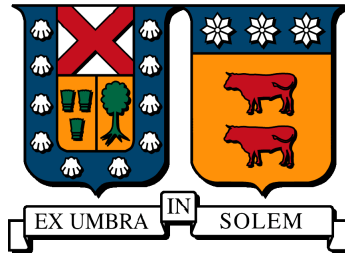


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA
SANTIAGO - CHILE



**OPTIMIZACIÓN TOPOLÓGICA DE UN
ABSORBENTE ACÚSTICO EN RÉGIMEN
ARMÓNICO PARA APLICACIONES EN
ULTRASONIDO**

CRISTÓBAL IGNACIO VENTURA MENESES

**MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL
MECÁNICO**

PROFESOR GUÍA: DR. JOAQUÍN MURA MARDONES
PROFESOR CORREFERENTE: DR. SERGIO GUTIÉRREZ CID

NOVIEMBRE 2023

Resumen

En el contexto de optimización topológica, se realiza una simulación computacional de un absorbente acústico para ondas de ultrasonido en un contenedor, para obtener un diseño aplicando un algoritmo de optimización basado en la derivada de forma y el método de curvas de nivel. El absorbente se modela como un cuerpo rígido y la propagación de las ondas es gobernada por la ecuación de Helmholtz asumiendo un régimen armónico. Se utiliza la librería Gridap, escrita en el lenguaje de programación Julia, para resolver las ecuaciones diferenciales mediante el método de elementos finitos. El proceso de optimización busca minimizar la onda de dispersión en una región determinada, eligiendo como función objetivo el cuadrado de la amplitud de la presión acústica y aplicando una restricción de volumen a través de un lagrangiano aumentado. Se obtienen tres diseños optimizados a partir de tres formas iniciales distintas, las cuales disminuyen el valor de la función objetivo en un 75% hasta un 90%, al comparar con una forma trivial de control. Sin embargo, la función objetivo muestra una respuesta caótica a los cambios de volumen y la forma óptima resultante depende fuertemente de la forma inicial del proceso.

Abstract

In the context of topological optimization, a computational simulation of an acoustic absorber for ultrasonic waves in a container is performed, to obtain a design by applying an optimization algorithm based on the shape derivative and the level-set method. The absorber is modeled as a rigid body and the wave propagation is governed by the Helmholtz equation assuming a harmonic regime. The Gridap library, written in the Julia programming language, is used to solve the differential equations using the finite element method. The optimization process seeks to minimize the scattered wave in a given region, choosing the squared sound pressure amplitude as the objective function and imposing a volume constraint through an augmented Lagrangian. Three optimized designs are obtained from three different initial shapes, which decrease the value of the objective function by 75 % to 90 %, when compared to a trivial control shape. However, the objective function shows a chaotic response to volume changes and the resulting optimal shape is strongly dependent on the initial shape of the process.

Índice general

Introducción	1
Objetivos	3
Objetivo general	3
Objetivos específicos	3
1. Estado del arte	4
1.1. Tipos de metamateriales acústicos	5
1.1.1. Metamateriales periódicos	5
1.1.2. Estructuras enrolladas y metasuperficies	6
1.1.3. Metamateriales activos	7
1.2. Métodos de manufactura aditiva	8
1.2.1. Técnicas de polimerización en cubeta	8
1.2.2. Técnicas de fusión de lecho de polvo	9
1.2.3. Técnicas de extrusión/deposición	11
1.3. Aplicaciones como absorbentes acústicos	12
2. Metodología	19
2.1. Modelo matemático	19
2.2. Geometría y configuración general del problema	22
2.3. Método de curvas de nivel	23
2.3.1. Derivada de forma	25
2.3.2. Representación de formas por el método de curvas de nivel	30
2.3.3. Lagrangiano aumentado como restricción de volumen para optimización de forma	31
2.4. Algoritmo de optimización	33

3. Resultados	38
3.1. Parámetros específicos del problema	38
3.2. Diseños optimizados del absorbente y cálculo de la función objetivo . .	40
3.2.1. Forma trivial de control	40
3.2.2. Forma de anillo	44
3.2.3. Forma de onda	48
3.2.4. Patrón de puntos	55
3.3. Resumen de diseños optimizados	60
4. Discusión	61
Conclusiones	68
Conclusión general	68
Conclusiones específicas	68
Recomendaciones	70
Referencias	72
A. Evolución de forma del absorbente	75
A.1. Forma de anillo	75
A.2. Forma de onda	77
A.3. Patrón de puntos	79
B. Evolución de función objetivo	81
B.1. Forma de anillo	82
B.2. Forma de onda	83
B.3. Patrón de puntos	84

Índice de figuras

1.1. Modelo 3D de absorbente piramidal, absorbente piramidal impreso con la impresora 3D Stratasys Objet500 Connex y estructura interna del absorbente	13
1.2. Diseño del MMA fabricado con el sistema PolyJet y su estructura interna	14
1.3. Diseño del MMA fabricado con el sistema MJF y estructura interna de la celda unitaria	15
1.4. Esquema básico de la metapantalla de burbujas, montaje de metapantalla cerca de un reflector e ilustración del cambio de fase en π radianes inducido por las burbujas y en 0 radianes inducido por el acero	16
2.1. Región de modelación del problema, con bordes y subregiones de medición de función objetivo y optimización	22
2.2. Región de modelación del problema, con subregiones de dominio sin material absorbente y dominio con material absorbente de una forma arbitraria	24
3.1. Región de modelación del problema, con subregiones de interés y dimensiones	38
3.2. Función $\psi_{original}$ para forma trivial	41
3.3. Función ψ^0 para forma trivial	41
3.4. Visión tridimensional de función $\psi_{original}$ para forma trivial	41
3.5. Visión tridimensional de función ψ^0 para forma trivial	42
3.6. Función $k(x)$ obtenida a partir de ψ^0 para forma trivial	42
3.7. Magnitud de u_d para forma trivial	42
3.8. Función $\psi_{original}$ para forma de anillo	44
3.9. Función ψ^0 para forma de anillo	45

3.10. Función ψ^{final} para forma de anillo	45
3.11. Visión tridimensional de función ψ^0 para forma de anillo	45
3.12. Visión tridimensional de función ψ^{final} para forma de anillo	46
3.13. Función $k(x)$ obtenida a partir de ψ^0 para forma de anillo	48
3.14. Función $k(x)$ obtenida a partir de ψ^{final} para forma de anillo	48
3.15. Magnitud de u_d inicial para forma de anillo	49
3.16. Magnitud de u_d final para forma de anillo	49
3.17. Función $\psi_{original}$ para forma de onda	49
3.18. Función ψ^0 para forma de onda	50
3.19. Función ψ^{final} para forma de onda	50
3.20. Visión tridimensional de función ψ^0 para forma de onda	50
3.21. Visión tridimensional de función ψ^{final} para forma de onda	51
3.22. Función $k(x)$ obtenida a partir de ψ^0 para forma de onda	53
3.23. Función $k(x)$ obtenida a partir de ψ^{final} para forma de onda	53
3.24. Magnitud de u_d inicial para forma de onda	54
3.25. Magnitud de u_d final para forma de onda	54
3.26. Función $\psi_{original}$ para patrón de puntos	54
3.27. Función ψ^0 para patrón de puntos	56
3.28. Función ψ^{final} para patrón de puntos	56
3.29. Visión tridimensional de función ψ^0 para patrón de puntos	56
3.30. Visión tridimensional de función ψ^{final} para patrón de puntos	57
3.31. Función $k(x)$ obtenida a partir de ψ^0 para patrón de puntos	59
3.32. Función $k(x)$ obtenida a partir de ψ^{final} para patrón de puntos	59
3.33. Magnitud de u_d inicial para patrón de puntos	59
3.34. Magnitud de u_d final para patrón de puntos	59
A.1. Evolución de $k(x)$ hasta 400 iteraciones para forma de anillo	75
A.2. Evolución de $k(x)$ hasta 1750 iteraciones para forma de anillo	76
A.3. Evolución de $k(x)$ hasta 1000 iteraciones para forma de onda	77
A.4. Evolución de $k(x)$ hasta 1950 iteraciones para forma de onda	78
A.5. Evolución de $k(x)$ hasta 1050 iteraciones para patrón de puntos	79
A.6. Evolución de $k(x)$ hasta 2100 iteraciones para patrón de puntos	80

Índice de gráficos

3.1. Evolución de función objetivo (en escala logarítmica) para forma de anillo	47
3.2. Evolución de volumen para forma de anillo	47
3.3. Evolución de función objetivo (en escala logarítmica) para forma de onda	52
3.4. Evolución de volumen para forma de onda	52
3.5. Evolución de función objetivo (en escala logarítmica) para patrón de puntos	57
3.6. Evolución de volumen para patrón de puntos	58
B.1. Evolución de función objetivo en distintos intervalos para forma de anillo	82
B.2. Evolución de función objetivo en distintos intervalos para forma de onda	83
B.3. Evolución de función objetivo en distintos intervalos para patrón de puntos	84

Índice de tablas

3.1. Número de iteraciones, tiempo de ejecución y volúmenes iniciales y finales para cada diseño optimizado	60
3.2. Función objetivo inicial y final, diferencia entre objetivo inicial y final, y diferencia entre objetivo de forma de control y final para cada diseño optimizado	60

Introducción

El ultrasonido es utilizado en diversas áreas para detectar objetos y distancias, limpiar componentes electrónicos o acelerar reacciones químicas. Esto se refleja en aplicaciones como la cuantificación de flujos mediante técnicas Doppler, estudio no invasivo de rigidez en materiales, sonoquímica, detección de grietas, etc. La aplicación más extendida del ultrasonido es en ecografías médicas, debido a su seguridad al no emplear radiación ionizante, su versatilidad para mostrar imágenes en distintos planos, su bajo costo relativo y su capacidad de mostrar estructuras móviles en tiempo real [1].

En estas aplicaciones, la cuantificación de magnitudes acústicas puede ser fuertemente afectada por la absorción y dispersión de la energía del rayo ultrasónico incidente debido a la interacción de las ondas, por ejemplo, con las paredes de un contenedor, ensuciando la señal recibida y provocando mediciones alteradas en distintos modos de imagen, lo que ha impulsado el desarrollo de absorbentes acústicos para mejorar las mediciones. Estos absorbentes se fabrican empleando diferentes estructuras geométricas hechas de poliestireno, poliuretano, espuma sintáctica, entre otros materiales [2]. En paralelo, en años recientes se han desarrollado técnicas de manufactura aditiva que permiten la fabricación de piezas eliminando gran parte de las restricciones topológicas de los métodos sustractivos. Este desarrollo ha impulsado el diseño de absorbentes con geometrías complejas y optimizadas a la aplicación correspondiente, y de aquí es que nace la motivación para este trabajo de título, buscando un diseño óptimo de un absorbente acústico de ultrasonido a través de una simulación computacional de ondas acústicas en diferentes geometrías.

En este trabajo se modela la propagación de una onda acústica incidente sobre un cuerpo rígido mediante la ecuación de Helmholtz. La herramienta computacional utilizada es Gridap, una librería escrita en el lenguaje de programación Julia que permite

la resolución de ecuaciones diferenciales parciales a través del método de elementos finitos. Luego, el diseño geométrico del absorbente se obtiene como resultado de minimizar la onda de dispersión (*scattering*), eligiendo como función objetivo el cuadrado de la amplitud de la presión acústica en una región expuesta a ondas dispersadas producto de la interacción con el absorbente. El algoritmo de optimización de la forma del absorbente se basa en un trabajo publicado por Allaire, Jouve y Toader en 2004 [3] donde plantean un método numérico basado en una combinación de la derivada de forma y el método de curvas de nivel para la propagación del frente de la forma.

En el primer capítulo se presenta una revisión bibliográfica acerca de los distintos tipos de materiales acústicos y los métodos de manufactura aditiva utilizados para fabricarlos, realizando una comparación entre ellos según su habilidad de producción en masa, su resolución e impresión multimaterial. Finalmente, se presentan algunas aplicaciones de absorbentes acústicos con distintas frecuencias de operación, metodologías de diseño, geometrías, escalas y métodos de manufactura.

En el segundo capítulo se describe la metodología para llegar a los diseños de absorbentes acústicos. Se comienza derivando el modelo matemático para obtener las ecuaciones que gobiernan el problema. Luego, se describe la geometría y configuración general del problema, donde se definen los dominios, las condiciones de borde y la función objetivo. Posteriormente, se describe el método de curvas de nivel y su implementación, que abarca el cálculo de la derivada de forma, la representación de formas y la restricción de volumen para optimización de forma. Finalmente, se presenta el algoritmo de optimización, el cual está basado en un código ya existente que resuelve un problema de elasticidad lineal buscando minimizar la flexibilidad.

En el tercer capítulo se establecen los parámetros específicos del problema que se ingresan en el algoritmo de optimización para dar comienzo al proceso iterativo. Después, se presentan los resultados de distintos diseños optimizados obtenidos a partir de diversas formas iniciales, para luego, en el cuarto capítulo, evaluar y comparar cada diseño y discutir en general el funcionamiento de la simulación y el proceso de optimización.

Objetivos

A continuación, se presenta el objetivo general y los objetivos específicos que busca conseguir este trabajo.

Objetivo general

Obtener un diseño óptimo mediante simulación computacional de un absorbente acústico para ultrasonido, concentrando la energía asociada a una onda acústica monocromática incidente dentro de un subdominio específico.

Objetivos específicos

1. Simular el comportamiento de ondas acústicas, en el rango de ultrasonido, y su interacción con distintas geometrías.
2. Determinar un diseño óptimo a través de la aplicación del método de curvas de nivel y sensibilidad respecto de la forma, y evaluar su desempeño.

Capítulo 1

Estado del arte

En este capítulo se presenta un resumen de la información bibliográfica disponible acerca de los distintos tipos de metamateriales acústicos, sus propiedades especiales, métodos de manufactura y algunas aplicaciones disponibles en la literatura.

La acústica es un campo de estudio que lleva varias décadas de desarrollo y ha surgido interés, en años recientes, en estudiar el comportamiento acústico, vibracional y mecánico de microestructuras, lo que ha ido de la mano del desarrollo de tecnologías de impresión 3D a estas pequeñas escalas. A medida que avanzan estos métodos, se pueden construir estructuras con mayor resolución y precisión, y un gran beneficiario de este reciente progreso es el campo de los metamateriales acústicos (MMA), que son materiales de gran escala con estructuras de pequeña escala, que les otorgan propiedades especiales en su interacción con ondas acústicas. Suelen estar compuestos por estructuras periódicas, de donde derivan sus efectos de interés en ondas acústicas, a diferencia de materiales naturales, que derivan sus propiedades de su composición material intrínseca. Ejemplos de propiedades de interés incluyen un módulo de compresibilidad efectivo negativo, y una densidad efectiva negativa. Tradicionalmente, estos parámetros son estrictamente positivos, sin embargo, en los MMA se presentan resonancias locales en las estructuras de escala sub longitud de onda que generan densidades y módulos de compresibilidad dinámicos que pueden tomar valores efectivos negativos cerca de las frecuencias de resonancia. Esta capacidad de ciertos MMA es la base de diversas funcionalidades, como por ejemplo la observación de efecto Doppler inverso, la fabricación de lentes que permiten imágenes de superresolución, la manipulación de ondas

acústicas para diseñar objetos aparentemente invisibles, entre otras [4].

Existe gran interés en crear MMA a escalas sub longitud de onda, ya que cuando las unidades resonantes son mucho más pequeñas que la longitud de onda, los elementos se pueden comportar como un medio continuo, sin que las ondas se vean afectadas por la granularidad. Por lo tanto, es esencial desarrollar técnicas de manufactura con resoluciones más finas que reduzcan el tamaño de los diseños de MMA a tamaños prácticos que habiliten su uso en potenciales aplicaciones. Esto ha sido una barrera para la implementación de MMA en la industria, pero se han demostrado usos prometedores en atenuación de sonido, procesamiento de señales acústicas, ensayos no destructivos, e imágenes ultrasónicas [5].

1.1. Tipos de metamateriales acústicos

Los MMA se pueden dividir en tres categorías, como lo presenta la revisión de 2021 de Gardiner et al. [5], quienes indican que esta clasificación no es excluyente y puede existir traslape entre las categorías.

1.1.1. Metamateriales periódicos

Estos MMA consisten en estructuras periódicas de celdas que se repiten, también llamadas metaátomos. Son similares en estructura a los cristales fonónicos, que se pueden considerar como ejemplos primitivos de MMA, ya que también son efectivos en aplicaciones de atenuación de sonido. La diferencia es que los cristales poseen tamaños de red en la misma escala que la longitud de onda operacional y funcionan a través de la dispersión e interferencia de las ondas incidentes de manera global en la red, mientras que, en los MMA periódicos, se presentan resonancias locales con mínima interacción entre las celdas, por lo que la longitud de onda y frecuencias de resonancia ya no dependen del tamaño de las celdas o de los parámetros globales de la red.

Los MMA periódicos se pueden fabricar en una variedad de tamaños y formas, y de distintos materiales, manufacturados utilizando impresión 3D y técnicas convencionales de fabricación. A su vez, las resonancias locales se pueden crear utilizando dos clases distintas de metaátomos. La primera forma es con átomos intrínsecos, que consisten en una única inclusión de un material por celda. Esta configuración es más simple en diseño y manufactura. La segunda forma es con átomos inerciales, que operan co-

mo osciladores mecánicos independientes, modelados matemáticamente como masas, resortes y amortiguadores, permitiendo predicciones exactas del comportamiento resonante en metamateriales cada vez más complejos. La fabricación de esta configuración se puede lograr a partir de diseños intrínsecos existentes añadiendo recubrimientos a inclusiones esféricas, pero también existen otras técnicas que involucran resonadores de Helmholtz, cavidades periódicas en un material, membranas, placas perforadas y masas internas [5].

1.1.2. Estructuras enrolladas y metasuperficies

Estos MMA presentan estructuras enrolladas, que suelen coincidir con metasuperficies, que son metamateriales planos que operan en dos dimensiones. Dada la asimetría de estas estructuras, utilizar dos dimensiones simplifica considerablemente su diseño. Un ejemplo de este tipo incluye canales laberínticos, que han demostrado ser capaces de introducir un desplazamiento de fase en frentes de onda acústicos. En estos casos, se pueden inducir incrementos discretos de fase modulando el ancho de las estructuras enrolladas. También existen metasuperficies que utilizan resonadores de Helmholtz capaces de inducir cambios de fase en incrementos de $\frac{\pi}{4}$ radianes. Ensayos experimentales de este tipo de materiales muestran la capacidad de dirigir una onda acústica incidente, y de transformarla en una onda de superficie, lo que implica reflexión negativa. Adicionalmente, estos materiales pueden presentar espesores hasta treinta veces menores que la longitud de onda operacional.

Otra propiedad alcanzada por este tipo de MMA es refracción negativa, lo que permite mayor focalización de onda y atenuación a escalas sub longitud de onda. Esto es debido a la estructura enrollada y a una discordancia en la impedancia entre el material de la estructura y el medio, lo que genera una densidad efectiva y un módulo de compresibilidad efectivo negativos a frecuencias específicas, haciendo negativo el índice de refracción.

Las estructuras enrolladas también entregan beneficios para aumentar las habilidades de banda ancha de los MMA, con materiales capaces de amplificar presiones acústicas hasta en un factor de 80, comparado con un factor de 50 obtenido con un material no enrollado. De la misma manera, se ha logrado la absorción de sonido en bajas frecuencias mediante fractales de Hilbert, construidos a través de impresión en 3D, con paredes de 400 $[\mu m]$ de espesor, lo que demuestra la importancia de esta tecnología

como método de manufactura de estructuras complejas [5].

1.1.3. Metamateriales activos

Esta categoría incluye MMA con variables controladas en el tiempo, es decir, sus propiedades mecánicas, estructura física o efectos acústicos pueden ser alterados durante el uso y no son valores constantes. El desarrollo de estas tecnologías puede aportar en la construcción de capas encubridoras acústicas y filtros acústicos modulables de alto rendimiento. Una forma común de retroalimentación en MMA activos involucra el uso de material piezoeléctrico para convertir presión acústica en corriente eléctrica y viceversa. Colocando este material entre celdas de fluido se puede conseguir una densidad efectiva controlable, aplicando una carga eléctrica a los diafragmas piezoeléctricos.

Existen otras propuestas novedosas como la implementación de un sistema de control de lazo cerrado sobre la densidad efectiva para una mejor modulación [6], cuya efectividad fue demostrada experimentalmente, alcanzando valores relativamente estables de densidades de 0,35 a 13 veces la densidad del dominio de fluido original en que están inmersas las celdas [7]. Otra propuesta es la utilización de un MMA giroscópico para controlar la magnitud y dirección de las ondas acústicas propagadas [8]. Una parte importante de la investigación en MMA activos se dedica a buscar que la densidad efectiva y el módulo de compresibilidad efectivo sean ajustables.

Otros mecanismos de actuación para MMA activos incluyen energía mecánica, ajustes de temperatura y la aplicación de campos electromagnéticos junto al uso de electroimanes. Un ejemplo es un dispositivo basado en resonadores de Helmholtz que incorpora émbolos mecánicos neumáticos para cambiar el volumen de su cavidad interna, provocando un cambio en las propiedades acústicas y logrando una atenuación máxima de 20 [dB] a una frecuencia de 500 [Hz] [9].

Otro material de importancia en esta categoría son los hidrogeles, que facilitan la actuación al tener propiedades suaves y flexibles. Estos MMA basados en hidrogel se conocen como metageles. La estructura interna de los metageles se puede llenar con un fluido para cambiar la impedancia acústica, lo que es de especial interés para captar imágenes médicas y submarinas, donde la discordancia de impedancias es una dificultad significativa [5].

1.2. Métodos de manufactura aditiva

Como se ha explorado en la sección anterior, los MMA involucran conceptos y fenómenos físicos que requieren cada vez más complejidad y precisión en su manufactura, por lo que una gran barrera para incrementar aún más la complejidad de los materiales es la capacidad de fabricación. Las primeras tecnologías de manufactura aditiva se desarrollaron durante los años ochenta y, desde entonces, ha existido un gran desarrollo. Para la primera década del siglo XXI, la técnica se estableció como una opción popular y costoefectiva en la academia e industria para el prototipado rápido. Para la fabricación de MMA, la manufactura aditiva ha demostrado ser la tecnología más prometedora, superando a técnicas sustractivas en la construcción de materiales complejos, de escalas sub longitud de onda, y en producción en masa, aunque una limitación aun presente es la consistencia y reproducibilidad a través del material, que puede ser de varios centímetros de largo. La reseña de 2021 de Gardiner et al. [5] explora tres grandes familias de métodos de manufactura aditiva y evalúa su habilidad de producción en masa, el tamaño mínimo de elemento imprimible y la impresión multimaterial.

1.2.1. Técnicas de polimerización en cubeta

Este procedimiento utiliza polímeros fotorreactivos que son curados con radiación electromagnética para construir piezas tridimensionales. Esta descripción inmediatamente limita las opciones de materiales a resinas líquidas específicas, sin embargo, se pueden añadir pequeños particulados de cerámica o metales para influenciar las propiedades de los materiales. En general, este método es rápido y preciso para piezas del orden de unos centímetros.

Una de las primeras técnicas desarrolladas es la estereolitografía (*Stereolithography Apparatus*, SLA), que involucra escanear, capa por capa, un líquido fotocurable para crear una pieza en 3D. Se utiliza un láser para curar una sección transversal en 2D moviéndose a lo largo y ancho de una cubeta de material líquido, para luego sumergir la pieza y crear la siguiente capa. El láser puede ser de luz visible, ultravioleta, y en algunos casos infrarroja. De esta tecnología, surge otro método llamado procesamiento digital de luz (*Digital Light Processing*, DLP), en donde se cura una capa entera a la vez mediante la proyección de patrones de luz, logrando una buena resolución y bajos tiempos de impresión, siempre que las dimensiones de la pieza no sean demasiado grandes. Otra tecnología derivada es la polimerización multifotónica (*Multi-Photon Polymeriza-*

tion, MPP), en donde la capa se cura punto por punto dirigiendo una pulsación láser a través de un lente para que converja a un solo punto dentro de la cubeta. Esta energía focalizada desencadena un proceso de absorción que polimeriza un pequeño volumen de resina, permitiendo una resolución extremadamente fina, al costo de las dimensiones totales de la pieza y la velocidad de impresión.

En cuanto a habilidad de producción en masa, el DLP es el método más rápido con diferencia, ya que permite el curado simultáneo de capas, lo que implica que imprimir partes adicionales no aumenta de manera proporcional el tiempo de impresión. Luego le siguen la SLA y por último la MPP, debido a su mecanismo de curado punto por punto. En cuanto al tamaño mínimo de elemento imprimible, la MPP tiene la mejor resolución de todos los métodos de manufactura aditiva, con elementos en la escala nanométrica de hasta 60 [nm]. Adicionalmente, este método no está restringido por el uso de estructuras de soporte, ya que la polimerización punto por punto puede dirigirse a cualquier lugar en el espacio tridimensional, a diferencia de la SLA y el DLP, que trabajan en secciones 2D. El DLP se desempeña mejor que la SLA en este aspecto, pero su resolución llega solo a la escala micrométrica. Para todos los métodos, la alta resolución tiene el costo de productos terminados más pequeños. En cuanto a la impresión multimaterial, existe una dificultad inherente a la polimerización en cubeta, debido a la posibilidad de contaminación cruzada entre distintas resinas líquidas utilizadas, por lo que es mejor utilizar otro método de fabricación aditiva. No obstante, de las técnicas mencionadas, la SLA permite el proceso de impresión multimaterial más simple y efectivo, mientras que para el DLP, se requieren pasos de limpieza intensivos o sistemas complejos de transferencia de resina [5].

1.2.2. Técnicas de fusión de lecho de polvo

En estos procedimientos, una fuente de calor es aplicada a un lecho de partículas finas para unir este material de construcción y formar partes tridimensionales altamente detalladas. El interés por este tipo de manufactura aditiva ha crecido en los últimos años debido a su bajo costo, variedad de materiales y por requerir pocos o no requerir soportes de impresión. Los materiales que se pueden utilizar incluyen plásticos, vidrios, metales y aleaciones, y existe la posibilidad de reciclar el polvo no utilizado. Sin embargo, estos métodos son menos prevalentes en la investigación de MMA en comparación con la polimerización en cubeta, aunque existe potencial para contribuir a la

fabricación de MMA a través de ciertos procedimientos.

Los dos métodos más conocidos son el sinterizado selectivo por láser (*Selective Laser Sintering*, SLS) y la fusión selectiva por láser (*Selective Laser Melting*, SLM), los cuales utilizan rayos láser para unir el polvo en partes tridimensionales. La diferencia es que el primero trabaja solo con plásticos mientras que el segundo trabaja principalmente con metales. El proceso de manufactura se realiza paso por paso, con una capa de polvo rociada después de que la capa antecesora se haya terminado de unir y la plataforma descienda en la dirección vertical. Para el caso del SLS, se utiliza un rayo de CO_2 para calentar la capa punto por punto, mientras que para la SLM, el rayo debe ser de más alta energía y se requiere gas inerte para lograr derretir el material. Ambos métodos producen impresiones de alta calidad, pero requieren de posprocesado para eliminar potenciales problemas de porosidad, calidad superficial y grietas.

Un procedimiento emergente es la fusión multichorro (*Multi Jet Fusion*, MJF), que utiliza el mismo montaje para el lecho de polvo y materiales de construcción que el SLS, pero emplea una serie de chorros que distribuyen un agente de fusión sobre el lecho en la forma de la sección transversal de la capa. Luego, en vez de láseres, se proyecta luz infrarroja para calentar y unir toda la capa de manera simultánea. La MJF muestra una capacidad significativa en la producción rápida de MMA poliméricos con propiedades mecánicas y resoluciones a la par con el SLS, y, con un mayor desarrollo futuro, podría llegar a superar otros métodos de lecho de polvo e incluso de polimerización en cubeta y extrusión. Otro método existente es la fusión por haz de electrones (*Electron Beam Melting*, EBM), en donde se utiliza este haz como la fuente de calor para fabricar partes tanto de metal como de plástico. El lecho de polvo se prepara de manera similar a los otros métodos, y un haz de electrones se emite desde un filamento de tungsteno y se controla mediante una bobina computarizada. Este método permite mayor variedad de materiales, pero requiere de una cámara sellada al vacío para funcionar.

En cuanto a la capacidad de producción en masa, la MJF presenta la mayor velocidad de producción, debido a que utiliza proyección infrarroja para tratar capas enteras en un solo paso, propiedad que no está presente en los demás métodos. Esto también permite alcanzar elementos impresos en capas más finas, sin perjudicar de manera tan grave el tiempo de impresión. En cuanto al tamaño mínimo de elemento imprimible, está limitado a la escala micrométrica, y no existe una gran variación entre los métodos

de lecho de polvo. Los valores van desde 400 [μm] con EBM hasta 20 [μm] con SLS. Este factor está fuertemente restringido por el tamaño de la partícula de polvo, y refinar el polvo a escalas nanométricas es costoso y hace surgir otros factores limitantes como el diámetro focal del láser o el régimen de escaneo. En cuanto a la impresión multimaterial, por lo general no es factible con estos métodos sin recurrir a procesamiento adicional o añadir material después de imprimir, ya que no se ha desarrollado una forma de evitar la contaminación cruzada de polvo que ocurriría. La EBM tiene el mayor potencial para ser desarrollado en una técnica multimaterial, dado su alto rango de materiales aplicables, pero el requerimiento de una cámara de vacío eleva considerablemente los costos [5].

1.2.3. Técnicas de extrusión/deposición

Estas técnicas consisten en depositar un material y construir una pieza en 3D, capa por capa y desde abajo hacia arriba. Son unas de las primeras tecnologías de manufactura aditiva que fueron desarrolladas, son robustas y versátiles, con una amplia literatura al respecto de su aplicación en la escala macro en diversos campos. Estos métodos son capaces de trabajar con un amplio rango de materiales, como plásticos, cerámicos, metales, e incluso comida y células vivas. No obstante, su aplicación en pequeñas escalas aun no se ha materializado, por lo que existe un gran potencial aun por desarrollar.

Durante la década de los noventa, se desarrolló el método de modelado por deposición fundida (*Fused Deposition Modelling*, FDM), en el cual se extruye material de construcción a través de una boquilla con un sistema de actuación neumática o mecánica. La diferencia con otros métodos es que se utiliza una deposición de filamento sólido que es más continua que la obtenida utilizando un material líquido por goteo. El filamento utilizado puede ser un polímero termoplástico en aplicaciones tradicionales, pero hoy en día se añaden inclusiones de fibra, nanopartículas y otros aditivos para mejorar las propiedades del material base. Otra técnica de interés es la escritura directa con tinta (*Direct Ink Writing*, DIW), que utiliza los mismos principios que el FDM, pero con tintas como material de construcción, y no requiere tiempo de secado para solidificar las piezas, ya que la retención se logra de las propiedades reológicas de las tintas. Las opciones de material de este método son extremadamente variadas y se pueden construir formas complejas a bajo costo y en pocos pasos. La DIW se puede dividir en dos tipos, el primero es la escritura con filamento/tinta, en donde se construyen partes mediante

la deposición selectiva secuencial de gotas de tinta en un sustrato. El segundo tipo es la impresión por inyección de tinta, que eyecta tinta sobre un sustrato mediante accionamiento térmico o piezoeléctrico controlado. En el primer caso, un cabezal montado sobre la boquilla envía pulsos eléctricos para calentar el sitio de eyección, lo que causa que la tinta sea expulsada por evaporación local y burbujas de aire; mientras que en el segundo caso, se involucra la deformación de un piezocristal, que empuja el volumen de tinta a través de una boquilla.

En cuanto a la habilidad de producción en masa, el FDM tiene el material de construcción más barato (filamento sólido) y es más rápido debido a la deposición continua de material. En la escritura con tinta, se añaden pequeñas gotas de tinta de manera discontinua, mientras que la inyección de tinta se encarga en parte de esta limitación. En relación al tamaño mínimo de elemento imprimible, la DIW ofrece la capacidad de imprimir elementos extremadamente pequeños, con resoluciones de hasta 600 [nm] para la escritura con tinta y 100 [nm] para la inyección de tinta, gracias a innovaciones recientes en ambos métodos. Junto a la MPP, estas técnicas ofrecen la mejor resolución posible actualmente con manufactura aditiva. Por último, en cuanto a la impresión multimaterial, todas estas técnicas tienen buena capacidad para trabajar con varios materiales, ya que las partes se construyen mediante adición controlada de material en vez de reaccionar con un gran volumen de material en una cubeta o un lecho. El FDM es especialmente indicado para impresión multimaterial, debido a que con el filamento sólido existe mínimo riesgo de contaminación cruzada y se puede intercambiar fácilmente durante el proceso [5].

1.3. Aplicaciones como absorbentes acústicos

Existen numerosos ejemplos en la literatura sobre la fabricación de absorbentes acústicos, con amplia variedad en cuanto a su frecuencia de operación, metodología de diseño, geometría, escala y método de manufactura. A continuación se presentan algunos casos de interés que sirven de experiencia útil y también para diferenciar a este trabajo e identificar su aporte a la disciplina.

En el año 2017, Acquaticci, Yommi, Gwirc y Lew [2] utilizaron una impresora 3D Stratasys Objet500 Connex para construir un absorbente con una estructura de pirámides tetragonales que se puede utilizar para cubrir las paredes en un ensayo ultrasónico.

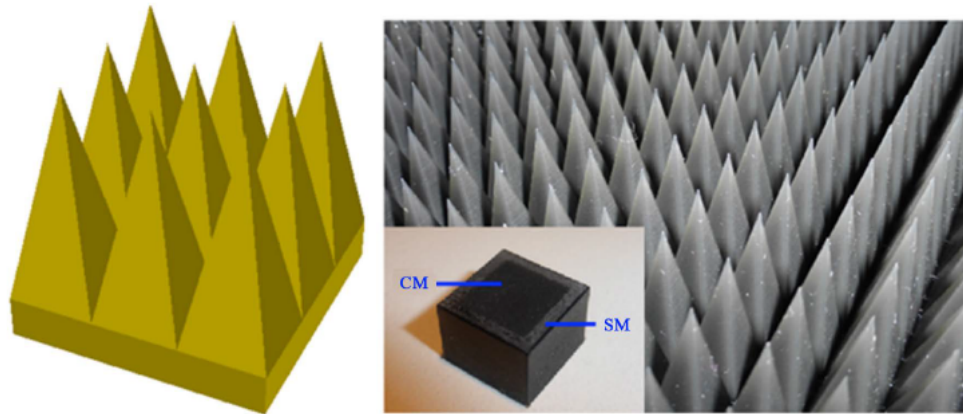


Figura 1.1: Modelo 3D de absorbente piramidal a la izquierda. Absorbente piramidal impreso con la impresora 3D Stratasys Objet500 Connex a la derecha. Se muestra además la estructura interna del absorbente

Se construyeron absorbentes para frecuencias desde 0,5 [MHz] hasta 5 [MHz] y desde 1 [MHz] hasta 10 [MHz], con un núcleo de un material de goma y un recubrimiento de una variedad de elastómeros combinando materiales rígidos y flexibles. El modelo y prototipo impreso se pueden observar en la figura 1.1 ¹. Los resultados obtenidos muestran una reducción del eco de hasta 38,9 [dB] y una pérdida de transmisión de 20 [dB] para el rango de frecuencias de diseño. La estructura piramidal funciona por el principio de que las ondas incidentes son transmitidas parcialmente en la pirámide y subsecuentemente atenuadas. Diseñando cuidadosamente la inclinación de las pirámides y los ángulos de incidencia, la componente reflejada se propaga hacia otra superficie, donde el proceso de atenuación se repite hasta llegar a la base de la pirámide. Las pirámides tienen un piso base de 9,4 [mm] y 4,7 [mm] de altura para el rango desde 0,5 [MHz], y de 4,7 [mm] de base y 2,35 [mm] de altura para el rango desde 1 [MHz]. La pirámide como tal tiene una altura de 23,5 [mm] para 0,5 [MHz], y 11,75 [mm] para 1 [MHz]. Estas dimensiones son varias órdenes de magnitud mayor que las longitudes de onda implicadas, por lo tanto, este ejemplo demuestra la capacidad de la impresión 3D para fabricar absorbentes efectivos en varios rangos de frecuencias, pero su mecanismo de acción no proviene de la interacción de las ondas con estructuras de escala similar o inferior a la longitud de onda, como es típico en metamateriales.

¹Obtenido de “Rapid Prototyping of Pyramidal Structured Absorbers for Ultrasound,” por Acquaticci, et al., 2017, *Open Journal of Acoustics*, 07(03), p. 83–93 (<https://doi.org/10.4236/oja.2017.73008>). Copyright 2017 de autores y Scientific Research Publishing Inc. Trabajo bajo la licencia Creative Commons Attribution International (CC BY 4.0) (<http://creativecommons.org/licenses/by/4.0/>)

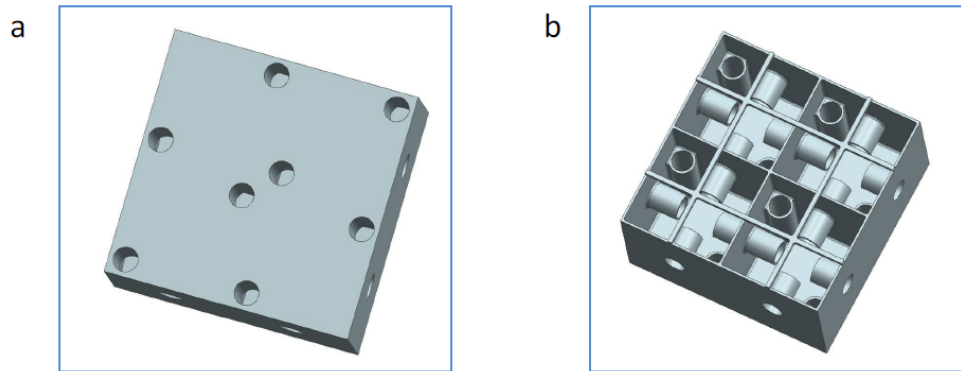


Figura 1.2: Diseño del MMA fabricado con el sistema PolyJet (a) y su estructura interna (b)

También en el año 2017, Vdovin, Tomilina, Smelov y Laktionova [10] fabricaron un absorbente con una estructura de MMA utilizando un método de DIW por inyección de tinta en una impresora Objet Eden 350 con el sistema PolyJet. Se construye un MMA basado en una celda con paredes de 1 [mm] de espesor y con tubos de extremos abiertos como elementos resonantes. Cada celda está contenida en un cubo de 50 [mm] de lado, y el prototipo fabricado contiene 16 celdas en 4×4 con dimensiones de $200 \times 200 \times 50$ [mm]. El diseño del prototipo se muestra en la figura 1.2². El material de construcción es tinta polimérica, lo cual se justifica dado que el comportamiento como medio continuo del MMA se basa en que la longitud de onda sea mayor que el tamaño de la celda periódica, por lo tanto, los parámetros básicos del modelo se fundamentan en parámetros geométricos más que en propiedades intrínsecas de los materiales. Los autores también toman especial cuidado en la orientación del prototipo en la plataforma de construcción, buscando evitar posibles distorsiones y minimizar esfuerzos residuales. El uso de polímeros como material implica que la parte requiere de un posprocesado de curado UV. Teniendo en cuenta el funcionamiento de los MMA y que las dimensiones del prototipo son de escala milimétrica, la frecuencia de operación no puede ser muy elevada. En este caso, es desde 300 [Hz] hasta 600 [Hz]. Se muestra que el MMA absorbe hasta el doble de potencia acústica comparado con un absorbente estándar del mismo tamaño (paneles perforados cubiertos de lana) para este rango de

²Obtenido de “Implementation of the additive PolyJet technology to the development and fabricating the samples of the acoustic metamaterials,” por Vdovin, et al., 2017, *Procedia Engineering*, 176, p. 595-599 (<https://doi.org/10.1016/j.proeng.2017.02.302>). Copyright 2017 de autores y Elsevier Ltd. Artículo de acceso abierto bajo la licencia CC BY-NC-ND (<http://creativecommons.org/licenses/by-nc-nd/4.0/>)

frecuencias.

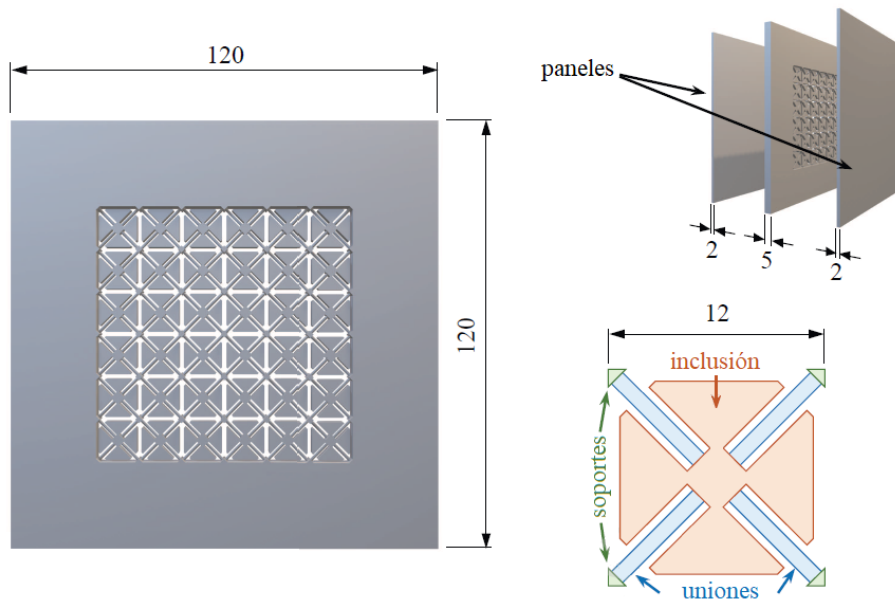


Figura 1.3: Diseño del MMA fabricado con el sistema MJF y estructura interna de la celda unitaria

Un ejemplo similar se encuentra en el trabajo del año 2020 de Roca, Pàmies, Cante, Lloberas-Valls y Oliver [11], en donde construyen un absorbente con una estructura de MMA utilizando el método MJF con Poliamida 11 como material de construcción. El prototipo consiste en un panel de $120 \times 120 \times 5$ [mm], con 36 celdas en 6×6 ubicadas en el centro. Dos paneles de $120 \times 120 \times 2$ [mm] van unidos a cada lado con el fin de aislar y contener las celdas individuales, permitiendo la aparición de modos de resonancia interna. Las dimensiones de cada celda son de $12 \times 12 \times 5$ [mm], y consisten en inclusiones en forma de cuadrilóbulo conectadas mediante uniones a delgados soportes estructurales en los vértices. Esta estructura se puede observar en la figura 1.3³. Las inclusiones actúan como una masa que se convierte en el componente resonante, las uniones permiten a la celda tener modos de resonancia de interés en el rango de frecuencias deseado, y los soportes en los vértices son el punto de unión con los paneles y aíslan cada celda. El diseño de esta celda resulta de alcanzar la resonancia interna en la frecuencia requerida manteniendo la celda delgada y pequeña, para esto, la rigidez

³Adaptado de “Experimental and Numerical Assessment of Local Resonance Phenomena in 3D-Printed Acoustic Metamaterials,” por Roca, et al., 2020, *Journal of Vibration and Acoustics*, 142(2) (<https://doi.org/10.1115/1.4045774>). Copyright 2019 de ASME

flexional de las uniones debe ser minimizada, y la masa de las inclusiones debe ser lo suficientemente grande. La manera de lograr esto es haciendo las uniones más largas e incrementando el volumen de las inclusiones para que ocupen el mayor espacio posible dentro de la celda, obteniendo la forma de cuadrilóbulo. Se mide la pérdida de transmisión en un rango desde 500 [Hz] hasta 1500 [Hz] y se compara con paneles sólidos del mismo material con dimensiones similares. Los paneles MMA muestran mejor atenuación de sonido, con un máximo de pérdida de transmisión de alrededor de 65 [dB] a 1050 [Hz]. El MMA también presenta máximos de transmisión a 550 [Hz] y 1250 [Hz], que tienen relación con el montaje experimental y con los límites de la región de brecha de bandas. Los modos de resonancia se desplazan en hasta 200 [Hz] de lo esperado por simulaciones, debido a tolerancias geométricas del método de fabricación, con desviaciones en los diámetros de 0,1 [mm], revelando la importancia de contar con un método preciso de fabricación.

Estos ejemplos muestran la efectividad de los metamateriales y entregan ideas respecto a su geometría y fabricación, sin embargo, ambos casos trabajan con ondas acústicas audibles de no muy alta frecuencia, y por tanto las estructuras pueden ser de escalas milimétricas para ser de tamaño similar o menor que la longitud de onda. Las frecuencias de operación de ondas ultrasónicas son mayores a 20 [kHz] y pueden llegar hasta los 10 [MHz], lo cual implica el uso de estructuras micrométricas para que surjan los fenómenos de resonancia propios de los MMA.

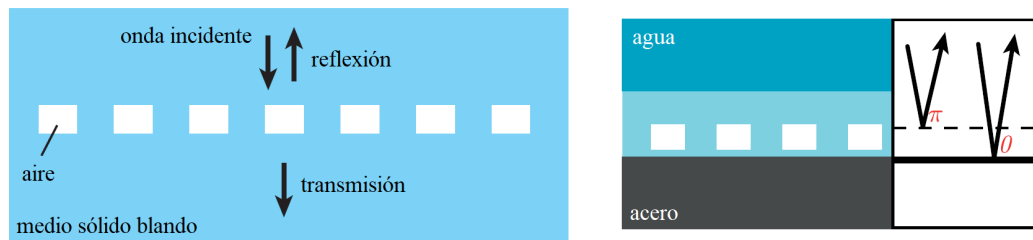


Figura 1.4: Esquema básico de la metapantalla de burbujas a la izquierda. Montaje de metapantalla cerca de un reflector a la derecha. Se ilustra el cambio de fase en π radianes inducido por las burbujas y en 0 radianes inducido por el acero

Un ejemplo de aplicación de MMA para frecuencias ultrasónicas se encuentra en el trabajo del año 2015 de Leroy, Strybulevych, Lanoy, Lemoult, Tourin y Page [12], en donde construyen un MMA utilizando un método de litografía blanda con polidimetilsiloxano como material de construcción. Los autores abordan el problema de la superabsorción, esto es, un material que tenga mínima transmisión y reflexión, pero mi-

nimizando el espesor y alcanzando una estructura sub longitud de onda. Se comienza con un modelo analítico de un metamaterial hecho de una metapantalla de burbujas, que consiste en una secuencia de cilindros de gas en un sólido blando. El modelo presentado por los autores entrega una expresión analítica confiable para predecir la respuesta de la metapantalla, y revela cómo la estructura del MMA, esto es, el tamaño de las burbujas, la separación entre ellas y la viscosidad de la matriz, se puede afinar para obtener cualquier valor de transmisión y optimizar la absorción en un amplio rango de frecuencias. Con este montaje inicial, la absorción máxima que se puede alcanzar es de la mitad de la energía incidente, sin embargo, existe otra situación en la que se puede alcanzar una absorción mucho mayor, que es el caso de una metapantalla de burbujas cerca de un reflector, debido a la interferencia destructiva entre la reflexión de las burbujas y la reflexión del acero (utilizado como reflector), haciendo posible la superabsorción. Esta predicción fue verificada experimentalmente mediante la construcción del MMA mencionado al inicio de este ejemplo, con cavidades cilíndricas de $24\ [\mu m]$ de diámetro y $13\ [\mu m]$ de altura, con una separación de $120\ [\mu m]$ que fue entregada por su modelo analítico. La figura 1.4⁴ muestra un esquema de la configuración inicial y de este nuevo montaje experimental. Los resultados muestran que entre $1,4\ [MHz]$ y $2,9\ [MHz]$, menos del 6% de la energía es reflejada, llegando a 0,2% a $1,6\ [MHz]$, y que la absorción en este rango de frecuencias es mayor al 91%, llegando a 97% a $1,6\ [MHz]$. La superabsorción tampoco se limita a la incidencia normal, ya que incluso ondas inclinadas pueden ser absorbidas. Cabe mencionar que este metamaterial es destacable por el hecho de incorporar y beneficiarse enormemente del fuerte acoplamiento que ocurre entre las burbujas resonadoras, un fenómeno que suele no ser aprovechado en aplicaciones de MMA.

En estos ejemplos, se exploraron aplicaciones de absorbentes acústicos, que en algunos casos consistían en metamateriales, y en el último caso se aplicaron para frecuencias ultrasónicas. No obstante, en todos los casos, la geometría principal del absorbente era un diseño que en gran medida estaba predefinido, realizando ajustes para cumplir con ciertas restricciones y parámetros deseados. Es en este ámbito donde surge una posibilidad de aporte, utilizando técnicas computacionales de algoritmos de optimización topológica que entreguen como resultado el diseño y la forma de un absorbente acústi-

⁴Adaptado de “Superabsorption of acoustic waves with bubble metascreens,” por Leroy, et al., 2015, *Phys. Rev. B*, 91, 020301 (<https://doi.org/10.1103/PhysRevB.91.020301>). Copyright 2015 de American Physical Society

co aplicado en ultrasonido, haciendo uso de estructuras en una escala similar o inferior a la longitud de onda involucrada.

Capítulo 2

Metodología

2.1. Modelo matemático

El problema a modelar consiste en la propagación de ondas acústicas tanto en el espacio abierto de fluido, como en el absorbente sólido. En el caso del fluido, la ecuación de onda gobierna la propagación de sonido en el régimen temporal:

$$c^2 \Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial t^2} \quad (2.1)$$

donde c es la velocidad del sonido en el medio, y U en este caso es la presión acústica, entendida como la diferencia entre la presión instantánea y la presión estática, pero cabe mencionar que esta relación se puede establecer también para variaciones de temperatura y densidad [13].

Dado que las ondas ultrasónicas en aplicaciones con dimensiones pequeñas alcanzan rápidamente un estado estacionario, es conveniente analizar el caso independiente del tiempo, asumiendo un régimen armónico permanente y separando la presión en una parte espacial y otra temporal, de tal forma que $U(\mathbf{x}, t) = u(\mathbf{x})z(t)$. Esta suposición permite obtener la ecuación de Helmholtz:

$$\Delta u + k^2 u = 0 \quad (2.2)$$

donde $k = \omega/c$ es el número de onda, con $\omega = 2\pi f$, siendo ω la frecuencia angular,

y f la frecuencia de pulsación [13]. En esta ecuación, la variable u corresponde a la presión acústica compleja, donde la presión física corresponde a la magnitud de u .

Para ondas propagándose en un medio elástico, aplica la ecuación de Navier de elasticidad lineal, asumiendo régimen armónico permanente con frecuencia angular ω :

$$\nabla \cdot \sigma = -\rho \omega^2 u \quad (2.3)$$

donde σ es la amplitud del tensor de esfuerzos, ρ es la densidad del material, y u es la amplitud del campo de desplazamiento.

Asumiendo un material isotrópico y homogéneo, es posible relacionar σ con el tensor infinitesimal de deformación ε mediante la ley de Hooke, introduciendo los coeficientes de Lamé λ y μ . A su vez, es posible relacionar ε con u a partir de la definición $\varepsilon = \frac{1}{2} (\nabla u + [\nabla u]^T)$ [14]. Con estas consideraciones, se puede reescribir la ecuación 2.3 en base a los coeficientes de Lamé:

$$\mu \Delta u + (\lambda + \mu) \nabla (\nabla \cdot u) + \rho \omega^2 u = 0 \quad (2.4)$$

Aplicando la descomposición de Helmholtz al campo de desplazamiento, se obtiene el campo en función de dos funciones potenciales ϕ_1 y ϕ_2 [15]:

$$u = \nabla \phi_1 + \nabla \times \phi_2 \quad (2.5)$$

Sustituyendo la ecuación 2.5 en la ecuación 2.4 y aplicando propiedades e identidades del cálculo vectorial, se llega a la expresión:

$$\nabla [(\lambda + 2\mu) \Delta \phi_1 + \rho \omega^2 \phi_1] + \nabla \times [\mu \Delta \phi_2 + \rho \omega^2 \phi_2] = 0 \quad (2.6)$$

la cual se satisface si ϕ_1 y ϕ_2 satisfacen las ecuaciones:

$$\Delta \phi_1 + k_p^2 \phi_1 = 0 \quad (2.7)$$

$$\Delta \phi_2 + k_s^2 \phi_2 = 0 \quad (2.8)$$

donde $k_p = \omega/c_p$ es el número de la onda de compresión, c_p es la velocidad de la onda acústica, siendo $c_p = \sqrt{(\lambda + 2\mu)/\rho}$, $k_s = \omega/c_s$ es el número de la onda de corte y c_s

es la velocidad de la onda de corte, siendo $c_s = \sqrt{\mu/\rho}$ [16]. En esta escala, la onda de corte es apenas detectable, por lo que solo se utiliza la ecuación 2.7 para modelar la propagación en un sólido elástico.

De esta manera, se establece que la ecuación de Helmholtz se puede utilizar tanto para el medio fluido, como muestra la ecuación 2.2, como para el medio sólido elástico, como muestra la ecuación 2.7, considerando solamente distintos números de onda para cada caso.

Para el diseño del absorbente acústico, es de interés estudiar la dispersión de la onda al interactuar con el material sólido. Para esto, se descompone la onda acústica como una suma entre la onda incidente (u_i) y la onda dispersada (u_d):

$$u = u_i + u_d \quad (2.9)$$

La onda incidente se describe mediante la siguiente expresión, especificando solo la parte espacial según la descomposición realizada para obtener la ecuación de Helmholtz:

$$u_i = e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}} \quad (2.10)$$

donde \mathbf{k}_0 es el vector de onda en el medio fluido, y $\mathbf{x} = (x; y)$ es el vector de posición. Reemplazando las ecuaciones 2.9 y 2.10 en la ecuación 2.2, y despejando para u_d , se obtiene la siguiente expresión para la onda de dispersión:

$$\Delta u_d + |\mathbf{k}(\mathbf{x})|^2 u_d = (|\mathbf{k}_0|^2 - |\mathbf{k}(\mathbf{x})|^2) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}} \quad (2.11)$$

donde $\mathbf{k}(\mathbf{x})$ es el vector de onda dependiente de la posición, que adquiere un valor de k_0 en el medio fluido y un valor de k_1 en el medio sólido. La ecuación 2.11 es la que se utilizará para modelar la propagación de las ondas acústicas a través de ambos medios, y corresponde a una ecuación de Helmholtz no homogénea, típicamente escrita como:

$$\Delta u + k^2 u = -f \quad (2.12)$$

con $f = (|\mathbf{k}(\mathbf{x})|^2 - |\mathbf{k}_0|^2) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}}$ para este caso.

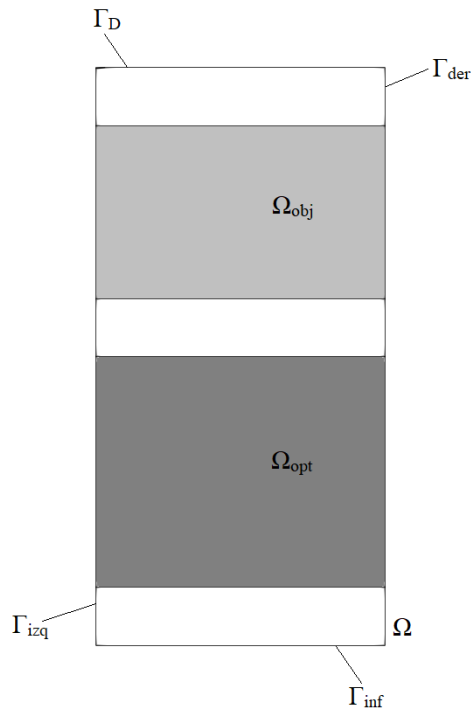


Figura 2.1: Región de modelación del problema, con bordes y subregiones de medición de función objetivo y optimización

2.2. Geometría y configuración general del problema

La geometría diseñada para el problema se muestra en la figura 2.1. La dirección de propagación de la onda es desde el borde superior hacia abajo en el dominio Ω , el cual contiene dos subregiones. La región Ω_{opt} corresponde a la zona de optimización, es decir, donde el algoritmo de optimización tiene permitido rellenar y cambiar la forma del material absorbente. Se excluye de Ω_{opt} una región inferior del dominio, ya que esta zona corresponde a la base del absorbente, por lo que se rellena completamente desde el inicio, sin permitir al algoritmo alterar esa región. Por otro lado, la región Ω_{obj} corresponde a la zona en la cual se calcula la función objetivo, buscando medir la intensidad de la onda dispersada producto del material absorbente que se encuentra en Ω_{opt} . Respecto al material absorbente, se modela como un cuerpo totalmente rígido, provocando una reflexión total de la onda incidente, en contraste con la modelación de un material elástico, donde una parte de la energía incidente se transmite en forma de vibraciones elásticas y las ondas de presión acústicas actúan como cargas variantes en el tiempo [17].

El borde superior Γ_D corresponde al borde en el cual se aplicará la condición de Dirichlet, mientras que los bordes izquierdo, inferior y derecho forman el borde Γ_N en el cual se aplicará la condición de Neumann, de tal forma que $\Gamma_N = \Gamma_{izq} \cup \Gamma_{inf} \cup \Gamma_{der}$. La condición de borde de Dirichlet que se impone en este problema es la onda incidente descrita en la ecuación 2.10. Considerando la dirección de propagación de la onda, el vector de onda incidente tiene la forma $\mathbf{k}_0 = (0; -k_0)$, con lo cual, el producto escalar presente en la expresión 2.10 queda de la forma $\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x} = -k_0 y$. Mientras tanto, la condición de Neumann que se impone es $\nabla u \cdot \hat{\mathbf{n}} = \frac{\partial u}{\partial n} = 0$. Esta condición de Neumann corresponde a modelar una pared rígida [18], que genera una reflexión de las ondas en los bordes impuestos [19], lo cual simplifica apreciablemente una parte importante del algoritmo que se describirá más adelante.

La optimización topológica busca minimizar una función objetivo, que en este caso es el cuadrado de la amplitud de la presión acústica, en la región de medición correspondiente. Por lo tanto, la función objetivo que interesa minimizar es

$$J(\Omega_1) = \int_{\Omega_{obj}} j(u_d) dx = \int_{\Omega_{obj}} |u_d|^2 dx = \int_{\Omega_{obj}} u_d \cdot \overline{u_d} dx \quad (2.13)$$

Adicionalmente, se divide el dominio Ω en Ω_0 , definida como la región sin material absorbente (que también puede ser llamada región libre, región vacía o región de fluido) y Ω_1 , que corresponde a la región que contiene material absorbente, como muestra la figura 2.2. Notar que la región que corresponde a la base del absorbente pertenece a Ω_1 , pero está fuera de Ω_{opt} . Esta región se denomina como Ω_{1base} , definiendo también el dominio Ω_{1opt} como la región de Ω_1 contenida en Ω_{opt} .

2.3. Método de curvas de nivel

El algoritmo de optimización de forma utilizado corresponde a un método que combina la derivada de forma y las curvas de nivel para la propagación del frente. Este método fue publicado en un artículo en 2004 por Allaire, G., Jouve, F., y Toader, A.-M. [3] que sirve de guía para escribir el programa computacional que se utilizará para desarrollar el problema.

Existen varios métodos de optimización de forma, ya que se trata de un campo muy importante y estudiado. El método clásico de análisis de sensibilidad respecto de la

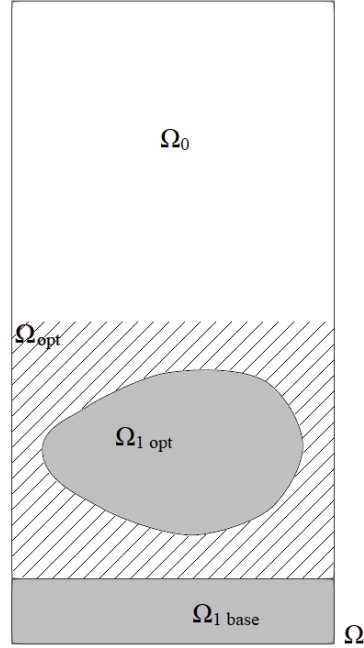


Figura 2.2: Región de modelación del problema, con subregiones de dominio sin material absorbente y dominio con material absorbente de una forma arbitraria

forma es muy general y puede aplicarse a cualquier tipo de función objetivo y modelo estructural, pero presenta dos desventajas principales: su costo computacional es alto debido a que requiere remallado, y tiene una tendencia a caer en mínimos locales muy lejanos a los globales. También existe el método de homogeneización y sus variantes, que pueden resolver estos problemas, pero están principalmente restringidos a modelos de elasticidad lineal y a funciones objetivo particulares. Se han desarrollado además métodos basados en curvas de nivel que han demostrado ser versátiles y eficientes para diversas aplicaciones. El método presentado por Allaire et al. busca generalizar estos métodos proponiendo una implementación sistemática del método de curvas de nivel donde la velocidad del frente es obtenida de un análisis de sensibilidad respecto de la forma, calculando una derivada de forma mediante un problema adjunto, y utilizando esa derivada como la velocidad normal de la frontera que se mueve durante el proceso de optimización [3].

2.3.1. Derivada de forma

Se define un conjunto de formas admisibles que deben ser conjuntos abiertos contenidos en el dominio de optimización Ω_{opt} unidos con la base del absorbente y con un volumen fijo V_{obj} :

$$\Omega_{adm} = \{(\Omega_{1_{opt}} \subset \Omega_{opt}) \cup \Omega_{1_{base}} \text{ tal que } |\Omega_1| = V_{obj}\} \quad (2.14)$$

El problema de optimización de forma consiste en encontrar:

$$\inf_{\Omega_1 \in \Omega_{adm}} J(\Omega_1) \quad (2.15)$$

para lo cual se recurre a la noción de la derivada de forma. Para esto, se calcula la derivada de forma para un dominio general Ω , con condiciones de Dirichlet y Neumann generales impuestas en Γ_D y Γ_N , respectivamente. Posteriormente, se aplicarán las condiciones particulares que existen en Ω_{opt} . Teniendo un dominio de referencia Ω , se establecen dominios del tipo $\Omega_\theta = (Id + \theta)(\Omega)$ definidos por $\Omega_\theta = \{x + \theta(x) \mid x \in \Omega\}$, siendo $\theta(x)$ en este caso un campo vectorial que juega el rol del desplazamiento del dominio de referencia Ω . La derivada de forma de $J(\Omega)$ en Ω se define como la derivada de Fréchet en $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ en 0 de la aplicación $\theta \rightarrow J((Id + \theta)(\Omega))$, esto es:

$$J((Id + \theta)(\Omega)) = J(\Omega) + J'(\Omega)(\theta) + o(\theta), \text{ con } \lim_{\theta \rightarrow 0} \frac{|o(\theta)|}{\|\theta\|} = 0 \quad (2.16)$$

donde $J'(\Omega)$ es la derivada de forma y es una forma lineal continua en $W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ y $J'(\Omega)(\theta)$ es una derivada direccional.

Para el cálculo de la derivada de forma se utiliza un método rápido y simple propuesto por J. Céa llamado el Método del Lagrangiano, que permite encontrar la derivada de forma de una función objetivo sin conocer la derivada de forma de la solución de la ecuación diferencial parcial, y permite encontrar la correcta definición del problema adjunto [20].

Adicionalmente, se utilizan dos lemas en el cálculo de la derivada:

Lema 1. Sea Ω un conjunto abierto con frontera suave y acotado y $\phi(x) \in W^{1,1}(\mathbb{R}^N)$.

Si se define

$$J(\Omega) = \int_{\Omega} \phi(x) dx \quad (2.17)$$

entonces J es diferenciable en Ω y

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\Omega} \operatorname{div}(\theta(x)\phi(x)) dx = \int_{\partial\Omega} \theta(x) \cdot n(x)\phi(x) ds \quad (2.18)$$

para todo $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$.

Lema 2. Sea Ω un conjunto abierto con frontera suave y acotado y $\phi(x) \in W^{2,1}(\mathbb{R}^N)$.

Si se define

$$J(\Omega) = \int_{\partial\Omega} \phi(x) ds \quad (2.19)$$

entonces J es diferenciable en Ω y

$$J'(\Omega)(\theta) = \int_{\partial\Omega} \theta \cdot n \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} + H\phi \right) ds \quad (2.20)$$

para todo $\theta \in W^{1,\infty}(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$, donde H es la curvatura media de $\partial\Omega$ definida por $H = \operatorname{div} n$. Adicionalmente, este resultado aún se mantiene al reemplazar $\partial\Omega$ por Γ , un subconjunto abierto con frontera suave de $\partial\Omega$, y asumiendo que $\phi = 0$ en la frontera $\partial\Gamma$ [3].

El problema que se busca resolver para condiciones de bordes generales corresponde a:

$$\text{Problema de dispersión} \begin{cases} \Delta u + k^2 u = -f & \text{en } \Omega \\ u = u_i & \text{en } \Gamma_D \\ \frac{\partial u}{\partial n} = g & \text{en } \Gamma_N \end{cases} \quad (2.21)$$

A partir de estas expresiones, se construye el lagrangiano sumando la restricción de la función objetivo de la ecuación 2.13, la formulación variacional de la ecuación del problema de dispersión (con p como función de prueba), la formulación variacional de la condición de borde de Neumann y finalmente la condición de Dirichlet (con λ como

multiplicador de Lagrange):

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega, u, p, \lambda) = & \int_{\Omega} j(u_d) dx + \int_{\Omega} \Re[(\Delta u + k^2 u)\bar{p}] dx + \int_{\Omega} \Re[f\bar{p}] dx \\ & + \int_{\Gamma_N} \Re \left[\left(g - \frac{\partial u}{\partial n} \right) \bar{p} \right] ds + \int_{\Gamma_D} \Re[\lambda(u - u_i)] ds \end{aligned} \quad (2.22)$$

A partir de esta definición del lagrangiano, se procede a calcular las derivadas respecto a cada una de las variables y a igualar a cero para encontrar expresiones de interés. La derivada de \mathcal{L} respecto a p en una dirección ϕ está dada por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial p}(\phi) = 0 = \int_{\Omega} \Re[(\Delta u + k^2 u)\bar{\phi}] dx + \int_{\Omega} \Re[f\bar{\phi}] dx + \int_{\Gamma_N} \Re \left[\left(g - \frac{\partial u}{\partial n} \right) \bar{\phi} \right] ds \quad (2.23)$$

de lo cual se extrae $\Delta u + k^2 u = -f$ en Ω y $\frac{\partial u}{\partial n} = g$ en Γ_N , que corresponde a la ecuación de dispersión y a la condición de Neumann, respectivamente. La derivada de \mathcal{L} respecto a λ en una dirección ϕ está dada por:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda}(\phi) = 0 = \int_{\Gamma_D} \Re[\phi(u - u_i)] ds \quad (2.24)$$

de lo cual se extrae $u = u_i$ en Γ_D , que corresponde a la condición de Dirichlet. Posteriormente, se calcula la derivada de \mathcal{L} respecto a u en una dirección ϕ , para lo cual es necesario integrar por partes la expresión que contiene el producto $\bar{p}\Delta u$ aplicando la primera identidad de Green:

$$\int_{\Omega} \bar{p}\Delta u dx = \int_{\partial\Omega} \bar{p} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \bar{p} dx \quad (2.25)$$

$$= \int_{\partial\Omega} \bar{p} \frac{\partial u}{\partial n} ds - \int_{\partial\Omega} u \frac{\partial \bar{p}}{\partial n} ds + \int_{\Omega} u \Delta \bar{p} dx \quad (2.26)$$

recordando que $\partial\Omega = \Gamma_D \cup \Gamma_N$.

Reemplazando la expresión en 2.26 en el lagrangiano en 2.22, la derivada de \mathcal{L}

respecto a u en una dirección ϕ corresponde a:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\phi) = 0 = & \int_{\Omega} j'(u_d) \phi \, dx + \int_{\Gamma_D} \Re \left[\bar{p} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds + \int_{\Gamma_N} \Re \left[\bar{p} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds \\ & - \int_{\Gamma_D} \Re \left[\phi \frac{\partial p}{\partial n} \right] ds - \int_{\Gamma_N} \Re \left[\phi \frac{\partial p}{\partial n} \right] ds + \int_{\Omega} \Re [\phi (\Delta p + k^2 \bar{p})] \, dx \\ & - \int_{\Gamma_N} \Re \left[\bar{p} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds + \int_{\Gamma_D} \Re [\lambda \phi] \, ds \quad (2.27) \end{aligned}$$

Considerar $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\phi)$ con $\phi = 0$ y $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$ en $\partial\Omega$. La expresión en 2.27 queda como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\phi) = 0 = \int_{\Omega} j'(u_d) \phi \, dx + \int_{\Omega} \Re [\phi (\Delta p + k^2 \bar{p})] \, dx \quad (2.28)$$

de lo cual se extrae $\Delta p + k^2 p = -\overline{j'(u_d)}$. Notar que $j'(u_d)$ corresponde a $u_d + \bar{u}_d = 2 \cdot \Re(u_d)$, por lo que se puede eliminar la operación del conjugado sobre j' .

Considerar $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\phi)$ con $\frac{\partial \phi}{\partial n} = 0$. Aplicando la relación recién encontrada entre p y j , la expresión en 2.27 queda como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\phi) = 0 = - \int_{\Gamma_D} \Re \left[\phi \frac{\partial p}{\partial n} \right] ds - \int_{\Gamma_N} \Re \left[\phi \frac{\partial p}{\partial n} \right] ds + \int_{\Gamma_D} \Re [\lambda \phi] \, ds \quad (2.29)$$

de lo cual se extrae $\lambda = \frac{\partial p}{\partial n}$ en Γ_D y $\frac{\partial p}{\partial n} = 0$ en Γ_N .

Considerar $\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\phi)$ para un ϕ general. Aplicando todas las relaciones encontradas en estos pasos, la expresión en 2.27 queda como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial u}(\phi) = 0 = \int_{\Gamma_D} \Re \left[\bar{p} \frac{\partial \phi}{\partial n} \right] ds \quad (2.30)$$

de lo cual se extrae $p = 0$ en Γ_D .

De estas expresiones, se ha encontrado la formulación del problema adjunto:

$$\text{Problema adjunto} \begin{cases} \Delta p + k^2 p = -j'(u_d) & \text{en } \Omega_{obj} \\ p = 0 & \text{en } \Gamma_D \\ \frac{\partial p}{\partial n} = 0 & \text{en } \Gamma_N \end{cases} \quad (2.31)$$

recordando que el término $j'(u_d)$ proviene de la función objetivo en 2.13, por lo que solo se considera su valor en Ω_{obj} , siendo cero fuera de este dominio. Posteriormente se calcula la derivada de \mathcal{L} respecto a Ω en una dirección θ , para lo cual se reemplaza la expresión en 2.25 en el lagrangiano en 2.22. Simplificando, agrupando los términos y aplicando la expresión para λ , el lagrangiano queda como:

$$\begin{aligned} \mathcal{L}(\Omega, u, p, \lambda) = & \int_{\Omega} j(u_d) dx - \int_{\Omega} \Re \left[\nabla u \cdot \overline{\nabla p} - (k^2 u + f) \overline{p} \right] dx \\ & + \int_{\Gamma_N} \Re[g \overline{p}] ds + \int_{\Gamma_D} \Re \left[\overline{p} \frac{\partial u}{\partial n} + \frac{\partial \overline{p}}{\partial n} (u - u_i) \right] ds \end{aligned} \quad (2.32)$$

donde el último término conviene reemplazarlo por $\int_{\Gamma_D} \Re[h] ds$.

La derivada de forma se obtiene derivando \mathcal{L} respecto a Ω en una dirección θ [3], de tal forma que:

$$J'(\Omega)(\theta) = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\Omega, u, p, \lambda)(\theta) \quad (2.33)$$

Aplicando los lemas 1 y 2, esta derivada queda como:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\theta) = & \int_{\partial \Omega} \left(j(u_d) - \Re \left[\nabla u \cdot \overline{\nabla p} - (k^2 u + f) \overline{p} \right] \right) (\theta \cdot n) ds \\ & + \int_{\Gamma_N} (\theta \cdot n) \Re \left[\left(\frac{\partial g}{\partial n} + Hg \right) \overline{p} \right] ds + \int_{\Gamma_D} (\theta \cdot n) \Re \left[\frac{\partial h}{\partial n} + Hh \right] ds \end{aligned} \quad (2.34)$$

Esta derivada de forma es compleja de calcular debido a los términos en Γ_N y Γ_D , sin embargo, aplicando los parámetros específicos de este problema se puede simplificar apreciablemente esta derivada. Como ya fue mencionado, la condición de Neumann que se impone es $g = 0$, lo cual elimina el término en Γ_N . Por otro lado, al aplicar esta derivada en el dominio de optimización Ω_{opt} , se puede establecer que $j(u_d) = 0$ y $\Gamma_D \cap \partial \Omega_{opt} = \emptyset$. Por lo tanto, la derivada de forma evaluada en Ω_{opt} se escribe como:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \Omega}(\theta) \Big|_{\Omega_{opt}} = \int_{\partial \Omega_{opt}} \left(-\Re \left[\nabla u \cdot \overline{\nabla p} - (k^2 u + f) \overline{p} \right] \right) (\theta \cdot n) ds \quad (2.35)$$

$$J'(\Omega_1)(\theta) = \int_{\partial \Omega_{opt}} v \theta \cdot n ds = \int_{\partial \Omega_{opt}} \left(-\Re \left[\nabla u \cdot \overline{\nabla p} - (k^2 u + f) \overline{p} \right] \right) (\theta \cdot n) ds \quad (2.36)$$

definiendo $v = -\Re \left[\nabla u \cdot \overline{\nabla p} - (k^2 u + f) \overline{p} \right]$.

2.3.2. Representación de formas por el método de curvas de nivel

El método de sensibilidad respecto a la forma ha sido implementado en el pasado en un enfoque lagrangiano, realizando un mallado de Ω y desplazando la malla para deformar Ω_1 según la dirección θ . Sin embargo, este método tiene la desventaja de necesitar remallado en caso de que la forma se deforme demasiado, lo cual puede ser muy costoso computacionalmente. Adicionalmente, la estructura lagrangiana no puede manejar fácilmente cambios en topología, ya que le es difícil a la malla unir o separar partes de la frontera del dominio. Es por esto que el trabajo de 2004 de Allaire, et. al. [3] utiliza un enfoque euleriano, utilizando un método de curvas de nivel para capturar la forma Ω_1 en una malla fija. De esta forma, el dominio global Ω se malla de manera uniforme una sola vez y para todo el algoritmo. Los dominios Ω_0 y Ω_1 se definen a través de una función de curva de nivel, tal que

$$\begin{cases} \psi(x) \leq 0 & \iff x \in \Omega_0 \\ \psi(x) > 0 & \iff x \in \Omega_1 \end{cases} \quad (2.37)$$

y tomarán la forma inicial que uno defina para ψ . A partir del valor de ψ se determina el valor para el número de onda k según la posición, como aparece en la ecuación 2.11:

$$k(x) = \begin{cases} k_0 & \iff \psi(x) \leq 0 \\ k_1 & \iff \psi(x) > 0 \end{cases} \quad (2.38)$$

Como ya fue mencionado, el material absorbente se modela como un cuerpo totalmente rígido que no sufre deformaciones por cargas aplicadas. Esta definición implica un módulo de compresibilidad que tiende a infinito, por lo que la velocidad de la onda acústica también tiende a infinito, con lo cual el valor del número de onda k_1 tiende a cero, siguiendo las definiciones para cada uno de estos términos. De esta manera, se opta por no definir explícitamente la frontera entre Ω_0 y Ω_1 y tener que imponer condiciones de salto para modelar la interfaz, sino que se elige definir un número de onda muy pequeño en comparación con el valor en la región libre para modelar la interacción con un cuerpo rígido.

La forma Ω_1 evolucionará según la dirección de descenso elegida en un tiempo ficticio. La evolución de la función de curva de nivel está gobernada por una ecuación de Hamilton-Jacobi, que se expresa como:

$$\frac{\partial \psi}{\partial t} + A|\nabla \psi| = 0 \quad (2.39)$$

Esta ecuación de Hamilton-Jacobi está definida para todo el dominio Ω_{opt} siempre y cuando la velocidad de advección A sea conocida en todo lugar. En este caso, se puede definir una dirección de descenso en todo el dominio Ω_{opt} como:

$$\theta = -vn \quad (2.40)$$

utilizando el valor de v proveniente de la derivada de forma en la ecuación 2.36. Entonces, la componente normal $\theta \cdot n = -v$ corresponde a la velocidad de advección en la ecuación 2.39, de tal forma que:

$$A = \Re \left[\nabla u \cdot \overline{\nabla p} - (k^2 u + f) \overline{p} \right] \quad (2.41)$$

2.3.3. Lagrangiano aumentado como restricción de volumen para optimización de forma

El proceso de optimización tiene como fin minimizar la función objetivo descrita en 2.13 modificando la forma de Ω_1 . No obstante, la definición del conjunto de formas admisibles en 2.14 también fija un volumen para los conjuntos Ω_1 . Esto es necesario en aplicaciones de optimización topológica para evitar resultados indeseados como que la región Ω_{opt} sea completamente rellena o vaciada de material, o que el algoritmo entregue como resultado un óptimo no fabricable, buscando en cambio que la forma de Ω_1 sea deformada paulatinamente hasta obtener un diseño no trivial.

Un posible método para controlar el volumen es un método de penalización utilizando un multiplicador de Lagrange fijo. Sin embargo, este método demostró ser incapaz de implementar las restricciones de manera exacta y requería de ensayo y error para fijar el factor de penalización correcto. Razón por la cual se opta por utilizar el método del multiplicador de Lagrange aumentado, el cual fue implementado en conjunto con el método de curvas de nivel en un artículo de 2018 de Hesse, S., Leidinger, L.,

Kremheller, J., Lukaszewicz, D. y Duddeck F. [21].

El método del multiplicador de Lagrange aumentado es considerablemente más popular que el método de penalización, ya que tiene la capacidad de converger a un buen óptimo cumpliendo con la restricción volumétrica. Adicionalmente, este método converge más rápido que el método de penalización y es bien conocido por su estabilidad numérica [21]. La función del lagrangiano aumentado se define como:

$$\mathcal{L}(\Omega_1, h, \lambda, \eta) = J(\Omega_1) + \lambda h(\Omega_1) + \frac{1}{2} \eta h^2(\Omega_1) \quad (2.42)$$

donde $h(\Omega_1)$ es la restricción de volumen, que corresponde simplemente a la diferencia entre el volumen de Ω_1 y el volumen objetivo para una iteración determinada. Estos volúmenes se expresan como fracciones respecto al volumen máximo V_{max} , que se define como el volumen del dominio Ω_{opt} , más el volumen de Ω_{1base} , que corresponde siempre a la base del absorbente. El volumen se puede calcular a partir del signo de la función ψ . Admitiendo algo de flexibilidad con la notación, esto es:

$$V(\Omega_1) = \frac{\int_{\Omega_1} dx}{V_{max}} = \frac{\int_{\Omega} (\psi > 0) dx}{V_{max}} \quad (2.43)$$

con lo cual se define $h(\Omega_1) = V(\Omega_1) - V_{obj}$ para una iteración determinada.

Los valores λ y η corresponden al multiplicador de Lagrange y al parámetro de penalización, respectivamente. Cabe mencionar que la definición de la función en 2.42 no se debe confundir con el lagrangiano y el multiplicador de Lagrange definidos en 2.22 para calcular la derivada de forma. Los parámetros λ y η se deben actualizar en cada iteración i de la siguiente manera:

$$\lambda^{i+1} = \lambda^i + \eta^i h^i(\Omega_1) \quad (2.44)$$

$$\eta^{i+1} = \text{mín}(\eta^i + \Delta\eta, \eta_{max}) \quad (2.45)$$

de donde se observa que el parámetro η aumenta en cada iteración en una cantidad $\Delta\eta$ hasta llegar a η_{max} y quedarse ahí para el resto de las iteraciones. Finalmente, el multiplicador de Lagrange hace una modificación en la velocidad de advección en 2.41, de tal forma que:

$$A_{modificada} = A - \lambda \quad (2.46)$$

donde $A_{modificada}$ se utiliza en la ecuación de Hamilton-Jacobi en 2.39 para deformar Ω_1

2.4. Algoritmo de optimización

Una vez presentado el modelo matemático, la geometría del problema y el método de curvas de nivel, es posible describir el programa computacional encargado de aplicar el algoritmo de optimización. Para esto se utiliza la librería Gridap, presentada en un artículo de 2020 de Badia, S. y Verdugo, F., que proporciona un conjunto de herramientas para la resolución de ecuaciones diferenciales parciales mediante el método de elementos finitos escrito en el lenguaje de programación Julia. Gridap tiene una interfaz bastante expresiva que permite la resolución de ecuaciones con pocas líneas de código y con una sintaxis casi idéntica a la notación matemática, buscando encontrar un mejor balance entre rendimiento computacional, experiencia de usuario y productividad del flujo de trabajo al momento de utilizar librerías de elementos finitos [22].

La principal motivación detrás de la utilización del método de elementos finitos y la librería Gridap es un código ya existente escrito por el profesor guía de esta memoria, llamado LevelSetAdvection y disponible en un repositorio de GitHub (<https://github.com/joaquinmura/lsAdvect>). En dicho código, se resuelve un problema de elasticidad lineal, buscando minimizar la flexibilidad (*compliance*) con el método de curvas de nivel, algo muy similar a lo descrito en el artículo de 2004 de Allaire, et. al., pero utilizando la librería Gridap. Con lo cual, se cuenta con un programa con una funcionalidad ya demostrada como punto de partida para el desarrollo del problema de dispersión.

El algoritmo desarrollado tiene una primera etapa de configuración inicial y luego una etapa iterativa, y se presenta a continuación:

Algoritmo de minimización de función objetivo

1. Generación del dominio Ω , definición de la malla, los bordes y las regiones Ω_{opt} y Ω_{obj} .
2. Definición de $\psi_{original}$ correspondiente a la forma de prueba inicial.
3. Definición de los espacios de elementos finitos en Gridap, aplicando las condi-

ciones de borde de Dirichlet y Neumann según corresponda.

4. Inicialización de $\psi_{original}$ para obtener la función de curva de nivel inicial ψ^0 , la forma inicial del absorbente Ω_1^0 y el valor del volumen inicial V^0 . La inicialización consiste en resolver la ecuación 2.47, lo cual se realiza utilizando un esquema *upwind*, definiendo un paso de tiempo y un número de iteraciones.
5. Definición de $k(x)$ a partir de ψ^0 según la ecuación 2.38, utilizando una función escalón suavizada para interpolar valores en la frontera.
6. Definición de la formulación débil para el problema de dispersión y el problema adjunto.
7. Resolución de las ecuaciones diferenciales y obtención de valores iniciales u_d^0 , p^0 , A^0 y función objetivo J^0 . La velocidad de advección se normaliza dividiendo cada valor entre $\max(|A|)$.
8. Construcción del lagrangiano aumentado según la ecuación 2.42 utilizando valores iniciales elegidos para λ^0 y η^0 .
9. Para cada iteración, desde $i = 1$ hasta un máximo $i = i^{max}$ predefinido, se ejecuta el siguiente subalgoritmo:
 - 9.1. Actualización de λ y η según las ecuaciones 2.44 y 2.45.
 - 9.2. Actualización de la velocidad de advección con el nuevo λ según la ecuación 2.46.
 - 9.3. Resolución de la ecuación de Hamilton-Jacobi (ec. 2.39) utilizando un esquema *upwind* de Godunov, utilizando un intervalo de tiempo Δt predefinido.
 - 9.4. Cada determinada cantidad de iteraciones, se regulariza la función ψ , utilizando la ecuación 2.47, especificando una cantidad de iteraciones y un intervalo de tiempo.
 - 9.5. Redefinición de $k(x)$ a partir del nuevo valor de ψ según la ecuación 2.38. Se utiliza una función escalón suavizada para interpolar valores en la frontera.
 - 9.6. Resolución del problema de dispersión (ec. 2.49) y el problema adjunto

(ec. 2.50) con el nuevo valor de $k(x)$ para obtener nuevos valores de la onda dispersada u_d , el problema adjunto p , la velocidad de advección A y la función objetivo J . La velocidad de advección se normaliza dividiendo cada valor entre $\max(|A|)$.

9.7. Cálculo del volumen de ψ según la ecuación 2.48 y construcción del nuevo lagrangiano según la ecuación 2.42.

9.8. A partir de una determinada cantidad de iteraciones, se supervisa que el nuevo lagrangiano no crezca mucho respecto al lagrangiano anterior, imponiendo una restricción mediante la desigualdad en la ecuación 2.53.

9.8.1. En caso de cumplirse la desigualdad, se confirma la nueva función ψ y se da lugar a una nueva iteración.

9.8.2. En caso de no cumplirse la desigualdad, se desecha la nueva función ψ (es decir, no se actualiza respecto a la iteración anterior), se reduce el Δt utilizado para resolver la ecuación de Hamilton-Jacobi, y se da lugar a una nueva iteración.

9.9. El proceso iterativo termina al alcanzar el número máximo de iteraciones, o en el caso de que el Δt mencionado en el paso anterior se reduzca la cantidad de veces suficientes para quedar por debajo de un umbral Δt_{min} predefinido.

Fin del algoritmo

Respecto al algoritmo presentado, en la primera etapa se definen los parámetros generales, la geometría, se plantean las ecuaciones a resolver y se calcula el valor inicial para la onda dispersada u_d , el problema adjunto p , la velocidad de advección A y el valor de la función objetivo J . Existen algunos pasos dentro del algoritmo que requieren de una explicación adicional:

- En el paso 4, se inicializa la función $\psi_{original}$ para obtener una versión suavizada de la forma de prueba, ya que la definición en el paso 2 utiliza un único valor para todo punto en Ω_0 (e.g. $-0,5$) y un único valor para todo punto en Ω_1 (e.g. $0,5$), por lo que la frontera entre estos dos dominios presenta un cambio abrupto,

el cual se suaviza al inicializar. La ecuación de inicialización es la siguiente:

$$\begin{cases} \frac{\partial \psi}{\partial t} + \text{sgn}(\psi_0)(|\nabla \psi| - 1) = 0 & \text{en la malla} \\ \psi(t = 0, x) = \psi_0(x) \end{cases} \quad (2.47)$$

En este punto cabe mencionar que para el cálculo del volumen, se obtiene una mejor convergencia al calcular el volumen de la región vacía en Ω_{opt} , por lo que en realidad la ecuación 2.43 no se utiliza para el cálculo dentro del programa, sino que se utiliza:

$$\begin{aligned} V^*(\Omega_1) &= V(\Omega_{opt}) - V(\Omega_{1_{opt}}) = V(\Omega_0 \cap \Omega_{opt}) \\ V^*(\Omega_1) &= \frac{\int_{\Omega_0 \cap \Omega_{opt}} dx}{V_{max}} = \frac{\int_{\Omega_{opt}} (\psi \leq 0) dx}{V_{max}} \end{aligned} \quad (2.48)$$

- En el paso 5, se utiliza una función escalón suavizada ya que la definición de k presenta el mismo problema que la definición de $\psi_{original}$, esto es, un cambio muy abrupto en la frontera de Ω_1 . Por la misma razón, también se utiliza una función escalón suavizada en el paso 9.5.
- En el paso 6, la formulación débil para el problema de dispersión y el problema adjunto corresponden a:

$$\text{Problema de dispersión} \begin{cases} \int_{\Omega} (\nabla u_s \cdot \nabla v - |\mathbf{k}(\mathbf{x})|^2 u_d v) dx = \int_{\Omega} f v dx + \int_{\Gamma_N} g v ds \\ f = (|\mathbf{k}(\mathbf{x})|^2 - |\mathbf{k}_0|^2) e^{i\mathbf{k}_0 \cdot \mathbf{x}} \\ g = 0 \end{cases} \quad (2.49)$$

$$\text{Problema adjunto} \begin{cases} \int_{\Omega} (\nabla p \cdot \nabla q - |\mathbf{k}(\mathbf{x})|^2 p q) dx = \int_{\Omega} j'(u_d) q dx + \int_{\Gamma_N} g q ds \\ j'(u_d) = 2 \cdot \Re(u_d) \\ g = 0 \end{cases} \quad (2.50)$$

- En los pasos 7 y 9.6, la velocidad de advección se normaliza dividiendo cada valor entre $\max(|A|)$ con el objetivo de limitar la velocidad cerca de frontera.
- El esquema *upwind* de Godunov utilizado en el paso 9.3 entrega como resultado

la siguiente aproximación:

$$G_\psi \approx A|\nabla\psi| \quad (2.51)$$

con lo que se puede obtener la función ψ de la siguiente iteración en la ecuación de Hamilton-Jacobi mediante

$$\psi^{i+1} = \psi^i - \Delta t G_\psi^i \quad (2.52)$$

- Como se menciona en el paso 9.4, cada cierta cantidad de iteraciones se debe regularizar la función ψ , ya que se puede volver demasiado plana o inclinada, generando inestabilidades numéricas.
- La restricción que se impone en el paso 9.8 consiste en cumplir con la siguiente desigualdad:

$$\mathcal{L}^{i+1} < \mathcal{L}^i \cdot \left(1 + \frac{tol}{\sqrt{\frac{i}{2}}} \right) \quad (2.53)$$

para una tolerancia tol predefinida. De esta manera, la restricción se vuelve cada vez más estricta a medida que se avanza en las iteraciones.

Capítulo 3

Resultados

3.1. Parámetros específicos del problema

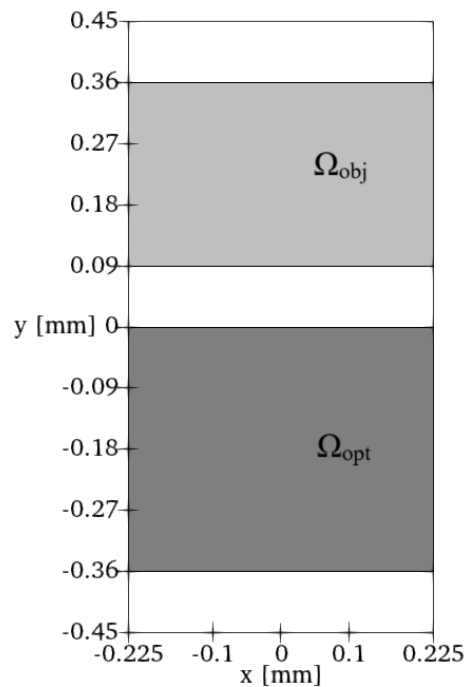


Figura 3.1: Región de modelación del problema, con subregiones de interés y dimensiones

En esta sección, se definen los parámetros específicos que describen la geometría del problema y el funcionamiento del algoritmo de optimización. El dominio Ω de la

figura 2.1 tiene dimensiones de 0,450 [mm] de ancho por 0,900 [mm] de alto. Se define un sistema de referencia centrado en el dominio Ω , como se observa en la figura 3.1. La región Ω_{opt} abarca desde $y = -0,36$ [mm] hasta $y = 0$ [mm], y la región Ω_{obj} abarca desde $y = 0,09$ [mm] hasta $y = 0,36$ [mm].

La frecuencia de operación de la onda de ultrasonido corresponde a $f = 10$ [MHz] y la velocidad de propagación en el medio fluido es $c_0 = 1540$ [m/s], que corresponde aproximadamente a la velocidad de propagación del sonido en agua, y es la velocidad que asumen muchas máquinas médicas de ultrasonido [23]. Con estos parámetros, se puede calcular que la longitud de onda corresponde a 0,154 [mm], y con esto, calcular el valor del número de onda en la región libre:

$$k_0 = \frac{2\pi f}{c_0} \approx 40,80 \text{ [mm}^{-1}\text{]} \quad (3.1)$$

Por otro lado, el valor del número de onda en el medio sólido absorbente corresponde a $k_1 = 0$ [mm⁻¹], de acuerdo a la modelación de un cuerpo totalmente rígido.

Respecto a los parámetros del algoritmo de optimización, se definen los siguientes valores:

- La malla de modelación definida en el paso 1 del algoritmo es de 90×180 elementos. Conociendo el tamaño de la región Ω , se puede establecer que cada elemento tiene dimensiones de $0,005 \times 0,005$ [mm], con una diagonal que mide $d_{malla} \approx 7,07 \times 10^{-3}$ [mm].
- Para la inicialización de $\psi_{original}$ en el paso 4 a través de la resolución de la ecuación 2.47, se elige un intervalo de tiempo $\Delta t = 0,1 \cdot d_{malla}$ y 40 iteraciones.
- Para la construcción del lagrangiano aumentado en el paso 8 según la ecuación 2.42, se eligen los valores iniciales $\lambda^0 = 0,2$ y $\eta^0 = 0,1$. El valor del volumen objetivo para calcular la restricción de volumen $h(\Omega_1)$ corresponde a $V_{obj} = 0,5$, recordando que es una fracción respecto a V_{max} .
- El valor de $\Delta\eta$ necesario para actualizar los parámetros en el paso 9.1 según las ecuaciones 2.44 y 2.45 corresponde a $\Delta\eta = 0,1$ y el valor de η_{max} se define como $\eta_{max} = 15$.

- El número máximo de iteraciones en el paso 9 corresponde a $i^{max} = 4000$.
- Para la resolución de la ecuación de Hamilton Jacobi (ec. 2.39) en el paso 9.3 utilizando el esquema de Godunov, se elige un intervalo de tiempo $\Delta t = 0,1 \cdot d_{malla}$.
- Para la reinicialización periódica en el paso 9.4, se elige un intervalo de tiempo $\Delta t = 0,25 \cdot d_{malla}$ y 20 iteraciones. La reinicialización se ejecuta cada 3 iteraciones.
- La restricción de descenso del lagrangiano en el paso 9.8 se impone a partir de la iteración 2000 y el valor para la tolerancia puede ser $tol = 0,6$ o $tol = 2$ dependiendo de la forma inicial que se pruebe. En caso de no cumplirse la desigualdad, el Δt involucrado se reduce multiplicando por un factor de 0,9.
- El umbral Δt_{min} bajo el cual se termina el proceso iterativo es $\Delta t_{min} = 10^{-5}$.

3.2. Diseños optimizados del absorbente y cálculo de la función objetivo

A continuación, se presentan los datos obtenidos para tres formas iniciales que fueron las que entregaron los mejores resultados en cuanto a estabilidad numérica y valor de la función objetivo: una forma de anillo, una forma de onda sinusoidal y un patrón de puntos. También se define un diseño trivial del mismo volumen final como control, para evaluar la eficacia de cada diseño optimizado.

3.2.1. Forma trivial de control

Esta forma consiste en llenar el dominio Ω_{opt} hasta una altura de $y = -0,225$ [mm], de tal forma que el volumen calculado a partir de la ecuación 2.43 sea $V = V_{obj} = 0,5$, como se observa en las figuras 3.2 y 3.4, que muestran la función $\psi_{original}$ que define esta forma. Los puntos en Ω_0 tienen asignados un valor de $\psi_{original} = -0,45$, mientras que los puntos en Ω_1 tienen asignados un valor de $\psi_{original} = 0,45$, según la definición en la ecuación 2.37. El valor de 0,45 es una elección arbitraria, pero corresponde al ancho del dominio Ω . Esto se cumple también para las formas iniciales de los diseños optimizados.

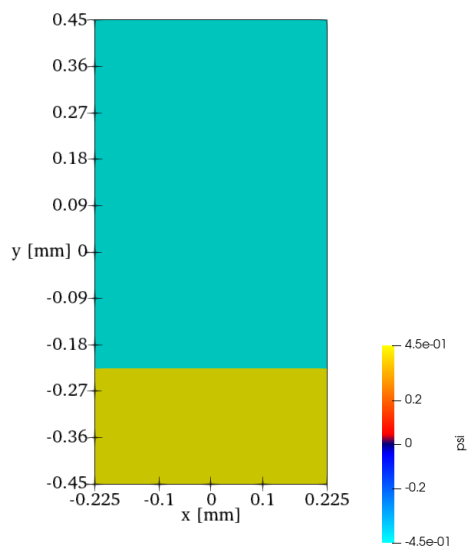


Figura 3.2: Función $\psi_{original}$ para forma trivial

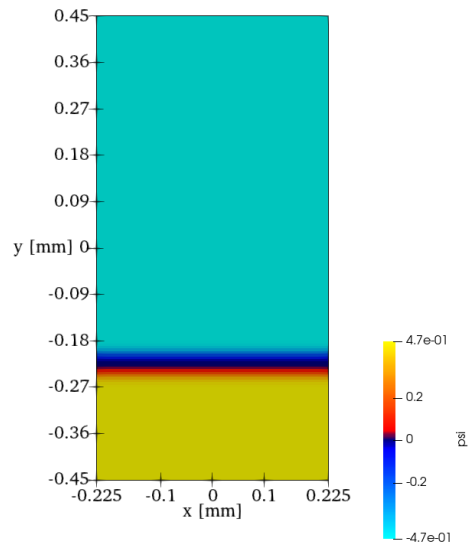


Figura 3.3: Función ψ^0 para forma trivial

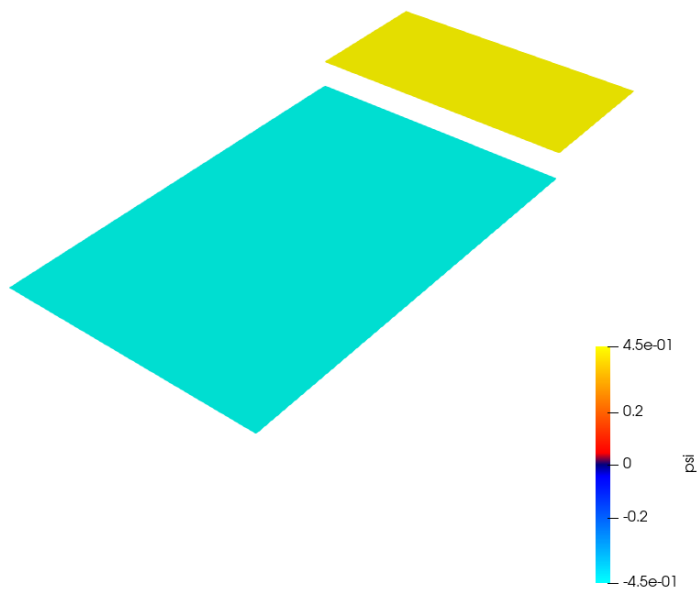


Figura 3.4: Visión tridimensional de función $\psi_{original}$ para forma trivial

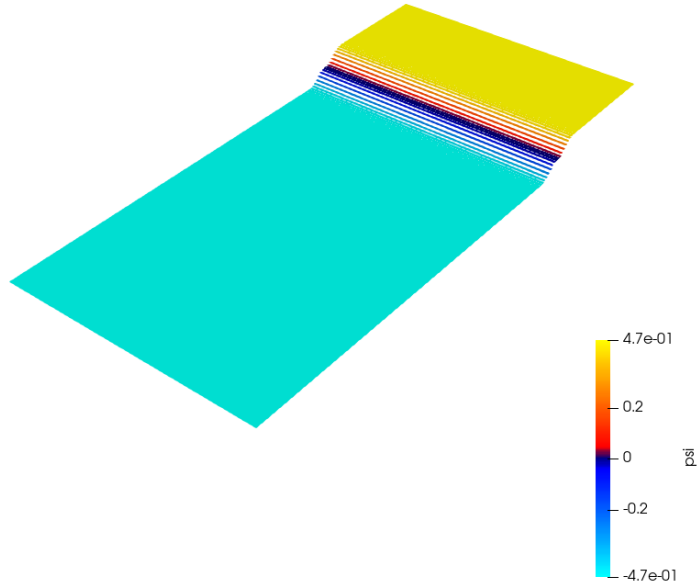


Figura 3.5: Visión tridimensional de función ψ^0 para forma trivial

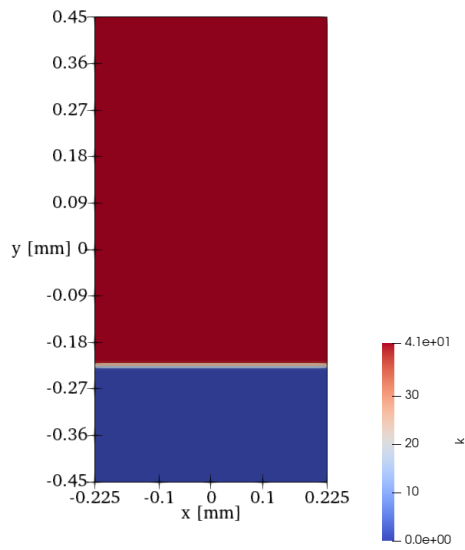


Figura 3.6: Función $k(x)$ obtenida a partir de ψ^0 para forma trivial

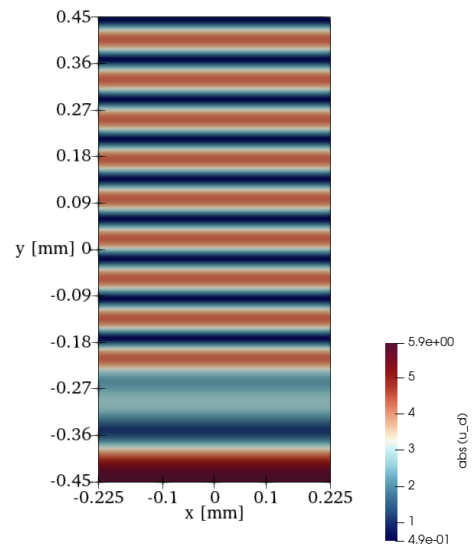


Figura 3.7: Magnitud de u_d para forma trivial

Luego, se inicializa la función $\psi_{original}$ para obtener la función de curva de nivel ψ^0 y poder definir $k(x)$ según la ecuación 2.38, como se muestra en las figuras 3.3, 3.5 y 3.6. Con esto, se puede resolver el problema de dispersión para calcular la función objetivo. La figura 3.7 muestra la magnitud de u_d después de resolver el problema de dispersión.

El valor de la función objetivo para esta forma, que se utilizará para comparar y evaluar los diseños optimizados, corresponde a:

$$\text{Función objetivo: } J = 1,184$$

A continuación, se presentan los resultados obtenidos para las tres formas iniciales antes mencionadas. Dado que el procedimiento es el mismo para cada forma, los resultados se presentan siguiendo los mismos pasos en los tres casos.

3.2.2. Forma de anillo

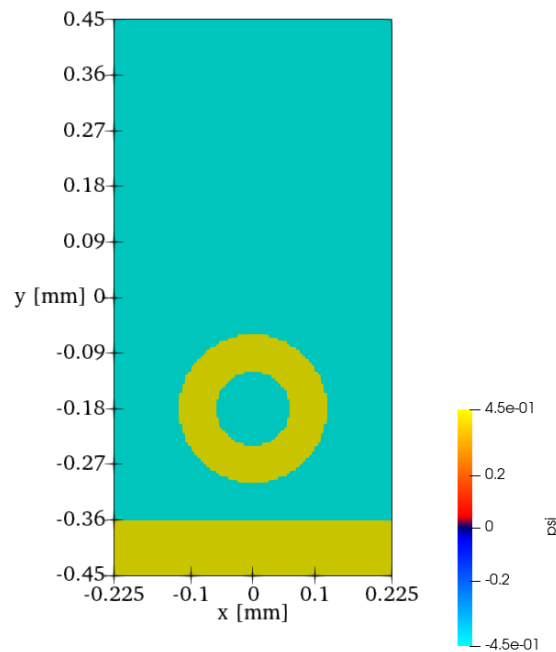


Figura 3.8: Función $\psi_{original}$ para forma de anillo

Esta forma consiste en un anillo centrado en $(0; -0,18)$ [mm], de radio interior $0,06$ [mm] y radio exterior $0,12$ [mm], como se observa en la figura 3.8, que muestra la función $\psi_{original}$ que define esta forma.

Luego, se inicializa la función $\psi_{original}$ para obtener la función de curva de nivel inicial ψ^0 y poder definir $k(x)$ según la ecuación 2.38, como se muestra en las figuras 3.9, 3.11 y 3.13. Con esto, se puede resolver el problema de dispersión y el problema adjunto para calcular la velocidad de advección, el volumen y la función objetivo iniciales. La figura 3.15 muestra la magnitud de u_d inicial después de resolver el problema de dispersión.

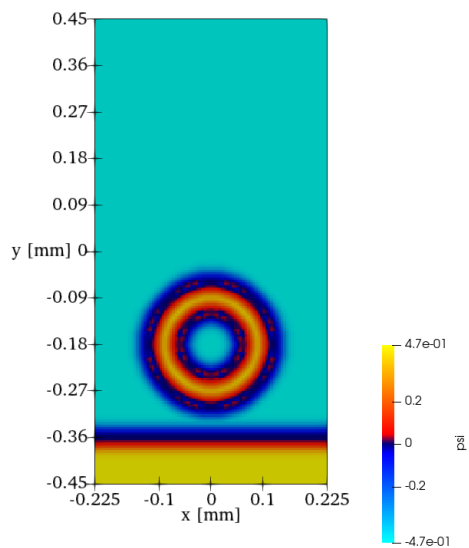


Figura 3.9: Función ψ^0 para forma de anillo

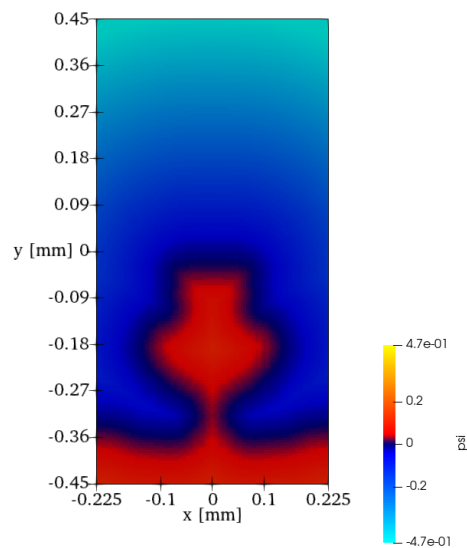


Figura 3.10: Función ψ^{final} para forma de anillo

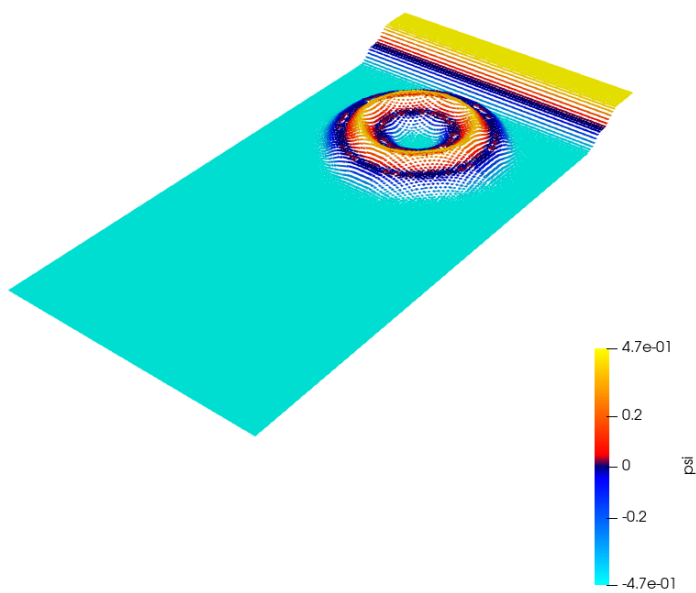


Figura 3.11: Visión tridimensional de función ψ^0 para forma de anillo

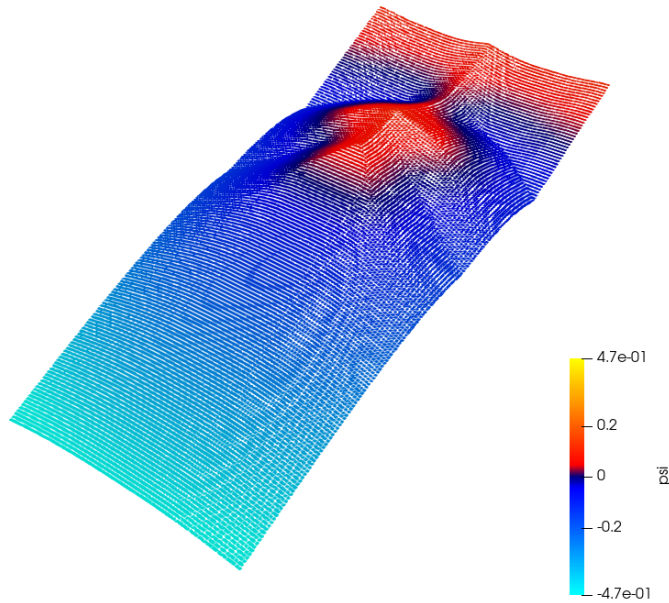


Figura 3.12: Visión tridimensional de función ψ^{final} para forma de anillo

Los valores para el volumen (ec. 2.43) y la función objetivo son los siguientes:

$$\text{Volumen inicial: } V^0 = 0,3654$$

$$\text{Función objetivo inicial: } J^0 = 7,161$$

En este punto se da comienzo a la etapa iterativa del algoritmo, eligiendo como tolerancia para el descenso del lagrangiano un valor de $tol = 2$. En el gráfico 3.1 se muestra la evolución de la función objetivo a medida que avanzan las iteraciones, mientras que en el gráfico 3.2 se muestra la evolución del volumen de Ω_1 a medida que avanzan las iteraciones. El algoritmo termina al alcanzar el umbral de Δt_{min} , obteniendo los siguientes resultados:

Número de iteraciones: 2115

Tiempo de ejecución: 47 [min]

Volumen final: $V^{final} = 0,5009$

Función objetivo final: $J^{final} = 0,2973$

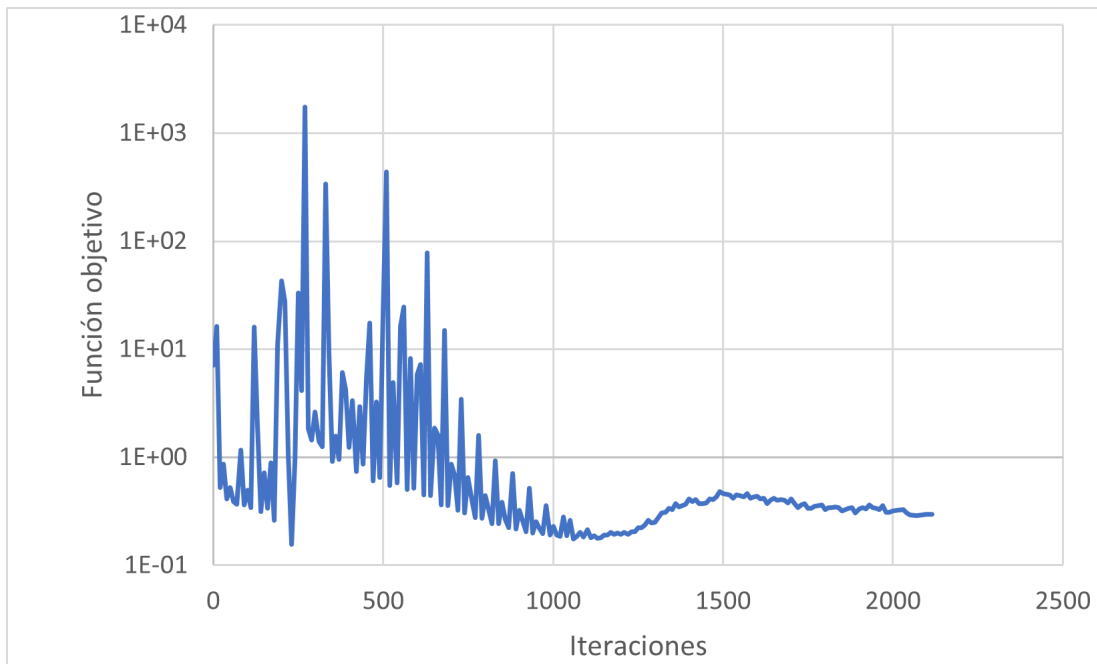


Gráfico 3.1: Evolución de función objetivo (en escala logarítmica) para forma de anillo

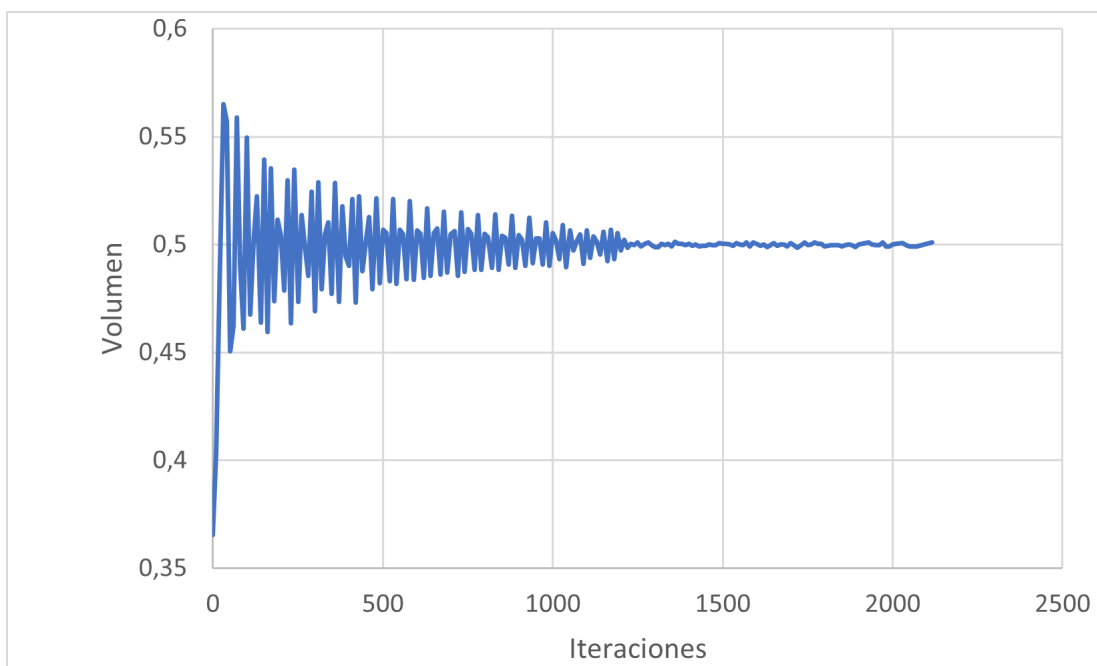


Gráfico 3.2: Evolución de volumen para forma de anillo

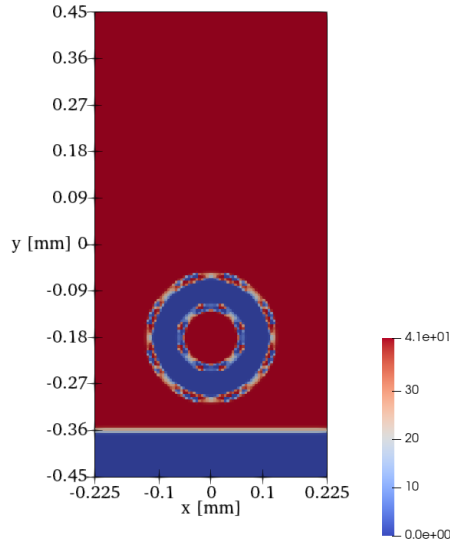


Figura 3.13: Función $k(x)$ obtenida a partir de ψ^0 para forma de anillo

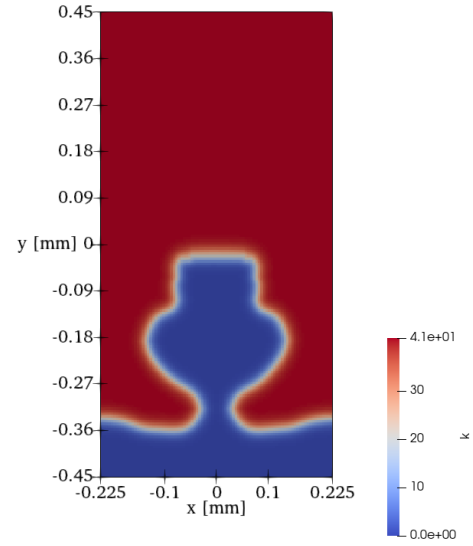


Figura 3.14: Función $k(x)$ obtenida a partir de ψ^{final} para forma de anillo

En el Anexo A.1 se muestra la evolución de la función $k(x)$ para distintos instantes a lo largo de la etapa iterativa, mientras que en el Anexo B.1 se muestra la evolución de la función objetivo del gráfico 3.1, pero dividida en intervalos de 500 iteraciones para visualizar más detalles en el comportamiento de la función.

Las figuras 3.10 y 3.12 muestran la forma final de la función ψ después de terminado el algoritmo. La figura 3.14 muestra la función $k(x)$ obtenida a partir de la función ψ^{final} y representa la mejor visualización del dominio Ω_1 que define la forma del absorbente. La figura 3.16 muestra la magnitud de u_d final para la forma de anillo.

3.2.3. Forma de onda

Esta forma consiste en una onda sinusoidal descrita por la siguiente expresión:

$$y = 0,120 \cos\left(\frac{80\pi}{9}x\right) - 0,180 \text{ [mm]} \quad (3.2)$$

como se observa en la figura 3.17, que muestra la función $\psi_{original}$ que define esta forma.

Luego, se inicializa la función $\psi_{original}$ para obtener la función de curva de nivel inicial ψ^0 y poder definir $k(x)$ según la ecuación 2.38, como se muestra en las figuras

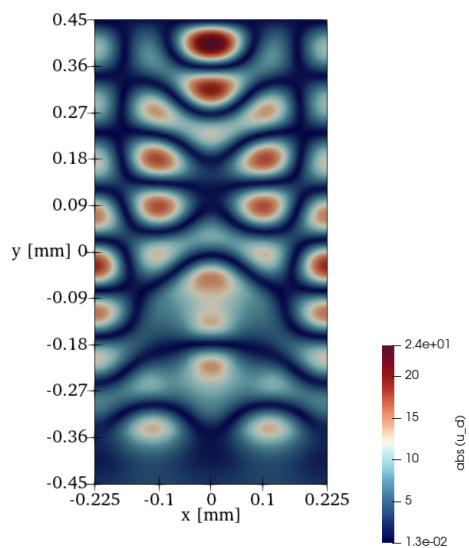


Figura 3.15: Magnitud de u_d inicial para forma de anillo

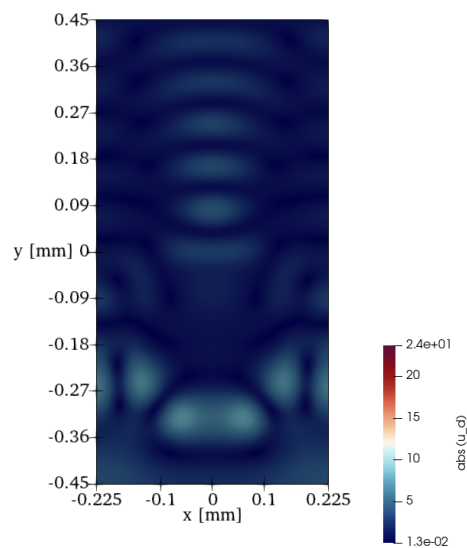


Figura 3.16: Magnitud de u_d final para forma de anillo

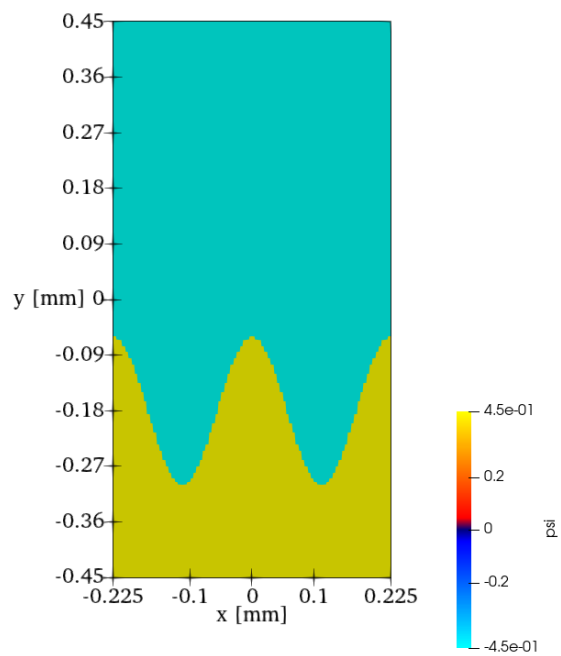


Figura 3.17: Función $\psi_{original}$ para forma de onda

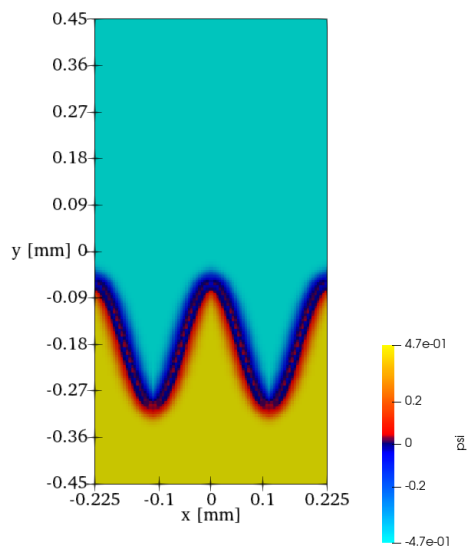


Figura 3.18: Función ψ^0 para forma de onda

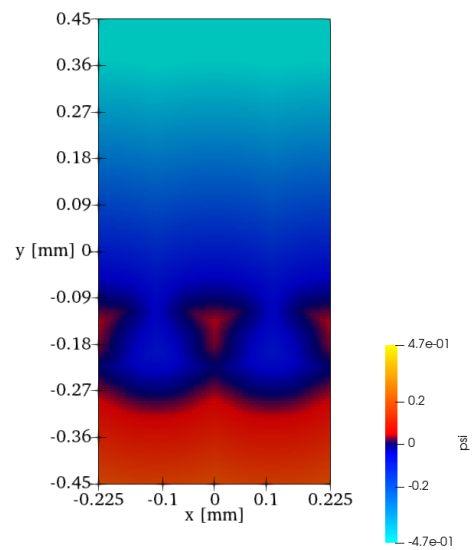


Figura 3.19: Función ψ^{final} para forma de onda

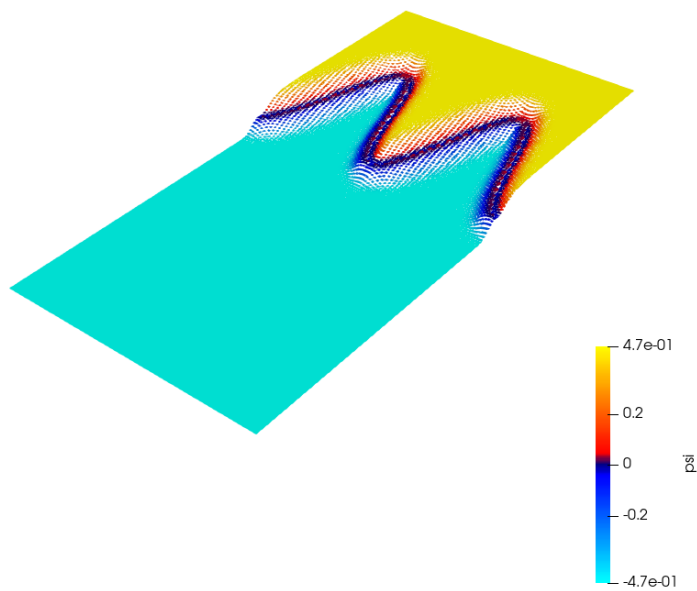


Figura 3.20: Visión tridimensional de función ψ^0 para forma de onda

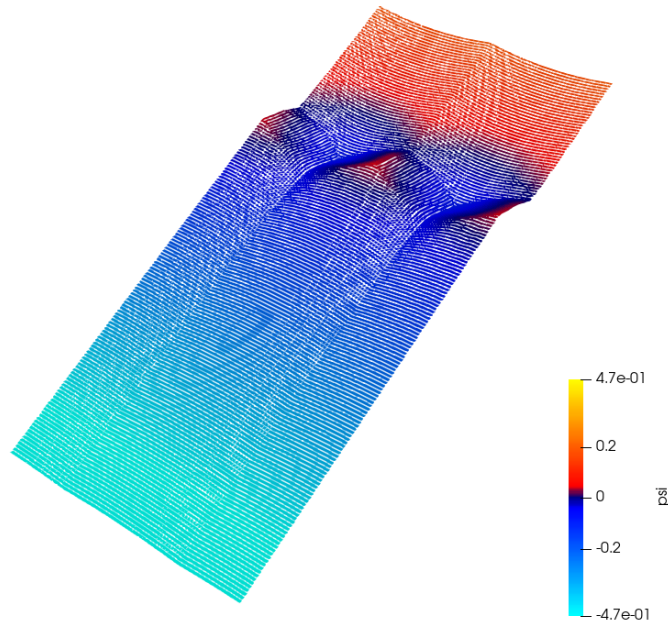


Figura 3.21: Visión tridimensional de función ψ^{final} para forma de onda

3.18, 3.20 y 3.22. Con esto, se puede resolver el problema de dispersión y el problema adjunto para calcular la velocidad de advección, el volumen y la función objetivo iniciales. La figura 3.24 muestra la magnitud de u_d inicial después de resolver el problema de dispersión.

Los valores para el volumen (ec. 2.43) y la función objetivo son los siguientes:

$$\text{Volumen inicial: } V^0 = 0,6020$$

$$\text{Función objetivo inicial: } J^0 = 0,2991$$

En este punto se da comienzo a la etapa iterativa del algoritmo, eligiendo como tolerancia para el descenso del lagrangiano un valor de $tol = 0,6$. En el gráfico 3.3 se muestra la evolución de la función objetivo a medida que avanzan las iteraciones, mientras que en el gráfico 3.4 se muestra la evolución del volumen de Ω_1 a medida que avanzan las iteraciones. El algoritmo termina al alcanzar el umbral de Δt_{min} , obteniendo

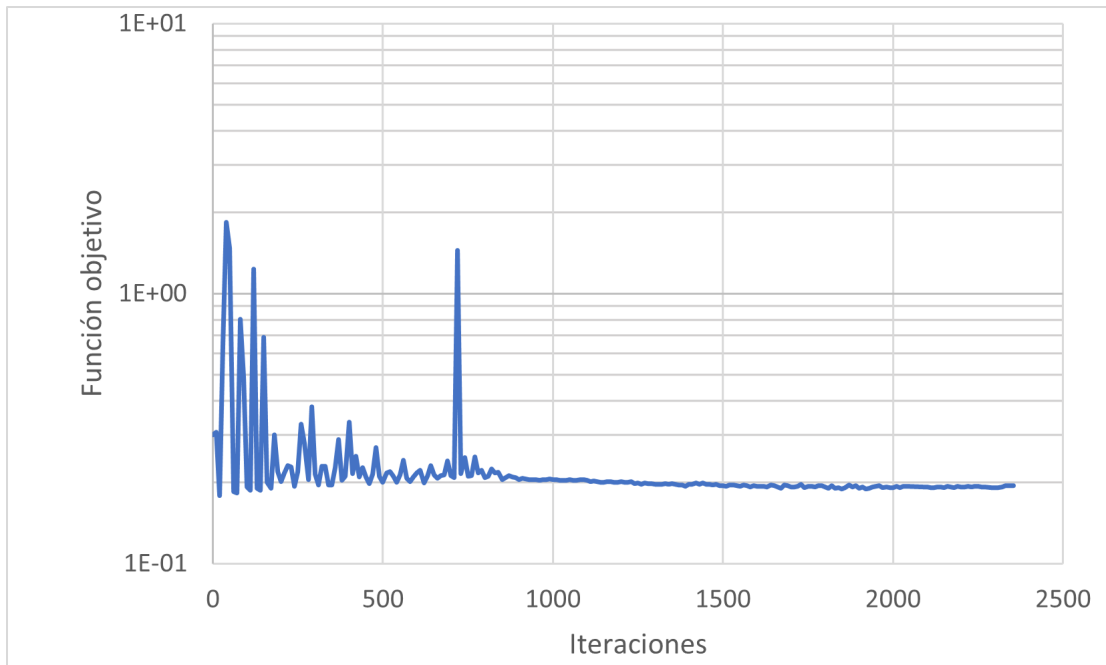


Gráfico 3.3: Evolución de función objetivo (en escala logarítmica) para forma de onda

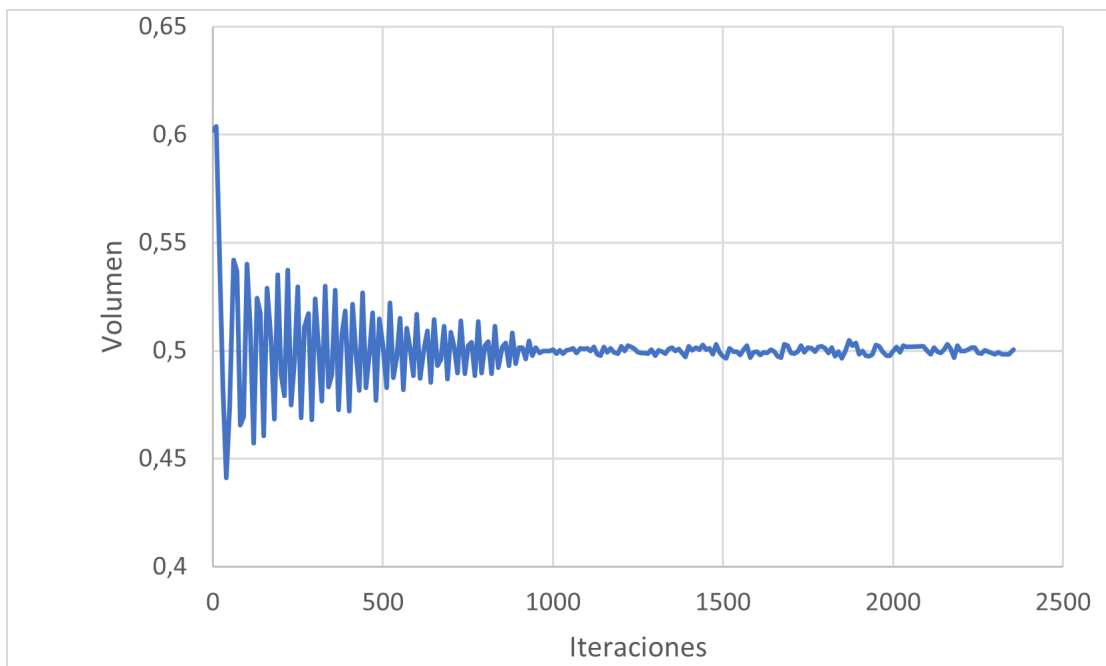


Gráfico 3.4: Evolución de volumen para forma de onda

los siguientes resultados:

Número de iteraciones: 2354

Tiempo de ejecución: 52 [min]

Volumen final: $V^{final} = 0,5004$

Función objetivo final: $J^{final} = 0,1946$

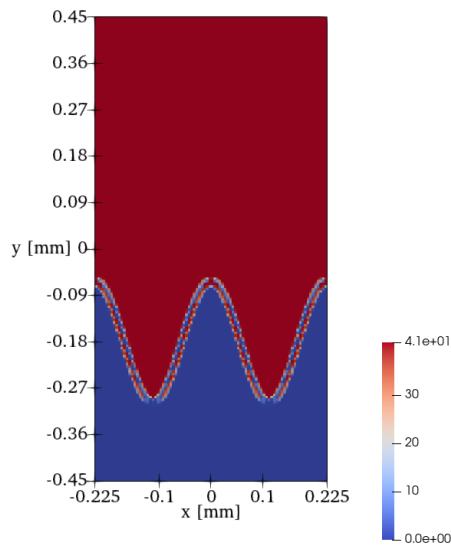


Figura 3.22: Función $k(x)$ obtenida a partir de ψ^0 para forma de onda

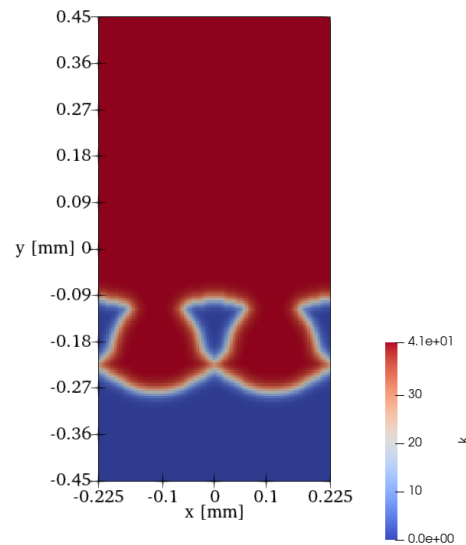


Figura 3.23: Función $k(x)$ obtenida a partir de ψ^{final} para forma de onda

En el Anexo A.2 se muestra la evolución de la función $k(x)$ para distintos instantes a lo largo de la etapa iterativa, mientras que en el Anexo B.2 se muestra la evolución de la función objetivo del gráfico 3.3, pero dividida en intervalos de 500 iteraciones para visualizar más detalles en el comportamiento de la función.

Las figuras 3.19 y 3.21 muestran la forma final de la función ψ después de terminado el algoritmo. La figura 3.23 muestra la función $k(x)$ obtenida a partir de la función ψ^{final} y representa la mejor visualización del dominio Ω_1 que define la forma del absorbente. La figura 3.25 muestra la magnitud de u_d final para la forma de onda.

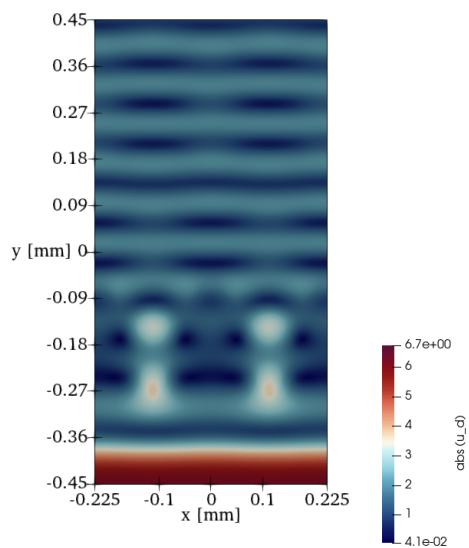


Figura 3.24: Magnitud de u_d inicial para forma de onda

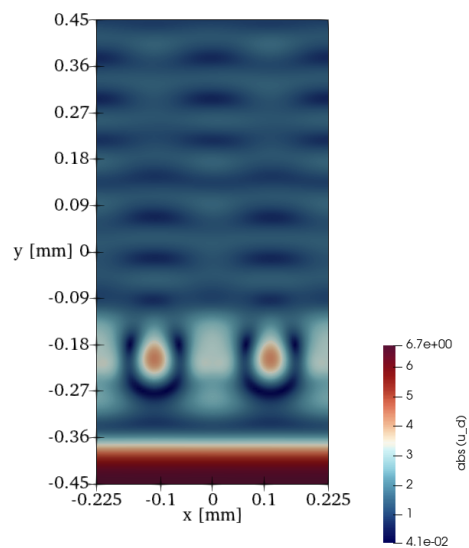


Figura 3.25: Magnitud de u_d final para forma de onda

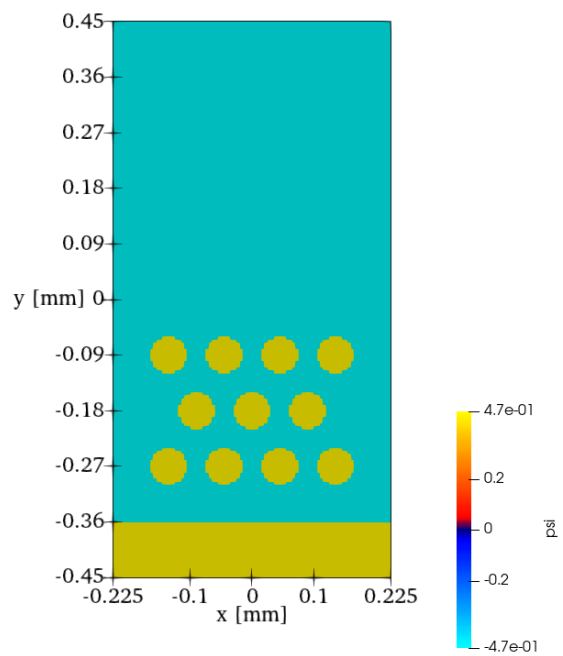


Figura 3.26: Función $\psi_{original}$ para patrón de puntos

3.2.4. Patrón de puntos

Esta forma consiste en 11 círculos de $0,03 [mm]$ de radio orientados en tres filas de 4, 3 y 4 respectivamente, como se observa en la figura 3.26, que muestra la función $\Psi_{original}$ que define esta forma. Los centros de los círculos corresponden a los siguientes puntos:

$$P_1 = (-0,135; -0,270) [mm]$$

$$P_2 = (-0,045; -0,270) [mm]$$

$$P_3 = (0,045; -0,270) [mm]$$

$$P_4 = (0,135; -0,270) [mm]$$

$$P_5 = (-0,090; -0,180) [mm]$$

$$P_6 = (0; -0,180) [mm]$$

$$P_7 = (0,090; -0,180) [mm]$$

$$P_8 = (-0,135; -0,090) [mm]$$

$$P_9 = (-0,045; -0,090) [mm]$$

$$P_{10} = (0,045; -0,090) [mm]$$

$$P_{11} = (0,135; -0,090) [mm]$$

Luego, se inicializa la función $\Psi_{original}$ para obtener la función de curva de nivel inicial ψ^0 y poder definir $k(x)$ según la ecuación 2.38, como se muestra en las figuras 3.27, 3.29 y 3.31. Con esto, se puede resolver el problema de dispersión y el problema adjunto para calcular la velocidad de advección, el volumen y la función objetivo iniciales. La figura 3.33 muestra la magnitud de u_d inicial después de resolver el problema de dispersión.

Los valores para el volumen (ec. 2.43) y la función objetivo son los siguientes:

$$\text{Volumen inicial: } V^0 = 0,3032$$

$$\text{Función objetivo inicial: } J^0 = 2,283$$

En este punto se da comienzo a la etapa iterativa del algoritmo, eligiendo como tolerancia para el descenso del lagrangiano un valor de $tol = 0,6$. En el gráfico 3.5

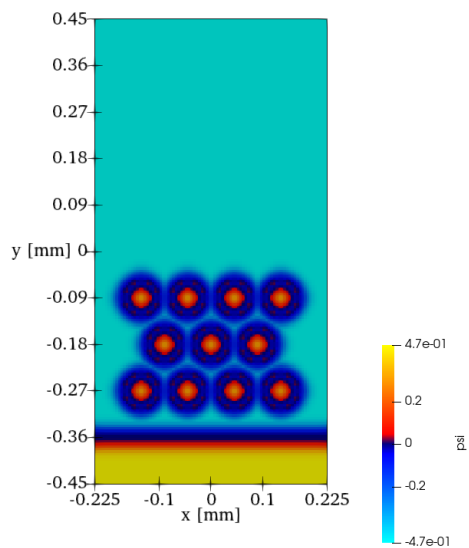


Figura 3.27: Función ψ^0 para patrón de puntos

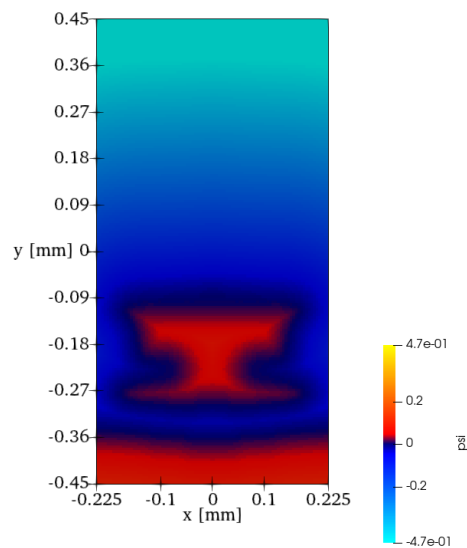


Figura 3.28: Función ψ^{final} para patrón de puntos

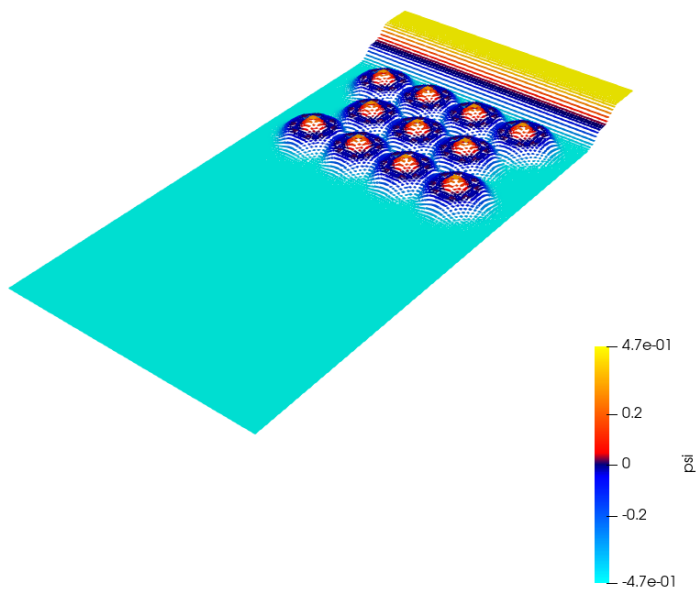


Figura 3.29: Visión tridimensional de función ψ^0 para patrón de puntos

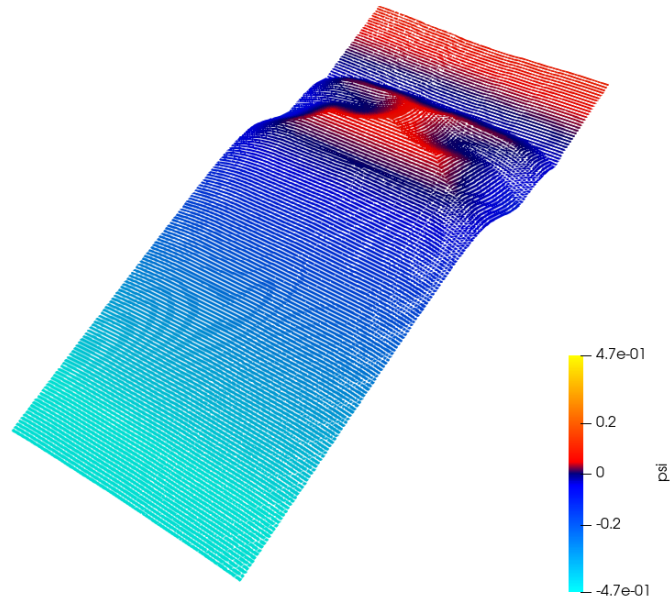


Figura 3.30: Visión tridimensional de función ψ^{final} para patrón de puntos

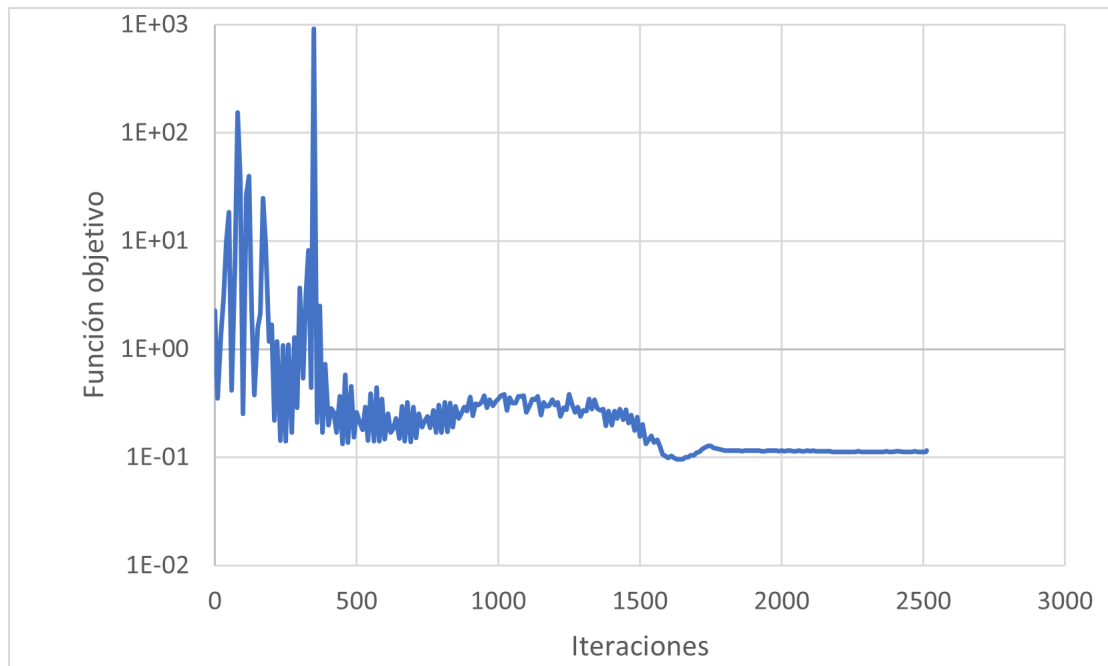


Gráfico 3.5: Evolución de función objetivo (en escala logarítmica) para patrón de puntos

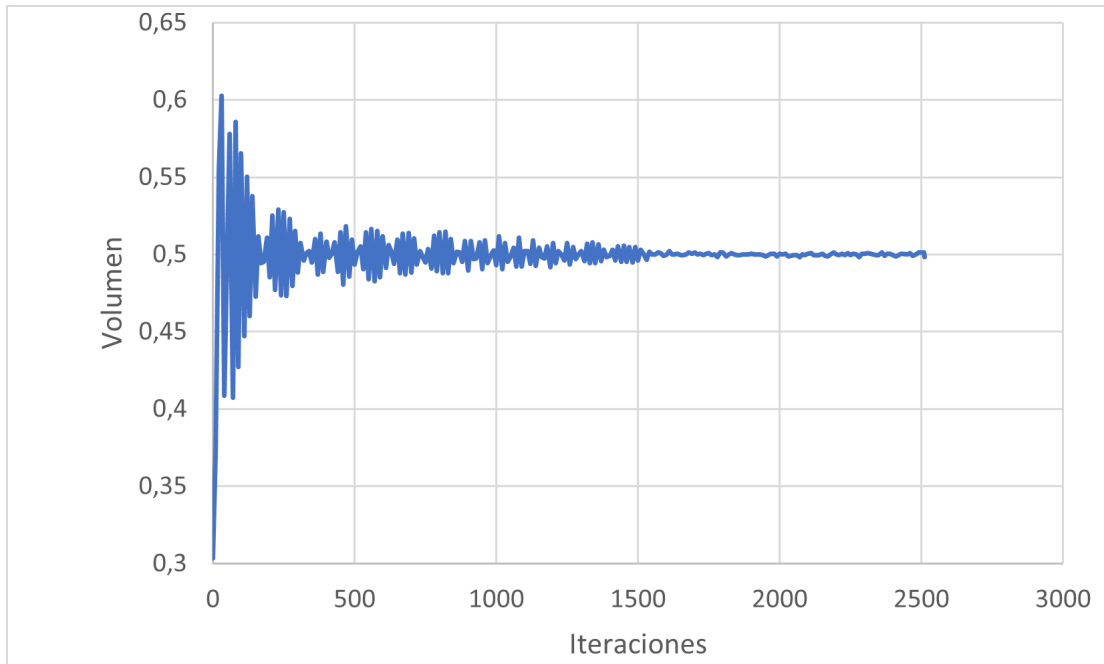


Gráfico 3.6: Evolución de volumen para patrón de puntos

se muestra la evolución de la función objetivo a medida que avanzan las iteraciones, mientras que en el gráfico 3.6 se muestra la evolución del volumen de Ω_1 a medida que avanzan las iteraciones. El algoritmo termina al alcanzar el umbral de Δt_{min} , obteniendo los siguientes resultados:

Número de iteraciones: 2512

Tiempo de ejecución: 53 [min]

Volumen final: $V^{final} = 0,4983$

Función objetivo final: $J^{final} = 0,1153$

En el Anexo A.3 se muestra la evolución de la función $k(x)$ para distintos instantes a lo largo de la etapa iterativa, mientras que en el Anexo B.3 se muestra la evolución de la función objetivo del gráfico 3.5, pero dividida en intervalos de 500 iteraciones para visualizar más detalles en el comportamiento de la función.

Las figuras 3.28 y 3.30 muestran la forma final de la función ψ después de terminado el algoritmo. La figura 3.32 muestra la función $k(x)$ obtenida a partir de la función ψ^{final} y representa la mejor visualización del dominio Ω_1 que define la forma

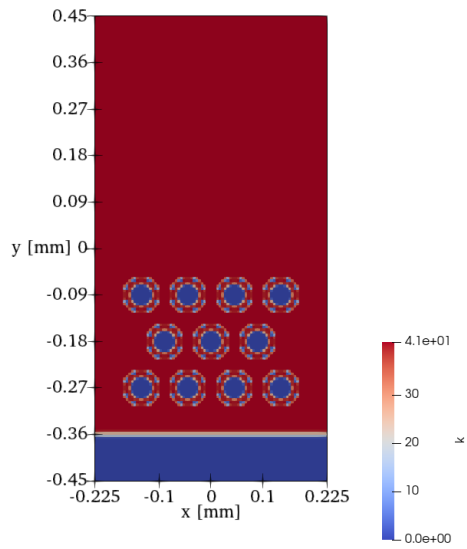


Figura 3.31: Función $k(x)$ obtenida a partir de ψ^0 para patrón de puntos

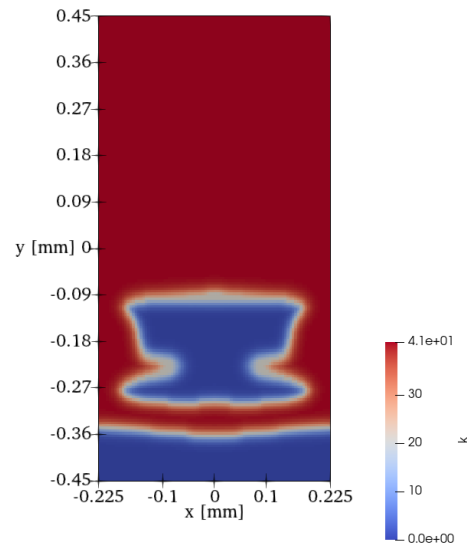


Figura 3.32: Función $k(x)$ obtenida a partir de ψ^{final} para patrón de puntos

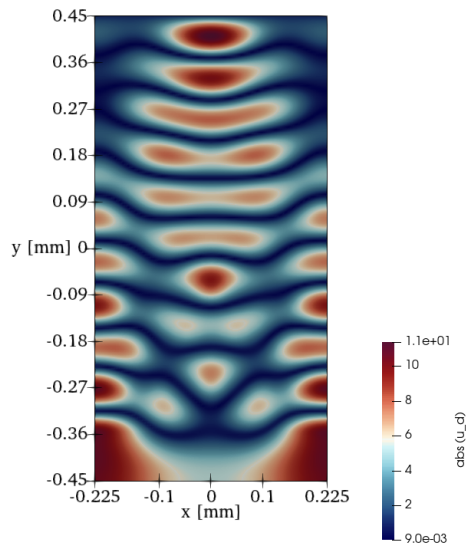


Figura 3.33: Magnitud de u_d inicial para patrón de puntos

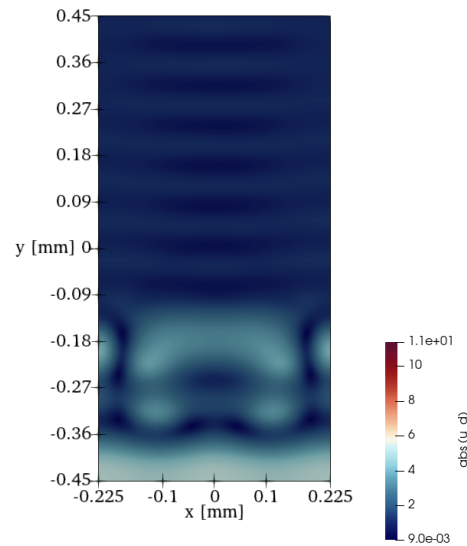


Figura 3.34: Magnitud de u_d final para patrón de puntos

del absorbente. La figura 3.34 muestra la magnitud de u_d final para el patrón de puntos.

3.3. Resumen de diseños optimizados

Una vez presentados los resultados para los tres diseños optimizados, se presenta a continuación un resumen con el objetivo de comparar los diseños entre sí, sus estados finales e iniciales, y su desempeño en comparación con la forma trivial de control.

En primer lugar, se presenta en la tabla 3.1 la información resumida para el número de iteraciones, el tiempo de ejecución, el volumen inicial y el volumen final para los tres diseños.

	N_{iter}	t_{ej} [min]	V^0	V^{final}
Forma de anillo	2115	47	0,3654	0,5009
Forma de onda	2354	52	0,6020	0,5004
Patrón de puntos	2512	53	0,3032	0,4983

Tabla 3.1: Número de iteraciones, tiempo de ejecución y volúmenes iniciales y finales para cada diseño optimizado

Luego, se presenta en la tabla 3.2 la información resumida para la función objetivo inicial y final, comparadas entre sí para los tres diseños. También se muestra la comparación entre la función objetivo final y la función objetivo de la forma trivial de control para los tres diseños.

	J^0	J^{final}	$\Delta J_{final-0}$	$\Delta J_{final-control}$
Forma trivial	1,184	—	—	—
Forma de anillo	7,161	0,2973	-6,864 (↓ 95,84 %)	-0,8871 (↓ 74,90 %)
Forma de onda	0,2991	0,1946	-0,1045 (↓ 34,93 %)	-0,9898 (↓ 83,57 %)
Patrón de puntos	2,283	0,1153	-2,168 (↓ 94,95 %)	-1,069 (↓ 90,27 %)

Tabla 3.2: Función objetivo inicial y final, diferencia entre objetivo inicial y final, y diferencia entre objetivo de forma de control y final para cada diseño optimizado

Capítulo 4

Discusión

Los resultados de este trabajo se interpretan considerando los objetivos planteados, que por un lado consiste en simular el comportamiento e interacción con distintas geometrías de ondas ultrasónicas, y por otro lado consiste en determinar un diseño óptimo de un absorbente mediante el método de curvas de nivel y evaluar su desempeño.

En cuanto a la capacidad de simular ondas ultrasónicas, esto se logra de manera satisfactoria para las tres formas iniciales mostradas y para cada una de las iteraciones respectivas dentro de cada forma. Este hecho se ve reflejado en las figuras que muestran la magnitud de las ondas dispersadas (u_d), y cómo éstas interactúan con un absorbente de geometría variable. Por ejemplo, en la figura 3.7 se observa claramente un cambio en el comportamiento de la onda al llegar al absorbente. Esto valida la elección de la librería Gridap para la resolución de las ecuaciones diferenciales involucradas utilizando el método de elementos finitos, ya que permite obtener buenos resultados simplemente definiendo la formulación débil del problema, el dominio de integración y las condiciones de borde, sin requerir la formulación de un algoritmo para la aplicación del método de elementos finitos, ya que esto viene incorporado en la librería. Otro punto a destacar es que Gridap es capaz de resolver las ecuaciones en un tiempo bastante reducido, lo cual es muy importante considerando que se deben resolver miles de veces. A partir de la tabla 3.1 se puede estimar que cada iteración demora aproximadamente 1,3 [s], teniendo en cuenta que la resolución de la ecuación diferencial es solo una parte de cada iteración.

Un punto a discutir es el hecho de haber realizado la simulación en un dominio bidimensional en vez de uno tridimensional. La motivación de esto es contar con un algoritmo de optimización más simple, en particular, las funciones para la inicialización y el esquema de Godunov para la resolución de la ecuación de Hamilton-Jacobi tendrían que ser adaptadas para funcionar en tres dimensiones, lo cual trae consigo complicaciones en la determinación de los vecinos de cada nodo. Además, es de esperar que la implementación en 3D aumente considerablemente el tiempo de ejecución del algoritmo, ya que el número de elementos de la malla sería drásticamente mayor. Desde otra perspectiva, cabe mencionar que los transductores de equipamiento de ultrasonido focalizan la energía incidente en un plano, por lo que se puede afirmar, en este caso particular, que la modelación en 2D es una buena representación de la realidad.

Otro punto que llama la atención es que al comparar la forma del absorbente (figuras 3.13, 3.14, 3.22, 3.23, 3.31 y 3.32) con la onda dispersada (figuras 3.15, 3.16, 3.24, 3.25, 3.33 y 3.34), no parece haber un claro cambio en el comportamiento de la onda que delimite la forma del absorbente. Si bien se puede apreciar en los tres casos que las ondas tienden a concentrarse en la mitad inferior del dominio, sugiriendo una respuesta de la onda a los cambios de geometría, no se observa que el absorbente sea la frontera de un objeto totalmente rígido que genere una reflexión total de las ondas, que es como se había modelado al momento de elegir un valor de cero para el número de onda en el absorbente. Esto se hizo para evitar definir la frontera de Ω_1 en cada iteración y tener que incorporar condiciones de salto en la derivada de forma, lo cual dificultaría su cálculo, pero probablemente habría mejorado la modelación de las ondas con el absorbente.

En cuanto a la determinación de un diseño óptimo, se logra utilizar el método de curvas de nivel y sensibilidad respecto a la forma para obtener diseños optimizados a partir de tres figuras iniciales distintas. Estos diseños se observan en las figuras 3.14 para la forma de anillo, 3.23 para la forma de onda y 3.32 para el patrón de puntos. Los resultados numéricos resumidos en la tabla 3.2 muestran una clara disminución de la función objetivo, tanto al comparar con la figura inicial como con la forma trivial de control. Respecto a la comparación con la forma inicial, se obtiene una reducción de un 34,93 % para la forma de onda, un 94,95 % para el patrón de puntos, y un 95,84 % para la forma de anillo, mientras que para la comparación con la forma de control, se obtiene una reducción de un 74,90 % para la forma de anillo, un 83,57 % para la forma

de onda, y un 90,27% para el patrón de puntos. Como se observa, la determinación sobre qué diseño es mejor depende de la forma que se tome como comparación, por lo que más adelante se explicará cuál de estas formas es más adecuada. Por otro lado, al observar la distribución de la onda dispersada para cada diseño en las figuras 3.16, 3.25 y 3.34, se visualiza en los tres casos que las ondas con mayor amplitud están concentradas en la parte del dominio correspondiente a Ω_{opt} , mientras que el dominio Ω_{obj} presenta amplitudes mucho más bajas, que es exactamente lo que se espera del algoritmo, esto es, modificar la forma del absorbente contenido en Ω_{opt} para minimizar la función objetivo medida en Ω_{obj} , cumpliendo con el objetivo planteado.

Para estudiar la evolución de la forma del absorbente, el comportamiento de la función objetivo y el volumen del absorbente, se recurre a las figuras, gráficos y anexos correspondientes. Para la forma de anillo, esto corresponde a la figura 3.13, el Anexo A.1 y la figura 3.14 para la forma del absorbente, el gráfico 3.1 y el Anexo B.1 para la evolución de la función objetivo, y el gráfico 3.2 para la evolución del volumen del absorbente. Durante las primeras iteraciones, se dan cambios bruscos en el volumen, que se traducen en cambios bruscos en la función objetivo. Lo primero que se observa es la unión del anillo con la base del absorbente alrededor de la iteración 250, que genera un salto en la función objetivo. Después, la función objetivo va disminuyendo, aunque no de manera suave. Cerca de la iteración 650, el agujero del anillo desaparece y la función objetivo sigue disminuyendo hasta que se logra estabilizar el volumen cerca del volumen objetivo alrededor de la iteración 1200, lo cual se identifica claramente en los gráficos. A partir de este momento, la función objetivo varía de forma mucho más suave, pero se observa un aumento entre las iteraciones 1200 y 1500, intervalo en el cual se aprecia la formación de una estructura de forma rectangular en la parte superior del absorbente y una regularización de los bordes del resto del absorbente. Después de las 1500 iteraciones, la función objetivo comienza a bajar suavemente, y la forma del absorbente no presenta cambios significativos hasta finalizar el algoritmo.

Respecto a la forma de onda, se utiliza la figura 3.22, el Anexo A.2 y la figura 3.23 para la forma del absorbente, el gráfico 3.3 y el Anexo B.2 para la evolución de la función objetivo, y el gráfico 3.4 para la evolución del volumen del absorbente. Al igual que en el caso anterior, las primeras iteraciones consisten en cambios bruscos en el volumen que generan cambios bruscos en la función objetivo. Alrededor de la iteración 450, ya se aprecia la formación de tres lóbulos en la parte superior del absorbente, y

aproximadamente entre las iteraciones 700 y 750, estos lóbulos se separan de la base, lo cual se puede asociar al salto repentino que se observa en la función objetivo en este intervalo. Nuevamente, llega un punto en que el volumen se estabiliza, esta vez cerca de la iteración 900, y esto tiene un claro efecto en los gráficos. A partir de este punto, la función objetivo se mantiene estable, disminuyendo levemente durante más de 1000 iteraciones hasta finalizar el algoritmo. Respecto a la forma del absorbente, una vez que los lóbulos se separan de la base comienzan a ensancharse en la parte superior y se definen mejor los bordes del absorbente, pero no ocurren otros cambios significativos. Para esta forma llama la atención que la función objetivo no parece disminuir una gran cantidad, ya que solo baja en un 35 % comparada con la forma inicial, mientras que el resto de las formas presenta disminuciones superiores al 90 %. Esto sugiere que esta forma inicial es un mejor punto de partida que las otras formas, lo cual tiene sustento, ya que se asemeja a una versión en 2D de la estructura piramidal presente en muchos absorbentes y en particular en el ejemplo mostrado en el Capítulo 1 de Acquaticci, et al. [2].

Por último, respecto al patrón de puntos, se utiliza la figura 3.31, el Anexo A.3 y la figura 3.32 para la forma del absorbente, el gráfico 3.5 y el Anexo B.3 para la evolución de la función objetivo, y el gráfico 3.6 para la evolución del volumen del absorbente. Aquí también se observan fuertes cambios en el volumen y la función objetivo al inicio del proceso, comenzando por agrandar cada punto hasta que se unen y forman una sola área de absorbente (además de la base). Esta fase de unión de los puntos termina cerca de las 350 iteraciones, momento a partir del cual hay una cierta estabilización de la función objetivo. Durante el intervalo entre 350 y 1000 iteraciones, la parte superior central del absorbente comienza a subir, mientras que las esquinas superiores comienzan a bajar, formando una protuberancia en el centro. Luego, entre las 1000 y 1500 iteraciones, esta protuberancia comienza a contraerse desde los lados, volviéndose cada vez más angosta. También hay dos áreas en la parte inferior de cada lado del absorbente que se vuelven más angostas en esta etapa. Mientras tanto, la función objetivo muestra un comportamiento decreciente, pero no demasiado suave, hasta llegar a las 1500 iteraciones, donde se estabiliza definitivamente el volumen y la función objetivo comienza a variar de manera mucho más gradual. Después de esto, se observa un leve aumento de la función objetivo hasta alrededor de las 1750 iteraciones, lo que se puede asociar a la desaparición de la protuberancia, aplanando la parte superior central del absorbente. Después de esto, la función objetivo se estabiliza y se definen los bordes del absorbente

hasta finalizar el algoritmo sin mayores cambios.

En los tres casos explorados, existe una fase inicial del algoritmo en que el volumen presenta grandes oscilaciones en torno al valor objetivo hasta que llega un punto en el que se estabiliza. En el caso de la forma de anillo, esto ocurre a las 1200 iteraciones, para la forma de onda ocurre a las 900 iteraciones y para el patrón de puntos ocurre a las 1500 iteraciones. Este fenómeno tiene un claro efecto en la función objetivo, la cual comienza a variar de manera mucho más gradual. Por lo tanto, se deduce que la función objetivo es muy sensible a los cambios de volumen, y de una manera difícil de predecir. Teniendo esto en cuenta, se elige a la forma trivial de control como la comparación más adecuada para determinar qué diseño es mejor, ya que tiene el mismo volumen que los diseños optimizados al finalizar el algoritmo. Además, las tres formas iniciales tienen volúmenes distintos, y simplemente este hecho puede influir de gran manera en el valor de la función objetivo, como se observa en el valor inicial en la tabla 3.2. Entonces, el mejor diseño es el patrón de puntos, seguido de la forma de onda y por último la forma de anillo. Cabe mencionar que en el caso de la forma de anillo y el patrón de puntos, se comienza desde un volumen inferior al objetivo, mientras que para la forma de onda se comienza desde un volumen superior, pero en los tres casos se logra disminuir la función objetivo, por lo que no se puede afirmar que esta mejora se deba exclusivamente a una disminución o aumento del volumen, sino que los cambios en la forma del absorbente también juegan un rol importante. Incluso se identifica, en los tres casos, intervalos después del punto de estabilización en que la función objetivo disminuye mientras el volumen permanece prácticamente constante.

A partir de las formas finales obtenidas, se puede afirmar que la elección de la forma inicial tiene un fuerte impacto en las características de la forma final. Este fenómeno es propio del método de curvas de nivel, y es reconocido en el artículo de Allaire, et al. [3]. En general, la influencia del diseño inicial en los resultados de optimización topológica es un problema conocido en este campo de investigación, y como se menciona en el artículo de Hesse, et al., es de esperar que la introducción de una restricción de volumen mediante el lagrangiano aumentado aumente aún más esta dependencia [21]. No obstante, la implementación del lagrangiano aumentado es de gran importancia, ya que evita que el algoritmo llegue a condiciones extremas como borrar o rellenar completamente el dominio de optimización, y evita el proceso de ensayo y error necesario cuando se utiliza un método de penalización con un multiplicador de Lagrange fijo.

Ambos de estos problemas existieron antes de implementar el lagrangiano aumentado.

Otras dificultades que se enfrentaron en el desarrollo de este trabajo tienen relación con todos los parámetros elegidos para el algoritmo de optimización, presentados en el Capítulo 3.1. Se realizaron muchas pruebas con distintas cantidades de iteraciones de inicialización al inicio y durante el proceso, distintos intervalos de tiempo para el esquema de Godunov, distintos intervalos de tiempo para la inicialización al inicio y durante el proceso y distintos parámetros iniciales para el esquema del lagrangiano aumentado. Adicionalmente, se realizaron pruebas aplicando o no la función escalón suavizada a la definición de k , variando la amplitud de la onda incidente, y con otras formas iniciales, hasta llegar finalmente a los parámetros y formas iniciales presentados en este trabajo.

Una dificultad considerable fue la determinación del tamaño del dominio. En un inicio, se tenía un dominio con un ancho de unas 36 veces la longitud de onda, pero esto generaba un comportamiento errático en la función objetivo, y el volumen nunca se estabilizaba. Esto probablemente se debía a que la malla siempre tuvo la misma cantidad de elementos, por lo que en este caso no era lo suficientemente fina como para capturar cada longitud de onda de manera adecuada, y refinar la malla suponía un costo computacional considerable. Posteriormente, se intentó con un dominio con un ancho de un décimo de la longitud de onda, para seguir con la tendencia de los metamateriales de tener celdas periódicas mucho más pequeñas que la longitud de onda operacional. En este caso, la función objetivo presentaba un mejor comportamiento y el volumen se estabilizaba, pero llegaba un punto en que se alcanzaba el volumen objetivo y tanto la función objetivo como la forma del absorbente se mantenían exactamente iguales a lo largo de cientos de iteraciones, lo que quiere decir que solo estaba actuando la restricción de volumen y no el método de optimización topológica. Finalmente, se llegó al dominio y resultados aquí presentados, con un ancho de unas 3 veces la longitud de onda, el cual de todas formas es del mismo orden de magnitud, por lo que se puede considerar como un ejemplo de un metamaterial acústico primitivo.

Los problemas presentados para el funcionamiento del algoritmo contrastan con el comportamiento regular y buenos resultados que se obtienen con el código original que minimizaba la flexibilidad (*compliance*) para un problema de elasticidad lineal. Esto se puede asociar al hecho de que cuando la función objetivo es la flexibilidad, el problema es autoadjunto, lo cual simplifica notablemente la resolución del problema adjunto (p),

ya que es proporcional al problema original ($p = -u$) [3]. En cambio, para este caso, la función objetivo conlleva a la formulación de un problema adjunto que es otra ecuación diferencial del mismo tipo que el problema de dispersión, por lo que matemáticamente es un problema más complejo.

Conclusiones

Conclusión general

A partir de los resultados presentados, se logra cumplir con el objetivo general de este trabajo, obteniendo tres diseños optimizados a partir de tres formas iniciales distintas. Esto se cumple mediante una simulación computacional de un absorbente acústico para ultrasonido en el lenguaje de programación Julia y utilizando la librería Gridap para la resolución de ecuaciones diferenciales con el método de elementos finitos. Los diseños obtenidos mediante la simulación logran concentrar las ondas de mayor amplitud que son dispersadas a partir de una onda monocromática incidente en un subdominio de optimización determinado, y a la vez logran disminuir desde un 75 % hasta un 90 % una función objetivo en un subdominio de medición determinado al comparar con una forma trivial de control. La función objetivo corresponde al cuadrado de la amplitud de la presión acústica de la onda dispersada.

Conclusiones específicas

Respecto al primer objetivo específico de simular el comportamiento de ondas acústicas, esto se logra de manera satisfactoria a lo largo de todas las iteraciones para cada diseño inicial, observando que el comportamiento de las ondas muestra una respuesta a los cambios geométricos del absorbente. Esto valida la elección de la librería Gridap, que permite resolver las ecuaciones diferenciales en pocas líneas de código con una notación familiar y en un tiempo relativamente corto.

También se concluye que la modelación en 2D es un buen compromiso entre la simplicidad del algoritmo, el costo computacional y la obtención de resultados verosímiles,

considerando la propiedad de los transductores de equipamiento de ultrasonido de focalizar la energía incidente en un plano.

Por último, se concluye que hizo falta imponer condiciones de salto en la interfaz entre Ω_0 y Ω_1 , para mejorar la interacción de las ondas con el absorbente y lograr el comportamiento esperado considerando un cuerpo totalmente rígido. Sin embargo, la concentración de las ondas en el subdominio de optimización y los buenos resultados numéricos de la función objetivo permiten de todas formas validar los diseños obtenidos a partir de estas simulaciones.

Respecto al segundo objetivo de determinar un diseño óptimo mediante el método de curvas de nivel y evaluar su desempeño, se logra aplicar este método para obtener tres diseños óptimos, que logran reducir la función objetivo dentro de un subdominio específico en un 74,90% para la forma de anillo, un 83,57% para la forma de onda, y un 90,27% para el patrón de puntos. También se concluye que los cambios geométricos tienen un impacto en la función objetivo, y que su reducción no se debe exclusivamente a un aumento o disminución del volumen del absorbente.

En los tres casos se observa una fase inicial en que el volumen presenta grandes oscilaciones que generan un comportamiento errático en la función objetivo, hasta estabilizarse en el volumen objetivo, lo cual suaviza apreciablemente el comportamiento de la función objetivo. De esto se concluye que la función objetivo es muy sensible a los cambios de volumen y que las respuestas son caóticas, lo que a su vez permite elegir a la forma trivial como la comparación adecuada para evaluar los diseños y concluir que el mejor es el patrón de puntos, seguido de la forma de onda y por último la forma de anillo.

Adicionalmente, se concluye que el diseño óptimo resultante depende fuertemente de la forma inicial, en vista de la variedad presente en las tres formas obtenidas. Si bien, este es un problema conocido en el área de optimización topológica, la introducción de restricciones de volumen incrementa esta dependencia. No obstante, la implementación del lagrangiano aumentado como restricción fue de gran importancia para evitar soluciones extremas y evitar el ensayo y error necesario al utilizar un multiplicador de Lagrange fijo.

Por último, se concluye que el hecho de no tener un problema autoadjunto como lo es la minimización de la flexibilidad en elasticidad lineal hace que el problema sea

más complejo, lo cual se refleja en dificultades para mantener el volumen en un rango aceptable, y para encontrar los parámetros del algoritmo y el tamaño del dominio necesarios para dar lugar a un proceso numéricamente estable y que entregue resultados que cumplan con lo requerido en este trabajo.

Recomendaciones

A partir de los resultados y las conclusiones obtenidas de este trabajo, surge una serie de posibles desarrollos futuros en este tema. En primer lugar, se recomienda imponer condiciones de salto en la frontera de Ω_1 , esperando mejorar la simulación de la interacción de las ondas con el absorbente. Esto también permitiría elegir un valor distinto de cero para el número de onda en el absorbente, y en su lugar elegir un valor que corresponda a un material absorbente existente.

En segundo lugar, una extensión natural de este trabajo consiste en realizar una simulación en 3D, lo cual requeriría modificar las funciones para la inicialización y el esquema de Godunov para resolver las ecuaciones en tres dimensiones, y aceptar un tiempo de ejecución considerablemente mayor para el algoritmo. En cuanto a otros aspectos, se podrían resolver las ecuaciones con la misma librería Gridap simplemente definiendo un dominio tridimensional, y el método de curvas de nivel se puede extender fácilmente a tres dimensiones, como lo muestra el artículo de Allaire, et al. [3].

En tercer lugar, se podría explorar cambiar las condiciones de borde del problema, para simular un espacio infinito en vez de un contenedor de paredes rígidas. Para implementar esto se puede utilizar una capa perfectamente acoplada (*Perfectly Matched Layer*, PML), que corresponde a una región artificial definida en el borde del dominio que absorbe las ondas con mínimas reflexiones, y es una técnica común para simular un espacio infinito en un dominio computacional finito. Durante el desarrollo de este trabajo se exploró la idea de implementar una PML, pero se descartó por su complejidad al momento de definir las condiciones de borde en la derivada de forma, por problemas de convergencia en el algoritmo, y por considerar que las condiciones de borde finalmente escogidas eran suficientes para una primera aproximación a este problema.

Finalmente, un aporte importante a este trabajo se lograría con la fabricación de los absorbentes mediante manufactura aditiva y la realización de mediciones experimentales que corroboren la efectividad de los diseños optimizados. Para esto sería recomen-

dable introducir una penalización de perímetro, para obtener diseños con formas más suaves. También sería necesario tomar en cuenta el equipamiento que se utilizaría, para así relacionar el tamaño de la malla con la resolución del equipo, y también incorporar al algoritmo restricciones típicas de la manufactura aditiva, como por ejemplo la limitación en la impresión de estructuras en voladizo, la necesidad de utilizar soportes para ciertas estructuras, la construcción deliberadamente frágil de estos soportes para facilitar su remoción y la posible deformación de estructuras por estrés térmico.

Referencias

- [1] R. Novelline, *Squire's Fundamentals of Radiology*, 5.^a ed. Harvard University Press, 1997, págs. 34-35.
- [2] F. Acquaticci, M. M. Yommi, S. N. Gwirc y S. E. Lew, «Rapid Prototyping of Pyramidal Structured Absorbers for Ultrasound,» *Open Journal of Acoustics*, vol. 07, n.º 03, págs. 83-93, 2017. DOI: 10.4236/oja.2017.73008.
- [3] G. Allaire, F. Jouve y A.-M. Toader, «Structural optimization using sensitivity analysis and a level-set method,» *Journal of Computational Physics*, vol. 194, n.º 1, págs. 363-393, 2004. DOI: 10.1016/j.jcp.2003.09.032.
- [4] H. Ge, M. Yang, C. Ma et al., «Breaking the barriers: advances in acoustic functional materials,» *National Science Review*, vol. 5, n.º 2, págs. 159-182, 2017. DOI: 10.1093/nsr/nwx154.
- [5] A. Gardiner, P. Daly, R. Domingo-Roca, J. F. C. Windmill, A. Feeney y J. C. Jackson-Camargo, «Additive Manufacture of Small-Scale Metamaterial Structures for Acoustic and Ultrasonic Applications,» *Micromachines*, vol. 12, n.º 6, 2021. DOI: 10.3390/mi12060634.
- [6] A. Baz, «Active acoustic metamaterial with tunable effective density using a disturbance rejection controller,» *Journal of Applied Physics*, vol. 125, n.º 7, pág. 074 503, 2019. DOI: 10.1063/1.5063000.
- [7] W. Akl y A. Baz, «Active control of the dynamic density of acoustic metamaterials,» *Applied Acoustics*, vol. 178, pág. 108 001, 2021. DOI: 10.1016/j.apacoust.2021.108001.
- [8] A. Baz, «Active synthesis of a gyroscopic-nonreciprocal acoustic metamaterial,» *The Journal of the Acoustical Society of America*, vol. 148, n.º 3, pág. 1271, 2020. DOI: 10.1121/10.0001815.

- [9] R. Hedayati y S. Lakshmanan, «Pneumatically-Actuated Acoustic Metamaterials Based on Helmholtz Resonators,» *Materials*, vol. 13, n.º 6, 2020. DOI: 10.3390/ma13061456.
- [10] R. Vdovin, T. Tomilina, V. Smelov y M. Laktionova, «Implementation of the additive PolyJet technology to the development and fabricating the samples of the acoustic metamaterials,» *Procedia Engineering*, vol. 176, págs. 595-599, 2017. DOI: 10.1016/j.proeng.2017.02.302.
- [11] D. Roca, T. Pamies, J. Cante, O. L. Valls y J. Oliver, «Experimental and Numerical Assessment of Local Resonance Phenomena in 3D-Printed Acoustic Metamaterials,» *Journal of Vibration and Acoustics*, vol. 142, n.º 2, 2020. DOI: 10.1115/1.4045774.
- [12] V. Leroy, A. Strybulevych, M. Lanoy, F. Lemoult, A. Tourin y J. H. Page, «Superabsorption of acoustic waves with bubble metascreens,» *Phys. Rev. B*, vol. 91, pág. 020301, 2015. DOI: 10.1103/PhysRevB.91.020301.
- [13] H. Kuttruff, *Room Acoustics*, 4.^a ed. Spon Press, 2000.
- [14] E. Klaseboer, Q. Sun y D. Y. C. Chan, «Helmholtz Decomposition and Boundary Element Method Applied to Dynamic Linear Elastic Problems,» *Journal of Elasticity*, vol. 137, n.º 1, págs. 83-100, 2018. DOI: 10.1007/s10659-018-09710-y.
- [15] L. Landau y E. Lifshitz, *Theory of Elasticity*, 2.^a ed. Pergamon Press, 1970, págs. 101-104.
- [16] J. Yue, M. Li, P. Li y X. Yuan, «Numerical Solution of an Inverse Obstacle Scattering Problem for Elastic Waves via the Helmholtz Decomposition,» *Communications in Computational Physics*, vol. 26, n.º 3, págs. 809-837, 2019. DOI: 10.4208/cicp.OA-2018-0194.
- [17] F. Ihlenburg, *Finite Element Analysis of Acoustic Scattering*. Springer, 1998.
- [18] Siemens, *Simcenter Nastran Acoustics User's Guide*, Siemens Digital Industries Software, 2019.
- [19] S. Horsley, *Boundary conditions*, University of Exeter, 2017.

- [20] G. Allaire, M. Bihl, B. Bogosel et al., *Shape and topology optimization of structures built by additive manufacturing - Chapter 3*, CMAP, École Polytechnique, Expuesto en el Centro de Modelamiento Matemático de la Universidad de Chile en Diciembre, 2022.
- [21] S. Hesse, L. Leidinger, J. Krehmeller, D. Lukaszewicz y F. Duddeck, «Shape optimization with the level-set-method using local volume constraints,» *Structural and Multidisciplinary Optimization*, vol. 57, págs. 115-130, 2018. DOI: 10.1007/s00158-017-1741-1.
- [22] S. Badia y F. Verdugo, «Gridap: An extensible Finite Element toolbox in Julia,» *Journal of Open Source Software*, vol. 5, n.º 52, pág. 2520, 2020. DOI: 10.21105/joss.02520.
- [23] J. Bushberg, J. A. Seibert, E. Leidholdt y J. Boone, *The Essential Physics of Medical Imaging*, 2.^a ed. Lippincott Williams & Wilkins, 2002, págs. 471-474.
- [24] F. Verdugo y S. Badia, «The software design of Gridap: A Finite Element package based on the Julia JIT compiler,» *Computer Physics Communications*, vol. 276, pág. 108341, jul. de 2022. DOI: 10.1016/j.cpc.2022.108341.

Anexo A

Evolución de forma del absorbente

En esta sección, se muestra la evolución de la forma del absorbente a través de la función $k(x)$ definida a partir de la respectiva función ψ^i para una iteración i determinada. Se elige mostrar más figuras en las primeras iteraciones, y menos figuras en las últimas iteraciones, ya que existe más variación al inicio del proceso que al final.

A.1. Forma de anillo

A continuación, se muestra la evolución de la forma del absorbente del proceso de optimización de la sección 3.2.2, que tiene como función inicial a la forma de anillo.

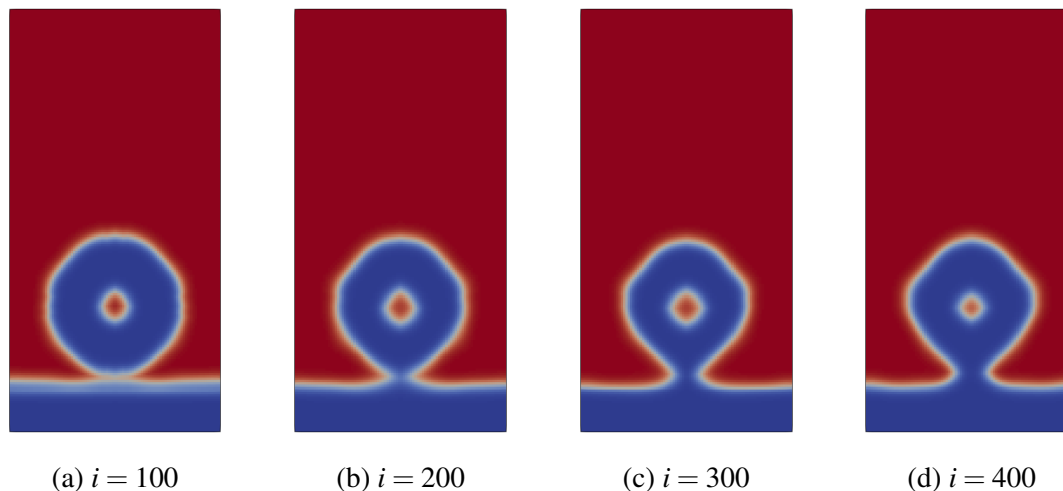


Figura A.1: Evolución de $k(x)$ hasta 400 iteraciones para forma de anillo

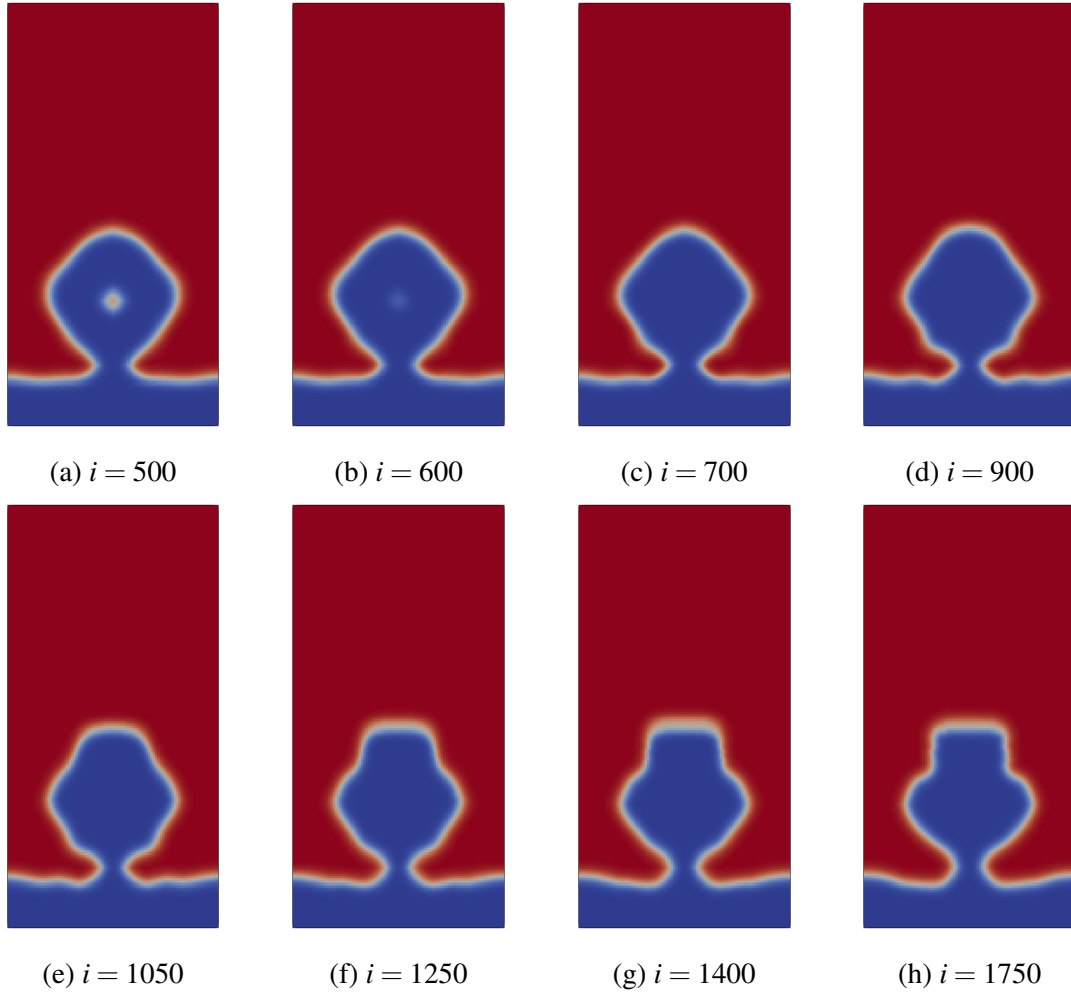


Figura A.2: Evolución de $k(x)$ hasta 1750 iteraciones para forma de anillo

A.2. Forma de onda

A continuación, se muestra la evolución de la forma del absorbente del proceso de optimización de la sección 3.2.3, que tiene como función inicial a la forma de onda.

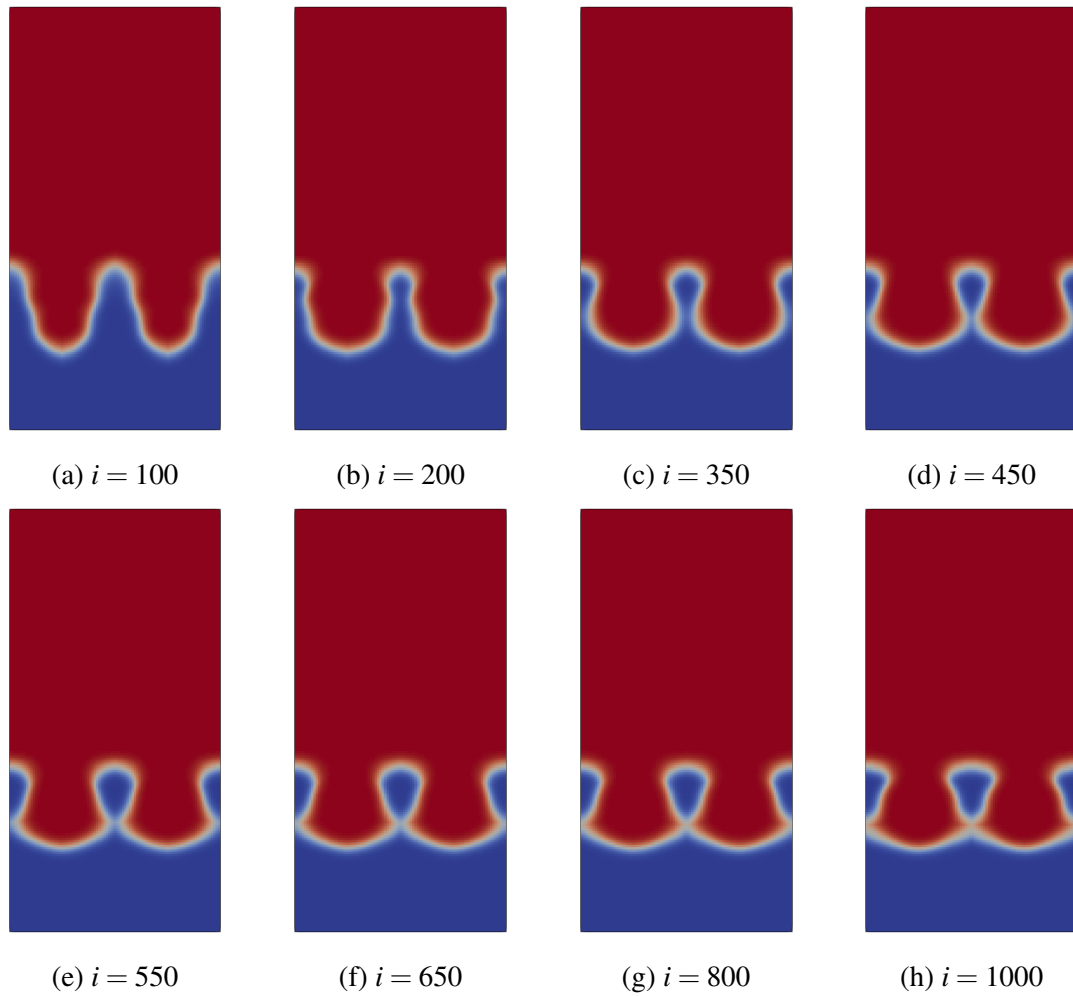
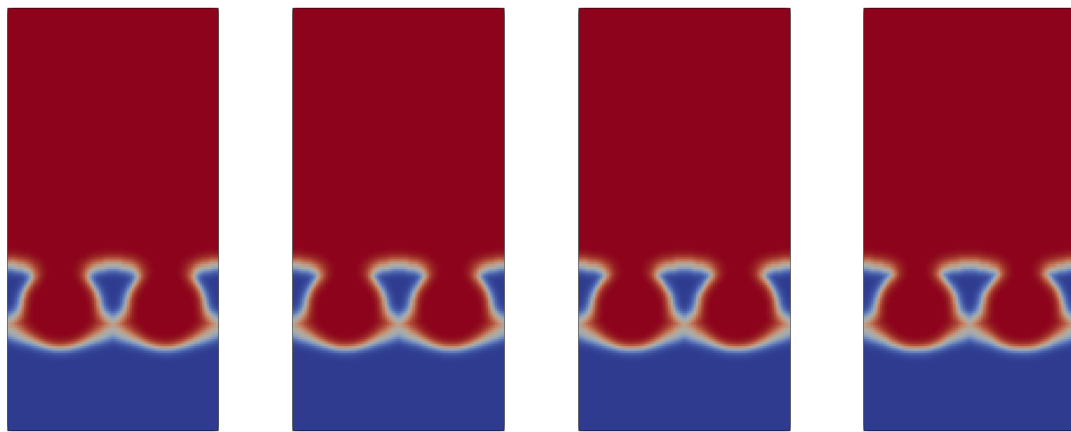


Figura A.3: Evolución de $k(x)$ hasta 1000 iteraciones para forma de onda



(a) $i = 1200$

(b) $i = 1350$

(c) $i = 1550$

(d) $i = 1950$

Figura A.4: Evolución de $k(x)$ hasta 1950 iteraciones para forma de onda

A.3. Patrón de puntos

A continuación, se muestra la evolución de la forma del absorbente del proceso de optimización de la sección 3.2.4, que tiene como función inicial al patrón de puntos.

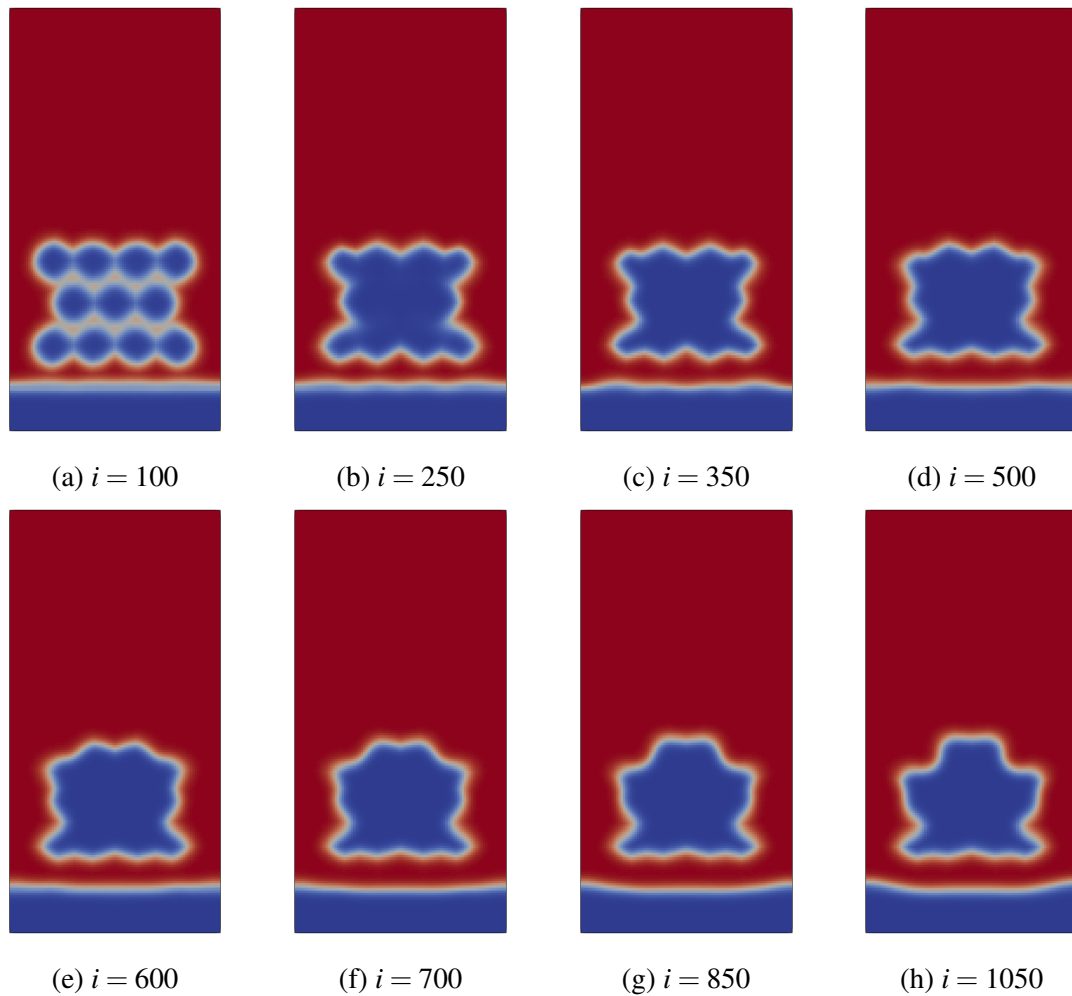
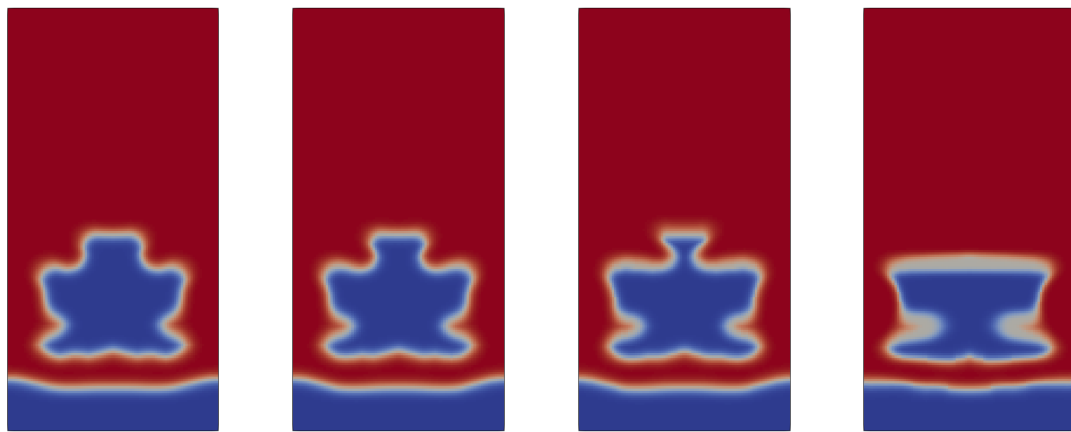


Figura A.5: Evolución de $k(x)$ hasta 1050 iteraciones para patrón de puntos



(a) $i = 1250$

(b) $i = 1450$

(c) $i = 1650$

(d) $i = 2100$

Figura A.6: Evolución de $k(x)$ hasta 2100 iteraciones para patrón de puntos

Anexo B

Evolución de función objetivo

En esta sección, se muestra la historia de convergencia mediante la evolución de la función objetivo presente en los gráficos 3.1, 3.3 y 3.5, pero dividida en grupos de 500 iteraciones. Notar que las escalas de los gráficos van cambiando y en algunos casos son logarítmicas y en otros casos lineales, para visualizar de mejor manera el comportamiento de la función.

B.1. Forma de anillo

A continuación, se muestra el detalle de la historia de convergencia del proceso de optimización de la sección 3.2.2 presente en el gráfico 3.1, que tiene como función inicial a la forma de anillo.

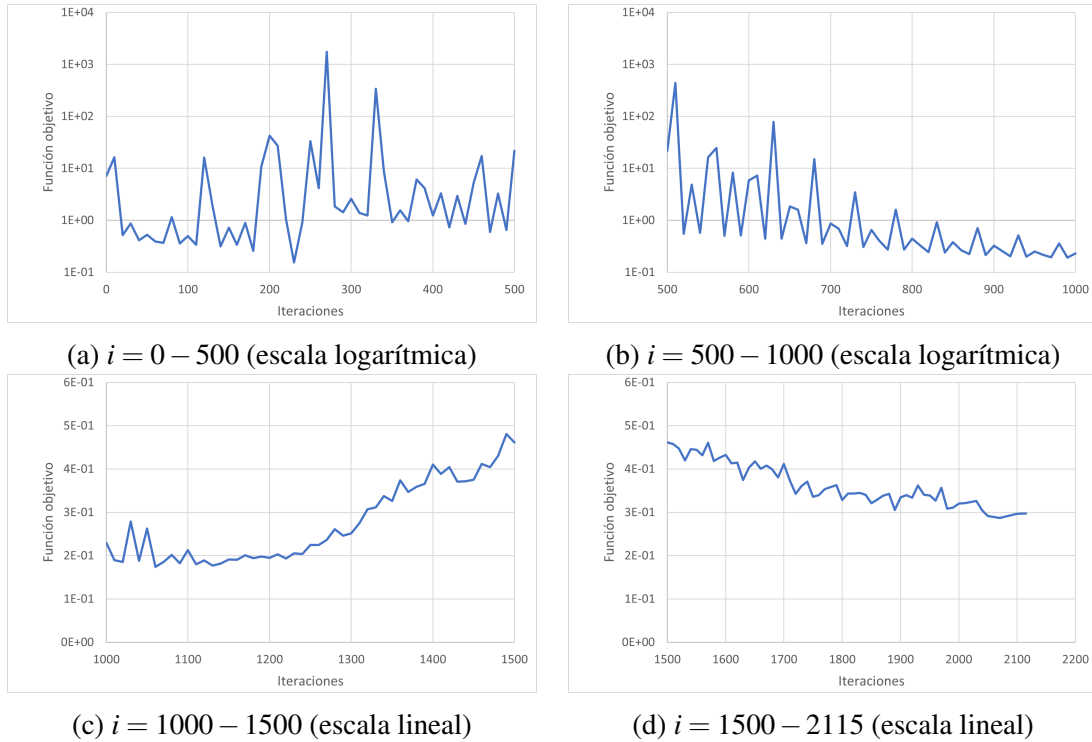


Gráfico B.1: Evolución de función objetivo en distintos intervalos para forma de anillo

B.2. Forma de onda

A continuación, se muestra el detalle de la historia de convergencia del proceso de optimización de la sección 3.2.3 presente en el gráfico 3.3, que tiene como función inicial a la forma de onda.

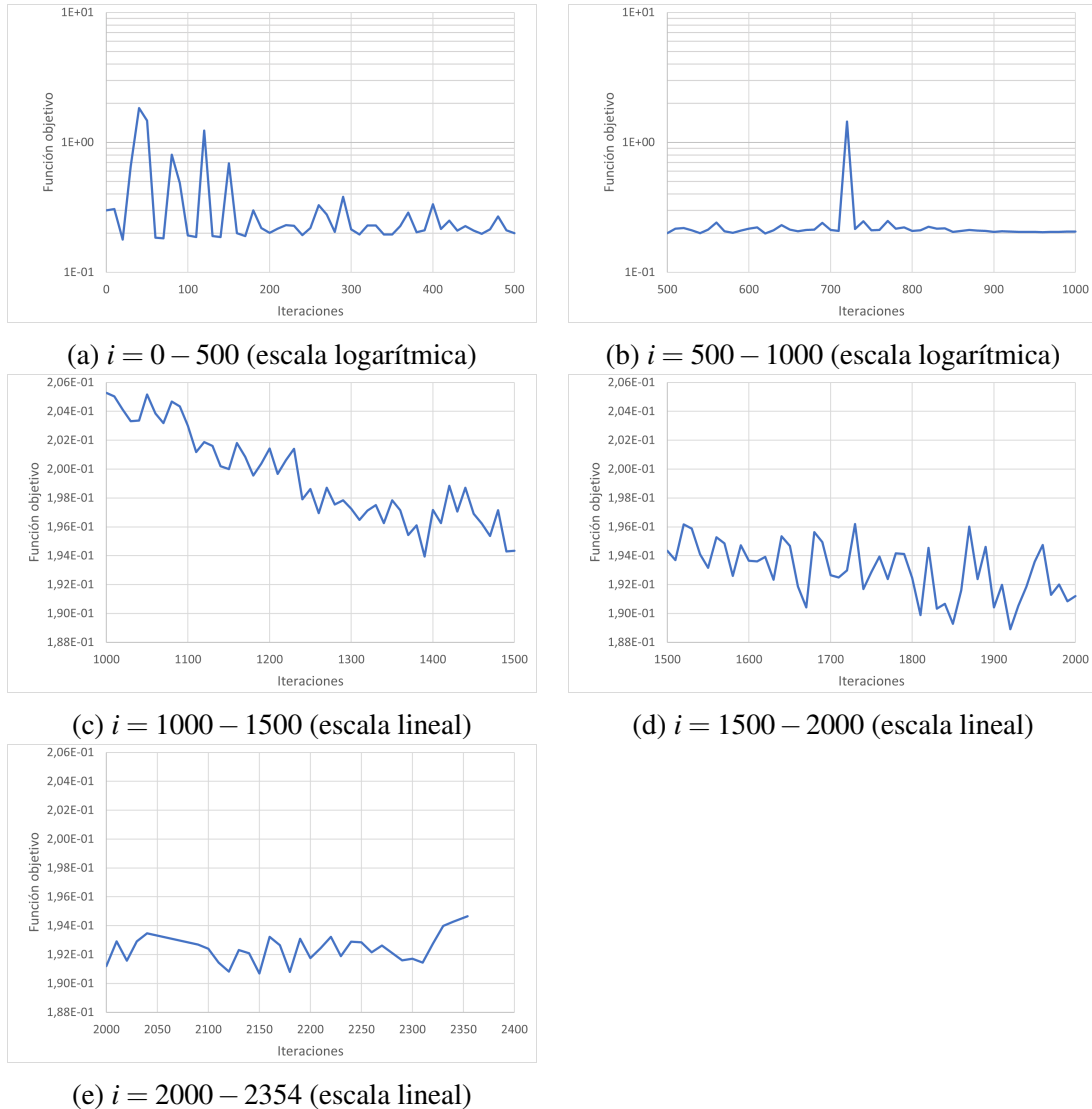
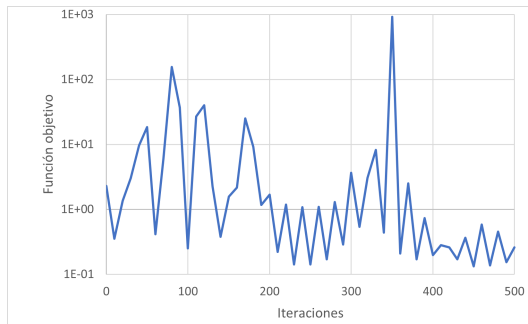


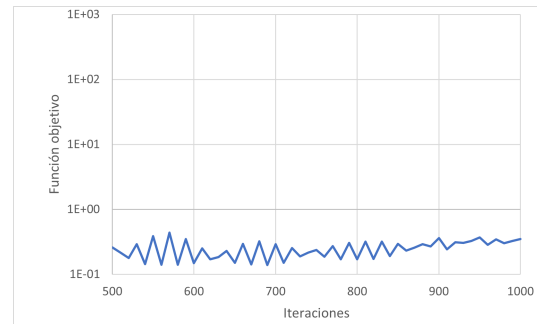
Gráfico B.2: Evolución de función objetivo en distintos intervalos para forma de onda

B.3. Patrón de puntos

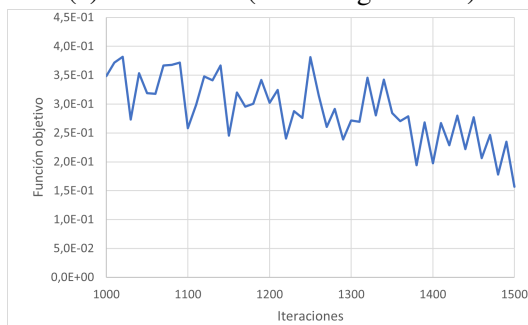
A continuación, se muestra el detalle de la historia de convergencia del proceso de optimización de la sección 3.2.4 presente en el gráfico 3.5, que tiene como función inicial al patrón de puntos.



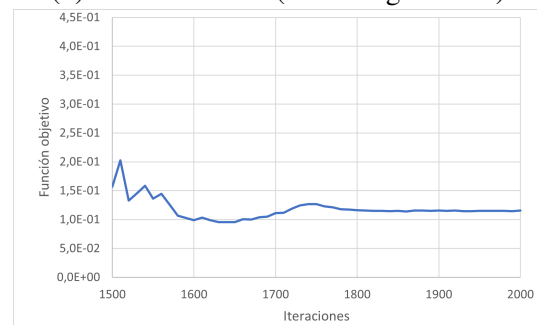
(a) $i = 0 - 500$ (escala logarítmica)



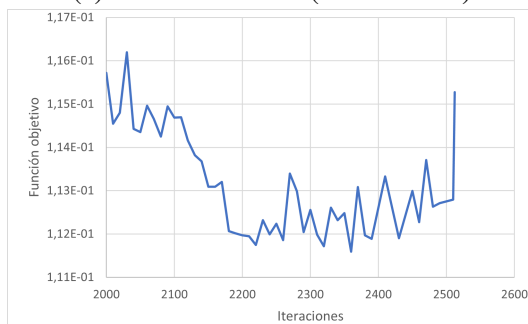
(b) $i = 500 - 1000$ (escala logarítmica)



(c) $i = 1000 - 1500$ (escala lineal)



(d) $i = 1500 - 2000$ (escala lineal)



(e) $i = 2000 - 2512$ (escala lineal)

Gráfico B.3: Evolución de función objetivo en distintos intervalos para patrón de puntos