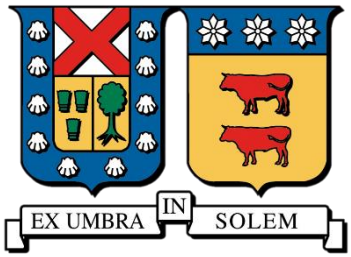
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA METALÚRGICA Y DE MATERIALES

SANTIAGO DE CHILE



CRISTIAN JAHIR BOLAÑOS MÉNDEZ

Memoria para optar al Título Profesional de

INGENIERO CIVIL DE MINAS

RESERVAS REMANENTES DE COBRE: ESTUDIO PARA VERIFICAR VARIABLES QUE PERMITAN PREDECIR SU COMPORTAMIENTO

Profesor Guía:

Ing. Carlos Hunt Recabarren

Profesor Correferente:

Dr. Jorge Ipinza Abarca

Agosto 2023

Dedicado a ese joven que soñaba con ser ingeniero.

Resumen

Este trabajo busca verificar la significancia de ciertas variables para intentar predecir el comportamiento de las reservas remanentes de cobre. Las variables seleccionadas tales como producción mundial de cobre, consumo mundial de cobre, precio del cobre, PIB y población mundial, se analizarán, en el periodo de estudio 1950-2015.

Para poder efectuar lo anterior, se contrastaron dos metodologías que buscan predecir el agotamiento a futuro del cobre, una propuesta por Shafiee (2009) y una aproximación simple del tiempo de agotamiento planteado por Sverdrup (2014). Se encontraron falencias al momento de utilizarlas; puesto que, la primera no sirve para escenarios en donde se presenta un decremento porcentual anual mayor a un 3% en las reservas de cobre y la segunda no considera escenarios de crecimiento económico enfocándose netamente en una economía estancada.

En consecuencia, se continua el estudio con el comportamiento que han tenido las variables seleccionadas a lo largo del periodo, y se realiza una aproximación en busca de modelar las reservas de cobre, mediante una regresión lineal múltiple. Para lo cual se ocupa la técnica de Backcasting utilizando el 80% de los datos en una regresión y con el 20% restante se realizan proyecciones que se comparan con los datos reales de reservas. Obteniendo un indicador MAPE de 7.50 de alta precisión.

Finalmente, para validar la regresión realizada, se hacen pruebas de Dickey-Fuller aumentado a todas las variables con la finalidad de conocer si son estacionarias o no. Se encontró que todas las variables seleccionadas para el estudio no presentan estacionariedad, salvo la población mundial. Por lo que se puede aseverar que para trabajar con las variables seleccionadas se debe seguir otro procedimiento, como por ejemplo una cointegración y así predecir el comportamiento de las reservas remanentes de cobre.

PALABRAS CLAVE: Reservas remanente, producción mundial, consumo mundial, población mundial, PIB, prueba de Dickey-Fuller, estacionariedad.

Abstract

This work seeks the significance of certain variables to predict the behavior of the remaining copper reserves. Variables such as world copper production, world copper consumption, copper prices, GDP, and world population will be analyzed for the 1950-2015 study period.

To do this, two methodologies that seek to predict future copper depletion were contrasted, one proposed by Shafiee (2009) and a simple approximation of the depletion time proposed by Sverdrup (2014). Shortcomings were found when using them, since the first one is not useful for scenarios where there is an annual percentage decrease of more than 3% in copper reserves and the second one does not consider economic growth scenarios, focusing purely on a stagnant economy.

Consequently, the study continues with the behavior of the selected variables throughout the period, and an approximation is made to model the copper reserves, using multiple linear regression. For this, the Backcasting technique is used, using 80% of the data in regression and with the remaining 20%, projections are made and compared with the real data. A high-precision MAPE indicator of 7.50 is obtained.

Finally, to validate the regression performed, Dickey-Fuller tests are performed on all the variables to determine whether they are stationary or not. It was found that all the variables selected for the study are not stationary, except for the world population. Therefore, it can be asserted that to work with the selected variables, another procedure should be followed, such as cointegration, and thus predict the behavior of the remaining copper reserves.

KEYWORDS: Remaining reserves, Production, Consumption, World population, GDP, Dickey-Fuller teste, stationary.

Lista de contenidos

1. INTRODUCCIÓN 1

1.1. General 1

1.2. Motivación 2

1.3. Objetivos 2

1.3.1. Objetivo general 2

1.3.2. Objetivos específicos 2

1.4. Alcances 3

2. ANTECEDENTES 4

3. MARCO TEÓRICO 11

3.1. Términos económicos relevantes para el mercado del cobre 11

3.1.1 Producción Mundial 11

3.1.2 Consumo 12

3.1.3 Precio 13

3.1.4 Producto Interno Bruto (PIB) 13

3.1.5 Población Mundial 13

3.1.6 Agotamiento 14

3.2. Modelos de regresión 14

3.2.1 Regresión Lineal Simple 14

3.2.2 Regresión Lineal Múltiple 15

3.3. Coeficientes relevantes de la regresión 15

3.3.1 Error estándar residual 15

3.3.2 R2 15

3.3.3 Estadístico T 16

3.3.4 Estadístico F 17

3.4. Series Temporales 17

3.4.1 Serie estacionaria 18

3.4.2 Serie no estacionaria 19

3.5. Pruebas de estacionariedad 20

3.5.1 Correlograma 20

3.5.2 Raíces unitarias: Dickey-Fuller Aumentado (ADF) 21

4. METODOLOGÍA 25

5. RESULTADOS Y ANÁLISIS 26

5.1. Reservas de Cobre 26

5.2. Variables seleccionadas para el estudio 28

5.2.1 Correlación de variables y propuesta de modelo simple 31

5.3. Modelo simple de las reservas de cobre 32

5.4. Pruebas de Estacionariedad 33

5.4.1 Correlogramas 33

5.4.2 Prueba de Dickey-Fuller Aumentada 39

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES 51

7. REFERENCIAS 52

8. ANEXOS 54

8.1. Datos relevantes para el estudio 54

8.2. Años restantes de las reservas de cobre 56

8.3. Gráficos de correlación entre las variable 58

Lista de Tablas

Tabla 1: Principales incertidumbres en el sistema del cobre 7
Tabla 2:Valores críticos pruebas Dickey-Fuller. Basado en la estimación OLS estadístico t 24
Tabla 3: Coeficiente de correlación de las distintas variables 31
Tabla 4: Resultados relevantes de la regresión 32
Tabla 5: Prueba Dickey Fuller Precio Cobre tipo de prueba Básico 39
Tabla 6: Prueba Dickey Fuller Precio Cobre tipo prueba Intercepto 39
Tabla 7: Prueba Dickey Fuller Precio Cobre tipo prueba Tendencia e Intercepto 40
Tabla 8: Prueba Dickey Fuller Consumo Cobre tipo prueba Básico 40
Tabla 9: Prueba Dickey Fuller Precio Cobre tipo prueba Intercepto 41
Tabla 10: Prueba Dickey Fuller Precio Cobre tipo prueba Tendencia e Intercepto 41
Tabla 11: Prueba Dickey Fuller PIB Mundial tipo prueba Básico 42
Tabla 12: Prueba Dickey Fuller PIB Mundial tipo prueba Intercepto 42
Tabla 13: Prueba Dickey Fuller PIB Mundial tipo prueba Tendencia e Intercepto 43
Tabla 14: Prueba Dickey Fuller Producción tipo prueba Básico 43
Tabla 15: Prueba Dickey Fuller Producción tipo prueba Intercepto 44
Tabla 16: Prueba Dickey Fuller Producción tipo prueba Tendencia e Intercepto 44
Tabla 17: Prueba Dickey Fuller Problación Mundial tipo prueba Básico 45
Tabla 18: Prueba Dickey Fuller Población Mundial tipo prueba Intercepto 45
Tabla 19: Prueba Dickey Fuller Población Mundial tipo prueba Tendencia e Intercepto 46
Tabla 20: Resumen de las pruebas de Dickey-Fuller 46
Tabla 21: Datos relevantes del mercado del cobre 54
Tabla 22: Años restantes de las reservas históricas a nivel mundial del cobre 56

Lista de Ilustraciones

Ilustración 1: Diagrama de reservas, recurso y recurso base (Tilton et al 2007) 4
Ilustración 2: Curva de producción de cualquier recurso mediante metodología Hubbert (Valero et al 2014). 10
Ilustración 3:Principales productores de cobre a nivel mundial al año 2021. (US Geological Survey 2021) 11
Ilustración 4:Consumo mundial de cobre refinado en diferentes zonas del mundo (Comisión Chilena del Cobre, 2017) 12
Ilustración 5:Representación gráfica de serie estacionaria en media (Estadística y Machine Learning con R, Parra 2019) 18
Ilustración 6:Representación gráfica de serie estacionaria en tendencia (Análisis de series temporales en R, Campos 2018) 19
Ilustración 7:Representación gráfica de serie no estacionaria (Estadística y Machine Learning con R, Parra 2019) 19
Ilustración 8:Curvas típicas de autocorrelación para diferentes modelos de serie de tiempo (Schwarz, 1978) 21
Ilustración 9:Distribución del t estadístico en la prueba Dickey-Fuller 23
Ilustración 10:Comparativa años restantes de las reservas según su consumo y producción anual 27
Ilustración 11:Precio Cobre Según PPI 2015 28
Ilustración 12:Consumo mundial de cobre 29
Ilustración 13:PIB Mundial 29
Ilustración 14:Producción mundial de cobre 30
Ilustración 15:Población Mundial 30
Ilustración 16: Reservas reales versus proyección reservas 33
Ilustración 17: Correlograma Precio Cobre 34
Ilustración 18: Autocorrelación parcial Precio cobre 34
Ilustración 19: Correlograma Consumo 35
Ilustración 20: Autocorrelación parcial Consumo Cobre 35
Ilustración 21: Correlograma PIB Mundial 36
Ilustración 22: Autocorrelación parcial PIB Mundial 36
Ilustración 23: Correlograma Producción mundial cobre 37
Ilustración 24: Autocorrelación parcial Producción 37
Ilustración 25: Correlograma Población Mundial 38
Ilustración 26: Autocorrelación parcial Población Mundial 38
Ilustración 27: Resultado prueba Dickey-Fuller para el Precio del Cobre 47
Ilustración 28: Resultado prueba Dickey-Fuller para el Consumo de Cobre 48
Ilustración 29: Resultado prueba Dickey-Fuller para PIB mundial 49
Ilustración 30: Resultado prueba Dickey-Fuller Producción de Cobre 49

Ilustración 31: Resultado prueba Dickey-Fuller Población mundial..... 50
Ilustración 32: Correlación Producción versus Población mundial 58
Ilustración 33: Correlación Producción versus PIB mundial 59
Ilustración 34: Correlación Producción versus Consumo 59
Ilustración 35: Correlación Precio versus Producción 60
Ilustración 36: Correlación Precio versus Consumo 60
Ilustración 37: Correlación Precio versus Población mundial 61
Ilustración 38: Correlación Precio versus PIB mundial 61
Ilustración 39: Correlación Consumo versus PIB mundial 62
Ilustración 40: Correlación Consumo versus Población mundial 63
Ilustración 41: Correlación PIB mundial versus Población mundial 63

1. INTRODUCCIÓN

1.1. General

Los recursos minerales (Biblioteca Nacional, 2007) son definidos como aquellos que son descubiertos durante la fase de exploración en el proceso de desarrollo de minerales. Durante esta fase y la que le sigue, en donde se hace una evaluación del yacimiento, se llevan a cabo levantamientos y estudios cada vez más detallados para identificar la ubicación, cantidad, ley, características geológicas, continuidad del recurso mineral y viabilidad para una eventual extracción económica. Por otro lado, una reserva mineral es la parte económicamente explotable de un recurso mineral medido o indicado, la cual debe estar documentada por al menos un estudio de factibilidad preliminar, realizado durante la fase de evaluación del depósito. (Mines QC, 2017)

Las reservas remanentes de cobre (Hunt et al., 2021) corresponden al total histórico encontrado de las reservas menos la cantidad que se han extraído por los procesos productivos a nivel mundial. Se puede decir que, las reservas remanentes son las que aún quedan disponibles para ser extraídas económicamente.

Varios estudiosos han propuestos diversas hipótesis acerca de cómo las reservas de los metales se van agotando (Gordon et al., 2006) en donde se manifiesta que los recursos minerales son finitos y el alza permanente en la producción provocaría su extinción. Esta mirada está centrada principalmente en el paradigma de stock fijo, señalando que hay un cantidad única y limitada de recursos en la corteza terrestre disponible para dar abasto a las demandas a largo plazo. (Crowson et al. 2011)

En contra parte hay estudios de otros autores que difieren de este pensamiento (Tilton et al., 2007), el cual tiene como base al paradigma del costo de oportunidad, donde se postula que no existe una cantidad fija de los recursos disponibles debido a las constantes variaciones que sufre el mercado de los minerales, por ejemplo <<*aumentos en la demanda afectaran directamente los precios, lo que trae consigo que recursos con un costo marginal elevado van a seguir siendo económicos para extraer o procesar*>>. Pero a medida que la explotación de un mineral se vaya a mayores profundidades el costo de extracción sería demasiado alto hasta que eventualmente llegue un punto en donde se deje de explotar, aunque siga disponible en la corteza terrestre. (Tilton, 2010)

Además, se tienen predicciones de en cuantos años podría llegar a ocurrir, en los cuales se han considerado diferentes variables para explicar dicho fenómeno, tales como: Reservas al momento del estudio, precio, producción, consumo, ultimas reservas extraíbles, vida útil de la mina, entre

otros (Sverdrup et al.,2014). Pero hasta el momento no se cuenta con un modelo que prediga el comportamiento de las reservas de los metales.

Bajo este escenario es que se busca una alternativa en distintas áreas que tengan cierta relación con el mercado de los metales, en donde se haya intentado predecir el comportamiento de las reservas. Es aquí donde se pone énfasis en el trabajo realizado en el agotamiento de los combustibles fósiles, en donde además se propone un modelo econométrico (Shafiee et al., 2009).

Para poder replicarlo a la industria de los metales es que primero se debe contar con una base estadística sólida, la cual va a asegurar que los resultados obtenidos entreguen una muestra de lo que pasa en la realidad.

1.2. Motivación

Esta memoria conforma parte de un proyecto, en donde se busca crear un modelo econométrico, el cual sea capaz de proyectar la evolución de las reservas remanentes, ello para complementar el análisis que se tiene acerca del agotamiento del cobre.

Con el fin de lograr esto se realizarán pruebas del tipo Dickey-Fuller aumentado a las variables seleccionadas (Precio, Consumo, Producción, PIB y Población mundial) para así verificar su estacionariedad y comprobar la factibilidad en la construcción de un modelo econométrico con las variables mencionadas, mediante una regresión lineal múltiple.

1.3. Objetivos

Objetivo general

- Verificar la idoneidad de ciertas variables para que puedan ser utilizadas como herramienta para modelar las reservas de cobre.

Objetivos específicos

- Revisar estudios relacionados con la escasez de cobre.
- Revisar estudios relacionados acerca de las reservas de minerales según una mirada de stock fijo.
- Identificar modelo propuestos por distintos autores para predecir la escasez y comportamiento de las reservas de cobre.
- Comprobar la estacionariedad de las series temporales seleccionadas.

1.4. Alcances

- El presente trabajo ocupa datos de reservas remanentes de cobre a nivel mundial.
- Se estudia las reservas históricas de cobre, incorporando variables relevantes como Precio, Producción, Consumo, PIB y Población.
- Los datos utilizados en el presente documento se centran en un periodo que comprende los años 1950-2015.

2. ANTECEDENTES

En esta sección se recopilan estudios que dan muestra de distintas formas en las cuales variados autores han abordado la escasez de mineral bajo distintos escenarios, lo cual permite predecir su comportamiento e identificar factores clave.

A medida que el crecimiento demográfico fue aumentando a lo largo de los años, también lo hizo el consumo de minerales, esto con el objetivo de satisfacer la creciente demanda. Basado en ese escenario comenzó a surgir la palabra escasez para referirse al momento en el cual se agoten por completo las reservas minerales. Si se pone la premisa de que la corteza terrestre es finita, los minerales contenidos en ella por consecuencia también lo son. Además, considerando el alza en la demanda de estos, es que se puede asegurar que en algún momento dichos suministros se van a agotar (Gordon et al. 2006).

Esta observación del agotamiento se conoce como el paradigma del stock fijo, para entender de mejor manera este concepto es necesario definir y entender los conceptos de reservas, reserva base, recursos y recursos base.

El termino de reserva hace referencia a la medición de mineral contenido en los depósitos que han sido descubiertos y que cuentan con la condición de ser económicamente viables para su extracción.

Una medida relacionada, que es un poco mayor que las reservas, es el de reserva base. La cual ha sido definida por US Geological Survey como reservas más algunos recursos subeconómicos que tienen un potencial razonable por estar económicamente disponible dentro de la planificación más allá de la tecnología y aspectos económicos actuales. (USGS 2006).

Los recursos tienen incorporado a las reservas más el cobre contenido en los depósitos descubiertos pero que no son económicamente viables. Los recursos base comprende todo el metal contenido en la corteza terrestre.

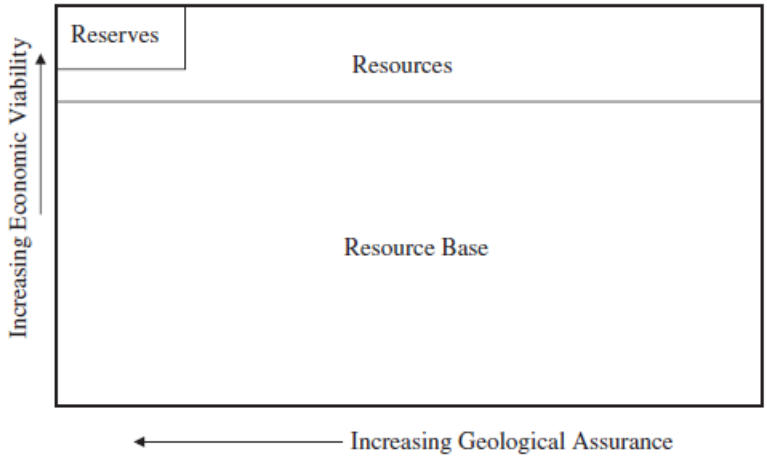


Ilustración 1: Diagrama de reservas, recurso y recurso base (Tilton et al 2007)

Se deben tener en consideración unos puntos clave para entender por qué no es del todo correcto basar los cálculos considerando un stock fijo.

En primera instancia, los metales no se destruyen cuando son empleados, si bien sufren un desgaste en el proceso, lleva un periodo muy prolongado de tiempo utilizarlos hasta que se desgasten al máximo. Esto abre la ventana a un stock relevante que surge desde el reciclaje.

Un mineral puede tener múltiples usos en la industria, esto hace que a la hora de intentar agotar uno en particular existe la probabilidad de que surja un sustituto que merme su consumo, prolongando en consecuencia el agotamiento.

Si se considera la extensión en kilómetros que tiene la corteza terrestre y se contrasta con la que ha sido explotada, se llega a la conclusión de que quedan recursos para bastantes siglos más, entonces hablar de una extinción en algún recurso es contradictorio. Es por esta razón que el agotamiento se puede ver desde una perspectiva económica, ya que, para poder acceder a yacimientos con gran profundidad se demandará en consecuencia una cantidad similar de recursos. Además, hay que agregar que esto haría que el mineral explotado tuviera un crecimiento exponencial en su precio produciendo una reducción en la demanda hasta que eventualmente no exista. Es por estas razones que el agotamiento no viene desde un lado físico sino más bien sería uno económico. (Tilton et al 2007).

Respecto al agotamiento de las reservas se llevó a cabo un estudio (Shafiee et al 2009) que analiza el tamaño de las reservas fósiles y cuánto tiempo va a pasar hasta que estas se agoten. Para ello presentan una nueva fórmula, resultado de la modificación del modelo propuesto por Donald Klass en 1998. Con ella se puede estimar los años restantes de las reservas de los combustibles fósiles (carbón, petróleo y gas natural) antes que se agoten, considerando únicamente las reservas reportadas a la fecha del estudio.

Además, se desarrolla un modelo econométrico para demostrar la relación entre las reservas y las variables identificadas como principales por los autores, las cuales son el consumo y precio de los recursos.

$$TFC = \sum_{i=1}^{n} FC_i = R \qquad (1)$$

En donde TFC es el consumo total de los combustibles fósiles, FC es el consumo de los combustibles fósiles, n el año y R las reservas.

Como se puede apreciar en la ecuación (1), se asume que TFC será consumido en “n” años, FC es derivado en la siguiente expresión:

$$FC_n = FC_1 e^{(n-1)g} \qquad (2)$$

En donde g es el porcentaje de crecimiento anual en el consumo de los combustibles fósiles. De las expresiones anteriores se puede expresar las reservas mediante la siguiente formula.

$$R = FC_1 * \left[\frac{(e^{ng} - 1)}{(e^{g} - 1)}\right] \quad (3)$$

Este nuevo modelo permite estimar el agotamiento de las reservas, bajo la premisa de que estas serán constantes. En caso de que se encuentren nuevos yacimientos, se tendrá que volver a realizar el cálculo.

Para encontrar los efectos que tienen las variables del consumo y el precio sobre las reservas, es que se desarrolla un modelo econométrico el cual consiste en una regresión.

$$RES_t = \alpha + \beta_1 C_t + \beta_2 P_t + \varepsilon_t \quad (4)$$

RES_t, representa a las reservas, C_t el consumo y P_t el precio. Con esta relación se logro demostrar que el consumo tiene un efecto negativo sobre las reservas y el precio un impacto positivo sobre ellas.

Si bien este estudio no se centra en las reservas de cobre, sienta buenas bases para poder modelar las reservas y presenta un modelo econométrico que permite reflejar el impacto que tienen ciertas variables que rodean a las reservas. Es una buena oportunidad para ver cómo se adapta esta metodología al sistema del cobre.

Otro estudio, Pruyt et al 2012, creó posibles escenarios para los Indicadores clave de rendimiento (KPIs) en el sistema del cobre, explorando eventuales efectos indeseables y las influencias que tienen las incertidumbres en el comportamiento del sistema. Para ello proponen 3 modelos diferentes desarrollados para representar distintos puntos de vista que tiene la oferta y la demanda de cobre. Esto fue posible gracias a un método novedoso que incorpora dos herramientas de modelación, *"Exploratory System Dynamics Modelling and Analysis" (EMA)* y *"System Dynamics" (SD),* dando paso a *"Exploratory System Dynamics Modelling and Analysis" (ESDMA).* (Pruyt et al 2012).

Con el modelamiento mediante SD se pueden simular sistemas que tengan por características una fuerte retroalimentación, demoras y estructuras de flujo de existencias. Dentro de los estudios para la escasez de minerales y metales tiene una larga tradición, ocupado para identificar los límites de crecimiento (Meadows et al 1972) en donde los metales son modelados como recursos no renovables. Para el estudio en cuestión se intentan unir aspectos geológicos, tecnológicos y económicos que rodean al sistema del cobre.

Para poder analizar las grandes incertidumbres del sistema se ocupa EMA, mediante el modelamiento cuantitativo de modelos plausibles y de incertezas, para esto se realizan una gran

cantidad de simulaciones computacionales. El procedimiento resulta útil cuando existe información relevante que puede ser explicada con la ayuda de modelos, pero esta data no es suficiente para poder especificarse en un solo modelo que cuente con la precisión que describa el comportamiento real del sistema.

Con el fin de desarrollar los modelos es necesario identificar las incertidumbres principales del sistema del cobre (Tabla 1)

Tabla 1: Principales incertidumbres en el sistema del cobre

Incertidumbre	**Tipo de incertidumbre**	**Descripción**
Evolución demanda	Incertidumbre estructural	La demanda intrínseca de cobre sin efectos de precio y sustitución
Evolución ley	Incertidumbre estructural	La ley de cobre disminuye a medida que se avanza en profundidad
Evolución precio de energía	Incertidumbre paramétrica (dinámica)	El precio de la energía necesaria para la producción de cobre
Evolución en precio de sustitutos	Incertidumbre paramétrica (dinámica)	La evolución de precios de los sustitutos del cobre
Crecimiento económico	Incertidumbre paramétrica (dinámica)	El crecimiento del GDP global o regional
Recursos/Recursos base	Incertidumbre estructural	Cantidad de cobre que se recupera de la corteza terrestre
Evolución capacidad	Incertidumbre estructural	Capacidad de mineras, fundidoras y refinerías

Del análisis de las incertezas de cobre se generan 4 modelos distintos, 2 del tipo “top down” y 2 “bottom up”. En donde tanto la demanda como la oferta del cobre se pueden globalizar bajo dos perspectivas; una de ellas es mediante los diferentes usos que se le puede dar al cobre y la otra es una mirada regional de la refinación, minería y consumo de cobre.

Los modelos “top down” son relevantes al momento de analizar el comportamiento que rodea al mercado del cobre, y por consecuencia modelar la escasez. Uno de ellos permite explorar las consecuencias de una creciente demanda debido a un aumento en la población con mayor riqueza. El otro deja en evidencia los efectos de un sistema dentro de un mercado que no es completamente abierto o cerrado.

Un estudio desarrollado en Suecia (Sverdrup 2014) presentó ecuaciones simples que evidencian la situación futura de las reservas de cobre hacia años venideros.

Tiempo de agotamiento (Burn-off time): Una aproximación simple que no considera el crecimiento exponencial ni mecanismos en el precio de mercado. Es un método preciso en una economía estancada, dejando de lado el crecimiento económico y de población.

$$Tiempo\ de\ agotamiento = \frac{(Reserva\ estimada)}{(Producción\ actual)} \qquad (5)$$

Alerta temprana del peak de descubrimiento (Peak Discovery early warning): Relación existente entre el descubrimiento de las reservas y el máximo de producción, variados estudios señalan que esta relación es de 40 años aproximadamente.

$$Peak\ producción = Peak\ de\ descrumiento + 40\ años \qquad (6)$$

Si bien tienen una relativa simplicidad en su cálculo, presentan ciertas falencias en la exactitud, ya que no se consideran variables económicas ni tecnológicas. (Sverdrup 2014).

Para poder abordar el agotamiento de las reservas el foco muchas veces se ha puesto en una variable fundamental que rodea el mercado del cobre, la producción. Tiene cierta lógica aseverar que la escasez de mineral se puede calcular por medio de cuanta cantidad de material es extraído y procesado.

Una forma de poder predecir el comportamiento de la producción de cobre es ocupando una estimación de las ultimas reservas recuperables (URR), se puede predecir la producción futura, demanda del metal y la cantidad de reciclaje, también denominada producción secundaria. Con la finalidad de lograr lo anteriormente expuesto es necesario clasificar los depósitos de cobre por su tipo y además por país, y ocupando un modelo desarrollado por Mohr en el año 2010 GeRS-DeMo (Geologic Resourses Supply-Demand Model) se pueden simular los distintos escenarios. (Northey et al 2014).

Para el estudio en cuestión la proporción de Cu producido por cada tipo de depósito fue interpolada linealmente en un periodo de 10 años (2000-2010). Además, se estima la cantidad de cobre que se recupera, y se fija en un 85%. Para calibrar el modelo se utilizaron dos de las minas más grandes de Australia, por lo tanto, datos como vida de la mina y rangos de producción son extraídos de ahí.

El modelo relaciona las interacciones que ocurren entre la oferta y la demanda, analizándolas por separado. En la parte de la oferta se desprendes cuatro ecuaciones que buscan relacionar las variables de producción, vida de la mina y las reservas que se han recuperado en los últimos periodos.

$$L_M(t) = \frac{L_H + L_L}{2} + \frac{L_H + L_L}{2}\tanh\big(t_t(t - t_t)\big) \qquad (7)$$

En donde L_M representa la vida de la mina y L_H como L_L los limites superiores e inferiores de la vida de la mina respectivamente.

$$M_p(t) = \frac{M_H + M_L}{2} + \frac{M_H + M_L}{2}\tanh\big(t_t(t - t_t)\big) \quad (8)$$

En donde M_p representa los rangos de producción y M_H como M_L los limites superiores e inferiores de la producción.

La producción es el resultado de la sumatoria de toda la producción individual de cada mina representada en la ecuación (7).

$$P(t) = \sum_{i=1}^{nM(t)} P_{M_i}(t) \quad (9)$$

Para incorporar una variable clave como lo son las reservas, decidieron enfocarse en las que se han recuperado en un periodo de tiempo reciente (URR). Las URR explotables corresponde a la suma individual de las URR de cada mina, y representa la cantidad de las URR que se encuentran en explotación o que serán explotadas en un periodo de tiempo cercano.

$$Q_e(t) = \frac{Q_T - Q_{T1}e^{-rQ_T}}{1 - e^{-rQ_T}} - \frac{Q_T - Q_{T1}}{1 - e^{-rQ_T}}e\left(-rQ_T\frac{Q(t)}{Q_T}\right) \quad (10)$$

Se denota a las URR como $Q_e(t)$, donde Q_T son las URR dadas por cada región, Q_{T1} son las URR de la primera mina de dicha región, $Q(t)$ es la producción acumulada y r_{QT} es una constante de velocidad.

Para estudiar la parte de la demanda, el estudio se centró en la población existente en la región que se desea estudiar. Y se desprende la siguiente expresión:

$$p(t) = \left[\frac{10 - 0.82}{\sqrt{1 + 1.5e^{(-0.046(t-2007))}}} + 0.82\right] * 10^9 \quad (11)$$

Donde p es la población expresada en millones.

Otra forma de ocupar la producción para analizar la influencia que tienen sobre los recursos globales extraíbles es fijarse en los peak de producción. Para ello se ocupa el modelo propuesto por Hubbert de una forma simple y directa, con el objetivo de aproximar el orden de magnitud del agotamiento de las reservas. Además, esta metodología puede servir para entregar información acerca de futuras tendencias y límites. (Calvo et al 2017).

Para conseguir modelar el comportamiento de la producción y analizar el impacto que tendría sobre las reservas, decidieron que el área bajo la curva tiene que ser igual a la cantidad de recursos que se encuentran disponibles.

$$f(t) = \frac{R}{b_0\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\frac{t-t_0}{b_0})} \qquad (12)$$

La función representa a la producción en un algún periodo de tiempo t, las reservas o recursos del commodity son representadas por R. Tanto b_0 como t_0 son parámetros desconocidos.

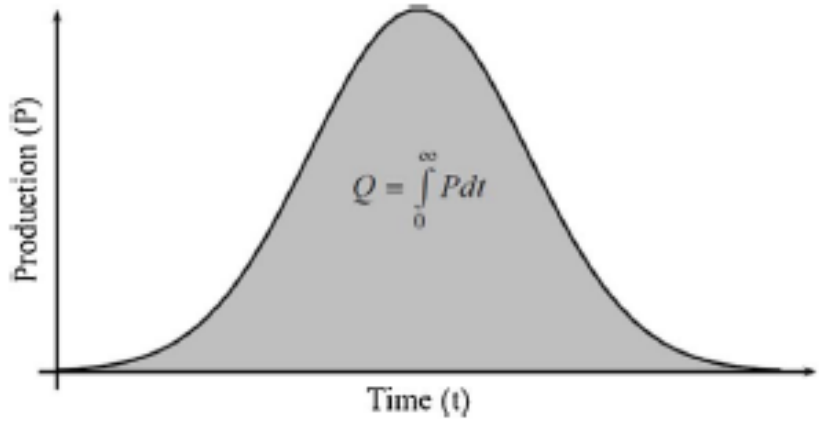


Ilustración 2: Curva de producción de cualquier recurso mediante metodología Hubbert (Valero et al 2014).

Existe un grupo de variables además de la producción que afectan directamente al comportamiento de las reservas de cobre, tales como la población mundial, consumo de cobre, producción de cobre y PIB mundial. Las cuales han tenido un aumento progresivo a lo largo del tiempo. Lo que podría suponer un escenario en donde se generan expectativas de escasez a mediano y largo plazo, esto producto de la necesidad de procesar cada año mayor cantidad de mineral para cumplir con las necesidades que posee la sociedad. (Cabello 2022)

3. MARCO TEÓRICO

3.1. Términos económicos relevantes para el mercado del cobre

3.1.1 Producción Mundial

Es la actividad económica que se encarga de transformar los insumos para convertirlos en productos.

Se llama producción a cualquier actividad que aprovecha los recursos y materias primas para poder elaborar o fabricar bienes y servicios, los cuales serán utilizados para satisfacer una necesidad y/o ser intercambiados dentro del mercado.

La producción de cobre también es conocida como producción primaria, y es definida como la cantidad de cobre refinado producido a través de los distintos tratamientos metalúrgicos de concentrado (Pirometalurgia o hidrometalurgia) el cual debe cumplir con estándares mínimos de concentración, calidad y pureza para que pueda ser comercializado.

La producción mundial se considerada como la oferta existente en el mercado del cobre, y es determinada mediante la suma de los aportes de cátodos, ánodos, cobre blíster y concentrados provenientes de las múltiples operaciones mineras activas. En la ilustración 1 se presenta la producción mundial clasificada en los principales productores de cobre.

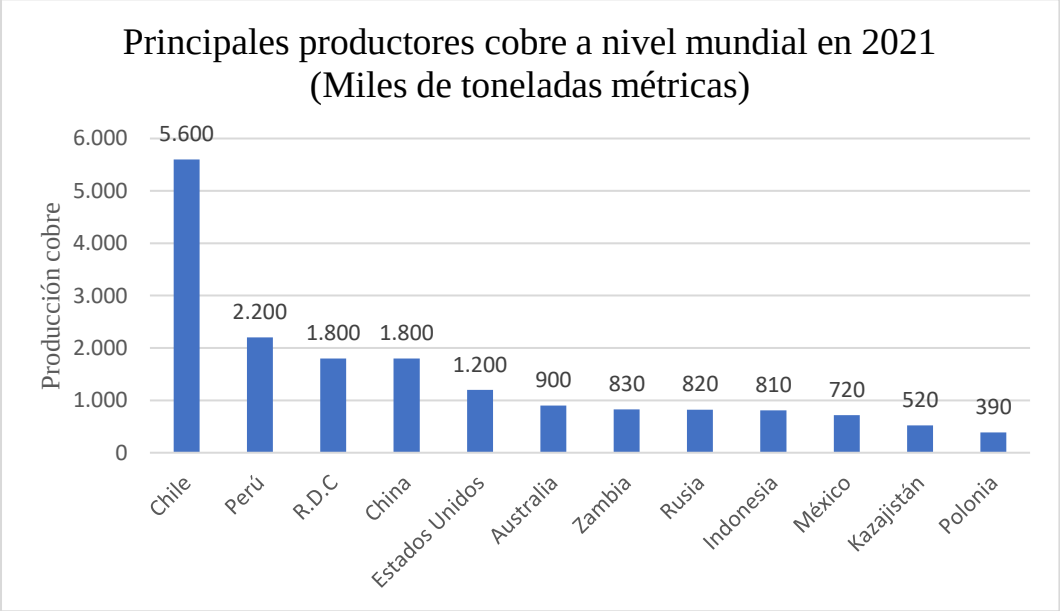


Ilustración 3:Principales productores de cobre a nivel mundial al año 2021. (US Geological Survey 2021)

3.1.2 Consumo

Se define como la utilización de bienes y servicios por parte de una persona, hogar, empresa, entre otros.

En economía se ve como la fase final del proceso económico, principalmente del proceso productivo, cuando el bien obtenido es capaz de servir de utilidad al consumidor.

También se puede definir al consumo mundial de cobre como la suma de cobre adquirido por el mundo, cuantificándose en toneladas de concentrado, cobre blíster, ánodos y cátodos adquiridos por medio de transferencias directas entre los participantes del mercado del cobre (oferentes y demandantes), además se considera a las transacciones realizadas en la bolsa de metales.

La ilustración 2 presenta los países con mayor consumo de cobre refinado al año 2016, los cuales incluyen a China (48%), Estados Unidos (8%) y Alemania (6%). Se comprueba que el consumo en China triplica al valor consumido por toda Europa y supera a los demás continentes.

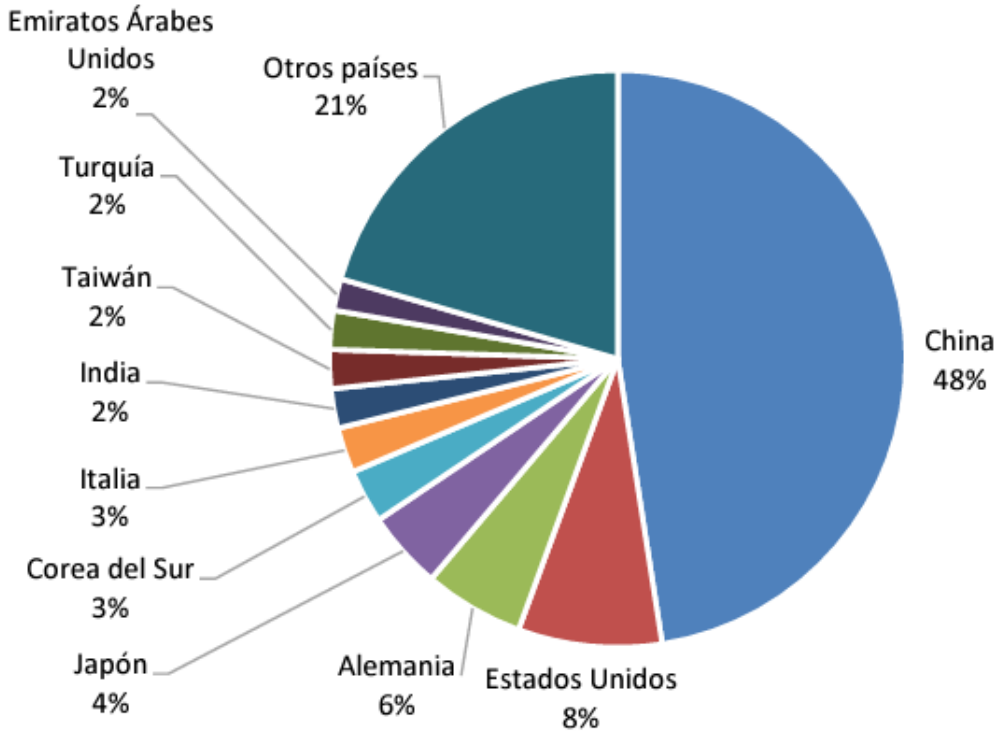


Ilustración 4:Consumo mundial de cobre refinado en diferentes zonas del mundo (Comisión Chilena del Cobre, 2017)

3.1.3 Precio

Suele ser una cantidad monetaria con la cual se puede adquirir un bien, un servicio u otro objetivo. Para que se pueda realizar una transacción el precio tiene que ser aceptado por los compradores y vendedores. Es por esto por lo que se denomina un indicador del equilibrio entre consumidores y productores, representado por la ley de la oferta y la demanda.

Un precio alto aumenta los costos de producción de los bienes finales, aunque estos incrementos suelen ser moderados, debido a que el porcentaje de los costos totales que representan los bienes suelen ser pequeños. Si los precios son muy altos se tendrá una respuesta por parte del sector que consume, sustituyendo la materia prima por alguna con características similares.

El valor del precio va a depender de las condiciones del mercado internacional, y tiende a subir cuando la demanda es más fuerte. El lugar en donde se realizan las transacciones de cobre es la Bolsa de Metales de Londes (LME) y es considerado el mayor mercado para transar y fijar precios a los cátodos de cobre. Este precio fijado puede ser para entrega inmediata o futuras hasta 10 años.

Se utiliza como referente para determinar el precio de venta de cobre y otros minerales, tanto como para cátodos como para otros productos con mayor o menor valor agregado los que ajustan este precio con descuentos (Concentrado, blíster y ánodos).

La LME ofrece dos plataformas de transacciones, una es a través del proceso electrónico y el otro la rueda a viva voz. También se transan cátodos de cobre en otras dos bolsas de metales, la de Nueva York (Estados Unidos) y Shanghái (China). (Codelco educa, 2018).

3.1.4 Producto Interno Bruto (PIB)

Es un indicador económico que refleja el valor monetario de todos los bienes y servicios finales producidos por un territorio en un determinado periodo de tiempo. Para contabilizar su cálculo se le resta el valor de los bienes y servicios intermedios consumidos durante la producción a la producción bruta. Es utilizado para medir la riqueza generada por un país. (Banco Mundial, 2022).

El PIB mundial se definirá como la sumatoria de los valores que contribuyen todos los países.

3.1.5 Población Mundial

La población mundial es definida como el número total de personas que viven alrededor del mundo, se calcula en base a un momento en específico y se fundamenta en la cantidad de nacimientos y fallecimiento de cada uno de los individuos.

Según el Departamento de Asuntos Económicos y Sociales de las Naciones Unidas, la población mundial continúa creciendo, cada vez con un ritmo menor desde 1950. Se estima que la tasa de crecimiento alcanzó su punto máximo entre los años 1965 y 1970, con una tasa de crecimiento anual de 2,1%. Después de esa época, el ritmo se redujo a la mitad, estando en un 1,1% entre los años 2015 y 2020. (Cabello, 2022).

3.1.6 Agotamiento

La cantidad de cobre que se encuentra presente en la corteza terrestre es finita, por esto el termino de agotamiento es recurrente en estudios que proyectan el futuro del cobre. Esto sucede porque la concepción que se tiene de las reservas es de un stock fijo, es decir, solo se tienen consideradas las que son reportadas al descubrirse y no entran en contemplación las demás. Una forma simple y directa para estimar el número de años restantes de las reservas existentes es poner el foco en cantidad que se consume. La siguiente expresión permite calcular el número de años en el que las reservas serán agotadas:

$$n = \frac{Ln[\left(\frac{R}{C}\right)(e^{g} - 1) + 1]}{g} \qquad (13)$$

En donde n son los años, R representa a las reservas, C es el consumo de cobre y g es el porcentaje de crecimiento anual.

3.2. Modelos de regresión

3.2.1 Regresión Lineal Simple

La regresión lineal simple es un método que es empleado para predecir una respuesta cuantitativa Y sobre la base de una única variable predictora X, con la conjetura que existe una relación lineal entre las variables. Matemáticamente, la relación lineal es:

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 * X_i \qquad (14)$$

En la ecuación X, β_0 y β_1 son constantes desconocidas que representan a la intercepción (el valor esperado de Y cuando $X = 0$) y la pendiente (el incremento medio de Y asociado a un aumento de una unidad en X) del modelo lineal, conocidos como los coeficientes o parámetros del modelo.

El objetivo de utilizar la regresión lineal simple para pronosticar resultados es obtener estimaciones de los coeficientes β_0 y β_1 de tal forma que el modelo lineal se ajuste lo mejor posible a los datos disponibles en el estudio.

3.2.2 Regresión Lineal Múltiple

La regresión lineal múltiple tiene por objetivo extender el modelo de regresión simple con el fin de acoplar directamente múltiples predictores en un modelo, y con esto identificar el efecto de cada variable en la predicción.

En términos generales, si se tienen p predictores diferentes, el modelo de regresión lineal múltiple sigue el siguiente esquema:

$$Y = \beta_0 + \beta_1 * X_1 + \beta_2 * X_2 + \ldots + \beta_p * X_p \qquad (15)$$

Donde X_p representa al p predictor y β_p cuantifica la relación entre esa variable y la respuesta, como el efecto medio en Y de un aumento en una unidad de X_p, manteniendo fijos los demás predictores.

3.3. Coeficientes relevantes de la regresión

3.3.1 Error estándar residual

El error estándar residual (RSE) es una estimación de la desviación estándar de ε. A grandes rasgos, es la cantidad media que la respuesta se desviará de la verdadera línea de regresión. Se calcula mediante la siguiente ecuación:

$$RSE = \sqrt{\frac{1}{n-2}\,RSS} = \sqrt{\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(y_i - \hat{y}_i)^2} \qquad (16)$$

El RSE es considerado una medida de la falta de ajuste del modelo hacia los datos. Si las predicciones logradas con el modelo se asemejan mucho a los valores reales del resultado, es decir, si $\hat{y}_i \approx y_i$ para i = 1, ..., n, entonces el RSE será mínimo, y se puede concluir que el modelo se ajusta bien a los datos. Por otro lado, si $\hat{y}_i$ está muy lejos de y_i para un grupo de observaciones, entonces el RSE puede ser bastante grande, lo que denota el mal ajuste del modelo.

3.3.2 R2

El estadístico R^2 entrega una medida de ajuste. Adquiere la forma de una proporción (la proporción de la varianza), por lo tanto, siempre toma un valor entre 0 y 1. Además, es independiente de la escala de Y, a diferencia del RSE.

Para calcular R^2, utilizamos la ecuación:

$$R^2 = \frac{TSS - RSS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS} \qquad (17)$$

Donde $TSS = \sum(y_i - \hat{y}_i)^2$ es la suma total de los cuadrados y RSS se define como la suma residual de cuadrados.

La TSS mide la varianza total de la respuesta Y, es considerado como la cantidad de variabilidad inherente a la respuesta antes de realizar la regresión. En contra parte, el RSS mide la cantidad de variabilidad que queda sin explicar después de realizar la regresión. Por lo que se puede afirmar que, $TSS - RSS$ mide la cantidad de variabilidad en la respuesta que se explica (o se elimina) al llevar a cabo la regresión, R^2 mide la proporción de la variabilidad de Y que puede explicarse utilizando X.

Un estadístico R^2 que se acerca a 1 indica que la regresión explica una gran proporción de la variabilidad de la respuesta. Un número cercano a 0 indica que la regresión no explica gran parte de la variabilidad de la respuesta; esto puede ocurrir porque el modelo lineal es erróneo, o la varianza del error σ^2 es alta, o ambas cosas.

3.3.3 Estadístico T

Es una variable estadística que se calcula con el objetivo de aceptar o rechazar la hipótesis nula. Para probar la hipótesis nula, hay que determinar si $\widehat{\beta_1}$, la estimación de β_1, está lo suficientemente lejos de cero como para poder estar seguros de que β1 es distinto de cero. El error típico ($SE(\widehat{\beta_1})$) es el que va a dictaminar que distancia es la que se considera como lejos o cercano.

Si el error típico de $\widehat{\beta_1}$ es pequeño, entonces los valores que caigan dentro de ese intervalo pueden proporcionar una certeza de que $\beta_1 \neq 0$, y por tanto de que existe una relación entre X e Y. Por el contrario, si es grande, entonces el valor absoluto de $\widehat{\beta_1}$ debe ser muy grande para poder rechazar la hipótesis nula. El estadístico t esta dado por:

$$t = \frac{\widehat{\beta_1} - 0}{\mathrm{SE}(\widehat{\beta_1})} \qquad (18)$$

Que mide el número de desviaciones estándar que $\widehat{\beta_1}$ se aleja de 0.
Esto hace que calcular la probabilidad de observar cualquier número igual o mayor a |t| o mayor en valor absoluto sea fácil, suponiendo que β1 = 0.

Esta probabilidad lleva por nombre el "valor p". En términos generales el valor de p toma las siguientes interpretaciones: si vemos un valor p pequeño, se puede inferir que existe una asociación entre el predictor y la respuesta. En consecuencia, se rechaza la hipótesis nula, es decir, se declara que existe una relación entre X e Y, si el valor p es lo suficientemente pequeño.

3.3.4 Estadístico F

El estadístico F es otro camino en pro de realizar una prueba de hipótesis para determinar si existe una relación entre la respuesta y el predictor. En la regresión múltiple con p predictores, se debe responder a la pregunta si todos los coeficientes de la regresión son cero, es decir si $\beta_1 = \beta_2 = \ldots = \beta_p = 0$.

Para demostrar lo expuesto anteriormente, se calcula el estadístico F según la siguiente ecuación:

$$F = \frac{(TSS - RSS)/P}{RSS/(n - p - 1)} \qquad (19)$$

Cuando no existe relación entre la respuesta y los predictores se esperaría que el estadístico F tome un valor cercano a 1. Por el contrario, si existe relación, se espera que F tome un valor que sea superior a 1.

3.4. Series Temporales

Se define como serie temporal a una sucesión de observaciones de una variable tomada en varios instantes de tiempo, los cuales se ordenan de manera cronológica.
Estas pueden ser regulares o irregulares, las regulares hacen referencia cuando la distancia temporal entre dos datos consecutivos es constante. Por el contrario, cuando esta distancia de observación es variable, se habla de una serie temporal irregular.

El análisis de las series temporales se basa en la suposición de que los valores que va adquiriendo la variable de observación es la consecuencia de tres componentes, cuya combinación da como los resultados los valores medidos. Dichos componentes son el de tendencia, el componente estacional y el componente aleatorio.

Un punto clave para estudiar las series temporales es la estacionariedad.

3.4.1 Serie estacionaria

Una serie toma la clasificación de estacionaria cuando es estable a lo largo del tiempo, es decir, cuando la media y la varianza son constantes en el tiempo. Lo expuesto anteriormente se puede apreciar de manera gráfica cuando los valores de la serie tienden a oscilar alrededor de una media constante y variabilidad con respecto a esa media también permanece constante en el tiempo.

Para considerar a una serie temporal como estacionaria debe cumplir con las siguientes propiedades, la primera es que su esperanza matemática sea constante a lo largo del tiempo, sin importar que la serie se encuentre con algún tipo de rezago.

$$E(Y_t) = E(Y_{t-k}) \qquad (20)$$

Como segunda propiedad debe cumplir que su varianza sea constante a lo largo de toda la serie. Y como última propiedad se tiene que la covarianza entre dos valores diferentes será la misma, siempre y cuando estén separadas en k periodos.

$$Cov\left(Y_t, Y_{t-k}\right) = Cov(Y_{t-i}, Y_{t-i-k}) \qquad (21)$$

Se puede presentar estacionariedad en media lo cual ocurre cuando la serie fluctúa alrededor de un valor fijo, el cual será su media y los intervalos en los cuales fluctúa será la varianza.

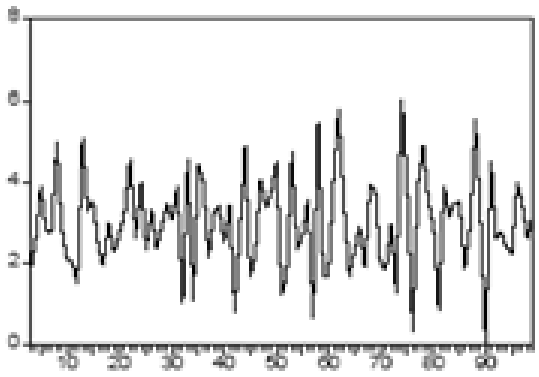


Ilustración 5:Representación gráfica de serie estacionaria en media (Estadística y Machine Learning con R, Parra 2019)

Una serie puede ser estacionaria en tendencia si su incremento o decremento se produce alrededor de una línea de tendencia.

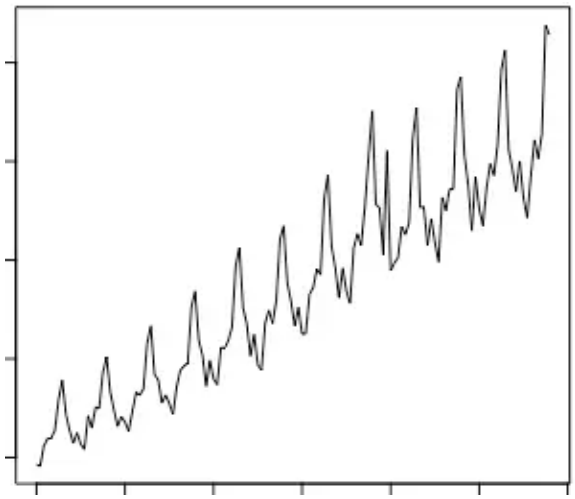


Ilustración 6:Representación gráfica de serie estacionaria en tendencia (Análisis de series temporales en R, Campos 2018)

3.4.2 Serie no estacionaria

Son series en las cuales la tendencia y/o variabilidad cambian en el tiempo. Los cambios en la media determinan una tendencia a crecer o decrecer a largo plazo, por lo que la serie no oscila alrededor de un valor constante.

Entonces el valor actual de una serie va a estar determinado por el valor anterior más un error asociado, por lo que los cambios en los valores están determinados por el error o "shocks".

$$Y_t = Y_0 + \sum \varepsilon_t \qquad (22)$$

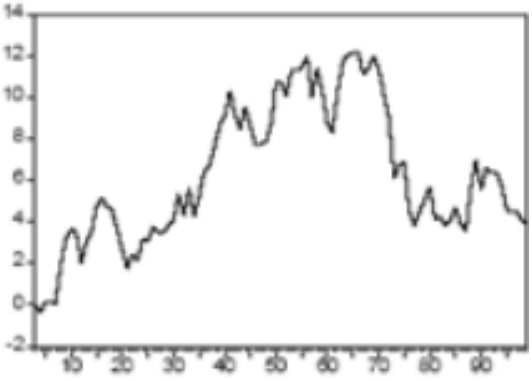


Ilustración 7:Representación gráfica de serie no estacionaria (Estadística y Machine Learning con R, Parra 2019)

3.5. Pruebas de estacionariedad

3.5.1 Correlograma

Es una forma gráfica que representa la correlación serial en datos que cambia con el tiempo, es decir que sean parte de una serie temporal. La correlación en serie es donde un error en un punto en el tiempo viaja a un punto posterior dentro de su misma serie temporal.

Es una herramienta bastante útil para tener una noción al momento de determinar si los pares de datos muestran o no una autocorrelación, así como también, es una forma directa de tener una idea sobre el tipo de serie temporal presente.

Esto es porque una característica de las series no estacionarias en que las autocorrelaciones de las realizaciones comienzan con un valor muy alto (cercano a 1.0) y disminuyen lentamente para grandes rezagos. En cambio, para series estacionarias se espera que la caída de las correlaciones sea muy fuerte y de manera gradual.

La función de autocorrelación (ACF) calcula la fuerza de la correlación entre sucesos de un fenómeno en un determinado intervalo de tiempo, mostrando asi la agrupación entre valores de la misma variable en diferentes intervalos de tiempo.

$$\rho_k = \frac{y_k}{y_0} \qquad (23)$$

Donde ρ_k es la función de autocorrelación, y_k la covarianza al rezago k y y_0 la varianza.

La función de autocorrelación parcial (PACF) calcula el grado de correlación entre dos variables que se dividen en n periodos, en el momento que se neutraliza la dependencia lineal que se crea por los retrasos intermedios entre ambas.

$$r_k = \frac{\sum_{t=1}^{n-k}(y_t - \bar{y})(y_{t+k} - \bar{y})}{\sum_{t=1}^{n}(y_t - \bar{y})^2} \qquad (24)$$

Donde $\bar{y}$ corresponde a la media muestral, n es el tamaño de la muestra y r_k es el estimador de ρ_k.

La forma que pueda tomar el gráfico de la autocorrelación va a depender del modelo que corresponda la serie temporal, en la ilustración 8 se muestra las curvas típicas de las funciones de autocorrelación para diferentes modelos de series de tiempo.

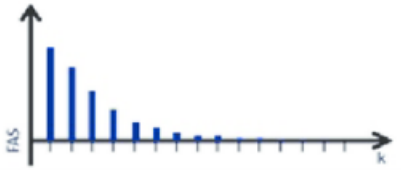
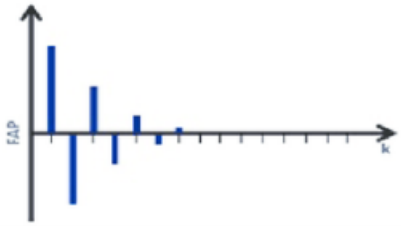
MODELO	Función de autocorrelación simple (FAS)	Función de autocorrelación parcial (FAP)
Autorregresivo (AR)		
De media móvil (MA)		

Ilustración 8:Curvas típicas de autocorrelación para diferentes modelos de serie de tiempo (Schwarz, 1978)

Un modelo autorregresivo (AR) está construido únicamente sobre un retardo. La metodología del modelamiento univariante busca aclarar el valor que se designa en un momento t, una variable que presenta dependencia temporal, uno de los métodos de trabajar es recopilar información sobre el pasado de la variable, observar la trayectoria de la serie en el tiempo y analizar el patrón que muestran los datos.

Se expresa de la siguiente manera:

$$(y_t - \delta) = a_1(y_{t-1} - \delta) + a_2(y_{t-2} - \delta) + \cdots + a_p(y_{t-p} - \delta) + u_t \qquad (25)$$

Donde δ es la media, u_t es el error aleatorio y a_p es el parámetro que define el modelo.

El modelo de media móvil (MA) es una agrupación lineal de términos de errores presentes y rezagados, y viene representada por la siguiente ecuación:

$$y_t = \mu + \beta_0 u_t + \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \cdots + \beta_q u_{t-q} \qquad (26)$$

3.5.2 Raíces unitarias: Dickey-Fuller Aumentado (ADF)

El concepto de raíz unitaria fue desarrollado por Dickey & Fuller (1979, 1981), en donde subyacente a este se encuentra la existencia de una fuerte relación entre la realización de una serie en el momento t y la realización de esta misma serie en el momento t-1. Esto es medido a través de la siguiente regresión:

$$Y_t = \beta Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (27)$$

Donde ε es un error bien comportado. Si β es igual a 1.0, se puede decir que la serie es no estacionaria, y además se dice que tiene una raíz unitaria. Una serie con esta característica es llamada de caminata aleatoria o "Random-Walk".

Un proceso puramente aleatorio sin variaciones es el que tiene media igual a 0, una varianza constante y no esta serialmente correlacionada. En otras palabras, si el termino ε del modelo de regresión lineal es "ruido blanco", se dice que la regresión no adolece de autocorrelación y esta correctamente estimada.

Sin embargo, este tipo de prueba presenta un sesgo y mostraron los valores correctos en caso de correr la regresión con un intercepto. Los cuales son:

- Al 90% de confianza el coeficiente β estimado es menor que 2.58 errores estándar de la unidad.
- Al 95% de confianza el coeficiente β estimado es menor que 2.89 errores estándar de la unidad.
- Al 99% de confianza el coeficiente β estimado es menor que 3.51 errores estándar de la unidad.

Lo que se puede simplificar si en la fórmula (27) se resta el término Y_{t-1}, expresando el modelo de la siguiente manera:

$$\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (28)$$

De acá se desprenden dos hipótesis:

Ho: Hipótesis nula, donde ρ=0, se dice que existe una raíz unitaria para la serie.

Ha: Hipótesis alternativa, donde ρ<0, se dice que no existe raíz unitaria y por lo tanto la serie es estacionaria.

Posterior a esto Dickey & Fuller introducen un par de cambios a la prueba. En primer lugar, incorporan un modelo con intercepto, esto con el objetivo de que la regresión no este obligada a pasar por el origen y que debido a esto no se cumplan los mínimos cuadrados ordinarios. Obteniendo la siguiente expresión:

$$\Delta Y_t = \beta_1 + \rho Y_{t-1} + \varepsilon_t \qquad (29)$$

En segunda instancia se agrega la tendencia al modelo. Lo cual permite apreciar la evolución a largo plazo de la serie de tiempo que se está considerando. Si esta es predecible y no variable, se llama tendencia determinista, por el contrario, recibe el nombre de tendencia estocástica.

Gracias a esto es que se proponen una serie de regresiones más generales para verificar la existencia de raíces unitarias, las que son conocidas como pruebas de Dickey & Fuller Aumentadas (ADF).

Modelo Básico: $\Delta Y_t = \rho Y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \beta_i \Delta Y_{t-i+1} + \varepsilon_t$ (30)

Modelo Intercepto: $\Delta Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \sum_{i=2}^{p} \beta_i \Delta Y_{t-i+1} + \varepsilon_t$ (31)

Modelo Tendencia: $\Delta Y_t = \alpha + \rho Y_{t-1} + \delta t + \sum_{i=2}^{p} \beta_i \Delta Y_{t-i+1} + \varepsilon_t$ (32)

En estas pruebas deben agregarse rezagos hasta que el error ε sea ruido blanco, procedimiento que se determina empíricamente y le da validez a la prueba.

A la hora de interpretar los resultados obtenidos de la regresión, es importante fijarse en el valor que toma el t estadístico. Si el valor absoluto de este es menor a los valores críticos de t, se dice que no se puede rechazar la hipótesis nula Ho.

De lo contrario, si el valor absoluto del t estadístico es mayor a los valores críticos de t, se rechaza la hipótesis nula Ho y se acepta la hipótesis alternativa Ha, confirmando que la serie es estacionaria.

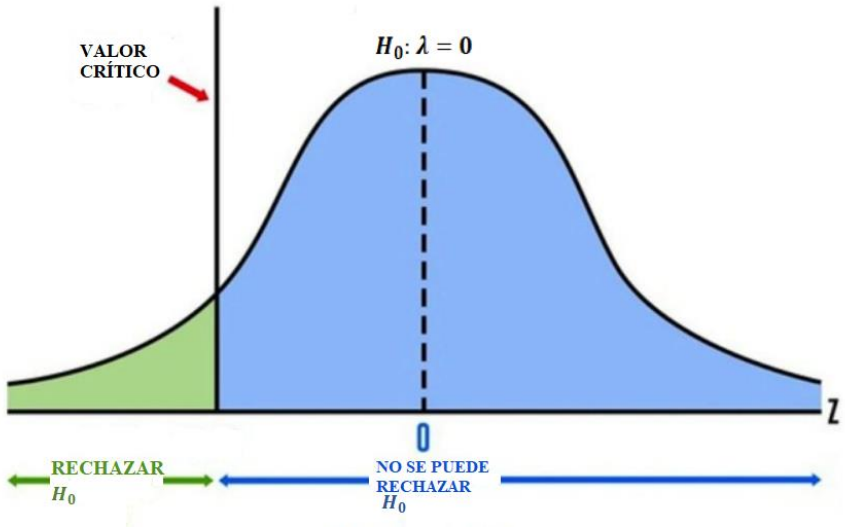


Ilustración 9:Distribución del t estadístico en la prueba Dickey-Fuller

Los valores críticos usuales son los que se hacen al 1%, 5% y 10% de confianza, los cuales a su vez van a depender del tamaño de la muestra. Estos valores pueden obtenerse de Fuller (1976), y se presentan a continuación.

Tabla 2:Valores críticos pruebas Dickey-Fuller. Basado en la estimación OLS estadístico t

	Tamaño de la muestra	**Valores críticos del t estadístico según el nivel de confianza de la prueba**							
		0.01	0.025	0.05	0.1	0.90	0.95	0.975	0.99
Modelo Básico	25	-2.66	-2.26	-1.95	-1.60	0.92	1.33	1.70	2.16
	50	-2.62	-2.25	-1.95	-1.61	0.91	1.31	1.66	2.08
	100	-2.60	-2.24	-1.95	-1.61	0.90	1.29	1.64	2.03
	250	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.29	1.63	2.01
	500	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.28	1.62	2.00
	∞	-2.58	-2.23	-1.95	-1.62	0.89	1.28	1.62	2.00
Modelo Intercepto	25	-3.75	-3.33	-3.00	-2.63	-0.37	0.00	0.34	0.72
	50	-3.58	-3.22	-2.93	-2.60	-0.40	-0.03	0.29	0.66
	100	-3.51	-3.17	-2.89	-2.58	-0.42	-0.05	0.26	0.63
	250	-3.46	-3.14	-2.88	-2.57	-0.42	-0.06	0.24	0.62
	500	-3.44	-3.13	-2.87	-2.57	-0.43	-0.07	0.24	0.61
	∞	-3.43	-3.12	-2.86	-2.57	-0.44	-0.07	0.23	0.60
Modelo Tendencia	25	-4.38	-3.95	-3.60	-3.24	-1.14	-0.80	-0.50	-0.15
	50	-4.15	-3.80	-3.50	-3.18	-1.19	-0.87	-0.58	-0.15
	100	-4.04	-3.73	-3.45	-3.15	-1.22	-0.90	-0.62	-0.28
	250	-3.99	-3.69	-3.43	-3.13	-1.23	-0.92	-0.64	-0.31
	500	-3.98	-3.68	-3.42	-3.13	-1.24	-0.93	-0.65	-0.32
	∞	-3.96	-3.66	-3.41	-3.12	-1.25	-0.94	-0.66	-0.33

4. METODOLOGÍA

Se realizó una recopilación de datos anuales entre los años 1950-2015 de las variables que rodean al mercado del cobre tales como el consumo de cobre, producción de cobre, precio del metal, PIB mundial y población global. Los datos necesarios para el estudio fueron obtenidos del Maddison Project Database (**PIB**), Unicef (**Población**), USGS (United States Geological Survey) (**Consumo y producción anual de cobre**) y LME (London Metal Exchange) (**Precio del cobre**).

El foco de este estudio es analizar a las reservas mundiales de cobre. Para ello es necesario realizar una serie de pruebas a las variables seleccionadas, con esto se busca dar paso a la generación de un modelo econométrico que tenga la capacidad de predecir el comportamiento de las reservas remanentes de cobre.

A continuación, se presentará un paso a paso de lo que se realizó:

1. Recolección de datos para el estudio.
2. Contraste de metodologías aplicadas para identificar los años restantes de las reservas históricas de cobre 1950-2015.
3. Presentación de las series temporales.
4. Verificación de la correlación existe entre las variables seleccionadas con el propósito de simplificar el análisis.
5. Construcción de regresión lineal múltiple con las variables seleccionadas en el procedimiento anterior.
6. Se le realiza un correlograma a cada variable.
7. Pruebas de estacionariedad del tipo Dickey-Fuller aumentado (ADF).
8. Interpretación de los resultados arrojados en la prueba de estacionariedad.

5. RESULTADOS Y ANÁLISIS

5.1. Reservas de Cobre

A lo largo de las últimas décadas ha surgido la inquietud acerca de los años de disponibilidad futura de las reservas mundiales de cobre. Bajo dicha premisa es que aparecieron distintas fórmulas para predecir la cantidad de años restantes que le quedaban a las reservas reportadas.

A continuación, se muestra la comparativa de dos de estas aproximaciones, la primera de ella es una modificación de la formula postulada por Klass (1998) hecha por Shafiie en su publicación del año 2009, en donde las variables principales a utilizar son el consumo y las reservas reportadas. Al realizar un despeje a la ecuación 3, se obtiene:

$$n = \frac{Ln[(\frac{R}{FC_1})(e^g - 1) + 1]}{g} \qquad (A')$$

Donde n, es la cantidad de años de disponibilidad de las reservas. R representa a las reservas reportadas en dicho año. FC_1 corresponde al consumo en el año a evaluar y g es el porcentaje de crecimiento anual que reportan las reservas.

La segunda, es una aproximación simple que tiene en consideración solo a las reservas y producción como variables, en esta metodología no se tiene en consideración el crecimiento exponencial de las reservas ni de la producción. Tampoco se ven reflejados los impactos que tiene el precio en dichas variables, es un método que se ajusta a una economía estancada.

$$Tiempo\ de\ agotamiento = \frac{(Reserva\ estimada)}{(Producción\ actual)} \qquad (B')$$

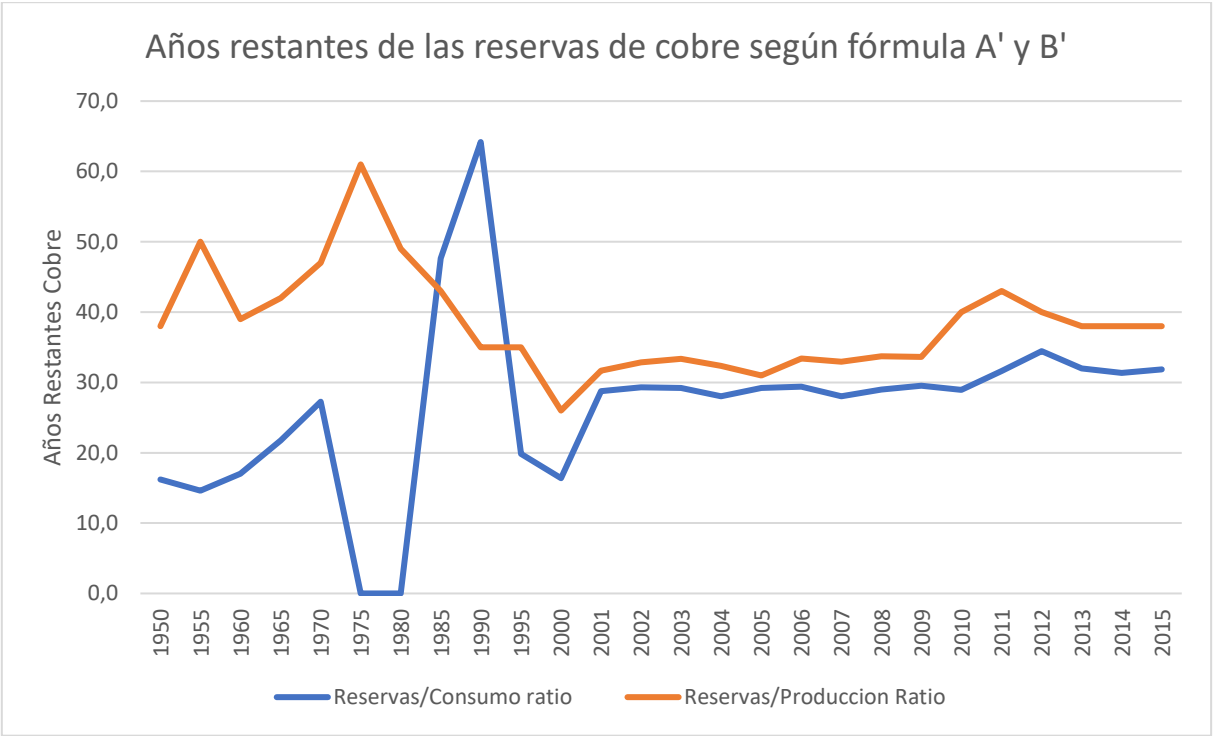


Ilustración 10:Comparativa años restantes de las reservas según su consumo y producción anual

Como se puede apreciar este dato de los años restantes que quedan de las reservas de cobre, no entrega más información acerca de los años reales que quedan hasta su agotamiento, ya que, es un valor que oscila en un promedio de 27 años para la fórmula A' y 41 años para B'. Esto se explica debido a que los reportes de las reservas se van actualizando año a año, y el cálculo para obtener la información está hecha en base a un stock fijo, esto produce dicha fluctuación.

Se aprecia que en los años 1975 y 1980 no se presenta ningún valor para los años restantes que les quedan a las reservas, esto se debe a que en dichos años se produjo un decrecimiento en el consumo anual de cobre. Cuando se produce un decremento mayor a un 3% en el consumo anual de cobre, la fórmula ocupada se indefine dado que el dominio de la función logaritmo no comprende los números menores a cero.

Gracias a los avances tecnológicos que se han producido en el presente siglo, es que se ha ido mejorando en la exactitud de las reservas reportadas, así como también en los datos de la producción minera mundial y el consumo mundial del mineral de cobre. Queda en evidencia lo anteriormente expuesto cuando se hace un análisis en los años restantes a las reservas posteriores al año 2000, se ve un comportamiento más regular.

5.2. Variables seleccionadas para el estudio

En esta sección se analiza las variables seleccionadas para analizar a las reservas de cobre. Para llevarlo a cabo es que se procede a relacionar las variables que pueden llegar a afectar a las reservas.

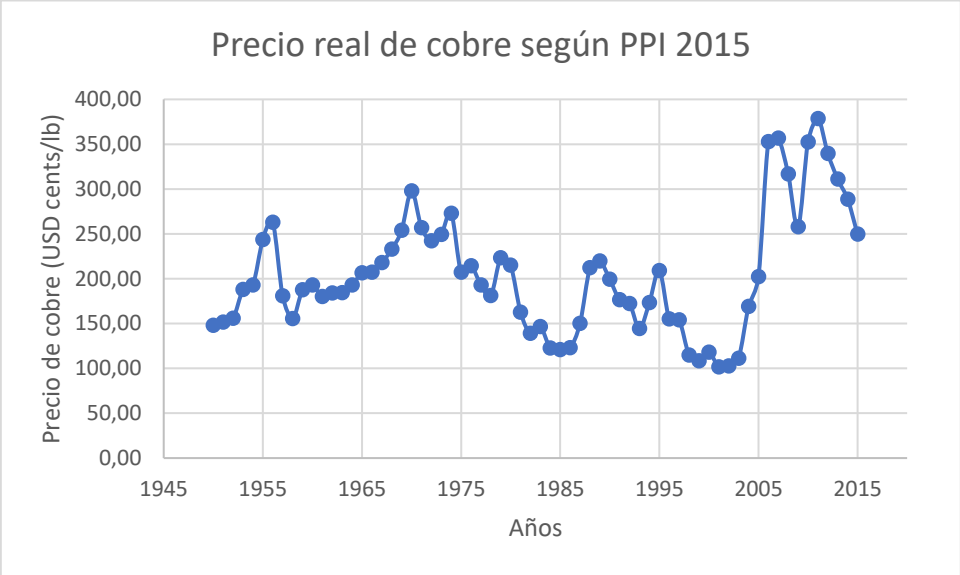


Ilustración 11:Precio Cobre Según PPI 2015

El precio presenta un comportamiento irregular a lo largo del tiempo, no tiene una tendencia clara conforme van pasando los años. Esto se debe a que su valor está condicionado por la oferta y la demanda, valores que van cambiando constantemente.

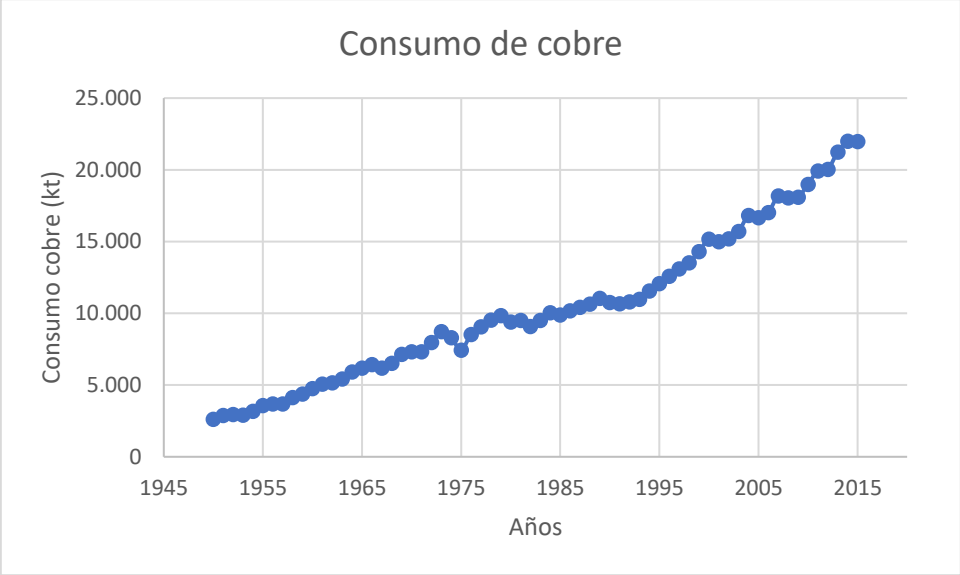


Ilustración 12:Consumo mundial de cobre

El consumo del cobre presenta un crecimiento constante a lo largo de los años, con una tendencia siempre positiva. Esta alza constante deja en manifiesto lo trascendental que se ha vuelto el mineral de cobre, teniendo suma importancia en áreas de construcción, transporte, medicina, entre otros.

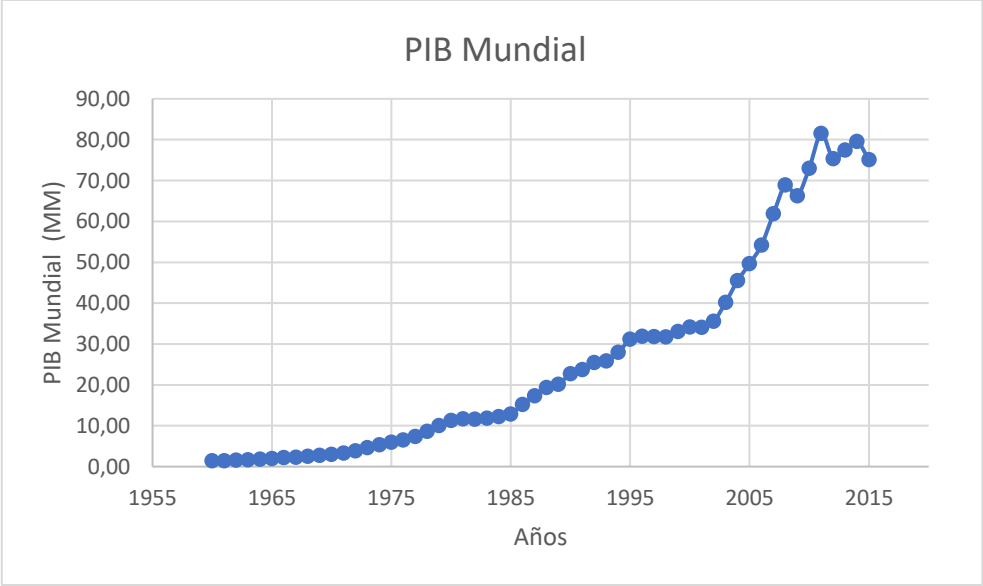


Ilustración 13:PIB Mundial

El PIB Mundial presenta un crecimiento a lo largo de los años, este incremento si bien ha sido sostenido, no tiene un comportamiento regular. Se puede apreciar un periodo de crecimiento lento (1960-1985), un aumento sostenido (1985-2000) y un aumento exponencial (2000-2015).

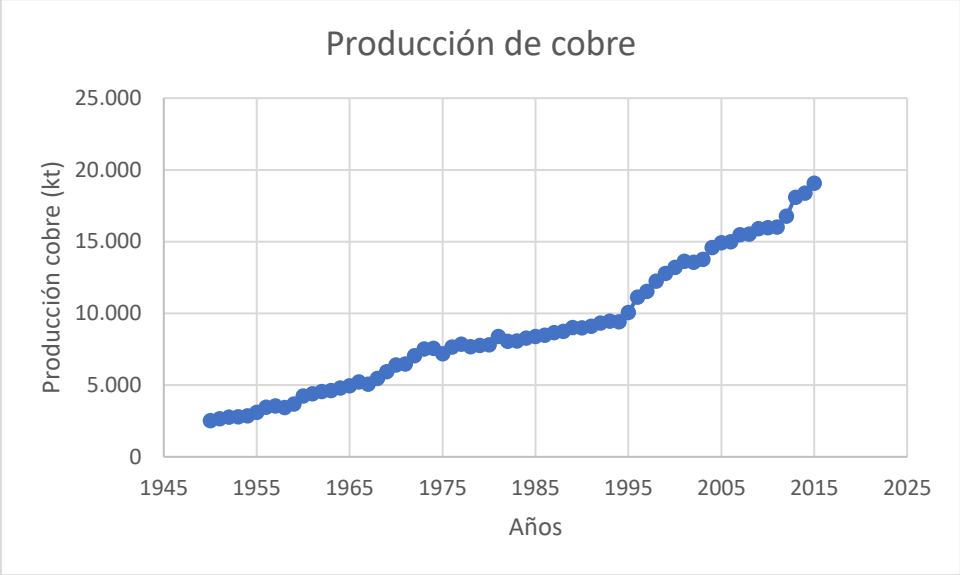


Ilustración 14:Producción mundial de cobre

La producción de cobre ha tenido un crecimiento sostenido y de forma regular a lo largo de los años, teniendo una tendencia siempre positiva. Este incremento se debe a la demanda siempre creciente del mineral de cobre.

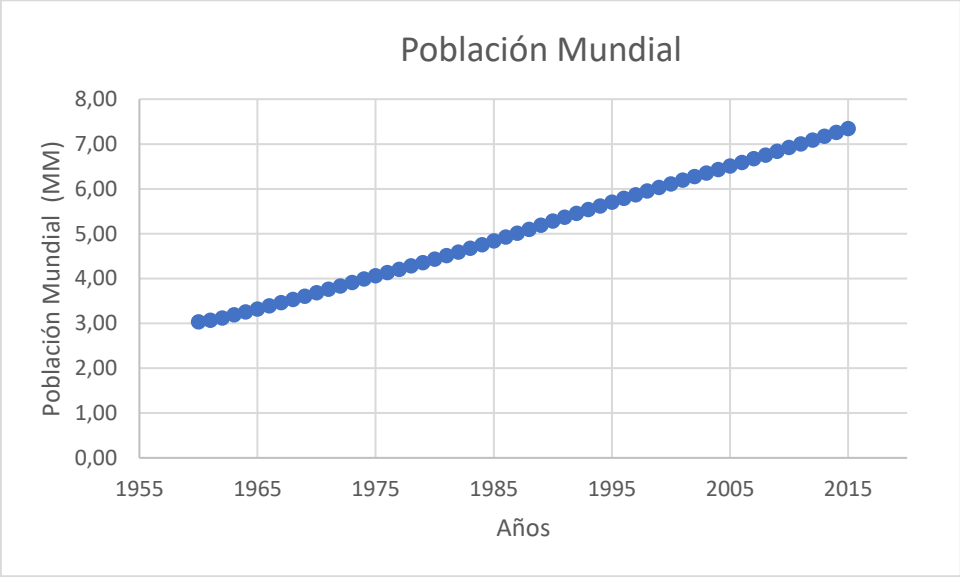


Ilustración 15:Población Mundial

La población mundial presenta un aumento bastante regular a lo largo del tiempo, este crecimiento demográfico ha causado directo impacto sobre las otras variables analizadas.

Muchas de estas variables presentan una relación directa entre sí y otras con menor intensidad, es por esta razón que se hace una correlación entre llevas. Con este procedimiento se simplifica la cantidad de cálculos y además el análisis. Si dos variables tienen una relación muy alta quiere decir que su comportamiento es similar y se verán afectados de la misma manera cuando son sometidos a los mismos agentes externos. Por lo que al incorporar solo una de ellas, las conclusiones servirán para la otra variable.

5.2.1 Correlación de variables y propuesta de modelo simple

Tabla 3: Coeficiente de correlación de las distintas variables

	Precio	**Producción**	**Consumo**	**PIB Mundial**	**Población Mundial**
Precio	1,00	0,106	0,123	0,213	0,048
Producción	0,106	1,00	0,991	0,931	0,947
Consumo	0,123	0,991	1,00	0,951	0,946
PIB Mundial	0,213	0,931	0,951	1,00	0,884
Población Mundial	0,048	0,947	0,946	0,884	1,00

El precio, como se puede apreciar en la Tabla 3 presenta valores de correlación bajos (inferiores a 0.8), por lo que se puede afirmar que no tiene una relación tan directa con las demás variables, debido a esto es que se selecciona para los cálculos posteriores.

La correlación existente entre el consumo y la producción es muy alta, dando un R^2 de 0,991. Esto se puede explicar porque un aumento constante en el consumo del mineral va a producir un aumento en la demanda de este y por consecuencia la producción lo hará también. Para los cálculos posteriores se elige al consumo, basándose en el estudio de Shafiee en donde en su foco lo centra en el consumo de combustibles fósiles es que esa es la variable seleccionada entre ambas, para poder replicar y comparar este estudio directamente con las reservas de cobre.

Por último, se tienen las variables que dan cuenta de factores económicos y demográficos. Al ver el coeficiente de correlación se tiene un 0,884 el cual habla de una relación alta y afirma que es correcto hacer cálculos con solo una de ellas. Como el PIB engloba variables económicas y de en algún modo tiene en cuenta la cantidad de personas en una determinada región, es que se elige para seguir con el estudio.

Se selecciona finalmente al precio, consumo y PIB como las variables a utilizar, esto con el propósito de determinar si mediante ellas se logra obtener un modelo predictivo de las reservas de cobre. Es por lo que se procede a realizar una regresión lineal múltiple, la cual tiene la siguiente forma:

$$Res = \beta_0 + \beta_1 * P + \beta_2 * C + \beta_3 * PIB \qquad (R1)$$

5.3. Modelo simple de las reservas de cobre

Con el fin de modelar el comportamiento de las reservas de cobre, se divide la información en dos partes, un periodo de ajuste, el cual comprende el 80% de los datos con el propósito de representar el comportamiento general de las variables, y un segundo periodo parte que contiene el 20% de los datos, con esto se busca realizar proyecciones con el objetivo de observar si la tendencia se ajusta a lo que realmente está ocurriendo.

El periodo de entrenamiento o ajuste comprende valores de un periodo igual a 45 años (1960-2004). El periodo de prueba o proyección cuenta con un periodo de 11 años (2005-2015).

Las reservas se estimaron a partir de la técnica de regresión lineal múltiple ocupando las variables de precio, consumo y PIB, siguen la misma tendencia que los datos de las reservas históricas, obteniendo una ecuación del siguiente estilo:

Tabla 4: Resultados relevantes de la regresión

	β_0	**β_1/ Precio**	**β_2/ Consumo**	**β_3/PIB mundial**	**R^2**	**Adj r^2**	**F est**
R1(P,C,PIB)	65.08 (17.91)	0.07 (0.05)	0.02 (0.002)	-0.54 (0.53)	0.97	0.96	452.62

Con los ponderadores obtenidos se realizó una proyección para el periodo de tiempo 2005-2015. Obteniendo un indicador MAPE de 7.50, obteniendo un pronóstico de alta precisión. Se debe mencionar que, si bien es un indicador sumamente bueno, el periodo de proyección es corto, por

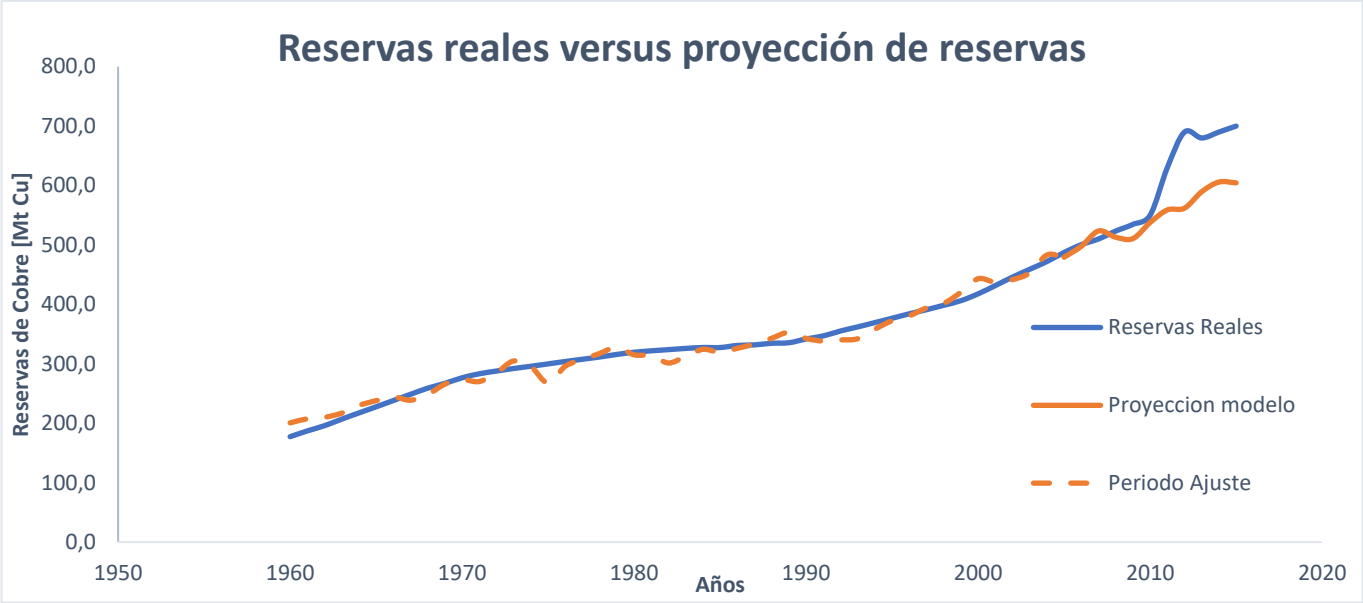


Ilustración 16: Reservas reales versus proyección reservas

lo que el modelo puede que no tenga la misma fiabilidad al intentar modelar una mayor cantidad de años.

Para corroborar si realmente se realizó este procedimiento de forma correcta, más allá de la apreciación visual y del indicador MAPE, es que se pone énfasis en las estadísticas entregadas.

Aunque los resultados arrojados tienen una buena base estadística, no se puede afirmar que es un buen modelo para poder predecir a las reservas de cobre. Es por esta razón que es necesario realizar pruebas de estacionariedad a las variables que se incorporaron en el estudio.

5.4. Pruebas de Estacionariedad

5.4.1 Correlogramas

Para llevarlas a cabo de una manera correcta y que los resultados arrojados sean representativos, se hace necesario conocer el tipo de serie temporal. Para cumplir con este item se realiza un correlograma, en donde la forma que van adoptando va a dar una aproximación de la serie temporal.

PRECIO

Para el análisis del precio del cobre, se estableció un periodo de estudio entre los años 1950 y 2015. A continuación, se presenta el correlograma obtenido y su correspondiente autocorrelación parcial:

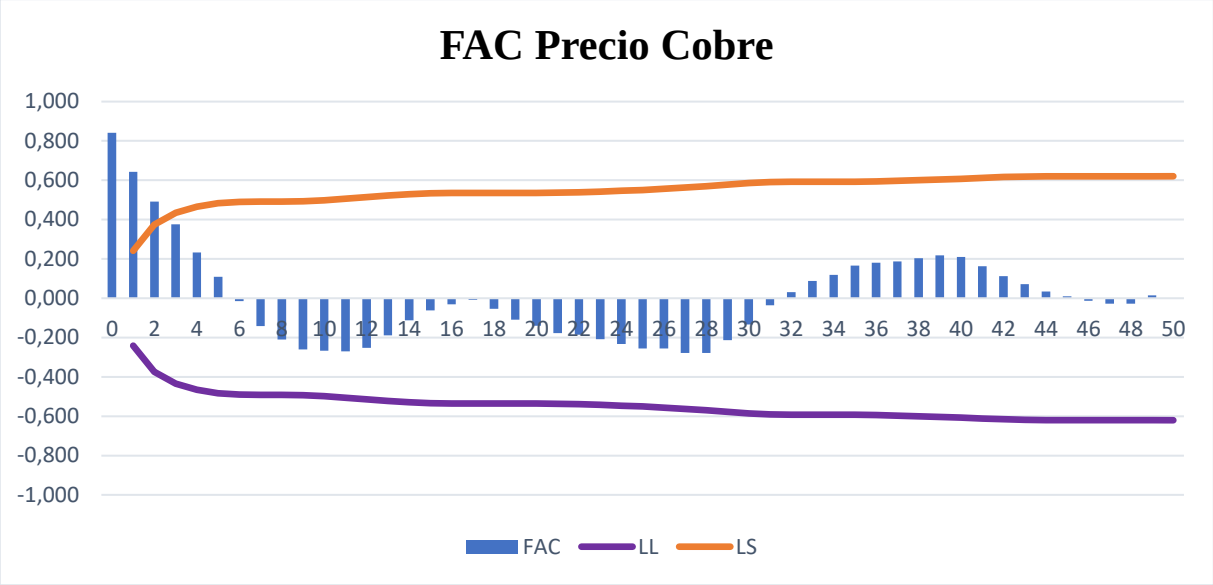


Ilustración 17: Correlograma Precio Cobre

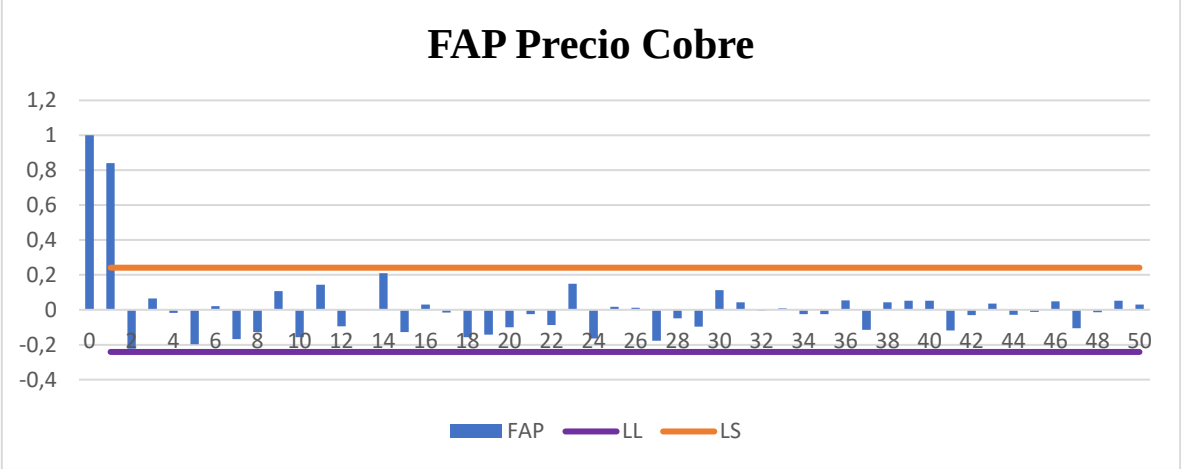


Ilustración 18: Autocorrelación parcial Precio cobre

La ilustración 17 muestra el comportamiento del correlograma del precio, y el gráfico 18 su autocorrelación parcial. Con lo expuesto anteriormente se puede afirmar que este set de datos corresponde a un modelo auto regresivo de segundo orden, en donde los errores de los dos periodos anteriores llegan a tener cierta influencia en los valores actuales. Lo anterior se sustenta al verificar que solo los primeros valores son significativos, es decir se encuentran por sobre el LS, tanto en el correlograma como en la autocorrelación parcial.

Este tipo de comportamiento es usual en series en los cuales sus valores fluctúan por algún valor medio, y son propensos a tener estacionariedad.

CONSUMO

Para el análisis del consumo del cobre, se estableció un periodo de estudio entre los años 1950 y 2015. A continuación, se presenta el correlograma obtenido y su correspondiente autocorrelación parcial:

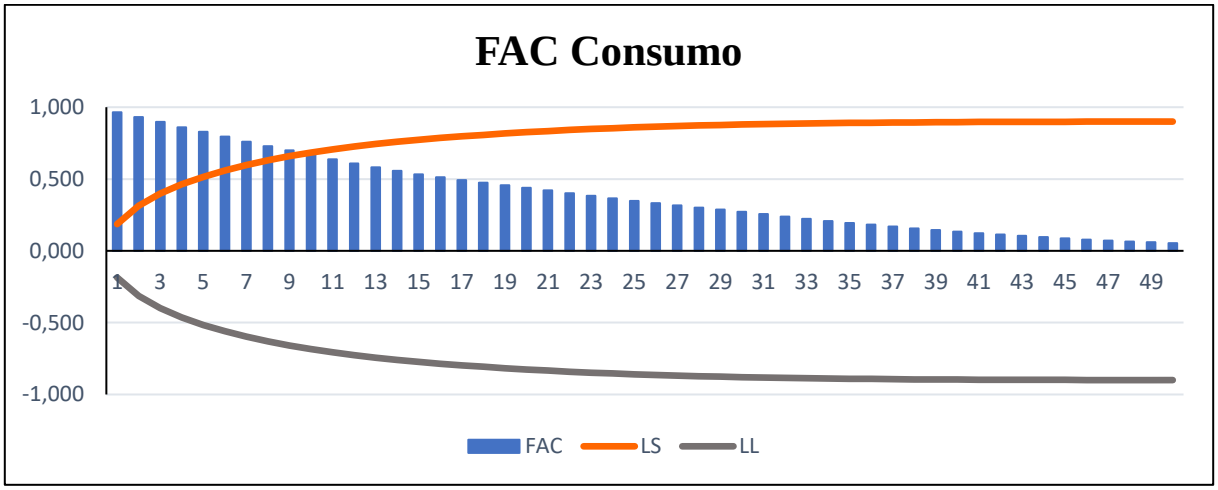


Ilustración 19: Correlograma Consumo

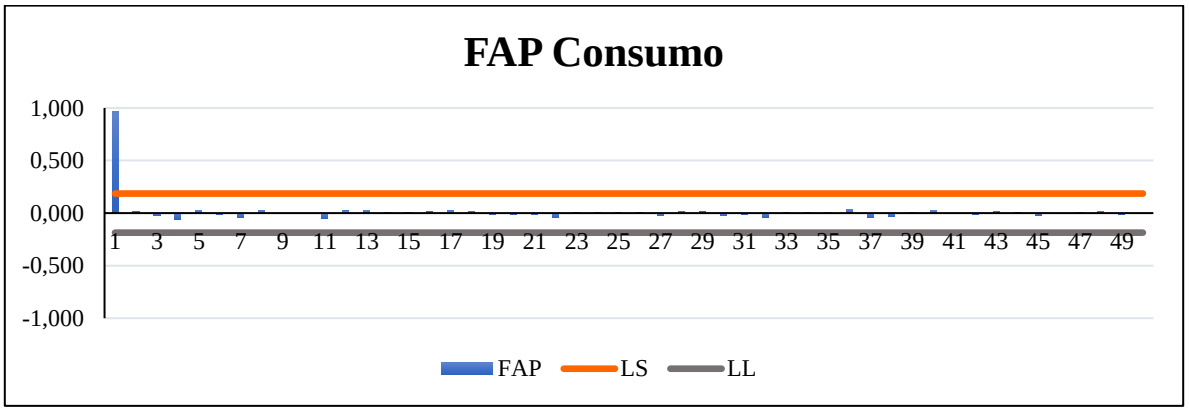


Ilustración 20: Autocorrelación parcial Consumo Cobre

La ilustración 19 muestra el comportamiento del correlograma del consumo del cobre, y el gráfico 20 su autocorrelación parcial. Con los expuesto anteriormente se puede afirmar que el set de datos corresponde a una serie de tiempo con tendencia, esto se sustenta en la forma en que las autocorrelaciones decaen lenta y constantemente, además solo tiene un valor significativo en el gráfico de la autocorrelación parcial.

Este tipo de conducta es usual en series de tiempo que no presentan estacionariedad.

PIB MUNDIAL

Para el análisis del consumo del cobre, se estableció un periodo de estudio entre los años 1960 y 2015. A continuación, se presenta el correlograma obtenido y su correspondiente autocorrelación parcial:

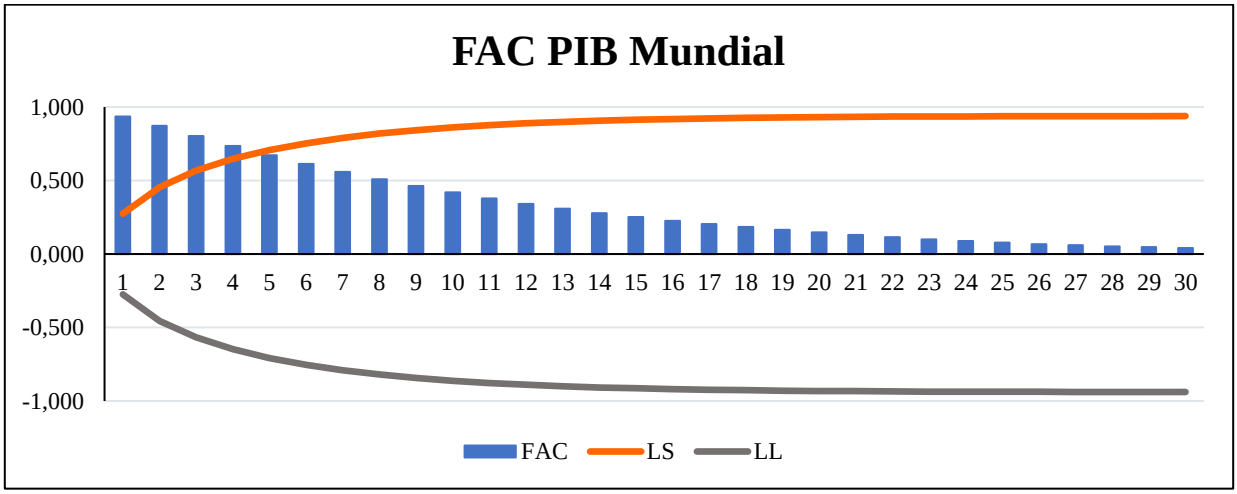


Ilustración 21: Correlograma PIB Mundial

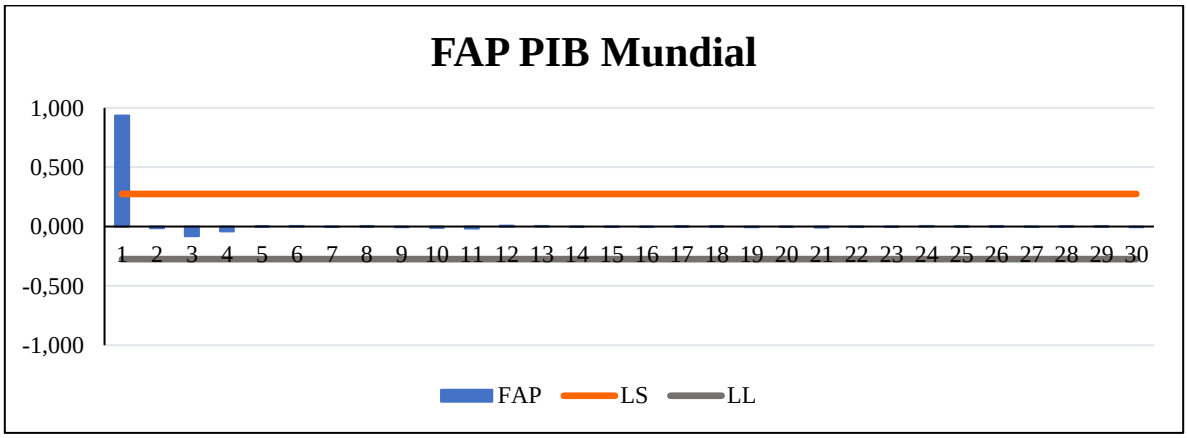


Ilustración 22: Autocorrelación parcial PIB Mundial

La ilustración 21 muestra el comportamiento del correlograma del PIB mundial, y el gráfico 22 su autocorrelación parcial. Con los expuesto anteriormente se puede afirmar que el set de datos corresponde a una serie de tiempo con tendencia, esto se sustenta en la forma en que las autocorrelaciones decaen lenta y constantemente, además solo tiene un valor significativo en el gráfico de la autocorrelación parcial.

Este tipo de conducta es usual en series de tiempo que no presentan estacionariedad.

PRODUCCIÓN

Para el análisis del consumo del cobre, se estableció un periodo de estudio entre los años 1950 y 2015. A continuación, se presenta el correlograma obtenido y su correspondiente autocorrelación parcial:

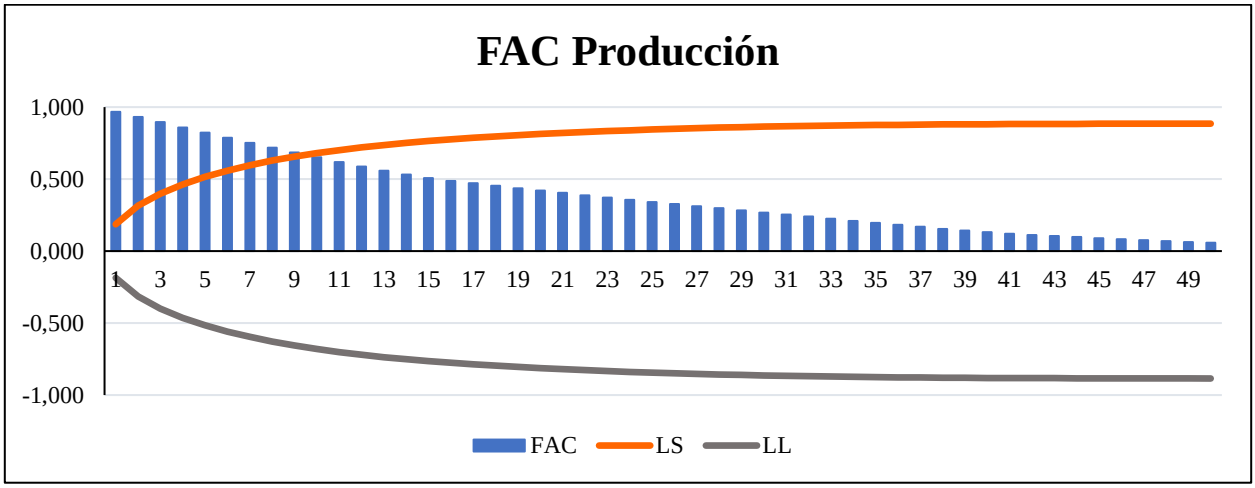


Ilustración 23: Correlograma Producción mundial cobre

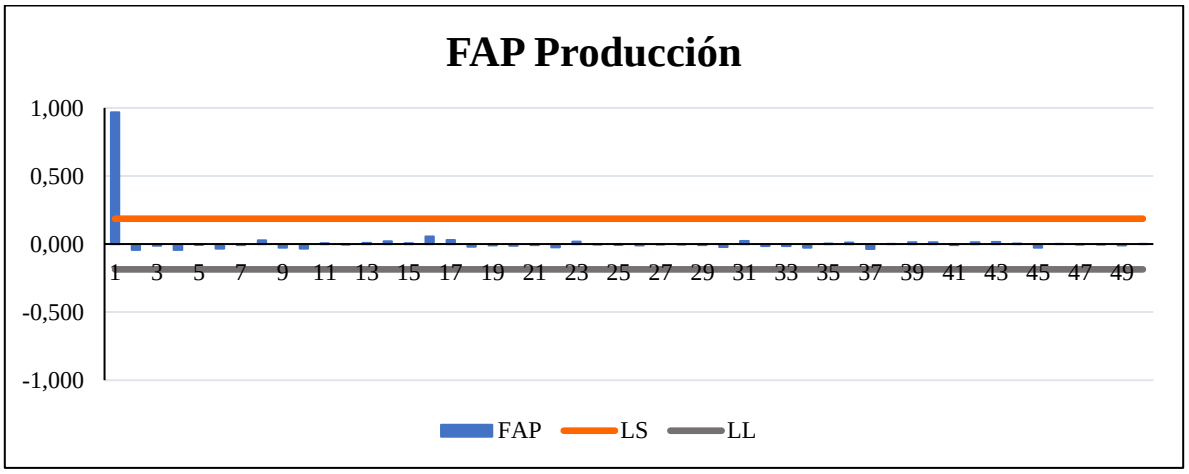


Ilustración 24: Autocorrelación parcial Producción

La ilustración 23 muestra el comportamiento del correlograma del PIB mundial, y el gráfico 24 su autocorrelación parcial. Con los expuesto anteriormente se puede afirmar que el set de datos corresponde a una serie de tiempo con tendencia, esto se sustenta en la forma en que las autocorrelaciones decaen lenta y constantemente, además solo tiene un valor significativo en el gráfico de la autocorrelación parcial.

Este tipo de conducta es usual en series de tiempo que no presentan estacionariedad.

Para el análisis del consumo del cobre, se estableció un periodo de estudio entre los años 1960 y 2015. A continuación, se presenta el correlograma obtenido y su correspondiente autocorrelación parcial:

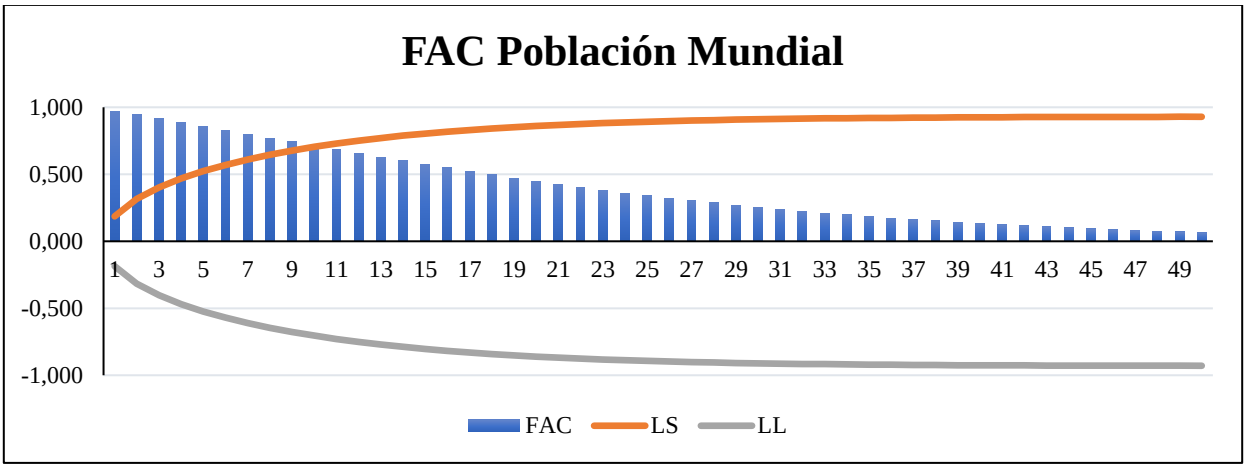


Ilustración 25: Correlograma Población Mundial

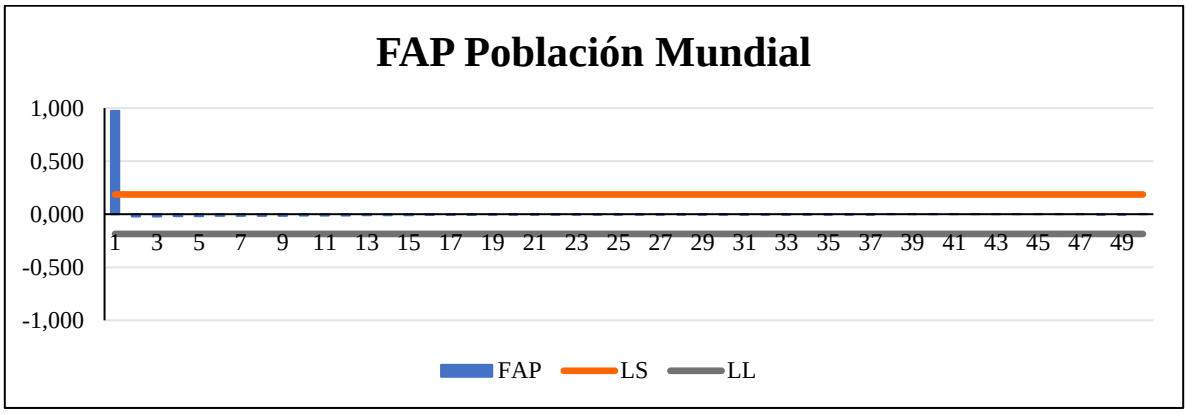


Ilustración 26: Autocorrelación parcial Población Mundial

La ilustración 25 muestra el comportamiento del correlograma del PIB mundial, y el gráfico 26 su autocorrelación parcial. Con los expuesto anteriormente se puede afirmar que el set de datos corresponde a una serie de tiempo con tendencia, esto se sustenta en la forma en que las autocorrelaciones decaen lenta y constantemente, además solo tiene un valor significativo en el gráfico de la autocorrelación parcial.

Este tipo de conducta es usual en series de tiempo que no presentan estacionariedad.

5.4.2 Prueba de Dickey-Fuller Aumentada

Para poder determinar si las series temporales son estacionarias o no, se realiza la prueba de Dickey-Fuller aumentada. Para ello a cada variable se le hace una regresión lineal con un desfase temporal de un periodo. En donde se pone énfasis en el valor del estadístico t, el cual será el valor por comparar con el valor critico que otorga la tabla de Dickey-Fuller (Tabla 2), y con esto aprobar o rechazar la hipótesis nula H_0. En las siguientes paginas se muestran los resultados obtenidos al realizar la prueba en E-Views 12 SV.

PRECIO

A continuación, se presentan los resultados de la prueba de estacionariedad Dickey_Fuller aumentado para el Precio del cobre, con un tipo de prueba Básico, es decir para un set de datos que no presente intercepto ni tendencia.

Tabla 5: Prueba Dickey Fuller Precio Cobre tipo de prueba Básico

Variable		Precio Cobre	
H_0		Precio tiene una raíz unitaria	
Tipo de prueba		Básico	
Durbin-Watson		1.74	
		T Estadístico	**Probabilidad**
Resultado prueba ADF		**-0.37**	0.55
Valores críticos de la prueba	1% nivel confianza	-2.60	
	5% nivel confianza	-1.95	
	10% nivel confianza	-1.61	

La Tabla 5 muestra los resultados obtenidos, en donde se desprende que el valor del T estadístico es de -0.37 y su valor p de 0.55. El valor del T estadístico es mayor que los valores críticos de la prueba a los distintos niveles de confianza, es por esto que no se puede rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, la serie no presenta estacionariedad. El valor de Durbin-Watson es de 1.74, al ser cercano a 2 confirma que existe una autocorrelación entre los datos.

A continuación, se presentan los resultados de la prueba de estacionariedad Dickey_Fuller aumentado para el Precio del cobre, con un tipo de prueba con intercepto, es decir para un set de datos que no presente tendencia y sus valores no partan de cero.

Tabla 6: Prueba Dickey Fuller Precio Cobre tipo prueba Intercepto

Variable		Precio Cobre	
H_0		Precio tiene una raíz unitaria	
Tipo de prueba		Intercepto	
Durbin-Watson		1.64	
		T Estadístico	**Probabilidad**
Resultado prueba ADF		**-2.29**	0.17
Valores críticos de la prueba	1% nivel confianza	-3.53	
	5% nivel confianza	-2.90	

	10% nivel confianza	-2.59	

La Tabla 6 muestra los resultados obtenidos, en donde se desprende que el valor del T estadístico es de -2.29 y su valor p de 0.17. El valor del T estadístico es mayor que los valores críticos de la prueba a los distintos niveles de confianza, es por esto que no se puede rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, la serie no presenta estacionariedad. El valor de Durbin-Watson es de 1.64, al ser cercano a 2 confirma que existe una autocorrelación entre los datos.

A continuación, se presentan los resultados de la prueba de estacionariedad Dickey_Fuller aumentado para el Precio del cobre, con un tipo de prueba con tendencia e intercepto.

Tabla 7: Prueba Dickey Fuller Precio Cobre tipo prueba Tendencia e Intercepto

Variable		Precio Cobre	
H_0		Precio tiene una raíz unitaria	
Tipo de prueba		Tendencia e intercepto	
Durbin-Watson		1.64	
		T Estadístico	**Probabilidad**
Resultado prueba ADF		**-2.33**	0.41
Valores críticos de la prueba	1% nivel confianza	-4.10	
	5% nivel confianza	-3.48	
	10% nivel confianza	-3.17	

La Tabla 7 muestra los resultados obtenidos, en donde se desprende que el valor del T estadístico es de -2.33 y su valor p de 0.41. El valor del T estadístico es mayor que los valores críticos de la prueba a los distintos niveles de confianza, es por esto que no se puede rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, la serie no presenta estacionariedad. El valor de Durbin-Watson es de 1.64, al ser cercano a 2 confirma que existe una autocorrelación entre los datos.

CONSUMO

A continuación, se presentan los resultados de la prueba de estacionariedad Dickey_Fuller aumentado para el Consumo del cobre, con un tipo de prueba Básico, es decir para un set de datos que no presente intercepto ni tendencia.

Tabla 8: Prueba Dickey Fuller Consumo Cobre tipo prueba Básico

Variable	Consumo Cobre	
H_0	Consumo tiene una raíz unitaria	
Tipo de prueba	Básico	
Durbin-Watson	1.89	
	T Estadístico	**Probabilidad**
Resultado prueba ADF	**6.19**	1.00

Valores críticos de la prueba	1% nivel confianza	-2.60	
	5% nivel confianza	-1.97	
	10% nivel confianza	-1.61	

La Tabla 8 muestra los resultados obtenidos, en donde se desprende que el valor del T estadístico es de 6.19 y su valor p de 1.00. El valor del T estadístico es mayor que los valores críticos de la prueba a los distintos niveles de confianza, es por esto que no se puede rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, la serie no presenta estacionariedad. El valor de Durbin-Watson es de 1.89, al ser cercano a 2 confirma que existe una autocorrelación entre los datos.

A continuación, se presentan los resultados de la prueba de estacionariedad Dickey_Fuller aumentado para el Consumo del cobre, con un tipo de prueba con intercepto, es decir para un set de datos que no presente tendencia y sus valores no partan de cero.

Tabla 9: Prueba Dickey Fuller Precio Cobre tipo prueba Intercepto

Variable		Consumo Cobre	
H_0		Consumo tiene una raíz unitaria	
Tipo de prueba		Intercepto	
Durbin-Watson		1.90	
		T Estadístico	**Probabilidad**
Resultado prueba ADF		**2.99**	1.00
Valores críticos de la prueba	1% nivel confianza	-3.54	
	5% nivel confianza	-2.90	
	10% nivel confianza	-2.59	

La Tabla 9 muestra los resultados obtenidos, en donde se desprende que el valor del T estadístico es de 2.99 y su valor p de 1.00. El valor del T estadístico es mayor que los valores críticos de la prueba a los distintos niveles de confianza, es por esto que no se puede rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, la serie no presenta estacionariedad. El valor de Durbin-Watson es de 1.90, al ser cercano a 2 confirma que existe una autocorrelación entre los datos.

A continuación, se presentan los resultados de la prueba de estacionariedad Dickey_Fuller aumentado para el Consumo del cobre, con un tipo de prueba con tendencia e intercepto.

Tabla 10: Prueba Dickey Fuller Precio Cobre tipo prueba Tendencia e Intercepto

Variable		Consumo Cobre	
H_0		Consumo tiene una raíz unitaria	
Tipo de prueba		Tendencia e intercepto	
Durbin-Watson		1.91	
		T Estadístico	**Probabilidad**
Resultado prueba ADF		**0.84**	0.99
Valores críticos de la prueba	1% nivel confianza	-4.11	
	5% nivel confianza	-3.48	
	10% nivel confianza	-3.17	

La Tabla 10 muestra los resultados obtenidos, en donde se desprende que el valor del T estadístico es de 0.84 y su valor p de 0.99. El valor del T estadístico es mayor que los valores críticos de la prueba a los distintos niveles de confianza, es por esto que no se puede rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, la serie no presenta estacionariedad. El valor de Durbin-Watson es de 1.91, al ser cercano a 2 confirma que existe una autocorrelación entre los datos.

PIB MUNDIAL

A continuación, se presentan los resultados de la prueba de estacionariedad Dickey_Fuller aumentado para el PIB mundial, con un tipo de prueba Básico, es decir para un set de datos que no presente intercepto ni tendencia.

Tabla 11: Prueba Dickey Fuller PIB Mundial tipo prueba Básico

Variable		PIB Mundial	
H_0		PIB tiene una raíz unitaria	
Tipo de prueba		Básico	
Durbin-Watson		1.96	
		T Estadístico	**Probabilidad**
Resultado prueba ADF		**2.66**	0.99
Valores críticos de la prueba	1% nivel confianza	-2.61	
	5% nivel confianza	-1.94	
	10% nivel confianza	-1.61	

La Tabla 11 muestra los resultados obtenidos, en donde se desprende que el valor del T estadístico es de 2.66 y su valor p de 0.99. El valor del T estadístico es mayor que los valores críticos de la prueba a los distintos niveles de confianza, es por esto que no se puede rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, la serie no presenta estacionariedad. El valor de Durbin-Watson es de 1.96, al ser cercano a 2 confirma que existe una autocorrelación entre los datos.

A continuación, se presentan los resultados de la prueba de estacionariedad Dickey_Fuller aumentado para el PIB mundial, con un tipo de prueba con intercepto, es decir para un set de datos que no presente tendencia y sus valores no partan de cero.

Tabla 12: Prueba Dickey Fuller PIB Mundial tipo prueba Intercepto

Variable	PIB Mundial	
H_0	PIB tiene una raíz unitaria	
Tipo de prueba	Intercepto	
Durbin-Watson	1.99	
	T Estadístico	**Probabilidad**
Resultado prueba ADF	**2.32**	0.99

Valores críticos de la prueba	1% nivel confianza	-3.57	
	5% nivel confianza	-2.92	
	10% nivel confianza	-2.60	

La Tabla 12 muestra los resultados obtenidos, en donde se desprende que el valor del T estadístico es de 1.99 y su valor p de 0.99. El valor del T estadístico es mayor que los valores críticos de la prueba a los distintos niveles de confianza, es por esto que no se puede rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, la serie no presenta estacionariedad. El valor de Durbin-Watson es de 1.99, al ser cercano a 2 confirma que existe una autocorrelación entre los datos.

A continuación, se presentan los resultados de la prueba de estacionariedad Dickey_Fuller aumentado para el PIB mundial, con un tipo de prueba con tendencia e intercepto.

Tabla 13: Prueba Dickey Fuller PIB Mundial tipo prueba Tendencia e Intercepto

Variable		PIB Mundial	
H_0		PIB tiene una raíz unitaria	
Tipo de prueba		Tendencia e intercepto	
Durbin-Watson		1.94	
		T Estadístico	**Probabilidad**
Resultado prueba ADF		**-3.10**	0.12
Valores críticos de la prueba	1% nivel confianza	-4.14	
	5% nivel confianza	-3.49	
	10% nivel confianza	-3.18	

La Tabla 13 muestra los resultados obtenidos, en donde se desprende que el valor del T estadístico es de -3.10 y su valor p de 0.12. El valor del T estadístico es mayor que los valores críticos de la prueba a los distintos niveles de confianza, es por esto que no se puede rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, la serie no presenta estacionariedad. El valor de Durbin-Watson es de 1.94, al ser cercano a 2 confirma que existe una autocorrelación entre los datos.

PRODUCCIÓN

A continuación, se presentan los resultados de la prueba de estacionariedad Dickey_Fuller aumentado para el Producción del cobre, con un tipo de prueba Básico, es decir para un set de datos que no presente intercepto ni tendencia.

Tabla 14: Prueba Dickey Fuller Producción tipo prueba Básico

Variable	Producción	
H_0	Producción tiene una raíz unitaria	
Tipo de prueba	Básico	
Durbin-Watson	1.79	
	T Estadístico	**Probabilidad**
Resultado prueba ADF	**7.63**	1.00

Valores críticos de la prueba	1% nivel confianza	-2.60	
	5% nivel confianza	-1.95	
	10% nivel confianza	-1.61	

La Tabla 14 muestra los resultados obtenidos, en donde se desprende que el valor del T estadístico es de 1.79 y su valor p de 1.00. El valor del T estadístico es mayor que los valores críticos de la prueba a los distintos niveles de confianza, es por esto que no se puede rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, la serie no presenta estacionariedad. El valor de Durbin-Watson es de 1.79, al ser cercano a 2 confirma que existe una autocorrelación entre los datos.

A continuación, se presentan los resultados de la prueba de estacionariedad Dickey_Fuller aumentado para el Producción del cobre, con un tipo de prueba con intercepto, es decir para un set de datos que no presente tendencia y sus valores no partan de cero.

Tabla 15: Prueba Dickey Fuller Producción tipo prueba Intercepto

Variable		Producción	
H_0		Producción tiene una raíz unitaria	
Tipo de prueba		Intercepto	
Durbin-Watson		1.79	
		T Estadístico	**Probabilidad**
Resultado prueba ADF		**2.76**	1.00
Valores críticos de la prueba	1% nivel confianza	-3.53	
	5% nivel confianza	-2.90	
	10% nivel confianza	-2.59	

La Tabla 15 muestra los resultados obtenidos, en donde se desprende que el valor del T estadístico es de 2.76 y su valor p de 1.00. El valor del T estadístico es mayor que los valores críticos de la prueba a los distintos niveles de confianza, es por esto que no se puede rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, la serie no presenta estacionariedad. El valor de Durbin-Watson es de 1.79, al ser cercano a 2 confirma que existe una autocorrelación entre los datos.

A continuación, se presentan los resultados de la prueba de estacionariedad Dickey_Fuller aumentado para el Producción del cobre, con un tipo de prueba con tendencia e intercepto.

Tabla 16: Prueba Dickey Fuller Producción tipo prueba Tendencia e Intercepto

Variable		Producción	
H_0		Producción tiene una raíz unitaria	
Tipo de prueba		Tendencia e intercepto	
Durbin-Watson		1.77	
		T Estadístico	**Probabilidad**
Resultado prueba ADF		**0.19**	0.99
Valores críticos de la	1% nivel confianza	-4.10	

prueba	5% nivel confianza	-3.48	
	10% nivel confianza	-3.17	

La Tabla 16 muestra los resultados obtenidos, en donde se desprende que el valor del T estadístico es de 0.19 y su valor p de 0.99. El valor del T estadístico es mayor que los valores críticos de la prueba a los distintos niveles de confianza, es por esto que no se puede rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, la serie no presenta estacionariedad. El valor de Durbin-Watson es de 1.77, al ser cercano a 2 confirma que existe una autocorrelación entre los datos.

POBLACIÓN MUNDIAL

A continuación, se presentan los resultados de la prueba de estacionariedad Dickey_Fuller aumentado para el Población mundial, con un tipo de prueba Básico, es decir para un set de datos que no presente intercepto ni tendencia.

Tabla 17: Prueba Dickey Fuller Población Mundial tipo prueba Básico

Variable		Población mundial	
H_0		Población tiene una raíz unitaria	
Tipo de prueba		Básico	
Durbin-Watson		2.14	
		T Estadístico	**Probabilidad**
Resultado prueba ADF		**1.75**	0.98
Valores críticos de la prueba	1% nivel confianza	-2.60	
	5% nivel confianza	-1.95	
	10% nivel confianza	-1.61	

La Tabla 17 muestra los resultados obtenidos, en donde se desprende que el valor del T estadístico es de 1.75 y su valor p de 0.98. El valor del T estadístico es mayor que los valores críticos de la prueba a los distintos niveles de confianza, es por esto que no se puede rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, la serie no presenta estacionariedad. El valor de Durbin-Watson es de 2.14, al ser cercano a 2 confirma que existe una autocorrelación entre los datos.

A continuación, se presentan los resultados de la prueba de estacionariedad Dickey_Fuller aumentado para el Población mundial, con un tipo de prueba con intercepto, es decir para un set de datos que no presente tendencia y sus valores no partan de cero.

Tabla 18: Prueba Dickey Fuller Población Mundial tipo prueba Intercepto

Variable	Población mundial
H_0	Población tiene una raíz unitaria
Tipo de prueba	Intercepto
Durbin-Watson	2.13

		T Estadístico	Probabilidad
Resultado prueba ADF		**-0.86**	0.79
Valores críticos de la prueba	1% nivel confianza	-3.56	
	5% nivel confianza	-2.91	
	10% nivel confianza	-2.60	

La Tabla 18 muestra los resultados obtenidos, en donde se desprende que el valor del T estadístico es de -0.86 y su valor p de 0.79. El valor del T estadístico es mayor que los valores críticos de la prueba a los distintos niveles de confianza, es por esto que no se puede rechazar la hipótesis nula, por lo tanto, la serie no presenta estacionariedad. El valor de Durbin-Watson es de 2.13, al ser cercano a 2 confirma que existe una autocorrelación entre los datos.

A continuación, se presentan los resultados de la prueba de estacionariedad Dickey_Fuller aumentado para el Población mundial, con un tipo de prueba con tendencia e intercepto.

Tabla 19: Prueba Dickey Fuller Población Mundial tipo prueba Tendencia e Intercepto

Variable		Población mundial	
$\boldsymbol{H_0}$		Población tiene una raíz unitaria	
Tipo de prueba		Tendencia e intercepto	
Durbin-Watson		2.12	
		T Estadístico	**Probabilidad**
Resultado prueba ADF		**-6.05**	0.00
Valores críticos de la prueba	1% nivel confianza	-4.17	
	5% nivel confianza	-3.51	
	10% nivel confianza	-3.19	

La Tabla 19 muestra los resultados obtenidos, en donde se desprende que el valor del T estadístico es de -6.05 y su valor p de 0.00. El valor del T estadístico es menor que los valores críticos de la prueba a los distintos niveles de confianza, es por esto que se rechaza la hipótesis nula y se acepta la hipótesis alternativa, por lo tanto, la serie presenta estacionariedad. El valor de Durbin-Watson es de 2.12, al ser cercano a 2 confirma que existe una autocorrelación entre los datos.

RESUMEN

Tabla 20: Resumen de las pruebas de Dickey-Fuller

Variable	Tipo de Prueba	T estadístico	Valor crítico de prueba a 5% nivel de confianza	Probabilidad	Durbin-Watson
Precio	Básico	-0.37	-1.95	0.55	1.74

	Intercepto	-2.29	-2.90	0.17	1.64
	Tendencia e intercepto	-2.33	-3.48	0.41	1.64
Consumo	Básico	6.19	-1.97	1.00	1.89
	Intercepto	2.99	-2.90	1.00	1.90
	Tendencia e intercepto	0.84	-3.48	0.99	1.91
PIB Mundial	Básico	2.66	-2.61	0.99	1.96
	Intercepto	2.32	-2.92	0.99	1.99
	Tendencia e intercepto	-3.10	-3.49	0.12	1.94
Producción	Básico	7.63	-1.95	1.00	1.79
	Intercepto	2.76	-1.95	1.00	1.79
	Tendencia e intercepto	0.19	-3.48	0.99	1.77
Población Mundial	Básico	1.75	-1.95	0.98	2.14
	Intercepto	-0.86	-2.91	0.79	2.13
	Tendencia e intercepto	-6.05	-3.51	0.00	2.12

Bajo todos los escenarios y los distintos tipos de prueba, se pudo comprobar que las series de datos no presentan estacionariedad. Con la única excepción de la prueba con tendencia e intercepto realizada a la Población mundial, en donde se pudo comprobar estacionariedad.

Como se mostró en la sección 5.2 cada una de las variables seleccionadas tiene un comportamiento que va a determinar el tipo de prueba de Dickey-Fuller a la que mejor se adapta. A continuación, se expone el resultado de la prueba más representativa para cada serie.

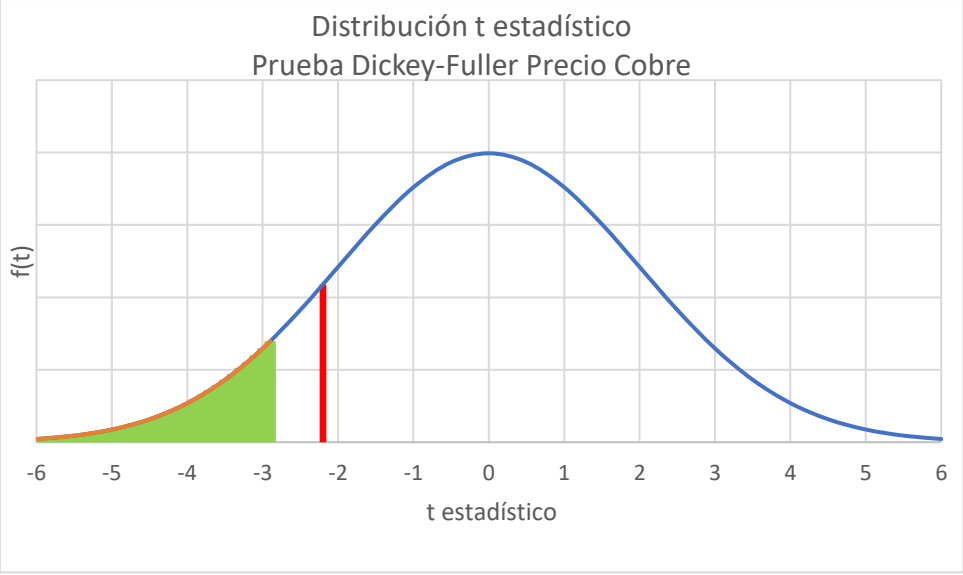


Ilustración 27: Resultado prueba Dickey-Fuller para el Precio del Cobre

La ilustración 27 muestra el resultado de la prueba de Dickey-Fuller para el Precio del Cobre, en donde se puede apreciar que la zona demarcada con color verde corresponde a la zona en donde se rechaza la hipótesis nula H_0, es decir los valores críticos que tiene el test. La línea roja demarca el valor del t estadístico de la prueba, al ser mayor que el valor crítico no se puede rechazar la hipótesis nula H_0 y por lo tanto la serie no presenta estacionariedad. El tipo de prueba seleccionada fue la de intercepto, ya que es la que mejor se ajusta a las características que presenta la serie.

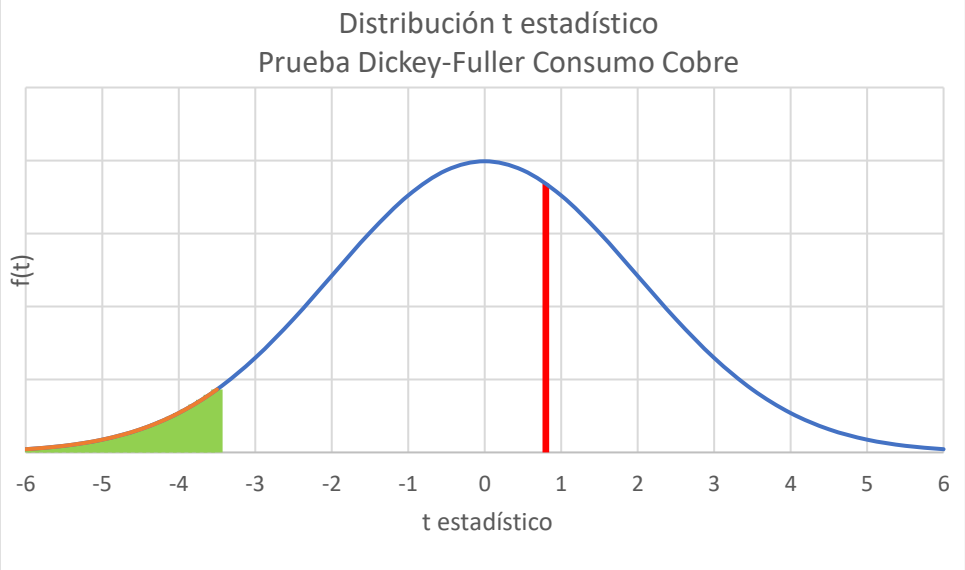


Ilustración 28: Resultado prueba Dickey-Fuller para el Consumo de Cobre

La ilustración 28 muestra el resultado de la prueba de Dickey-Fuller para el Consumo del Cobre, en donde se puede apreciar que la zona demarcada con color verde corresponde a la zona en donde se rechaza la hipótesis nula H_0, es decir los valores críticos que tiene el test. La línea roja demarca el valor del t estadístico de la prueba, al ser mayor que el valor crítico no se puede rechazar la hipótesis nula H_0 y por lo tanto la serie no presenta estacionariedad. El tipo de prueba seleccionada fue la de tendencia e intercepto, ya que es la que mejor se ajusta a las características que presenta la serie.

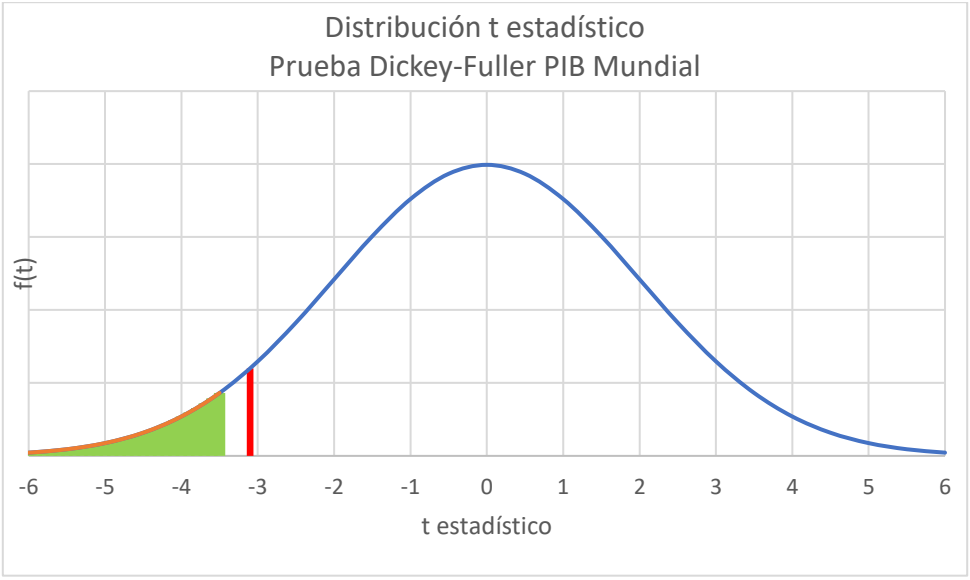


Ilustración 29: Resultado prueba Dickey-Fuller para PIB mundial

La ilustración 29 muestra el resultado de la prueba de Dickey-Fuller para el PIB mundial, en donde se puede apreciar que la zona demarcada con color verde corresponde a la zona en donde se rechaza la hipótesis nula H_0, es decir los valores críticos que tiene el test. La línea roja demarca el valor del t estadístico de la prueba, al ser mayor que el valor crítico no se puede rechazar la hipótesis nula H_0 y por lo tanto la serie no presenta estacionariedad. El tipo de prueba seleccionada fue la de tendencia e intercepto, ya que es la que mejor se ajusta a las características que presenta la serie.

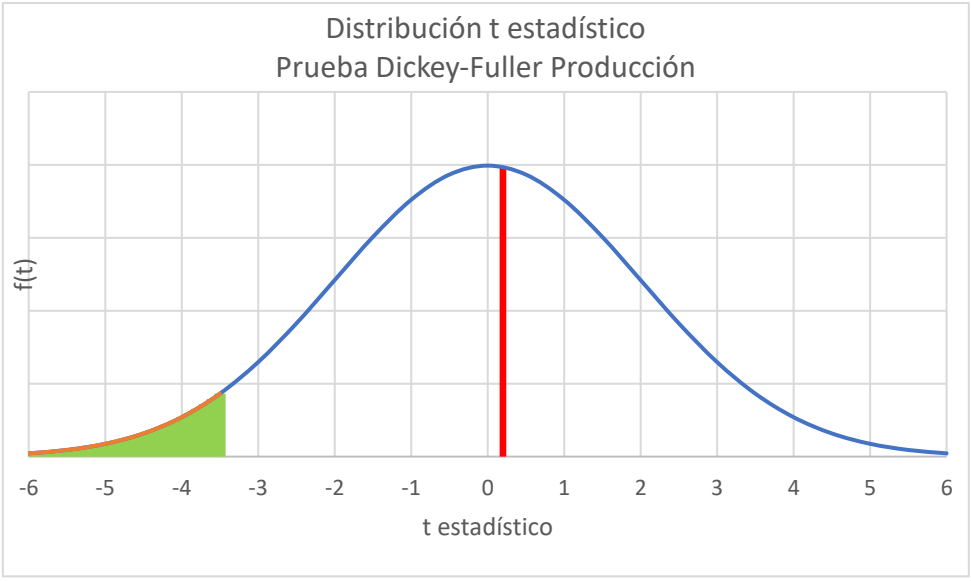


Ilustración 30: Resultado prueba Dickey-Fuller Producción de Cobre

La ilustración 30 muestra el resultado de la prueba de Dickey-Fuller para el PIB mundial, en donde se puede apreciar que la zona demarcada con color verde corresponde a la zona en donde

se rechaza la hipótesis nula H_0, es decir los valores críticos que tiene el test. La línea roja demarca el valor del t estadístico de la prueba, al ser mayor que el valor crítico no se puede rechazar la hipótesis nula H_0 y por lo tanto la serie no presenta estacionariedad. El tipo de prueba seleccionada fue la de tendencia e intercepto, ya que es la que mejor se ajusta a las características que presenta la serie.

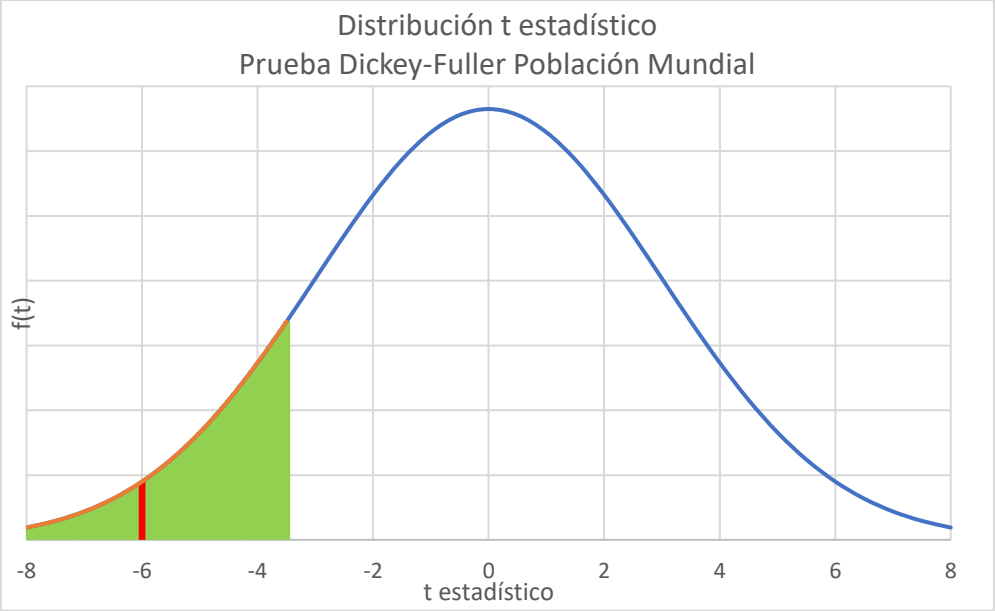


Ilustración 31: Resultado prueba Dickey-Fuller Población mundial

La ilustración 31 muestra el resultado de la prueba de Dickey-Fuller para el Población mundial, en donde se puede apreciar que la zona demarcada con color verde corresponde a la zona en donde se rechaza la hipótesis nula H_0, es decir los valores críticos que tiene el test. La línea roja demarca el valor del t estadístico de la prueba, al ser menor que el valor crítico se rechaza la hipótesis nula H_0 y se acepta la hipótesis alternativa H_a, lo que dice que la serie presenta estacionariedad. El tipo de prueba seleccionada fue la de tendencia e intercepto, ya que es la que mejor se ajusta a las características que presenta la serie.

6. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

En este trabajo se verificó la capacidad que poseen las variables tales como Producción mundial, Consumo mundial, Precio, PIB y Población mundial para ser utilizadas como herramientas en busca de modelar las reservas de cobre.

Con la finalidad de determinar los años restantes de cobre se contrastaron dos metodologías, una propuesta por Shafiee y otra por Sverdrup. En donde ambas presentaron inconvenientes para predecir el agotamiento de las reservas de cobre. Esta problemática se explica mediante dos factores principalmente.

En primer lugar, lo propuesto por Shafiie no es de utilidad en un escenario en donde se presenta un decremento porcentual anual en las reservas de cobre mayor a un 3%, esto se debe a que la fórmula ocupada se indefine dado que el dominio de la función logaritmo no comprende los números menores a cero.

Por otra parte, la segunda metodología es una aproximación muy simple, la cual no tiene en consideración el crecimiento exponencial que pueda a llegar a tener las reservas o la producción. Como resultado, no se ven reflejados los impactos que tiene el precio en dichas variables, por lo cual es un método que se ajusta en buena medida a una economía estancada.

Ambas metodologías no entregan información acerca del agotamiento a futuro de las reservas de cobre, ya que como están construidas a partir de una mirada de stock fijo, es decir, cada vez que

se reportan nuevos descubrimientos de reservas, este crecimiento no es considerado por los modelos.

En consecuencia, se toma como referencia el trabajo hecho por Shafiie en la construcción de una regresión lineal múltiple y se replica con las variables de Precio, Consumo y PIB mundiales. Entregando un indicador MAPE de 7.50 de buena precisión.

Para la construcción del modelo es imperativo verificar si las variables seleccionadas cumplen con los requerimientos de estacionariedad, para ello se realizaron pruebas del tipo Dickey-Fuller aumentado. Se aprecia que las variables consideradas en el estudio no cumplen la condición de estacionariedad, salvo por la población mundial. Lo que conlleva a que se inhabilite la creación de un modelo por medio de una regresión lineal múltiple.

Un punto importante por resaltar es que en este estudio no se incorporaron factores relevantes que surgen del paradigma del costo de oportunidad, tales como reciclaje y sustitutos del cobre. Los cuales van a tener influencia directa en la producción mundial de cobre, precio y consumo mundial.

Finalmente, para llegar a resultados concluyentes con las mismas variables del estudio, se hace necesario realizar un proceso de mayor complejidad, como por ejemplo una cointegración. Con lo cual es esperable que se genere un modelo econométrico capaz de predecir el comportamiento de las reservas remanentes de cobre.

7. REFERENCIAS

[1] Ayman Elshakaki, T.E Graedel, Luca Ciacci, Barbara K. Reck. Copper demand, supply, and associated energy use to 2050. Global Environmental change 2016.

[2] Biblioteca del Congreso Nacional (2007). *Biblioteca del Congreso Nacional | ley Chile.* www.bcn.cl/leychile. https://www.bcn.cl/leychile

[3] Branco W. Schipper, Hsiu-Chuan Lin, Marco A. Meloni, Kjell Wansleeben, Reinout Heijungs, Ester van der Voet Estimating global demand until 2100 with regression and stock dynamics. Resources, conservation, and recycling 2018.

[4] Charles Zaiontz, Dickey-fuller Test. Real Statistics 2018.

[5] Crowson, P. C. F. Mineral reserves and future minerals availability. *Mineral Economics.* 2011

[6] Erik Pruyt, Jan Kwakkel. Analysing the uncertain future of copper with three exploratory system dynamics models. Policy Analysis Section 2012.

[7] *Evaluating forecast accuracy*. (2018). https://otexts.com/fpp2/accuracy.html

[8] Gareth, J. Witten, D. Hastie, T. Tibshirani, R. An Introduction to Statistical Learning: with Applications in R (Springer Texts in Statistics) 2nd ed. 2021.

[9] Guiomar Calvo, Alicia Valero, Antonio Valero. Assessing maximum production peak and resource availability of non-fuel mineral resources: Analyzing the influence of extractable global resources. Resources, conservation, and recycling 2017.

[10] Gordon, R. B., Bertram, M., & Graedel, T. E. 2006. Metal stocks and sustainability. *Proceedings of the National Academy of Sciences*, *103*(5), 1209-1214.

[11] Gordon, R. B., Bertram, M., & Graedel, T. E. 2007. On the sustainability of metal supplies: A response to Tilton and Lagos. *Resources Policy*, *32*(1-2), 24-28.

[12] Harald U. Sverdrup, Kristin Vala Ragnarsdottir, Deniz Koca. On modelling the global copper mining rates, market supply, copper price and the end of copper reserves. Resources, conservation, and recycling 2014.

[13] Hunt, C., Romero, J., Jara, J., & Lagos, G. (2021). Copper demand forecasts and predictions of future scarcity. *Resources Policy*, *73*, 102123.

[14] John E. Tilton. On borrowed time? Assessing the threat of mineral depletion. Colorado School of mines 2002.

[15] John E. Tilton, Gustavo Lagos. Assessing the long-run availability of copper. Resources policy 2007.

[16] John E. Tilton. Is mineral depletion a threat to sustainable mining? Research Gate 2009.

[17] John E. Tilton, Juan Ignacio Guzmán. Mineral Economics and Policy. 1st edition. 2016.

[18] Meadows, D. H., Randers, J., & Meadows, D. L. 1972. *The limits to growth: The 30-year update* (Reprint). Earthscan.

[19] Shahriar Shafiee, Erkan Topal. When will fossil fuel reserves be diminished? Energy Policy 2009.

[20] S. Northey, S. Mohr, G.M. Mudd, Z. Weng, D. Giurc. Modelling future copper ore grade decline based on a detailed assessment of copper resources and mining. Resources, conservation, and recycling 2014.

[21] The World Bank. (2022). *Glossary | DataBank*. https://databank.worldbank.org/metadataglossary/world-development-indicators/series/NY.GDP.MKTP.KD.ZG

[22] United Nations, Department of Economic and Social Affairs, & Population Division. (2019). *World population prospects Highlights, 2019 revision Highlights, 2019 revision*.

[23] USGS. (2022). *MINERAL COMMODITY SUMMARIES 2022*.

8. ANEXOS

8.1. Datos relevantes para el estudio

En esta sección se puede encontrar los datos que se utilizaron en el estudio, los cuales comprenden un periodo de 1950-2015.

Tabla 21: Datos relevantes del mercado del cobre

Año	Remaining Reserves (Mt Cu)	Consumo (kt)	Producción minera (kt)	PIB (MM)	POBLACION MUNDIAL (MM)	Precio Real según PPI 2015 ($/lb)
1950	121	2.612	2.525	S/I	S/I	147,86
1951	126	2.888	2.662	S/I	S/I	151,57
1952	131	2.964	2.766	S/I	S/I	155,66
1953	137	2.903	2.802	S/I	S/I	187,79
1954	142	3.171	2.852	S/I	S/I	193,00
1955	148	3.586	3.112	S/I	S/I	243,69
1956	152	3.681	3.470	S/I	S/I	262,66
1957	157	3.691	3.556	S/I	S/I	180,64
1958	164	4.133	3.449	S/I	S/I	155,45
1959	170	4.376	3.693	S/I	S/I	187,40

1960	177	4.756	4.242	1,39	3,03	192,80
1961	187	5.069	4.394	1,44	3,07	180,16
1962	196	5.155	4.555	1,55	3,12	183,79
1963	207	5.432	4.624	1,67	3,19	184,37
1964	217	5.918	4.799	1,83	3,26	192,81
1965	228	6.193	4.963	1,99	3,32	206,32
1966	238	6.443	5.220	2,16	3,39	206,98
1967	249	6.197	5.060	2,30	3,46	217,76
1968	259	6.526	5.459	2,48	3,53	232,71
1969	267	7.154	5.943	2,73	3,61	254,04
1970	276	7.322	6.403	2,99	3,68	297,73
1971	283	7.332	6.477	3,30	3,76	256,87
1972	288	7.965	7.063	3,81	3,84	242,07
1973	292	8.741	7.511	4,64	3,91	249,21
1974	296	8.307	7.576	5,35	3,99	272,78
1975	300	7.444	7.182	5,96	4,06	207,14
1976	304	8.539	7.658	6,48	4,14	214,47
1977	308	9.057	7.854	7,33	4,21	193,05
1978	311	9.527	7.671	8,63	4,28	181,17
1979	316	9.842	7.765	10,03	4,36	223,38
1980	319	9.390	7.806	11,31	4,43	215,03
1981	322	9.509	8.383	11,70	4,51	162,70
1982	324	9.090	8.062	11,58	4,59	138,82
1983	326	9.510	8.071	11,81	4,67	146,34
1984	327	10.053	8.271	12,24	4,76	122,57
1985	327	9.885	8.398	12,87	4,84	120,97
1986	331	10.183	8.474	15,22	4,92	122,85
1987	332	10.430	8.654	17,32	5,01	150,20
1988	335	10.660	8.753	19,35	5,10	212,14
1989	335	11.046	9.019	20,15	5,19	219,82
1990	342	10.761	8.986	22,72	5,28	199,35
1991	347	10.674	9.116	23,70	5,37	176,39
1992	355	10.801	9.338	25,42	5,45	172,24
1993	362	10.974	9.455	25,87	5,54	144,37
1994	369	11.561	9.418	27,94	5,62	173,39
1995	377	12.076	10.066	31,13	5,71	209,08
1996	384	12.582	11.128	31,85	5,79	154,91
1997	391	13.103	11.537	31,77	5,87	154,03
1998	398	13.519	12.248	31,75	5,95	114,75
1999	406	14.302	12.775	33,03	6,03	108,29
2000	418	15.187	13.203	34,18	6,11	118,08
2001	432	15.009	13.633	34,06	6,19	101,54
2002	446	15.210	13.577	35,56	6,27	102,60

2003	459	15.717	13.757	40,19	6,35	111,31
2004	472	16.838	14.594	45,52	6,43	168,86
2005	487	16.674	14.922	49,62	6,51	202,12
2006	501	17.034	14.990	54,23	6,59	352,93
2007	510	18.196	15.483	61,84	6,67	356,58
2008	523	18.054	15.524	68,88	6,76	316,65
2009	535	18.088	15.903	66,29	6,84	257,92
2010	550	19.002	15.980	73,02	6,92	352,53
2011	630	19.929	16.021	81,49	7,00	378,58
2012	690	20.038	16.772	75,36	7,09	339,55
2013	680	21.252	18.094	77,43	7,18	310,89
2014	690	22.003	18.394	79,53	7,26	288,67
2015	700	21.979	19.083	75,10	7,35	249,50

8.2. Años restantes de las reservas de cobre

Ocupando la fórmula propuesta en el estudio de Shafiie, se calculan los años restantes de las reservas mundiales de cobre.

Tabla 22: Años restantes de las reservas históricas a nivel mundial del cobre

Año	Años Restantes de las reservas
1950	
1951	16,6993673
1952	29,5894799
1953	154,229075
1954	18,1257732
1955	14,6252558
1956	28,1084378
1957	40,2660683
1958	15,0394777
1959	20,5613298
1960	17,017806
1961	19,0841283
1962	29,5236392
1963	21,0721701
1964	16,6540806
1965	21,757472
1966	22,9236852
1968	21,6966244

1969	16,2384207
1970	27,2711306
1971	37,6684299
1972	16,7832579
1973	15,253514
1976	12,8697948
1977	18,7815338
1978	19,4334843
1979	22,1304448
1981	28,3153498
1983	20,8507682
1984	18,7302052
1985	47,6316436
1986	22,9003645
1987	23,8003344
1988	24,055369
1989	20,7483361
1990	64,1787405
1991	37,5380886
1992	27,8985592
1993	26,6627534
1994	18,9498544
1995	19,8476746
1996	19,9448511
1997	19,7097108
1998	21,048574
1999	17,1075242
2000	16,3826742
2001	34,8173592
2002	24,8731557
2003	20,6433775
2004	15,7401515
2005	34,1998366
2006	22,9496199
2007	16,0014546
2008	32,7195994
2009	28,7868701
2010	18,1367501
2011	19,4276967
2012	31,6305964
2013	18,1268659
2014	21,3648445
2015	32,4187519

8.3. Gráficos de correlación entre las variable

Se realizan gráficos de dispersión entre las variables, en donde se busca comparar el valor que tienen en su correlación.

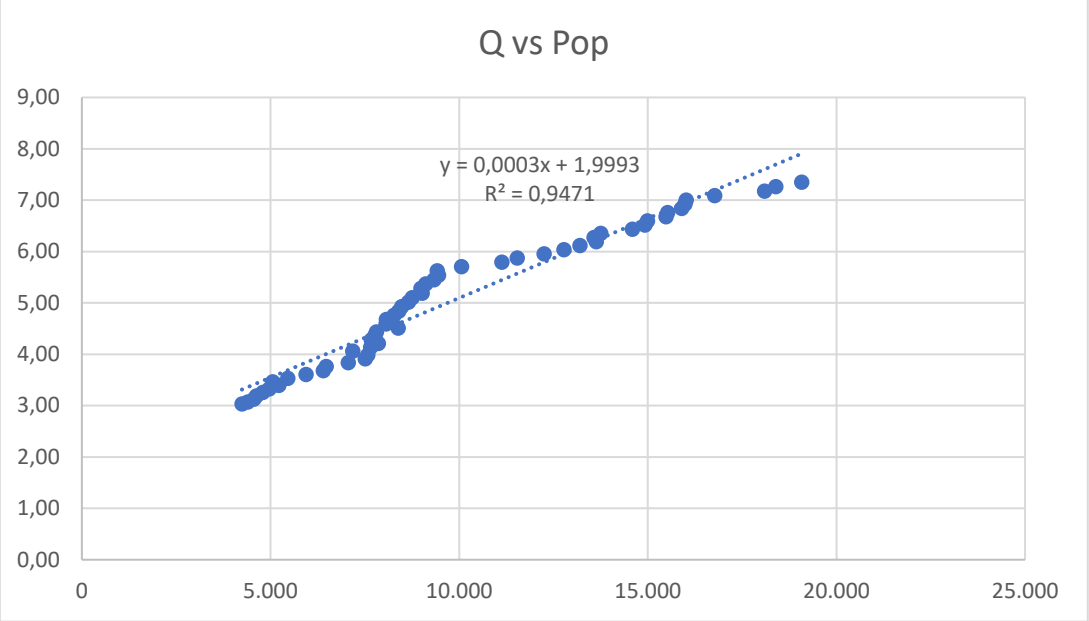


Ilustración 32: Correlación Producción versus Población mundial

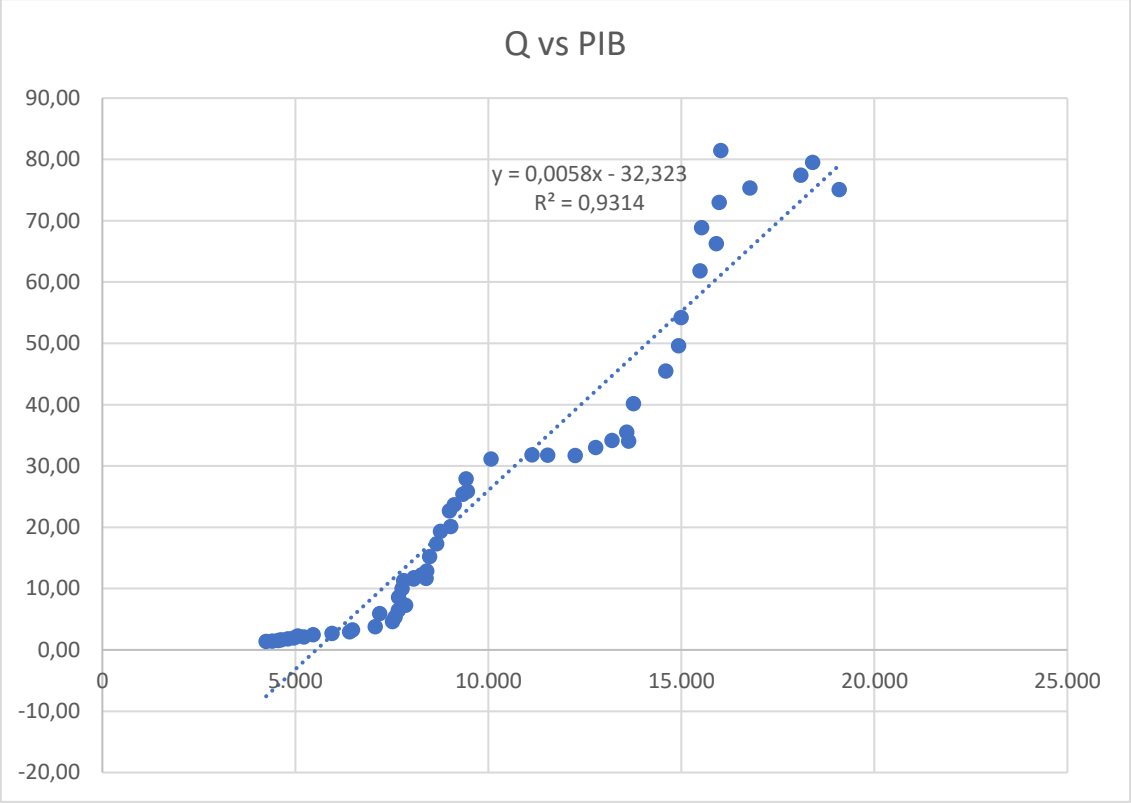


Ilustración 33: Correlación Producción versus PIB mundial

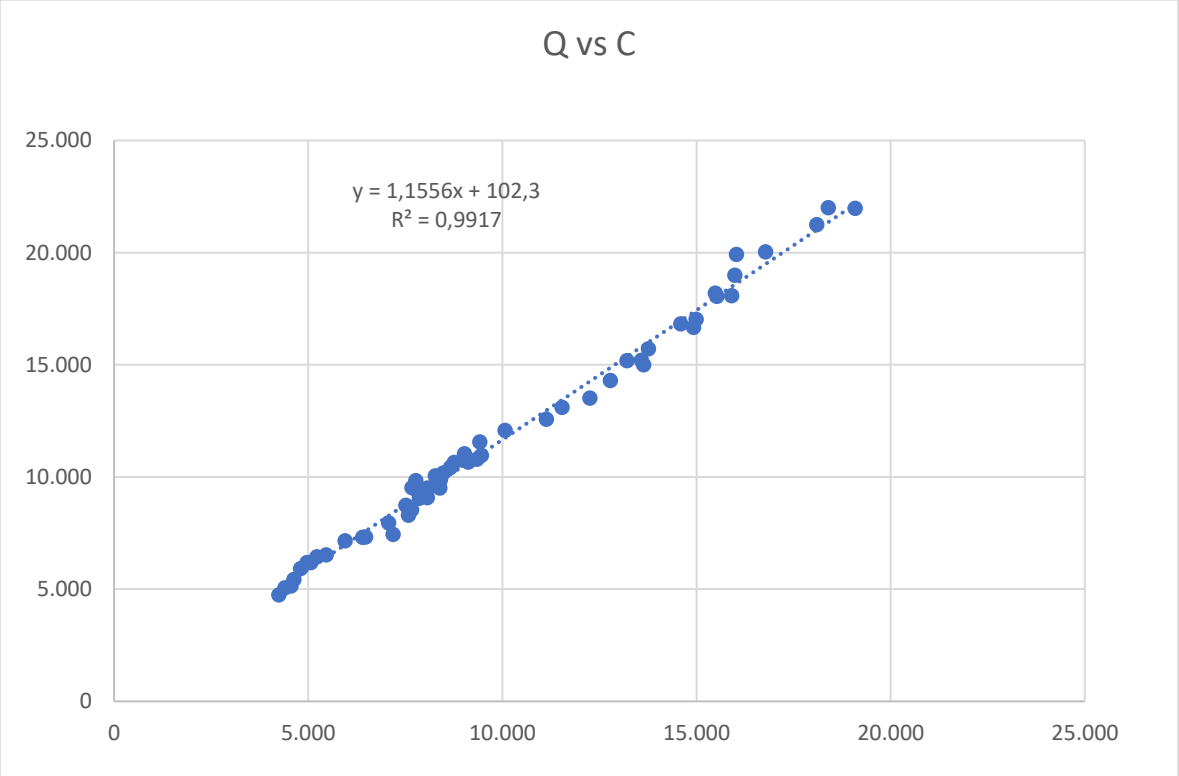


Ilustración 34: Correlación Producción versus Consumo

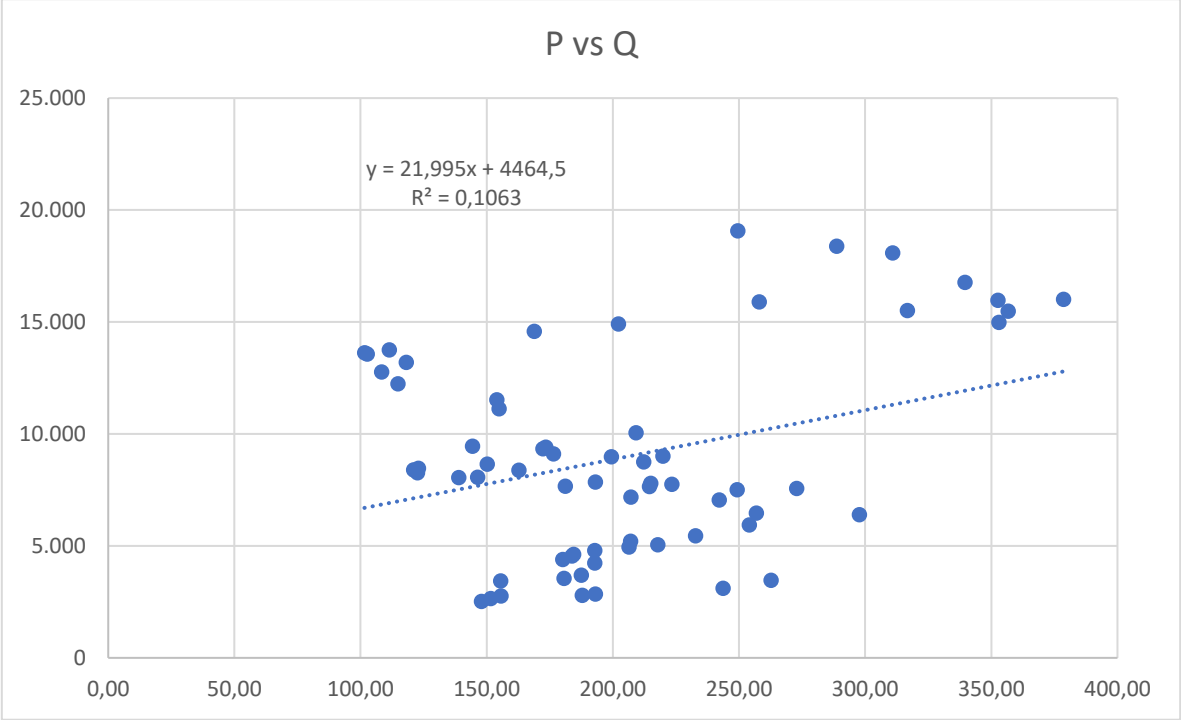


Ilustración 35: Correlación Precio versus Producción

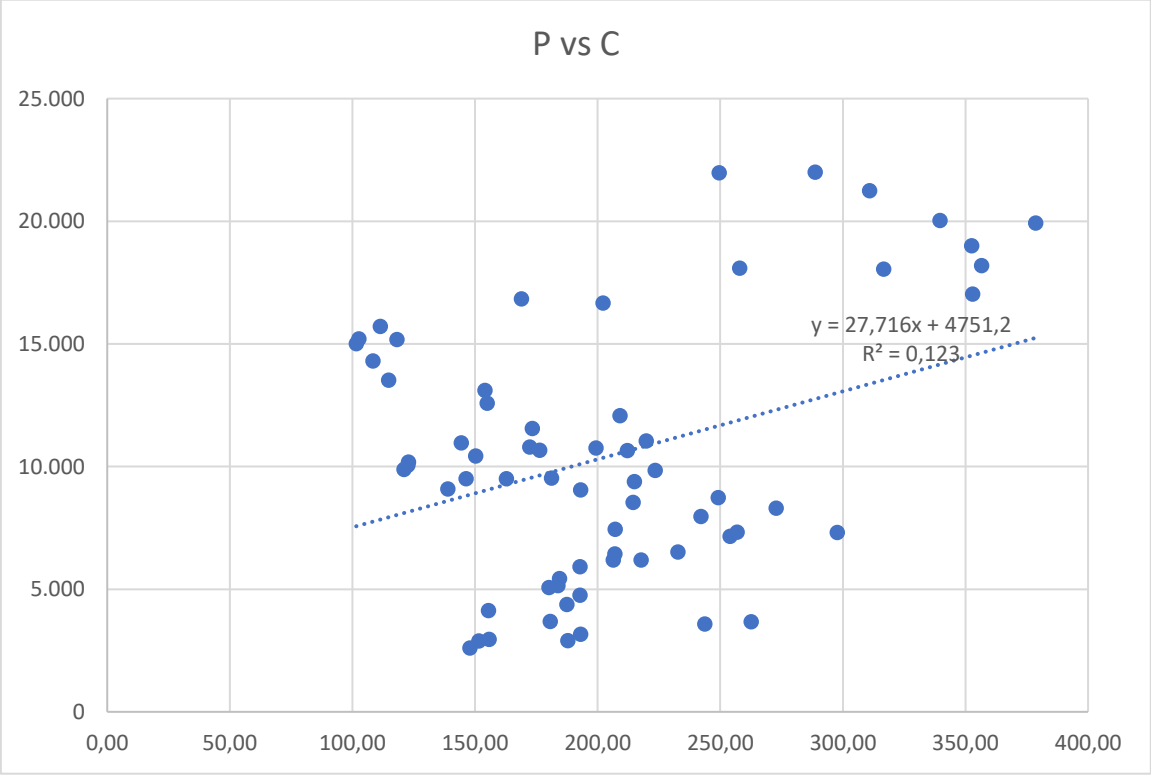


Ilustración 36: Correlación Precio versus Consumo

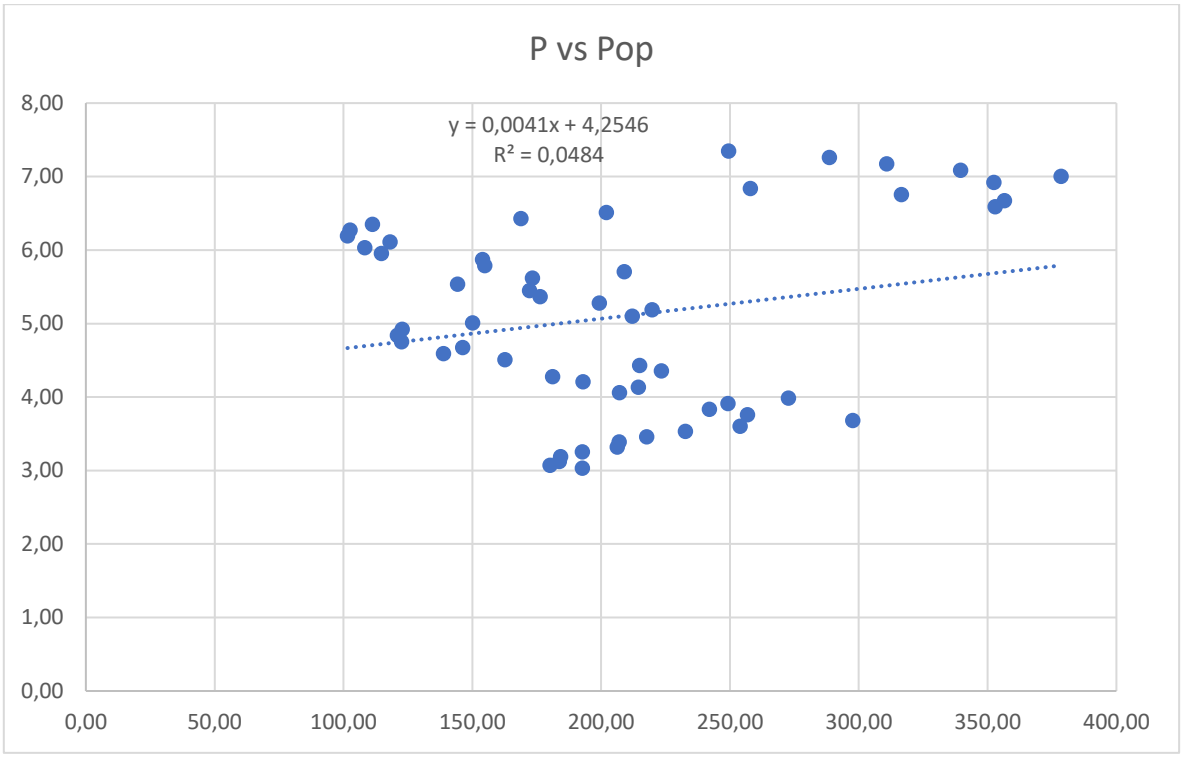


Ilustración 37: Correlación Precio versus Población mundial

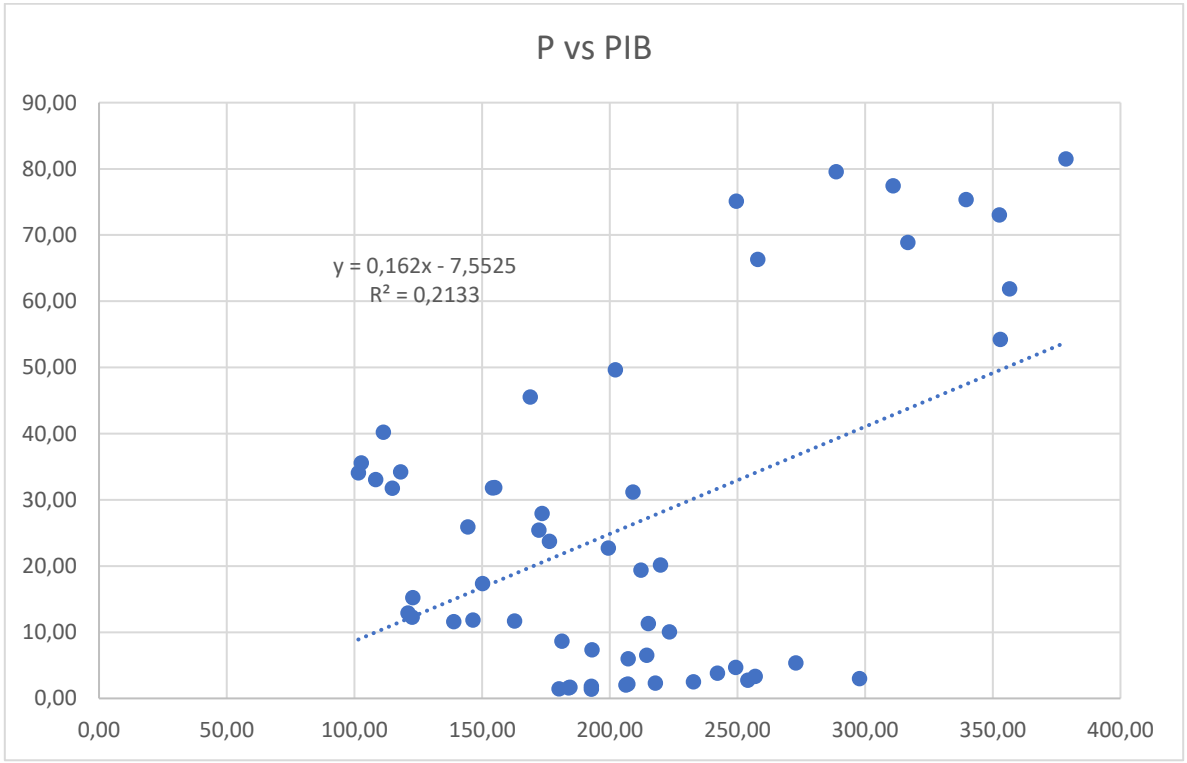


Ilustración 38: Correlación Precio versus PIB mundial

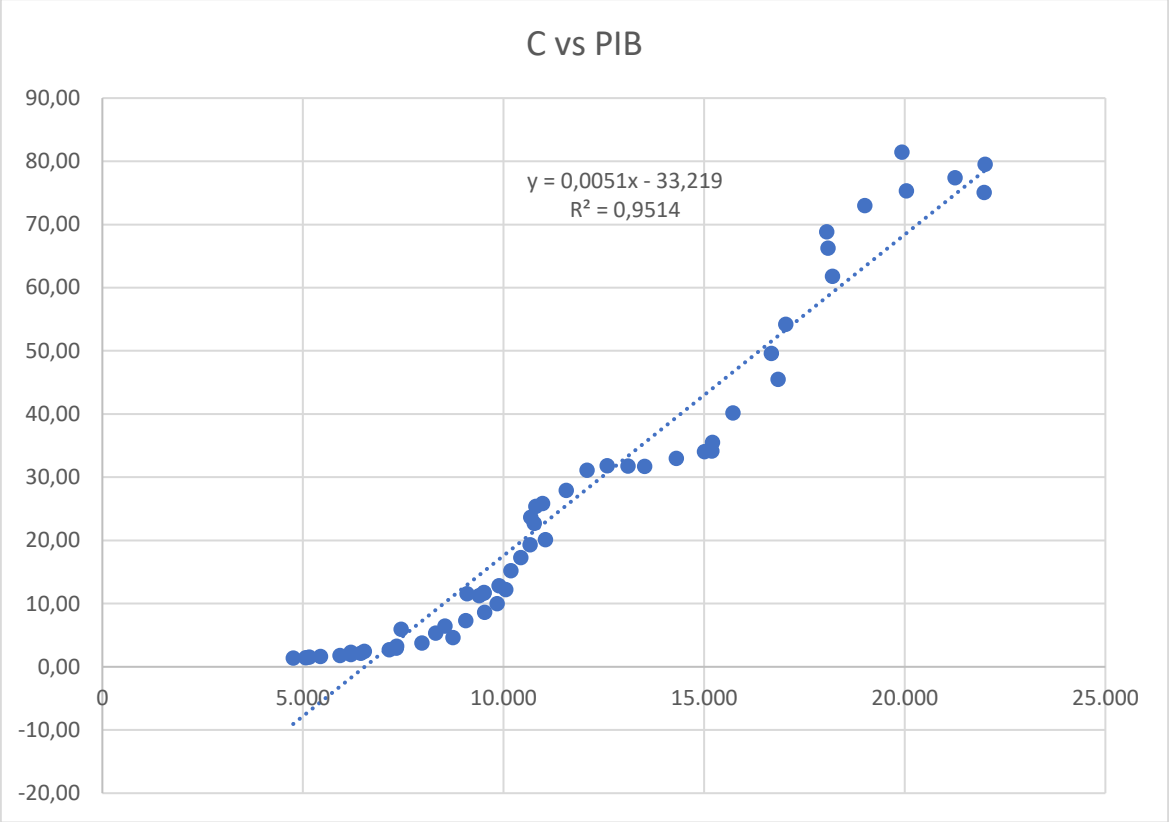


Ilustración 39: Correlación Consumo versus PIB mundial

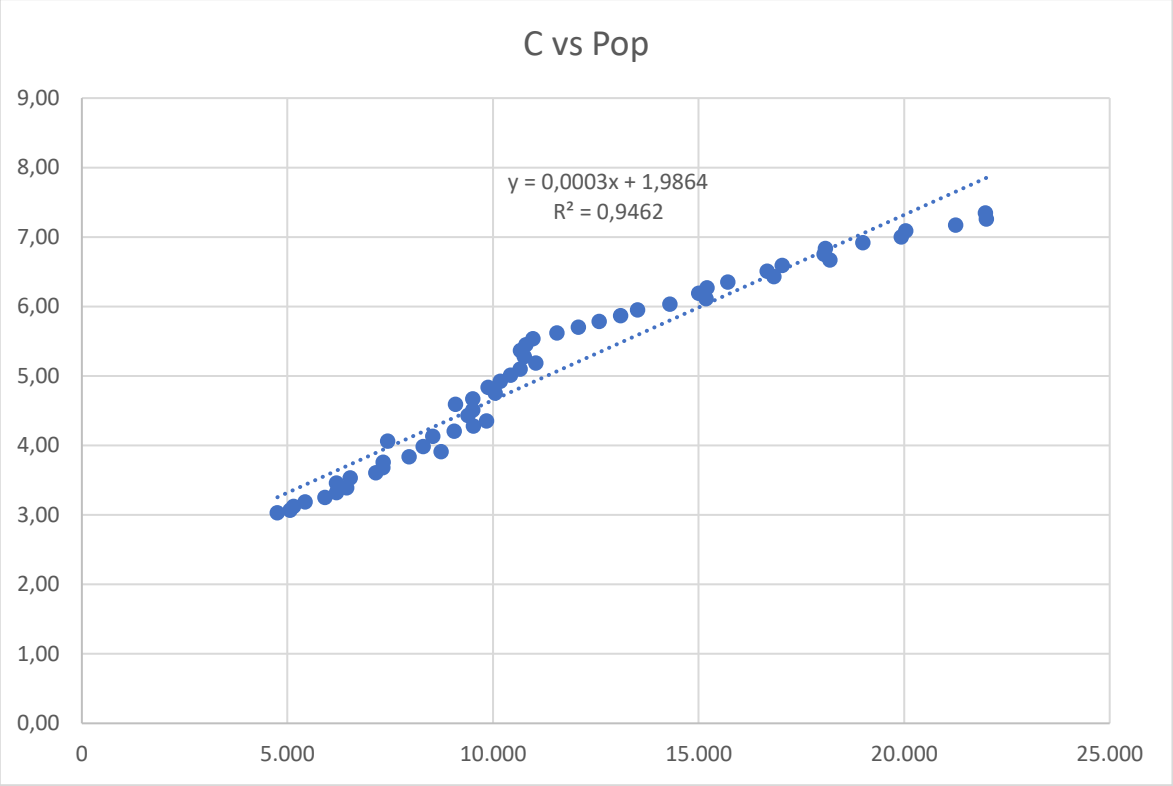


Ilustración 40: Correlación Consumo versus Población mundial

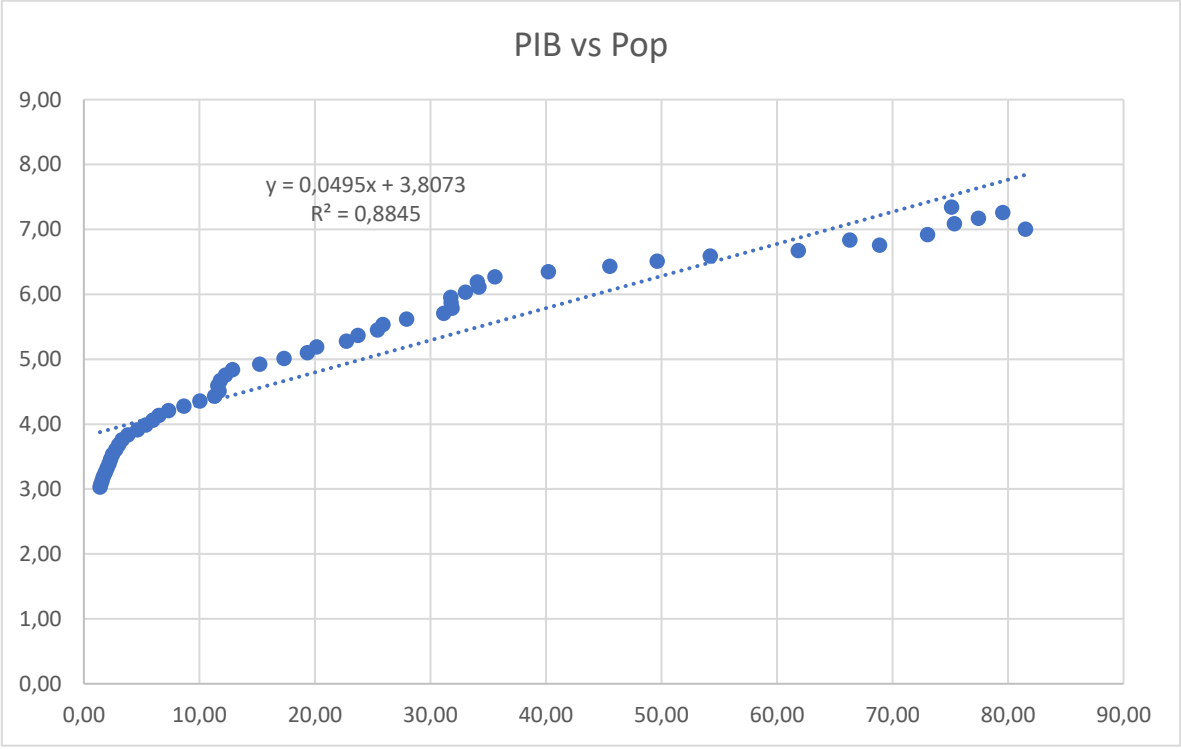


Ilustración 41: Correlación PIB mundial versus Población mundial