{\theta} + (-\log(u_2))^{\theta}]^{1/\theta} \right\}$	$\theta \in [1, \infty)$
Frank	$-\frac{1}{\theta} \log \left\{ 1 - (1 - e^{-\theta u_1})(1 - e^{-\theta u_2})/\eta \right\}$	$\theta \in (0, \infty), \eta = 1 - e^{-\theta}$

Nota: Elaboración basada en el libro de “Medidas de riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones” por Óscar Becerra y Melo (2008).

Tabla 58

Función generadora ($\phi(t)$) y cópulas límite para algunas cópulas de Arquímedes

Cópula	$\phi(t)$	C^u	C^l	Parámetros
Clayton	$\frac{1}{\theta} (t^{-\theta} - 1)$	$\theta \rightarrow \infty$	0	$\theta \in (0, \infty)$
Frank	$-\log \left(\frac{\exp(-\theta t) - 1}{\exp(-\theta) - 1} \right)$	0	0	$\theta \in (0, \infty)$
Gumbel	$(-\log(t))^{\theta}$	$\theta \rightarrow \infty$	0	$\theta \in [1, \infty)$
t-Student	$-\frac{1}{2\theta} \log(1 + t^2/\nu)$	$\nu \rightarrow \infty$	$\nu \rightarrow 0$	ν : grados de libertad

Nota: Elaboración basada en el libro de “Medidas de riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones” por Óscar Becerra y Melo (2008).

B. Códigos R

B.1. Test de autoregresivos

```
library(tseries)
```

```
library(urca)
```

```
library(lmtest)

library(writexl)

library(openxlsx)


max_lags <- 10


for (i in 1:ncol(log_returns)) {

  serie <- log_returns[, i]

  indice <- colnames(log_returns)[i]

  wb <- createWorkbook()

  results_df <- data.frame(Lag = 1:max_lags)


  adf_tseries_stats <- numeric(max_lags)
  adf_tseries_pvalues <- numeric(max_lags)
  adf_urca_stats <- numeric(max_lags)
  critical_values_1pct <- numeric(max_lags)
  critical_values_5pct <- numeric(max_lags)
  critical_values_10pct <- numeric(max_lags)
  arch_pvalues <- numeric(max_lags)
  ur_test_stats <- numeric(max_lags)
  hetero_pvalues <- numeric(max_lags)
  aic_values <- numeric(max_lags)
  bic_values <- numeric(max_lags)
```

```
ljung_box_pvalues <- numeric(max_lags)

durbin_watson_values <- numeric(max_lags)

for (lags in 1:max_lags) {

  adf_tseries_test <- tryCatch({

    adf_result <- adf.test(serie, alternative = "stationary", k = lags)

    adf_tseries_stats[lags] <- adf_result$statistic

    adf_tseries_pvalues[lags] <- adf_result$p.value

  }, error = function(e) {

    adf_tseries_stats[lags] <- NA

    adf_tseries_pvalues[lags] <- NA

  })

  adf_urca_test <- tryCatch({

    urca_result <- ur.df(serie, type = "drift", lags = lags)

    adf_urca_stats[lags] <- urca_result@teststat[1]

    critical_values_1pct[lags] <- urca_result@cval[1, 1]

    critical_values_5pct[lags] <- urca_result@cval[1, 2]

    critical_values_10pct[lags] <- urca_result@cval[1, 3]

  }, error = function(e) {

    adf_urca_stats[lags] <- NA

    critical_values_1pct[lags] <- NA

    critical_values_5pct[lags] <- NA

  })

}
```

```
critical_values_10pct[lags] <- NA

}))

arch_test <- tryCatch({

  arch_result <- ArchTest(serie, lags = lags)

  arch_pvalues[lags] <- arch_result$p.value

}, error = function(e) {

  arch_pvalues[lags] <- NA

}))

ur_test <- tryCatch({

  ur_result <- ur.df(serie, type = "drift", lags = lags)

  ur_test_stats[lags] <- ur_result@teststat[1]

}, error = function(e) {

  ur_test_stats[lags] <- NA

}))

hetero_test <- tryCatch({

  hetero_result <- bptest(serie ~ lag(serie, -1, lags))

  hetero_pvalues[lags] <- hetero_result$p.value

}, error = function(e) {

  hetero_pvalues[lags] <- NA

}))
```

```
model <- tryCatch({  
  arima(serie, order = c(lags, 0, 0))  
}, error = function(e) NA)  
  
if (!is.null(model) && !inherits(model, "error")) {  
  aic_values[lags] <- AIC(model)  
  bic_values[lags] <- BIC(model)  
  
  ljung_box_test <- Box.test(residuals(model), lag = lags,  
    type = "Ljung-Box")  
  ljung_box_pvalues[lags] <- ljung_box_test$p.value  
  
  residuals_model <- residuals(model)  
  residuals_lagged <- residuals_model[-1]  
  residuals_original <- residuals_model[-length(residuals_model)]  
  
  dw_test <- tryCatch({  
    dw_result <- dwtest(residuals_original ~ residuals_lagged)  
    dw_result$statistic[[1]]  
  }, error = function(e) NA)  
  
  durbin_watson_values[lags] <- dw_test
```

```
    } else {  
  
      aic_values[lags] <- NA  
  
      bic_values[lags] <- NA  
  
      ljung_box_pvalues[lags] <- NA  
  
      durbin_watson_values[lags] <- NA}}}
```

B.2. Convergencia de Matriz Hessiana de SWARCH(2,1)

```
library(openxlsx)  
  
diagnosticos_convergencia <- list()  
  
for (indice in 1:ncol(log_returns)) {  
  
  nombre_indice <- colnames(log_returns)[indice]  
  
  spec <- CreateSpec(variance.spec = list(model = "sARCH"),  
                     switch.spec = list(K = 2),  
                     distribution.spec = list(distribution = "std"))  
  
  modelo_swarch <- tryCatch({  
  
    FitML(spec = spec, data = log_returns[, indice])  
  
  }, error = function(e) {message(paste("Error en índice:", nombre_indice,  
                                         e$message))  
  
    return(NULL) })  
  
  if (!is.null(modelo_swarch)) {
```

```
hessian_matrix <- modelo_swarch$Inference$Hessian

invertible <- tryCatch({

  eigenvalues <- eigen(hessian_matrix)$values

  all(eigenvalues > 0)}, error = function(e){message(paste("Error al
  calcular los valores propios de la Hessiana para",
  nombre_indice, ":", e$message))

  FALSE})

log_likelihood <- modelo_swarch$loglik

AIC <- AIC(modelo_swarch)

BIC <- BIC(modelo_swarch)

diagnosticos_convergencia[[nombre_indice]] <- list(

  Hessian_Invertible = if (invertible) "VERDADERO" else "FALSO",

  Hessian_Matrix = hessian_matrix,

  Hessian_Eigenvalues = if (invertible) eigenvalues

  else "No disponible",

  LogLikelihood = log_likelihood,

  AIC = AIC,

  BIC = BIC,

  Hessian_Diagonal_Explanation = "Valores propios
  de la matriz Hessiana, indicando la curvatura de la
  función de verosimilitud")})
```

C. Códigos Python

C.1. Función para estimar las cópulas con régimen de Markov

```
from tqdm import tqdm

import numpy as np

from scipy.optimize import minimize

from scipy.special import spence

from scipy.stats import t as student_t

from scipy.stats import kendalltau


def rankdata(a):

    return np.argsort(np.argsort(a)) + 1


def est_hmm_cop(y, reg, family, max_iter, eps):

    ninit = 100

    n, d = y.shape

    y = np.floor(np.apply_along_axis(rankdata, 0, y)) / (n + 1)

    r = reg * d

    n0 = n // reg

    ind0 = np.arange(n0)

    tau = np.zeros(reg)

    for j in range(reg):
```

```
ind = (j) * n0 + ind0

x = y[ind, :]

tau[j] = kendalltau(x[:, 0], x[:, 1])[0]

tau[j] = np.clip(tau[j], 0.1, 0.9)


alpha0 = param_tau(family, tau)

Q0 = np.ones((reg, reg)) / reg


if family == 't':

    alpha0 = np.append(alpha0, np.log(5))


for k in tqdm(range(ninit), desc="Warm-up Iterations"):

    em_step = em_step_func(y, alpha0, Q0, family)

    nu = em_step['nu']

    alpha_new = em_step['theta_new']

    Qnew = em_step['Qnew']

    eta = em_step['eta']

    eta_bar = em_step['eta_bar']

    lambda_ = em_step['lambda']

    Lambda = em_step['Lambda']

    Q0 = Qnew

    alpha0 = alpha_new
```

```
for k in tqdm(range(max_iter), desc="EM Algorithm Iterations"):

    em_step = em_step_func(y, alpha0, Q0, family)

    nu = em_step['nu']

    alpha_new = em_step['theta_new']

    Qnew = em_step['Qnew']

    eta = em_step['eta']

    eta_bar = em_step['eta_bar']

    lambda_ = em_step['lambda']

    Lambda = em_step['Lambda']

    LF_new = em_step['LF_max']

    sum1 = np.sum(np.abs(alpha0))

    sum2 = np.sum(np.abs(alpha_new - alpha0))

    if sum2 < (sum1 * r * eps):

        break

    Q0 = Qnew

    alpha0 = alpha_new

alpha = alpha_new

Q = Qnew

tau = kendall_tau(family, alpha)

dof = None

theta = param_cop(family, alpha)

cdf = np.zeros((n, 2, reg))
```

```
LF = LF_new

if family == 't':

    dof = theta[reg]

    for j in range(reg):

        cdf[:, :, j] = rosenblatt_student(y, theta[j], dof)

elif family == 'clayton':

    for j in range(reg):

        cdf[:, :, j] = rosenblatt_clayton(y, theta[j])

elif family == 'frank':

    for j in range(reg):

        cdf[:, :, j] = rosenblatt_frank(y, np.exp(-theta[j]))

elif family == 'gumbel':

    for j in range(reg):

        cdf[:, :, j] = rosenblatt_gumbel(y, 1 / theta[j])


eta00 = np.ones(reg) / reg

w00 = np.dot(np.vstack((eta00, eta)), Q)

W = w00[:-1, :]

if reg == 1:

    W = pd.DataFrame(W.flatten()).T


U = np.zeros((n, 2))
```

```
U[:, 0] = y[:, 0]

for j in range(reg):

    U[:, 1] += W[:, j] * cdf[:, 1, j]

cvm = snb(U)

return {

    'theta': theta,

    'Q': Q,

    'eta': eta,

    'nu': nu,

    'tau': tau,

    'dof': dof,

    'U': U,

    'cvm': cvm,

    'W': W,

    'LF_max': LF,

    'y': y}
```

C.2. Función que entrega los parámetros a partir del Tau de Kendall

```
def param_tau(family, tau):

    reg = len(tau)
```

```
alpha = np.zeros(reg)

for j in range(reg):

    if family == 'gaussian' or family == 't':

        alpha[j] = 2 * np.sin(tau[j] * np.pi / 6)

    elif family == 'clayton':

        alpha[j] = 2 * tau[j] / (1 - tau[j])

    elif family == 'frank':

        alpha[j] = -np.log(1 - tau[j])

    elif family == 'gumbel':

        alpha[j] = 1 / (1 - tau[j])

if family == 'gaussian' or family == 't':

    alpha = np.log((1 + alpha) / (1 - alpha))

elif family == 'clayton':

    alpha = np.log(alpha)

elif family == 'gumbel':

    alpha = np.log(alpha - 1)

return alpha
```

C.3. Función de algoritmo EM (Expectation-Maximization)

```
def em_step_func(y, theta, Q, family):
```

```
n, d = y.shape

r = Q.shape[0]

eta_bar = np.zeros((n, r))

eta = np.zeros((n, r))

lambda_ = np.zeros((n, r))

c = np.zeros((n, r))

Lambda = np.zeros((r, r, n))


if family == 't':

    alpha = theta[:-1]

    dof = theta[-1]

else:

    alpha = theta


for j in range(r):

    if family == 't':

        c[:, j] = copula_families_pdf(family, y, alpha[j], dof)

    else:

        c[:, j] = copula_families_pdf(family, y, alpha[j])


eta_bar[-1, :] = 1 / r


for k in range(n - 2, -1, -1):
```

```
v = (eta_bar[k + 1, :] * c[k + 1, :]) @ Q.T

eta_bar[k, :] = v / np.sum(v)

eta[0, :] = (np.ones(r) / r) @ Q * c[0, :]
eta[0, :] /= np.sum(eta[0, :])

for i in range(1, n):

    v = (eta[i - 1, :] @ Q) * c[i, :]

    eta[i, :] = v / np.sum(v)

v = eta * eta_bar

sv0 = np.sum(v, axis=1)

for j in range(r):

    lambda_[:, j] = v[:, j] / sv0

gc = eta_bar * c

M = Q * (eta[0, :].reshape(-1, 1) @ gc[0, :].reshape(1, -1))

MM = np.sum(M)

Lambda[:, :, 0] = M / MM

for i in range(1, n):

    M = Q * (eta[i - 1, :].reshape(-1, 1) @ gc[i, :].reshape(1, -1))
```

```
MM = np.sum(M)

Lambda[:, :, i] = M / MM

Qnew = np.zeros_like(Q)

for j in range(r):
    for l in range(r):
        Qnew[j, l] = np.sum(Lambda[j, l, :]) / np.sum(Lambda[j, :, :])

Qnew /= Qnew.sum(axis=1, keepdims=True)

def log_likelihood_func(thetaa):
    log_likelihood = 0
    if family == 't':
        alpha = thetaa[:-1]
        dof = thetaa[-1]
        if r < 2:
            log_likelihood = -np.sum(lambda_[:, 0] *
                                      np.log(copula_families_pdf(family, y, alpha[0], dof)))
        else:
            log_likelihood = -np.sum(lambda_[:, 0] *
                                      np.log(copula_families_pdf(family, y, alpha[0], dof)))
            for i in range(1, r):
                log_likelihood += -np.sum(lambda_[:, i]
```

```
        * np.log(copula_families_pdf(family, y,
                                     alpha[i], dof)))

    else:

        if r < 2:

            log_likelihood = -np.sum(lambda_[:, 0] *
                                     np.log(copula_families_pdf(family, y, thetaa[0])))

        else:

            log_likelihood = -np.sum(lambda_[:, 0] *
                                     np.log(copula_families_pdf(family, y, thetaa[0])))

            for i in range(1, r):

                log_likelihood += -np.sum(lambda_[:, i]
                                           * np.log(copula_families_pdf(family, y, thetaa[i])))

        return log_likelihood

if r >= 2:

    res = minimize(log_likelihood_func, theta, method="Nelder-Mead")

else:

    res = minimize(log_likelihood_func, theta, method="L-BFGS-B")

LF_max = -res.fun

theta_new = res.x

return {
```

```
    'nu': np.mean(lambda_, axis=0),  
  
    'theta_new': theta_new,  
  
    'Qnew': Qnew,  
  
    'eta': eta,  
  
    'eta_bar': eta_bar,  
  
    'lambda': lambda_,  
  
    'Lambda': Lambda,  
  
    'LF_max': LF_max  
  
}
```

Referencias

- Abu-Lughod, J. L. (1991). *Before European hegemony: the world system AD 1250-1350*. Oxford University Press, USA. Obtenido de [https://books.google.es/books?id=xuhZ-eEi-RgC&lpg=PA3&dq=Abu-Lughod+Janet+\(1989\)+Before+European+Hegemony+The+World+System+A.D.+&ots=Ol&source=bl&hl=es&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q=world&f=false](https://books.google.es/books?id=xuhZ-eEi-RgC&lpg=PA3&dq=Abu-Lughod+Janet+(1989)+Before+European+Hegemony+The+World+System+A.D.+&ots=Ol&source=bl&hl=es&sa=X&redir_esc=y#v=onepage&q=world&f=false).
- Al-Rodhan, N. (2006). Definitions of globalization: A comprehensive overview and a proposed definition. Program on the Geopolitical Implications of Globalization and Transnational Security. Geneva Center for Security Policy. Obtenido de <https://www.gcimnetbacs.co.za/event/uploads/2019/01/DefinitionsOfGlobalisation.pdf>.
- Albulescu, C. T. (2021). Covid-19 and the united states financial markets' volatility. *Finance Research Letters*, 38(2):1544–6123.
- Allen, F. y Gale, D. (2000). Financial contagion. *Journal of Political Economy*, 108(1):1–33. Obtenido de <https://www.nber.mortalitar.edu/~jlabelle/AllenGaleContagion2000.pdf>.
- Andersen, T. G., Bollerslev, T., Christoffersen, P. F., y Diebold, F. X. (2013). Financial risk measurement for financial risk management. En *Handbook of the Economics of Finance*, pp. 1127–1220. Elsevier, Amsterdam.
- Anderson, O. D. (1975). Moving average processes. *Statistician*, 24(4):283–297.

- Ansley, C. F., Spivey, W. A., y Wroblewski, W. J. (1977). On the structure of moving average processes. *Journal of Econometrics*, 6:121–134.
- Armstrong, R. A. (2019). Should Pearson's correlation coefficient be avoided? *Ophthalmic and Physiological Optics*, 39(5):316–327.
- Arratia, A. (2014). *Computational Finance: An Introductory Course with R*, volumen 1. Atlantis Publishing Corporation, Paris.
- Baker, S., Bloom, N., Davis, S., Kost, K., Sammon, M., y Viratyosin, T. (2020). The unprecedented stock market reaction to COVID-19. *The Review of Asset Pricing Studies*, 10(4):742–758. Obtenido de <https://www.retail.silverchair.com/raa2008.pdf>.
- Baldwin, R. y di Mauro, B. W. (2020). *Economics in the Time of COVID-19*. CEPR Press.
- Bank of Japan (2020). Outline of a new scheme to support financing in response to the novel coronavirus (COVID-19).
- Bernanke, B. (1983). Nonmonetary effects of the financial crisis in the propagation of the great depression. *American Economic Review*, 73(3):257–276. Obtenido de https://www.aea.org/system/files/working_papers/w0154.pdf.
- Bollerslev, T. (2007). Modelling and forecasting financial volatility during crises. *Journal of Econometrics*, 140(1):1–25.
- Bollerslev, T., Chou, R. Y., y Kroner, K. F. (1992). Arch modeling in finance: A review of the theory and empirical evidence. *Journal of Econometrics*, 52(1-2):5–59.

- Box, G. E. P. y Pierce, D. A. (1970). Distribution of residual autocorrelations in autoregressive-integrated moving average time series models. *Journal of the American Statistical Association*, 65:1509–1526.
- Brunnermeier, M. y Nagel, S. (2021). Covid-19 and financial market contagion. *Financial Management*, 59:293–310.
- Cai, J. (1994). A markov model of switching-regime arch. *Journal of Business & Economic Statistics*, 12(3):309–316.
- Calvo, G. y Mendoza, E. (2000). Rational contagion and the globalization of securities markets. *Journal of International Economics*, 51(1):79–113. Obtenido de https://www.nber.org/system/files/working_papers/w1153/w1153.pdf.
- Campbell, J. Y., Lo, A. W., y MacKinlay, A. C. (1996). *The Econometrics of Financial Markets*. Princeton University Press, 1st edición.
- Cappiello, L., Engle, R. F., y Sheppard, K. (2006). Asymmetric dynamics in the correlations of global equity and bond returns. *Journal of Financial Econometrics*, 4(4):537–572.
- Carpenter, S. (2020). The federal reserve’s response to the covid-19 crisis. *Journal of Economic Perspectives*, 34(4):32–55.
- Central to America’s Economy (2020). Financial statements: Federal reserve bank of st. louis. Obtenido de <https://www.federalreserve.gov/aboutthefed/files/stlouisfinstmt2020.pdf>.
- Claessens, S. y Forbes, K. (2001). *International financial contagion*. Kluwer Academic Publishers.

- Cohen, I., Huang, Y., Chen, J., Benesty, J., Benesty, J., Chen, J., Huang, Y., y Cohen, I. (2009). Pearson correlation coefficient. *Noise reduction in speech processing*, pp. 1–4.
- Diebold, F. X. y Yilmaz, K. (2014). Measuring financial asset return and volatility spillovers, with application to global equity markets. *Economic Journal*, 119(534):158–171.
- Dissanaike, G. (1994). On the computation of returns in tests of the stock market overreaction hypothesis. *Journal of Banking & Finance*, 18:1083–1094.
- Doob, J. L. (1942). What is a stochastic process? *The American Mathematical Monthly*, 49(10):648–653.
- Dornbusch, R., Park, Y., y Claesse, S. (2000). Contagion: Understanding. *The World Bank Research Observer*, 15(2):177–197. Obtenido de https://www.researchgate.net/profile/Stijn-Claessens-2/publication/245782322_Contagion_Why_Crises_Spread_and_How_This_Can_Be_Stopped/links/57d708d08ae5f03b494e064/Contagion-Why-Crises-Spread-and-How-This-Can-Be-Stopped.pdf.
- Dubois, E. (2022). The cac 40 during the covid-19 pandemic: Market reactions and recovery. *European Finance Review*, 39(1).
- Dunsmuir, W. T. M. y Hannan, E. J. (1976). Vector linear time series models. *Advances in Applied Probability*, 8(2):339–364.
- Dürre, A., Fried, R., y Liboschik, T. (2015). Robust estimation of (partial) autocorrelation. *WIREs Computational Statistics*, 7:205–222.

- Eichengreen, B., Rose, A., y Wyplosz, C. (1996). *Contagious Currency Crises*. National Bureau of Economic Research.
- Embrechts, P., Lindskog, F., y McNeil, A. (2003). Modelling dependence with copulas and applications to risk management. En Rachev, S., editor, *Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance*, pp. 329–384. Elsevier, The Netherlands.
- Engle, R. (2002). Dynamic conditional correlation: A simple class of multivariate generalized autoregressive conditional heteroskedasticity models. *Journal of Business Economic Statistics*, 20(3):339–350.
- Engle, R. F., Hendry, D. F., y Trumble, D. (1985). Small-sample properties of arch estimators and tests. *The Canadian Journal of Economics / Revue canadienne d'Economie*, 18(1):66–93.
- European Central Bank (2021). Economic, financial and monetary developments. *ECB Economic Bulletin*, Issue 8. Eurosystem. Obtenido de <https://www.ecb.europa.eu/pub/pdf/ecbu/eb202108.en.pdf>.
- Fama, E. F. (1965). The behavior of stock-market prices. *The Journal of Business*, 38(1):34–105.
- Fama, E. F. (1970). Efficient capital markets: A review of theory and empirical work. *The Journal of Finance*, 25(2):383–417.
- Fasanya, I., Oyewole, O., Adekoya, O., y Odei-Mensah, J. (2020). Dynamic spillovers and connectedness between economic research. *Ekonomaska Istraživanja*, 34(1):2059–2084.
- Forbes, K. y Rigobon, R. (2002). No contagion, only interdependence: Measuring stock market comovements. *The Journal of Finance*, 57(5):2223–2261.

- Frahm, G., Junker, M., y Szimayer, A. (2003). Elliptical copulas: applicability and limitations. *Statistics & Probability Letters*, 63:275–286. Received October 2002; revised form January 2003.
- Gonedes, N. J. y Dopuch, N. (1974). Capital market equilibrium, information production, and selecting accounting techniques: Theoretical framework and review of empirical work. *Journal of Accounting Research*, 12(Studies on Financial Accounting Objectives):48–129.
- Hamilton, J. D. (1989). A new approach to the economic analysis of nonstationary time series and the business cycle. *Econometrica*, 57(2):357–384.
- Hamilton, J. D. (1994). *Time Series Analysis*, volumen 2. Princeton University Press, Princeton.
- Hamilton, J. D. y Susmel, R. (1994). Autoregressive conditional heteroskedasticity and changes in regime. *Journal of Econometrics*, 64:307–333. Received August 1992; final version received September 1993.
- Held, D. y McGrew, A. (2003). *The Global Transformations. An Introduction to the Globalization Debate*, volumen 4. Polity Press in association with Blackwell Publishing Ltd., Cambridge.
- International Monetary Fund (1999). *Crisis in Asia: Regional and Global Implications*. International Monetary Fund, Washington, D.C.
- International Monetary Fund (2021). World economic outlook: Managing divergent recoveries. Obtenido de <https://www.imf.org/en/Publications/WEO/Issues/2021/03/23/world-economic-outlook-april-2021>.

- Jarque, C. M. y Bera, A. K. (1980). Efficient tests for normality, homoscedasticity and serial independence of regression residuals. *Australian National University*, pp. 1–27.
- Jaworski, P., Durante, F., Hardle, W. K., y Rychlik, T. (2010). *Copula theory and its applications*, volumen 198. Springer.
- Joe, H. (1997). *Multivariate Models and Dependence Concepts*. Chapman & Hall, London, UK.
- Johnson, D. (2021). The ftse 100's performance amid brexit and the pandemic. *UK Economic Journal*, 41(2).
- Jones, E. y Smith, A. (2020). The effectiveness of the european central bank's response to the covid-19 crisis. *European Financial Review*, 28(3):7–9.
- Kaminsky, G., Reinhart, C., y Vegh, C. (2003). The unholy trinity of financial contagion. *Journal of Economic Perspectives*, 17(4):51–74.
- King, M. y Wadhwani, S. (1990). Transmission of volatility between stock markets. *Review of Financial Studies*, 3(1):5–33.
- Kirchgässner, G. y Wolters, J. (2007). *Introduction to Modern Time Series Analysis*. Springer Berlin Heidelberg, New York.
- Kothari, S. P. y Zimmerman, J. L. (1995). Price and return models. *Journal of Accounting and Economics*, 20(2):155–192.
- Ljung, G. M. y Box, G. E. P. (1978). On a measure of lack of fit in time series models. *Biometrika*, 65(2):297–303.

- Lloyd, P. J. (1992). Regionalisation and world trade. *OECD Economic Studies*, 18:7–43. Obtenido de <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=0e4f6dade2485fce00a7aa5afbada7772183601>.
- Longstaff, F. A. (2010). The subprime credit crisis and contagion in financial markets. *Journal of Financial Economics*, 97(3):436–450.
- Lopez, M. (2021). The performance of Mexico's ipc during the pandemic. *Latin American Financial Review*, 33(4).
- Lúcio, F. y Caiado, J. (2022). Covid-19 and stock market volatility: A clustering approach for 500 industry indices. *Finance Research Letters*, 49:103141.
- Malevergne, Y. y Sornette, D. (2003). Testing the gaussian copula hypothesis for financial assets dependences. *Quantitative Finance*, 3(4):231–250.
- Mandelbrot, B. B. (1963). The variation of certain speculative prices. *The Journal of Business*, 36(4):394–419.
- Markowitz, H. (1952). Portfolio selection. *The Journal of Finance*, 7(1):77–91.
- Masson, P. (1999). *Contagion: Monsoonal Effects, Spillovers, and Jumps Between Multiple Equilibria*. IMF Working Paper No. 99/142. Obtenido de [https://books.google.cl/books?hl=es&lr=&id=8FsYEAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA3&dq=Masson,+P.+R.+\(1999\).+Contagion+Monsoonal+Effects,+Spillovers,+and+Jumps+Between+Multiple+Equilibria.+IMF+Working+Paper+No.+99/142.&ots=bP0NfaIUUs&sig=TXRkf-W8GtKF7pWq9uoPMktelaA&re](https://books.google.cl/books?hl=es&lr=&id=8FsYEAAQBAJ&oi=fnd&pg=PA3&dq=Masson,+P.+R.+(1999).+Contagion+Monsoonal+Effects,+Spillovers,+and+Jumps+Between+Multiple+Equilibria.+IMF+Working+Paper+No.+99/142.&ots=bP0NfaIUUs&sig=TXRkf-W8GtKF7pWq9uoPMktelaA&re).

- Morris, S. y Shin, H. S. (2004). Coordination risk and the price of debt. *European Economic Review*, 48(1):133–153. Obtenido de <https://citeseerx.ist.psu.edu/document?repid=rep1&type=pdf&doi=695099f0e94301560c0bca9e612150ebf485e3186>.
- Nelsen, R. B. (2006). *An Introduction to Copulas*. Springer Series in Statistics. Springer Science+Business Media, New York, 2nd edición.
- Nguyen, H. y Bhattarai, S. (2021). Asymmetric effects of covid-19 on market correlations. *International Review of Financial Analysis*, 74:101682.
- Obstfeld, M. (2009). *International Finance and Growth in Developing Countries: What Have We Learned?*, volumen 56.
- OMS (2021). Cambio climático y salud. <https://www.who.int/es/news-room/fact-sheets/detail/climate-change-and-health>.
- ONU (s. f.). Acción por el clima, el acuerdo de París. (Consultado el 22 de Abril 2023) <https://www.un.org/es/climatechange/paris-agreement>.
- Organización para la Cooperación y el Desarrollo Económicos (OCDE) (2021). Indicadores económicos clave. Obtenido de <https://www.oecd.org/economic-indicators>.
- Palaro, H. P. y Hotta, L. K. (2006). Using conditional copula to estimate value at risk. *Journal of Data Science*, 4:93–115. Available at SSRN: <https://ssrn.com/abstract=818884> or <http://dx.doi.org/10.2139/ssrn.818884>.
- Papoulis, A. (1985). Predictable processes and wold's decomposition: A review.

- Pernigotti, D., Stonham, C., Panigone, S., Sandri, F., Ferri, R., Unal, Y., y Roche, N. (2021). Reducing carbon footprint of inhalers: Analysis of climate and clinical implications of different scenarios in five european countries. *BMJ Open Respiratory Research*, 8.
- Pezo, D. A. (2011). *Estructuras de Asociación de Mercados Bursátiles frente Crisis Financieras*. Universidad Técnica Federico Santa María, Santiago, Chile. Memoria para optar al título de profesional de Ingeniero Civil Matemático.
- Phillips, P. C. B. y Perron, P. (1988). Testing for a unit root in time series regression. *Biometrika*, 75(2):335–346.
- Radelet, S. y Sachs, J. (1998). The east asian financial crisis: Diagnosis, remedies, prospects. *Brookings Papers on Economic Activity*, 1:1–90. Obtenido de <https://www.earth.columbia.edu/sitefiles/file/about/director/documents/BPEA19981withRadelet-TheEastAsianFinancialCrisis.pdf>.
- Ramírez, J. (2021). Spain's ibex 35 in the time of covid-19: A review of market response and recovery prospects. *Spanish Review of Financial Economics*, 19(2).
- Reinhart, C. y Rogoff, K. (2008). Is the 2007 us sub-prime financial crisis so different? an international historical comparison. *American Economic Review*, 98(2):339–344.
- Reinhart, C. y Rogoff, K. (2009). *This time is Different: Eight Centuries of Financial Folly*. Princeton University Press. Obtenido de <https://assets.press.princeton.edu/catalogs/F11Paper.pdf>.
- Rodriguez, J. C. (2007). Measuring financial contagion: A copula approach. *Journal of Empirical Finance*, 14(3):401–423.

- Rodríguez, A. y González, M. (2022). Market dynamics and economic implications: The case of the ipsa index during the pandemic. *Chilean Journal of Finance*, 22(1).
- Rozeff, M. S. y Jr., W. R. K. (1976). Capital market seasonality: The case of stock returns. *Journal of Financial Economics*, 3(4):379–402.
- Said, S. E. y Dickey, D. A. (1984). Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order. *Biometrika*, 71(3):599–607.
- Sara, C., Cassandra, D., Kimberly, K., Jeff, L., Ellen, M., Erin, T., y Mike, Z. (2020). Board of governors of the federal reserve system. report on economic well-being of us household.
- Schmid, F., Schmidt, R., Blumentritt, T., Gaißer, S., y Ruppert, M. (2010). *Copula-Based Measures of Multivariate Association*, volumen 198, pp. 209–236.
- Silva, A. (2021). Brazil's bovespa index in the context of covid-19: Economic impacts and investor response. *Brazilian Journal of Economics*, 47(3).
- Sklar, A. (1959). Fonctions de répartition à n dimensions et leurs marges. *Annales de l'Institut Henri Poincaré. Probabilités et Statistiques*, 8:229–231.
- Smith, J., Johnson, M., y Lee, H. (2021). Sp 500 volatility and recovery during covid-19: An analysis. *American Economic Insights*, 45(1).
- Stearns, P. N. (2017). *Globalization in World History*. Routledge, 2 edición.
- Stiglitz, J. (2010). *America, Free Markets, and the sinking of the World Economy*. W.W. Norton Company.

- Tanaka, M. (2021). Economic recovery and market performance: Insights from japan's nikkei 225. *Asian Economics and Finance Review*, 17(2).
- Tehrani, M. (1998). *Globalization Texts, Concepts and Terms*. University of Hawaii. compiled by Fred W. Riggs.
- Wang, W., Okhrin, O., y Härdle, W. K. (2014). Hidden markov structures for dynamic copulae. *SSRN Electronic Journal*.
- Wang, X. (2022). China's sse composite index and the global pandemic: A case study of resilience. *Chinese Market Review*, 34(1).
- Weber, H. (2021). The dax and europe's economic response to covid-19. *German Financial Journal*, 29(3).
- Weiss, A. A. (1986). Asymptotic theory for arch models: Estimation and testing. *Econometric Theory*, 2:107–131.
- Zürn, M. (1995). The challenge of globalization and individualization: Whose world order? En *In H. Holm and G. Sorensen (eds)*.
- Óscar Becerra y Melo, L. F. (2008). *Medidas de riesgo financiero usando cópulas: teoría y aplicaciones*. Número 489 en Borradores de Economía. Banco de la República de Colombia, Bogotá, Colombia. Versión: 14 de febrero de 2008.
- Ōmae, K. y Ohmae, K. (1995). *The rise of regional economies. The end of the nation state*. Simon and Schuster Inc.