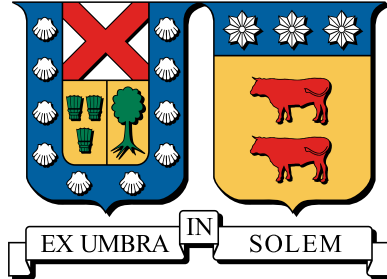


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA



Cargas conservadas y primera ley de la termodinámica de agujeros negros en el formalismo del espacio de fases covariante

Por:

Francisco Javier Manzano Martínez

Tesina presentada como requisito para la obtención del título Licenciado en Física

Profesor guía : Dr. Ernesto Frodden
Comisión : Dr. Daniel Albornoz
: Dr. Alfonso Zerwekh
: Dr. Sebastián Mendizabal
: Dr. Cristóbal Corral

Julio 28, 2026



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título ☐ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Cargas conservadas y primera ley de la termodinámica de agujeros negros en el formalismo del espacio de fases covariante

Nombre del candidato(a): Francisco Javier Manzano Martínez

Carrera / Grado: Licenciado en Física

Campus: San Joaquín **Departamento:** Física

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, _____ Ernesto Frodden Córdoba _____, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☒ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

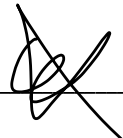
Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 27/08/2026 **Firma:** 

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 27/08/2026 **Firma:** 

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

Agradecimientos

En primer lugar, quiero agradecer a mi profesor guía, Ernesto Frodden, quien me orientó a lo largo de este trayecto. Agradezco especialmente su disposición para dedicarme parte de su tiempo y explicarme aquellos aspectos del formalismo que no lograba comprender. Asimismo, valoro profundamente sus comentarios y sugerencias durante el desarrollo de este trabajo, así como su ayuda y disposición para prepararme para la defensa.

En segundo lugar, quiero agradecer a mis compañeros Charlotte Guajardo y Marcelo Durán por escucharme, compartir sus experiencias y brindarme valiosos comentarios durante el desarrollo de mi proyecto de tesina. Agradezco especialmente las conversaciones y discusiones que mantuve con Charlotte sobre gravitación y cosmología, que fueron una parte muy enriquecedora de este proceso.

Por último, agradezco al profesor Daniel Albornoz por facilitarnos su oficina para trabajar durante los días en que Ernesto se encontraba en Santiago, así como por su disposición para viajar a Valparaíso el día de mi defensa.

Muchas gracias a todos por su apoyo y compañía durante este proceso.

Abstract

La termodinámica de agujeros negros constituye uno de los principales puntos de encuentro entre la relatividad general, la termodinámica y la mecánica cuántica. Si bien la formulación clásica de sus leyes describe adecuadamente las soluciones estacionarias en ausencia de defectos globales, su extensión a espacio-tiempo con estructura global no trivial, como aquellos que presentan defectos cónicos, requiere un marco riguroso para definir las cantidades conservadas involucradas. Con este propósito, se desarrolla el formalismo del espacio de fases covariante propuesto por Lee y Wald, presentando sus fundamentos geométricos y la construcción de las cargas conservadas asociadas a las simetrías de la teoría.

El formalismo se valida en las soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström, donde la masa y la carga eléctrica se obtienen como cargas de Noether asociadas a las simetrías temporal y de gauge, respectivamente, mostrando que el formalismo unifica el tratamiento de cargas de origen geométrico y de gauge. Posteriormente, el formalismo se aplica a los casos de Kerr-Taub-NUT y la C-métrica de Schwarzschild. En Kerr-Taub-NUT, la incorporación de las contribuciones asociadas a las cuerdas de Misner conduce a una primera ley termodinámica consistente con la relación de Christodoulou-Ruffini. En la C-métrica de Schwarzschild se demuestra que la carga asociada a la simetría temporal define una 1-forma no integrable en el espacio de fases, lo que requiere generalizar el formalismo mediante el reescalamiento del generador de simetría; sin embargo, la carga conservada obtenida no conduce a una primera ley compatible con la interpretación termodinámica usual, lo que deja abierta la búsqueda de una formulación consistente para la termodinámica de agujeros negros acelerados. Estos resultados muestran que el formalismo del espacio de fases covariante constituye una herramienta sistemática y extensible para la construcción de cargas conservadas en relatividad general y su aplicación al estudio de la termodinámica de agujeros negros con estructura global no trivial.

Índice general

Abstract	II
Contenidos	V
1. Historia y desarrollo de la termodinámica de agujeros negros: de las soluciones exactas al formalismo del espacio de fases covariante.	1
1.1. Las primeras soluciones de los agujeros negros	1
1.2. Teoremas de unicidad y principio de no pelo	2
1.3. Surgimiento de la mecánica de agujeros negros	3
1.4. Estructura energética del horizonte	4
1.5. Entropía de Bekenstein y radiación de Hawking	5
1.6. Limitaciones de la entropía de Bekenstein–Hawking	6
1.7. Formalismo del espacio de fases covariante	7
1.8. Alcance y objetivos	7
2. Fundamentos matemáticos y geométricos del espacio de fases covariante	9
2.1. Convenciones y notación	9
2.2. Variedades diferenciables	10
2.3. Espacio tangente y cotangente	10
2.4. Espacio de configuraciones	11
2.5. Interpretación de las variaciones $\delta\phi$	12
2.6. Espacio de soluciones	12
2.7. Espacio de fases covariante	13
2.8. Formas diferenciales	13
2.8.1. p -formas	13
2.8.2. Producto exterior	14
2.8.3. Derivada exterior	15
2.8.4. Producto interior	16
2.8.5. Dual de Hodge	16
2.9. Derivada de Lie	16
2.9.1. Identidad de Cartan	17

2.9.2. Pullback	17
2.10. Orientación e integración sobre variedades	18
2.10.1. Densidades tensoriales	18
2.10.2. Integración de una densidad escalar	18
2.10.3. El teorema de Stokes	19
2.10.4. Elementos de volumen y de superficie inducidos por una métrica . . .	20
2.11. Simetrías e isometrías	21
2.11.1. Vectores de Killing	21
2.11.2. Espacios de máxima simetría	22
3. Geometría y termodinámica de los agujeros negros clásicos	23
3.1. Geometría de agujeros negros	23
3.1.1. Schwarzschild	24
3.1.2. Reissner–Nordström	26
3.1.3. Kerr	27
3.1.4. Kerr–Newman	30
3.2. Las leyes termodinámicas de agujeros negros	33
3.2.1. Ley cero, temperatura y entropía	33
3.2.2. Primera ley: el corazón de la termodinámica de agujeros negros . . .	35
3.3. Ecuación de Christodoulou–Ruffini	37
3.4. Fórmula de Smarr	38
4. Formalismo de espacio de fases covariante	40
4.1. Dos espacios, una idea	40
4.2. El Lagrangiano y su variación	41
4.3. La corriente de Noether y el potencial de Noether	41
4.4. La estructura simpléctica y la densidad de carga	42
4.4.1. Corriente presimpléctica	43
4.4.2. De la corriente simpléctica a la densidad de carga	44
4.5. Condiciones para la conservación de la carga	44
4.5.1. Simetría exacta	45
4.5.2. Naturaleza cuasilocal e independencia de la superficie	45
4.5.3. Carga diferencial e integrabilidad	47
4.6. Generalización del formalismo	48
4.7. Aplicación a Schwarzschild.	49
4.7.1. Geometría de Schwarzschild:	49
4.7.2. Simetrías y símbolos de Christoffel	49
4.7.3. Construcción de la densidad de carga superficial	50
4.7.4. Simetría temporal y su carga asociada	51
4.7.5. Simetría azimutal y su carga asociada	52
4.8. Aplicación a Reissner–Nordström.	53
4.8.1. Geometría de Reissner–Nordström	53
4.8.2. Simetrías y vectores de Killing	54

4.8.3. Simetría de gauge y carga eléctrica	54
5. Desarrollos recientes y problemas abiertos	56
5.1. Kerr–Taub–NUT	56
5.1.1. La métrica de Kerr–Taub–NUT	57
5.1.2. Estructura de horizontes	58
5.1.3. Cargas conservadas y cantidades termodinámicas	58
5.2. Schwarzschild acelerado (C-métrica)	60
5.2.1. Métrica de Schwarzschild acelerado	61
5.2.2. Estructura de horizontes	61
5.2.3. Carga conservada asociada a la simetría temporal	61
5.2.4. Posibles interpretaciones	63
5.2.5. Discusión (C-métrica)	64
6. Conclusiones	66
6.1. Síntesis	66
6.2. Limitaciones y trabajo futuro	67
6.2.1. Reflexión final	67
Referencias	69
A. Acción de Einstein–Hilbert–Λ	73
B. Acción de Einstein–Hilbert–Maxwell	75

Historia y desarrollo de la termodinámica de agujeros negros: de las soluciones exactas al formalismo del espacio de fases covariante.

Mucho antes de la formulación de la Relatividad General, Michell [1] y posteriormente Laplace [2] propusieron la existencia de objetos suficientemente masivos como para impedir incluso la fuga de la luz. En el marco newtoniano, estos objetos fueron denominados *dark stars*, y su estudio se basaba en la velocidad de escape gravitacional. Sin embargo, muchas décadas después se comprendió que esta descripción newtoniana era insuficiente para describir el comportamiento de la luz en las cercanías de cuerpos extremadamente masivos, por lo que la idea de estrella oscura quedó relegada a una simple curiosidad histórica.

Con la formulación de las ecuaciones de campo de Einstein [3], el concepto adquiere un fundamento teórico riguroso dentro de la Relatividad General. No obstante, durante varias décadas estos objetos no contaron con una denominación unificada ni con aceptación generalizada, siendo referidos como objeto colapsado, singularidad de Schwarzschild o estrella congelada, esta última vinculada a la percepción de un observador externo para quien el colapso aparenta detenerse en el horizonte de eventos.

El término agujero negro fue introducido formalmente por Wheeler en 1967 [4], consolidando su uso en la literatura científica. Este cambio no fue meramente terminológico, sino que contribuyó de manera decisiva a la consolidación conceptual de estos objetos como soluciones físicas relevantes de la Relatividad General.

1.1 Las primeras soluciones de los agujeros negros

A partir de las ecuaciones de Einstein [3], Schwarzschild obtuvo la primera solución exacta en 1916 para el caso estático, esféricamente simétrico [5]. Esta solución introduce de manera explícita la noción de horizonte de eventos como superficie causalmente unidireccional, así como la presencia de una singularidad central, estableciendo el primer modelo teórico de agujero negro.

Posteriormente, Reissner [6] y Nordström [7] generalizaron este resultado al caso cargado. Más adelante, Kerr obtuvo en 1963 la solución para un agujero negro en rotación [8], extendiendo significativamente el alcance físico de las soluciones estacionarias. Finalmente, Newman et al. completaron el caso más general en 1965 mediante la métrica de Kerr-Newman [9], que incorpora masa, carga eléctrica y momento angular, reduciendo a los casos anteriores como límites particulares.

Durante décadas, los agujeros negros fueron principalmente objetos matemáticos de la Relatividad General. Sin embargo, la situación cambió de manera decisiva con las observaciones recientes. En 2015, la colaboración LIGO reportó la detección de ondas gravitacionales provenientes de la fusión de dos agujeros negros en el evento GW150914 [10]. Posteriormente, en 2019, el Event Horizon Telescope obtuvo la primera imagen de la sombra de un agujero negro en M87 [11], y en 2022 realizó una observación análoga para Sagitario A* [12]. Estos resultados consolidan a los agujeros negros como objetos astrofísicos observables, reforzando el interés en su estructura, termodinámica y posibles aspectos cuánticos.

Las soluciones clásicas de Schwarzschild, Reissner–Nordström, Kerr y Kerr–Newman representan solo los casos más simples dentro de un espectro mucho más amplio. En cuatro dimensiones existen extensiones con constante cosmológica, acoplamientos a campos de materia y soluciones con pelo en teorías de gravedad modificada, donde el teorema de no pelo deja de ser válido en su formulación clásica. En tres dimensiones, el agujero negro BTZ [13] constituye un ejemplo fundamental en AdS, reproduciendo propiedades termodinámicas análogas a las de cuatro dimensiones a pesar de la ausencia de grados de libertad gravitacionales locales. En dimensiones superiores, aparecen soluciones con topologías de horizonte más generales, lo que evidencia que la estructura de los agujeros negros depende de manera crucial del número de dimensiones y del sector dinámico considerado.

1.2 Teoremas de unicidad y principio de no pelo

Uno de los resultados fundamentales de la Relatividad General es que los agujeros negros estacionarios en la teoría de Einstein–Maxwell, bajo hipótesis adecuadas de regularidad, planitud asintótica y axisimetría, quedan completamente caracterizados por tres cantidades conservadas: la masa M , el momento angular J y la carga eléctrica Q . En consecuencia, la única familia de soluciones estacionarias es la de Kerr–Newman: dos agujeros negros estacionarios con los mismos valores de M , J y Q son idénticos como soluciones geométricas, independientemente del proceso físico que dio origen a cada uno.

Estos resultados fueron desarrollados progresivamente mediante los teoremas de unicidad de Israel para los casos estático y electrostático [14, 15], extendidos al caso estacionario por Carter [16] y completados por Robinson con la demostración de la unicidad de la solución de Kerr [17]. Esta simplicidad geométrica fue resumida por Wheeler en el denominado *principio de no pelo*, según el cual un agujero negro clásico no conserva información macroscópica distinta de M , J y Q [18].

1.3 Surgimiento de la mecánica de agujeros negros

La mecánica de agujeros negros constituye uno de los desarrollos más importantes de la física gravitacional moderna, pues representa el primer indicio de una conexión profunda entre la Relatividad General y la termodinámica. Durante la década de 1970 se descubrió que diversas propiedades geométricas de los horizontes de eventos satisfacen relaciones matemáticas con la misma estructura que las leyes de la termodinámica clásica. Aunque inicialmente esta correspondencia era únicamente formal, marcó el comienzo de una nueva línea de investigación que, posteriormente, revelaría una estrecha relación entre relatividad, termodinámica y mecánica cuántica. Más adelante, incluso se propuso que dicha conexión podría ser aún más fundamental, al sugerirse que las ecuaciones de Einstein admiten una interpretación termodinámica [19].

El desarrollo histórico de estas ideas comenzó en 1971, cuando Hawking demostró el teorema del área, el cual establece que el área del horizonte de eventos de un agujero negro no puede disminuir en procesos clásicos [20]:

El área A del horizonte de eventos nunca puede decrecer en procesos clásicos

$$\delta A \geq 0. \quad (1.1)$$

Aunque este resultado era de naturaleza puramente geométrica, Bekenstein observó su estrecha analogía con la segunda ley de la termodinámica y propuso que el área del horizonte debía interpretarse como una medida de la entropía del agujero negro [21, 22]. Poco después, Bardeen, Carter y Hawking formularon las cuatro leyes de la mecánica de agujeros negros, estableciendo una analogía formal entre las propiedades geométricas de los agujeros negros estacionarios y las leyes de la termodinámica clásica [23].

- **Ley cero:** la gravedad superficial κ es constante sobre el horizonte de un agujero negro estacionario, de manera análoga a la uniformidad de la temperatura en un sistema en equilibrio térmico.
- **Primera ley:** las variaciones infinitesimales de las cantidades conservadas satisfacen la relación

$$\delta M = \frac{\kappa}{8\pi} \delta A + \Omega \delta J + \Phi \delta Q, \quad (1.2)$$

donde M es la masa del agujero negro, A el área del horizonte de eventos, J su momento angular y Q su carga eléctrica. Asimismo, Ω representa la velocidad angular del horizonte y Φ el potencial eléctrico evaluado sobre él. Esta expresión constituye el análogo gravitacional de la primera ley de la termodinámica. En este contexto clásico, la gravedad superficial κ es únicamente una cantidad geométrica y todavía no posee una interpretación como temperatura física.

- **Segunda ley:** el área total del horizonte nunca disminuye,

$$\delta A \geq 0, \quad (1.3)$$

en analogía con el principio de no decrecimiento de la entropía en procesos irreversibles.

- **Tercera ley:** es imposible alcanzar un agujero negro extremo con $\kappa = 0$ mediante un número finito de procesos físicos, en analogía con la imposibilidad de alcanzar el cero absoluto.

En esta etapa, la correspondencia entre la mecánica de agujeros negros y la termodinámica era únicamente formal, ya que no existía una justificación física para identificar la gravedad superficial con una temperatura ni el área del horizonte con una entropía. No obstante, la consistencia de esta analogía sugería la existencia de una relación más profunda entre la geometría del espacio-tiempo y las leyes de la termodinámica, cuya interpretación física se desarrollaría en los años siguientes.

1.4 Estructura energética del horizonte

En paralelo al desarrollo de la mecánica clásica de agujeros negros surgieron diversos trabajos destinados a comprender la estructura energética asociada a los horizontes de eventos. Estas contribuciones complementaron la formulación de las cuatro leyes al proporcionar una interpretación física de las cantidades macroscópicas que caracterizan a un agujero negro estacionario y de los procesos mediante los cuales es posible intercambiar energía con él.

El punto de partida fue el proceso de Penrose, quien demostró que es posible extraer energía rotacional de un agujero negro de Kerr mediante interacciones que tienen lugar en la ergosfera, la región comprendida entre el horizonte de eventos y el límite estático, donde ningún observador puede permanecer en reposo respecto al infinito debido al arrastre de marcos generado por la rotación del agujero negro [24]. Motivados por este resultado, Christodoulou y Ruffini analizaron la estructura energética del agujero negro de Kerr–Newman, la solución estacionaria más general de la teoría de Einstein–Maxwell de acuerdo con los teoremas de unicidad. En este contexto, incorporaron la masa irreducible M_{irr} , definida como la parte de la masa total que no puede extraerse mediante ningún proceso físico y que se encuentra directamente relacionada con el área del horizonte. Mostraron así que la masa total puede interpretarse como la suma de distintas contribuciones energéticas, mientras que M_{irr} permanece estrechamente vinculada a la geometría del horizonte [25].

Esta formulación introdujo una distinción natural entre procesos reversibles e irreversibles. En los primeros, la masa irreducible M_{irr} permanece constante y toda la energía extraída proviene de la energía rotacional o electromagnética del agujero negro, mientras que en los segundos M_{irr} aumenta de forma irreversible. Como el área del horizonte está determinada por M_{irr} , esta propiedad implica que los procesos irreversibles satisfacen el principio de no decrecimiento del área establecido por Hawking, proporcionando una interpretación energética de la segunda ley de la mecánica de agujeros negros. Esta estructura resultó además plenamente compatible con la primera ley, al mostrar que las variaciones de la masa pueden entenderse como un balance entre las distintas contribuciones energéticas asociadas al horizonte.

Poco después, Smarr obtuvo una relación integral entre la masa, el momento angular, la carga y las cantidades geométricas asociadas al horizonte, proporcionando una formulación

energética global compatible con la primera ley de la mecánica de agujeros negros [26]. Antes del descubrimiento de la radiación de Hawking, esta relación se interpretaba mediante analogías con la mecánica clásica, donde la gravedad superficial desempeñaba el papel de una tensión superficial efectiva asociada al horizonte.

En conjunto, los trabajos de Penrose, Christodoulou, Ruffini y Smarr consolidaron una descripción energética de los agujeros negros clásicos consistente con las tres cantidades conservadas que los caracterizan, la masa, el momento angular y la carga eléctrica. Estas ideas proporcionaron el marco conceptual sobre el cual se desarrollaría posteriormente la interpretación termodinámica completa de los agujeros negros.

1.5 Entropía de Bekenstein y radiación de Hawking

Los resultados obtenidos por Christodoulou, Penrose y Smarr sugerían que el área del horizonte desempeñaba un papel análogo a la entropía en la termodinámica clásica. Sin embargo, esta interpretación presentaba una dificultad conceptual: si los agujeros negros no emitían radiación, como predecía la relatividad general clásica, su temperatura efectiva debía ser exactamente nula. Bajo esta identificación, sería posible, en principio, añadir entropía a un agujero negro sin ningún coste energético ni cambio físico observable, de modo que la segunda ley perdería todo contenido: no impondría restricción real alguna sobre los procesos que involucran a un agujero negro. La analogía con la primera ley permanecía entonces como una construcción puramente formal, sin el respaldo de un mecanismo físico que le diera contenido termodinámico genuino.

Motivado por esta aparente inconsistencia, Bekenstein propuso que un agujero negro debía poseer una entropía física proporcional al área de su horizonte de eventos [27]. Su argumento se apoyaba en consideraciones de teoría de la información y en la segunda ley de la termodinámica, y establecía una relación de proporcionalidad entre dicha entropía y el área del horizonte,

$$S \propto A, \tag{1.4}$$

sin que el coeficiente de proporcionalidad quedara determinado por su análisis. Esta propuesta ya establecía que la entropía de un agujero negro debía depender del área de su horizonte y no de su volumen, una propiedad sin análogo en los sistemas termodinámicos convencionales. La situación cambió de manera decisiva cuando Hawking demostró, mediante teoría cuántica de campos en espacio-tiempo curvo, que los agujeros negros emiten radiación térmica [28, 29]. Este resultado mostró que los efectos cuánticos modifican el vacío en presencia de un horizonte de eventos, produciendo un flujo de partículas detectado por un observador situado en el infinito. Aunque con frecuencia este fenómeno se describe mediante la creación de pares de partículas cerca del horizonte, dicha imagen constituye únicamente una interpretación heurística del proceso, cuya derivación rigurosa se obtiene a partir de la cuantización de campos en un espacio-tiempo con colapso gravitacional.

El resultado central obtenido por Hawking fue la identificación de una temperatura asociada al agujero negro,

$$T_H = \frac{\hbar \kappa}{2\pi k_B c}, \tag{1.5}$$

donde κ corresponde a la gravedad superficial del horizonte, una cantidad puramente geométrica que mide la aceleración propia, medida por un observador en el infinito, requerida para mantener un objeto en reposo justo en el horizonte de eventos. Esta expresión proporcionó la interpretación física de la cantidad que aparecía en la primera ley de la mecánica de agujeros negros, estableciendo la identificación entre gravedad superficial y temperatura. En consecuencia, la analogía desarrollada previamente adquirió el carácter de una verdadera ley termodinámica, y permitió fijar de manera exacta el coeficiente de proporcionalidad de la entropía propuesta por Bekenstein,

$$S_{BH} = \frac{k_B c^3 A}{4G\hbar}. \quad (1.6)$$

La emisión continua de radiación implica que el agujero negro pierde energía y, en consecuencia, disminuye su masa. Para agujeros negros de Schwarzschild, la temperatura es inversamente proporcional a la masa, por lo que el proceso de pérdida de energía incrementa progresivamente su temperatura, aumentando la intensidad de la radiación emitida. Este fenómeno conduce al proceso conocido como evaporación de Hawking, mediante el cual un agujero negro aislado pierde masa de forma gradual hasta alcanzar el régimen en el que los efectos de gravedad cuántica se esperan dominantes y la descripción semiclásica deja de ser aplicable.

La proporcionalidad entre la entropía y el área del horizonte constituye además una de las observaciones más relevantes de la gravedad cuántica. A diferencia de los sistemas termodinámicos ordinarios, donde el número de grados de libertad escala con el volumen, la ley de Bekenstein–Hawking sugiere que la información física de una región gravitacional puede codificarse en su frontera bidimensional. Esta idea motivó posteriormente el desarrollo del principio holográfico, el cual desempeña un papel central en diversas aproximaciones modernas a la gravedad cuántica [30, 31].

1.6 Limitaciones de la entropía de Bekenstein–Hawking

La relación de Bekenstein–Hawking constituye uno de los resultados fundamentales de la termodinámica de agujeros negros. Sin embargo, su expresión (1.6) no representa una ley universal independiente de la teoría gravitacional considerada, sino un resultado obtenido para la Relatividad General descrita por la acción de Einstein–Hilbert. Como consecuencia, su validez debe analizarse cuidadosamente cuando se modifican las hipótesis bajo las cuales fue derivada.

Incluso dentro de la Relatividad General surgen situaciones en las que la formulación habitual de la termodinámica presenta dificultades. La presencia de horizontes dinámicos, espacios-tiempo que no son asintóticamente planos, geometrías con aceleración, defectos cónicos o estructuras globales no triviales puede dificultar la definición de las cantidades conservadas asociadas a las simetrías del espacio-tiempo, tales como la masa, el momento angular o las cargas eléctricas. En estos escenarios, la formulación tradicional de la primera ley requiere un tratamiento más cuidadoso y una definición rigurosa de las cantidades termodinámicas involucradas [32, 33].

Las dificultades son aún más evidentes en teorías gravitacionales más generales que la Relatividad General. En modelos como la gravedad de Lovelock o las teorías $f(R)$, el lagrangiano gravitacional contiene invariantes adicionales de curvatura que modifican las ecuaciones de movimiento y alteran la relación entre la geometría del horizonte y la entropía. En consecuencia, la entropía deja de ser simplemente proporcional al área y adquiere contribuciones que dependen de la forma específica del lagrangiano gravitacional [34].

Estas observaciones muestran que la expresión de Bekenstein–Hawking debe entenderse como un caso particular dentro de un marco más general de la termodinámica gravitacional. Para formular de manera consistente las cantidades conservadas y la primera ley en teorías covariantes de la gravedad resulta necesario un procedimiento que dependa únicamente de la acción y de sus simetrías, sin recurrir a definiciones particulares de energía o de entropía adaptadas a cada solución.

1.7 Formalismo del espacio de fases covariante

Con este propósito, Lee y Wald desarrollaron en 1990 el formalismo del espacio de fases covariante, una formulación geométrica basada en la estructura simpléctica del espacio de soluciones de teorías covariantes derivadas de un lagrangiano [35]. El punto de partida consiste en considerar el conjunto de soluciones de las ecuaciones de movimiento como un espacio dotado de una estructura simpléctica, sobre la cual es posible estudiar de manera covariante las variaciones entre soluciones y la acción de las simetrías del espacio-tiempo.

Dentro de este marco, las cantidades conservadas asociadas a dichas simetrías se obtienen directamente a partir del lagrangiano de la teoría, proporcionando una construcción geométrica independiente de la elección de coordenadas y aplicable a una amplia clase de teorías gravitacionales covariantes. Este enfoque permite formular de manera unificada problemas relacionados con la energía, el momento angular y otras cantidades conservadas, constituyendo una herramienta fundamental para el estudio de la mecánica y la termodinámica de agujeros negros.

Los conceptos introducidos en esta sección constituyen la base del desarrollo presentado en los capítulos siguientes, donde se construirá de manera sistemática el formalismo del espacio de fases covariante y se analizarán sus principales aplicaciones en la termodinámica de agujeros negros.

1.8 Alcance y objetivos

La termodinámica de agujeros negros constituye uno de los principales puntos de encuentro entre la Relatividad General, la termodinámica y la teoría cuántica de campos. Si bien la formulación clásica de sus leyes describe adecuadamente las soluciones estacionarias de la Relatividad General, su extensión a teorías gravitacionales más generales y a espacios-tiempo con estructuras globales no triviales requiere un marco que permita definir de manera rigurosa las cantidades conservadas y las variaciones que intervienen en la primera ley.

En este contexto, el propósito de esta tesina es presentar de manera sistemática el formalismo del espacio de fases covariante de Lee y Wald, desarrollando sus fundamentos geométricos y la construcción de las cargas conservadas. Sobre esta base, se estudia la derivación de la primera ley de la termodinámica de agujeros negros dentro de este formalismo, mostrando cómo las magnitudes físicas que intervienen en ella se obtienen de manera unificada mediante las cargas de conservadas y la estructura simpléctica.

Para ello, primero se revisan las propiedades geométricas y termodinámicas de las soluciones clásicas de agujeros negros, introduciendo las magnitudes que intervienen en la primera ley. Posteriormente, se desarrollan los conceptos matemáticos necesarios para construir el formalismo del espacio de fases covariante, incluyendo la estructura simpléctica y las cargas conservadas. Finalmente, el formalismo se aplica a la teoría de Einstein–Hilbert para derivar la primera ley de la termodinámica de agujeros negros y analizar el significado físico de las cargas conservadas.

La organización de esta tesina responde a dicho objetivo. En el Capítulo 2 se presentan los fundamentos matemáticos y geométricos necesarios para el desarrollo del formalismo. En el Capítulo 3 se estudian las propiedades geométricas y termodinámicas de las principales soluciones estacionarias de agujeros negros. El Capítulo 4 desarrolla el formalismo del espacio de fases covariante y la construcción de las cargas conservadas. Finalmente, en el Capítulo 5 se aplica este formalismo a la teoría de Einstein–Hilbert para derivar la primera ley de la termodinámica de agujeros negros y discutir el significado físico de los resultados obtenidos.

Fundamentos matemáticos y geométricos del espacio de fases covariante

Este capítulo presenta las definiciones y conceptos matemáticos que constituyen la base del formalismo de espacio de fases covariante desarrollado en los capítulos posteriores. El objetivo es establecer la notación, el lenguaje geométrico y las propiedades operacionales que se emplearán a lo largo de la tesina, con un nivel de detalle acorde a las necesidades del desarrollo formal.

Se asume que el lector cuenta con familiaridad previa en geometría diferencial y relatividad general, por lo que este capítulo puede consultarse de manera selectiva según se requiera en el curso de la lectura.

El contenido se fundamenta en la literatura estándar de relatividad general y geometría diferencial, en particular en [36], [37], [38] y [39], así como en los trabajos fundamentales sobre el formalismo de espacio de fases covariante [40, 35].

2.1 Convenciones y notación

A lo largo de esta tesina se emplean unidades geométricas,

$$G = c = \hbar = k_B = 1,$$

sobre una variedad lorentziana de dimensión $D = 4$ con signatura $(-, +, +, +)$.

Para el sector electromagnético se adopta la normalización de Einstein–Maxwell utilizada a lo largo de este trabajo, en la cual el potencial electromagnético retiene explícitamente el factor $1/(4\pi)$, de modo que la carga eléctrica queda definida incluyendo dicho factor.

Salvo indicación contraria, los índices griegos

$$\mu, \nu, \rho, \sigma, \dots = 0, \dots, 3$$

representan coordenadas del espacio-tiempo y se adopta la convención de suma de Einstein sobre índices repetidos. La derivada covariante compatible con la métrica se denota por ∇_μ , mientras que la antisimetrización de índices se define como

$$\nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} = \frac{1}{2} (\nabla^\mu \xi^\nu - \nabla^\nu \xi^\mu). \quad (2.1)$$

2.2 Variedades diferenciables

Una variedad diferenciable (o simplemente variedad) $\mathcal{M}$ de dimensión n es un espacio que, localmente, se comporta como una porción de $\mathbb{R}^n$. Esto permite introducir sistemas de coordenadas y realizar cálculo diferencial de manera independiente de la elección de coordenadas. Formalmente, una variedad diferenciable posee una estructura suave que garantiza que los cambios de coordenadas entre cartas sean aplicaciones de clase C^∞ ¹. Esta estructura permite definir de manera consistente campos, tensores y operaciones diferenciales sobre toda la variedad.

2.3 Espacio tangente y cotangente

En cada punto $p \in \mathcal{M}$ existe un espacio tangente $T_p \mathcal{M}$, cuyos elementos representan las posibles direcciones tangentes en dicho punto. Formalmente, un vector tangente $V \in T_p \mathcal{M}$ se define como un operador que actúa sobre funciones suaves $f : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfaciendo la regla de Leibniz,

$$V(fg) = f|_p V(g) + g|_p V(f). \quad (2.2)$$

Esta definición, en términos de derivadas direccionales, tiene la ventaja de ser intrínseca: depende únicamente de la estructura diferenciable de la variedad y no de una inmersión en un espacio de dimensión superior.

En un sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$, el espacio tangente admite una base natural, denominada base coordenada,

$$\{\partial_\mu\} \equiv \left\{ \frac{\partial}{\partial x^\mu} \right\},$$

de modo que todo vector puede escribirse como

$$V = V^\mu \partial_\mu.$$

Si $x^\mu(\lambda)$ es una curva parametrizada por λ , su vector tangente actúa sobre una función f según

$$V(f) = \frac{d}{d\lambda} f(x^\mu(\lambda)) = \frac{\partial f}{\partial x^\mu} \frac{dx^\mu}{d\lambda} = V^\mu \partial_\mu f, \quad (2.3)$$

de donde se identifican las componentes

¹Un mapa entre abiertos de $\mathbb{R}^n$ es **suave** (o *smooth*) si todas sus derivadas parciales de cualquier orden existen y son continuas, es decir, es de clase C^∞ .

$$V^\mu = \frac{dx^\mu}{d\lambda}.$$

Al espacio tangente se asocia naturalmente su espacio dual, denominado espacio cotangente $T_p^*\mathcal{M}$, cuyos elementos son funcionales lineales sobre $T_p\mathcal{M}$ y reciben el nombre de covectores o 1-formas.

La base dual asociada a $\{\partial_\mu\}$ es $\{dx^\mu\}$, definida mediante

$$dx^\mu(\partial_\nu) = \delta_\nu^\mu, \quad (2.4)$$

de modo que un covector arbitrario puede escribirse como

$$\omega = \omega_\mu dx^\mu.$$

El ejemplo más inmediato es el diferencial de una función suave f , cuyas componentes en la base dual son precisamente $\partial_\mu f$.

Combinando r copias del espacio tangente y s copias del espacio cotangente se obtiene el espacio de tensores de tipo (r, s) , cuyos elementos poseen r índices contravariantes y s índices covariantes.

2.4 Espacio de configuraciones

Sea M una variedad espacio-temporal cuatro-dimensional, orientable y globalmente hiperbólica, con topología

$$\mathbb{R} \times \Sigma,$$

donde Σ es una hipersuperficie espacial tridimensional.

Denotamos por ϕ a la colección de campos dinámicos de la teoría, que comprende la métrica lorentziana $g_{\mu\nu}$ y los campos de materia ψ , donde ψ representa colectivamente cualquier campo tensorial adicional presente en la teoría.

El espacio de configuraciones $\mathcal{F}$ se define como el conjunto de todas las configuraciones de campo cinemáticamente permitidas sobre M ,

$$\mathcal{F} = \{\phi = (g_{\mu\nu}, \psi) \mid \phi \text{ es suave sobre } M \text{ y satisface condiciones asintóticas apropiadas}\}. \quad (2.5)$$

Cada punto de $\mathcal{F}$ representa una posible configuración del sistema, sin requerir que los campos satisfagan las ecuaciones de movimiento.

Siguiendo a Lee y Wald [35], supondremos que $\mathcal{F}$ puede dotarse de estructura de variedad de dimensión infinita, de modo que las nociones de vector tangente y espacio tangente introducidas anteriormente se extienden naturalmente a $\mathcal{F}$.

La dinámica de la teoría queda determinada por una acción

$$S[\phi] = \int_M L(g_{\mu\nu}, R_{\mu\nu\rho\sigma}, \nabla_\alpha R_{\mu\nu\rho\sigma}, \dots, \psi, \nabla_\mu \psi, \dots) \sqrt{-g} d^4x, \quad (2.6)$$

donde L es el Lagrangiano escalar, $R_{\mu\nu\rho\sigma}$ es el tensor de Riemann asociado a $g_{\mu\nu}$, ∇_μ es la derivada covariante compatible con la métrica y $g = \det(g_{\mu\nu})$.

Para teorías difeomorfismo-covariantes en cuatro dimensiones, el Lagrangiano no depende explícitamente de las coordenadas ni de campos de fondo, sino únicamente de la métrica, del tensor de Riemann y sus derivadas covariantes, así como de los campos de materia y sus derivadas covariantes.

2.5 Interpretación de las variaciones $\delta\phi$

Como se discutió al introducir el espacio tangente $T_p\mathcal{M}$, un vector tangente en un punto puede representarse mediante una curva que pasa por ese punto. La misma idea se aplica al espacio de configuraciones $\mathcal{F}$: una variación $\delta\phi$ de una configuración $\phi_0 \in \mathcal{F}$ debe interpretarse como el vector tangente en ϕ_0 a una familia uniparamétrica de configuraciones $\phi(\lambda) \in \mathcal{F}$ tal que $\phi(0) = \phi_0$,

$$\delta\phi \equiv \left. \frac{d\phi(\lambda)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}. \quad (2.7)$$

Si escribimos $\phi(\lambda) = (g_{\mu\nu}(\lambda), \psi(\lambda))$, la variación posee componentes

$$\delta g_{\mu\nu}(x) = \left. \frac{dg_{\mu\nu}(\lambda; x)}{d\lambda} \right|_{\lambda=0}, \quad (2.8)$$

y de manera análoga para $\delta\psi$. Estas cantidades son, para cada punto $x \in M$, campos tensoriales ordinarios definidos sobre el espacio-tiempo.

Desde este punto de vista, $\delta\phi$ debe entenderse como un vector perteneciente al espacio tangente $T_{\phi}\mathcal{F}$. Análogamente, dos variaciones independientes $\delta_1\phi$ y $\delta_2\phi$ corresponden a considerar una familia biparamétrica $\phi(\lambda_1, \lambda_2)$. Esta interpretación será fundamental en el Capítulo 4 para definir la corriente simpléctica, la cual depende linealmente de dos vectores tangentes al espacio de configuraciones.

2.6 Espacio de soluciones

El espacio de soluciones $\tilde{\mathcal{F}}$ se define como la subvariedad de $\mathcal{F}$ formada por todas las configuraciones de campo que satisfacen simultáneamente las ecuaciones de movimiento de la teoría,

$$\tilde{\mathcal{F}} = \{\phi \in \mathcal{F} \mid E^{\mu\nu}(\phi) = 0, E_\psi(\phi) = 0\}. \quad (2.9)$$

El espacio de soluciones constituye el dominio sobre el cual se desarrollará el formalismo de espacio de fases covariante. En adelante, diremos que una identidad se satisface *on-shell* cuando es válida sobre $\tilde{\mathcal{F}}$, es decir, cuando las ecuaciones de movimiento se cumplen. En contraste, una identidad es *off-shell* si es válida para configuraciones arbitrarias del espacio de configuraciones $\mathcal{F}$, independientemente de que satisfagan o no las ecuaciones de movimiento.

2.7 Espacio de fases covariante

El espacio de soluciones $\mathcal{F}$ contiene todas las configuraciones de campo que satisfacen las ecuaciones de movimiento. Sin embargo, en teorías con simetrías gauge, distintas soluciones pueden representar el mismo estado físico. En particular, dos soluciones relacionadas mediante un difeomorfismo corresponden a descripciones equivalentes de una misma configuración física.

Para eliminar esta redundancia se introduce el espacio de fases covariante Γ , obtenido a partir de $\mathcal{F}$ mediante un procedimiento de reducción simpléctica debido a Lee y Wald [35]. El punto de partida de esta construcción es una forma presimpléctica Ω definida sobre el espacio de soluciones, la cual, en general, presenta direcciones de degeneración.

Un vector $\delta_1\phi \in T_\phi\mathcal{F}$ se denomina una *dirección de degeneración* de Ω si satisface

$$\Omega(\phi; \delta_1\phi, \delta_2\phi) = 0, \quad \text{para todo } \delta_2\phi \in T_\phi\mathcal{F}. \quad (2.10)$$

Las direcciones de degeneración están asociadas a las transformaciones gauge de la teoría. En particular, las variaciones inducidas por difeomorfismos corresponden a direcciones de degeneración de Ω , reflejando el hecho de que soluciones relacionadas mediante una transformación gauge no representan estados físicos distintos.

Como consecuencia, el par $(\mathcal{F}, \Omega)$ no constituye todavía un espacio de fases en sentido estricto, sino una variedad presimpléctica. El espacio de fases covariante Γ se obtiene identificando todas las soluciones que difieren únicamente por una transformación gauge, de modo que cada punto de Γ representa una clase de equivalencia de soluciones físicamente indistinguibles.

Sobre Γ se induce de manera natural una estructura simpléctica no degenerada, la cual constituye el objeto geométrico fundamental del formalismo de espacio de fases covariante. Su construcción explícita a partir del Lagrangiano, así como sus propiedades y aplicaciones a la definición de cargas conservadas, serán desarrolladas en el Capítulo 4.

2.8 Formas diferenciales

En el formalismo de espacio de fases covariante es habitual encontrar las cantidades de interés expresadas en el lenguaje de las formas diferenciales. Esto se debe a que dicho lenguaje permite trabajar con objetos que pueden integrarse sobre superficies del espacio-tiempo de manera intrínseca, sin depender de un sistema de coordenadas particular, lo cual resulta natural cuando se busca definir cantidades físicas como cargas asociadas a simetrías.

Puesto que en el Capítulo 4 se recurrirá constantemente a esta notación, resulta necesario fijar de antemano algunas definiciones y convenciones básicas sobre formas diferenciales, de modo que las expresiones y operaciones que aparecerán más adelante puedan seguirse sin ambigüedad.

2.8.1 p -formas

Sea E un espacio vectorial real de dimensión n y sea E^* su espacio dual.

Una p -forma exterior es un tensor covariante completamente antisimétrico, es decir, una aplicación multilinear

$$\alpha : E \times \cdots \times E \rightarrow \mathbb{R},$$

que satisface

$$\alpha(\dots, \mathbf{v}_r, \dots, \mathbf{v}_s, \dots) = -\alpha(\dots, \mathbf{v}_s, \dots, \mathbf{v}_r, \dots) \quad (2.11)$$

para cualquier intercambio de dos argumentos.

El conjunto de todas las p -formas sobre E se denota por

$$\bigwedge^p E^*.$$

Por convenio,

$$\bigwedge^0 E^* = \mathbb{R},$$

de modo que las 0-formas corresponden a funciones escalares.

Sea $\{e_i\}_{i=1}^n$ una base de E y $\{\sigma^i\}$ su base dual. Dado un multiíndice creciente

$$\underline{I} = (i_1 < \cdots < i_p), \quad i_1, \dots, i_p \in \{1, \dots, n\},$$

denotamos

$$\sigma^{\underline{I}} = \sigma^{i_1} \wedge \cdots \wedge \sigma^{i_p}.$$

Toda p -forma admite entonces la expansión

$$\alpha = \sum_{\underline{I}} a_{\underline{I}} \sigma^{\underline{I}},$$

donde la suma recorre todos los multiíndices crecientes $\underline{I}$ de longitud p .

2.8.2 Producto exterior

El producto exterior o producto cuña es la aplicación bilineal

$$\wedge : \bigwedge^p E^* \times \bigwedge^q E^* \longrightarrow \bigwedge^{p+q} E^*$$

que combina una p -forma y una q -forma para producir una $(p+q)$ -forma completamente antisimétrica.

El producto exterior satisface las propiedades fundamentales

1. Asociatividad,

$$\alpha \wedge (\beta \wedge \gamma) = (\alpha \wedge \beta) \wedge \gamma.$$

2. Anticonmutatividad graduada,

$$\alpha^p \wedge \beta^q = (-1)^{pq} \beta^q \wedge \alpha^p.$$

Estas propiedades serán utilizadas repetidamente al manipular las formas diferenciales que aparecen en el formalismo de espacio de fases covariante.

2.8.3 Derivada exterior

Existe un único operador lineal

$$d : \bigwedge^p(M) \longrightarrow \bigwedge^{p+1}(M),$$

definido sobre una variedad diferenciable M , denominado **derivada exterior**, que satisface las siguientes propiedades:

1. Linealidad,

$$d(\alpha + \beta) = d\alpha + d\beta.$$

2. Sobre funciones coincide con el diferencial usual,

$$df = (\partial_i f) dx^i.$$

3. Regla de Leibniz graduada,

$$d(\alpha \wedge \beta) = d\alpha \wedge \beta + (-1)^p \alpha \wedge d\beta, \quad (2.12)$$

donde α es una p -forma.

4. Es nilpotente,

$$d^2 = 0. \quad (2.13)$$

En coordenadas locales, si

$$\alpha = \frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p},$$

entonces

$$d\alpha = \frac{1}{p!} \partial_\nu \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^\nu \wedge dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}. \quad (2.14)$$

La propiedad $d^2 = 0$ constituye una de las herramientas fundamentales del cálculo exterior y será utilizada repetidamente en la construcción de las corrientes conservadas del formalismo de espacio de fases covariante.

2.8.4 Producto interior

Sea X un campo vectorial sobre M .

El producto interior con respecto a X es el operador

$$i_X : \bigwedge^p(M) \longrightarrow \bigwedge^{p-1}(M),$$

definido por

$$(i_X \alpha)(v_1, \dots, v_{p-1}) = \alpha(X, v_1, \dots, v_{p-1}). \quad (2.15)$$

En componentes,

$$i_X \left(\frac{1}{p!} \alpha_{\mu_1 \dots \mu_p} dx^{\mu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p} \right) = \frac{1}{(p-1)!} X^\nu \alpha_{\nu \mu_2 \dots \mu_p} dx^{\mu_2} \wedge \dots \wedge dx^{\mu_p}.$$

La contracción disminuye en una unidad el grado de una forma diferencial y desempeña un papel central en el formalismo de Lee–Wald, donde aparece en expresiones como $i_\xi L$ e $i_\xi \theta$.

2.8.5 Dual de Hodge

Sea $(M, g_{\mu\nu})$ una variedad pseudo-riemanniana orientada. El operador dual de Hodge

$$\star : \bigwedge^p(M) \longrightarrow \bigwedge^{D-p}(M),$$

se define, para una p -forma escrita en coordenadas locales, como

$$\star \alpha = \frac{1}{(D-p)! p!} \sqrt{|g|} \alpha^{\mu_1 \dots \mu_p} \epsilon_{\mu_1 \dots \mu_p \nu_1 \dots \nu_{D-p}} dx^{\nu_1} \wedge \dots \wedge dx^{\nu_{D-p}}. \quad (2.16)$$

A diferencia de las operaciones introducidas anteriormente, el dual de Hodge depende explícitamente de la métrica $g_{\mu\nu}$ a través del elemento de volumen $\sqrt{|g|}$.

2.9 Derivada de Lie

Sea ξ un campo vectorial sobre M .

La derivada de Lie respecto de ξ , denotada por

$$\mathcal{L}_\xi,$$

describe la variación de un campo tensorial a lo largo del flujo generado por dicho campo vectorial.

En particular, para una función

$$f,$$

se tiene

$$\mathcal{L}_\xi f = \xi(f).$$

Sobre formas diferenciales, la derivada de Lie preserva el grado y satisface la regla de Leibniz,

$$\mathcal{L}_\xi(\alpha \wedge \beta) = (\mathcal{L}_\xi \alpha) \wedge \beta + \alpha \wedge (\mathcal{L}_\xi \beta).$$

Su relación con la derivada exterior y la contracción interior viene dada por la identidad de Cartan.

2.9.1 Identidad de Cartan

La derivada de Lie puede expresarse enteramente en términos de la derivada exterior y la contracción interior mediante la identidad de Cartan,

$$\boxed{\mathcal{L}_\xi = i_\xi d + d i_\xi.} \quad (2.17)$$

Esta identidad constituye una de las herramientas fundamentales del formalismo de espacio de fases covariante y será utilizada repetidamente en las derivaciones del Capítulo 4.

2.9.2 Pullback

Sean

$$F : M \rightarrow N$$

una aplicación suave entre variedades y α una p -forma definida sobre N .

El pullback de α mediante F , denotado por $F^*\alpha$, es la p -forma sobre M definida por

$$(F^*\alpha)_p(v_1, \dots, v_p) = \alpha_{F(p)}(dF_p(v_1), \dots, dF_p(v_p)). \quad (2.18)$$

El pullback preserva tanto el producto exterior como la derivada exterior,

$$F^*(\alpha \wedge \beta) = F^*\alpha \wedge F^*\beta,$$

$$F^*(d\alpha) = d(F^*\alpha).$$

Estas propiedades permiten restringir formas diferenciales definidas sobre el espacio-tiempo a hipersuperficies y superficies cerradas, operación que aparecerá al definir la forma simpléctica y las cargas conservadas.

2.10 Orientación e integración sobre variedades

Sea M una variedad diferenciable de dimensión n . Dos bases ordenadas $\{e_{(1)}, \dots, e_{(n)}\}$ y $\{e'_{(1)}, \dots, e'_{(n)}\}$ de un mismo espacio tangente $T_p M$ se dicen equivalentes si la matriz de cambio de base entre ellas tiene determinante positivo. Esta relación divide al conjunto de bases ordenadas de $T_p M$ en exactamente dos clases de equivalencia.

Una *orientación* de M es una elección continua, en cada punto $p \in M$, de una de estas dos clases, de modo que puntos cercanos elijan clases compatibles entre sí. Una variedad admite una orientación si y solo si existe un atlas cuyas funciones de transición tienen jacobiano positivo en todo punto; en tal caso se dice que M es *orientable*. Un sistema de coordenadas $\{x^\mu\}$ se dice *positivamente orientado* si la base coordenada $\{\partial_\mu\}$ pertenece, en cada punto, a la clase elegida.

De manera equivalente, una orientación puede especificarse mediante un campo tensorial totalmente antisimétrico y nunca nulo $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}$, llamado

elemento de volumen: dos elementos de volumen $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n}$ y $\tilde{\epsilon}_{\mu_1 \dots \mu_n}$ definen la misma orientación si están relacionados por un factor de proporcionalidad estrictamente positivo. La orientación queda entonces fijada al declarar que una base ordenada es positiva cuando $\epsilon_{\mu_1 \dots \mu_n} e_{(1)}^{\mu_1} \dots e_{(n)}^{\mu_n} > 0$.

2.10.1 Densidades tensoriales

Un objeto que aparecerá reiteradamente es la *densidad tensorial de peso w* : un conjunto de componentes $T^{\mu_1 \dots \mu_k}_{\nu_1 \dots \nu_l}(x)$ que, bajo un cambio de coordenadas $x \rightarrow x'$, se transforma como un tensor ordinario multiplicado por el factor

$$\left| \det \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right) \right|^w. \quad (2.19)$$

Dos casos serán especialmente relevantes: las *densidades escalares de peso uno*, que denotaremos genéricamente por $\mathcal{L}(x)$, y que transforman como

$$\mathcal{L}'(x') = \left| \det \left(\frac{\partial x}{\partial x'} \right) \right| \mathcal{L}(x), \quad (2.20)$$

y las *densidades vectoriales de peso uno*, $v^\mu(x)$, que transforman de la misma manera salvo por el índice libre. Nótese que ninguna de estas nociones requiere introducir una métrica: basta la estructura diferenciable de M .

2.10.2 Integración de una densidad escalar

Sea $U \subset M$ una región contenida en un único sistema de coordenadas positivamente orientado $\{x^\mu\}$, y sea $\mathcal{L}$ una densidad escalar de peso uno definida sobre U . Se define

$$\int_U \mathcal{L} := \int_{x(U)} \mathcal{L}(x) dx^1 \dots dx^n, \quad (2.21)$$

donde el lado derecho es la integral múltiple ordinaria de la función $\mathcal{L}(x)$.

Independencia de las coordenadas. Si $\{x'^\mu\}$ es otro sistema de coordenadas positivamente orientado sobre U , el jacobiano de la transformación $x \rightarrow x'$ es positivo en todo punto, de modo que $|\det(\partial x/\partial x')| = \det(\partial x/\partial x')$. La fórmula de cambio de variable en integrales múltiples, junto con la ley de transformación de $\mathcal{L}$, muestra entonces que el valor de (2.21) no depende del sistema de coordenadas positivamente orientado elegido para calcularlo. Esta es la razón por la cual las densidades escalares, y no las funciones escalares ordinarias, son los objetos naturales para ser integrados sobre una variedad orientada.

Cuando M no puede cubrirse con un único sistema de coordenadas, se recurre a una partición de la unidad: dado un cubrimiento finito $\{U_\alpha\}$ de M por cartas positivamente orientadas, existen funciones diferenciables $f_\alpha \geq 0$, cada una soportada en U_α , tales que $\sum_\alpha f_\alpha = 1$ en todo M . Se define entonces

$$\int_M \mathcal{L} := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} f_\alpha \mathcal{L}, \quad (2.22)$$

y se verifica que este valor no depende del cubrimiento ni de la partición de la unidad utilizados.

Variedades con frontera y orientación inducida

Una *variedad con frontera* D de dimensión n es un espacio cuyo interior es una variedad ordinaria de dimensión n , y cuya frontera ∂D es una variedad de dimensión $n - 1$ sin frontera (no necesariamente conexa). Si D está orientada, la frontera ∂D hereda una orientación de la siguiente manera: en cada punto $x \in \partial D$, sea t^μ un vector normal a ∂D que apunte hacia afuera de D . Una base $\{e_{(2)}, \dots, e_{(n)}\}$ de $T_x(\partial D)$ se declara positivamente orientada si $\{t^\mu, e_{(2)}, \dots, e_{(n)}\}$ es una base positivamente orientada de $T_x D$.

2.10.3 El teorema de Stokes

El resultado central que utilizaremos es la versión del teorema de Stokes adaptada a densidades vectoriales, equivalente al teorema de la divergencia.

Teorema. Sea $D \subset M$ una región compacta y orientada, con frontera ∂D orientada según la convención anterior. Sea v^μ una densidad vectorial de peso uno, continuamente diferenciable sobre D , y sea ∇_μ cualquier operador de derivada covariante que satisfaga $\nabla_\mu \epsilon_{\alpha_1 \dots \alpha_n} = 0$ para el elemento de volumen que define la orientación de M (por ejemplo, el operador de derivada parcial ordinario en coordenadas positivamente orientadas). Entonces

$$\int_D \nabla_\mu v^\mu = \int_{\partial D} v^\mu n_\mu, \quad (2.23)$$

donde n_μ es el covector definido sobre ∂D por las condiciones

$$n_\mu t^\mu = 1, \quad n_\mu s^\mu = 0 \quad \text{para todo } s^\mu \text{ tangente a } \partial D, \quad (2.24)$$

con t^μ el campo transversal saliente utilizado para orientar ∂D .

Conviene remarcar dos puntos. Primero, tanto $\nabla_\mu v^\mu$ como $v^\mu n_\mu$ son densidades escalares (de peso uno) sobre D y ∂D respectivamente, de modo que ambos lados de (2.23) están definidos mediante la integración de densidades escalares introducida anteriormente. Segundo, la identidad (2.23) no requiere ninguna estructura métrica sobre M : solo utiliza la estructura diferenciable, la orientación, y la compatibilidad del operador ∇_μ con el elemento de volumen elegido. Esto será relevante más adelante, cuando se trabaje con corrientes conservadas construidas a partir de un lagrangiano, ya que la conservación de una densidad vectorial se traduce directamente, vía (2.23), en la independencia de una carga respecto de la elección de superficie sobre la cual se integra.

2.10.4 Elementos de volumen y de superficie inducidos por una métrica

Cuando M está dotada de una métrica $g_{\mu\nu}$, es posible pasar de densidades a tensores ordinarios multiplicando o dividiendo por $\sqrt{|g|}$, con $g = \det(g_{\mu\nu})$. Así, dado un escalar ordinario $L(x)$, la combinación $\mathcal{L} = L\sqrt{|g|}$ es una densidad escalar de peso uno, y su integral sobre una región D se escribe en la notación habitual como

$$\int_D \mathcal{L} = \int_D L\sqrt{|g|} d^n x. \quad (2.25)$$

De manera análoga, si $\Sigma \subset M$ es una hipersuperficie orientable con vector normal unitario n^μ (futuro, si Σ es espacial en un espacio-tiempo lorentziano) y métrica inducida

$$h_{ij} = g_{\mu\nu} \frac{\partial x^\mu}{\partial y^i} \frac{\partial x^\nu}{\partial y^j}, \quad i, j = 1, \dots, n-1, \quad (2.26)$$

donde $\{y^i\}$ son coordenadas intrínsecas sobre Σ y $x^\mu(y^i)$ describe su encaje en M , la densidad vectorial v^μ que aparece en (2.23) puede escribirse como $v^\mu = V^\mu \sqrt{|g|}$ para un campo vectorial ordinario V^μ , y la integral de superficie toma la forma familiar

$$\int_\Sigma v^\mu n_\mu = \int_\Sigma V^\mu n_\mu \sqrt{h} d^{n-1} y, \quad (2.27)$$

con $h = \det(h_{ij})$.

La construcción anterior se restringe a hipersuperficies de codimensión uno, pero se extiende de manera inmediata a subvariedades de codimensión k arbitraria. En ese caso, el elemento de superficie se construye contrayendo el símbolo de permutación totalmente antisimétrico $\varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n}$, que toma valores $\pm 1, 0$ y no depende de la métrica, con los diferenciales de las $n-k$ coordenadas tangentes a la subvariedad:

$$dS_{\mu_1 \dots \mu_k} := \varepsilon_{\mu_1 \dots \mu_k \alpha_{k+1} \dots \alpha_n} dx^{\alpha_{k+1}} \wedge \dots \wedge dx^{\alpha_n}. \quad (2.28)$$

El caso $k=1$ reproduce el elemento $v^\mu n_\mu \sqrt{h} d^{n-1} y$ discutido arriba, una vez que se identifican los índices libres restantes con la normal n_μ . El caso $k=2$, que interviene al integrar cargas sobre superficies cerradas de codimensión dos, se retomará en el Capítulo 4.

2.11 Simetrías e isometrías

Se dice que una variedad M posee una simetría cuando su geometría es invariante bajo cierta transformación que mapea M en sí misma. Las simetrías de la métrica reciben el nombre de isometrías. Una condición necesaria para la existencia de una isometría es que la métrica sea independiente de alguna coordenada; en particular, si $g_{\mu\nu}$ es independiente de la coordenada $x^{\sigma*}$, entonces

$$\partial_{\sigma*} g_{\mu\nu} = 0 \implies x^{\sigma*} \rightarrow x^{\sigma*} + a^{\sigma*} \text{ es una simetría.} \quad (2.29)$$

Esta condición tiene consecuencias inmediatas para el movimiento geodésico. La ecuación de la geodésica, escrita en términos del cuádrimomento $p^\mu = mU^\mu$, toma la forma

$$m \frac{dp_\mu}{d\tau} = \frac{1}{2} (\partial_\mu g_{\nu\lambda}) p^\nu p^\lambda. \quad (2.30)$$

De esta expresión se sigue que si todos los componentes de la métrica son independientes de $x^{\sigma*}$, la componente del momento $p_{\sigma*}$ es una cantidad conservada a lo largo de la geodésica,

$$\partial_{\sigma*} g_{\mu\nu} = 0 \implies \frac{dp_{\sigma*}}{d\tau} = 0. \quad (2.31)$$

2.11.1 Vectores de Killing

La condición de independencia de la métrica respecto de una coordenada puede reformularse de manera manifestamente covariante. Dada una coordenada $x^{\sigma*}$ de la cual $g_{\mu\nu}$ es independiente, se asocia el vector

$$K^\mu = (\partial_{\sigma*})^\mu = \delta_{\sigma*}^\mu,$$

de modo que la cantidad conservada a lo largo de la geodésica se escribe simplemente como $p_{\sigma*} = K_\nu p^\nu$.

La condición de conservación a lo largo de la geodésica,

$$\frac{dp_{\sigma*}}{d\tau} = 0 \iff p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = 0, \quad (2.32)$$

puede desarrollarse usando la ecuación geodésica y la simetría del producto $p^\mu p^\nu$, lo que conduce a que solo la parte simétrica de $\nabla_\mu K_\nu$ puede contribuir. Se concluye entonces que la condición necesaria y suficiente para que $K_\nu p^\nu$ se conserve a lo largo de cualquier geodésica es

Un campo vectorial K^μ es un vector de Killing si satisface la ecuación de Killing

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0, \quad (2.33)$$

donde el paréntesis denota simetrización de índices. Esta condición es equivalente a exigir que $\mathcal{L}_K g_{\mu\nu} = 0$, es decir, que la derivada de Lie de la métrica a lo largo de K^μ se anule.

Cada vector de Killing implica la existencia de una cantidad conservada asociada al movimiento geodésico. Si K_μ es un vector de Killing y p^μ el cuádrimomento de una partícula libre, entonces

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu)} = 0 \implies p^\mu \nabla_\mu (K_\nu p^\nu) = 0. \quad (2.34)$$

Adicionalmente, la derivada direccional del escalar de Ricci a lo largo de un vector de Killing se anula,

$$K^\lambda \nabla_\lambda R = 0, \quad (2.35)$$

reflejo del hecho de que la geometría no varía en la dirección del vector de Killing. Cuando el vector de Killing es de tipo temporal, es posible construir una corriente conservada. Dada la métrica $g_{\mu\nu}$ con vector de Killing K_ν y un tensor de energía-momento conservado $T^{\mu\nu}$, el vector

$$J_T^\mu = K_\nu T^{\mu\nu} \quad (2.36)$$

satisface $\nabla_\mu J_T^\mu = 0$, lo que permite definir la energía total del sistema mediante la integral sobre una hipersuperficie espacial Σ .

La noción se generaliza al caso de tensores de Killing de índice l , definidos como tensores simétricos $K_{\nu_1 \dots \nu_l}$ que satisfacen

$$\nabla_{(\mu} K_{\nu_1 \dots \nu_l)} = 0 \implies p^\mu \nabla_\mu (K_{\nu_1 \dots \nu_l} p^{\nu_1} \dots p^{\nu_l}) = 0. \quad (2.37)$$

2.11.2 Espacios de máxima simetría

En una variedad de dimensión n , el número máximo de vectores de Killing linealmente independientes es $\frac{1}{2}n(n+1)$. Una variedad que alcanza este máximo se denomina espacio de máxima simetría. En tales espacios la curvatura es la misma en todos los puntos y en todas las direcciones, por lo que el tensor de Riemann queda completamente determinado por el escalar de curvatura R ,

$$R_{\rho\sigma\mu\nu} = \frac{R}{n(n-1)} (g_{\rho\mu}g_{\sigma\nu} - g_{\rho\nu}g_{\sigma\mu}). \quad (2.38)$$

Localmente, un espacio de máxima simetría de signatura euclidiana es un plano, una esfera o un hiperboloide según el signo de R . Los correspondientes espacio-tiempos de signatura lorentziana con $R = 0$, $R > 0$ y $R < 0$ son, respectivamente, el espacio de Minkowski, el espacio de de Sitter y el espacio anti-de Sitter.

Geometría y termodinámica de los agujeros negros clásicos

En el Capítulo 1 se revisaron los principales hitos en el desarrollo de la física de agujeros negros, desde las primeras soluciones exactas de las ecuaciones de Einstein hasta el establecimiento de las bases de su descripción termodinámica. En el presente capítulo se desarrollan los fundamentos de la termodinámica de agujeros negros a partir de las soluciones de Schwarzschild, Reissner–Nordström, Kerr y Kerr–Newman.

La Sección 3.1 presenta la geometría de estas soluciones y las cantidades asociadas a sus horizontes: la gravedad superficial κ , la velocidad angular Ω_H y el potencial eléctrico Φ_H . La Sección 3.2 introduce la temperatura de Hawking T_H y la entropía S , y presenta la ley cero y la primera ley de la mecánica de agujeros negros. Finalmente, las Secciones 3.3 y 3.4 exponen la ecuación de Christodoulou–Ruffini y la fórmula de Smarr, que proporcionan criterios de consistencia para verificar la correcta formulación de la primera ley. Las magnitudes geométricas y termodinámicas introducidas en este capítulo serán utilizadas en el Capítulo 5 para el análisis de los resultados obtenidos.

3.1 Geometría de agujeros negros

Las ecuaciones de campo de Einstein¹

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}R + \Lambda g_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (3.1)$$

admiten las soluciones exactas que se emplearán a lo largo de este capítulo.

El intervalo espacio-temporal

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu \quad (3.2)$$

clasifica la estructura causal del espacio-tiempo:

¹A lo largo de esta tesina se considerará $\Lambda = 0$, salvo en un ejemplo de espacio anti-de Sitter (AdS).

- Si $ds^2 < 0$, el intervalo es *tipo tiempo* (*timelike*).
- Si $ds^2 = 0$, el intervalo es *nulo* (*null* o *lightlike*).
- Si $ds^2 > 0$, el intervalo es *tipo espacio* (*spacelike*).

Equivalentemente, para un vector tangente v^μ , el signo de $g_{\mu\nu}v^\mu v^\nu$ determina su carácter causal.

Sobre esta base se define un horizonte de eventos: no como una superficie caracterizada por curvatura o densidad de materia, sino como una hipersuperficie *nula* que separa las regiones desde las cuales señales causales pueden escapar al infinito de aquellas desde las cuales no pueden hacerlo. A partir de esta noción se obtienen, para cada solución, la gravedad superficial κ , la velocidad angular Ω_H y el potencial eléctrico Φ_H .

3.1.1 Schwarzschild

El agujero negro de Schwarzschild es la solución más simple a las ecuaciones de Einstein en el vacío ($T_{\mu\nu} = 0$). Describe el espaciotiempo exterior a un objeto esféricamente simétrico, no rotante y sin carga eléctrica, de masa M . La métrica toma la forma

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.3)$$

donde $d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2$ es el elemento de ángulo sólido sobre la 2-esfera unitaria.

Estructura de regiones

De manera general, el horizonte de eventos se define como la frontera que separa aquellos eventos desde los cuales una señal causal puede escapar hacia el infinito de aquellos desde los cuales le resulta imposible hacerlo. Para una solución estática, esta frontera coincide con el *horizonte de Killing* asociado al vector de Killing temporal $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu$, es decir, con la hipersuperficie nula sobre la cual ξ^μ es un vector nulo. Para soluciones estacionarias pero no estáticas, esta identificación sigue siendo válida considerando en su lugar la combinación $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu + \Omega_H(\partial_\phi)^\mu$, lo cual está garantizado por el teorema de rigidez de Hawking. Este es el mismo razonamiento que se empleará más adelante para las soluciones de Reissner–Nordström, Kerr y Kerr–Newman.

En el caso de Schwarzschild, al ser una solución estática, el horizonte de eventos coincide con el horizonte de Killing asociado directamente a $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu$,

$$\xi^\mu \xi_\mu = g_{tt} = - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) = 0 \quad \implies \quad r = 2m. \quad (3.4)$$

Esta identificación entre horizonte de eventos y horizonte de Killing es la que se empleará a lo largo del trabajo.

Las tres regiones relevantes son:

- $r > 2m$: región exterior, donde los vectores ∂_t son tipo tiempo y la coordenada t es una coordenada temporal bien definida para observadores estáticos.
- $r = 2m$: el horizonte de eventos $\mathcal{H}$. La hipersuperficie $r = 2m$ es una hipersuperficie nula con geometría intrínseca esférica S^2 ; ninguna señal causal puede escapar de su interior hacia la región $r > 2m$.
- $r < 2m$: región interior (singularidad en $r = 0$). Aquí $g_{tt} > 0$ y $g_{rr} < 0$, por lo que r se comporta como una coordenada temporal: todo observador se mueve inevitablemente hacia la singularidad.

Nótese que la aparente singularidad en $r = 2m$ en la métrica (3.3) es una singularidad de coordenadas, no física; se elimina mediante extensiones como las coordenadas de Kruskal–Szekeres o de Eddington–Finkelstein.

Gravedad superficial

Históricamente, la gravedad superficial surgió como una generalización relativista de la aceleración gravitacional newtoniana. Evaluando formalmente $g(r) = M/r^2$ en el radio de Schwarzschild $r_H = 2m$ se obtiene

$$g(r_H) = \frac{1}{4m}, \quad (3.5)$$

resultado que anticipa el valor relativista. Esta coincidencia es meramente formal, pues no existe ningún observador estático sobre el horizonte; sin embargo, ilustra la intuición central: a mayor masa, menor gravedad superficial.

La definición moderna es puramente geométrica. Dado el campo de Killing temporal $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu$, la gravedad superficial se define mediante

$$\nabla_\mu(\xi^\nu \xi_\nu) \big|_{\mathcal{H}} = -2\kappa \xi_\mu, \quad (3.6)$$

o equivalentemente,

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2}(\nabla_\mu \xi_\nu)(\nabla^\mu \xi^\nu) \big|_{\mathcal{H}}. \quad (3.7)$$

Para la métrica (3.3), el símbolo de Christoffel relevante es $\Gamma_{tt}^r = (m/r^2)(1 - 2m/r)$, y evaluando (3.7) en $r = 2m$ se obtiene

$$\boxed{\kappa = \frac{1}{4m}} \quad (3.8)$$

A mayor masa m , menor κ : un horizonte más grande implica una geometría localmente más plana y, por ende, una menor aceleración efectiva vista desde el infinito.

3.1.2 Reissner–Nordström

El agujero negro de Reissner–Nordström es la solución a las ecuaciones de Einstein–Maxwell que describe el espaciotiempo exterior a un objeto esféricamente simétrico, no rotante, de masa m y carga eléctrica q . A diferencia de Schwarzschild, el tensor energía-momento no es nulo: existe un campo electromagnético asociado al potencial

$$A_\mu = \left(-\frac{q}{4\pi r}, 0, 0, 0 \right), \quad (3.9)$$

cuya única componente no nula, $A_t = -q/(4\pi r)$, corresponde al potencial de Coulomb. La métrica toma la forma

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + f(r)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (3.10)$$

donde se ha definido la función métrica

$$f(r) \equiv 1 - \frac{2m}{r} + \frac{q^2}{4\pi r^2}. \quad (3.11)$$

En el límite $q \rightarrow 0$ se recupera la métrica de Schwarzschild (3.3).

Estructura de regiones

Las singularidades de coordenadas ocurren donde $f(r) = 0$, lo que determina los horizontes:

$$r_\pm = m \pm \sqrt{m^2 - \frac{q^2}{4\pi}}, \quad (3.12)$$

que existen como hipersuperficies nulas distintas siempre que $q^2 \leq 4\pi m^2$. El caso $q^2 = 4\pi m^2$ corresponde al agujero negro de Reissner–Nordström extremo, con un único horizonte degenerado. Las regiones relevantes son:

- $r > r_+$: región exterior. Los observadores pueden comunicarse con el infinito y ∂_t es tipo tiempo.
- $r = r_+$: horizonte de eventos exterior $\mathcal{H}^+$, hipersuperficie nula que delimita la región causalmente desconectada del exterior.
- $r_- < r < r_+$: región intermedia, comprendida entre los dos horizontes. Aquí $f(r) < 0$ y r actúa como coordenada temporal.
- $r = r_-$: horizonte de Cauchy interior.
- $r < r_-$: región interior, con singularidad de curvatura en $r = 0$.

La aparente divergencia de (3.10) en $r = r_\pm$ es una singularidad de coordenadas, no física; puede removerse mediante extensiones analíticas adecuadas.

Gravedad superficial

El campo de Killing temporal $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu$ es el generador del horizonte exterior $\mathcal{H}^+$. La gravedad superficial se calcula a partir de

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} (\nabla_\mu \xi_\nu)(\nabla^\mu \xi^\nu) \Big|_{\mathcal{H}^+}. \quad (3.13)$$

El símbolo de Christoffel relevante es

$$\Gamma_{tt}^r = \frac{f(r)}{2} f'(r), \quad f'(r) = \frac{2m}{r^2} - \frac{q^2}{2\pi r^3}, \quad (3.14)$$

y evaluando (3.13) en $r = r_+$ se obtiene

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{f'(r_+)}{2} = \frac{r_+ - r_-}{2r_+^2} \\ &= \frac{\sqrt{m^2 - q^2/4\pi}}{r_+^2}. \end{aligned} \quad (3.15)$$

$$\boxed{\kappa = \frac{\sqrt{m^2 - \frac{q^2}{4\pi}}}{\left(m + \sqrt{m^2 - \frac{q^2}{4\pi}}\right)^2}} \quad (3.16)$$

En el límite $q \rightarrow 0$, $r_+ \rightarrow 2m$ y se recupera $\kappa = 1/4m$. Para el caso extremo $q^2 = 4\pi m^2$, el numerador se anula y $\kappa = 0$: el agujero negro extremo de Reissner–Nordström tiene gravedad superficial nula, en completa analogía con el caso extremo de Kerr.

Potencial eléctrico del horizonte

La presencia de carga introduce el *potencial eléctrico del horizonte* Φ_H , definido como el valor del potencial electromagnético evaluado sobre $\mathcal{H}^+$ respecto al infinito,

$$\begin{aligned} \Phi_H &= -\xi^\mu A_\mu \Big|_{\mathcal{H}^+} \\ &= \frac{q}{4\pi r_+}, \end{aligned} \quad (3.17)$$

$$\boxed{\Phi_H = \frac{q}{4\pi \left(m + \sqrt{m^2 - \frac{q^2}{4\pi}}\right)}} \quad (3.18)$$

3.1.3 Kerr

El agujero negro de Kerr es la solución a las ecuaciones de Einstein en el vacío que describe el espaciotiempo exterior a un objeto con masa m y momento angular $J = am$, donde a es el parámetro de spin. En coordenadas de Boyer–Lindquist, la métrica toma la forma

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2\theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\phi - a dt)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2, \quad (3.19)$$

donde se han definido las funciones

$$\Delta \equiv r^2 - 2mr + a^2, \quad \rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \quad (3.20)$$

En el límite $a \rightarrow 0$ la métrica (3.19) se reduce a la de Schwarzschild (3.3), mientras que para $m \rightarrow 0$ se recupera el espaciotiempo de Minkowski en coordenadas esferoidales oblatas.

Estructura de regiones

Las singularidades de coordenadas de la métrica (3.19) ocurren donde $\Delta = 0$ o $\rho^2 = 0$. La condición $\rho^2 = 0$ implica $r = 0$ y $\theta = \pi/2$, que corresponde a una singularidad de curvatura con estructura de anillo en el plano ecuatorial. La condición $\Delta = 0$ determina los horizontes:

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2}, \quad (3.21)$$

que existen como hipersuperficies nulas distintas siempre que $|a| \leq M$. El caso $|a| = M$ corresponde al agujero negro de Kerr extremo, con un único horizonte degenerado. Las regiones relevantes son:

- $r > r_+$: región exterior. Los observadores pueden comunicarse con el infinito.
- $r = r_+$: horizonte de eventos exterior $\mathcal{H}^+$, hipersuperficie nula que delimita la región causalmente desconectada del exterior.
- $r_- < r < r_+$: región intermedia, comprendida entre los dos horizontes.
- $r = r_-$: horizonte de Cauchy interior.
- $r < r_-$: región interior, donde se encuentra la singularidad de anillo.

Ergosfera

Una característica exclusiva de los agujeros negros en rotación es la existencia de la *ergosfera*: la región donde el campo de Killing temporal $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu$ se vuelve tipo espacio, esto es, donde $g_{tt} > 0$. Para la métrica de Kerr,

$$g_{tt} = - \left(1 - \frac{2mr}{\rho^2} \right), \quad (3.22)$$

de modo que $g_{tt} = 0$ define la *superficie estática límite*:

$$r_{\text{sl}}(\theta) = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta}. \quad (3.23)$$

La ergosfera es la región comprendida entre la superficie estática límite y el horizonte de eventos exterior,

$$r_+ \leq r \leq r_{\text{sl}}(\theta), \quad (3.24)$$

y tiene geometría no esférica: se aplana en los polos ($r_{\text{sl}} = r_+$ para $\theta = 0, \pi$) y alcanza su máxima extensión en el ecuador ($\theta = \pi/2$). Dentro de la ergosfera, ningún observador puede

permanecer estático respecto al infinito; todos son arrastrados en la dirección de rotación del agujero negro, fenómeno conocido como *arrastré de marcos* (*frame dragging*). Esta región tiene consecuencias físicas importantes, entre ellas la posibilidad de extraer energía rotacional del agujero negro.

Gravedad superficial

Para el agujero negro de Kerr, el generador del horizonte es χ^μ dado en (3.29), y la gravedad superficial se calcula a partir de

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} (\nabla_\mu \chi_\nu) (\nabla^\mu \chi^\nu) \Big|_{\mathcal{H}^+}. \quad (3.25)$$

Para evaluar (3.25) conviene notar que sobre $r = r_+$ se tiene $\Delta(r_+) = 0$, y que el término dominante proviene de $\partial_r \chi_t|_{r=r_+}$, que es proporcional a $\Delta'(r_+)/\rho^2$, donde

$$\Delta'(r_+) \equiv \frac{d\Delta}{dr} \Big|_{r=r_+} = 2(r_+ - M). \quad (3.26)$$

Aunque $\rho^2|_{r=r_+} = r_+^2 + a^2 \cos^2 \theta$ depende de θ , esta dependencia angular se cancela en el cálculo de (3.25), de modo que κ resulta uniforme sobre todo el horizonte. Evaluando explícitamente se obtiene

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{r_+ - m}{2mr_+} \\ &= \frac{\sqrt{m^2 - a^2}}{2mr_+}. \end{aligned} \quad (3.27)$$

$$\boxed{\kappa = \frac{\sqrt{m^2 - a^2}}{2m(m + \sqrt{m^2 - a^2})}} \quad (3.28)$$

En el límite $a \rightarrow 0$, $r_+ \rightarrow 2m$ y se recupera $\kappa = 1/4m$. Para el caso extremo $a = m$, el numerador se anula y $\kappa = 0$: el agujero negro extremo de Kerr tiene gravedad superficial nula.

Velocidad angular del horizonte

Las generatrices nulas del horizonte exterior $\mathcal{H}^+$ son tangentes al campo de Killing

$$\chi^\mu = \xi^\mu + \Omega_H \psi^\mu, \quad (3.29)$$

donde $\psi^\mu = (\partial_\phi)^\mu$ es el campo de Killing azimutal y Ω_H es la *velocidad angular del horizonte*.² Esta cantidad se determina exigiendo que χ^μ sea nulo sobre $\mathcal{H}^+$, condición que se expresa como

$$\chi^\mu \chi_\mu \Big|_{\mathcal{H}^+} = (g_{tt} + 2\Omega_H g_{t\phi} + \Omega_H^2 g_{\phi\phi}) \Big|_{r=r_+} = 0. \quad (3.30)$$

²En espaciotiempos no asintóticamente planos, como AdS, la velocidad angular del horizonte debe redefinirse como $\tilde{\Omega}_H = \Omega_H - \Omega_\infty$, donde Ω_∞ es la velocidad angular del sistema de referencia en el infinito.

Dado que $g_{\phi\phi} > 0$ fuera de la singularidad de anillo, la ecuación (3.30) es cuadrática en Ω_H con solución única físicamente relevante:

$$\begin{aligned}\Omega_H &= -\frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \Big|_{r=r_+} \\ &= \frac{a}{r_+^2 + a^2} \\ &= \frac{a}{2mr_+},\end{aligned}\tag{3.31}$$

$$\boxed{\Omega_H = \frac{a}{2m(m + \sqrt{m^2 - a^2})}}\tag{3.32}$$

donde en el último paso se ha usado que $\Delta(r_+) = 0$ implica $r_+^2 + a^2 = 2mr_+$, véase (3.21). En el límite $a \rightarrow 0$ se recupera $\Omega_H = 0$, consistente con la simetría esférica de Schwarzschild.

3.1.4 Kerr–Newman

El agujero negro de Kerr–Newman es la solución más general a las ecuaciones de Einstein–Maxwell en el vacío, y describe el espaciotiempo exterior a un objeto con masa m , momento angular $J = am$ y carga eléctrica q . La métrica en coordenadas de Boyer–Lindquist toma la forma

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\rho^2} (dt - a \sin^2\theta d\phi)^2 + \frac{\sin^2\theta}{\rho^2} ((r^2 + a^2) d\phi - a dt)^2 + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2 + \rho^2 d\theta^2,\tag{3.33}$$

donde ahora las funciones Δ y ρ^2 incorporan la carga eléctrica:

$$\Delta \equiv r^2 - 2mr + a^2 + \frac{q^2}{4\pi}, \quad \rho^2 \equiv r^2 + a^2 \cos^2\theta.\tag{3.34}$$

El campo electromagnético está descrito por el potencial

$$A_\mu = \left(-\frac{qr}{4\pi\rho^2}, 0, 0, \frac{qra \sin^2\theta}{4\pi\rho^2} \right),\tag{3.35}$$

cuyas componentes no nulas A_t y A_ϕ reflejan el acoplamiento entre la carga y la rotación. En los límites $a \rightarrow 0$ y $q \rightarrow 0$ se recuperan, respectivamente, las métricas de Reissner–Nordström (3.10) y Kerr (3.19).

Cabe señalar que la única diferencia sustancial entre las métricas de Kerr y Kerr–Newman radica en la función Δ dada por la ecuación (3.34), donde aparece un término adicional asociado a la carga eléctrica q .

Estructura de regiones

Las singularidades de coordenadas ocurren donde $\Delta = 0$ o $\rho^2 = 0$. La condición $\rho^2 = 0$ implica $r = 0$ y $\theta = \pi/2$, correspondiendo a una singularidad de curvatura con estructura de anillo en el plano ecuatorial, igual que en Kerr. La condición $\Delta = 0$ determina los horizontes:

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 - \frac{q^2}{4\pi}}, \quad (3.36)$$

que existen como hipersuperficies nulas distintas siempre que $m^2 \geq a^2 + q^2/(4\pi)$. El caso de igualdad corresponde al agujero negro de Kerr–Newman extremo. Las regiones relevantes son:

- $r > r_+$: región exterior. Los observadores pueden comunicarse con el infinito y ∂_t es tipo tiempo lejos del horizonte.
- $r = r_+$: horizonte de eventos exterior $\mathcal{H}^+$, hipersuperficie nula que delimita la región causalmente desconectada del exterior.
- $r_- < r < r_+$: región intermedia, comprendida entre los dos horizontes.
- $r = r_-$: horizonte de Cauchy interior.
- $r < r_-$: región interior, donde se encuentra la singularidad de anillo.

Ergosfera

Al igual que en Kerr, la rotación genera una ergosfera donde $\xi^\mu = (\partial_t)^\mu$ se vuelve tipo espacio. La condición $g_{tt} = 0$ define la superficie estática límite:

$$r_{\text{sl}}(\theta) = m + \sqrt{m^2 - a^2 \cos^2 \theta - \frac{q^2}{4\pi}}, \quad (3.37)$$

que en comparación con (3.23) incorpora el término de carga $q^2/(4\pi)$. La ergosfera queda definida por

$$r_+ \leq r \leq r_{\text{sl}}(\theta), \quad (3.38)$$

con la misma geometría no esférica que en Kerr: se aplana en los polos ($r_{\text{sl}} = r_+$ para $\theta = 0, \pi$) y es máxima en el ecuador. Dentro de ella, el arrastre de marcos impide que cualquier observador permanezca estático respecto al infinito.

Gravedad superficial

El generador del horizonte es χ^μ dado en (3.43), y la gravedad superficial se calcula a partir de

$$\kappa^2 = -\frac{1}{2} (\nabla_\mu \chi_\nu) (\nabla^\mu \chi^\nu) \Big|_{\mathcal{H}^+}. \quad (3.39)$$

3.1. GEOMETRÍA DE AGUJEROS NEGROS

Al igual que en Kerr, el término dominante proviene de $\partial_r \chi_t|_{r=r_+}$, proporcional a $\Delta'(r_+)/\rho^2$, donde

$$\Delta'(r_+) \equiv \left. \frac{d\Delta}{dr} \right|_{r=r_+} = 2(r_+ - m). \quad (3.40)$$

La dependencia angular de $\rho^2|_{r=r_+}$ se cancela en el cálculo de (3.39), y el resultado es uniforme sobre el horizonte:

$$\begin{aligned} \kappa &= \frac{r_+ - m}{r_+^2 + a^2}, \\ &= \frac{\sqrt{m^2 - a^2 - \frac{q^2}{4\pi}}}{r_+^2 + a^2}. \end{aligned} \quad (3.41)$$

$$\boxed{\kappa = \frac{\sqrt{m^2 - a^2 - \frac{q^2}{4\pi}}}{\left(a^2 + \left(m + \sqrt{m^2 - a^2 - \frac{q^2}{4\pi}}\right)^2\right)}} \quad (3.42)$$

En los límites $q \rightarrow 0$ y $a \rightarrow 0$ se recuperan, respectivamente, (3.28) y (3.16). Para el caso extremo $m^2 = a^2 + q^2/(4\pi)$, el numerador se anula y $\kappa = 0$, en completa analogía con los casos extremos de Kerr y Reissner–Nordström.

Velocidad angular del horizonte

Las generatrices nulas del horizonte exterior $\mathcal{H}^+$ son tangentes al campo de Killing

$$\chi^\mu = \xi^\mu + \Omega_H \psi^\mu, \quad (3.43)$$

donde $\psi^\mu = (\partial_\phi)^\mu$. Exigiendo que χ^μ sea nulo sobre $\mathcal{H}^+$,

$$(g_{tt} + 2\Omega_H g_{t\phi} + \Omega_H^2 g_{\phi\phi})|_{r=r_+} = 0, \quad (3.44)$$

y dado que $g_{\phi\phi} > 0$ fuera de la singularidad de anillo, se obtiene la solución única

$$\begin{aligned} \Omega_H &= -\left. \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \right|_{r=r_+} \\ &= \frac{a}{r_+^2 + a^2}, \\ &= \frac{a}{2mr_+ - \frac{q^2}{4\pi}}, \end{aligned} \quad (3.45)$$

$$\boxed{\Omega_H = \frac{a}{\left(m + \sqrt{m^2 - a^2 - \frac{q^2}{4\pi}}\right)^2 + a^2}} \quad (3.46)$$

donde en el último paso se ha usado que $\Delta(r_+) = 0$ implica $r_+^2 + a^2 = 2mr_+ - q^2/(4\pi)$, véase (3.36). En el límite $q \rightarrow 0$ se recupera (3.32).

Potencial eléctrico del horizonte

El potencial eléctrico del horizonte se define a partir del potencial (3.35) evaluado sobre $\mathcal{H}^+$:

$$\begin{aligned}\Phi_H &= -\xi^\mu A_\mu|_{\mathcal{H}^+}, \\ &= \frac{qr_+}{4\pi\rho^2}\Big|_{r=r_+}.\end{aligned}\tag{3.47}$$

Dado que sobre el horizonte $\rho^2|_{r=r_+} = r_+^2 + a^2 \cos^2\theta$, en general Φ_H dependería de θ . Sin embargo, usando que $\Delta(r_+) = 0$ se puede mostrar que la dependencia angular se cancela, y el resultado es uniforme sobre el horizonte:

$$\Phi_H = \frac{q \left(m + \sqrt{m^2 - a^2 - \frac{q^2}{4\pi}} \right)}{4\pi \left[\left(m + \sqrt{m^2 - a^2 - \frac{q^2}{4\pi}} \right)^2 + a^2 \right]}\tag{3.48}$$

En el límite $a \rightarrow 0$ se recupera $\Phi_H = q/(4\pi r_+)$, consistente con (3.18).

3.2 Las leyes termodinámicas de agujeros negros

En la sección anterior se introdujeron algunas de las cantidades geométricas fundamentales asociadas a los agujeros negros, tales como la gravedad superficial κ , la velocidad angular Ω_H y el potencial eléctrico Φ_H . Estas cantidades desempeñan el papel de variables intensivas dentro de la termodinámica de agujeros negros y aparecen de manera natural en sus leyes fundamentales.

En esta sección se discutirán la ley cero y la primera ley de la mecánica de agujeros negros. Estas serán particularmente relevantes para el desarrollo posterior de la tesis, ya que el objetivo principal del presente trabajo es estudiar la derivación de la primera ley mediante el formalismo de Wald.

3.2.1 Ley cero, temperatura y entropía

La ley cero de la mecánica de agujeros negros establece que la gravedad superficial κ permanece constante sobre todo el horizonte de eventos de un agujero negro estacionario. De manera análoga a la uniformidad de la temperatura en un sistema termodinámico en equilibrio, esta propiedad refleja que el horizonte se encuentra en un estado de equilibrio gravitacional.

Este resultado fue demostrado originalmente por Bardeen, Carter y Hawking bajo hipótesis de estacionariedad y de validez de las ecuaciones de Einstein junto con condiciones físicas razonables sobre la materia. La importancia de esta ley radica en que permite asociar una única temperatura al agujero negro.

Tras el descubrimiento de la radiación de Hawking, se estableció que la temperatura de un agujero negro viene dada por la ecuación (1.5). Recordemos que la temperatura de Hawking adopta la forma

3.2. LAS LEYES TERMODINAMICAS DE AGUJEROS NEGROS

$$T_H = \frac{\kappa}{2\pi} \quad (3.49)$$

En consecuencia, la existencia de una gravedad superficial no nula implica la existencia de una temperatura y, por ende, de una radiación asociada al agujero negro. Asimismo, en unidades naturales, la entropía definida en la ecuación(1.6) puede escribirse como

$$S_H = \frac{A_H}{4}, \quad (3.50)$$

donde A_H corresponde al área del horizonte de eventos del agujero negro.

A partir de los valores de la gravedad superficial obtenidos en la sección 3.1 y del cálculo del área³ de cada agujero negro, las definiciones de temperatura (3.49) y entropía (3.50) permiten obtener las siguientes expresiones:

Agujero negro	Temperatura T_H	Entropía S
Schwarzschild	$\frac{1}{8\pi m}$	$4\pi m^2$
Reissner–Nordström	$\frac{\sqrt{m^2 - \frac{q^2}{4\pi}}}{2\pi \left(m + \sqrt{m^2 - \frac{q^2}{4\pi}}\right)^2}$	$\pi \left(m + \sqrt{m^2 - \frac{q^2}{4\pi}}\right)^2$
Kerr	$\frac{\sqrt{m^2 - a^2}}{4\pi m(m + \sqrt{m^2 - a^2})}$	$2\pi m(m + \sqrt{m^2 - a^2})$
Kerr–Newman	$\frac{\sqrt{m^2 - a^2 - \frac{q^2}{4\pi}}}{2\pi \left(a^2 + \left(m + \sqrt{m^2 - a^2 - \frac{q^2}{4\pi}}\right)^2\right)}$	$\pi \left(a^2 + \left(m + \sqrt{m^2 - a^2 - \frac{q^2}{4\pi}}\right)^2\right)$

Cuadro 3.1: Temperatura de Hawking y entropía de los principales agujeros negros.

Si se toma cada uno de los agujeros negros expresados en el table 3.1, podemos notar que eliminando alguno de los parámetros a o Q , pasamos a la temperatura de otro de los agujeros negros: si tomamos Kerr–Newman y hacemos que $Q \rightarrow 0$ recuperamos Kerr; si hacemos $a \rightarrow 0$ recuperamos Reissner–Nordström. Aunque las expresiones dependen de los parámetros físicos del agujero negro, en todos los casos la gravedad superficial permanece constante sobre el horizonte correspondiente. Ese mismo razonamiento puede aplicarse a la entropía, pues al tomar los límites apropiados en las expresiones correspondientes se recuperan las entropías de las soluciones más simples; por ejemplo, la entropía de Kerr se reduce a la de Schwarzschild al hacer $a \rightarrow 0$.

³El área de cada horizonte se obtuvo fijando las coordenadas que definen una sección espacial del horizonte de eventos, calculando el determinante de la métrica resultante e integrando el correspondiente elemento de área sobre dicha superficie.

3.2.2 Primera ley: el corazón de la termodinámica de agujeros negros

La primera ley de la mecánica de agujeros negros constituye el resultado central de esta tesina. Su importancia radica en que relaciona las variaciones de las cantidades conservadas asociadas a un agujero negro y proporciona el punto de partida para la formulación termodinámica de la gravedad. La analogía con la primera ley de la termodinámica clásica,

$$dU = T dS - P dV, \quad (3.51)$$

donde U es la energía interna, T la temperatura, S la entropía, P la presión y V el volumen, sugiere que la masa del agujero negro debe interpretarse como una forma de energía y que el área del horizonte desempeña un papel análogo al de la entropía.

Para el caso más general, el agujero negro de Kerr–Newman (1.2), la primera ley toma la forma

$$\delta M = T \delta S + \Omega \delta J + \Phi \delta Q, \quad (3.52)$$

lo que refuerza la interpretación de los agujeros negros como sistemas termodinámicos genuinos. Sin embargo, la identificación de las cantidades intensivas no es un resultado trivial. La expresión para la temperatura surge de un cálculo cuántico realizado por Hawking en un fondo gravitacional estacionario, mientras que las definiciones de κ , Ω_H y Φ_H , introducidas en la Sección 3.1, tienen un origen puramente geométrico. Más adelante, en el Capítulo 5, al introducir el agujero negro de Kerr–Taub–NUT, se observará que tanto la definición como la interpretación de la temperatura y de la velocidad angular presentan sutilezas adicionales que merecen atención especial.

La relación (3.52) involucra dos tipos de variables termodinámicas: las cantidades extensivas M , S , J , Q , y las cantidades intensivas T , Ω , Φ . Dado que (3.52) es una relación diferencial exacta, M debe poder expresarse como función de sus variables extensivas, $M = M(S, J, Q)$, de modo que

$$dM = \frac{\partial M}{\partial S} dS + \frac{\partial M}{\partial J} dJ + \frac{\partial M}{\partial Q} dQ. \quad (3.53)$$

Esto implica que las cantidades intensivas se identifican con las derivadas parciales correspondientes, $T = \partial M / \partial S$, $\Omega = \partial M / \partial J$, $\Phi = \partial M / \partial Q$, y que deben satisfacerse las condiciones de integrabilidad del teorema de Schwarz⁴, es decir, la igualdad de las derivadas parciales cruzadas de M . Este procedimiento puede aplicarse a cada una de las variables extensivas, construyendo así un sistema de ecuaciones en derivadas parciales cuyas soluciones determinan tanto las cantidades intensivas como las extensivas desconocidas del sistema; sin embargo, dichas soluciones carecen en principio de una interpretación física inmediata.

Esta observación sugiere dos métodos distintos para construir la primera ley. En ambos, las cantidades extensivas del sistema se suponen ya obtenidas mediante el formalismo de

⁴El teorema de Schwarz establece que, para una función suficientemente regular, las derivadas parciales cruzadas son iguales independientemente del orden de diferenciación, esto es, $\partial^2 M / \partial S \partial J = \partial^2 M / \partial J \partial S$, y análogamente para los demás pares de variables.

espacio de fases covariante, cuyas ideas generales fueron introducidas en el Capítulo 1 y cuyo desarrollo formal se presentará en el Capítulo 4; lo que distingue a ambos métodos no es entonces el origen de estas cargas, sino la manera en que se utilizan para construir la primera ley y para identificar las cantidades intensivas correspondientes. Concretamente, los métodos se diferencian en qué cantidades se toman como incógnitas del sistema de ecuaciones en derivadas parciales y en qué información se impone de antemano.

El primer método consiste en tratar tanto las cantidades extensivas desconocidas como las intensivas como incógnitas funcionales del sistema, sin asumir a priori ni la fórmula de la temperatura de Hawking ni la relación $S = A/4$. Concretamente, se busca una función $M = M(S, J, Q)$ junto con funciones $S = S(M, J, Q)$ y $T = T(M, J, Q)$ que satisfagan simultáneamente (3.52) y la condición de integrabilidad de Schwarz. El sistema resultante queda determinado cuando el número de ecuaciones en derivadas parciales coincide con el número de incógnitas, y sus soluciones quedan fijadas, salvo constantes de integración, imponiendo condiciones iniciales o de frontera provenientes de algún miembro conocido de la misma familia de soluciones, o de una familia relacionada. Este enfoque es autocontenido: siempre que exista el número adecuado de ecuaciones y se satisfaga la condición de integrabilidad, la primera ley puede reconstruirse sistemáticamente a partir de las cantidades conservadas del sistema. El precio a pagar es que las cantidades obtenidas son soluciones de dicho sistema y, en principio, carecen de una interpretación física inmediata; su significado debe establecerse a posteriori, comparando con los casos límite conocidos.

El segundo método es más directo: se parte de un agujero negro cuya regularidad se presupone, y se imponen desde el inicio la temperatura de Hawking (3.49) y la entropía (3.50). Al fijar estas dos cantidades de antemano se reduce de inmediato el número de incógnitas del sistema de ecuaciones en derivadas parciales, y se intenta construir la primera ley con las cantidades extensivas e intensivas restantes. Si con esta reducción no se logra satisfacer la condición de integrabilidad, se introducen parámetros, o pares adicionales de cantidades extensivas e intensivas, relacionados con cantidades ya conocidas del problema, con el fin de separar e identificar correctamente los distintos términos termodinámicos en la nueva primera ley propuesta. El objetivo de este procedimiento es el mismo que en el primer método: igualar el número de incógnitas al número de ecuaciones en derivadas parciales disponibles y satisfacer la condición de integrabilidad, de modo que la primera ley pueda finalmente obtenerse.⁵

El inconveniente de este procedimiento es que, al introducir parámetros adicionales, estos pueden quedar restringidos o atados al valor de otras cantidades del sistema. Cabe señalar que una situación análoga puede presentarse en el primer método: qué cantidades extensivas resultan efectivamente restringidas es información que entrega el formalismo de espacio de fases covariante desarrollado en el Capítulo 4, y no el sistema de ecuaciones diferenciales por sí solo. En dicho formalismo, una carga conservada puede no ser integrable, o bien la

⁵Este método no es incorrecto en sentido estricto: describe la primera ley incorporando términos de trabajo adicionales que permiten cerrar la diferencial total de M , llegando así a formulaciones igualmente válidas, aunque con una presentación distinta a la del primer método.

solución obtenida puede no corresponder a la cantidad extensiva completa del sistema, de modo que la carga resultante queda restringida pese a haber sido calculada correctamente. Esta situación se ilustrará más adelante, en el Capítulo 5, al introducir el caso del agujero negro de Schwarzschild acelerado.

3.3 Ecuación de Christodoulou–Ruffini

Como se mencionó anteriormente, uno de los resultados fundamentales en la termodinámica de agujeros negros fue obtenido por Christodoulou y Ruffini [25], quienes introdujeron el concepto de masa irreducible para los agujeros negros de Kerr–Newman. Este concepto permitió reformular la expresión de la masa de un agujero negro estacionario, cargado y rotante mediante la relación entre el área del horizonte y la masa irreducible,

$$A = 16\pi M_{irr}^2, \quad (3.54)$$

a partir de la cual se obtiene la ecuación de Christodoulou–Ruffini,

$$M^2 = \left(M_{irr} + \frac{Q^2}{4M_{irr}} \right)^2 + \frac{J^2}{4M_{irr}^2}, \quad (3.55)$$

donde M , Q y J representan la masa, la carga eléctrica y el momento angular del agujero negro, respectivamente. Esta ecuación establece un límite para la energía que puede extraerse mediante procesos clásicos de Penrose.

Su importancia radica en que relaciona de forma precisa las cantidades conservadas fundamentales del agujero negro, masa, carga y momento angular, determinadas por el teorema de no pelo. Aunque fue concebida originalmente en el contexto de la energía extraíble, a partir de la invariancia de la masa irreducible M_{irr} bajo procesos de Penrose, la ecuación de Christodoulou–Ruffini terminó convirtiéndose en uno de los resultados centrales de la termodinámica de agujeros negros, al proporcionar un criterio natural para verificar la consistencia de la primera ley.⁶

En efecto, dado que (3.55) es la integral exacta de la primera ley (1.2) para el caso Kerr–Newman, toda derivación correcta de la primera ley debe ser compatible con ella. La condición de invariancia de M_{irr} , o equivalentemente la no-disminución del área $A = 16\pi M_{irr}^2$, se convierte así en una prueba estándar de coherencia interna en el análisis de nuevas familias de agujeros negros.

La utilidad práctica de esta verificación es doble. Por un lado, permite detectar inconsistencias en la identificación de las variables termodinámicas: si la primera ley derivada para un agujero negro no es compatible con $\delta A \geq 0$ en procesos físicos admisibles, ello indica que alguna de las cantidades involucradas, ya sea la temperatura, la entropía, el momento angular o la carga

⁶En algunos trabajos de la literatura se le llama fórmula de Smarr a la ecuación de Christodoulou–Ruffini (3.55), lo que puede inducir a confusión, ya que la fórmula de Smarr es una relación distinta entre las variables termodinámicas del agujero negro y será presentada a continuación.

eléctrica, no ha sido correctamente identificada. Por otro lado, en contextos más generales, como los agujeros negros AdS, la ecuación de Christodoulou-Ruffini debe generalizarse [41, 42]. En estos casos, la verificación de consistencia actúa como guía para determinar qué cantidad cumple el papel de masa irreducible en la teoría considerada.

Más recientemente, se ha mostrado que la ecuación de Christodoulou-Ruffini también puede utilizarse como un método complementario para obtener una masa termodinámica bien definida que satisface la primera ley, sin necesidad de imponer restricciones adicionales *ad hoc* sobre los parámetros físicos [43]. Se trata, en ese sentido, de una herramienta especialmente útil en escenarios donde los métodos estándar de cálculo de la masa resultan ambiguos o de difícil aplicación.

Esta interpretación hace que la ecuación de Christodoulou-Ruffini funcione como un puente entre la dinámica clásica y la termodinámica de agujeros negros. En este sentido, Astorino [43] señala que resulta de interés investigar con mayor profundidad el alcance de la fórmula de masa de Christodoulou-Ruffini, ya que también proporciona resultados satisfactorios para deformaciones significativas del agujero negro de Kerr-Newman. Esto sugiere que dicha fórmula podría contener información más general sobre la estructura termodinámica de los agujeros negros y motiva el estudio de su posible aplicabilidad en escenarios más amplios, incluso más allá del marco de la relatividad general.

3.4 Fórmula de Smarr

La fórmula de Smarr establece una relación algebraica entre las variables termodinámicas macroscópicas de un agujero negro estacionario. Para el caso de Kerr-Newman puede escribirse como

$$M = 2TS + 2\Omega J + \Phi Q, \quad (3.56)$$

donde M , S , J y Q representan la masa, la entropía, el momento angular y la carga eléctrica del agujero negro, respectivamente, mientras que T , Ω y Φ corresponden a las variables termodinámicas conjugadas.

Esta expresión surge de las propiedades de homogeneidad de la masa como función de sus variables extensivas. Su deducción se basa en el teorema de Euler para funciones homogéneas y en argumentos de escalamiento dimensional.

A diferencia de la primera ley de la termodinámica de agujeros negros, que describe variaciones infinitesimales entre estados de equilibrio próximos, la fórmula de Smarr establece una relación global entre las variables macroscópicas del sistema. Mientras la primera ley determina la estructura diferencial de la teoría, la fórmula de Smarr refleja las propiedades de homogeneidad que satisface la masa del agujero negro. Ambas relaciones son complementarias y, para que una descripción termodinámica sea consistente, deben ser mutuamente compatibles.

Por esta razón, la fórmula de Smarr se utiliza habitualmente como un criterio de consistencia en el análisis de nuevas soluciones de agujeros negros. Una vez identificadas las variables

termodinámicas y establecida la primera ley, la correspondiente relación de Smarr debe seguirse de manera natural a partir de las propiedades de homogeneidad del sistema. Cuando esto no ocurre, la discrepancia suele indicar una identificación incorrecta de alguna variable conjugada, de la entropía o, en teorías más generales, de la propia masa termodinámica.

La importancia de esta relación se ha hecho aún más evidente en desarrollos recientes, particularmente en el contexto de la *Black Hole Chemistry*. En este marco, la constante cosmológica se interpreta como una variable termodinámica asociada a una presión y la masa del agujero negro adquiere la interpretación de una entalpía. La fórmula de Smarr debe entonces generalizarse para incorporar los nuevos pares de variables conjugadas, constituyendo una herramienta fundamental para construir una descripción termodinámica consistente y para identificar correctamente las cantidades físicas relevantes del sistema [44].

Formalismo de espacio de fases covariante

Para comprender la maquinaria de este formalismo es necesario entender los elementos que lo componen y la manera en que se relacionan entre sí. Por ello, introduciremos gradualmente los conceptos y herramientas fundamentales que intervienen en su construcción. Nos moveremos entre distintos espacios, definiremos objetos como la corriente simpléctica y estudiaremos las condiciones necesarias para la existencia de cantidades conservadas. Posteriormente, generalizaremos estos resultados y obtendremos las expresiones correspondientes al caso más simple de la Relatividad General en cuatro dimensiones, así como a una teoría acoplada a un campo electromagnético.

4.1 Dos espacios, una idea

El formalismo de Iyer y Wald [40] opera simultáneamente sobre dos espacios geométricos: el espacio-tiempo M y el espacio de fases covariante Γ , cuya construcción fue detallada en el Capítulo 2. Aunque estos espacios son conceptualmente distintos, la idea central del formalismo es que la información dinámica de la teoría puede extraerse moviéndose entre ellos de manera sistemática: se parte de objetos locales definidos sobre M , se los integra sobre hipersuperficies para obtener objetos globales sobre $\tilde{\mathcal{F}}$, y la estructura resultante en Γ codifica las cantidades físicas conservadas de la teoría.

Este tránsito entre espacios está gobernado por dos operadores diferenciales. Sobre M actúa la derivada covariante ∇_μ , cuya acción integrada sobre una hipersuperficie de Cauchy Σ convierte, mediante el teorema de Gauss, integrales de volumen en integrales de superficie sobre $\partial\Sigma$. Sobre $\tilde{\mathcal{F}}$ actúa el operador de variación δ , que desempeña el papel de derivada exterior del espacio de campos y que, como tal, es nilpotente,

$$\delta^2 = 0. \tag{4.1}$$

Dado que ∇_μ y δ actúan sobre espacios distintos, ambos operadores conmutan trivialmente al actuar sobre un campo tensorial definido sobre M que dependa paramétricamente de $\phi \in \tilde{\mathcal{F}}$,

$$\nabla_\mu \delta = \delta \nabla_\mu, \tag{4.2}$$

lo que garantiza que las construcciones realizadas en M y en $\tilde{\mathcal{F}}$ sean mutuamente consistentes. Los objetos del formalismo reflejan esta doble naturaleza: son tensores con p índices en $\mathcal{M}$ y funcionales de orden q en las variaciones $\delta\phi$ sobre $\tilde{\mathcal{F}}$, y se dice que poseen bigrado (p, q) . La densidad de corriente potencial simpléctica $\Theta^\mu(\phi, \delta\phi)$, de bigrado $(1, 1)$, es el objeto de partida: su integral sobre Σ produce la forma presimpléctica Ω en $\tilde{\mathcal{F}}$, de bigrado $(0, 2)$, mientras que su divergencia covariante, combinada con la acción de δ , da lugar a las corrientes conservadas cuya integral sobre $\partial\Sigma$ define las cargas de la teoría. Es en este sentido que dos espacios y dos operadores constituyen una sola idea coherente.

4.2 El Lagrangiano y su variación

Sea $L[\phi]$ una D -forma Lagrangiana invariante bajo difeomorfismos. Su primera variación adopta siempre la forma:

$$\delta L = E(\phi) \delta\phi + \nabla_\mu \Theta^\mu(\phi, \delta\phi), \quad (4.3)$$

donde $E(\phi)$ denota las ecuaciones de movimiento asociadas a la teoría lagrangiana, mientras que $\Theta^\mu(\phi, \delta\phi)$ es el término de borde o potencial simpléctico. Este depende localmente de los campos ϕ , de sus variaciones $\delta\phi$ y de sus derivadas¹.

4.3 La corriente de Noether y el potencial de Noether

Sea $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ un campo vectorial generador de difeomorfismos. La cantidad $L \equiv \sqrt{-g} \mathcal{L}$ es la densidad escalar asociada a la D -forma Lagrangiana. Como L es covariante bajo difeomorfismos, pues depende del punto solo a través de ϕ , $g_{\mu\nu}$ y sus derivadas, se cumple $\delta_\xi L = \mathcal{L}_\xi L$. La fórmula mágica de Cartan (2.17) da entonces $\mathcal{L}_\xi L = d(i_\xi L)$, que en componentes se escribe $\delta_\xi L = \partial_\mu(\xi^\mu L)$.

Aquí $\delta_\xi \phi \equiv \mathcal{L}_\xi \phi$ es la variación de Lie inducida por ξ . Para un campo escalar, $\mathcal{L}_\xi \phi = \xi^\mu \partial_\mu \phi$. Para un campo tensorial general se agregan además términos con $\partial_\mu \xi^\nu$.

Combinando con la versión tensorial de (4.3) evaluada en $\delta\phi = \delta_\xi \phi$, se obtiene

$$\partial_\mu(\xi^\mu L) = E(\phi) \delta_\xi \phi + \partial_\mu \Theta^\mu(\phi, \delta_\xi \phi), \quad (4.4)$$

donde L , $E(\phi)$ y Θ^μ son densidades de peso 1, con $\sqrt{-g}$ absorbido en cada una.

Dado que $\delta_\xi \phi = \mathcal{L}_\xi \phi$ es lineal en ξ^μ y sus derivadas, el primer término del lado derecho puede descomponerse como

$$E(\phi) \delta_\xi \phi = \partial_\mu S_\xi^\mu + N_\xi, \quad (4.5)$$

¹El término de borde no está definido de manera única. En particular, la sustitución $\Theta^\mu \rightarrow \Theta^\mu + \nabla_\nu \alpha^{\mu\nu}(\phi, \delta\phi)$, con $\alpha^{\mu\nu} = -\alpha^{\nu\mu}$ antisimétrico, deja inalteradas las ecuaciones de movimiento, pues $\partial_\mu \nabla_\nu \alpha^{\mu\nu} \equiv 0$, dando lugar a una ambigüedad de borde. Esta ambigüedad puede en general afectar a la carga conservada $\mathcal{Q}_\xi$; sin embargo, bajo condiciones de frontera apropiadas, o cuando ξ genera una simetría exacta del sistema, su contribución se anula idénticamente.

donde S_ξ^μ reúne los términos que pueden escribirse como divergencias totales, mientras que N_ξ contiene las contribuciones restantes.

Por otra parte, la ecuación (4.4) debe satisfacerse para cualquier campo vectorial ξ^μ . Sustituyendo la descomposición (4.5) en dicha expresión se obtiene $\partial_\mu (\Theta^\mu - \xi^\mu L + S_\xi^\mu) = N_\xi$. Dado que el miembro izquierdo es, por construcción, una divergencia total para toda elección de ξ^μ , la consistencia de esta identidad exige que

$$N_\xi = 0 \quad (\text{off-shell}). \quad (4.6)$$

Esta condición constituye una manifestación del Segundo Teorema de Noether. Las ecuaciones $N_\xi = 0$ son las denominadas *identidades de Noether*: relaciones algebraicas entre las ecuaciones de movimiento que se satisfacen independientemente de que los campos obedezcan o no dichas ecuaciones. En Einstein-Hilbert, estas identidades se reducen a la identidad de Bianchi, $\nabla_\mu G^{\mu\nu} = 0$.

Una consecuencia inmediata de (4.6) es que la cantidad

$$J_\xi^\mu \equiv \Theta^\mu(\phi, \delta_\xi \phi) - \xi^\mu L + S_\xi^\mu, \quad (4.7)$$

satisface $\partial_\mu J_\xi^\mu = 0$ sin necesidad de imponer las ecuaciones de movimiento. Esta es la corriente de Noether asociada a los difeomorfismos generados por ξ .

Al ser una corriente conservada off-shell, el lema de Poincaré garantiza localmente la existencia de un tensor antisimétrico $\tilde{Q}_\xi^{\mu\nu} = -\tilde{Q}_\xi^{\nu\mu}$, denominado potencial de Noether, tal que

$$J_\xi^\mu = \partial_\nu \tilde{Q}_\xi^{\mu\nu}. \quad (4.8)$$

Para la acción de Einstein-Hilbert- Λ , un cálculo directo (presentado en el Apéndice A) conduce a

$$\tilde{Q}_\xi^{\mu\nu} = \kappa \sqrt{-g} \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]}, \quad \kappa = \frac{1}{8\pi}. \quad (4.9)$$

Sin embargo, el hecho de que J_ξ^μ pueda expresarse como la divergencia de un tensor antisimétrico implica que su conservación es una identidad geométrica, independiente de la dinámica del sistema. En consecuencia, la carga asociada al potencial de Noether puede definirse para cualquier configuración de campos, independientemente de que satisfaga o no las ecuaciones de movimiento. En este sentido, la corriente J_ξ^μ es *trivialmente conservada*, ya que su conservación no surge de la dinámica, sino únicamente de su estructura geométrica.

4.4 La estructura simpléctica y la densidad de carga

Algo que motiva en gran medida esta tesina es comprender el papel de la estructura simpléctica dentro del formalismo covariante del espacio de fases, la cual constituye el núcleo de toda esta maquinaria. Como se mostró en la sección anterior, la corriente de Noether J_ξ^μ asociada a los difeomorfismos es trivialmente conservada, ya que puede expresarse como la divergencia de un tensor antisimétrico. Por esta razón, las cargas construidas únicamente a partir del

potencial de Noether no permiten capturar toda la información física asociada a las simetrías de la teoría.

Esta limitación motiva la búsqueda de una estructura que permita caracterizar adecuadamente las cantidades conservadas.

4.4.1 Corriente presimpléctica

La salida al problema de la trivialidad es operar en $\tilde{\mathcal{F}}$. Aplicando δ al potencial simpléctico Θ^μ , se define la corriente presimpléctica:

$$\Omega^\mu(\phi; \delta_1\phi, \delta_2\phi) \equiv \delta_1\Theta^\mu(\phi, \delta_2\phi) - \delta_2\Theta^\mu(\phi, \delta_1\phi). \quad (4.10)$$

Esta cantidad es simultáneamente una $(D-1)$ -forma en M y una 2-forma antisimétrica sobre $\tilde{\mathcal{F}}$: para cada solución $\phi \in \tilde{\mathcal{F}}$, $\Omega^\mu(\phi; \cdot, \cdot)$ toma dos vectores tangentes $\delta_1\phi, \delta_2\phi \in T_\phi\tilde{\mathcal{F}}$ es decir, dos soluciones linealizadas de las ecuaciones de movimiento en torno a ϕ y devuelve la corriente Ω^μ . Integrando Ω^μ sobre una hipersuperficie de Cauchy Σ se obtiene la forma presimpléctica $\Omega(\phi; \delta_1\phi, \delta_2\phi) = \int_\Sigma \Omega^\mu d\Sigma_\mu$.

El prefijo *pre* indica que Ω puede ser *degenerada* sobre $\tilde{\mathcal{F}}$: las variaciones puramente gauge, generadas por un campo vectorial ξ , satisfacen

$$\Omega(\phi; \delta_\xi\phi, \delta\phi) = 0 \quad \text{para todo } \delta\phi \in T_\phi\tilde{\mathcal{F}}, \quad (4.11)$$

que es precisamente la condición de dirección de degeneración (2.10) particularizada a $\delta\phi = \delta_\xi\phi^2$. En otras palabras, las transformaciones gauge no tienen contenido físico desde el punto de vista simpléctico, y el espacio de fases covariante Γ se obtiene al identificar en $\tilde{\mathcal{F}}$ las soluciones que difieren por estas direcciones degeneradas.

Cuando las variaciones no conmutan, es decir, cuando $[\delta_1, \delta_2]\phi \neq 0$, debe añadirse un tercer término para que la definición sea válida en el caso más general:

$$\Omega^\mu(\phi; \delta_1\phi, \delta_2\phi) \equiv \delta_1\Theta^\mu(\phi, \delta_2\phi) - \delta_2\Theta^\mu(\phi, \delta_1\phi) - \Theta^\mu(\phi, [\delta_1, \delta_2]\phi). \quad (4.12)$$

Nótese que esta expresión es consistente con la interpretación de δ planteada al inicio del capítulo como una variación infinitesimal en el espacio de fases. El conmutador $[\delta_1, \delta_2]$ surge de manera natural al considerar variaciones generales que no necesariamente conmutan entre sí, y el término adicional garantiza que Ω conserve las propiedades geométricas esperadas de una 2-forma sobre $\tilde{\mathcal{F}}$.

En nuestro caso, $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ es un campo vectorial fijo sobre M , no un punto ni una dirección tangente de $\tilde{\mathcal{F}}$: genera un difeomorfismo del espacio-tiempo y no depende de la configuración de campos ϕ . Por lo tanto, ξ no varía cuando ϕ varía dentro del espacio de soluciones, es decir, $\delta\xi^\mu = 0$ para cualquier variación $\delta\phi \in T_\phi\tilde{\mathcal{F}}$. En consecuencia, $[\delta, \delta_\xi]\phi = 0$, y el tercer término se anula.

²Es decir, $\delta_\xi\phi$ no produce ningún efecto simpléctico medible frente a ninguna otra dirección tangente a $\tilde{\mathcal{F}}$.

4.4.2 De la corriente simpléctica a la densidad de carga

Evaluamos la corriente presimpléctica (4.12) en el par de variaciones $\delta_1\phi = \delta\phi$ y $\delta_2\phi = \delta_\xi\phi$, es decir, tomamos una variación arbitraria $\delta\phi$ como primer argumento y la variación inducida por el difeomorfismo, $\delta_\xi\phi$, como segundo argumento:

$$\Omega^\mu(\phi; \delta\phi, \delta_\xi\phi) = \delta\Theta^\mu(\phi, \delta_\xi\phi) - \delta_\xi\Theta^\mu(\phi, \delta\phi). \quad (4.13)$$

Procesando cada término, variando J_ξ^μ con δ y usando la derivada de Lie de Θ^μ , los términos $\xi^\mu\partial_\nu\Theta^\nu$ se cancelan y se llega a la expresión

$$\Omega^\mu = \xi^\mu E \delta\phi - \delta S_\xi^\mu + \partial_\nu \left(\delta \tilde{Q}_\xi^{\mu\nu} + 2\xi^{[\mu}\Theta^{\nu]} \right). \quad (4.14)$$

El cálculo explícito se recoge en el Apéndice A. *On-shell*, los dos primeros términos se anulan: $\xi^\mu E \delta\phi \approx 0$ porque los campos satisfacen las ecuaciones de movimiento, y $\delta S_\xi^\mu \approx 0$ porque además asumimos que $\delta\phi$ satisface las ecuaciones de movimiento linealizadas. La corriente simpléctica se reduce así a una forma exacta

$$\boxed{\Omega^\mu(\phi; \delta\phi, \delta_\xi\phi) \approx \partial_\nu k_\xi^{\mu\nu}(\phi, \delta\phi),} \quad (4.15)$$

donde definimos la densidad de carga superficial como

$$\boxed{k_\xi^{\mu\nu}(\phi, \delta\phi) \equiv \delta \tilde{Q}_\xi^{\mu\nu} + 2\xi^{[\mu}\Theta^{\nu]}(\phi, \delta\phi).} \quad (4.16)$$

La diferencia fundamental con la corriente de Noether es que la relación $J_\xi^\mu = \partial_\nu \tilde{Q}_\xi^{\mu\nu}$ constituye una identidad válida *off-shell*, cuya conservación $\partial_\mu J_\xi^\mu = 0$ es trivial. En contraste, la relación $\Omega^\mu \approx \partial_\nu k_\xi^{\mu\nu}$ solo es válida *on-shell*, es decir, cuando los campos satisfacen las ecuaciones de movimiento y las ecuaciones de movimiento linealizadas.

Por otra parte, $k_\xi^{\mu\nu}$ no coincide con el potencial de Noether $\tilde{Q}_\xi^{\mu\nu}$. Más bien, está dado por la variación de $\tilde{Q}_\xi^{\mu\nu}$ en el espacio de soluciones $\mathcal{F}$, junto con la corrección simpléctica $2\xi^{[\mu}\Theta^{\nu]}$. Es precisamente esta contribución adicional la que incorpora la información dinámica ausente en la construcción de Noether y confiere a $k_\xi^{\mu\nu}$ un contenido físico no trivial.

La expresión de $k_\xi^{\mu\nu}$ puede desarrollarse explícitamente para distintas teorías de gauge. Dado que el formalismo es covariante y válido en dimensión arbitraria D , basta reconstruir $k_\xi^{\mu\nu}$ a partir del lagrangiano correspondiente y de su variación. De este modo, pueden incorporarse campos adicionales, modificarse las dimensiones del espacio-tiempo o considerarse distintas teorías gravitatorias, siempre respetando las ecuaciones de campo pertinentes al sistema estudiado. Como ejemplo, en el Apéndice B se presenta la construcción explícita de $k_\xi^{\mu\nu}$ para la acción de Einstein–Hilbert–Maxwell.

4.5 Condiciones para la conservación de la carga

Una vez obtenida la relación $\Omega^\mu \approx \partial_\nu k_\xi^{\mu\nu}$, resulta natural analizar las condiciones que debe satisfacer el campo vectorial arbitrario ξ^μ para que esta expresión conduzca a una definición bien establecida de las cantidades conservadas buscadas.

4.5.1 Simetría exacta

Usaremos la misma letra ξ^μ tanto para los campos vectoriales que generan transformaciones de gauge arbitrarias como para aquellos que generan una simetría exacta de una solución particular. Estos últimos constituyen un subconjunto de los primeros: mientras que una transformación de gauge genérica solo debe corresponder a una dirección degenerada de Ω , sin que necesariamente se anule $\delta_\xi \phi$, una simetría exacta exige la condición más fuerte

$$\delta_\xi \phi = \mathcal{L}_\xi \phi = 0 \quad (4.17)$$

sobre la solución $\phi = (g_{\mu\nu}, \psi)$ considerada. Esta caracterización mediante la derivada de Lie es particular de la Relatividad General, donde el grupo de gauge de la teoría coincide con el grupo de difeomorfismos del espacio-tiempo; en teorías con grupos de gauge adicionales, la condición de simetría exacta debe extenderse para incluir también la anulación de las variaciones gauge asociadas a esos otros campos.

Cuando $\phi = g_{\mu\nu}$, sin campos de materia, la condición (4.17) se reduce a $\mathcal{L}_\xi g_{\mu\nu} = 0$, es decir, a la ecuación de Killing (2.33). En presencia de campos de materia ψ , la condición es más restrictiva, pues exige adicionalmente $\mathcal{L}_\xi \psi = 0$.

Para que $k_\xi^{\mu\nu}$ produzca una carga conservada se requiere que ξ^μ satisfaga (4.17). En tal caso, $\Omega^\mu \approx 0$ en (4.15), y combinando con (4.14) se obtiene la ley de conservación

$$\partial_\nu k_\xi^{\mu\nu} \approx 0. \quad (4.18)$$

La ley de conservación (4.18) se sustenta en dos condiciones independientes. Por un lado, si ξ^μ no satisface (4.17), Ω^μ en (4.15) no se anula, de modo que $\Omega^\mu \neq 0$ incluso cuando los campos satisfacen las ecuaciones de movimiento. Por otro lado, si los campos no obedecen las ecuaciones de movimiento, los términos presentes en (4.14) tampoco se anulan. La conservación de $k_\xi^{\mu\nu}$ exige entonces, simultáneamente, que ξ^μ genere una simetría de la solución y que los campos satisfagan las ecuaciones de movimiento. Es esta doble dependencia, de la simetría y de la dinámica, la que confiere a $k_\xi^{\mu\nu}$ un contenido físico no trivial.

4.5.2 Naturaleza cuasilocal e independencia de la superficie

El formalismo desarrollado permite construir una carga a partir de campos definidos localmente, sin apelar a ningún límite asintótico ni a un fondo de referencia. Esta propiedad, junto con la independencia respecto de la superficie de integración elegida, se sigue directamente de la identidad (4.19) y de la versión métrica del teorema de Stokes, (2.23), introducida en el Capítulo 2.

Cuando los campos satisfacen las ecuaciones de movimiento, la corriente de Noether J_ξ^μ se conserva, $\nabla_\mu J_\xi^\mu = 0$. Por el análogo tensorial del lema de Poincaré, existe entonces localmente un tensor antisimétrico $k_\xi^{\mu\nu} = k_\xi^{[\mu\nu]}$ tal que

$$J_\xi^\mu = \partial_\nu k_\xi^{\mu\nu}. \quad (4.19)$$

Esta relación es consistente con $\nabla_\mu J_\xi^\mu = 0$ de manera automática, ya que $\nabla_\mu \nabla_\nu k_\xi^{\mu\nu} = R_{\mu\nu} k_\xi^{\mu\nu} = 0$ para cualquier tensor antisimétrico, por la simetría del tensor de Ricci. Esta

cancelación es el análogo tensorial de la identidad $d^2 = 0$ del formalismo de formas diferenciales.

Cabe notar que $k_\xi^{\mu\nu}$, tal como se construye a partir de $\tilde{Q}_\xi^{\mu\nu}$ y Θ^μ , es una densidad tensorial de peso uno, no un tensor ordinario: ambos objetos llevan un factor $\sqrt{-g}$ explícito en su definición. Esto tiene una consecuencia práctica importante para la integración: al tratarse de una densidad, $k_\xi^{\mu\nu}$ se integra directamente con el elemento de coordenadas, sin necesidad de introducir por separado la raíz de la métrica inducida sobre la superficie de integración, tal como ya se estableció para densidades escalares en el Capítulo 2.

Elemento de superficie $dS_{\mu\nu}$

Sea $\mathcal{S} \subset M$ una superficie cerrada de codimensión dos, y sean $x^\mu = (x^a, y^A)$ coordenadas locales adaptadas a $\mathcal{S}$, con $a = 1, 2$ etiquetando las dos direcciones transversas a $\mathcal{S}$ y $A = 3, \dots, D$ las coordenadas intrínsecas de $\mathcal{S}$. Definimos el elemento de superficie mediante el símbolo de permutación $\varepsilon_{\mu\nu\alpha_3\cdots\alpha_D}$ (el símbolo totalmente antisimétrico de valores $\pm 1, 0$, no el tensor de Levi-Civita construido con la métrica),

$$dS_{\mu\nu} := \varepsilon_{\mu\nu\alpha_3\cdots\alpha_D} dx^{\alpha_3} \wedge \cdots \wedge dx^{\alpha_D}. \quad (4.20)$$

La orientación de $\mathcal{S}$ queda fijada al declarar positivo el orden de coordenadas (x^a, y^A) compatible con la orientación de M . Nótese que esta construcción es enteramente análoga a la que ya se introdujo en la definición general de la carga diferencial $\oint Q_\xi$, particularizada aquí a la superficie de integración $\mathcal{S}$. Como $\varepsilon_{\mu\nu\alpha_3\cdots\alpha_D}$ es un símbolo, no un tensor, no requiere de $\sqrt{-g}$ ni de la métrica inducida $\sqrt{\sigma}$ para definirse: la densidad correspondiente ya está incorporada en $k_\xi^{\mu\nu}$, de modo que la integral

$$H_\xi[\mathcal{S}] := \oint_{\mathcal{S}} k_\xi^{\mu\nu} dS_{\mu\nu} \quad (4.21)$$

se reduce, en coordenadas adaptadas, a una integral múltiple ordinaria sobre las coordenadas intrínsecas de $\mathcal{S}$. Por ejemplo, si $\mathcal{S}$ es una 2-esfera a x^1, x^2 fijos, con coordenadas intrínsecas y^3, y^4 ,

$$H_\xi[\mathcal{S}] = \oint_{\mathcal{S}} k_\xi^{x^1 x^2} dy^3 dy^4, \quad (4.22)$$

que es precisamente la forma en que se evaluará esta carga en la aplicación a la solución de Schwarzschild.

Como $H_\xi[\mathcal{S}]$ se construye integrando una cantidad local sobre $\mathcal{S}$, sin referencia a ninguna otra región del espacio-tiempo, se dice que es una carga cuasilocal³.

³Esto contrasta con enfoques en los que las cargas se obtienen únicamente en el límite $r \rightarrow \infty$ respecto de un fondo asintóticamente plano. El presente formalismo permite en cambio evaluar la carga sobre cualquier superficie cerrada conveniente, incluso en regiones interiores como el horizonte de un agujero negro.

Independencia cuasilocal de la carga

La independencia de $\mathcal{S}$ se establece mediante la siguiente proposición, cuya demostración completa, basada en una aplicación directa de (2.23) a una hipersuperficie de codimensión uno que conecta dos superficies $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$.

Proposición. Sea Σ una hipersuperficie compacta, orientable y no nula, de codimensión uno, cuya frontera está formada por dos superficies cerradas $\mathcal{S}$ y $\mathcal{S}'$, con $\partial\Sigma = \mathcal{S}' \cup (-\mathcal{S})$. Entonces

$$H_\xi[\mathcal{S}'] - H_\xi[\mathcal{S}] = \int_\Sigma J_\xi^\mu dS_\mu, \quad (4.23)$$

donde dS_μ es el elemento de superficie de codimensión uno (2.28) introducido en el Capítulo 2.

La idea de la demostración es análoga a la que se emplea para establecer la conservación de una corriente ordinaria: se construye a partir de $k_\xi^{\mu\nu}$ un campo vectorial tangente a Σ cuya divergencia reproduce J_ξ^μ proyectado sobre la normal a Σ , y se aplica directamente (2.23). La integral de frontera resultante se identifica, componente a componente en coordenadas adaptadas, con la diferencia $H_\xi[\mathcal{S}'] - H_\xi[\mathcal{S}]$.

De (4.23) se sigue de inmediato que $H_\xi[\mathcal{S}] = H_\xi[\mathcal{S}']$ siempre que J_ξ^μ se anule sobre Σ , en particular cuando ξ^μ genera una simetría exacta de los campos en esa región. En tal caso, H_ξ es verdaderamente conservada: su valor no depende de cuál superficie, entre todas las conectadas por una región de simetría exacta, se utilice para calcularla. El caso de una hipersuperficie nula, como un horizonte de Killing, requiere sustituir la normal unitaria por el generador nulo de la hipersuperficie, pero conduce a la misma conclusión.

En consecuencia, la carga puede evaluarse tanto sobre superficies a grandes distancias como sobre superficies en regiones internas del espacio-tiempo, incluso dentro del horizonte de eventos de un agujero negro, como se ilustra en los ejemplos posteriores. La única condición es que la superficie sea regular y encierre completamente las fuentes relevantes.

4.5.3 Carga diferencial e integrabilidad

Al integrar la densidad de carga sobre una superficie cerrada de codimensión dos $\mathcal{S}$, se obtiene la carga diferencial

$$\oint \mathcal{Q}_\xi(\phi, \delta\phi) = \oint_{\mathcal{S}} k_\xi^{\mu\nu} dS_{\mu\nu} = \oint_{\mathcal{S}} k_\xi(\phi, \delta\phi), \quad (4.24)$$

donde $dS_{\mu\nu}$ es el elemento de superficie introducido en la sección anterior. El símbolo $\oint$, en lugar de δ , enfatiza que esta cantidad constituye una 1-forma en el espacio de soluciones $\bar{\mathcal{T}}$ y que, en general, no puede identificarse con la variación de una función escalar bien definida. Para que exista una carga finita asociada a ξ^μ , es necesario imponer la condición de integrabilidad

$$\delta(\oint \mathcal{Q}_\xi) = 0, \quad (4.25)$$

es decir, que la 1-forma δQ_ξ sea cerrada en $\tilde{\mathcal{F}}$. Cuando esta condición se satisface, el lema de Poincaré⁴ garantiza localmente la existencia de una función escalar cuya variación coincide con δQ_ξ . En consecuencia, la integración de esta 1-forma a lo largo de cualquier camino γ en el espacio de soluciones define una carga finita

$$Q_\xi = \int_\gamma \delta Q_\xi, \quad (4.26)$$

independiente del camino elegido dentro de una misma clase homotópica. Cuando se satisfacen las condiciones de integrabilidad, la cantidad Q_ξ queda bien definida sobre el espacio de soluciones y constituye la carga conservada asociada al generador de simetría ξ . En función de la simetría considerada y de las condiciones de borde impuestas, esta carga puede identificarse con magnitudes físicas como la masa, el momento angular, la carga eléctrica u otras cantidades conservadas del sistema.

Esta será la expresión que utilizaremos de manera estándar a lo largo de la tesis para calcular las cantidades conservadas asociadas a las simetrías del sistema.

4.6 Generalización del formalismo

Hasta este punto se ha supuesto que el generador de simetrías corresponde a un campo de Killing fijo sobre el espacio de fases, por lo que $\delta\xi^\mu = 0$. Sin embargo, en algunas situaciones resulta conveniente introducir un nuevo generador obtenido mediante un reescalamiento del campo de Killing por una función definida sobre el espacio de fases. Esta construcción es de interés cuando la carga asociada al generador original no resulta integrable de manera inmediata, ya que el reescalamiento puede utilizarse para satisfacer la condición de integrabilidad. Como consecuencia, el nuevo generador deja de permanecer fijo sobre el espacio de fases, por lo que es necesario generalizar la definición de la densidad de carga superficial para preservar su linealidad.

La densidad de carga superficial es lineal respecto del generador de simetrías. Siguiendo el argumento de linealidad empleado por Barnich y Brandt [45], esta propiedad puede extenderse al caso del generador reescalado. En efecto, como las derivadas covariantes actúan únicamente sobre las coordenadas del espacio-tiempo, el factor de reescalamiento puede extraerse de todas ellas sin modificar las propiedades geométricas del generador.

Sea entonces

$$\tilde{\xi}^\mu = f \cdot \xi^\mu, \quad (4.27)$$

donde f es una función arbitraria sobre el espacio de fases. Como $\delta\xi^\mu = 0$ para un campo de

⁴El lema de Poincaré establece que toda forma diferencial cerrada, definida sobre una región contráctil, es exacta. Aquí se aplica sobre el espacio de soluciones $\tilde{\mathcal{F}}$: la condición $\delta(\delta Q_\xi) = 0$ dice que δQ_ξ es una 1-forma cerrada en $\tilde{\mathcal{F}}$, y el lema garantiza entonces que, localmente, existe una función Q_ξ tal que $\delta Q_\xi = \delta Q_\xi$. Esta es la misma idea usada anteriormente para garantizar la existencia de $k_\xi^{\mu\nu}$ a partir de $\nabla_\mu J_\xi^\mu = 0$, pero aplicada ahora sobre el espacio de fases en vez de sobre el espacio-tiempo M .

Killing, se obtiene

$$\delta \tilde{\xi}^\mu = \delta(f \cdot \xi^\mu) = \xi^\mu \cdot \delta f, \quad (4.28)$$

de modo que el generador reescalado ya no permanece fijo sobre el espacio de fases.

Para preservar la linealidad de la densidad de carga superficial respecto del generador de simetrías se impone la condición

$$k_{\tilde{\xi}}^{\mu\nu} = f \cdot k_{\xi}^{\mu\nu}. \quad (4.29)$$

Esta propiedad se obtiene al extender la definición de la densidad de carga superficial a la forma

$$k_{\tilde{\xi}}^{\mu\nu} = \delta Q_{\tilde{\xi}}^{\mu\nu} + 2\tilde{\xi}^{[\mu} \Theta^{\nu]} - Q_{\delta\tilde{\xi}}^{\mu\nu}, \quad (4.30)$$

donde el último término incorpora la dependencia del generador respecto del espacio de fases.

En consecuencia,

$$\int k_{\tilde{\xi}}^{\mu\nu} dS_{\mu\nu} = f \cdot \int k_{\xi}^{\mu\nu} dS_{\mu\nu} = f \cdot \oint \mathcal{Q}_{\xi}, \quad (4.31)$$

por lo que la carga asociada al generador reescalado se obtiene directamente a partir de la correspondiente al generador original.

4.7 Aplicación a Schwarzschild.

Para comprender mejor esta herramienta, aplicaremos el formalismo completo a la solución de Schwarzschild, la solución esféricamente simétrica y estática de las ecuaciones de Einstein en el vacío. Es el ejemplo pedagógico más instructivo porque sus cargas conservadas tienen una interpretación física inmediata⁵.

4.7.1 Geometría de Schwarzschild:

La métrica de Schwarzschild en coordenadas estándar (t, r, θ, ϕ) es:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad f(r) = 1 - \frac{2m}{r}. \quad (4.32)$$

4.7.2 Simetrías y símbolos de Christoffel

Vectores de Killing

Los vectores de Killing de Schwarzschild generan las isometrías de la métrica y son:

- **Simetría temporal:** $\xi_{(t)}^\mu = (1, 0, 0, 0)$, asociada a la invarianza bajo traslaciones en t .

⁵Cabe señalar que no siempre es posible asignar una interpretación física inmediata a las cargas conservadas. En teorías de gravedad modificada, por ejemplo, pueden aparecer cantidades conservadas asociadas a simetrías de soluciones con geometrías exóticas, cuyo significado físico se desconoce.

- **Simetría azimutal:** $\xi_{(\phi)}^\mu = (0, 0, 0, -1)^6$, asociada a la invarianza bajo rotaciones en ϕ .
- **Simetrías rotacionales:** la isometría esférica $SO(3)$ aporta dos vectores de Killing adicionales,

$$\xi_{(xz)}^\mu = (0, 0, -\sin \phi, -\cos \phi \cot \theta), \quad (4.33)$$

$$\xi_{(yz)}^\mu = (0, 0, \cos \phi, -\sin \phi \cot \theta), \quad (4.34)$$

que junto con $\xi_{(\phi)}^\mu$ cierran el álgebra $\mathfrak{so}(3)$. Dado que la métrica es esféricamente simétrica, toda geodésica puede restringirse sin pérdida de generalidad al plano ecuatorial $\theta = \pi/2$, en el cual $\xi_{(xz)}^\mu$ y $\xi_{(yz)}^\mu$ no aportan integrales de movimiento independientes de L . Por esta razón no se consideran en el análisis que sigue.

Cada vector de Killing genera una carga conservada. En lo que sigue, calcularemos explícitamente ambas cargas.

Símbolos de Christoffel relevantes

Con la notación $f' \equiv df/dr = 2m/r^2$, los símbolos de Christoffel no nulos necesarios para el cálculo son:

$$\Gamma_{tr}^t = \frac{f'}{2f}, \quad \Gamma_{tt}^r = \frac{ff'}{2}, \quad \Gamma_{rr}^r = -\frac{f'}{2f}, \quad \Gamma_{\theta r}^\theta = \Gamma_{\phi r}^\phi = \frac{1}{r}, \quad (4.35)$$

4.7.3 Construcción de la densidad de carga superficial

Para la acción de Einstein-Hilbert- Λ , $S = \frac{\kappa}{2} \int d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda)^7$, el potencial de Noether y la forma simpléctica se obtienen a partir de las expresiones presentadas en el Apéndice A

$$\tilde{Q}_\xi^{\mu\nu} = -\kappa \sqrt{-g} \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]}, \quad (4.36)$$

$$\Theta^\mu(g, \delta g) = \kappa \sqrt{-g} \nabla^{[\alpha} (g^{\mu]\beta} \delta g_{\alpha\beta}), \quad (4.37)$$

donde $\kappa = \frac{1}{8\pi}$. En la práctica, los cálculos explícitos se realizan evaluando directamente la expresión (4.16) término a término⁸.

⁶La elección de signo $\xi_{(\phi)}^\mu = (0, 0, 0, -1)$ en lugar de $(0, 0, 0, 1)$ es convencional. Si ξ^μ satisface la ecuación de Killing, también lo hace $-\xi^\mu$, por lo que ambas elecciones son igualmente válidas. Se adopta el signo negativo para que las cargas conservadas asociadas a la simetría azimutal sean positivas al aplicar el mismo formalismo a la solución de Kerr. En el caso de Schwarzschild este punto es irrelevante, pues el momento angular es nulo independientemente del signo elegido.

⁷La densidad de carga de superficie $k_\xi^{\mu\nu}$ no depende explícitamente de Λ . En el formalismo de espacio de fases covariante las cargas conservadas están asociadas a simetrías exactas de la solución, y la constante cosmológica no genera ningún vector de Killing. Existen propuestas en la literatura que asignan una carga termodinámica a Λ [44] tratándola como variable del par termodinámico (P, V) , pero estas construcciones requieren supuestos adicionales ajenos al formalismo simpléctico empleado aquí y quedan fuera del alcance de esta tesis.

⁸Para una derivación detallada véase el Apéndice A.

4.7.4 Simetría temporal y su carga asociada

Potencial de Noether $\tilde{Q}_{(t)}^{tr}$

La superficie de integración que nos permite hallar la carga conservada no la dicta el vector de Killing sino la topología del espaciotiempo: en un espaciotiempo asintóticamente plano, el borde natural de la hipersuperficie de Cauchy es siempre una S^2 a t y r constantes, por lo que la única componente de $\tilde{Q}^{\mu\nu}$ que contribuye a la integral es la (tr) . Lo que varía entre distintos vectores de Killing es el valor de $\tilde{Q}_{\xi}^{tr}$ al sustituir ξ^{μ} , no la superficie. De la ecuación (4.36):

$$\tilde{Q}_{(t)}^{tr} = -\kappa\sqrt{-g}\nabla^{[t}\xi^{r]} = -\frac{\kappa\sqrt{-g}}{2}(g^{tt}\nabla_t\xi^r - g^{rr}\nabla_r\xi^t). \quad (4.38)$$

Las derivadas covariantes de ξ^{μ} se calculan con los Christoffel:

$$\nabla_t\xi^r = \partial_t\xi^r + \Gamma_{tt}^r\xi^t = 0 + \frac{f f'}{2} \cdot 1 = \frac{f f'}{2}, \quad (4.39)$$

$$\nabla_r\xi^t = \partial_r\xi^t + \Gamma_{rt}^t\xi^t = 0 + \frac{f'}{2f} \cdot 1 = \frac{f'}{2f}, \quad (4.40)$$

Al sustituir las componentes $g^{tt} = -f^{-1}$ y $g^{rr} = f$, junto con $\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta$, se obtiene

$$\begin{aligned} \tilde{Q}_{(t)}^{tr} &= -\frac{\kappa\sqrt{-g}}{2} \left[(-f^{-1})\frac{f f'}{2} - f \cdot \frac{f'}{2f} \right] = -\frac{\kappa\sqrt{-g}}{2} \left[-\frac{f'}{2} - \frac{f'}{2} \right] = \frac{\kappa\sqrt{-g}}{2} f' \\ &= \frac{r^2 \sin \theta}{16\pi} \cdot \frac{2m}{r^2} = \frac{m \sin \theta}{8\pi}. \end{aligned} \quad (4.41)$$

Variando con respecto al parámetro de masa m :

$$\delta\tilde{Q}_{(t)}^{tr} = \frac{\sin \theta}{8\pi} \delta m, \quad (4.42)$$

Corrección simpléctica $2\xi^{[t}\Theta^{r]}$

El segundo término en (fórmula densidad de carga superficial) requiere calcular la componente Θ^r de la forma simpléctica potencial. Dado que $\xi_{(t)}^{\mu} = (1, 0, 0, 0)$, se tiene $2\xi^{[t}\Theta^{r]} = \Theta^r$. A partir de (4.37), expandiendo la derivada covariante:

$$\Theta^r = -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi} (\nabla_{\alpha}\delta g^{\alpha r} + g^{\alpha r}\nabla_{\alpha}\delta g). \quad (4.43)$$

Cuando se varía únicamente el parámetro de masa m , se tiene $\delta g = g^{\alpha\beta}\delta g_{\alpha\beta} = 0$ (la traza de la variación de la métrica inversa con respecto a m se anula para Schwarzschild). Expandiendo la derivada covariante $\nabla_{\alpha}\delta g^{\alpha r}$ con los símbolos de Christoffel de (4.35), y usando $\delta g^{rr} = -f^{-2}\delta f$, el cálculo explícito conduce a:

$$\begin{aligned} \Theta^r &= -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \left(\partial_r\delta g^{rr} + \left[\Gamma_{tr}^t + \Gamma_{\theta r}^{\theta} + \Gamma_{\phi r}^{\phi} + \Gamma_{rr}^r \right] \delta g^{rr} + \Gamma_{tt}^r \delta g^{tt} + \Gamma_{rr}^r \delta g^{rr} \right) \\ &= -\frac{\sqrt{-g}}{16\pi} \left(-\frac{2\delta m}{r^2} \right) = \frac{\sin \theta \delta m}{8\pi}. \end{aligned} \quad (4.44)$$

Densidad de carga

Sumando los resultados (4.42) y (4.44) en la ecuación (4.16):

$$k_{(t)}^{tr} = \delta \tilde{Q}_{(t)}^{tr} + 2\xi^{[t}\Theta^{r]} = \frac{\sin \theta \delta m}{8\pi} + \frac{\sin \theta \delta m}{8\pi} = \frac{\sin \theta \delta m}{4\pi}. \quad (4.45)$$

Integración sobre la 2-esfera

La integral de carga se evalúa sobre la 2-esfera $\mathcal{S}$, definida por t y r constantes, cuyo elemento de superficie es $dS_{tr} = d\theta d\phi$. Integrando la expresión (4.45) sobre $\mathcal{S}$ se obtiene

$$\oint \mathcal{Q}_{(t)} = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi k_{(t)}^{tr} d\theta d\phi = \frac{\delta m}{4\pi} \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = \frac{\delta m}{4\pi} \cdot 2\pi \cdot 2 = \delta m. \quad (4.46)$$

$$\boxed{\oint \mathcal{Q}_{(t)} = \delta m \implies \mathcal{Q}_{(t)} = m + C = M} \quad (4.47)$$

donde C corresponde a una constante de integración que surge al integrar la variación de la carga conservada en el espacio de fases covariante. Dado que esta constante no afecta a $\delta \mathcal{Q}$, puede absorberse en la definición del parámetro de la solución mediante $M = m + C$.

4.7.5 Simetría azimutal y su carga asociada

Repetimos ahora el mismo procedimiento para el vector de Killing azimutal $\xi_{(\phi)}^\mu = (0, 0, 0, -1)$.

Potencial de Noether $\tilde{Q}_{(\phi)}^{tr}$

De acuerdo con el análisis anterior, la componente que contribuye a la integración sobre la 2-esfera es nuevamente $\tilde{Q}_{(\phi)}^{tr}$. Utilizando la ecuación (4.36), se obtiene:

$$\tilde{Q}_{(\phi)}^{tr} = -\kappa \sqrt{-g} \nabla^{[t} \xi_{(\phi)}^{r]} = -\kappa \sqrt{-g} (g^{tt} \nabla_t \xi_{(\phi)}^r - g^{rr} \nabla_r \xi_{(\phi)}^t). \quad (4.48)$$

Calculamos las derivadas covariantes. Como $\xi_{(\phi)}^\mu = (0, 0, 0, -1)$, sólo la componente ϕ es no nula, de modo que

$$\nabla_t \xi_{(\phi)}^r = \Gamma_{t\mu}^r \xi_{(\phi)}^\mu = \Gamma_{t\phi}^r \xi_{(\phi)}^\phi = 0, \quad (4.49)$$

$$\nabla_r \xi_{(\phi)}^t = \Gamma_{r\mu}^t \xi_{(\phi)}^\mu = \Gamma_{r\phi}^t \xi_{(\phi)}^\phi = 0, \quad (4.50)$$

ya que los Christoffel $\Gamma_{t\phi}^r$ y $\Gamma_{r\phi}^t$ son nulos para la métrica de Schwarzschild (que es diagonal y no depende de ϕ). Por tanto:

$$\tilde{Q}_{(\phi)}^{tr} = 0. \quad (4.51)$$

Corrección simpléctica

Para $\xi_{(\phi)}^\mu = (0, 0, 0, -1)$, la combinación $2\xi^{[t}\Theta^{r]}$ requiere

$$2\xi^{[t}\Theta^{r]} = \xi^t\Theta^r - \xi^r\Theta^t = 0, \quad (4.52)$$

puesto que $\xi_{(\phi)}^t = 0$ y $\xi_{(\phi)}^r = 0$.

En cuanto a la componente Θ^r evaluada con la variación inducida por el vector de Killing azimutal, la variación de la métrica bajo una perturbación $\delta M = 0$ (estamos variando únicamente el parámetro de masa, que es el único parámetro libre de Schwarzschild) también se anula. En consecuencia:

$$2\xi^{[t}\Theta_{(\phi)}^{r]} = 0. \quad (4.53)$$

Carga nula

Sumando los términos:

$$k_{(\phi)}^{tr} = \delta\tilde{Q}_{(\phi)}^{tr} + 2\xi^{[t}\Theta_{(\phi)}^{r]} = 0. \quad (4.54)$$

Integrando sobre la 2-esfera:

$$\oint \mathcal{Q}_{(\phi)} = 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathcal{Q}_{(\phi)} = J = 0. \quad (4.55)$$

La carga conservada asociada a la simetría azimutal corresponde al momento angular J del agujero negro. El resultado $J = 0$ no implica la ausencia de dicha simetría; en efecto, ∂_ϕ es un vector de Killing del espacio tiempo de Schwarzschild. La anulación de la carga se debe a que esta solución es estática y no presenta rotación, por lo que su momento angular es nulo. En contraste, para la solución de Kerr, el mismo generador de simetrías azimutales da lugar a una carga conservada no nula, asociada al momento angular del agujero negro.

4.8 Aplicación a Reissner-Nordström.

Aplicamos ahora el formalismo completo a la solución de Reissner-Nordström, correspondiente a un agujero negro estático, esféricamente simétrico y con carga eléctrica en el marco de la teoría de Einstein-Maxwell (Apéndice B). A diferencia del caso de Schwarzschild, la presencia del campo electromagnético modifica la estructura del potencial de Noether y de la corriente simpléctica, e introduce además una simetría de gauge cuya carga conservada corresponde a la carga eléctrica del sistema.

4.8.1 Geometría de Reissner-Nordström

La métrica de Reissner-Nordström en coordenadas estándar (t, r, θ, ϕ) es:

$$ds^2 = -f(r) dt^2 + \frac{1}{f(r)} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\phi^2), \quad f(r) = 1 - \frac{2M}{r} + \frac{q^2}{4\pi r^2}, \quad (4.56)$$

Las componentes no nulas de la métrica y de su inversa mantienen la misma estructura que en (4.32), reemplazando la función métrica por la expresión anterior. Además, el determinante de la métrica permanece dado por $\sqrt{-g} = r^2 \sin \theta$.

El campo electromagnético es:

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu, \quad A_\mu dx^\mu = -\frac{q}{4\pi r} dt, \quad (4.57)$$

de modo que la única componente no nula de $F_{\mu\nu}$ es

$$F_{tr} = -F_{rt} = -\frac{q}{4\pi r^2}. \quad (4.58)$$

4.8.2 Simetrías y vectores de Killing

Además de las simetrías espaciotemporales heredadas de Schwarzschild, la teoría de Einstein-Maxwell posee una simetría de gauge asociada al potencial electromagnético. Para mantener invariante el potencial electromagnético bajo la acción combinada de la simetría temporal y una transformación de gauge se introduce un compensador en el gauge

- **Simetría temporal:** $\xi_{(t)}^\mu = (1, 0, 0, 0)$, con compensador de gauge $\lambda_{(t)} = -\xi^t A_t = \frac{q}{4\pi r}$.
- **Simetría azimutal:** $\xi_{(\phi)}^\mu = (0, 0, 0, -1)$, con $\lambda_{(\phi)} = -\xi^\phi A_\phi = 0$.
- **Simetría de gauge:** $\xi_{(e)}^\mu = (0, 0, 0, 0)$, con $\lambda_{(e)} = 1$. En este caso no existe una transformación asociada al sector gravitacional, pero la transformación de gauge $A_\mu \rightarrow A_\mu + \partial_\mu \lambda$ con $\lambda = \text{cte}$ permite construir la carga eléctrica conservada.

El cálculo de las simetrías $\xi_{(t)}^\mu$ y $\xi_{(\phi)}^\mu$ es análogo al de Schwarzschild; el interés de Reissner-Nordström reside en la simetría de gauge, que produce una carga conservada de naturaleza distinta. De manera resumida, para $\xi_{(t)}^\mu = (1, 0, 0, 0)$ se obtiene:

$$\delta \tilde{Q}_{(t)}^{tr} = \sin \theta \left(\frac{2\pi r \delta m + q \delta q}{16\pi^2 r} \right), \quad (4.59)$$

$$\Theta^{tr} = \sin \theta \left(\frac{2\pi r \delta m - q \delta q}{16\pi^2 r} \right), \quad (4.60)$$

$$k_{(t)}^{tr} = \delta \tilde{Q}_{(t)}^{tr} + 2\xi^{[t} \Theta_{(t)}^{r]} = \frac{\sin \theta \delta m}{4\pi}. \quad (4.61)$$

Integrando:

$$\boxed{\oint \mathcal{Q}_{(t)} = \delta m \implies \mathcal{Q}_{(t)} = m + C = M.} \quad (4.62)$$

4.8.3 Simetría de gauge y carga eléctrica

La simetría de gauge electromagnética está generada por $\xi_{(e)}^\mu = (0, 0, 0, 0)$ con parámetro $\lambda_{(e)} = 1$.

Potencial de Noether $\tilde{Q}_{(e)}^{tr}$

La contribución gravitacional se anula cuando $\xi_{(e)}^\mu = 0$. La contribución electromagnética queda dada por:

$$\tilde{Q}_{(e)}^{tr} = \sqrt{-g} \lambda_{(e)} F^{tr} = r^2 \sin \theta \cdot \frac{q}{4\pi r^2} = \frac{q \sin \theta}{4\pi}. \quad (4.63)$$

Variando respecto a q :

$$\delta \tilde{Q}_{(e)}^{tr} = \frac{\sin \theta \delta q}{4\pi}. \quad (4.64)$$

Como $\xi_{(e)}^\mu = 0$, el término $2\xi_{(e)}^{[t} \Theta_{(e)}^{r]}$ se anula idénticamente, de modo que:

$$k_{(e)}^{tr} = \delta \tilde{Q}_{(e)}^{tr} = \frac{\sin \theta \delta q}{4\pi}. \quad (4.65)$$

Integrando sobre la 2-esfera:

$$\oint \mathcal{Q}_{(e)} = \delta q \implies \mathcal{Q}_{(e)} = q + C = Q. \quad (4.66)$$

donde C corresponde a una constante de integración que surge al reconstruir la carga conservada a partir de su variación en el espacio de fases covariante. De manera análoga al caso de Schwarzschild, esta constante puede absorberse en la definición del parámetro conservado mediante $Q = q + C$.

La carga conservada asociada a la simetría de gauge es la carga eléctrica Q . Este resultado ilustra cómo el formalismo simpléctico unifica en un solo procedimiento cargas de distinta naturaleza: la masa, originada en la simetría temporal, y la carga eléctrica, originada en la simetría interna de gauge.

Desarrollos recientes y problemas abiertos

5.1 Kerr–Taub–NUT

La solución de Kerr–Taub–NUT generaliza la métrica de Kerr al incluir el parámetro de NUT n , introducido originalmente por Newman, Unti y Tamburino [46]. Desde un punto de vista físico, n puede interpretarse como una masa gravitomagnética, análoga al monopolo magnético en electrodinámica [47]. Si bien esta solución satisface exactamente las ecuaciones de Einstein en el vacío, presenta propiedades globales que la distinguen de manera fundamental de las soluciones de Kerr y Kerr–Newman. Entre ellas destaca la aparición de singularidades de coordenadas sobre el eje de simetría, cuya eliminación requiere una descripción mediante múltiples parches de coordenadas.

El problema central reside en que $(\nabla t)^2$ deja de estar bien definido sobre el eje polar. Más aún, Misner señala: *Thus $(\nabla t)^2$ becomes infinite at $\theta = \pi$, so either the metric or the t coordinate must be considered singular there* [47]. Los invariantes de curvatura, por su parte, permanecen regulares sobre dicho eje, lo que descarta que se trate de una singularidad de curvatura propiamente dicha. Sin embargo, la regularidad de los invariantes de curvatura no basta por sí sola para garantizar que la geometría esté libre de patologías físicas: en el caso de Taub–NUT, el eje polar está asociado además a la aparición de curvas cerradas de tipo tiempo y a la llamada *cuerda de Misner*, cuya naturaleza genuina o removible depende de la periodicidad impuesta sobre la coordenada temporal t .

Esta singularidad da origen a las denominadas *cuerdas de Misner*, esto es, singularidades de coordenadas que se extienden a lo largo del eje de simetría del espacio-tiempo. Misner demuestra además que no existe un único sistema de coordenadas globalmente regular para describir esta geometría. En su lugar, es necesario cubrir el espacio-tiempo mediante dos parches de coordenadas, de forma completamente análoga a la descripción del potencial vectorial de un monopolo magnético de Dirac. En la región de solapamiento de ambos parches, las coordenadas temporales difieren por una transformación proporcional a la coordenada azimutal, lo que conduce a la identificación periódica del tiempo.

Esta estructura global distingue a los espacio-tiempos NUT de soluciones como Kerr–Newman y tiene consecuencias importantes para su descripción termodinámica. En particular, la pre-

sencia de las cuerdas de Misner dificulta la obtención de la entropía, la temperatura y la velocidad angular mediante los procedimientos geométricos habituales, ya que estas cantidades dejan de estar determinadas únicamente por la geometría del horizonte.

En las secciones anteriores se desarrolló el formalismo general de cargas conservadas y se aplicó a soluciones cuyas cantidades termodinámicas son bien conocidas. La solución Kerr–Taub–NUT constituye un escenario más sutil debido a la presencia de las cuerdas de Misner, por lo que resulta un caso de prueba natural para analizar el alcance del formalismo desarrollado.

5.1.1 La métrica de Kerr–Taub–NUT

La métrica del agujero negro de Kerr–Taub–NUT en coordenadas de Boyer–Lindquist generalizadas está dada por

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{\Sigma} \left[dt + (2n \cos \theta + 2Cn - a \sin^2 \theta) d\phi \right]^2 + \frac{\Sigma}{\Delta} dr^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\Sigma} \left[a dt - (r^2 + a^2 + n^2 - 2anC) d\phi \right]^2 + \Sigma d\theta^2, \quad (5.1)$$

donde las funciones métricas se definen como

$$\Sigma = r^2 + (n + a \cos \theta)^2, \quad (5.2)$$

$$\Delta = r^2 + a^2 - 2mr - n^2. \quad (5.3)$$

El parámetro discreto C , introducido por primera vez en [48], ofrece cierta libertad en la distribución de las cuerdas de Misner, sin eliminarlas. La solución con $C = 0$ es un caso particular del espacio-tiempo de vacío de Demiański–Newman [49]. A lo largo de este capítulo mantendremos C arbitrario, de modo que los resultados sean válidos para cualquier configuración de cuerdas.

Aquí m es la constante de integración asociada a la masa, n es el parámetro de NUT y a es el parámetro de rotación. El parámetro discreto $C \in \{0, \pm 1\}$ codifica la configuración de las cuerdas de Misner sobre el eje:

- $C = +1$: la cuerda se ubica sobre el semieje norte ($\theta = 0$); el semieje sur ($\theta = \pi$) es regular.
- $C = -1$: ocurre la situación opuesta; el semieje norte es regular y la cuerda se sitúa en $\theta = \pi$.
- $C = 0$: aparecen dos cuerdas distribuidas simétricamente respecto al plano ecuatorial, una en cada polo.

Nótese que en el límite $n \rightarrow 0$ la métrica (5.1) se reduce a la métrica de Kerr, mientras que en el límite $a \rightarrow 0$ se obtiene la métrica de Taub–NUT. En el límite simultáneo $a, n \rightarrow 0$ se recupera la métrica de Schwarzschild.

5.1.2 Estructura de horizontes

Aunque las cantidades termodinámicas de la solución no quedan determinadas únicamente por la geometría del horizonte, este sigue proporcionando información geométrica relevante. En particular, los horizontes de Killing de la solución están determinados por las raíces de la ecuación $\Delta = 0$, es decir,

$$r_{\pm} = m \pm \sqrt{m^2 - a^2 + n^2}. \quad (5.4)$$

A diferencia del caso de Kerr, el término n^2 en el discriminante favorece la existencia de horizontes. En consecuencia, incluso para $|a| > m$ la solución puede admitir horizontes reales siempre que el parámetro de NUT sea suficientemente grande. El horizonte exterior se encuentra en $r = r_+$, mientras que el horizonte interior está ubicado en $r = r_-$.

La entropía del agujero negro, obtenida a partir de la ley de área de Bekenstein–Hawking,

$$S = \frac{A_H}{4} = 2\pi \left[m \left(m + \sqrt{m^2 - a^2 + n^2} \right) + n^2 \right], \quad (5.5)$$

depende explícitamente del parámetro de NUT a través del área del horizonte.

Por su parte, la temperatura de Hawking, definida en términos de la gravedad superficial, está dada por

$$T = \frac{\kappa}{2\pi} = \frac{\sqrt{m^2 - a^2 + n^2}}{4\pi \left[m \left(m + \sqrt{m^2 - a^2 + n^2} \right) + n^2 \right]}. \quad (5.6)$$

Finalmente, la velocidad angular del horizonte, definida como la velocidad angular de un observador estacionario evaluada sobre el horizonte, resulta

$$\Omega = - \frac{g_{t\phi}}{g_{\phi\phi}} \Big|_{r=r_+} = \frac{a}{2 \left[m \left(m + \sqrt{m^2 - a^2 + n^2} \right) + n(n - aC) \right]}. \quad (5.7)$$

En el límite $n \rightarrow 0$ se recuperan las expresiones correspondientes a la solución de Kerr. Cabe destacar que, aunque la solución se considera para un valor arbitrario del parámetro C , únicamente la velocidad angular depende explícitamente de él; tanto la entropía como la temperatura son independientes de este parámetro.

5.1.3 Cargas conservadas y cantidades termodinámicas

Siguiendo el procedimiento desarrollado en [50], se determinaron las cantidades S , T y Ω a partir del sistema de ecuaciones diferenciales parciales que se obtiene al imponer la primera ley. La variación de la entropía toma la forma

$$\delta S = \frac{1 - \Omega(a - 3Cn)}{T} \delta M - \frac{\Omega M}{T} \delta a + \frac{3\Omega MC}{T} \delta n, \quad (5.8)$$

de donde se identifican las derivadas parciales

$$\frac{\partial S}{\partial M} = \frac{1 - \Omega(a - 3Cn)}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial a} = -\frac{\Omega M}{T}, \quad \frac{\partial S}{\partial n} = \frac{3\Omega MC}{T}, \quad (5.9)$$

las cuales satisfacen la condición de integrabilidad

$$\frac{\partial S}{\partial n} + 3C \frac{\partial S}{\partial a} = 0. \quad (5.10)$$

El análisis de las simetrías de la solución Kerr–Taub–NUT revela la existencia de dos cargas conservadas. Asociada a la simetría de traslación temporal se obtiene

$$\oint \mathcal{Q}_{(\partial_t)} = \delta m \implies \mathcal{Q}_{(t)} = M, \quad (5.11)$$

mientras que la simetría de rotación azimutal produce

$$\oint \mathcal{Q}_{(\partial_\phi)} = \delta(m(a - 3Cn)) \implies \mathcal{Q}_{(\phi)} = J = m(a - 3Cn). \quad (5.12)$$

Estas cargas se calculan mediante el formalismo de espacio de fases covariante. Sin embargo, la presencia de defectos cónicos en los polos norte y sur de la solución requiere incorporar contribuciones adicionales al cálculo de la carga. La expresión completa para la carga asociada a la simetría temporal es

$$\oint k_{(t)}^{tr} dS_{tr} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^\pi k_{(t)}^{tr} d\theta + \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} dr \int_0^{2\pi} k_{(t)}^{\theta t} d\phi \Big|_{\theta=0}}_{\text{defecto norte}} - \underbrace{\int_{r_1}^{r_2} dr \int_0^{2\pi} k_{(t)}^{\theta t} d\phi \Big|_{\theta=\pi}}_{\text{defecto sur}} = \oint \mathcal{Q}_{(t)}. \quad (5.13)$$

Una vez determinadas las cargas conservadas asociadas a las simetrías de la solución, es posible investigar si admiten una interpretación termodinámica a través de una primera ley. En este trabajo se consideran las cargas conservadas obtenidas mediante el formalismo de espacio de fases covariante como las únicas variables extensivas del sistema. Bajo esta hipótesis, se postula una primera ley de la forma

$$\delta M = T \delta S + \Omega \delta J. \quad (5.14)$$

Para determinar las cantidades termodinámicas, se resuelve el sistema de ecuaciones diferenciales parciales imponiendo la condición inicial $S(m, 0, a) = 2\pi m (m + \sqrt{m^2 - a^2})$, que corresponde a recuperar el resultado conocido para Kerr. Se obtienen así

$$S(m, n, a) = 2\pi m \left(m + \sqrt{m^2 - (a - 3Cn)^2} \right), \quad (5.15)$$

$$T(m, n, a) = \frac{\sqrt{m^2 - (a - 3Cn)^2}}{4\pi m \left(m + \sqrt{m^2 - (a - 3Cn)^2} \right)}, \quad (5.16)$$

$$\Omega(m, n, a) = \frac{a - 3Cn}{2m \left(m + \sqrt{m^2 - (a - 3Cn)^2} \right)}. \quad (5.17)$$

Un aspecto destacable de estas expresiones es que las tres cantidades termodinámicas dependen de la combinación $a - 3Cn$. En particular, al imponer $C = 0$, correspondiente al caso con dos cuerdas de Misner, se recuperan las expresiones termodinámicas de la solución de

Kerr. Este resultado indica que, dentro de la propuesta obtenida a partir de la primera ley, el efecto del parámetro de Misner desaparece cuando $C = 0$.

Sin embargo, este resultado no coincide con el obtenido mediante argumentos geométricos independientes, para los cuales únicamente la velocidad angular Ω depende del parámetro C (5.7). Esta diferencia resulta coherente con la discusión presentada al comienzo del capítulo. En presencia de cuerdas de Misner, las cantidades termodinámicas dejan de estar determinadas únicamente por la geometría del horizonte, por lo que un procedimiento basado exclusivamente en propiedades geométricas no tiene por qué conducir a los mismos resultados que el formalismo de cargas conservadas. En consecuencia, ambos enfoques dan lugar a propuestas termodinámicas diferentes para la solución Kerr–Taub–NUT.

Como una verificación adicional de consistencia, las cantidades obtenidas al resolver el sistema de ecuaciones diferenciales se sustituyen en la relación de Christodoulou–Ruffini, identificando la entropía $S(m, n, a)$ con un cuarto del área del horizonte, es decir, $S = A/4$. Se verifica entonces que la relación (3.55) se satisface exactamente. Aunque esta comprobación no constituye una demostración de la validez de la propuesta, proporciona un criterio adicional de consistencia para las cantidades termodinámicas obtenidas a partir de la primera ley.

Este resultado contrasta con la propuesta basada en argumentos geométricos, cuyas cantidades termodinámicas no satisfacen la relación de Christodoulou–Ruffini. En este sentido, los resultados obtenidos son consistentes con la discusión presentada al inicio de la sección, donde se señaló que, en presencia de cuerdas de Misner, la geometría del horizonte no es suficiente para determinar de manera unívoca la termodinámica de la solución Kerr–Taub–NUT.

5.2 Schwarzschild acelerado (C-métrica)

La C-métrica constituye una de las soluciones exactas más importantes de las ecuaciones de Einstein que describen agujeros negros acelerados. Aunque la solución era conocida desde principios del siglo XX, fue el trabajo de Kinnersley y Walker [51] el que proporcionó su interpretación física como un agujero negro sometido a una aceleración uniforme. Desde entonces, la C-métrica ha sido ampliamente utilizada para estudiar los efectos de la aceleración sobre la estructura causal del espacio-tiempo, la presencia de horizontes de aceleración y los procesos radiativos asociados a este tipo de soluciones.

La C-métrica describe un agujero negro sometido a una aceleración uniforme, donde dicha aceleración es sostenida por la presencia de defectos cónicos a lo largo del eje polar de la solución. Estos defectos pueden interpretarse físicamente como cuerdas cósmicas que ejercen una tensión sobre el agujero negro, introduciendo una asimetría entre los polos norte y sur del espacio-tiempo. Es precisamente esta asimetría la que proporciona la fuerza responsable de la aceleración neta del agujero negro.

Desde el punto de vista de la relatividad general, la C-métrica es una solución exacta de las ecuaciones de Einstein en vacío, por lo que toda la información sobre la masa del agujero negro y su aceleración queda codificada en la geometría del espacio-tiempo. En particular, el parámetro m caracteriza la masa del agujero negro, mientras que el parámetro A determina su aceleración uniforme, siendo ambos parámetros, en principio, independientes.

5.2.1 Métrica de Schwarzschild acelerado

La métrica del agujero negro de Schwarzschild acelerado, expresada en coordenadas de Boyer-Lindquist $\{t, r, \theta, \phi\}$ adaptadas a la C-métrica [52], es

$$ds^2 = \frac{1}{(1 + Ar \cos \theta)^2} \left[- \left(1 - \frac{2m}{r}\right) (1 - A^2 r^2) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \frac{2m}{r}\right) (1 - A^2 r^2)} \right. \\ \left. + \frac{r^2 d\theta^2}{(1 + 2mA \cos \theta)} + r^2 (1 + 2mA \cos \theta) \sin^2 \theta d\phi^2 \right] \quad (5.18)$$

donde el parámetro $m > 0$ corresponde a la masa del agujero negro y $A \geq 0$ es el parámetro de aceleración. El factor conformal $(1 + Ar \cos \theta)^{-2}$, ausente en la solución de Schwarzschild clásico, es el responsable de la estructura causal característica de la C-métrica y codifica el efecto de la aceleración sobre la geometría global de la solución.

5.2.2 Estructura de horizontes

La estructura de horizontes queda determinada por los ceros del componente radial de la métrica. La expresión $(1 - 2m/r)(1 - A^2 r^2)$ se anula en dos valores distintos de r : el primero en $r_{\text{Sch}} = 2m$, que corresponde al horizonte de eventos del agujero negro, y el segundo en $r_R = 1/A$, que corresponde al horizonte de aceleración. Este último es análogo al horizonte de Rindler en relatividad especial: marca el límite más allá del cual un observador que se mueve con aceleración uniforme A pierde contacto causal con el resto del espacio-tiempo.

Para que la solución describa un agujero negro acelerado en un sentido físicamente coherente, el horizonte de eventos debe estar contenido dentro del horizonte de aceleración, es decir, se requiere $r_{\text{Sch}} < r_R$, lo que se traduce en la condición:

$$2mA < 1. \quad (5.19)$$

Si esta condición se violara, el horizonte de eventos quedaría más allá del horizonte de aceleración, de modo que el propio observador acelerado no podría mantener contacto causal con el agujero negro, invalidando la interpretación de la solución como agujero negro acelerado. En el límite $2mA \rightarrow 1$ ambos horizontes coinciden y la solución degenera, mientras que en el límite $A \rightarrow 0$ el horizonte de aceleración se desplaza hacia el infinito, $r_R \rightarrow \infty$, y se recupera la métrica de Schwarzschild sin horizonte de aceleración.

5.2.3 Carga conservada asociada a la simetría temporal

La presencia de defectos cónicos sobre los ejes de simetría hace que el cálculo de las cargas conservadas requiera incorporar las contribuciones provenientes de dichos defectos. Por este motivo, la carga se obtiene utilizando la misma superficie de integración introducida en la ecuación (5.13).

5.2. SCHWARZSCHILD ACELERADO (C-MÉTRICA)

Entre los generadores de simetría de la solución, únicamente el generador de traslaciones temporales produce una variación de carga no trivial,

$$\xi_{(t)}^\mu = \partial_t = (1, 0, 0, 0) \rightarrow \delta \mathcal{Q}_{\partial t} = -\frac{m\delta A}{A} \quad (5.20)$$

Dado que esta 1-forma no es integrable sobre el espacio de fases, resulta necesario recurrir a la generalización del formalismo presentada en la Sección 4.6

$$f(m, A) \xi_{(t)}^\mu = (f(m, A), 0, 0, 0) \rightarrow \delta \mathcal{Q}_{f(m, A)\partial t} = f(m, A) \cdot \delta \mathcal{Q}_{\partial t} \quad (5.21)$$

Una condición necesaria y suficiente para la integrabilidad es

$$\delta^2 \mathcal{Q}_{\partial t} = 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \delta \delta \mathcal{Q}_{\partial t} = 0. \quad (5.22)$$

Con este propósito, se introduce un factor de reescalamiento $f = f(m, A)$ y se considera el generador $\tilde{\xi}^\mu = f(m, A) \cdot \xi^\mu$, de manera que la carga asociada resulte integrable. La condición de integrabilidad se escribe entonces como

$$\delta \delta \mathcal{Q}_{\tilde{\xi}} = \delta(f \cdot \delta \mathcal{Q}_\xi) = \delta f \cdot \delta \mathcal{Q}_\xi + f \cdot \delta \delta \mathcal{Q}_\xi = 0. \quad (5.23)$$

Al sustituir la expresión obtenida para $\delta \mathcal{Q}_\xi$ en la condición anterior se obtiene

$$-\delta f(m, A) \frac{m \delta A}{A} - f(m, A) \frac{\delta m \delta A}{A} = 0, \quad (5.24)$$

$$\frac{\delta f}{f} = -\frac{\delta m}{m}, \quad (5.25)$$

cuya solución es

$$f(m, A) = \frac{g(A)}{m}, \quad (5.26)$$

La integración determina completamente la dependencia respecto de la masa, mientras que deja indeterminada una función arbitraria de la aceleración, denotada por $g(A)$.

En consecuencia,

$$\delta \mathcal{Q}_{\tilde{\xi}} = -\frac{g(A)}{m} \frac{m \delta A}{A} = -g(A) \frac{\delta A}{A}. \quad (5.27)$$

La función $g(A)$ no queda determinada por la condición de integrabilidad. Para fijarla se impone adicionalmente que el factor de reescalamiento sea adimensional, de modo que la redefinición del generador preserve las dimensiones físicas de la carga. En unidades naturales, la aceleración tiene dimensiones $[A] = L^{-1}$, mientras que la masa satisface $[m] = L$. Por lo tanto, $g(A)$ debe tener dimensiones de longitud, lo que fija

$$g(A) = \frac{1}{A}. \quad (5.28)$$

Finalmente, la variación de la carga toma la forma

$$\delta \mathcal{Q}_{\tilde{\xi}} = -\frac{\delta A}{A^2} = \delta(A^{-1}), \quad (5.29)$$

5.2. SCHWARZSCHILD ACELERADO (C-MÉTRICA)

Por lo tanto, la carga asociada a la simetría temporal reescalada viene dada por

$$\mathcal{Q}_{\tilde{\xi}} = \frac{1}{A}. \quad (5.30)$$

Además, la carga obtenida posee dimensiones de longitud, en concordancia con las dimensiones de la masa en la solución de Schwarzschild.

Este resultado presenta una característica notable. La carga obtenida está asociada a la simetría temporal, la cual, en el caso del agujero negro de Schwarzschild, se identifica con la masa del sistema. Sin embargo, para la solución de Schwarzschild acelerado la carga conservada depende únicamente del parámetro de aceleración A y no contiene una contribución explícita del parámetro de masa m .

En consecuencia, la masa característica del agujero negro de Schwarzschild deja de aparecer como la carga conservada asociada a la simetría temporal. En su lugar, la cantidad conservada queda completamente determinada por la aceleración del agujero negro, por lo que resulta natural interpretarla como una energía asociada a dicha aceleración.

Es importante destacar que la existencia de esta carga está intrínsecamente ligada a la presencia del agujero negro, es decir, a un parámetro de masa distinto de cero. En efecto, al tomar el límite $m = 0$, la solución se reduce a la métrica de Rindler en coordenadas esféricas,

$$ds^2 = \frac{A^2 r^2 - 1}{(1 + Ar \cos \theta)^2} dt^2 - \frac{dr^2}{(A^2 r^2 - 1)(1 + Ar \cos \theta)^2} - \frac{r^2}{(1 + Ar \cos \theta)^2} d\theta^2 - \frac{r^2 \sin^2 \theta}{(1 + Ar \cos \theta)^2} d\phi^2. \quad (5.31)$$

la cual describe el espacio-tiempo de Minkowski en un sistema de referencia uniformemente acelerado.

5.2.4 Posibles interpretaciones

El resultado anterior plantea una aparente tensión entre la interpretación habitual de la carga asociada al generador temporal y la dependencia obtenida mediante el formalismo de espacio de fases covariante. A continuación se discuten dos posibles interpretaciones de este comportamiento.

Una posible dirección para clarificar la aparente tensión en la interpretación de la carga conservada $\mathcal{Q} \sim 1/A$ consiste en analizar con mayor detalle la contribución de los defectos geométricos que inducen la aceleración del sistema. En la C-métrica de Schwarzschild, la aceleración queda codificada en la asimetría entre los déficits cónicos presentes en cada polo de la solución, cada uno de los cuales puede asociarse a una tensión efectiva que, considerada de manera aislada, presenta divergencias características. Esto sugiere que la carga global resulta de una combinación no trivial de dichos aportes, lo que es consistente con la dependencia $\mathcal{Q} \sim 1/A$ obtenida en el formalismo de espacio de fases covariante.

Primera interpretación.

La carga $\mathcal{Q}$ no debe identificarse con la masa clásica de un agujero negro de Schwarzschild, M_{Sch} , sino que representa una carga conservada asociada a la simetría temporal del sistema completo. En este contexto, dicha carga corresponde a la solución geométrica global, en la que el agujero negro y los defectos cónicos responsables de su aceleración forman una única configuración física. En este sentido, $\mathcal{Q}$ y M_{Sch} son objetos cualitativamente distintos y no deberían coincidir.

Segunda interpretación.

Al considerar la estructura del espacio de parámetros de la solución, la C-métrica de Schwarzschild se describe mediante dos parámetros geométricos independientes, m y A , que caracterizan respectivamente la masa del agujero negro y su aceleración. Para que la primera ley $\delta\mathcal{Q} = T\delta S$ sea una identidad válida en todo el espacio de parámetros, debe satisfacerse de manera independiente para variaciones en cada una de estas dos direcciones. Sin embargo, dado que $\mathcal{Q} \sim 1/A$ no exhibe dependencia en m , la primera ley no puede ser simultáneamente consistente para variaciones arbitrarias e independientes de ambos parámetros. Esto sugiere que la primera ley obtenida en este trabajo es válida únicamente a lo largo de una subvariedad del espacio de soluciones donde m y A no son independientes, sino que satisfacen una relación de la forma $m = m(A)$ impuesta por alguna condición adicional de equilibrio. En ese sector restringido del espacio de parámetros, las variaciones de m y de A están correlacionadas y la primera ley puede ser consistente de manera efectiva. Este punto de vista es coherente con la observación de Anabalón, Gray, Gregory, Kubizňák y Mann [53] de que una descripción termodinámica consistente de agujeros negros acelerados requiere imponer condiciones sobre el espacio de parámetros de la solución, en particular restricciones sobre el régimen de aceleración que garanticen que el sistema se encuentre en una configuración físicamente bien definida. Determinar cuál es exactamente esa relación $m = m(A)$ y si admite una interpretación física natural constituye una dirección abierta para trabajo futuro.

5.2.5 Discusión (C-métrica)

Las interpretaciones anteriores están estrechamente relacionadas con la estructura causal de la solución. La C-métrica de Schwarzschild presenta dos horizontes con temperaturas asociadas generalmente distintas: el horizonte de eventos del agujero negro, ubicado en $r_{Sch} = 2m$, cuya temperatura está relacionada con la radiación de Hawking, y el horizonte de aceleración de tipo Rindler, ubicado en $r_R = 1/A$, cuya temperatura está vinculada al efecto Unruh experimentado por un observador uniformemente acelerado. La coexistencia de dos escalas de temperatura distintas en la misma solución implica que el sistema no se encuentra en equilibrio termodinámico global, en aparente conflicto con la ley cero de la termodinámica. Esto sugiere que $\mathcal{Q}$ no describe la energía interna del agujero negro de manera aislada, sino posiblemente una combinación efectiva de las contribuciones de ambos horizontes tal como las percibe un observador en el infinito. Precisamente para evitar esta ambigüedad, Anabalón et al. [53] restringen su análisis al régimen de aceleración lenta, en el cual el horizonte de

5.2. SCHWARZSCHILD ACELERADO (C-MÉTRICA)

aceleración está ausente por construcción, garantizando así una temperatura única y bien definida. En el presente trabajo no se impone dicha restricción, lo que permite explorar la estructura del sistema en un régimen más general, a costa de que la interpretación de Q como energía interna del agujero negro no sea directa. Determinar si existe una descomposición de Q en contribuciones separadas asociadas a cada horizonte, y si dicha descomposición es compatible con una descripción termodinámica independiente para cada uno de ellos, constituye una pregunta que deja abierto este trabajo.

Conclusiones

6.1 Síntesis

El objetivo de esta tesina fue presentar de manera sistemática el formalismo del espacio de fases covariante de Lee y Wald, y aplicarlo a la derivación de la primera ley de la termodinámica de agujeros negros dentro de la teoría de Einstein-Hilbert. Los resultados obtenidos muestran que este objetivo se cumplió, y que el formalismo ofrece además una vía sistemática para abordar casos donde las cargas conservadas no son evidentes a priori.

En las soluciones de Schwarzschild y Reissner-Nordström, la linealización de la densidad de carga superficial $k_{\xi}^{\mu\nu}$ permitió recuperar correctamente la masa como carga de Noether asociada al vector de Killing temporal, y en el segundo caso, la carga eléctrica como carga asociada a la simetría de gauge del campo electromagnético. Este resultado ilustra que el formalismo trata de manera unificada cargas de origen geométrico y cargas de origen interno, sin distinción metodológica entre ambas.

El caso de Kerr-Taub-NUT introdujo una complicación adicional: los defectos cónicos asociados a las cuerdas de Misner obligaron a incorporar contribuciones extra al cálculo de la carga, más allá de la integral sobre la 2-esfera habitual. A partir de las dos cargas conservadas así obtenidas, masa y momento angular, se propuso una primera ley de la forma $\delta M = T \delta S + \Omega \delta J$, cuya resolución, sujeta a recuperar Kerr en el límite $n \rightarrow 0$, arrojó expresiones para S , T y Ω consistentes con la relación de Christodoulou-Ruffini ($S = A/4$), lo que respalda su validez física.

La C-métrica de Schwarzschild puso a prueba los límites del formalismo estándar: la carga temporal resultó ser una 1-forma no integrable en el espacio de fases, lo que exigió generalizar el procedimiento mediante un reescalamiento del generador de simetría. La carga resultante, $\mathcal{Q} \sim 1/A$, depende solo de la aceleración y no de la masa, contrastando con la interpretación usual de la carga temporal como energía del sistema. Este resultado, junto con la coexistencia de dos horizontes con temperaturas distintas, deja abiertas preguntas sobre la relación entre m y A y sobre una posible descomposición de $\mathcal{Q}$ por horizonte, señaladas explícitamente como líneas de trabajo futuro.

En conjunto, estos resultados confirman que el formalismo de espacio de fases covariante

es una herramienta práctica, sistemática y extensible: su aplicación depende únicamente del lagrangiano, las variaciones consideradas y las simetrías de la solución, y admite generalizarse tanto a cargas no integrables, como se mostró en la C-métrica, como en principio a otras dimensiones o teorías gravitacionales, quedando esto último como una dirección natural de continuación de este trabajo.

6.2 Limitaciones y trabajo futuro

El desarrollo de esta tesina se restringió a la teoría de Einstein-Hilbert en cuatro dimensiones, con un campo dinámico asociado exclusivamente a la métrica del espacio-tiempo, y, en el caso de Reissner-Nordström, al campo electromagnético. Si bien el formalismo de Lee y Wald es aplicable a teorías gravitacionales más generales y a un número arbitrario de dimensiones, dicha generalización no fue explorada en este trabajo y constituye una extensión natural del mismo.

Quedan además abiertas dos preguntas concretas surgidas de los resultados obtenidos. Primero, si existe una relación funcional $m = m(A)$ en la C-métrica que restaure la validez de la primera ley en todo el espacio de parámetros, y si dicha relación admite una interpretación física en términos de una condición de equilibrio del sistema. Segundo, si la carga $Q \sim 1/A$ admite descomponerse en contribuciones independientes asociadas a cada uno de los dos horizontes presentes en la solución, lo que permitiría una descripción termodinámica más fina del sistema completo.

En conjunto, los resultados de esta tesina confirman que el formalismo de espacio de fases covariante constituye una herramienta rigurosa y extensible para la construcción de cargas conservadas y la derivación de leyes termodinámicas en Relatividad General, cuya aplicabilidad se extiende más allá de los casos con cargas integrables, y cuyo desarrollo futuro hacia teorías gravitacionales más generales, mayores dimensiones, y una comprensión más profunda de los casos aquí discutidos, representa una dirección de investigación abierta.

6.2.1 Reflexión final

A juicio del autor, el formalismo de espacio de fases covariante constituye una vía particularmente eficiente para identificar cargas conservadas asociadas a las simetrías de un sistema, incluso cuando estas son escasas, como ocurre en muchas soluciones de interés físico aun al aumentar el número de dimensiones. Su principal virtud radica en que su aplicabilidad no depende de la forma específica del lagrangiano considerado, sino únicamente de la existencia de difeomorfismos y simetrías que permitan definir las cantidades conservadas.

Un aspecto que el autor considera digno de un análisis más profundo es la relación entre las cargas conservadas obtenidas mediante este formalismo y los parámetros independientes del sistema. Cuando dos cantidades extensivas no son mutuamente independientes, sino que una depende funcionalmente de la otra, la carga conservada asociada resulta depender únicamente de uno de los parámetros, como reflejo directo de la restricción impuesta sobre el sistema. Esta situación puede dificultar la derivación de la primera ley, pues el problema

queda efectivamente subdeterminado: existen relaciones termodinámicas que dependen entre sí, y resulta necesario descomponerlas adecuadamente para poder identificar su contenido físico.

En el caso límite en que todas las cantidades extensivas del sistema dependieran estrechamente de un único parámetro, el sistema completo dejaría de ser tratable en el sentido termodinámico habitual, pues no sería posible aislar la variación de una cantidad extensiva sin que esta arrastrara consigo la variación de todas las demás. En opinión del autor, este escenario debe abordarse de manera análoga a como se procede en la termodinámica clásica, introduciendo argumentos adicionales que permitan separar las cantidades termodinámicas entre sí. Solo de esta manera es posible estudiar apropiadamente procesos que, de otro modo, permanecerían ocultos por la interdependencia de las variables involucradas.

Bibliografía

- [1] John Michell. On the means of discovering the distance, magnitude, &c. of the fixed stars, in consequence of the diminution of the velocity of their light, in case such a diminution should be found to take place in any of them, and such other data should be procured from observations, as would be farther necessary for that purpose. *Philosophical Transactions of the Royal Society of London*, 74:35–57, 1784.
- [2] Pierre-Simon Laplace. *Exposition du système du monde*. Cercle-Social, Paris, 1796.
- [3] Albert Einstein. Die feldgleichungen der gravitation. *Sitzungsberichte der Königlich Preußischen Akademie der Wissenschaften*, pages 844–847, 1915.
- [4] John Archibald Wheeler. Our universe: The known and the unknown. *American Scientist*, 56(1):1–20, 1968.
- [5] Karl Schwarzschild. On the gravitational field of a point-mass, according to einstein’s theory. *American Association of Physics Teachers*, page 19, 1982.
- [6] Hans Reissner. Über die eigengravitation des elektrischen feldes nach der einsteinschen theorie. *Annalen der Physik*, 355(9):106–120, 1916.
- [7] Gunnar Nordström. On the energy of the gravitation field in einstein’s theory. *Koninklijke Nederlandse Akademie van Wetenschappen Proceedings Series B Physical Sciences*, 20:1238–1245, 1918.
- [8] Roy P Kerr. Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics. *Physical review letters*, 11(5):237, 1963.
- [9] Ezra T Newman, E Couch, K Chinnapared, A Exton, A Prakash, and R Torrence. Metric of a rotating, charged mass. *Journal of mathematical physics*, 6(6):918–919, 1965.
- [10] Abbott, B. P. and Abbott, R. and Abbott, T. D. and Abernathy, M. R. and Acernese, F. and Ackley, K. and Adams, C. and Adams, T. and Addesso et al. Observation of gravitational waves from a binary black hole merger. *Phys. Rev. Lett.*, 116:061102, Feb 2016.

- [11] The Event Horizon Telescope Collaboration. First m87 event horizon telescope results. i. the shadow of the supermassive black hole. *The Astrophysical Journal Letters*, 875(1):L1, April 2019.
- [12] Event Horizon Telescope Collaboration. First Sagittarius A* Event Horizon Telescope Results. I. The Shadow of the Supermassive Black Hole in the Center of the Milky Way. , 930(2):L12, May 2022.
- [13] Máximo Bañados, Claudio Teitelboim, and Jorge Zanelli. Black hole in three-dimensional spacetime. *Physical Review Letters*, 69(13):1849–1851, 1992.
- [14] Werner Israel. Event horizons in static vacuum space-times. *Physical Review*, 164(5):1776–1779, 1967.
- [15] Werner Israel. Event horizons in static electrovac space-times. *Communications in Mathematical Physics*, 8(4):245–260, 1968.
- [16] Brandon Carter. Axisymmetric black hole has only two degrees of freedom. *Physical Review Letters*, 26(6):331–333, 1971.
- [17] David C. Robinson. Uniqueness of the kerr black hole. *Physical Review Letters*, 34(14):905–906, 1975.
- [18] Remo Ruffini and John A. Wheeler. Introducing the black hole. *Physics Today*, 24(1):30–41, 1971.
- [19] T. Jacobson. Thermodynamics of spacetime: The einstein equation of state. *Physical Review Letters*, 75(7):1260–1263, 1995.
- [20] Stephen W Hawking. Gravitational radiation from colliding black holes. *Physical Review Letters*, 26(21):1344, 1971.
- [21] Jacob D Bekenstein. Black holes and the second law. In *Jacob Bekenstein: the conservative revolutionary*, pages 303–306. World Scientific, 2020.
- [22] Jacob D Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7(8):2333, 1973.
- [23] James M Bardeen, Brandon Carter, and Stephen W Hawking. The four laws of black hole mechanics. *Communications in mathematical physics*, 31(2):161–170, 1973.
- [24] Roger Penrose. Gravitational collapse: The role of general relativity. *Nuovo Cimento Rivista Serie*, 1:252, 1969.
- [25] Demetrios Christodoulou and Remo Ruffini. Reversible transformations of a charged black hole. *Physical Review D*, 4(12):3552, 1971.
- [26] Larry Smarr. Mass formula for kerr black holes. *Physical Review Letters*, 30(2):71, 1973.
- [27] Jacob D Bekenstein. Black holes and entropy. *Physical Review D*, 7(8):2333, 1973.

- [28] Stephen W Hawking. Black hole explosions? *Nature*, 248(5443):30–31, 1974.
- [29] Stephen W Hawking. Particle creation by black holes. *Communications in mathematical physics*, 43(3):199–220, 1975.
- [30] Gerardt Hooft. Dimensional reduction in quantum gravity. *arXiv preprint gr-qc/9310026*, 1993.
- [31] Leonard Susskind. The world as a hologram. *Journal of Mathematical Physics*, 36(11):6377–6396, November 1995.
- [32] Jennie Traschen. An introduction to black hole evaporation, 2000.
- [33] Abhay Ashtekar and Badri Krishnan. Isolated and dynamical horizons and their applications. *Living Reviews in Relativity*, 7(1), December 2004.
- [34] Ted Jacobson and Robert C. Myers. Black hole entropy and higher curvature interactions. *Phys. Rev. Lett.*, 70:3684–3687, Jun 1993.
- [35] Joohan Lee and Robert M Wald. Local symmetries and constraints. *Journal of Mathematical Physics*, 31(3):725–743, 1990.
- [36] Robert M Wald. *General relativity*. University of Chicago press, 1984.
- [37] Sean M Carroll. *Spacetime and geometry*. Cambridge University Press, 2019.
- [38] Mikio Nakahara. *Geometry, topology and physics*. CRC press, 2018.
- [39] Theodore Frankel. *The geometry of physics: an introduction*. Cambridge university press, 2004.
- [40] Vivek Iyer and Robert M Wald. Some properties of the noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy. *Physical review D*, 50(2):846, 1994.
- [41] Marco M Caldarelli, Guido Cognola, and Dietmar Klemm. Thermodynamics of kerr-newman-ads black holes and conformal field theories. *Classical and Quantum Gravity*, 17(2):399–420, 2000.
- [42] Gary W Gibbons, Malcolm J Perry, and Christopher N Pope. The first law of thermodynamics for kerr–anti-de sitter black holes. *Classical and Quantum Gravity*, 22(9):1503–1526, 2005.
- [43] Marco Astorino. Thermodynamics of regular accelerating black holes. *Physical Review D*, 95(6):064007, 2017.
- [44] Robert B Mann. Black hole chemistry: The first 15 years. *arXiv preprint arXiv:2508.01830*, 2025.

- [45] Glenn Barnich and Friedemann Brandt. Covariant theory of asymptotic symmetries, conservation laws and central charges. *Nuclear Physics B*, 633(1-2):3–82, 2002.
- [46] Ezra Newman, L Tamburino, and Theodore Unti. Empty-space generalization of the schwarzschild metric. *Journal of Mathematical Physics*, 4(7):915–923, 1963.
- [47] Charles W Misner. The flatter regions of newman, unti, and tamburino’s generalized schwarzschild space. *Journal of Mathematical Physics*, 4(7):924–937, 1963.
- [48] VS Manko, J Martín, and E Ruiz. Singular sources in demiański–newman spacetimes. *Classical and Quantum Gravity*, 23(13):4473–4484, 2006.
- [49] Marek Demianski and Ezra T Newman. Combined kerr-nut solution of the einstein field equations. Technical report, Univ., Warsaw. Univ. of Pittsburgh, 1965.
- [50] Ernesto Frodden and Diego Hidalgo. The first law for the kerr-nut spacetime. *Physics Letters B*, 832:137264, 2022.
- [51] William Kinnersley and Martin Walker. Uniformly accelerating charged mass in general relativity. *Physical Review D*, 2(8):1359, 1970.
- [52] Jerry B Griffiths and Jiří Podolský. *Exact space-times in Einstein’s general relativity*. Cambridge University Press, 2009.
- [53] Andrés Anabalón, Finnian Gray, Ruth Gregory, David Kubizňák, and Robert B Mann. Thermodynamics of charged, rotating, and accelerating black holes. *Journal of High Energy Physics*, 2019(4):1–16, 2019.

Acción de Einstein–Hilbert– Λ

Considérese la acción de Einstein–Hilbert– Λ

$$S[g_{\mu\nu}] = \frac{\kappa}{2} \int_{\mathcal{M}} d^4x \sqrt{-g} (R - 2\Lambda). \quad (\text{A.1})$$

Para construir la carga superficial asociada a un difeomorfismo generado por el campo vectorial $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$, se comienza calculando la variación del lagrangiano. A partir de la ecuación (4.3) se obtiene

$$\begin{aligned} \partial_\mu (\xi^\mu L) &= E_{\mu\nu} \delta_\xi g^{\mu\nu} + \nabla_\mu \Theta^\mu(g, \delta_\xi g) \\ &= -2E^{\mu\nu} \nabla^{(\mu} \xi^{\nu)} + \nabla_\mu \Theta^\mu(g, \delta_\xi g) \\ &= -\nabla^{(\mu} (2 E_{\mu\nu} \xi^{\nu)}) + 2\xi^{(\nu} \nabla^{\mu)} E_{\mu\nu} + \nabla_\mu \Theta^\mu(g, \delta_\xi g) \\ &= -\nabla^\mu (2 E_{\mu\nu} \xi^\nu) + \nabla_\mu \Theta^\mu(g, \delta_\xi g) \\ &= \nabla_\mu [-2E_{\mu\nu} \xi^\nu + \Theta^\mu(g, \delta_\xi g)]. \end{aligned} \quad (\text{A.2})$$

En la segunda igualdad se utilizó $\delta_\xi g^{\mu\nu} = -\nabla^\mu \xi^\nu - \nabla^\nu \xi^\mu = -2\nabla^{(\mu} \xi^{\nu)}$, mientras que en la tercera se aplicó la regla de Leibniz. Finalmente, se empleó la simetría de $E^{\mu\nu}$ junto con la identidad de Bianchi $\nabla^\mu E_{\mu\nu} = 0$.

Las cantidades que aparecen en la ecuación (A.2) son

$$L = \frac{\kappa}{2} \sqrt{-g} (R - 2\Lambda), \quad (\text{A.3})$$

$$E^{\mu\nu} = \frac{\kappa}{2} \sqrt{-g} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + \Lambda g^{\mu\nu} \right), \quad (\text{A.4})$$

$$\begin{aligned} \Theta^\mu(g, \delta_\xi g) &= \kappa \sqrt{-g} \nabla^{[\alpha} (g^{\mu]\beta} \delta_\xi g_{\alpha\beta}), \\ &= \kappa \sqrt{-g} (\nabla_\alpha \nabla^{(\alpha} \xi^{\mu)} - \nabla^\mu \nabla^\alpha \xi_\alpha), \\ &= \kappa \sqrt{-g} (\nabla_\alpha \nabla^{[\alpha} \xi^{\mu]} + [\nabla_\alpha, \nabla^\mu] \xi^\alpha), \\ &= \kappa \sqrt{-g} (\nabla_\alpha \nabla^{[\alpha} \xi^{\mu]} + R^{\mu\alpha} \xi_\alpha), \end{aligned} \quad (\text{A.5})$$

donde se utilizó la identidad $[\nabla_\alpha, \nabla^\mu]\xi^\alpha = R^{\mu\nu}\xi_\nu$. Sustituyendo estas expresiones en la definición de la corriente de Noether, $J_\xi^\mu = \Theta^\mu(g, \delta_\xi g) - \xi^\mu L - 2\xi_\nu E^{\mu\nu}$, se obtiene

$$\begin{aligned} J_\xi^\mu &= \kappa\sqrt{-g}\nabla_\nu\nabla^{[\nu}\xi^{\mu]} \\ &= \kappa\partial_\nu(\sqrt{-g}\nabla^{[\nu}\xi^{\mu]}) \\ &= \kappa\partial_\nu(-\sqrt{-g}\nabla^{[\mu}\xi^{\nu]}) , \end{aligned} \tag{A.6}$$

por lo que la corriente resulta ser una divergencia total. De esta forma se identifica el potencial de Noether

$$\tilde{Q}_\xi^{\mu\nu} = -\kappa\sqrt{-g}\nabla^{[\mu}\xi^{\nu]}. \tag{A.7}$$

La antisimetría de $\tilde{Q}_\xi^{\mu\nu}$ implica inmediatamente $\partial_\mu\partial_\nu\tilde{Q}_\xi^{\mu\nu} = 0$, por lo que la conservación de la corriente es una identidad y no requiere imponer las ecuaciones de movimiento.

Finalmente, de acuerdo con el formalismo del espacio de fases covariante, la densidad de carga superficial asociada al generador ξ^μ está dada por

$$k_\xi^{\mu\nu} = \delta\tilde{Q}_\xi^{\mu\nu} + 2\xi^{[\mu}\Theta^{\nu]}(g, \delta g). \tag{A.8}$$

Acción de Einstein–Hilbert–Maxwell

La variación del lagrangiano generada por un campo vectorial arbitrario $\xi = \xi^\mu \partial_\mu$ y una transformación gauge $\lambda' = \lambda + \xi^\mu A_\mu$ ($\delta_\epsilon = \delta_\xi + \delta_{\lambda'}$) está dada por

$$\delta_\xi L = E_{\mu\nu} \delta_\xi g^{\mu\nu} + E_\mu \delta_\epsilon A^\mu + \partial_\mu \Theta^\mu(\delta_\epsilon), \quad (\text{B.1})$$

$$\partial_\mu(\xi^\mu L) = -E^{\mu\nu}(\nabla^\mu \xi^\nu + \nabla^\nu \xi^\mu) + E^\mu(\xi_\nu F^{\nu\mu} - \nabla^\mu \lambda) + \partial_\mu \Theta^\mu(\delta_\epsilon), \quad (\text{B.2})$$

$$\partial_\mu(\xi^\mu L) = \partial_\mu[-2\xi_\nu E^{\mu\nu} - \lambda E^\mu + \Theta^\mu(\delta_\epsilon)]. \quad (\text{B.3})$$

En la última igualdad se utilizaron las identidades de Noether $F^\mu{}_\nu E^\nu - 2\nabla_\nu E^{\mu\nu} = 0$ y $\nabla_\mu E^\mu = 0$.

Las expresiones explícitas de las cantidades que aparecen en la ecuación (B.3) son

$$L = \sqrt{-g} \left[\frac{\kappa}{2} (R - 2\Lambda) - \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right], \quad (\text{B.4})$$

$$E^{\mu\nu} = \sqrt{-g} \left[\frac{\kappa}{2} \left(R^{\mu\nu} - \frac{1}{2} g^{\mu\nu} R + \Lambda g^{\mu\nu} \right) - \frac{1}{2} \left(g_{\alpha\beta} F^{\alpha\mu} F^{\beta\nu} - \frac{1}{4} g^{\mu\nu} F^{\alpha\beta} F_{\alpha\beta} \right) \right], \quad (\text{B.5})$$

$$E^\mu = -\sqrt{-g} \nabla_\nu F^{\mu\nu}, \quad (\text{B.6})$$

$$\begin{aligned} \Theta^\mu(\delta_\epsilon) &= \sqrt{-g} \left[\kappa \nabla^{[\alpha} (g^{\mu]\beta} \delta_\xi g_{\alpha\beta}) - \delta_\epsilon A_\nu F^{\mu\nu} \right] \\ &= \sqrt{-g} \left[\kappa (\nabla_\alpha \nabla^{(\alpha} \xi^{\mu)} - \nabla^\mu \nabla^\alpha \xi_\alpha) - (\xi^\alpha F_{\alpha\nu} - \nabla_\nu \lambda) F^{\mu\nu} \right]. \end{aligned} \quad (\text{B.7})$$

Sustituyendo estas expresiones en la ecuación (B.3), los términos contenidos en la divergencia pueden reescribirse nuevamente como una divergencia total,

$$\begin{aligned} J_\epsilon^\mu &\equiv \Theta^\mu(\delta_\epsilon) - \xi^\mu L - 2\xi_\nu E^{\mu\nu} - \lambda E^\mu \\ &= \partial_\nu \left[-\sqrt{-g} (\kappa \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} - \lambda F^{\mu\nu}) \right], \end{aligned} \quad (\text{B.8})$$

donde se utilizó la identidad $[\nabla^\mu, \nabla^\nu] \xi_\mu = R^{\mu\nu} \xi_\mu$.

La cantidad contenida dentro de la divergencia total se identifica con el potencial de Noether,

$$\tilde{Q}_\epsilon^{\mu\nu} = -\sqrt{-g} (\kappa \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} - \lambda F^{\mu\nu}). \quad (\text{B.9})$$

Por consiguiente, la densidad de carga superficial viene dada por

$$k_\epsilon^{\mu\nu} = \delta\tilde{Q}_\epsilon^{\mu\nu} + 2\xi^{[\mu}\Theta^{\nu]}(\delta) \quad (\text{B.10})$$

$$= -\delta \left[\sqrt{-g} \left(\kappa \nabla^{[\mu} \xi^{\nu]} - \lambda F^{\mu\nu} \right) \right] + 2\sqrt{-g} \xi^{[\mu} \left(\kappa \nabla^{[\alpha} \left(g^{\nu]\beta} \delta g_{\alpha\beta} \right) - \delta A_\alpha F^{\nu]\alpha} \right). \quad (\text{B.11})$$