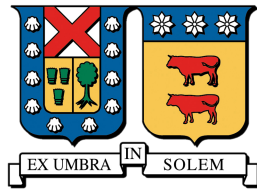


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA
VALPARAÍSO, CHILE



Modelo de Distribución de Calor y Control Térmico de Mesa de Calor mediante sensores de Fibra Ópticas

Paula Javiera Cartagena Oyarce

Memoria presentada al Departamento de Electrónica de la
Universidad Técnica Federico Santa María, como parte de los requisitos
para optar al título de Ingeniera Civil Electrónica.

Profesor Tutor: Héctor Ramírez, Ph.D

Profesores Correferentes: Marcelo Soto, Ph.D

Cristóbal Ponce, Ph.D

Agosto, 2025
Valparaíso, Chile



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título ☐ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Modelo de Distribución de Calor y Control Térmico de Mesa de Calor mediante sensores de Fibra Ópticas

Nombre del candidato(a): Paula Javiera Cartagena Oyarce

Carrera / Grado: Ingeniería Civil Electrónica

Campus: Casa Central **Departamento:** Electrónica

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Héctor Miguel Ramírez Estay, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☒ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

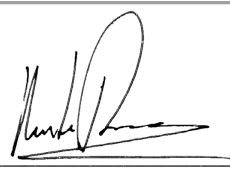
☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

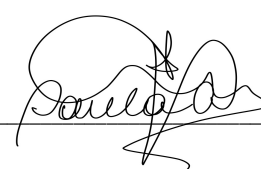
Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 05-11-2025 **Firma:** 

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 05-11-2025 **Firma:** 

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

*A mi madre, que lucha y sigue luchando para
darlo todo por mis sueños*

Agradecimientos

Agradezco profundamente a todos quienes me han acompañado en mi proceso universitario.

A la universidad por darme tan buenas experiencias y a los profesores que me han acompañado en este proceso de proyecto de título. A Cristóbal por entregarme sus conocimientos en materias totalmente nuevas y al profesor Héctor, por darme los mayores desafíos universitarios y crecer tanto en lo académico como en lo profesional.

A mis mascotas, que me dieron su amor incondicional y me dieron la paz que necesitaba.

A mis amigos de universidad Sebastián M, Mireya y Betsi, porque a pesar de que ellas ya no estén presentes en mi vida, fueron de vital importancia y acompañamiento en los momentos difíciles.

A mi pareja Sebastián, que me ha sido uno de mis mayores sostenedores en los momentos más complicados, por darme su amor y apoyo incondicional en todo momento.

A mi familia, partiendo por mis hermanos Mauricio, Fanny, Freddy y Mabel, que todos han aportado su granito de arena. En especial a mis hermanas, que han sido mi inspiración y fortaleza.

A mis diez sobrinos, que han sido mi principal motivación para ser mejor persona, tanto que los considero mis hermanos pequeños.

A mi padre Manuel, que a pesar de nuestras diferencias, decidió apoyarme en mis nuevos desafíos.

Y la persona más importante, mi madre Guadalupe, que ha sido el pilar más fundamental en mi vida, que a pesar de todo me apoyó desde el principio en la toma de las decisiones para mi vida.

Resumen

Este trabajo aborda el modelado, estimación y control de la temperatura en una mesa térmica de cobre instrumentada con sensores de fibra óptica basados en rejillas de Bragg (FBG). El objetivo principal es desarrollar un sistema capaz de predecir y regular el comportamiento térmico en distintos puntos de la superficie, combinando modelado numérico, observación de estados y control óptimo en tiempo discreto.

El modelado térmico se realizó mediante el Método de Elementos Finitos (FEM) aplicado a la ecuación de difusión de calor bidimensional, considerando pérdidas por convección y excitación térmica localizada mediante un actuador tipo PTC. Los parámetros físicos del modelo se ajustaron mediante comparación con mediciones experimentales obtenidas a través de los sensores FBG, garantizando una representación coherente del fenómeno real.

Sobre el modelo FEM discretizado se construyó un modelo reducido mediante *balanced truncation*, conservando las dinámicas dominantes. Este modelo sirvió de base para implementar un observador discreto de Luenberger, diseñado con la técnica **place**, capaz de estimar temperaturas en zonas no sensadas directamente. La validación del observador arrojó errores promedio menores a 1 °C entre mediciones y estimaciones, confirmando su precisión tanto en sensores de corrección como de validación independiente.

Posteriormente, se diseñó un controlador LQI discreto que, utilizando las estimaciones del observador, regula la temperatura en el punto de referencia definido por el sensor FBG4. El lazo cerrado entrega una respuesta estable, sin sobreoscilaciones, y respeta las limitaciones físicas del actuador. La simulación del sistema controlado evidencia una regulación térmica eficiente y coherente con la dinámica del modelo reducido.

Finalmente, se proponen lineamientos para la validación experimental del control térmico, destacando la integración entre los módulos de estimación, control y adquisición óptica. En conjunto, el desarrollo demuestra la viabilidad de combinar sensado óptico distribuido, modelado FEM y control óptimo discreto para el manejo térmico preciso en sistemas de superficie conductiva.

Abstract

This work addresses the modeling, estimation, and control of temperature in a copper thermal plate instrumented with Fiber Bragg Grating (FBG) optical sensors. The main objective is to develop a system capable of predicting and regulating the thermal behavior at different surface points by combining numerical modeling, state observation, and optimal discrete-time control.

The thermal modeling was performed using the Finite Element Method (FEM) applied to the two-dimensional heat diffusion equation, considering convective losses and localized thermal excitation through a PTC-type actuator. The physical parameters of the model were tuned through comparison with experimental measurements obtained via FBG sensors, ensuring a consistent representation of the real thermal behavior.

Based on the discretized FEM model, a reduced-order model was constructed using *balanced truncation*, preserving the dominant dynamics. This model served as the foundation for implementing a discrete Luenberger observer, designed via the `place` method, capable of estimating temperatures in regions not directly measured. The validation of the observer yielded average errors below 1 °C between measured and estimated temperatures, confirming its accuracy both in correction and independent validation sensors.

Subsequently, a discrete LQI controller was designed to regulate the temperature at the reference point defined by the FBG4 sensor using the observer's state estimates. The closed-loop response is stable, exhibits no overshoot, and respects the actuator's physical constraints. The controlled system simulation demonstrates efficient thermal regulation consistent with the reduced model's dynamics.

Finally, guidelines are proposed for the experimental validation of the thermal control system, emphasizing the integration between the estimation, control, and optical acquisition modules. Overall, this development demonstrates the feasibility of combining distributed optical sensing, FEM-based modeling, and optimal discrete control for precise thermal management in conductive surface systems.

Glosario de términos y símbolos

Actuador térmico (PTC) Dispositivo que convierte energía eléctrica en flujo térmico. En este trabajo se emplea para calentar la mesa térmica mediante control de voltaje o modulación por ancho de pulso (PWM).

Balanced Truncation Método de reducción de orden que conserva los modos más relevantes del sistema en términos de controlabilidad y observabilidad, eliminando aquellos con baja energía de Hankel.

Coefficiente de convección (h_v) Parámetro que representa la transferencia de calor entre la superficie del material y el aire ambiente, en $\text{W}/(\text{m}^2 \text{ } ^\circ\text{C})$.

Conducción térmica Mecanismo de transferencia de calor debido al gradiente de temperatura en un sólido.

Control LQI (Linear Quadratic Integral) Controlador óptimo que combina realimentación de estado y acción integral, asegurando estabilidad y error estacionario nulo ante referencias constantes.

Detectabilidad Propiedad que garantiza que los modos inestables del sistema sean observables. Si todos los modos no observables son estables, el sistema es detectable.

Discretización ZOH (Zero-Order Hold) Conversión de un modelo continuo a discreto suponiendo que la entrada se mantiene constante durante el intervalo de muestreo T_s .

FBG (Fiber Bragg Grating) Sensor óptico que refleja una longitud de onda dependiente de la temperatura. Permite mediciones distribuidas sobre la superficie de la mesa térmica.

Ganancia del observador (L_d) Matriz de realimentación que define la rapidez de convergencia del observador de Luenberger.

Matriz de masa (M) Representa la capacidad calorífica del sistema, asociando la variación de temperatura con la energía almacenada.

Matriz de rigidez (K) Define la relación entre gradientes de temperatura y flujo de calor, determinada por la conductividad térmica del material.

Modelo FEM (Finite Element Method) Modelo numérico basado en la ecuación de difusión del calor, que aproxima la distribución espacial y temporal de temperatura mediante elementos finitos.

Observabilidad Propiedad que indica si es posible reconstruir el estado interno del sistema a partir de sus salidas medidas.

Observador de Luenberger Estimador de estados que replica la dinámica del sistema y corrige los errores de estimación mediante las mediciones reales.

PWM (Pulse Width Modulation) Técnica de modulación que controla la potencia media aplicada a un actuador mediante pulsos de diferente duración.

Índice general

Agradecimientos	II
Resumen	III
Abstract	IV
Glosario de términos y símbolos	V
Índice de figuras	X
Índice de tablas	XI
1. Introducción	1
1.1. Objetivos	2
1.2. Estructura de la memoria	2
2. Sensores de Fibra Óptica : Fiber Bragg Grating.	4
2.1. Fundamentos Teóricos de los sensores FBG	4
2.1.1. Sensores FBG y su relación con la temperatura y el strain	5
2.1.2. Medición de temperatura con FBG	5
2.1.3. Interrogación de sensores FBG	6
2.1.4. Multiplexación de sensores FBG	7
2.2. Implementación Experimental en la mesa Térmica	8
2.2.1. Calibración Experimental.	9
2.2.2. Mesa Térmica y ubicación de sensores FBG	12
2.2.3. Resultados Obtenidos	13
3. Modelamiento mediante Método de Elementos Finitos	15
3.1. Fundamentos del Método de Elementos Finitos	15
3.1.1. Condiciones de borde en FEM	16
3.1.2. Caso unidimensional	17
3.2. Ecuación de Difusión de calor por convección en 2D	21
3.2.1. Parámetros físicos	22
3.2.2. Forma débil (método de Galerkin)	22
3.2.3. Aproximación de la solución y funciones de forma	22
3.2.4. Sistema elemental	22

3.3.	Implementación Computacional MATLAB	23
3.3.1.	Resultados Obtenidos	28
3.4.	Validación modelo FEM con sensores FBG	32
3.4.1.	Identificación de parámetros	33
4.	Estimación y Control de Temperatura	39
4.1.	Modelo en espacio de estados a partir de FEM	39
4.2.	Observador de Luenberger	40
4.2.1.	Observador de Luenberger en tiempo discreto	41
4.2.2.	Observabilidad, rango y detectabilidad	42
4.2.3.	Aplicación al modelo térmico	43
4.2.4.	Obtención de la ganancia del observador en discreto	45
4.3.	Implementación Computacional Observador	46
4.3.1.	Preparación de datos y sincronización temporal	47
4.3.2.	Discretización ZOH con término afín	47
4.3.3.	Reducción de orden preservando I/O	47
4.3.4.	Diseño del observador por place	48
4.3.5.	Chequeos de observabilidad y detectabilidad	48
4.3.6.	Inicialización consistente y simulación	49
4.4.	Resultados Obtenidos	49
4.4.1.	Reducción de orden del modelo FEM	49
4.4.2.	Matrices reducidas obtenidas	49
4.4.3.	Autovalores y estabilidad	51
4.4.4.	Chequeo de observabilidad y detectabilidad	52
4.4.5.	Resultados de estimación del observador	53
4.5.	Control de Temperatura	55
4.5.1.	Control de temperatura con PTC mediante regulador LQI discreto	55
4.5.2.	Modelo en desviaciones	56
4.5.3.	Referencia y error térmico	56
4.5.4.	Acción integral	57
4.5.5.	Criterio de control LQI	57
4.5.6.	Saturación del actuador	58
4.6.	Implementación Computacional deControl	58
4.6.1.	Carga del modelo y parámetros de simulación	58
4.6.2.	Discretización y reducción de orden	59
4.6.3.	Formulación del control LQI discreto	59
4.6.4.	Observador discreto de estados	59
4.6.5.	Saturación del actuador y simulación del lazo cerrado	59
4.7.	Resultado Obtenido	60

4.8. Sugerencia de Implementación para Validación de Control Térmico	61
5. Conclusiones	63

Índice de figuras

2.1. Diagrama de bloques de la arquitectura interna del interrogador óptico HY-PERION si155 [1].	7
2.2. Esquema experimental [1].	8
2.3. Esquema de calibración planteado [1].	9
2.4. Longitud de onda de Bragg vs temperatura con ajuste lineal para el sensor FBG 6 con $\lambda_B = 1570[nm]$	11
2.5. Posicionamiento de sensores FBG y PTC en la mesa térmica de cobre. . . .	12
2.6. Montaje experimental en laboratorio Lyapunov	13
2.7. Resultados Mediciones Reales 6 sensores FBG	14
3.1. Discretización de una barra unidimensional en elementos finitos.	18
3.2. Aproximación lineal en el elemento e y desplazamientos nodales.	20
3.3. Comparación de mallas triangulares generadas con <code>mesh_triangu</code> . Al aumentar N crece la densidad de nodos y disminuye el tamaño de los elementos. Azul: nodos; rojo: elementos.	26
3.4. Resultados Modelo FEM MATLAB	28
3.5. Campo de temperatura transitorio — malla $N = 3$	29
3.6. Campo de temperatura transitorio — malla $N = 4$	29
3.7. Campo de temperatura transitorio — malla $N = 4$	31
3.8. Resultados Modelo FEM y Medidas Reales FBG	32
3.9. Comparación entre modelo FEM y mediciones reales utilizando parámetros ajustados.	36
3.10. Comparación entre modelo FEM y mediciones reales utilizando parámetros estándar.	37
4.1. Comparación real vs. estimado.	53
4.2. Errores de estimación.	54
4.3. Control Aplicado con FBG4 , Voltaje Aplicado y Estimacion en FBG5	61
4.4. Esquema Implementación Física.	62

Índice de cuadros

2.1. Parámetros de calibración experimental con modelo lineal para los sensores FBG.	11
2.2. Dimensionamiento básico de la mesa térmica (sin propiedades termo-físicas).	13
3.1. Significado físico de los coeficientes en la ecuación 1D.	18
3.2. Parámetros físicos de la ecuación de conducción de calor en 2D.	22
3.3. Parámetros físicos mesa térmica.	24
3.4. Dimensiones geométricas de la mesa térmica.	24
3.5. Dominio activo (PTC) en la mesa térmica.	24
3.6. Posición de los sensores FBG sobre la mesa térmica (origen en la esquina inferior izquierda).	27
3.7. Comparación de costo computacional por nivel de refinamiento.	30
3.8. Parámetros utilizados en la identificación.	35
3.9. Valores estándar y rangos uscotas de optimización utilizados en la optimización de parámetros.	35
3.10. Parámetros físicos ajustados para el modelo térmico.	36
3.11. Comparación de RMSE entre parámetros estándar y ajustados.	38
4.1. RMSE del observador discreto reducido	54

Capítulo 1

Introducción

En la actualidad, la medición y el control adecuados de la temperatura constituyen aspectos fundamentales en una amplia variedad de procesos científicos e industriales, particularmente en aquellos que requieren mantener condiciones térmicas controladas para garantizar la correcta ejecución de experimentos o el funcionamiento eficiente de sistemas tecnológicos [2]. En este contexto, los avances recientes en tecnologías de sensado y en métodos de modelado térmico han permitido una mejora sustantiva en la comprensión y gestión de la distribución de calor en medios físicos [3].

En el Laboratorio Lyapunov del Departamento de Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María, se dispone de un sistema experimental basado en una mesa de cobre, diseñada específicamente para el estudio del comportamiento térmico [4]. Este sistema se encuentra actualmente en proceso de mejora, con el objetivo de incorporar herramientas avanzadas de modelado matemático y estrategias de control que permitan extender sus capacidades tanto experimentales como de análisis.

No obstante, el sistema actual permite únicamente la medición directa de temperatura, sin contar con un modelo térmico detallado que posibilite predecir con fidelidad la evolución espacial y temporal de la temperatura sobre la superficie de la mesa. Esta limitación dificulta el análisis del fenómeno térmico y restringe la posibilidad de implementar esquemas de control eficaces, dado que no se dispone de una representación matemática del sistema que permita anticipar su comportamiento ante diferentes condiciones de operación [5].

Ante este escenario, se plantea la necesidad de desarrollar un modelo térmico que represente adecuadamente la dinámica de la temperatura en la superficie de la mesa. A su vez, se busca implementar estrategias de control que permitan no solo regular la temperatura de manera adecuada, sino también estimar su comportamiento en regiones no directamente sensadas, como los bordes laterales de la mesa.

Como parte integral de esta iniciativa, se contempla la incorporación de sensores de fibra óptica basados en redes de Bragg (FBG), distribuidos en la superficie de la mesa. Esta tecnología permite realizar mediciones de temperatura con alta sensibilidad y resolución

espacial, lo cual resulta fundamental tanto para la validación del modelo térmico propuesto como para el diseño de observadores de estado y sistemas de control térmico más eficientes y adaptativos [6, 7].

Este trabajo se desarrolla en conjunto con la memoria de **Pablo Arce**, titulada *Monitoreo de temperatura en una placa bidimensional con sensores de fibra óptica basados en rejillas de Bragg* [1], la cual aborda en mayor profundidad el proceso de calibración y adquisición de datos experimentales mediante los sensores FBG. De este modo, ambas memorias se complementan: mientras una se centra en la modelación y el control, la otra garantiza la correcta implementación experimental del sistema de sensado.

1.1. Objetivos

Los objetivos principales de esta memoria son los siguientes:

- Desarrollar un modelo numérico de la conducción de calor en la mesa térmica utilizando el método de elementos finitos (FEM).
- Validar el modelo numérico mediante mediciones experimentales obtenidas con sensores FBG.
- Implementar y evaluar estrategias de control de temperatura basadas en reguladores óptimos (LQI).
- Incorporar un observador de estados que permita estimar la temperatura en zonas no sensadas directamente.
- Validar experimentalmente la estrategia de estimación mediante los sensores FBG.

1.2. Estructura de la memoria

El trabajo se organiza en cinco capítulos:

- **Capítulo 1: Introducción.** Presenta el contexto, motivación, objetivos y alcance de la memoria.
- **Capítulo 2: Sensores de Fibra Óptica (FBG).** Describe los fundamentos de los sensores FBG, su principio de funcionamiento y la implementación experimental en la mesa térmica.
- **Capítulo 3: Modelamiento mediante FEM.** Expone la formulación teórica del método de elementos finitos aplicado a la conducción de calor en 2D, junto con su implementación computacional y validación con sensores FBG.

- **Capítulo 4: Estimación y Control de Temperatura.** Desarrolla el diseño de observadores de estado (Luenberger) y de controlador (LQI).
- **Capítulo 5: Conclusiones.** Resume los aportes principales del trabajo, las validaciones obtenidas y posibles líneas de extensión futura.

Capítulo 2

Sensores de Fibra Óptica : Fiber Bragg Grating.

Los sensores de fibra óptica basados en Fiber Bragg Grating (FBG) han ganado relevancia en la medición de temperatura y deformación debido a su alta sensibilidad, inmunidad electromagnética, bajo peso y capacidad de multiplexado [8]. Estos sensores funcionan como reflectores selectivos de longitud de onda dentro de una fibra óptica monomodo, permitiendo obtener mediciones precisas en entornos industriales y de laboratorio [9].

En el contexto de esta memoria, las FBG se utilizan como sistema de medición no invasivo para capturar el comportamiento térmico de la mesa, proporcionando datos experimentales que luego se comparan con los resultados de un modelo térmico basado en el Método de Elementos Finitos (FEM).

2.1. Fundamentos Teóricos de los sensores FBG

Una FBG consiste en una modulación periódica del índice de refracción inscrita en el núcleo de una fibra óptica. Esta estructura actúa como un filtro selectivo que refleja una longitud de onda específica de la luz incidente, denominada longitud de onda de Bragg. Dicha longitud de onda está determinada por la siguiente relación [9]:

$$\lambda_B = 2n_{\text{ef}}\Lambda \quad (2.1)$$

En esta expresión, λ_B es la longitud de onda reflejada, n_{ef} es el índice de refracción efectivo del modo guiado, y Λ representa el período de la rejilla, es decir, la distancia entre zonas con variación del índice de refracción.

Cualquier variación externa que afecte la temperatura o provoque deformaciones mecánicas (*strain*) en la fibra puede modificar tanto n_{ef} como Λ , generando así un desplazamiento en λ_B . Este principio permite que las FBG funcionen como sensores altamente precisos y

confiables para el monitoreo en tiempo real de condiciones físicas en entornos exigentes [8].

2.1.1. Sensores FBG y su relación con la temperatura y el strain

El uso de FBG como sensores se fundamenta en que la longitud de onda reflejada depende del índice de refracción efectivo del modo guiado y del período de la rejilla. Ambos parámetros son sensibles a la temperatura (ΔT) y a la deformación mecánica ($\Delta \varepsilon$). En primera aproximación lineal [10]:

$$\Delta \lambda_B = k_\varepsilon \Delta \varepsilon + k_T \Delta T \quad (2.2)$$

Entre sus principales ventajas destacan su inmunidad a interferencias electromagnéticas, la posibilidad de multiplexar varios sensores en una sola fibra, así como su tamaño reducido e instalación no invasiva [11].

Discriminación de temperatura y strain. En aplicaciones térmicas como la mesa desarrollada en este trabajo, el objetivo principal es medir temperatura; por ello se busca minimizar la contribución del *strain* en (2.2). En este montaje, las FBG se instalan en la superficie de la placa con apoyo libre (sin pretensión mecánica) y adhesivos de baja contracción, evitando fijaciones rígidas que puedan inducir esfuerzos. Alternativamente, cuando el entorno lo requiere, puede emplearse una FBG “dummy” (no expuesta al gradiente térmico) o pares de FBG co-ubicadas para compensación cruzada temperatura/*strain* [12].

Calibración. Los coeficientes k_ε y k_T se determinan mediante ensayos controlados: (i) variaciones conocidas de temperatura con *strain* nulo para obtener k_T , y (ii) ensayos de carga mecánica a temperatura constante para k_ε . Estos parámetros dependen del tipo de fibra, longitud de onda central y diseño de la rejilla, por lo que su calibración garantiza que la medición sea representativa del fenómeno monitoreado en nuestro sistema [8].

Validez del modelo lineal. La relación (2.2) es válida en rangos moderados de operación (alrededor de la longitud de onda central). En el rango de trabajo de la mesa térmica, el comportamiento se mantiene lineal, lo que permite la estimación de temperatura a partir del corrimiento espectral con errores acotados.

2.1.2. Medición de temperatura con FBG

Cuando una FBG está sometida a un cambio de temperatura, ocurren dos efectos [6, 8]:

1. Expansión térmica del material de la fibra.
2. Variación del índice de refracción efectivo por el efecto termo-óptico.

Ambos modifican la longitud de onda reflejada, y su comportamiento puede modelarse como:

$$\Delta\lambda_B = \lambda_B(\alpha + \xi) \Delta T \quad (2.3)$$

donde α es el coeficiente de expansión térmica de la fibra y ξ el coeficiente termo-óptico del índice de refracción.

En esta investigación, dado que el objetivo principal es medir temperatura en la mesa térmica, se minimiza la influencia del *strain* colocando los sensores sobre la superficie sin tensiones mecánicas y evitando fijaciones rígidas que alteren la lectura térmica.

2.1.3. Interrogación de sensores FBG

Existen diferentes técnicas de interrogación para sensores FBG, cuyo objetivo es detectar la longitud de onda reflejada por cada rejilla. Entre ellas se encuentran los sistemas basados en fuentes de luz blanca acopladas a espectrómetros, que permiten la medición simultánea de múltiples longitudes de onda, y los sistemas con láseres sintonizables que barren un rango definido de longitudes de onda, proporcionando mayor resolución espectral [13].

En este trabajo se emplea el **HYPERION si155** (Luna Innovations), un interrogador óptico de alta precisión que utiliza una **fente de luz de banda ancha (SLED)** en el rango 1500–1600 nm para iluminar los sensores, junto con un **interferómetro de alta resolución** para la detección de las longitudes de onda reflejadas. Esta arquitectura proporciona una resolución espectral de 10 pm, alta estabilidad en la medición y una frecuencia de interrogación de hasta 1 kHz, lo que lo hace especialmente adecuado para el monitoreo térmico de la mesa.

El HYPERION si155 adquiere en tiempo real las mediciones provenientes de los seis sensores FBG instalados en la superficie de la mesa térmica. Cada FBG refleja una longitud de onda específica en función de su temperatura, y la señal reflejada retorna al equipo para su detección, digitalización y registro.

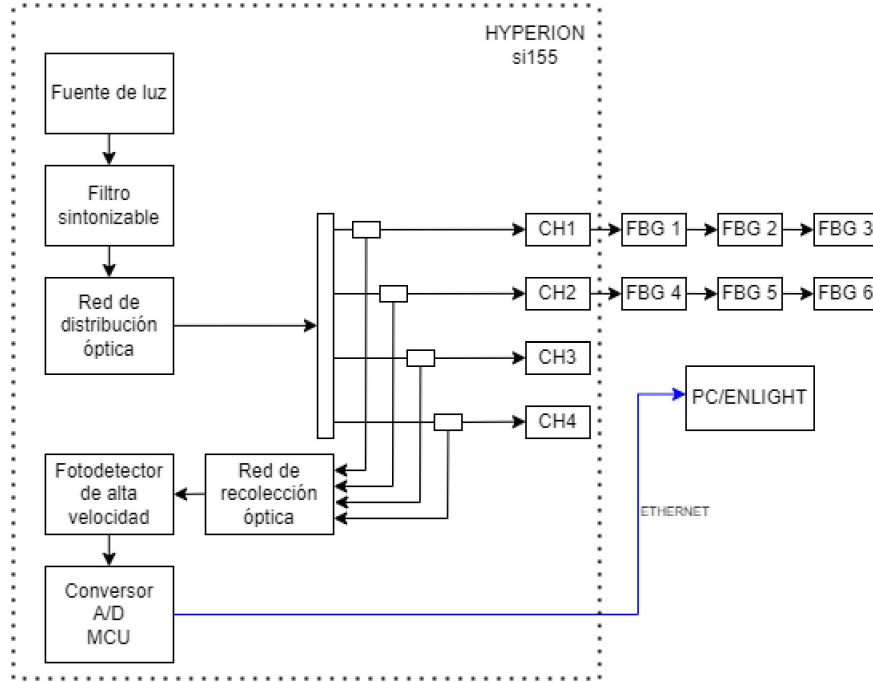


Figura 2.1: Diagrama de bloques de la arquitectura interna del interrogador óptico HYPERION si155 [1].

2.1.4. Multiplexación de sensores FBG

Para identificar múltiples sensores en una misma fibra, se implementa la técnica de multiplexación por división en longitud de onda (Wavelength Division Multiplexing, WDM), en la cual cada FBG se fabrica con una longitud de onda de Bragg distinta dentro del rango de operación del interrogador [11].

En la mesa térmica desarrollada, esta técnica permite obtener lecturas simultáneas y diferenciadas de cada sensor sin aumentar la complejidad del sistema. Se instalaron seis sensores FBG con longitudes de onda comprendidas entre 1525 nm y 1570 nm, distribuidos en dos canales del interrogador, evitando el solapamiento espectral y asegurando mediciones estables en todas las posiciones de interés.

La elección de WDM responde a su simplicidad de implementación, su compatibilidad con un sistema de baja cantidad de sensores y su capacidad para entregar información térmica en tiempo real con alta resolución espectral, sin necesidad de recurrir a configuraciones más complejas como WDM/TDM, más adecuadas para sistemas distribuidos o de gran escala.

2.2. Implementación Experimental en la mesa Térmica

En la Figura 2.1 se presenta el esquema general de conexión e implementación de los componentes necesarios para el funcionamiento del sistema de sensado basado en FBG. La disposición consiste en una red de sensores FBG multiplexados, instalados a lo largo de dos bordes opuestos de la mesa térmica: tres sensores ubicados en serie a lo largo del ancho y otros tres distribuidos a lo largo del largo de la superficie.

Estos sensores están conectados a dos canales independientes del interrogador óptico HYPERION si155, el cual ha sido desarrollado por Luna Innovations. Este dispositivo emplea un láser de barrido de alta resolución (swept-wavelength laser), capaz de recorrer un rango de longitudes de onda de forma rápida y precisa, permitiendo identificar individualmente la señal reflejada por cada sensor FBG.

El interrogador se comunica con el computador a través de una conexión Ethernet, donde se utiliza el software de adquisición ENLIGHT. Esta plataforma permite visualizar en tiempo real el espectro reflejado por los sensores, facilitando la interpretación de las longitudes de onda de Bragg y su posterior conversión a temperatura.

Por otra parte, se incorporan resistencias calefactoras dispositivo basado en un material con coeficiente de temperatura positivo (PTC por sus siglas en inglés) como actuadores sobre la superficie de la mesa, cuya función es entregar calor de forma pasiva. Estas resistencias aumentan su temperatura al recibir tensión, generando un gradiente térmico en la superficie. Aunque no se cuenta aún con un sistema de control activo, su comportamiento permite estudiar la respuesta térmica de la mesa, que será monitoreada mediante los sensores FBG.

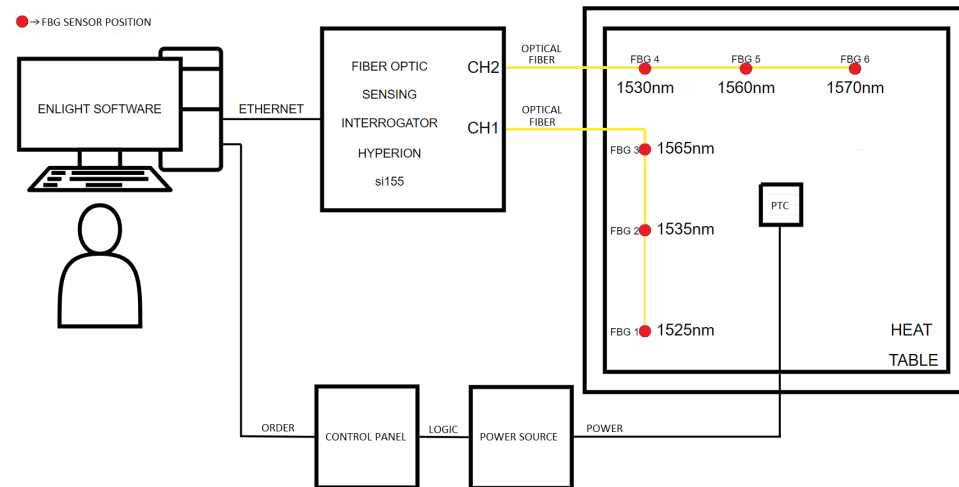


Figura 2.2: Esquema experimental [1].

2.2.1. Calibración Experimental.

Existen diversos métodos para llevar a cabo la calibración de sensores FBG. En este proyecto, se empleará un enfoque experimental basado en un procedimiento empírico, cuyo objetivo es establecer una relación entre la longitud de onda reflejada y la temperatura.

Aunque la sensibilidad térmica es teóricamente conocida, cada FBG presenta variaciones de fabricación (en el período de la rejilla y el índice de refracción).

Por eso, es necesario calibrar individualmente cada sensor para establecer la relación exacta entre el corrimiento de longitud de onda y la temperatura real medida.

Para ello, los sensores FBG utilizados se dispondrán en paralelo, con una separación mínima entre ellos, sobre un recipiente que contiene agua caliente, tal como se muestra en la Figura 2.3. La temperatura del agua será lo suficientemente elevada para cubrir el rango deseado, pero sin exceder los límites de operación seguros del sensor.

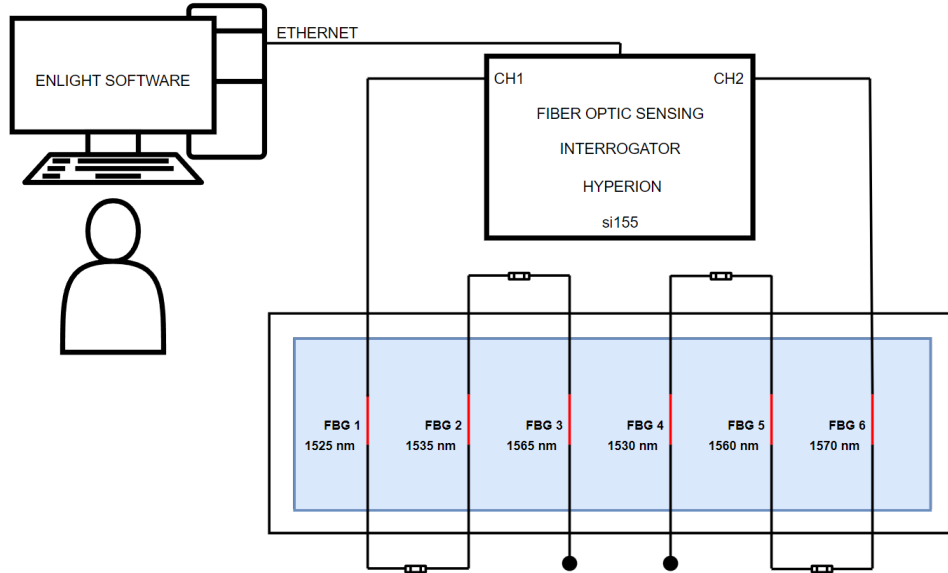


Figura 2.3: Esquema de calibración planteado [1].

Durante el proceso, se registrarán lecturas de temperatura utilizando un sensor de referencia cada 5°C, en un rango que va desde los 60°C hasta los 20°C. Simultáneamente, se obtendrán los datos correspondientes a la longitud de onda reflejada por cada FBG a través del software de adquisición. Con estos valores, se construirá una gráfica de correlación que permitirá ajustar una curva de calibración entre temperatura y longitud de onda reflejada, la cual será utilizada posteriormente para la conversión de datos en el sistema de monitoreo térmico.

Los datos experimentales fueron procesados mediante códigos desarrollados en **MATLAB**, en el marco de la memoria de **Pablo Arce**. El primero de estos códigos, denominado **Promedios_Bragg.m**, se emplea para calcular los promedios de la longitud de onda de Bragg

en función de la temperatura de cada sensor, guardando los resultados en un archivo .csv.

Posteriormente, el script `Resultados_Ajuste_FBG.m` procesa dicho archivo y realiza los ajustes lineales y cuadráticos para cada sensor, calculando además los coeficientes de determinación R^2 , el error cuadrático medio (RMSE) y la incertidumbre expandida en zonas externas al rango calibrado (10–20 °C y 60–70 °C).

Finalmente, este programa genera los gráficos individuales de temperatura vs. λ_B para cada sensor, almacenando tanto las gráficas como los coeficientes de ajuste en una carpeta de resultados.

Para efectos prácticos, se aplica un modelo de *regresión lineal* con el fin de encontrar la relación existente entre la longitud de onda de Bragg y la temperatura. Como primer paso en este proceso, se implementó dicho modelo considerando que, bajo condiciones de tensión constante, los sensores FBG presentan un comportamiento altamente lineal. El modelo se expresa de la siguiente forma:

$$T = b \cdot \lambda_B + a \quad (2.4)$$

donde:

- λ_B : longitud de onda de Bragg medida,
- T : temperatura en grados Celsius,
- a : término independiente (intercepto),
- b : pendiente del ajuste, asociada a la sensibilidad térmica del sensor en °C/nm.

Para evaluar la calidad del modelo, se emplearon métricas estadísticas ampliamente reconocidas en análisis de regresión: el coeficiente de determinación R^2 y el error cuadrático medio (RMSE). Un valor elevado de R^2 cercano a la unidad indica que la variación de la longitud de onda explica de manera casi completa la variación de la temperatura, lo que confirma la validez del modelo lineal dentro del rango experimental. Por su parte, un valor bajo de RMSE refleja que el error de estimación en grados Celsius es reducido, garantizando que la incertidumbre asociada a la medición sea mínima y que el sensor pueda ser utilizado en aplicaciones de control térmico con alta confiabilidad.

En conjunto, la combinación de pendientes consistentes entre sensores, valores de R^2 superiores a 0.99 y errores RMSE del orden de décimas de grado Celsius permiten concluir que el modelo de regresión lineal es adecuado y ofrece una representación precisa de la relación entre temperatura y longitud de onda de Bragg para los sensores FBG calibrados.

Tabla 2.1: Parámetros de calibración experimental con modelo lineal para los sensores FBG.

FBG	Pendiente (b)	Intercepto (a)	R^2	RMSE [°C]
1	119.64	-182407.69	0.9984	0.51
2	121.98	-187195.36	0.9976	0.62
3	118.17	-184899.66	0.9981	0.58
4	124.62	-190626.67	0.9967	0.72
5	116.98	-182454.94	0.9923	1.04
6	116.05	-182167.83	0.9990	0.37

Como ejemplo representativo del proceso de calibración, en la Figura 2.4 se presenta el ajuste lineal correspondiente al sensor FBG6. En este caso se observa una fuerte correlación lineal entre la longitud de onda de Bragg y la temperatura, con un coeficiente de determinación de $R^2 = 0,9990$ y una pendiente de $116.05 \text{ }^\circ\text{C}/\text{nm}$, valores que se encuentran dentro del rango reportado en la literatura para fibras ópticas estándar.

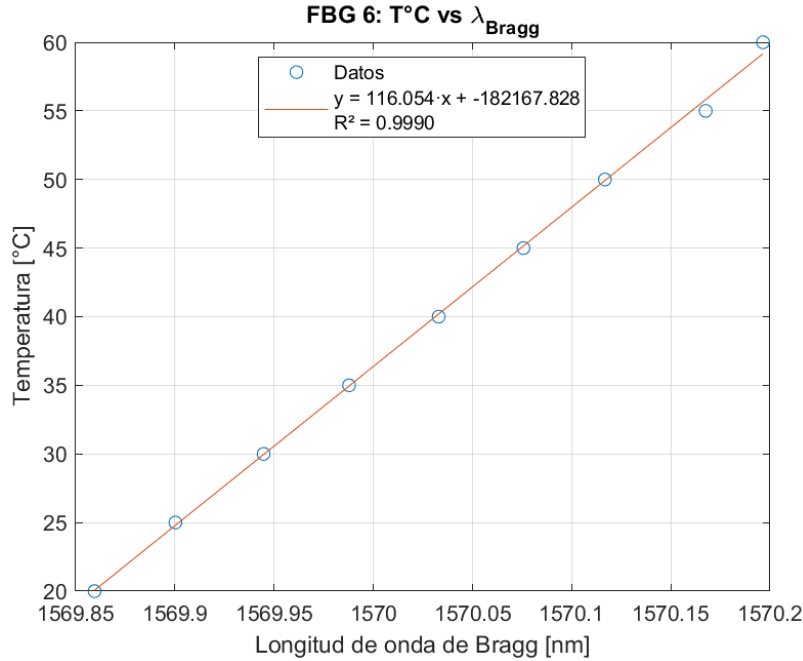


Figura 2.4: Longitud de onda de Bragg vs temperatura con ajuste lineal para el sensor FBG 6 con $\lambda_B = 1570[\text{nm}]$.

El resto de los sensores FBG presentaron un comportamiento análogo, mostrando coeficientes de determinación R^2 superiores a 0.99 y errores RMSE menores a $1.1 \text{ }^\circ\text{C}$, lo que evidencia la linealidad y consistencia del modelo en todos los casos. Por esta razón, se incluye únicamente la gráfica del FBG6 como referencia, mientras que los parámetros obtenidos para cada sensor se resumen en la Tabla 2.1.

2.2.2. Mesa Térmica y ubicación de sensores FBG

La distribución espacial de los sensores FBG y del calefactor PTC se muestra en la Fig. 2.5. Se tomó el *centro del PTC* como origen del sistema de coordenadas para todas las mediciones geométricas, y se registraron las distancias euclidianas desde cada FBG hasta dicho centro, junto con las separaciones a los bordes de la placa para trazabilidad experimental. Las FBG se dispusieron sobre los laterales de la placa (configuración en “L”) con el fin de minimizar la influencia de deformaciones mecánicas y privilegiar la respuesta térmica, fijándose mediante cinta térmica sin aplicar esfuerzos longitudinales. La placa se montó sobre apoyos plásticos sobre base rígida de acrílico, lo que otorga estabilidad durante la manipulación del sistema; se evitó colocar adhesivo bajo el PTC para asegurar un buen acoplamiento térmico en la zona activa y permitir la expansión libre del cobre alrededor del actuador. Esta configuración facilita la repetibilidad de las mediciones y la integración con el modelo numérico, donde el origen en el centro del PTC simplifica la definición de condiciones de contorno y la comparación con los datos de calibración FBG.

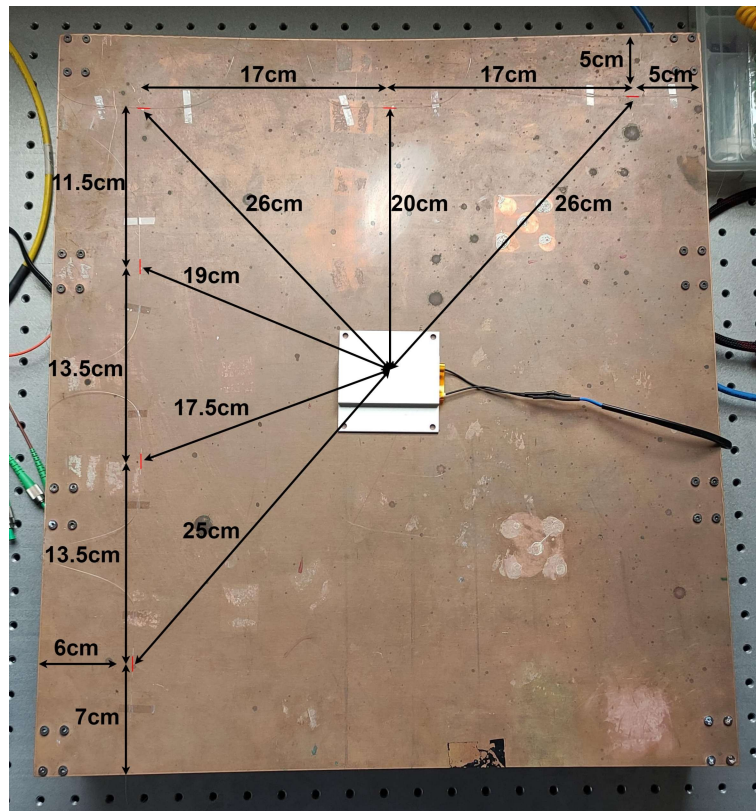


Figura 2.5: Posicionamiento de sensores FBG y PTC en la mesa térmica de cobre.

Parámetro	Valor	Unidad
Material de la placa	Cobre (Cu)	–
Dimensiones en placa (L × W)	50 × 45	cm
Espesor de la placa	0.8	mm
Actuador PTC (lado × lado)	70 × 70	mm
Referencia geométrica	Centro del PTC	–

Tabla 2.2: Dimensionamiento básico de la mesa térmica (sin propiedades termo-físicas).

2.2.3. Resultados Obtenidos

En la Figura 2.6 se presenta el montaje experimental implementado en el laboratorio Lyapunov para la obtención de los datos. El sistema consta de la mesa térmica de cobre con el calefactor PTC fijado en la zona central, sobre la cual se dispusieron los sensores FBG en posiciones previamente definidas (ver Fig. 2.5).

El interrogador óptico, visible a la izquierda en la figura, se utilizó para excitar las fibras y registrar en tiempo real el corrimiento de la longitud de onda de Bragg de cada sensor. A la derecha se observa el computador portátil destinado al almacenamiento y procesamiento inicial de los datos, conectado al interrogador mediante un enlace de fibra óptica y comunicación USB. Este montaje permitió realizar la adquisición sincronizada de temperaturas a través de los sensores FBG y del actuador PTC bajo distintos escenarios de excitación térmica, generando la base de datos utilizada posteriormente para los análisis y comparaciones con el modelo numérico.

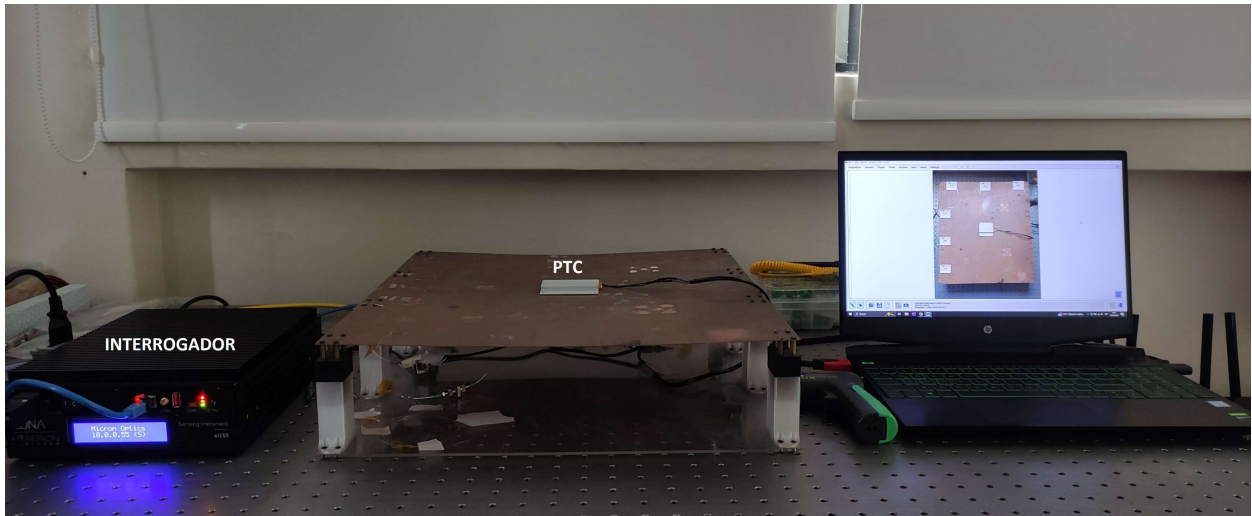


Figura 2.6: Montaje experimental en laboratorio Lyapunov

En la Figura 2.7 se presentan las curvas de temperatura en función del tiempo obtenidas

a partir de los seis sensores FBG instalados sobre la superficie de la mesa térmica. Los sensores se distribuyeron estratégicamente para cubrir diferentes zonas de interés, permitiendo capturar posibles gradientes térmicos durante el ensayo.

El procedimiento consistió en aplicar calor mediante el actuador térmico hasta alcanzar una temperatura de régimen aproximado entre 48 y 58 manteniéndola estable durante aproximadamente 8 minutos antes de iniciar la etapa de enfriamiento natural. En las gráficas se aprecia claramente la fase de aumento rápido de temperatura, seguida de un plateau correspondiente al régimen estable, y finalmente un descenso progresivo una vez interrumpida la alimentación del actuador.

Temperatura vs Tiempo - Mediciones Reales Sensores FBG

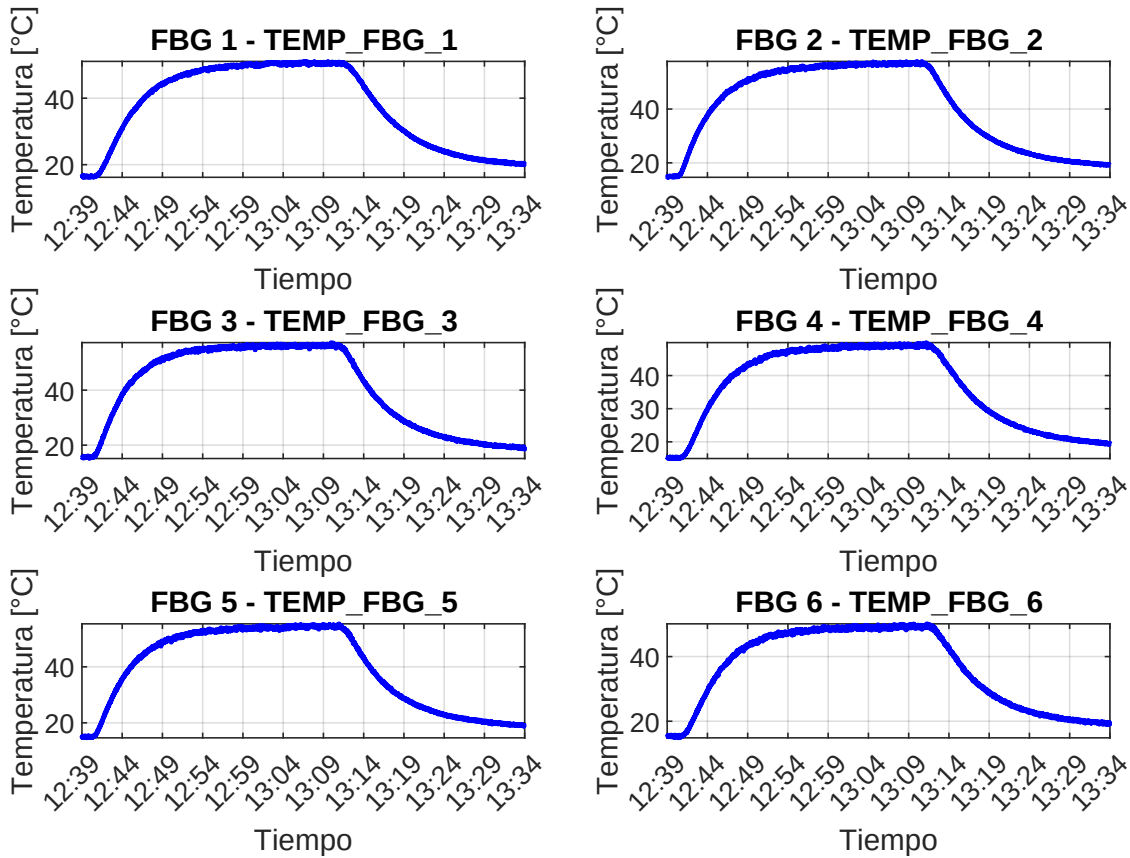


Figura 2.7: Resultados Mediciones Reales 6 sensores FBG

Las pequeñas diferencias en la temperatura máxima alcanzada por cada FBG se atribuyen a variaciones locales en la disipación térmica y a la proximidad relativa de cada sensor al actuador. Por ejemplo, los sensores más cercanos a la zona central tienden a registrar valores ligeramente superiores y alcanzan el régimen más rápido, mientras que los ubicados en zonas periféricas presentan una respuesta más lenta y temperaturas pico menores.

Capítulo 3

Modelamiento mediante Método de Elementos Finitos

Modelar el comportamiento de sistemas físicos permite predecir su evolución temporal y analizar su respuesta ante diversas condiciones de operación [14]. Esta capacidad de anticipación facilita la toma de decisiones fundamentadas desde las primeras etapas de diseño hasta la validación experimental.

En este capítulo se presenta el enfoque teórico del Método de los Elementos Finitos (FEM, por sus siglas en inglés), comenzando con un caso unidimensional que permite comprender los principios fundamentales de la técnica. Luego, se extiende el análisis a un caso bidimensional, aplicado a la distribución y evolución temporal de la temperatura en una mesa térmica. Este desarrollo progresivo permite comprender cómo se formula el modelo matemático y cómo se implementa de forma numérica.

Finalmente, se describe la formulación matricial resultante, utilizada en la implementación en MATLAB, lo que permitirá simular, validar resultados y analizar su coherencia con el comportamiento térmico experimental.

3.1. Fundamentos del Método de Elementos Finitos

El Método de los Elementos Finitos es una técnica numérica ampliamente utilizada para resolver ecuaciones diferenciales parciales (EDP) que modelan fenómenos físicos como la mecánica de sólidos, la transferencia de calor, la dinámica de fluidos o el electromagnetismo. Su principal fortaleza es la capacidad para aproximar soluciones en dominios complejos mediante la discretización del dominio físico en subregiones más simples, denominadas elementos [14].

El FEM sigue tres pasos fundamentales:

1. **Discretización:** dividir el dominio en elementos más pequeños, conectados en puntos llamados nodos.

2. **Aproximación:** expresar la variable de interés dentro de cada elemento mediante funciones de forma, que aproximan la solución exacta.
3. **Ensamblaje:** combinar los aportes de cada elemento en un sistema global de ecuaciones.

En este trabajo, el FEM se aplicará para modelar la conducción de calor en una mesa térmica, empleando el método de los residuos ponderados, específicamente en su variante de Galerkin. Esta formulación permite transformar la ecuación diferencial en una forma integral más adecuada para el cálculo numérico.

3.1.1. Condiciones de borde en FEM

En la formulación del Método de los Elementos Finitos (FEM), las condiciones de borde permiten completar el problema y obtener una solución única para la variable de interés (por ejemplo, la temperatura en un problema de conducción de calor).

Estas condiciones se aplican en los extremos del dominio y se clasifican comúnmente en tres tipos: **Dirichlet**, **Neumann** y **Robin**.

Para describirlas, se introduce la siguiente notación:

- Γ_D : parte del borde del dominio donde se imponen condiciones de Dirichlet.
- Γ_N : parte del borde donde se imponen condiciones de Neumann.
- Γ_R : parte del borde donde se imponen condiciones mixtas (Robin), si aplica.

Condiciones de Dirichlet: Se prescribe directamente el valor de la variable de interés (por ejemplo, temperatura) sobre la frontera Γ_D . Matemáticamente se expresa como:

$$T(x) = T_0 \quad \text{en } \Gamma_D \quad (3.1)$$

donde T_0 es un valor conocido.

En la implementación del sistema global, estas condiciones se imponen modificando las filas y columnas correspondientes a los nodos con temperatura fija [15].

Condiciones de Neumann: Se prescribe el flujo de calor sobre la frontera Γ_N , lo que equivale a imponer la derivada normal del campo de temperatura:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = q_0 \quad \text{en } \Gamma_N \quad (3.2)$$

donde:

- k es la conductividad térmica,

- q_0 es el flujo de calor impuesto,
- $\frac{\partial T}{\partial n}$ es la derivada normal de la temperatura respecto a la frontera.

Este tipo de condición aparece en la formulación débil del problema como un *término de borde*, que contribuye al vector de fuerzas del sistema global [16].

Condiciones mixtas (Robin): Representan un *intercambio de calor con el ambiente*, modelado como un flujo proporcional a la diferencia de temperatura con un valor de referencia. Se expresan como:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h_c(T - T_{\text{amb}}) \quad \text{en } \Gamma_R \quad (3.3)$$

donde:

- h_c es el coeficiente de convección,
- T_{amb} es la temperatura ambiente.

Este tipo de condición genera simultáneamente un aporte a la *matriz global* y al *vector de fuerzas* del sistema.

En el contexto del Método de los Elementos Finitos, la correcta aplicación de las condiciones de borde resulta esencial para garantizar una solución única y físicamente consistente del problema. Las condiciones de Dirichlet, Neumann y Robin se incorporan en distintas etapas del procedimiento numérico, dependiendo de su naturaleza. Las condiciones de Dirichlet establecen directamente el valor de la variable en regiones específicas del dominio y se aplican posteriormente al ensamblaje del sistema, modificando las ecuaciones globales para asegurar que la solución cumpla dichas restricciones. Las condiciones de Neumann, que especifican el flujo o gradiente de la variable en la frontera, se integran de forma natural en la formulación débil y aportan únicamente al vector de fuerzas sin alterar la estructura de la matriz global. Por su parte, las condiciones de Robin representan intercambios de energía con el entorno —como procesos de convección— y generan contribuciones tanto en la matriz global como en el vector de fuerzas durante el ensamblaje. En conjunto, estas condiciones permiten capturar de manera adecuada los efectos físicos en los límites del dominio, garantizando que la simulación numérica refleje con precisión el comportamiento térmico bajo estudio.

3.1.2. Caso unidimensional

Para ilustrar el procedimiento del FEM, se parte de la ecuación diferencial en forma divergente para un problema lineal 1D, expresada en la Ecuación 3.4.

$$\frac{d}{dx} \left(A(x) \frac{du}{dx} \right) + B(x) \frac{du}{dx} + C(x)u = 0 \quad (3.4)$$

En el contexto de la conducción térmica, estos términos representa

Parámetro	Significado físico	Unidades
A	Coefficiente de difusión térmica ($h k$)	W/m
B	Coefficiente convectivo (flujo dirigido)	W/m ²
C	Pérdidas o generación proporcional a u	W/m ³

Tabla 3.1: Significado físico de los coeficientes en la ecuación 1D.

Consideremos una barra unidimensional definida en el intervalo $[a, b]$, discretizada en n elementos conectados por $n + 1$ nodos, tal como se muestra en la Figura 3.1.

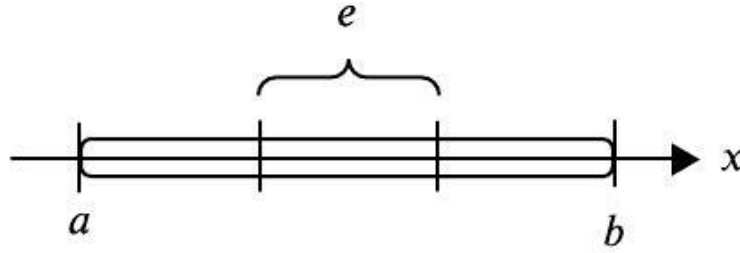


Figura 3.1: Discretización de una barra unidimensional en elementos finitos.

Forma débil (método de Galerkin)

El método de *residuos ponderados* conduce a la formulación débil al exigir que el error de la solución aproximada sea ortogonal a un conjunto de funciones de prueba. En particular, el *método de Galerkin* utiliza las mismas funciones para interpolar la solución y para ponderar el residuo, garantizando estabilidad y consistencia en la aproximación.

Este procedimiento permite:

- Reducir las exigencias de continuidad sobre la solución (relajando derivadas de orden superior),
- Reformular el problema diferencial en una expresión integral,
- Preparar la ecuación para su discretización mediante elementos finitos.

Al multiplicar la ecuación diferencial por una función de prueba w e integrar en el dominio Ω , y luego aplicar integración por partes al término difusivo, se obtiene la forma débil indicada

en la Ecuación 3.5. El término de borde $[w A u_x]_{\partial\Omega}$ permite incorporar condiciones de frontera naturales dentro de la formulación.

Los términos utilizados son:

- u : variable de estado (temperatura en este contexto),
- w : función de prueba asociada a la formulación débil,
- Ω : dominio espacial de análisis,
- $\partial\Omega$: fronteras del dominio,
- A : coeficiente difusivo (conducción térmica),
- B : coeficiente de transporte o convección (si existe flujo térmico convectivo),
- C : término de reacción o disipación,
- u_x, w_x : derivadas espaciales de u y w .

Se multiplica la Ecuación 3.4 por una función de prueba w y se integra sobre el dominio[14]. Aplicando integración por partes al término difusivo se obtiene:

$$-\int_{\Omega} w_x A u_x dx + \int_{\Omega} w B u_x dx + \int_{\Omega} w C u dx + [w A u_x]_{\partial\Omega} = 0 \quad (3.5)$$

Aproximación de la solución y funciones de forma

En cada elemento e se aproxima $u(x)$ por un polinomio lineal:

$$\hat{u}^e(x) = \alpha_0^e + \alpha_1^e x = \begin{bmatrix} 1 & x \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \alpha_0^e \\ \alpha_1^e \end{bmatrix} = \mathbf{p}(x)^T \hat{\boldsymbol{\alpha}}^e. \quad (3.6)$$

Evalando en los nodos del elemento x_1^e, x_2^e :

$$\begin{bmatrix} \hat{u}^e(x_1^e) \\ \hat{u}^e(x_2^e) \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{bmatrix}}_{\mathbf{M}_c^e} \begin{bmatrix} \alpha_0^e \\ \alpha_1^e \end{bmatrix} \Rightarrow \hat{\boldsymbol{\alpha}}^e = (\mathbf{M}_c^e)^{-1} \hat{\mathbf{u}}^e, \quad (3.7)$$

y por tanto

$$\hat{u}^e(x) = \mathbf{p}(x) (\mathbf{M}_c^e)^{-1} \hat{\mathbf{u}}^e = \underbrace{\mathbf{N}^e(x)}_{\text{funciones de forma}} \hat{\mathbf{u}}^e, \quad \hat{\mathbf{u}}^e = \begin{bmatrix} \hat{u}_1^e \\ \hat{u}_2^e \end{bmatrix}. \quad (3.8)$$

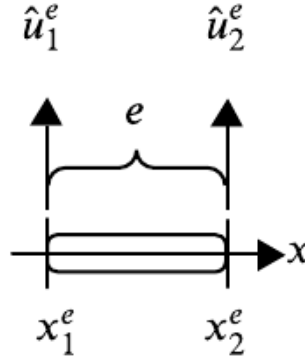


Figura 3.2: Aproximación lineal en el elemento e y desplazamientos nodales.

Sistema elemental y ensamblaje

Usando $w = \mathbf{N}^e \hat{\mathbf{w}}^e$ (Galerkin) en (3.5), se obtiene para cada elemento:

$$\hat{\mathbf{w}}^{eT} \left(\underbrace{\mathbf{K}^e}_{\text{difusión}} + \underbrace{\mathbf{G}^e}_{\text{convección}} + \underbrace{\mathbf{R}^e}_{\text{reacción}} \right) \hat{\mathbf{u}}^e + \hat{\mathbf{w}}^{eT} \hat{\mathbf{f}}_{\partial\Omega}^e = 0, \quad (3.9)$$

con

$$\mathbf{K}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}_x^{eT} A \mathbf{N}_x^e dx, \quad \mathbf{G}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{eT} B \mathbf{N}_x^e dx, \quad \mathbf{R}^e = \int_{\Omega^e} \mathbf{N}^{eT} C \mathbf{N}^e dx,$$

y el término de borde (según condiciones de contorno) $\hat{\mathbf{f}}_{\partial\Omega}^e$.

Tras ensamblar con las matrices de conectividad L^e :

$$\boxed{(\mathbf{K} + \mathbf{G} + \mathbf{R}) \hat{\mathbf{u}} = \hat{\mathbf{f}}} \quad (3.10)$$

$$\mathbf{K} = \sum_e L^{eT} \mathbf{K}^e L^e, \quad (3.11)$$

$$\mathbf{G} = \sum_e L^{eT} \mathbf{G}^e L^e, \quad (3.12)$$

$$\mathbf{R} = \sum_e L^{eT} \mathbf{R}^e L^e. \quad (3.13)$$

Donde las variables y símbolos utilizados son:

- $u(x)$: solución exacta del problema (temperatura en función de la posición).
- $\hat{u}^e(x)$: aproximación de la solución dentro del elemento e .
- e : índice del elemento finito considerado.

- x : coordenada espacial dentro del dominio 1D.
- x_1^e, x_2^e : coordenadas de los nodos del elemento e .
- $\hat{u}_1^e, \hat{u}_2^e$: valores aproximados de la solución (temperaturas nodales) en los nodos del elemento e .
- $\hat{\mathbf{u}}^e = \begin{bmatrix} \hat{u}_1^e \\ \hat{u}_2^e \end{bmatrix}$: vector de temperaturas nodales del elemento e .
- α_0^e, α_1^e : coeficientes del polinomio lineal que aproxima la solución en el elemento e .
- $\hat{\boldsymbol{\alpha}}^e = \begin{bmatrix} \alpha_0^e \\ \alpha_1^e \end{bmatrix}$: vector de coeficientes del polinomio del elemento.
- $\mathbf{p}(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ x \end{bmatrix}$: vector base del polinomio lineal utilizado para aproximar $u(x)$.
- $\mathbf{M}_c^e = \begin{bmatrix} 1 & x_1^e \\ 1 & x_2^e \end{bmatrix}$: matriz de interpolación nodal del elemento.
- $\mathbf{N}^e(x)$: funciones de forma lineales del elemento e , usadas para interpolar la solución dentro del elemento.

3.2. Ecuación de Difusión de calor por convección en 2D

Para modelar la conducción de calor en una placa delgada de espesor constante h con generación interna y pérdidas por convección al ambiente, se considera la ecuación en dos dimensiones:

$$\rho C_p h \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \nabla \cdot (hk \nabla T(x, y, t)) + h Q_{\text{in}}(x, y, t) - h h_v (T(x, y, t) - T_{\text{amb}}). \quad (3.14)$$

3.2.1. Parámetros físicos

Parámetro	Significado físico	Unidades
ρ	Densidad del material	kg/m ³
C_p	Calor específico	J/(kg · °C)
h	Espesor de la placa	m
k	Conductividad térmica	W/(m · °C)
Q_{in}	Potencia térmica aplicada por unidad de área	W/m ²
h_v	Coefficiente de convección	W/(m ² · °C)
T_{amb}	Temperatura ambiente	°C

Tabla 3.2: Parámetros físicos de la ecuación de conducción de calor en 2D.

3.2.2. Forma débil (método de Galerkin)

Multiplicando la Ecuación 3.14 por una función de prueba $w(x, y)$ e integrando sobre el dominio Ω , se obtiene:

$$\int_{\Omega} \rho C_p h w \frac{\partial T}{\partial t} d\Omega = - \int_{\Omega} h k \nabla w \cdot \nabla T d\Omega + \int_{\Omega} h Q_{in} w d\Omega - \int_{\Omega} h h_v w (T - T_{amb}) d\Omega. \quad (3.15)$$

3.2.3. Aproximación de la solución y funciones de forma

En cada elemento triangular e , la temperatura se aproxima mediante funciones de forma lineales:

$$T^e(x, y, t) \approx N(x, y) \hat{T}^e(t) \quad (3.16)$$

donde:

- $N(x, y) = [N_1(x, y), N_2(x, y), N_3(x, y)]$: funciones de forma lineales para el triángulo.
- $\hat{T}^e(t)$: vector de temperaturas nodales del elemento.

3.2.4. Sistema elemental

Sustituyendo la aproximación (3.16) en la forma débil (3.15) se obtiene, para cada elemento, el sistema:

$$M^e \frac{d\hat{T}^e}{dt} + K^e \hat{T}^e + C^e \hat{T}^e = f^e \quad (3.17)$$

donde:

- $M^e = \rho C_p h \int_{\Omega_e} N^T N d\Omega$: matriz de masa.
- $K^e = h k \int_{\Omega_e} (\nabla N)^T (\nabla N) d\Omega$: matriz de rigidez (conducción).
- $C^e = h h_v \int_{\Omega_e} N^T N d\Omega$: matriz de convección superficial.
- $f^e = h \int_{\Omega_e} Q_{in} N d\Omega + h h_v T_{amb} \int_{\Omega_e} N^T N d\Omega$: vector de cargas térmicas.

Ensamblaje global

El ensamblaje global se realiza sumando las contribuciones de todos los elementos según la matriz de conectividad, resultando en:

$$M \frac{d\hat{T}}{dt} + K \hat{T} + C \hat{T} = f \quad (3.18)$$

Este sistema global es la base de la implementación numérica en MATLAB para simular la evolución temporal de la temperatura en la mesa térmica.

3.3. Implementación Computacional MATLAB

Implementación numérica del modelo de conducción de calor en 2D

La simulación numérica del modelo de conducción de calor en dos dimensiones se implementa en MATLAB siguiendo la formulación por elementos finitos presentada en la Ecuación 3.14. El esquema de solución considera tanto las condiciones físicas del problema como las etapas de discretización y resolución, las cuales se describen a continuación.

Condiciones iniciales y de contorno Se aplicaron las siguientes condiciones, acordes al comportamiento físico de la mesa térmica:

- **Condición inicial:** toda la superficie de la mesa se encuentra en equilibrio térmico con el entorno al inicio de la simulación, es decir,

$$T(x, y, 0) = T_{amb}.$$

- **Condición de contorno:** en los bordes de la mesa no se fijó una temperatura constante, sino que se consideró el intercambio de calor con el ambiente mediante un modelo convectivo. Esto corresponde a una condición de tipo Robin:

$$-k \frac{\partial T}{\partial n} = h_v (T - T_{amb}) \quad \text{en el perímetro.}$$

- **Fuente térmica interna:** los elementos calefactores (PTC) se modelaron como una fuente de calor distribuida en un dominio rectangular central. La potencia aplicada sigue un perfil de rampa temporal hasta alcanzar su valor máximo, replicando el comportamiento dinámico del dispositivo.

Etapas de la implementación El procedimiento computacional se estructura en las siguientes etapas:

1. **Definición de parámetros físicos y geométricos:** Se establecen las propiedades del material (densidad ρ , calor específico C_p , conductividad térmica k y coeficiente convectivo h_v), junto con las dimensiones de la mesa térmica (L_h, L_v, h) y la temperatura ambiente T_{amb} . Se define además la ubicación espacial del dominio activo correspondiente a la PTC.

A continuación se consignan los valores numéricos adoptados en la simulación para los parámetros físicos y geométricos definidos en esta sección.

Parámetro	Símbolo	Valor (código)	Unidad
Densidad	ρ	8960.00	kg/m ³
Calor específico	C_p	430.00	J/(kg · K)
Conductividad térmica	k	385.00	W/(m · K)
Coef. de convección	h_v	25.76	W/(m ² · K)

Tabla 3.3: Parámetros físicos mesa térmica.

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidad
Largo horizontal de la placa	L_h	0.45	m
Largo vertical de la placa	L_v	0.50	m
Espesor de la placa	h	0.002	m (2 mm)

Tabla 3.4: Dimensiones geométricas de la mesa térmica.

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidad
Centro	(x_c, y_c)	(0,225, 0,25)	m
Ancho × alto	$w \times a$	0,07 × 0,07	m
Rango en x	$[x_1, x_2]$	[0,190, 0,260]	m
Rango en y	$[y_1, y_2]$	[0,215, 0,285]	m
Área	A	0,0049	m ²

Tabla 3.5: Dominio activo (PTC) en la mesa térmica.

2. **Definición de la fuente térmica:** La entrada de calor Q_{in} se describe mediante una rampa lineal que alcanza la potencia máxima en t_{ramp} segundos. El perfil temporal se representa como U_t , aplicado únicamente en la región de la PTC.

$$Q_{\text{máx}} = \frac{P_{\text{PTC}}}{A_{\text{PTC}}} = \frac{300 \text{ W}}{0,0049 \text{ m}^2} \approx 6,12 \times 10^4 \text{ W/m}^2, \quad (3.19)$$

$$U(t) = \begin{cases} Q_{\text{máx}} \frac{t}{t_{\text{ramp}}}, & 0 \leq t < t_{\text{ramp}}, \\ Q_{\text{máx}}, & t_{\text{ramp}} \leq t < t_{\text{off}}, \\ 0, & t \geq t_{\text{off}}, \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\chi_{\text{PTC}}(x, y) = \begin{cases} 1, & (x, y) \in \Omega_{\text{PTC}}, \\ 0, & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad (3.21)$$

$$q(x, y, t) = \chi_{\text{PTC}}(x, y) U(t). \quad (3.22)$$

En este trabajo se modela la PTC como una fuente de *flujo de calor superficial* uniforme $q(x, y, t) = \chi_{\text{PTC}}(x, y) U(t)$, aplicado únicamente sobre Ω_{PTC} y constante a lo largo del espesor h . El valor máximo $Q_{\text{máx}} = P_{\text{PTC}}/A_{\text{PTC}}$ proviene de convertir la potencia eléctrica nominal de la PTC en densidad de flujo sobre su área activa. El perfil temporal $U(t)$ es una rampa lineal continua por partes: crece desde cero hasta $Q_{\text{máx}}$ en t_{ramp} y se mantiene constante hasta t_{off} , momento en el que la fuente se apaga. Esta elección emula el calentamiento real del elemento (evita discontinuidades tipo escalón), mejora la estabilidad numérica y permite estudiar el enfriamiento por convección tras el apagado

3. **Generación de la malla triangular:** El dominio rectangular se discretiza con elementos triangulares generados por `mesh_triang`. El refinamiento está gobernado por N : valores mayores incrementan la densidad de nodos y reducen el tamaño característico de los elementos. Como se aprecia en la Fig. 3.3, pasar de $N = 3$ a $N = 4$ mejora la capacidad para representar gradientes térmicos, en especial en el vecindario de la PTC, a costa de mayor carga computacional. La numeración (azul: nodos; rojo: elementos) se muestra con fines de trazabilidad para la asignación posterior de sensores FBG y del dominio activo.

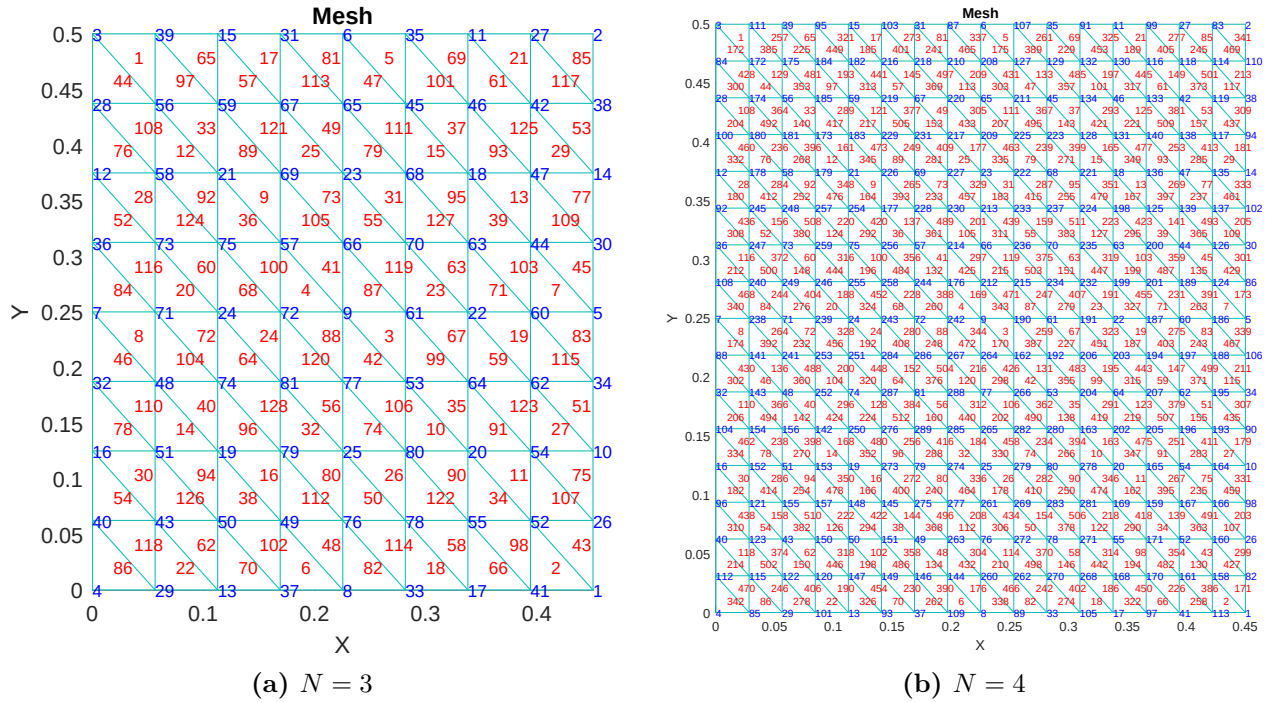


Figura 3.3: Comparación de mallas triangulares generadas con `mesh_triang`. Al aumentar N crece la densidad de nodos y disminuye el tamaño de los elementos. Azul: nodos; rojo: elementos.

4. **Formulación y ensamblaje FEM:** Para cada elemento triangular se calculan:

- Las funciones de forma $N(x, y)$ y sus gradientes ∇N .
- Las matrices locales de masa (M^e), rigidez (K^e) y convección (C^e), así como el vector de carga (b^e).
- La matriz de entrada B^e correspondiente a la fuente interna.

Posteriormente, se realiza el ensamblaje de las matrices globales M_G, K_G, C_G, B_G y del vector b considerando la conectividad nodal.

5. **Simulación temporal:** El sistema resultante se formula en espacio de estados como

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = -M_G^{-1}(K_G + C_G) \mathbf{T}(t) + M_G^{-1}(B_G U_t + b), \quad (3.23)$$

donde $\mathbf{T}(t)$ es el vector de temperaturas nodales. La evolución temporal se obtiene mediante la función `lsim`, con condición inicial

$$\mathbf{T}(0) = T_{amb}.$$

6. **Obtención de resultados:** La solución $T_t(x, y, t)$ entrega la distribución de temperatura en cada nodo para todo instante simulado, lo que permite su visualización gráfica, la extracción de temperaturas en puntos específicos (sensores FBG) y el análisis de la dinámica térmica del sistema. Además, se ubicaron seis sensores FBG sobre la superficie de la placa, tal como se muestra en la Fig. 2.5. Sus coordenadas cartesianas (x, y) , en metros, se resumen en la Tabla 3.6.

Sensor	x [m]	y [m]
FBG1	0.060	0.065
FBG2	0.060	0.195
FBG3	0.060	0.330
FBG4	0.060	0.445
FBG5	0.230	0.445
FBG6	0.400	0.445

Tabla 3.6: Posición de los sensores FBG sobre la mesa térmica (origen en la esquina inferior izquierda).

En la Figura 3.4 se ilustra el posicionamiento de las seis FBG y del actuador sobre el dominio especificado en la Tabla 3.5. Esta verificación gráfica asegura la consistencia entre la configuración geométrica y su implementación en el programa.

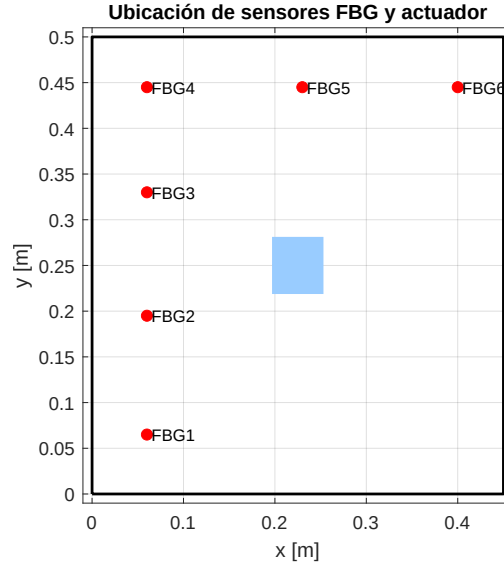


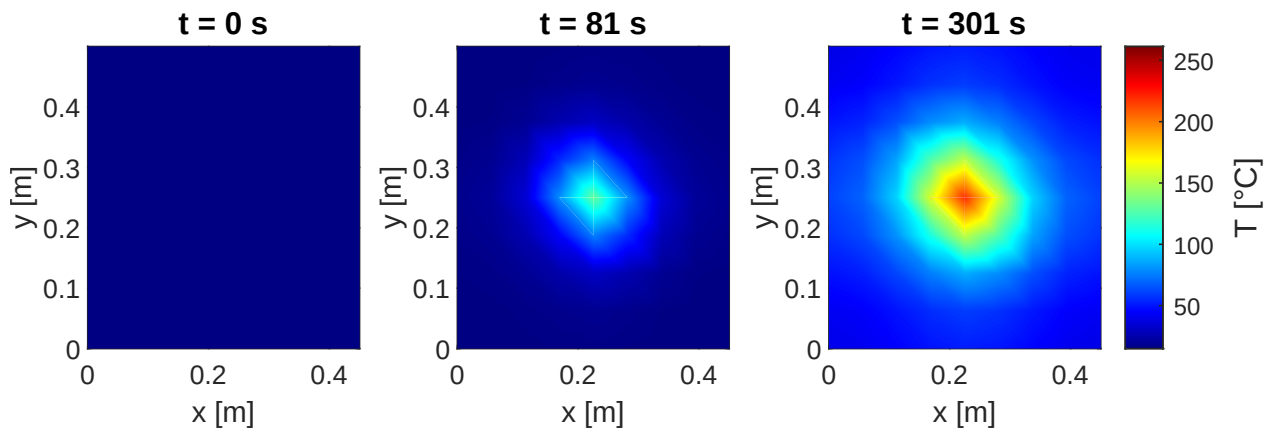
Figura 3.4: Resultados Modelo FEM MATLAB

3.3.1. Resultados Obtenidos

A continuación se presentan los resultados de la implementación computacional, comparando dos niveles de refinamiento de la malla para analizar su efecto tanto en la precisión de la solución numérica (captura de gradientes térmicos y error espacial) como en el costo computacional (número de elementos y tiempo de simulación).

Comportamiento de distribución térmica simulada

■ Caso N=3



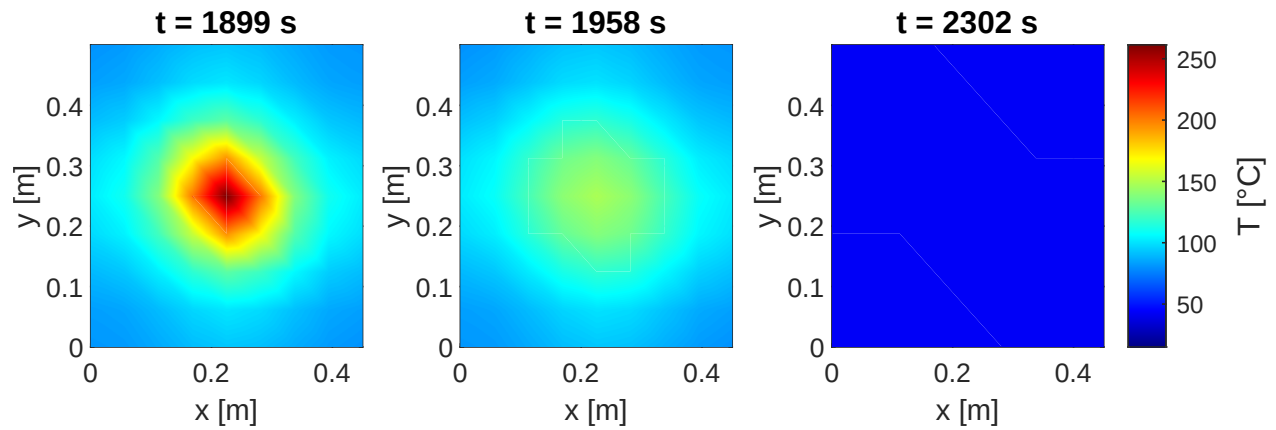


Figura 3.5: Campo de temperatura transitorio — malla $N = 3$

■ Caso $N=4$

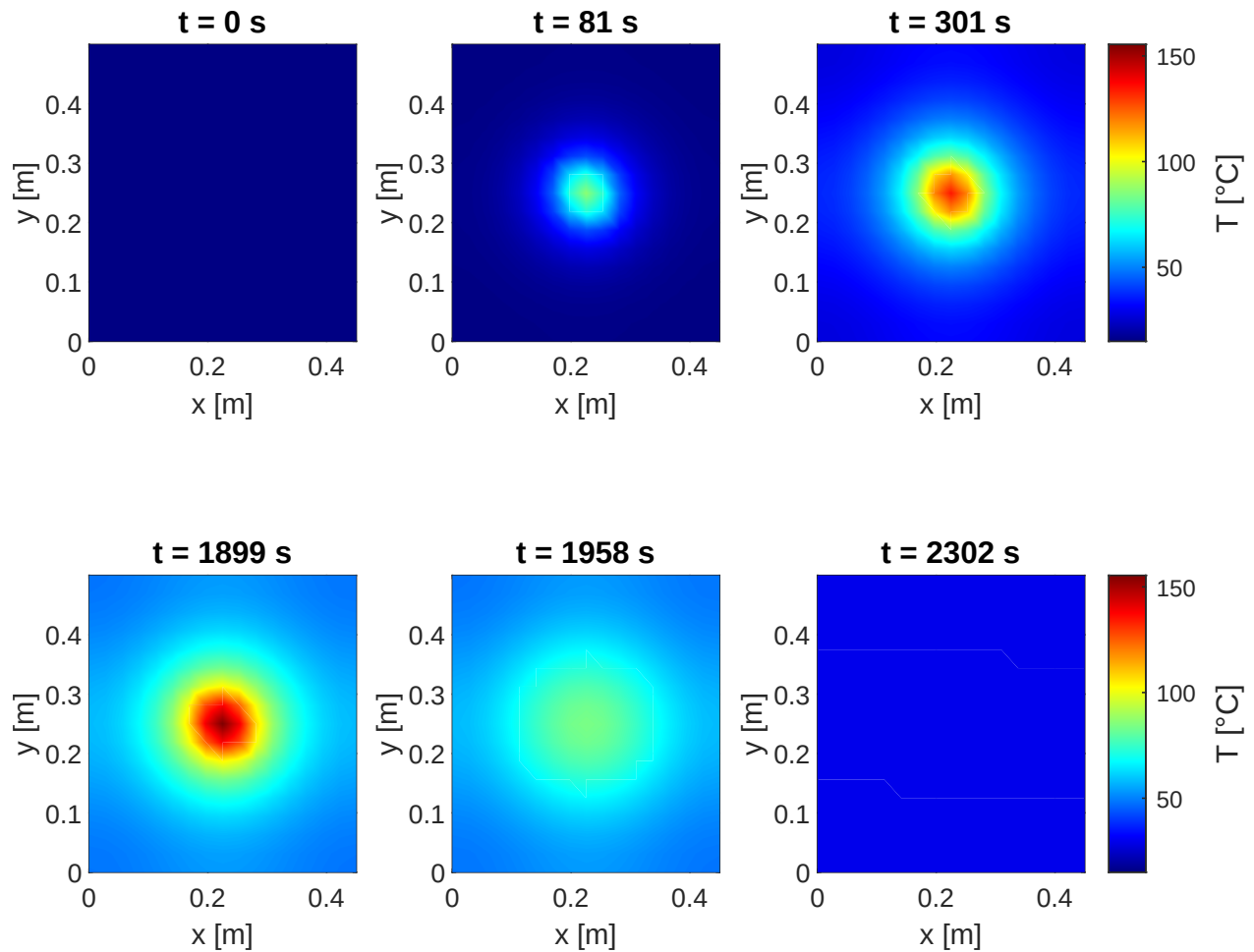


Figura 3.6: Campo de temperatura transitorio — malla $N = 4$

Al comparar las Figuras 3.5 y 3.6, que muestran el campo de temperatura en los mismos instantes, se aprecia que la malla con $N = 4$ reproduce con mayor detalle el pico térmico y las isoterma en torno a la PTC. En el caso $N = 3$ el calentamiento aparece más difuso y el frente térmico ocupa un área mayor; ello se explica porque, con menos elementos, los gradientes quedan submuestreados y las funciones de forma abarcan dominios más amplios, introduciendo un suavizado numérico. Esta diferencia puede traducirse en estimaciones menos fieles en puntos puntuales (p. ej., sensores FBG) y en la localización del máximo de temperatura

Tiempo computacional. Para cuantificar el impacto del refinamiento espacial, la Tabla 3.7 resume el tamaño del problema (nodos y elementos) y los tiempos de cómputo por etapa (generación de malla, ensamble y solución), junto con el tiempo total y el uso de memoria, para $N = \{3, 4, 5\}$.

N	Nodos	Elementos	t_{mesh} [s]	t_{asm} [s]	t_{solve} [s]	t_{total} [s]	Memoria [MB]
3	81	128	0.754	0.131	0.354	1.239	5256.5
4	289	512	1.548	1.280	0.499	3.327	5102.1
5	1089	2048	4.734	35.262	3.720	43.716	3893.9

Tabla 3.7: Comparación de costo computacional por nivel de refinamiento.

En síntesis, el tiempo total crece de 1.239 s ($N=3$) a 3.327 s ($N=4$; $\times 2,69$) y 43.716 s ($N=5$; $\times 13,14$ respecto de $N=4$). El *ensamble* se vuelve el componente dominante, por lo que $N=4$ ofrece un equilibrio razonable entre resolución y tiempo de computo.

Luego, los resultados obtenidos en el programa en dichas posiciones son:

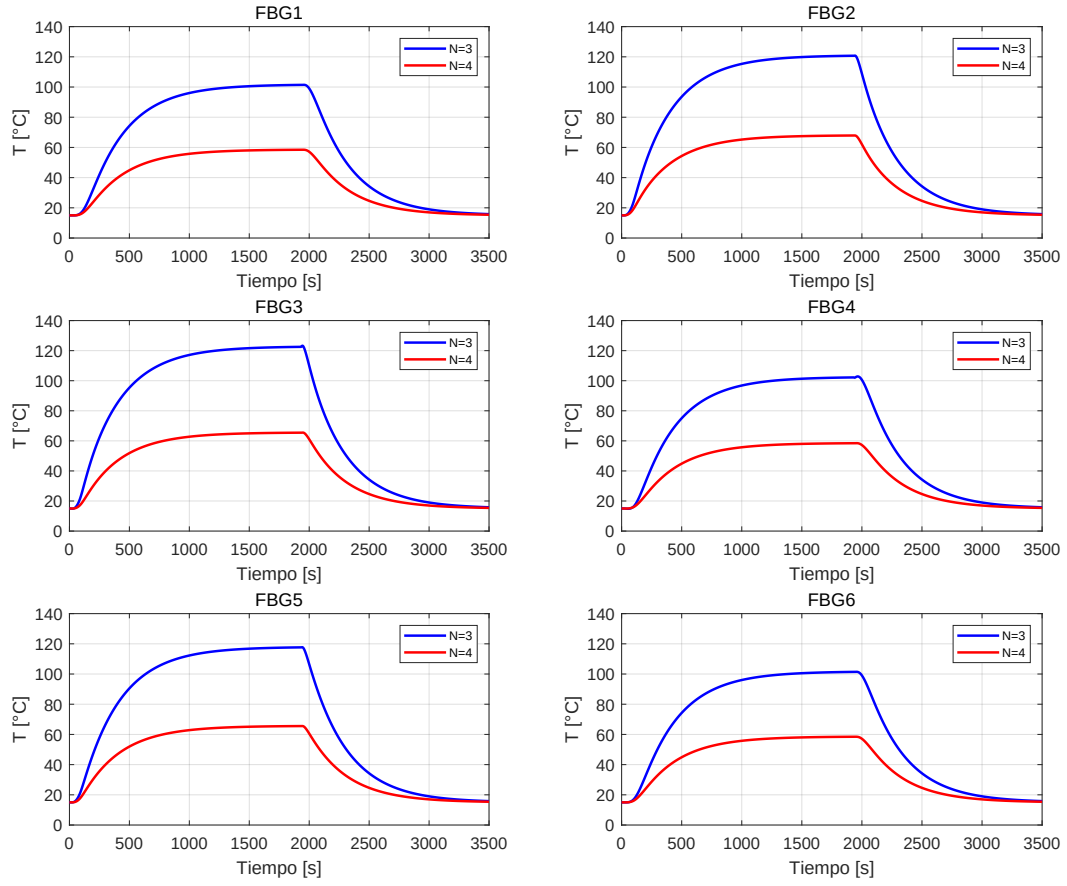


Figura 3.7: Campo de temperatura transitorio — malla $N = 4$

3.4. Validación modelo FEM con sensores FBG

La Figura 3.8 contrasta las mediciones reales (curva negra) con las simulaciones para $N = 3$ (azul) y $N = 4$ (rojo) en los seis puntos instrumentados (FBG1–FBG6). A partir de ella, y de los costos de la Tabla 3.7, se obtienen las siguientes conclusiones.

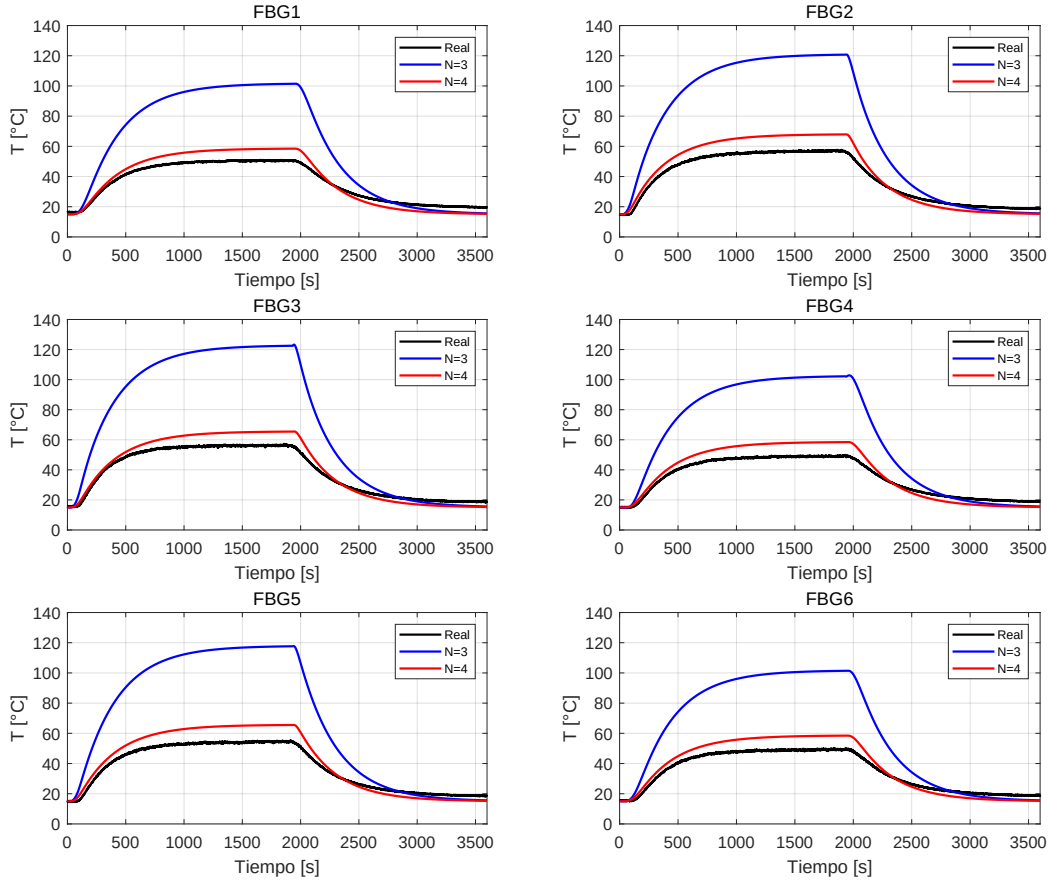


Figura 3.8: Resultados Modelo FEM y Medidas Reales FBG

Diferencias observadas entre $N = 3$ y $N = 4$.

- **Amplitud (pico y régimen).** Con $N = 3$ se aprecia una *sobreestimación* sistemática de la temperatura en régimen y del pico (del orden de decenas de grados según el sensor). Con $N = 4$ la magnitud simulada se aproxima sensiblemente a la real, reduciendo el sesgo.
- **Dinámica temporal.** Para $N = 3$ las transiciones son más suaves y el *enfriamiento* tras el apagado resulta más lento que el observado. $N = 4$ reproduce mejor los *tiempos de subida y descenso*, especialmente notorios en FBG3 y FBG4.

- **Resolución espacial.** El refinamiento $N = 4$ resuelve con mayor fidelidad los gradientes térmicos cercanos a la PTC y las pérdidas convectivas en el contorno. En $N = 3$, la malla más tosca tiende a “ensanchar” la fuente y a subestimar $\nabla \cdot q$, elevando artificialmente la temperatura y retrasando el enfriamiento.

Justificación computacional de la elección. Según la Tabla 3.7, el tiempo total de cómputo pasa de 1,239s para $N = 3$ a 3,327s para $N = 4$, lo que representa un aumento moderado. En cambio, para $N = 5$ el tiempo asciende a 43,716s, principalmente debido al costo de ensamble, mostrando un incremento muy significativo respecto de los casos anteriores y con mejoras marginales en el ajuste. En términos de beneficio versus costo computacional, $N = 4$ **ofrece el mejor balance**, corrigiendo el sesgo térmico y la respuesta lenta observados en $N = 3$, sin un aumento excesivo en el tiempo de ejecución.

Con estos parámetros, la simulación FEM reproduce adecuadamente el incremento, régimen y enfriamiento observados experimentalmente (Fig. 3.8), lo que valida su uso para análisis y diseño de control térmico en la mesa.

3.4.1. Identificación de parámetros

Aunque la placa de estudio corresponde a cobre, diversos factores experimentales hacen que las propiedades térmicas efectivas difieran de los valores tabulados en literatura. Entre estos factores se incluyen el uso y manipulación previa de la placa, la presencia de polvo y oxidación superficial, la rugosidad de la superficie y las resistencias de contacto asociadas a adhesivos o fijaciones mecánicas. Adicionalmente, las condiciones ambientales (variaciones de la temperatura del aire, corrientes convectivas locales, humedad relativa) afectan de manera significativa el coeficiente de convección h_v . Estas consideraciones explican por qué parámetros como la conductividad térmica k , el calor específico C_p , la densidad ρ y, especialmente, el coeficiente de convección h_v , no coinciden necesariamente con los valores de catálogo, sino que deben ser ajustados experimentalmente para cada ensayo [17].

Con el objetivo de que el modelo numérico reproduzca de manera adecuada el comportamiento térmico observado en la mesa experimental, se implementó un proceso de *identificación de parámetros*. Este procedimiento consistió en minimizar la diferencia cuadrática media entre las temperaturas simuladas mediante FEM y las mediciones reales obtenidas con sensores de fibra óptica FBG.

Para la optimización se utilizó el algoritmo `fminsearchbnd`, una extensión del método de Nelder–Mead que permite incorporar cotas en los parámetros [18]. El método de Nelder–Mead es un algoritmo de optimización *sin gradiente*, ampliamente utilizado cuando no se dispone de derivadas analíticas de la función objetivo. Su funcionamiento se basa en la construcción de un polígono de prueba denominado *simplex* (un triángulo en dos dimensiones, un tetraedro en tres, y así sucesivamente en espacios de mayor dimensión). Este simplex se desplaza y

deforma mediante operaciones de reflexión, expansión, contracción y reducción, con el fin de explorar la superficie de error y aproximarse progresivamente a la región donde la función de costo alcanza su valor mínimo [19].

La principal ventaja de este método es que no requiere el cálculo de derivadas, lo cual es especialmente útil en el presente trabajo, dado que cada evaluación de la función de costo implica la resolución de una simulación transitoria mediante FEM. Además, el problema de identificación involucra un número reducido de parámetros (C_p , k y h_v), lo que se ajusta adecuadamente al esquema de búsqueda iterativa del Nelder–Mead.

La función objetivo utilizada en la identificación de parámetros corresponde al error cuadrático medio entre las mediciones experimentales de temperatura y las simulaciones obtenidas con FEM. Se define como:

$$J(p) = \frac{1}{N_s N_t} \sum_{i=1}^{N_s} \sum_{k=1}^{N_t} \left(T_i^{\text{meas}}(t_k) - T_i^{\text{sim}}(t_k; p) \right)^2,$$

donde:

- $p = [C_p, k, h_v]$ es el vector de parámetros a identificar.
- N_s es el número de sensores FBG considerados.
- N_t es el número de instantes de tiempo evaluados.
- $T_i^{\text{meas}}(t_k)$ corresponde a la temperatura medida por el sensor i en el tiempo t_k .
- $T_i^{\text{sim}}(t_k; p)$ corresponde a la temperatura simulada en el mismo nodo i con los parámetros p .

El objetivo de la optimización es encontrar el conjunto de parámetros p^* que minimiza esta función, de modo que el modelo numérico reproduzca fielmente el comportamiento térmico observado en el experimento.

En este estudio se seleccionaron tres parámetros como variables de ajuste, dado que son los que más influyen en la dinámica térmica del sistema:

- **Calor específico (C_p):** regula la capacidad del material para almacenar energía térmica.
- **Conductividad térmica (k):** controla la velocidad con que se transfiere el calor a través del cobre de la mesa.
- **Coefficiente de convección (h_v):** caracteriza la pérdida de calor desde la superficie hacia el ambiente.

La densidad del cobre (ρ) se mantuvo constante, dado que su valor está ampliamente tabulado y no presenta variaciones significativas [17, 20].

En esta etapa se realizó la identificación de parámetros térmicos del modelo con base en datos experimentales obtenidos mediante sensores FBG. Para ello, se seleccionaron como variables ajustables el calor específico (C_p), la conductividad térmica (k) y el coeficiente de convección (h_v), mientras que la densidad fue fijada a su valor nominal, consistente con la literatura. La Tabla 3.8 resume los parámetros considerados y su rol físico dentro del modelo.

Parámetro	Símbolo	Rol en el modelo
Calor específico	C_p	Almacenamiento de energía térmica (capacidad calorífica)
Conductividad térmica	k	Transferencia de calor dentro de la mesa (difusión térmica)
Coef. de convección	h_v	Pérdidas de calor hacia el ambiente (en la superficie)

Tabla 3.8: Parámetros utilizados en la identificación.

La Tabla 3.9 presenta los valores estándar y los rangos (cotas) empleados durante el proceso de optimización, siguiendo criterios comunes en calibración termo-física [21, 22]. Estas cotas aseguran valores físicamente plausibles mientras permiten flexibilidad en el ajuste.

Parámetro	Valor estándar	Cota inferior	Cota superior
Densidad ρ [kg/m ³]	8960	8960	8960
Calor específico C_p [J/(kg·°C)]	390	350	430
Conductividad térmica k [W/(m·°C)]	385	385	415
Coef. de convección h_v [W/(m ² ·°C)]	22	5	40

Tabla 3.9: Valores estándar y rangos de cotas de optimización utilizados en la identificación de parámetros.

Validación del modelo. Con el fin de validar el modelo FEM, se compararon las temperaturas simuladas con las mediciones reales obtenidas mediante los sensores FBG instalados en la mesa térmica. En esta etapa, el objetivo fue evaluar la capacidad predictiva del modelo tanto utilizando parámetros estándar como tras el ajuste de parámetros físicos. Para ello, se utilizaron todas las señales FBG disponibles, abarcando la etapa de calentamiento y la posterior fase de enfriamiento.

La Tabla 3.10 muestra los parámetros finales utilizados en el modelo luego del proceso de identificación. Estos valores fueron seleccionados con el fin de reproducir con mayor fidelidad la dinámica térmica observada experimentalmente.

Parámetro	Símbolo	Unidad	Valor ajustado
Densidad	ρ	kg/m ³	8960.00
Calor específico	C_p	J/(kg·K)	430.00
Conductividad térmica	k	W/(m·K)	385.00
Coeficiente de convección	h_v	W/(m ² ·K)	25.76

Tabla 3.10: Parámetros físicos ajustados para el modelo térmico.

En la Figura 3.9 se presentan los resultados obtenidos al comparar el modelo FEM con parámetros ajustados y las mediciones de temperatura registradas por los sensores FBG. Se observa que las curvas simuladas siguen de manera cercana la dinámica experimental, tanto en la etapa de calentamiento como en la fase de enfriamiento, reproduciendo adecuadamente la magnitud y la tendencia temporal del proceso térmico.

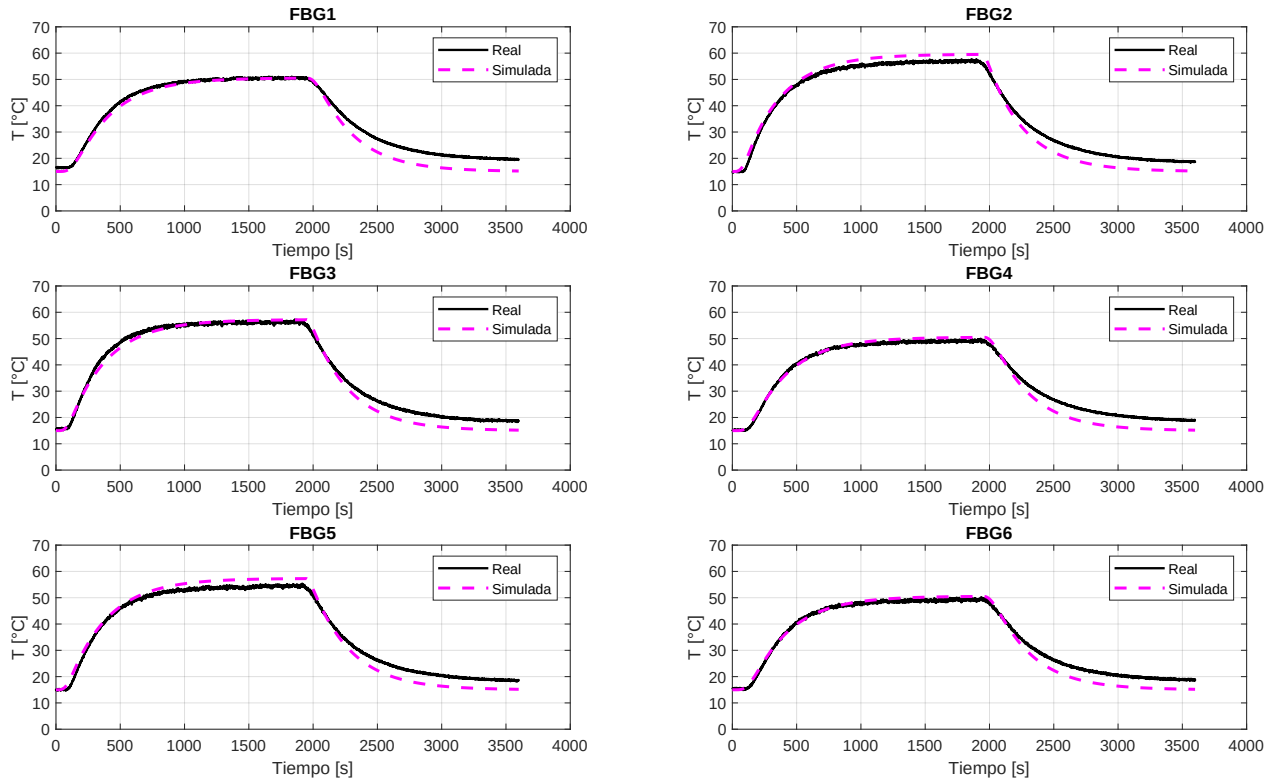


Figura 3.9: Comparación entre modelo FEM y mediciones reales utilizando parámetros ajustados.

De forma complementaria, la Figura 3.10 muestra los resultados obtenidos empleando parámetros estándar de literatura. En este caso, se observa una menor concordancia, especialmente en la fase de enfriamiento, donde el modelo tiende a sobreestimar la temperatura experimental.

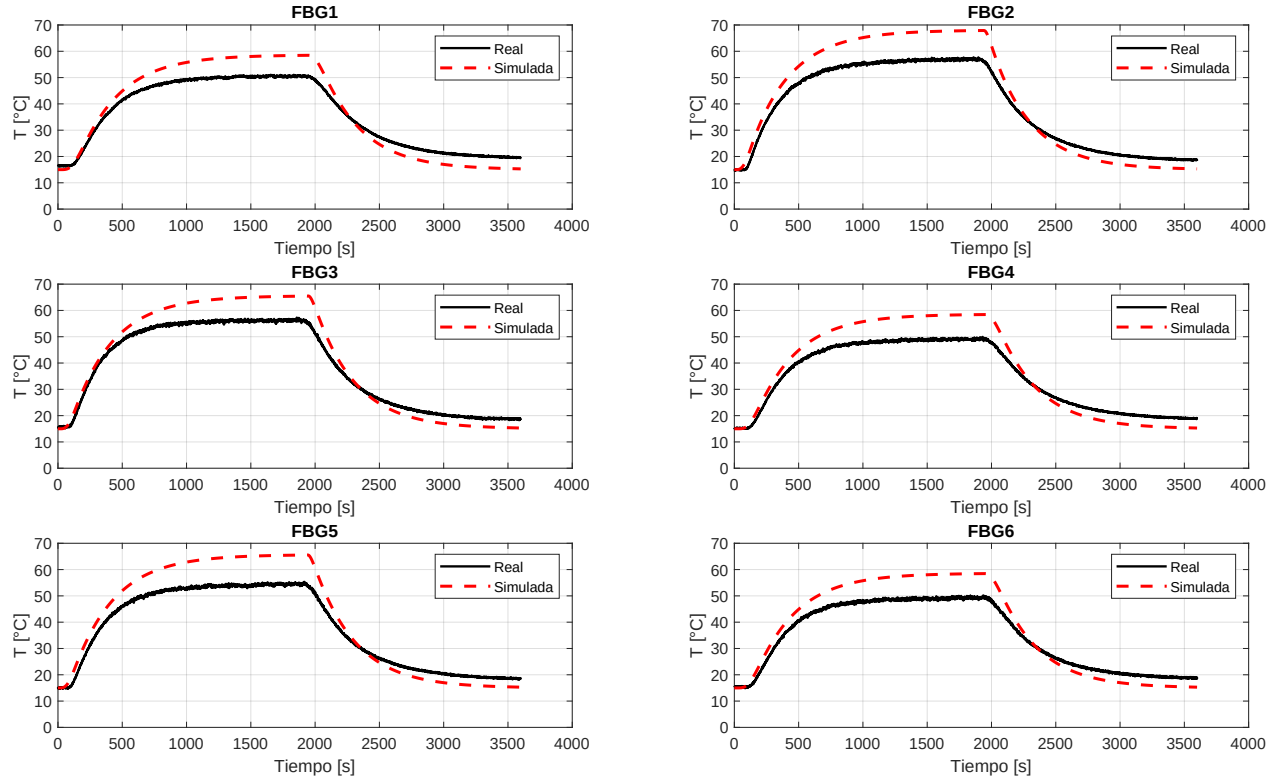


Figura 3.10: Comparación entre modelo FEM y mediciones reales utilizando parámetros estándar.

La comparación entre ambas configuraciones demuestra que el proceso de identificación permitió mejorar de forma significativa el ajuste entre el modelo y los datos experimentales. En particular, la reducción del error cuadrático medio global desde valores cercanos a $6,19^{\circ}\text{C}$ hasta aproximadamente $2,78^{\circ}\text{C}$ evidencia una mejora superior al 50 %. Esta disminución se observa de manera consistente en todos los sensores FBG evaluados, confirmando una representación más fiel del proceso físico real.

En consecuencia, los resultados obtenidos validan la eficacia del ajuste de parámetros en el modelo FEM, proporcionando una herramienta predictiva adecuada para el posterior diseño y análisis de estrategias de control térmico.

Sensor	RMSE estándar [°C]	RMSE ajustado [°C]
FBG1	5.240	3.075
FBG2	7.074	3.002
FBG3	5.656	2.501
FBG4	5.986	2.689
FBG5	7.046	2.870
FBG6	5.883	2.509

Tabla 3.11: Comparación de RMSE entre parámetros estándar y ajustados.

Capítulo 4

Estimación y Control de Temperatura

En sistemas térmicos donde no se puede acceder directamente a la temperatura en todos los puntos del dominio, es necesario contar con herramientas que permitan estimar su comportamiento a partir de mediciones parciales. Esta estimación del estado es clave para análisis, control y validación de modelos [23].

En este trabajo se considera una mesa térmica que se calienta mediante un actuador, y en la cual se requiere estimar la evolución de la temperatura en los laterales. Esta información es fundamental tanto para evaluar el comportamiento del sistema como para ajustar el modelo térmico obtenido mediante FEM, ampliamente utilizado para resolver problemas de conducción de calor con condiciones complejas [23].

Con este propósito, se utilizan sensores de fibra óptica tipo FBG, los cuales permiten obtener mediciones puntuales en ubicaciones estratégicas con alta sensibilidad y resolución espacial [24]. A partir de estos datos y del modelo térmico, se diseña un observador de estado, específicamente un observador de tipo Luenberger, que permite estimar la temperatura en regiones no instrumentadas. Esto mejora la precisión del análisis térmico y habilita estrategias de control basadas en estimaciones confiables [24, 23].

4.1. Modelo en espacio de estados a partir de FEM

A partir de la formulación por Elementos Finitos de la ecuación de difusión de calor [25], se obtiene el modelo continuo:

$$M \frac{d\hat{T}}{dt} + (K + C) \hat{T} = f, \quad (4.1)$$

donde M es la matriz de masa, K la matriz de rigidez, C la matriz asociada a las pérdidas por convección y f el vector de entrada térmica. Al despejar la derivada temporal de la temperatura nodal, se obtiene:

$$\dot{\mathbf{T}}(t) = -M^{-1}(K + C) \mathbf{T}(t) + M^{-1}f. \quad (4.2)$$

A partir de esta expresión, se definen las matrices que caracterizan la dinámica térmica del sistema:

$$\begin{aligned} A &= -M^{-1}(K + C), \\ B &= M^{-1}B_G, \\ d &= M^{-1}b, \end{aligned} \quad (4.3)$$

donde A representa la dinámica interna del sistema térmico, B describe el efecto de los actuadores térmicos, y d agrupa los términos de excitación o perturbación distribuida.

Finalmente, el modelo puede expresarse en la forma estándar de variables de estado [23]:

$$\dot{x}(t) = Ax(t) + Bu(t) + d, \quad (4.4)$$

$$y(t) = Cx(t), \quad (4.5)$$

donde $x(t) = T(t)$ corresponde al vector de temperaturas nodales, $u(t)$ representa la acción de los actuadores térmicos, y $y(t)$ las mediciones obtenidas desde los sensores FBG.

4.2. Observador de Luenberger

El observador de Luenberger constituye una de las estructuras más clásicas para estimar el estado completo de un sistema dinámico cuando solo se dispone de un número limitado de mediciones [23, 26]. La idea fundamental consiste en construir un modelo que reproduzca la dinámica del sistema real y corregirlo continuamente en función de la diferencia entre lo que predice dicho modelo y lo que efectivamente miden los sensores.

El observador se formula como [27]:

$$\dot{\hat{x}}(t) = A\hat{x}(t) + Bu(t) + d + L(y(t) - C\hat{x}(t)), \quad (4.6)$$

Restando las ecuaciones del sistema y del observador, se obtiene la dinámica del error [28]:

$$\dot{e}(t) = (A - LC)e(t). \quad (4.7)$$

De acuerdo con esta expresión, la evolución del error depende únicamente de la matriz $(A - LC)$. Si todos los autovalores de dicha matriz poseen parte real negativa, el error $e(t)$ tiende a cero de manera exponencial, garantizando que el estado estimado $\hat{x}(t)$ converja hacia el estado real $x(t)$ conforme transcurre el tiempo.

En otras palabras, la estabilidad y desempeño del observador dependen directamente del diseño de la ganancia L , la cual actúa de forma análoga a la realimentación de estados en un controlador, pero aplicada al dominio de la estimación [29, 30].

4.2.1. Observador de Luenberger en tiempo discreto

En la práctica, la implementación de un observador se realiza en un computador o micro-controlador, donde las variables se actualizan a intervalos discretos de tiempo definidos por un período de muestreo fijo T_s [23, 27].

El modelo discreto del sistema se expresa como:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k + G_d, \quad (4.8)$$

$$y_k = C x_k, \quad (4.9)$$

donde x_k representa el estado en el instante de muestreo k , u_k la entrada aplicada, y_k la salida medida y G_d un término constante asociado al sesgo del modelo.

Estructura del observador

El observador discreto estima el estado en cada instante mediante la ecuación:

$$\hat{x}_{k+1} = A_d \hat{x}_k + B_d u_k + G_d + L_d (y_k - C \hat{x}_k), \quad (4.10)$$

donde:

- $A_d \hat{x}_k + B_d u_k + G_d$ corresponde a la **predicción del modelo**.
- $(y_k - C \hat{x}_k)$ es la **innovación** o error entre la salida medida y la salida estimada.
- L_d es la **ganancia discreta del observador**, que determina el grado de corrección aplicada a la estimación.

Dinámica del error

Definimos el error de estimación en el instante k como:

$$e_k = x_k - \hat{x}_k.$$

Al restar las ecuaciones del sistema real y del observador, se obtiene la dinámica del error:

$$e_{k+1} = (A_d - L_d C) e_k. \quad (4.11)$$

Esta expresión muestra que la evolución del error depende exclusivamente de la matriz $(A_d - L_d C)$. Para que la estimación converja al estado real, los autovalores de dicha matriz deben encontrarse dentro del círculo unitario en el plano complejo, garantizando la estabilidad asintótica del observador discreto [30].

Condición de estabilidad

Para que el observador sea estable y el error desaparezca, se requiere que los autovalores de $(A_d - L_d C)$ estén **dentro del círculo unidad** en el plano complejo, es decir, que cumplan $|\lambda| < 1$ [29].

- Si esta condición se cumple, el error e_k tiende a cero con el tiempo discreto.
- En consecuencia, la estimación $\hat{x}_k$ converge hacia el estado real x_k .

En otras palabras, el observador discreto predice cómo debería evolucionar el sistema entre instantes de muestreo y, en cada paso, se corrige con las mediciones disponibles. De esta forma, la ganancia L_d se diseña para que el error se reduzca en cada iteración, garantizando que el estimador siga de cerca el comportamiento del sistema real [26].

Comparación entre el caso continuo y discreto

En síntesis, tanto en el dominio continuo como en el discreto, el principio del observador de Luenberger es el mismo: predecir el estado con el modelo dinámico y corregirlo con las mediciones mediante la innovación [23, 27]. La diferencia radica en las condiciones de estabilidad:

- En el caso **continuo**, los autovalores de $(A - LC)$ deben tener parte real negativa.
- En el caso **discreto**, los autovalores de $(A_d - L_d C)$ deben ubicarse dentro del círculo unidad.

Ambas condiciones garantizan que el error de estimación tienda a cero y que el estado estimado $\hat{x}$ converja al estado real x .

4.2.2. Observabilidad, rango y detectabilidad

El diseño de un observador requiere que el par (A, C) contenga suficiente información de salida para reconstruir el estado interno del sistema [23, 27]. Esta propiedad se analiza

mediante la matriz de observabilidad, definida como:

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C \\ CA \\ \vdots \\ CA^{n-1} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{np \times n}. \quad (4.12)$$

El sistema se considera **observable** si la matriz $\mathcal{O}$ tiene rango completo, es decir:

$$\text{rank}(\mathcal{O}) = n. \quad (4.13)$$

De forma equivalente, el par (A, C) es observable si, para todo autovalor λ de A ,

$$\text{rank} \left(\begin{bmatrix} \lambda I - A \\ C \end{bmatrix} \right) = n. \quad (4.14)$$

Cuando no se cumple observabilidad completa, se recurre a la condición más débil de **detectabilidad** [28]. Un sistema es detectable si todos los modos no observables son estables. En el dominio discreto, esta condición se expresa como:

$$|\lambda_i| < 1, \quad \forall \lambda_i \in \Lambda_{\text{no obs}}(A, C). \quad (4.15)$$

En consecuencia, la detectabilidad garantiza que, aunque algunos estados no puedan observarse directamente, el error de estimación correspondiente se atenúe con el tiempo, permitiendo diseñar una ganancia L que estabilice el observador.

4.2.3. Aplicación al modelo térmico

El modelo FEM de la mesa térmica posee miles de estados internos, lo que hace inviable evaluar rigurosamente la condición de observabilidad para todo el sistema. En este caso, basta con que el modelo sea *detectable*, lo que asegura que los modos no observables son estables y, por tanto, que existe una ganancia L capaz de garantizar la convergencia del observador [28, 27].

No obstante, para la implementación práctica en hardware resulta necesario reducir la complejidad computacional. Por ello, se aplicó una técnica de reducción de orden preservando las entradas y salidas de interés, obteniéndose un modelo reducido de orden n_r . En este modelo compacto sí resulta deseable verificar la **observabilidad**, ya que esta condición garantiza que los sensores de fibra óptica seleccionados contienen información suficiente para estimar los estados reducidos de forma precisa y confiable.

En resumen:

- Para el modelo FEM completo: la condición de *detectabilidad* es suficiente, ya que asegura estabilidad en los modos no observables.
- Para el modelo reducido implementable en hardware: se busca *observabilidad completa*, a fin de garantizar el desempeño adecuado del observador con un número limitado de sensores.

De esta forma, el análisis de observabilidad y detectabilidad permite justificar la validez del modelo reducido empleado en el diseño del observador de Luenberger, asegurando consistencia entre la teoría y la implementación experimental.

Reducción de orden mediante *balanced truncation*

El método de *balanced truncation* busca obtener un modelo reducido que mantenga el comportamiento más importante del sistema original, eliminando los estados que aportan poca influencia en la dinámica entrada-salida [31, 32, 33].

La idea principal es encontrar una transformación de coordenadas S que permita “balancear” el sistema, es decir, igualar la energía con que cada estado puede ser controlado y observado. En estas nuevas coordenadas, las energías quedan representadas por los valores singulares de Hankel (σ_i), que indican la relevancia de cada estado. Los estados con valores grandes representan modos dominantes, mientras que los de valores pequeños pueden descartarse sin afectar significativamente la respuesta global.

Una vez ordenados los σ_i de mayor a menor, se conservan los primeros n_r estados más significativos, obteniendo el modelo reducido:

$$x_{r,k+1} = A_r x_{r,k} + B_r u_k + G_r, \quad y_k = C_r x_{r,k}. \quad (4.16)$$

De esta forma, el modelo reducido mantiene la dinámica térmica principal de la mesa, como el aumento promedio de temperatura y los gradientes centro-borde, mientras descarta fluctuaciones locales de poca relevancia.

El error introducido al truncar los estados menos importantes está acotado por [31]:

$$\|G - G_r\|_\infty \leq 2 \sum_{i=n_r+1}^n \sigma_i, \quad (4.17)$$

por lo que si los valores eliminados son pequeños, la fidelidad del modelo se mantiene con una gran reducción de complejidad.

4.2.4. Obtención de la ganancia del observador en discreto

Una vez establecida la dinámica del observador, el siguiente paso consiste en determinar la matriz de ganancia L_d . Esta matriz es la responsable de “corregir” las estimaciones utilizando la información proveniente de las mediciones. Recordemos que el error de estimación evoluciona como

$$e_{k+1} = (A_d - L_d C) e_k, \quad (4.18)$$

de modo que la elección de L_d afecta directamente a la rapidez con que el observador logra reducir la diferencia entre el estado real y el estimado.

El problema se traduce entonces en ubicar los autovalores de la matriz $(A_d - L_d C)$ dentro del círculo unidad del plano complejo, lo que asegura que el error de estimación se atenúe con el tiempo.

Método de colocación de polos

El método de colocación de polos consiste en elegir de forma explícita las posiciones deseadas de los autovalores del observador. En otras palabras, el diseñador define qué tan rápido debe ser el proceso de corrección de errores, y el algoritmo de colocación entrega la matriz L_d correspondiente para lograrlo.

La idea central es que, si el par (A_d, C) es observable, los polos del observador pueden colocarse en cualquier posición dentro del círculo unidad. De este modo, se escogen polos más rápidos que los de la planta, asegurando que el observador “aprenda” más rápido que la propia dinámica del sistema.

Sin embargo, es importante encontrar un equilibrio. Polos demasiado rápidos (muy cercanos al origen del plano z) pueden hacer que el observador reaccione de forma exagerada al ruido de las mediciones, deteriorando la calidad de la estimación. Por el contrario, polos demasiado lentos retrasan la convergencia del observador y hacen que la estimación sea poco útil en aplicaciones de control en tiempo real.

El diseño de observadores por colocación de polos se entiende como el problema **dual** al del control por realimentación de estados. Mientras que en control se diseña una ganancia K para ubicar los polos de $(A_d - B_d K)$, en observadores se diseña una ganancia L_d para ubicar los polos de $(A_d - L_d C)$ [23, 27, 29].

El método de colocación de polos ofrece un procedimiento directo e intuitivo para obtener la ganancia L_d : se define el comportamiento dinámico deseado del error y, a partir de ello, se calcula la matriz que garantiza dicha dinámica.

Consideraciones prácticas

Al seleccionar los polos del observador se deben considerar los siguientes aspectos [30, 26]:

- **Rapidez de convergencia:** los polos deben ser más rápidos que los de la planta (en continuo, con parte real más negativa; en discreto, con módulo menor).
- **Robustez frente a ruido:** polos excesivamente rápidos amplifican el ruido de medición, degradando la estimación.
- **Multiplicidad de polos:** se recomienda evitar polos repetidos o muy cercanos, ya que esto puede causar problemas numéricos en la síntesis.

De esta forma, el método de colocación de polos proporciona una herramienta sencilla y efectiva para definir la ganancia del observador discreto, garantizando una convergencia estable del error de estimación acorde a los requerimientos dinámicos del sistema térmico.

4.3. Implementación Computacional Observador

Esta sección presenta el flujo computacional completo implementado en MATLAB para el diseño y validación del observador discreto de la mesa térmica. El procedimiento integra todas las etapas necesarias para conectar la teoría con la práctica, abarcando: (i) la preparación y sincronización de los datos experimentales provenientes de los sensores FBG, (ii) la discretización del modelo FEM con término afín, (iii) la reducción de orden mediante *balanced truncation* preservando la dinámica dominante y las salidas relevantes, (iv) el diseño del observador de Luenberger discreto MIMO mediante la función `place`, (v) la verificación de las condiciones de observabilidad y detectabilidad, y finalmente, (vi) la simulación y validación del desempeño del observador frente a las mediciones reales.

Todo el flujo se organiza en bloques coherentes y comentados dentro del código, manteniendo una correspondencia directa entre los pasos teóricos y su implementación práctica.

Parámetros globales Se definen las condiciones iniciales y parámetros generales del entorno, incluyendo el orden reducido deseado n_r y el estado inicial estimado T_0 . Además, se desactiva la barra de herramientas en las figuras y se establece la carpeta de guardado para la exportación de gráficos vectoriales:

$$n_r = 4, \quad T_0 = 15^\circ\text{C}.$$

4.3.1. Preparación de datos y sincronización temporal

Se leen los registros de temperatura de las seis FBG desde el archivo Enlight y se convierten los *timestamps* a segundos relativos t [s]. Se alinea temporalmente la telemetría con el horizonte del modelo mediante interpolación lineal sobre la malla t_k del FEM discretizado. El periodo de muestreo se fija como

$$T_s = \text{median}(t_{k+1} - t_k),$$

lo que es compatible con un esquema ZOH y robusto a pequeños jitter. Las salidas se dividen en dos subconjuntos: *usadas* (FBG1, FBG3, FBG5) para corrección, y *validación* (FBG2, FBG4, FBG6) para evaluar desempeño.

4.3.2. Discretización ZOH con término afín

Partiendo del sistema continuo global $\dot{x} = Ax + Bu + d$ con salidas $y = Cx$ (donde $d = M^{-1}b$ agrupa el término afín por convección y fuentes), se usa un truco estándar: ampliar la entrada como $u_{\text{aug}} = \begin{bmatrix} u \\ 1 \end{bmatrix}$ y definir $B_{\text{aug}} = [B \ d]$. Con ello,

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k + G_d,$$

$$y_k = C x_k,$$

$$\text{donde } \begin{cases} [A_d \ B_{\text{aug}}^d] = \text{c2d}([A \ B_{\text{aug}}], T_s, \text{zoh}), \\ B_{\text{aug}} = [B \ d], \\ B_d \text{ es la primera columna de } B_{\text{aug}}^d, \\ G_d \text{ es la segunda columna de } B_{\text{aug}}^d. \end{cases}$$

Así se preserva el sesgo estacionario de la planta en el dominio discreto sin introducir estados auxiliares.

4.3.3. Reducción de orden preservando I/O

Sobre el sistema discreto ampliado

$$\mathcal{S}_d : \quad x_{k+1} = A_d x_k + \underbrace{\begin{bmatrix} B_d & G_d \end{bmatrix}}_{2 \text{ entradas}} \begin{bmatrix} u_k \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \underbrace{\begin{bmatrix} y_k^{\text{use}} \\ y_k^{\text{val}} \end{bmatrix}}_{\text{salidas preservadas}} = \underbrace{\begin{bmatrix} C_{\text{use}} \\ C_{\text{val}} \end{bmatrix}}_{C_d} x_k,$$

Se aplica *balanced truncation* (**balred**) para obtener un modelo reducido manteniendo simultáneamente las dos entradas (u y el “1”) y las salidas de corrección y validación. De este modo, la reducción respeta la estructura de evaluación posterior (misma T_s , mismas métricas por sensor), y facilita comparar directamente medición vs. estimación en ambos subconjuntos.

$$x_{k+1}^{(r)} = A_r x_k^{(r)} + B_r u_k + G_r, \quad \begin{bmatrix} y_k^{\text{use}} \\ y_k^{\text{val}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_r^{\text{use}} \\ C_r^{\text{val}} \end{bmatrix} x_k^{(r)},$$

4.3.4. Diseño del observador por place

Con el par reducido (A_r, C_r^{use}) se diseña un observador de Luenberger discreto fijando los polos del error en $A_r - L_d C_r^{\text{use}}$. Los módulos de polos se eligen dentro del círculo unidad. Para robustez numérica se usan radios ligeramente diferenciados y pares conjugados, evitando multiplicidades (requisito práctico de **place** en MIMO).

$$\hat{x}_{k+1} = A_r \hat{x}_k + B_r u_k + G_r + L_d (y_k^{\text{use}} - C_r^{\text{use}} \hat{x}_k),$$

El resultado se reporta como:

$$\rho_{\text{planta}} = \max |\lambda(A_r)|, \quad \rho_{\text{obs}} = \max |\lambda(A_r - L_d C_r^{\text{use}})|,$$

verificando $\rho_{\text{obs}} < \rho_{\text{planta}} < 1$.

4.3.5. Chequeos de observabilidad y detectabilidad

Se evalúa el rango de la matriz de observabilidad $\mathcal{O} = \text{obsv}(A_r, C_r^{\text{use}})$ y el criterio PBH por modo para confirmar que todo modo inestable/borde ($|\lambda| \geq 1$) sea observable. En caso de existir modos no observables, se exige que sean estables para garantizar *detectabilidad*. El código imprime:

- $\text{rank}(\mathcal{O})$ vs. n_r ,
- etiqueta de observabilidad por modo (PBH),
- diagnóstico de detectabilidad (OK/FALLA).

4.3.6. Inicialización consistente y simulación

Para minimizar transitorios arbitrarios, la condición inicial se ajusta con dos pasos: (i) estado de equilibrio discreto $x^{ss} = (I - A_r)^{-1}(B_r u_1 + G_r)$, y (ii) proyección por mínimos cuadrados con regularización suave hacia x^{ss} , usando como objetivo de salidas un nivel homogéneo (p. ej., 15 °C). Se aplica además una “pre-corrección” con L_d sobre las salidas usadas en $k = 1$. Luego se simula lazo abierto del observador:

$$\hat{x}_{k+1} = A_r \hat{x}_k + B_r u_k + G_r + L_d (y_k^{\text{use}} - C_r^{\text{use}} \hat{x}_k), \quad \hat{y}_k^{\text{use}} = C_r^{\text{use}} \hat{x}_k, \quad \hat{y}_k^{\text{val}} = C_r^{\text{val}} \hat{x}_k,$$

y se comparan mediciones vs. estimaciones en ambos subconjuntos. Las figuras se exportan en formato vectorial (PDF) para su incorporación directa al documento.

4.4. Resultados Obtenidos

4.4.1. Reducción de orden del modelo FEM

El modelo original obtenido mediante el método de elementos finitos (FEM) presenta un número elevado de estados, lo que hace inviable su implementación directa en hardware embebido. Para superar esta limitación se aplicó la *reducción balanceada* mediante la función `balred` de MATLAB, que conserva los modos dinámicos más relevantes en términos de controlabilidad y observabilidad.

Se seleccionó un orden reducido de $n_r = 4$, lo que permite capturar la dinámica principal de la mesa térmica manteniendo la complejidad en un nivel adecuado. Tras la reducción, las matrices de salida C_r dejan de ser selecciones directas de nodos para convertirse en **combinaciones lineales** de los estados reducidos, reflejando el cambio de base del truncamiento balanceado.

4.4.2. Matrices reducidas obtenidas

El sistema reducido en espacio de estados discreto queda representado como:

$$x_{k+1} = A_r x_k + B_r u_k + G_r, \quad y_k = C_r x_k$$

donde $A_r \in \mathbb{R}^{n_r \times n_r}$, $B_r \in \mathbb{R}^{n_r \times 1}$, $G_r \in \mathbb{R}^{n_r}$ y $C_r \in \mathbb{R}^{6 \times n_r}$.

En este trabajo se particiona la matriz de salidas como:

$$C_r = \begin{bmatrix} C_{r,\text{use}} \\ C_{r,\text{val}} \end{bmatrix}, \quad y_k = \begin{bmatrix} y_{\text{use},k} \\ y_{\text{val},k} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{r,\text{use}} \\ C_{r,\text{val}} \end{bmatrix} x_k,$$

Con $C_{r,\text{use}} \in \mathbb{R}^{3 \times n_r}$ y $C_{r,\text{val}} \in \mathbb{R}^{3 \times n_r}$. De acuerdo al código, se usan ****FBG1, FBG3 y FBG5**** para la corrección del observador (definiendo $C_{r,\text{use}}$) y se reservan ****FBG2, FBG4 y FBG6**** para *validación* (definiendo $C_{r,\text{val}}$).

Las matrices del sistema reducido, obtenidas tras la discretización con término afín y la reducción balanceada, fueron:

$$A_r = \begin{bmatrix} 0,9883 & 0,0011 & -0,0026 & 0,0028 \\ -0,0081 & 0,9295 & -0,0224 & 0,0135 \\ -0,0048 & 0,0072 & 0,8844 & -0,0490 \\ 0,0067 & 0,0280 & 0,0572 & 0,7576 \end{bmatrix}$$

$$B_r = 10^{-4} \begin{bmatrix} 0,1707 \\ 0,1852 \\ -0,2517 \\ 0,1273 \end{bmatrix} \quad G_r = \begin{bmatrix} 0,3390 \\ -0,0394 \\ -0,0187 \\ 0,0005 \end{bmatrix}$$

$$C_{r,\text{use}} = \begin{bmatrix} 0,4088 & -0,7720 & -0,3044 & -0,0051 \\ 0,5414 & -0,0450 & 0,5810 & 0,5237 \\ 0,5242 & -0,0960 & 0,3637 & -0,0539 \end{bmatrix}$$

$$C_{r,\text{val}} = \begin{bmatrix} 0,5727 & 0,1513 & 0,7363 & 0,4980 \\ 0,4120 & -0,7641 & -0,2598 & 0,1297 \\ 0,4088 & -0,7720 & -0,3044 & -0,0051 \end{bmatrix}$$

A diferencia del modelo FEM original, en el que las matrices de salida eran dispersas y estaban compuestas únicamente por ceros y unos (indicando la asociación directa entre cada sensor FBG y un nodo de la malla), las matrices $C_{r,\text{use}}$ y $C_{r,\text{val}}$ del modelo reducido presentan **coeficientes reales continuos**.

Esto se debe a que el proceso de *balanced truncation* aplica un cambio de base que combina los estados originales en nuevas coordenadas reducidas. Por tanto, cada salida medida ya no depende de un único nodo físico, sino de una combinación lineal ponderada de los estados reducidos más relevantes.

En otras palabras, las filas de C_r reflejan ahora la contribución conjunta de los modos dominantes del sistema a cada sensor, conservando la respuesta térmica global pero en una dimensión mucho menor.

Se verifica que las dimensiones de las matrices son coherentes con el orden reducido adoptado:

$$A_r \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad B_r, G_r \in \mathbb{R}^{4 \times 1}, \quad C_{r,\text{use}}, C_{r,\text{val}} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

Por tanto, el conjunto reducido $\{A_r, B_r, G_r, C_{r,\text{use}}, C_{r,\text{val}}\}$ mantiene la estructura esperada

del modelo discreto con $n_r = 4$ estados, tres salidas usadas para corrección y tres para validación.

A diferencia del modelo FEM original, en el que las matrices de salida eran dispersas y estaban compuestas únicamente por ceros y unos (indicando la asociación directa entre cada sensor FBG y un nodo de la malla), las matrices $C_{r,\text{use}}$ y $C_{r,\text{val}}$ del modelo reducido presentan **coeficientes reales continuos**.

Esto se debe a que el proceso de *balanced truncation* aplica un cambio de base que combina los estados originales en nuevas coordenadas reducidas. Por tanto, cada salida medida ya no depende de un único nodo físico, sino de una combinación lineal ponderada de los estados reducidos más relevantes.

En otras palabras, las filas de C_r reflejan ahora la contribución conjunta de los modos dominantes del sistema a cada sensor, conservando la respuesta térmica global pero en una dimensión mucho menor.

Se verifica que las dimensiones de las matrices son coherentes con el orden reducido adoptado:

$$A_r \in \mathbb{R}^{4 \times 4}, \quad B_r, G_r \in \mathbb{R}^{4 \times 1}, \quad C_{r,\text{use}}, C_{r,\text{val}} \in \mathbb{R}^{3 \times 4}.$$

Por tanto, el conjunto reducido $\{A_r, B_r, G_r, C_{r,\text{use}}, C_{r,\text{val}}\}$ mantiene la estructura esperada del modelo discreto con $n_r = 4$ estados, tres salidas usadas para corrección y tres para validación.

4.4.3. Autovalores y estabilidad

En sistemas discretos, la condición de estabilidad se cumple cuando $|\lambda| < 1$. Los autovalores del sistema reducido cumplen

$$\lambda(A_r) \subset \{ \lambda \in \mathbb{C} \mid |\lambda| < 1 \},$$

confirmando que el modelo reducido es estable. Tras el diseño del observador mediante `place` sobre el par $(A_r, C_{r,\text{use}})$, se obtiene:

$$\max \left| \lambda(A_r - L_d C_{r,\text{use}}) \right| < \max \left| \lambda(A_r) \right|,$$

lo que garantiza que el observador es más rápido que la dinámica de la planta reducida y por tanto las estimaciones convergen eficientemente.

4.4.4. Chequeo de observabilidad y detectabilidad

La observabilidad del par $(A_r, C_{r,\text{use}})$ se verificó mediante la matriz

$$\mathcal{O} = \begin{bmatrix} C_{r,\text{use}} \\ C_{r,\text{use}}A_r \\ C_{r,\text{use}}A_r^2 \\ \vdots \\ C_{r,\text{use}}A_r^{n_r-1} \end{bmatrix}, \quad \mathcal{O} \in \mathbb{R}^{3n_r \times n_r} = \mathbb{R}^{12 \times 4}.$$

En nuestro caso, se obtuvo de forma numérica:

$$\boxed{\text{rank}(\mathcal{O}) = 4 = n_r}$$

lo que confirma que el sistema reducido es **observable**.

Además, dado que todos los modos de A_r satisfacen $|\lambda| < 1$, el sistema reducido es también *detectable*. En consecuencia, el par $(A_r, C_{r,\text{use}})$ cumple las condiciones estructurales necesarias para la implementación del observador, mientras que $C_{r,\text{val}}$ permite evaluar la capacidad predictiva sobre sensores no utilizados en la realimentación.

4.4.5. Resultados de estimación del observador

En esta sección se presentan los resultados obtenidos al aplicar el observador reducido sobre los datos experimentales. Primero se comparan las mediciones reales de los sensores con las estimaciones entregadas por el observador, y luego se muestran los errores de estimación correspondientes. Finalmente, se cuantifica el desempeño mediante el cálculo del error cuadrático medio (RMSE) para cada sensor.

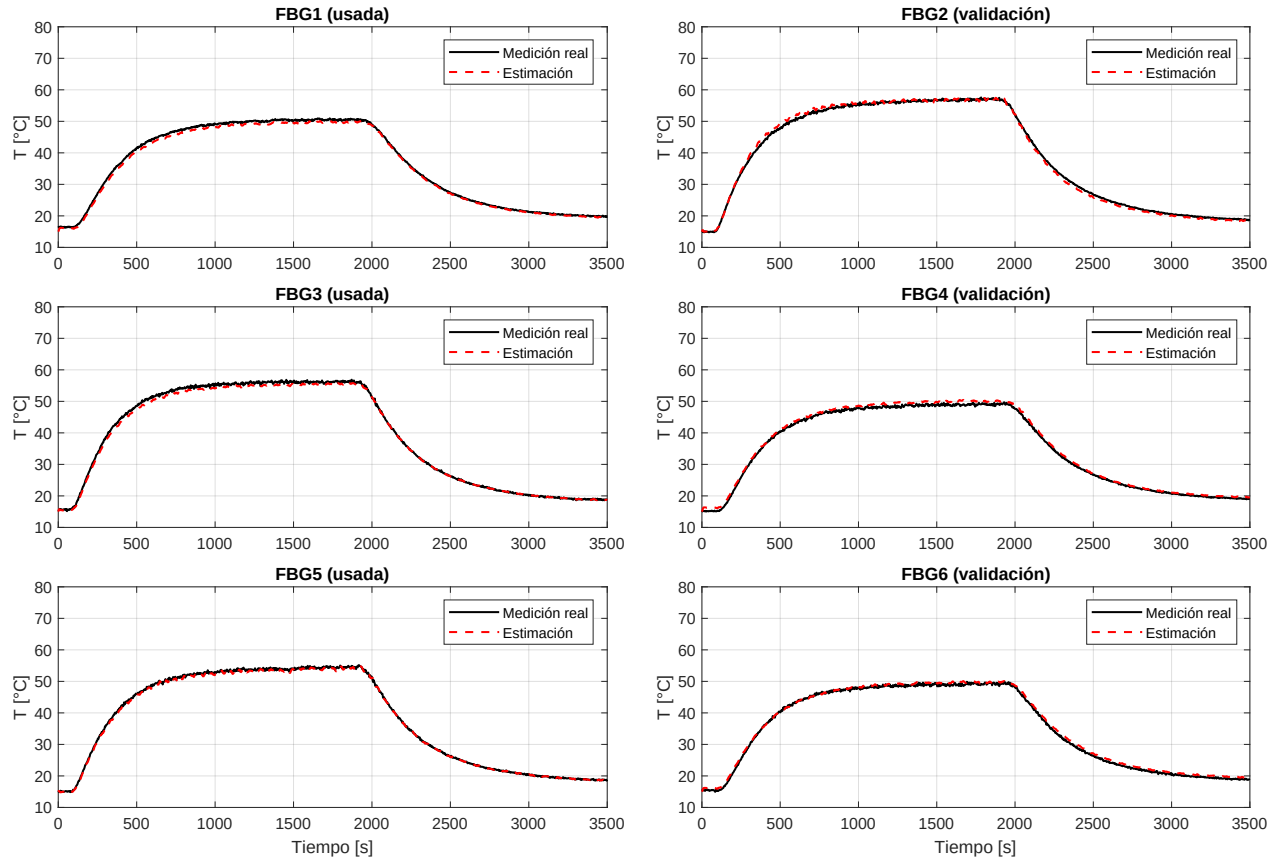


Figura 4.1: Comparación real vs. estimado.

En la Figura 4.1 se observa la evolución temporal de la temperatura en los seis sensores. Los sensores usados para la corrección (FBG1, FBG3 y FBG5) se muestran a la izquierda, mientras que los sensores de validación (FBG2, FBG4 y FBG6) aparecen a la derecha. En ambos casos, la estimación reproduce con alta fidelidad las mediciones reales.

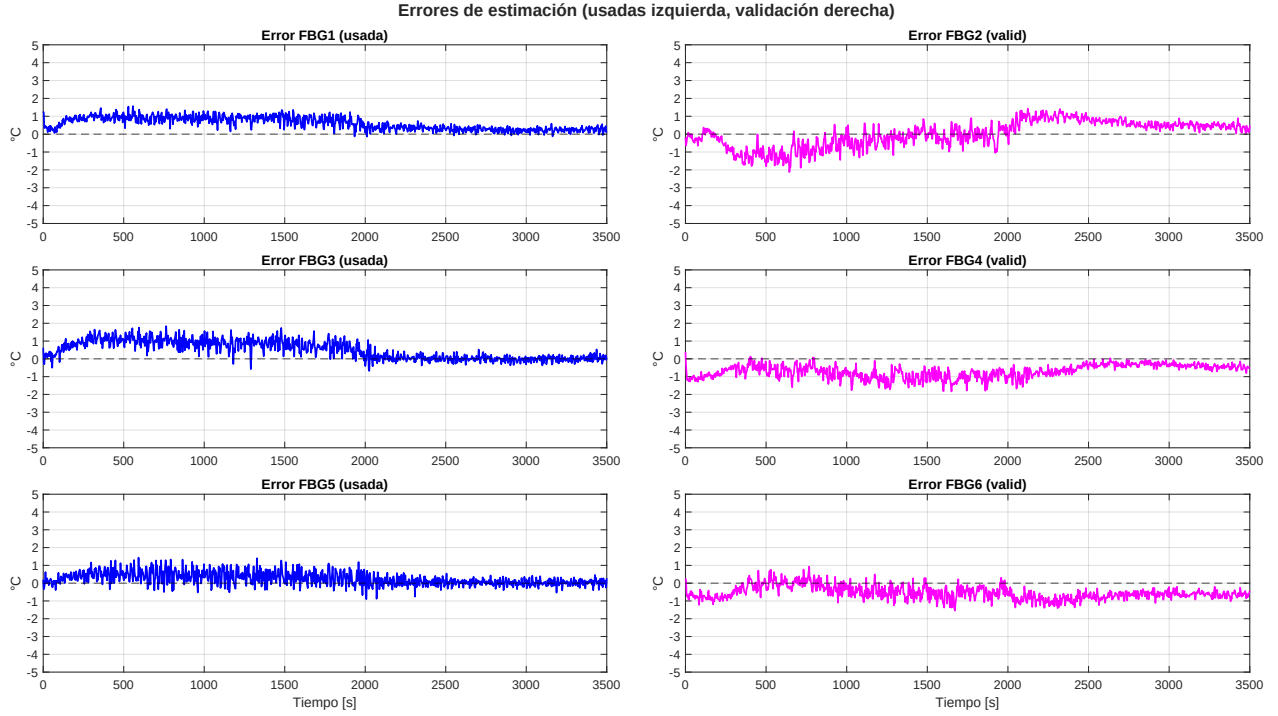


Figura 4.2: Errores de estimación.

La Figura 4.2 presenta los errores de estimación en los sensores usados (izquierda) y en los sensores de validación (derecha). En todos los casos los errores se mantienen dentro de un rango menor a $\pm 2^\circ\text{C}$, lo que confirma la buena precisión del observador reducido.

El desempeño del observador se evaluó además mediante el error cuadrático medio (RMSE) entre mediciones y estimaciones. Los resultados se resumen en la Tabla 4.1.

Tabla 4.1: RMSE del observador discreto reducido

Sensor	RMSE [$^\circ\text{C}$]
FBG1 (usada)	0.694
FBG3 (usada)	0.709
FBG5 (usada)	0.441
FBG2 (validación)	0.725
FBG4 (validación)	0.798
FBG6 (validación)	0.663
Promedio usadas	0.615
Promedio validación	0.729

Los resultados muestran que el observador logra una estimación fiel tanto en los sensores utilizados para el diseño como en los empleados para validación independiente, manteniendo errores menores a 1 °C en todos los casos.

4.5. Control de Temperatura

Tras la implementación del observador discreto de Luenberger, capaz de reconstruir las variables de estado no medidas en la mesa térmica, se aborda en esta sección el diseño del controlador encargado de regular la temperatura en el punto de interés definido por el sensor FBG4. El objetivo principal es lograr una respuesta estable y precisa ante cambios de referencia, considerando la naturaleza lenta del sistema térmico y las restricciones físicas del actuador (voltaje máximo aplicado a la PTC).

Dado que el modelo reducido obtenido mediante balanced truncation conserva la dinámica esencial del proceso, se utiliza como base para el diseño del control. Sobre este modelo se implementa un regulador lineal cuadrático con acción integral (LQI), el cual permite no solo estabilizar el sistema, sino también eliminar el error estacionario frente a perturbaciones o referencias constantes [34, 35].

El esquema de control se formula en tiempo discreto y opera sobre las estimaciones de estado entregadas por el observador, conformando así una arquitectura de control por realimentación de estado con estimación (*output feedback*) [29]. Esta estructura combina las ventajas del control óptimo, minimización de un costo cuadrático que equilibra esfuerzo de control y error de seguimiento, con la robustez del observador, asegurando una regulación térmica eficiente incluso en presencia de incertidumbres menores del modelo o ruido de medición.

4.5.1. Control de temperatura con PTC mediante regulador LQI discreto

El objetivo del controlador es regular la temperatura de la mesa térmica en el punto medido por el sensor FBG4, utilizando una resistencia PTC como actuador. Dado que la PTC sólo puede entregar energía térmica positiva, el control se plantea en tiempo discreto, integrando las restricciones físicas del sistema y la estimación de estados provista por el observador [23].

4.5.2. Modelo en desviaciones

El modelo reducido discreto del sistema térmico se expresa como:

$$x_{k+1} = A_r x_k + B_r u_k + G_r, \quad y_k = C_{4r} x_k, \quad (4.19)$$

donde x_k representa el estado térmico reducido, u_k la entrada proporcional al calor entregado por la PTC, y G_r un sesgo estacionario asociado a las pérdidas por convección. En ausencia de acción de control ($u_k = 0$), el sistema alcanza un equilibrio térmico natural dado por:

$$x_{ss} = (I - A_r)^{-1} G_r, \quad (4.20)$$

y la temperatura correspondiente en el punto FBG4 es $y_{ss,4} = C_{4r} x_{ss}$.

Para simplificar el diseño del controlador, se trabaja en coordenadas de desviación respecto a dicho equilibrio, definiendo:

$$z_k = x_k - x_{ss}, \quad \tilde{y}_k = y_k - y_{ss,4} = C_{4r} z_k.$$

En estas nuevas coordenadas, el sesgo estacionario G_r desaparece, y la dinámica se describe únicamente por la evolución de las variaciones térmicas:

$$z_{k+1} = A_r z_k + B_r u_k, \quad \tilde{y}_k = C_{4r} z_k. \quad (4.21)$$

4.5.3. Referencia y error térmico

Cuando se establece una nueva referencia de temperatura r_k para el sensor FBG4, el controlador no modifica el equilibrio x_{ss} del modelo, sino que busca generar una desviación térmica $\tilde{y}_k$ que iguale la diferencia entre la referencia y la salida estacionaria:

$$r_k = r_k - y_{ss,4}.$$

De esta forma, el error de seguimiento se expresa en coordenadas de desviación como:

$$e_k = r_k - \tilde{y}_k = r_k - C_{4r} z_k. \quad (4.22)$$

Esta formulación permite que el sistema trabaje en torno a un equilibrio de temperatura ambiente, haciendo innecesario compensar directamente las pérdidas térmicas modeladas por G_r .

4.5.4. Acción integral

Para eliminar el error estacionario frente a referencias constantes, se introduce una variable integral ξ_k que acumula el error térmico:

$$\xi_{k+1} = \xi_k + e_k = \xi_k + (r_k - C_{4r} z_k). \quad (4.23)$$

Combinando las ecuaciones (4.21)–(4.23), se obtiene el sistema aumentado:

$$\begin{bmatrix} z_{k+1} \\ \xi_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_r & 0 \\ -C_{4r} & 1 \end{bmatrix}}_{A_a} \begin{bmatrix} z_k \\ \xi_k \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_a} u_k. \quad (4.24)$$

4.5.5. Criterio de control LQI

El regulador lineal cuadrático con acción integral (LQI) minimiza el funcional discreto [29, 35]:

$$J = \sum_{k=0}^{\infty} \left(x_{a,k}^\top Q_a x_{a,k} + u_k^\top R u_k \right), \quad (4.25)$$

donde $x_{a,k} = [z_k^\top \ \xi_k]^\top$ es el vector de estado aumentado. Las matrices $Q_a = \text{blkdiag}(Q_x, Q_i)$ y R son ponderaciones positivas que definen el compromiso entre rapidez térmica, precisión de seguimiento y esfuerzo de control. En este trabajo se emplean ponderaciones empíricas:

$$Q_x = 10^{-3} I_{n_r}, \quad Q_i = 2, \quad R = 10^{-2}.$$

La solución de Riccati discreta genera la ganancia óptima:

$$K_a = [K_x \ K_i] = \text{dlqr}(A_a, B_a, Q_a, R), \quad (4.26)$$

y la ley de control resultante se expresa como:

$$u_k = -K_x \hat{z}_k - K_i \xi_k, \quad (4.27)$$

donde $\hat{z}_k$ corresponde al estado estimado por el observador de Luenberger.

4.5.6. Saturación del actuador

El actuador PTC opera mediante una señal de voltaje limitada $V_k \in [V_{\min}, V_{\max}]$, con $V_{\min} = 0$ y $V_{\max} = 12$ V, representando un sistema unidireccional de calentamiento. La entrada térmica se relaciona con el voltaje aplicado mediante un factor proporcional:

$$u_k = k_V V_k,$$

donde k_V representa la ganancia térmica efectiva (calor generado por volt aplicado).

Cuando la acción de control excede los límites de saturación, el voltaje se restringe al rango permitido:

$$V_k = \text{sat}(V_k^{\text{des}}, V_{\min}, V_{\max}), \quad (4.28)$$

aplicándose únicamente el valor saturado V_k . De esta forma, el controlador LQI actúa directamente sobre la señal disponible en el actuador, respetando las limitaciones físicas de la PTC. Al no incluir compensación adicional de tipo *anti-windup*, el integrador mantiene su dinámica natural incluso durante los intervalos de saturación.

El controlador LQI discreto permite regular la temperatura en el punto FBG4 compensando las pérdidas térmicas y eliminando el error estacionario ante cambios de referencia. Al formular el control en coordenadas de desviación, el sistema opera en torno a su equilibrio térmico natural, integrando la acción integral y la saturación física del actuador PTC en un lazo de regulación térmica estable y coherente con las limitaciones reales del sistema.

4.6. Implementación Computacional deControl

La implementación computacional del controlador LQI discreto se realizó en *MATLAB*, siguiendo una estructura modular que permite simular el comportamiento completo del sistema térmico bajo lazo cerrado. El procedimiento integra el modelo reducido obtenido del método de elementos finitos, el observador discreto de estados y la aplicación de la ley de control LQI con saturación de voltaje.

4.6.1. Carga del modelo y parámetros de simulación

En primer lugar, se cargaron las matrices del modelo térmico reducido (M_G, K_G, C_G, B_G, b) almacenadas en el archivo `simulacionFEM.mat`, junto con el vector temporal de simulación. A partir de este registro se determinó el período de muestreo discreto T_s mediante el promedio de los intervalos temporales. Además, se definieron los parámetros globales de simulación, como el orden reducido del modelo $n_r = 4$, la temperatura inicial $T_0 = 15^\circ\text{C}$, el rango de voltaje de la PTC $[V_{\min}, V_{\max}] = [0, 12]$ V, la referencia térmica $r = 30^\circ\text{C}$ y el instante de activación de la referencia $t_{\text{ref}} = 130$ s.

4.6.2. Discretización y reducción de orden

El modelo continuo fue discretizado mediante retención de orden cero (ZOH), considerando el término afín $d = M_G^{-1}b$ como una segunda entrada constante que representa el sesgo estacionario del sistema. Posteriormente, se aplicó reducción balanceada al modelo discreto para obtener una representación equivalente de orden $n_r = 4$, que conserva la dinámica dominante de la mesa térmica y reduce el costo computacional de simulación.

4.6.3. Formulación del control LQI discreto

Sobre el modelo reducido en desviaciones, se implementó el regulador LQI discreto según la formulación desarrollada teóricamente. Se conformaron las matrices aumentadas:

$$A_a = \begin{bmatrix} A_r & 0 \\ -C_{4r} & 1 \end{bmatrix}, \quad B_a = \begin{bmatrix} B_r \\ 0 \end{bmatrix},$$

y se definieron las ponderaciones empíricas $Q_x = 10^{-3}I_{n_r}$, $Q_i = 2$ y $R = 10^{-2}$. A partir de ellas, la función `dlqr()` resolvió la ecuación de Riccati discreta, generando las ganancias de realimentación K_x y K_i . El controlador calcula en cada instante la acción térmica discreta:

$$u_k = -K_x \hat{z}_k - K_i \xi_k,$$

donde $\hat{z}_k$ es el estado estimado por el observador y ξ_k la variable integral acumulada del error térmico.

4.6.4. Observador discreto de estados

Se implementó un observador de Luenberger discreto para estimar el vector de estado reducido. Sus polos fueron ubicados dentro del círculo unidad (0,45–0,75) para garantizar una convergencia más rápida que la dinámica de la planta. La estimación se actualiza según:

$$\hat{z}_{k+1} = A_r \hat{z}_k + B_r u_k + L(y_k - C_{4r} \hat{z}_k),$$

empleando como señal de corrección la temperatura medida por el sensor FBG4.

4.6.5. Saturación del actuador y simulación del lazo cerrado

La acción de control calculada se convirtió en voltaje mediante el factor térmico k_V , y se limitó al rango físico permitido:

$$V_k = \text{sat}\left(\frac{u_k}{k_V}, V_{\min}, V_{\max}\right), \quad u_k^{\text{ap}} = k_V V_k.$$

El voltaje saturado se aplicó al modelo discreto en desviaciones, actualizando simultáneamente los estados de la planta y del observador. De esta manera se reprodujo el comportamiento del sistema térmico bajo control LQI en lazo cerrado, con mediciones virtuales de temperatura en FBG4 y FBG5.

4.7. Resultado Obtenido

En la Figura 4.3 se observa la respuesta del lazo cerrado LQI con estimación de estados (observador de Luenberger) aplicado sobre el modelo reducido balanceado.

- **FBG4 (planta simulada).** La temperatura sigue una referencia escalón que inicia a $t=130$ s. La respuesta es *monótona y sin sobrepaso*, consistente con la dinámica difusiva de la conducción de calor y con la *limitación unidireccional* del actuador (PTC sólo calienta). La acción integral del LQI (ecuaciones (4.23)–(4.27)) garantiza que el error de seguimiento e_k tienda a cero, eliminando el sesgo estacionario asociado a las pérdidas por convección modeladas en G_r y trabajando en coordenadas de desviación ((4.21)).
- **Voltaje aplicado.** La señal de control crece y se estabiliza dentro de $[V_{\min}, V_{\max}]$, respetando la saturación del actuador. La forma suavemente ascendente refleja la naturaleza *lenta* del proceso térmico y el compromiso de diseño impuesto por (Q_a, R) : se privilegia un esfuerzo de control moderado y estable, evitando comandos bruscos que no aportan aceleración efectiva en sistemas con constante de tiempo grande.
- **FBG5 (estimada).** La salida estimada en una ubicación distinta a FBG4 presenta una dinámica con *retardo espacial/temporal* esperado por difusión: al regular el punto FBG4, el campo térmico se propaga hacia FBG5 con un gradiente decreciente. La convergencia suave de la curva roja segmentada es coherente con un observador con polos más rápidos que la planta, lo que favorece la estabilización del error de estimación sin amplificar ruido de medición.
- **Consistencia con el criterio LQI.** El resultado ilustra el equilibrio clásico del LQI discreto ((4.25)): el seguimiento se logra sin oscilaciones ni picos de control innecesarios, cumpliendo con las restricciones físicas y la topología térmica de la placa.

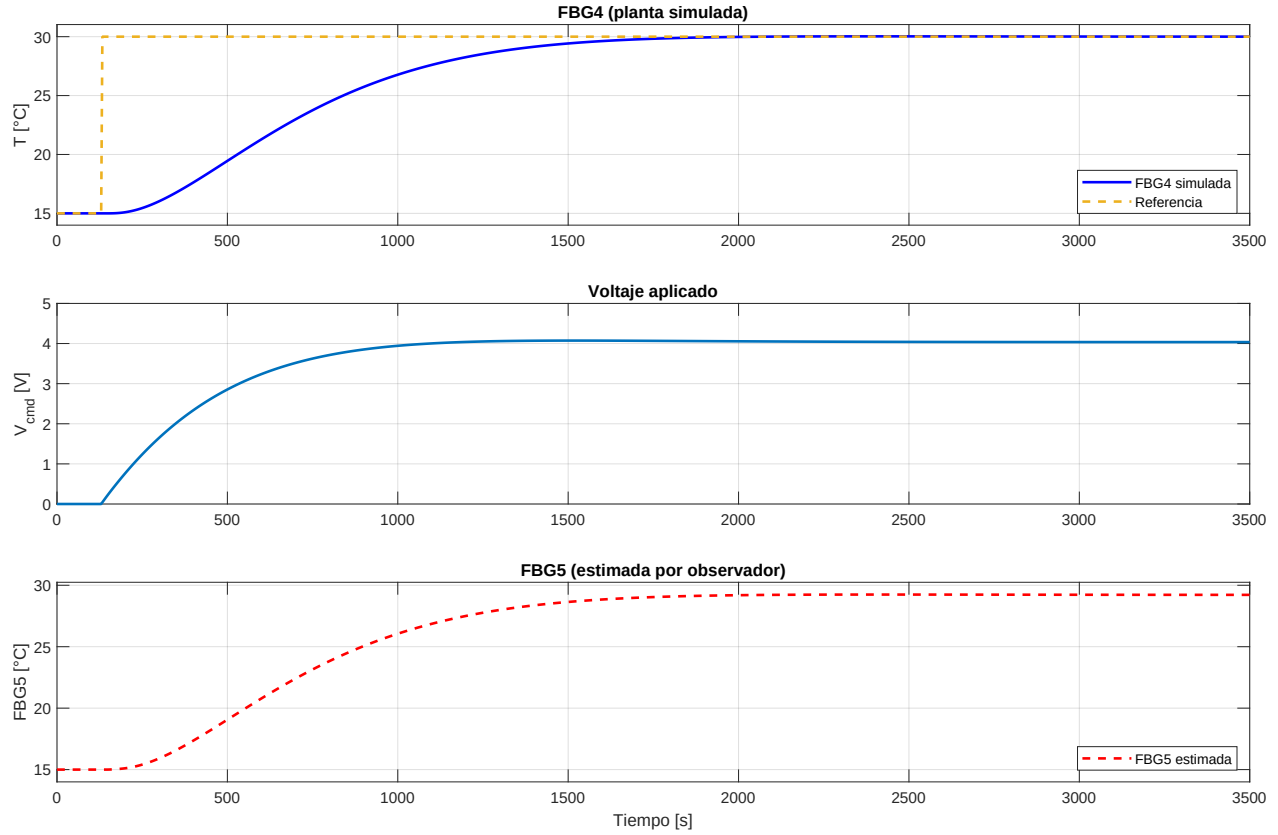


Figura 4.3: Control Aplicado con FBG4 , Voltaje Aplicado y Estimacion en FBG5 .

La figura respalda que el diseño LQI en coordenadas de desviación, junto con el observador discreto, entrega una regulación térmica estable en FBG4 y una estimación coherente en FBG5, en línea con la teoría de control óptimo y la difusión de calor en medios conductivos.

4.8. Sugerencia de Implementación para Validación de Control Térmico

La Figura 4.4 presenta una posible disposición de implementación del sistema térmico desarrollada a partir de las directrices planteadas en el *Technical Report TR-LL-02: Heat Table* [4]. Dicha configuración se propone como una referencia práctica para materializar el esquema de control modelado en este trabajo, con el objetivo de validar experimentalmente el comportamiento del controlador y del observador diseñados.

En esta propuesta, el **bloque de control** corresponde al entorno MATLAB, donde se ejecutaría el controlador LQI discreto junto con el **observador de Luenberger**, desarrollados sobre el modelo reducido obtenido a partir del **FEM 2D**. Este bloque generaría una señal de control virtual (0–12 V) que representa el esfuerzo de control ideal calculado en simulación. Dicha señal podría transmitirse mediante comunicación serial hacia una inter-

faz de comunicación y accionamiento (por ejemplo, un microcontrolador Arduino o ESP32), encargada de convertir el valor recibido en una modulación PWM (0–5 V) que gobierne la etapa de potencia.

El **Puente H**, alimentado por una fuente de 12 V DC, actuaría como la etapa de conmutación, entregando una salida de potencia real (0–12 V) hacia la **placa calefactora**. De esta forma, el lazo de control diseñado en MATLAB podría reproducirse físicamente, permitiendo evaluar el desempeño real del sistema bajo las mismas condiciones dinámicas consideradas en la simulación.

Por otro lado, la **adquisición de temperatura mediante sensores FBG** y un **interrogador Hyperion** posibilitaría obtener mediciones experimentales en tiempo real, integradas nuevamente en MATLAB a través de la API del interrogador. Estas mediciones servirían como retroalimentación del controlador, cerrando el lazo de control térmico y permitiendo contrastar la respuesta experimental con los resultados simulados.

En conjunto, esta propuesta de implementación se plantea como una alternativa viable para la validación práctica del sistema de control térmico, permitiendo verificar el desempeño del controlador LQI y del observador bajo condiciones reales de operación, asegurando coherencia entre el modelo teórico y la futura experimentación.

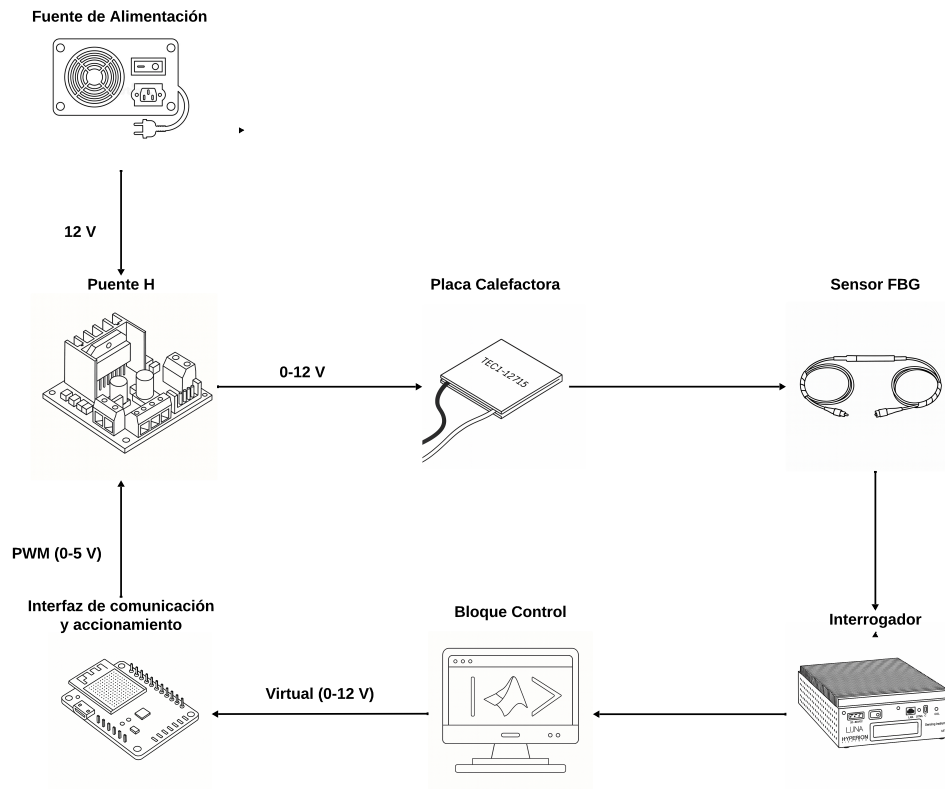


Figura 4.4: Esquema Implementación Física.

Capítulo 5

Conclusiones

El desarrollo de esta memoria permitió abordar de manera integral el problema de modelar, estimar y controlar la temperatura en una mesa térmica de cobre, combinando modelado numérico mediante Elementos Finitos, sensado avanzado con fibras ópticas FBG y estrategias modernas de control óptimo. A continuación se presentan los principales logros y aprendizajes alcanzados:

- **Modelado mediante FEM:** Se formuló y resolvió el modelo bidimensional de conducción térmica en régimen transitorio utilizando el Método de los Elementos Finitos (FEM). El análisis de la malla, las condiciones de borde y el refinamiento espacial permitió representar con fidelidad la evolución del campo térmico de la mesa, equilibrando precisión y costo computacional.
- **Identificación de parámetros térmicos:** La comparación entre simulaciones y mediciones reales obtenidas mediante sensores FBG permitió ajustar experimentalmente parámetros críticos como la conductividad térmica, el calor específico y el coeficiente de convección. Este proceso garantizó que el modelo numérico reprodujera de forma coherente el comportamiento térmico observado en el laboratorio.
- **Reducción de orden y observador:** Se aplicó el método de *balanced truncation* para obtener un modelo reducido que conserva la dinámica dominante del sistema FEM. Sobre este modelo se diseñó un observador de Luenberger, cuya ganancia L fue determinada mediante colocación de polos, logrando una estimación rápida, estable y precisa de los estados no medidos.
- **Control de temperatura mediante LQI:** Se implementó un controlador LQI discreto que permitió regular la temperatura en el punto de referencia (FBG4), eliminando el error estacionario y manteniendo el esfuerzo de control dentro de los límites físicos del actuador PTC. Los pesos de la función de costo se seleccionaron de forma empí-

rica, equilibrando la rapidez de respuesta y la estabilidad térmica del sistema, lo que permitió un desempeño robusto y eficiente.

- **Validación computacional y propuesta experimental:** La implementación en MATLAB integró las etapas de modelado, observación y control en una herramienta unificada. Se propuso además una validación experimental futura mediante comunicación con una plataforma Arduino, con el objetivo de aplicar el control en tiempo real y comparar su desempeño con el modelo simulado.
- **Colaboración interdisciplinaria:** El trabajo se desarrolló en conjunto con la memoria de Pablo Arce, centrada en la caracterización y calibración de los sensores FBG, permitiendo una validación cruzada entre las mediciones experimentales y los resultados numéricos.

Este trabajo permitió construir un sistema térmico inteligente capaz de estimar y controlar su propia temperatura de manera estable y eficiente. Más allá de los resultados técnicos, este proyecto representó un proceso de aprendizaje profundo sobre la interacción entre el modelado físico, la experimentación y el control. El camino recorrido evidenció que la ingeniería no se limita a encontrar soluciones numéricas, sino a comprender los fenómenos, validar las hipótesis y transformar la teoría en resultados tangibles. A lo largo del desarrollo del proyecto surgieron diversos desafíos técnicos y conceptuales que exigieron análisis, adaptación y creatividad para ser resueltos. Afrontar cada uno de estos problemas permitió fortalecer las habilidades de razonamiento, planificación y resolución, consolidando la confianza en la propia capacidad para superar obstáculos y continuar avanzando hacia los objetivos propuestos. Esta memoria, en consecuencia, no solo culmina un desarrollo técnico, sino también una etapa formativa que refuerza la convicción de que la investigación aplicada es una herramienta poderosa para innovar, aprender y construir conocimiento significativo.

Bibliografía

- [1] P. A. Pinilla, “Monitoreo de temperatura en una placa bidimensional con sensores de fibra óptica basados en rejillas de bragg,” agosto 2025.
- [2] D. Ross-Pinnock and P. G. Maropoulos, “Review of industrial temperature measurement technologies and research priorities for the thermal characterisation of the factories of the future,” *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part B: Journal of Engineering Manufacture*, vol. 230, no. 5, pp. 793–806, 2016.
- [3] Łach, P. Kowalski, M. Czapla, and J. Wyrwa, “Advances in numerical modeling for heat transfer and thermal management: A review of computational approaches and environmental impacts,” *Energies*, vol. 18, no. 5, p. 1302, 2025.
- [4] F. T. Sanhueza, “Heat table: Technical report tr-11-02,” tech. rep., Universidad Técnica Federico Santa María, 2023. Lyapunov Non-Linear Control Laboratory, FONDECYT Project 1191544.
- [5] R. Arlitt, J. Chen, K. Ho, and P. Thummala, “Thermal modeling and control of electronic systems,” *IEEE Transactions on Components, Packaging and Manufacturing Technology*, vol. 7, no. 4, pp. 552–562, 2017.
- [6] A. Kersey, M. Davis, H. Patrick, M. LeBlanc, K. Koo, C. Askins, M. Putnam, and E. Friebele, “Fiber grating sensors,” *Journal of Lightwave Technology*, vol. 15, no. 8, pp. 1442–1463, 1997.
- [7] X. Bao and L. Chen, *Recent progress in distributed fiber optic sensors*, vol. 12. 2012.
- [8] D. Tosi, “Review and analysis of peak tracking techniques for fiber bragg grating sensors,” *Journal of Sensors*, vol. 2017, pp. 1–20, 2017.
- [9] K. O. Hill and G. Meltz, “Fiber bragg grating technology fundamentals and overview,” *Journal of Lightwave Technology*, vol. 15, no. 8, pp. 1263–1276, 1997.
- [10] A. Pal, V. Singh, U. Tiwari, and N. Singh, “Characterization of temperature and strain sensitivity of fiber bragg gratings,” *Optik - International Journal for Light and Electron Optics*, vol. 120, no. 6, pp. 276–281, 2009.

- [11] C. H. P. Kotinda, V. de Oliveira, and C. C. da Silva, “Monitoramento térmico de painel fotovoltaico utilizando redes de bragg em fibra óptica,” *Revista Brasileira de Energia Solar*, vol. 9, no. 4, pp. 1–8, 2018.
- [12] Y. Liu, J. Sun, W. Zhang, and L. Zhang, “Temperature and strain discrimination using dual fiber bragg gratings with different coatings,” *Sensors*, vol. 18, no. 1, p. 66, 2018.
- [13] N. T. Pham, S. Lee, Y. W. Lee, and H. W. Kang, “Temperature monitoring with fbg sensor during diffuser-assisted laser-induced interstitial thermotherapy,” in *Proceedings of SPIE—Therapeutics and Diagnostics in Urology: Lasers, Robotics, Minimally Invasive Technologies, and Advanced Imaging*, vol. 10038, pp. 100380B–1–100380B–7, SPIE, 2017.
- [14] J. Fish and T. Belytschko, *A First Course in Finite Elements*. Chichester, England: John Wiley & Sons, 2007.
- [15] O. Zienkiewicz and R. Taylor, *The Finite Element Method*. Oxford, UK: Butterworth-Heinemann, 6th ed., 2005.
- [16] T. Hughes, *The Finite Element Method: Linear Static and Dynamic Finite Element Analysis*. Mineola, NY: Dover Publications, 2000.
- [17] F. P. Incropera, D. P. DeWitt, T. L. Bergman, and A. S. Lavine, *Fundamentals of Heat and Mass Transfer*. Hoboken, NJ, USA: John Wiley & Sons, 6th ed., 2007.
- [18] J. D’Errico, “fminsearchbnd and fminsearchcon: Bound constrained optimization using fminsearch.” MATLAB Central File Exchange, 2006. Available at <https://www.mathworks.com/matlabcentral/fileexchange/8277-fminsearchbnd-fminsearchcon>.
- [19] J. C. Lagarias, J. A. Reeds, M. H. Wright, and P. E. Wright, “Convergence properties of the nelder–mead simplex method in low dimensions,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 9, no. 1, pp. 112–147, 1998.
- [20] W. Callister and D. Rethwisch, *Materials Science and Engineering*. Wiley, 2018.
- [21] X. Jin and L. Jia, “Parameter estimation in thermal models,” *Applied Thermal Engineering*, 2014.
- [22] S. Ravindran, S. Kabanikhin, and M. Yamamoto, *Computational Methods for Inverse Problems*. Springer, 2000.
- [23] K. Ogata, *Ingeniería de control moderna*. Madrid: Pearson Educación, 5 ed., 2010.

- [24] R. A. García, *Algunos aspectos de la Teoría del Control de Sistemas no Lineales: Observadores de tipo Luenberger*. PhD thesis, Universidad de Buenos Aires, Facultad de Ciencias Exactas y Naturales, 1993.
- [25] J. Fish and T. Belytschko, *A First Course in Finite Elements*. Chichester, England: John Wiley & Sons Ltd, 2007.
- [26] R. C. Dorf and R. H. Bishop, *Modern Control Systems*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, 12th ed., 2011.
- [27] C.-T. Chen, *Linear System Theory and Design*. Oxford University Press, 3rd ed., 1999.
- [28] T. Kailath, *Linear Systems*. Prentice-Hall, 1980.
- [29] G. F. Franklin, J. D. Powell, and A. Emami-Naeini, *Feedback Control of Dynamic Systems*. Upper Saddle River, NJ: Pearson Education, 7th ed., 2015.
- [30] N. S. Nise, *Control Systems Engineering*. Hoboken, NJ: John Wiley & Sons, 8th ed., 2019.
- [31] B. C. Moore, “Principal component analysis in linear systems: Controllability, observability, and model reduction,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 26, no. 1, pp. 17–32, 1981.
- [32] A. C. Antoulas, *Approximation of Large-Scale Dynamical Systems*. Philadelphia, PA: Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), 2005.
- [33] P. Benner, S. Gugercin, and K. Willcox, “A survey of projection-based model reduction methods for parametric dynamical systems,” *SIAM Review*, vol. 57, no. 4, pp. 483–531, 2015.
- [34] H. Kwakernaak and R. Sivan, *Linear Optimal Control Systems*. Wiley-Interscience, 1972.
- [35] F. L. Lewis, L. Xie, and D. Popa, *Optimal and Robust Estimation: With an Introduction to Stochastic Control Theory*. Boca Raton, FL: CRC Press, 2nd ed., 2012.