

Universidad Técnica Federico Santa María

Departamento de Ingeniería Eléctrica

Valparaíso - Chile



“MODELO Y ANÁLISIS DE SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA EN SUELOS NO HOMOGÉNEOS UTILIZANDO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS”.

BENJAMÍN ALEJANDRO NÚÑEZ MAÚLEN

MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO ELECTRICISTA

Profesor Guía

Alejandro Angulo Cárdenas

Profesor Correferente

Johny Hernán Montaña Chaparro

27 de junio de 2026



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título ☐ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Modelo y análisis de sistemas de puesta a tierra en suelos no homogéneos utilizando método de elementos finitos.

Nombre del candidato(a): Benjamín Alejandro Núñez Maulén

Carrera / Grado: Ingeniería Eléctrica

Campus: Casa central Valparaíso **Departamento:** Ingeniería Eléctrica

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Alejandro Angulo, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☒ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

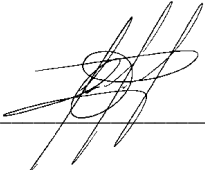
☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 02/07/2026 **Firma:** 

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 27/06/2026 **Firma:** 

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

Universidad Técnica Federico Santa María

Departamento de Ingeniería Eléctrica

Valparaíso - Chile



“MODELO Y ANÁLISIS DE SISTEMAS DE PUESTA A TIERRA EN SUELOS NO HOMOGÉNEOS UTILIZANDO MÉTODO DE ELEMENTOS FINITOS”.

BENJAMÍN ALEJANDRO NÚÑEZ MAÚLEN

2025

Material de referencia, su uso no involucra responsabilidad del autor o de la Institución.

Agradecimientos

Expreso mi mas profundo agradecimiento a mi familia por ser un pilar fundamental. A mis padres por su apoyo incondicional e inculcarme desde pequeño la importancia del conocimiento, el esfuerzo, y sobre todo perseverancia ante cualquier problema que se encuentre en mi camino. A mi hermana por su apoyo incondicional. A mi pareja, por su comprensión, paciencia y apoyo durante el termino de mi estudios y el desarrollo del presente documento. A Dios por entregarme las herramientas y capacidades para cumplir mis metas.

A mis compañeros y amigos, les agradezco las numerosas y valiosas conversaciones inspiradoras, el intercambio de ideas que hemos compartido y el apoyo incondicional brindado durante los momentos más difíciles de nuestra carrera.

A mis profesores guía, por su paciencia, orientación y consejos durante el desarrollo de mi tesis y los cursos que tome con ellos, por su amplia experiencia en el ámbito y dedicación por la educación.

Finalmente, agradezco a la Universidad y al Departamento de Ingeniería Eléctrica por la formación recibida, el apoyo académico y la ayuda entregada por sus funcionarios a lo largo de la carrera. Asimismo, agradezco a la Agencia Nacional de Investigación y Desarrollo (ANID), cuyo apoyo, a través de los proyectos ANID AC3E CIA 250006 y ANILLO ACT250059, contribuyó al desarrollo de este trabajo.

“Why do we fall? So that we can learn to pick ourselves up.”

Índice general

1. Introducción	3
1.1. Antecedentes.	4
1.2. Definición del problema	5
1.3. Objetivos.	5
1.4. Estructura del documento.	5
2. Marco teórico	7
2.1. Resistividad y resistencia en sistemas de puesta a tierra.	7
2.1.1. Resistividad eléctrica de terreno.	7
2.1.2. Resistencia de puesta a tierra.	8
2.2. Métodos de cálculo y medición de cuatro puntos.	9
2.2.1. Método arreglo de Wenner.	9
2.2.2. Método arreglo de Schlumberger-Palmer.	10
2.3. Diseño de malla de puesta a tierra y modelo de terreno.	11
2.3.1. Modelo estratificación doble capa.	11
2.3.2. Modelo estratificación n capas horizontales.	13
2.3.3. Criterio de diseño de malla de puesta a tierra.	13
2.3.4. Procedimiento de diseño.	15
2.4. Teoría de Método de Elementos Finitos.	19
3. Metodología de trabajo	21
3.1. Herramientas computacionales	22
3.1.1. Hardware	22
3.1.2. COMSOL Multiphysics	22
3.1.3. Matlab	23
3.2. Ajustes de parámetros de geometría infinita y validación.	23
3.2.1. Análisis de sensibilidad geométrico.	23
3.2.2. Validación entorno de simulación.	26
3.2.3. Análisis de sensibilidad de discretización de dominio.	27
3.2.4. Ajuste discretización de dominio para MPT.	31
3.3. Creación y definición de terrenos de referencia.	33
3.3.1. Modelo tres capas.	34
3.3.2. Modelo de capas inclinadas.	35

3.3.3. Modelo de capas inclinadas opuestas.	36
3.3.4. Modelo con roca incrustada.	37
3.4. Mediciones con método Wenner en terrenos.	38
3.5. Cálculo del modelo equivalente de doble capa	40
3.6. Creación de Malla de puesta a tierra.	40
3.7. Obtención variables de estudio.	41
3.8. Proceso de comparación y análisis.	42
4. Resultados y análisis	44
4.1. Mediciones Wenner de modelos de referencia.	44
4.2. Modelos equivalentes doble capa.	47
4.3. Resistencias de puesta tierra, tensiones de contacto y paso.	48
4.4. Análisis de resultados	51
5. Conclusiones	59
A. Anexos.	62
A.1. Mediciones Wenner de los modelos.	62
A.1.1. Mediciones modelo 3 capas horizontales.	62
A.1.2. Mediciones modelo capas inclinadas.	65
A.1.3. Mediciones modelo capas inclinadas opuestas.	67
A.1.4. Mediciones en modelo con roca incrustada.	69
A.2. Códigos implementados en Matlab.	70
A.2.1. Medición resistividad aparente arreglo Wenner.	70
A.2.2. Cálculo de modelo equivalente doble capa.	72
A.2.3. Extracción de variables a estudio.	75
A.2.4. Cálculos estadísticos para análisis.	77
A.2.5. Creación de gráficos distribución de errores por casos.	79

Índice de figuras

2.1. Equipo de puesta a tierra hemisferico con potencial V_0 [1].	8
2.2. Método de los cuatro puntos, electrodos espaciados igualmente [2].	9
2.3. Método de los cuatro electrodos no espaciados igualmente [2].	10
2.4. Curva típica de resistividad [2].	10
2.5. Método Trafico de Sunde [3] [4].	12
2.6. Perfil geológico de modelo de doble capa [1].	13
2.7. Perfil geológico de modelo de n capas horizontales [1].	13
2.8. Lugares típicos de electrocución [3].	14
2.9. Diagrama de flujo proceso diseño malla de puesta a tierra [3].	18
2.10. Discretización del dominio en dos dimensiones con trinagulos [5].	19
3.1. Resumen General de la Metodología de trabajo.	21
3.2. Terreno de análisis de sensibilidad para definir variables geométricas.	24
3.3. Impedancia de electrodo enterrado en función a relación radio terreno y espesor dominio infinito, con resistencia analítica para su comparación.	25
3.4. Corte laminar de terreno semi infinito con electrodo enterrado.	26
3.5. Corte laminar de terreno referencia de 3 capas.	29
3.6. Error relativo promedio cada mallado en estudio.	30
3.7. Tiempo de simulación para 12 instancias por mallado.	31
3.8. Modelo implementado para validar ajuste para dominio MPT.	32
3.9. Esquema de modelo de tres capas horizontales.	34
3.10. Esquema de modelo multicapa con mismo angulo de inclinación.	35
3.11. Esquema de modelo multicapa con diferente angulo de inclinación.	36
3.12. Esquema de modelo multicapa con roca.	38
3.13. Diagrama de conexión de la fuente de corriente aplicada en COMSOL.	41
4.1. Mediciones Wenner promedio para Modelo real de 3 capas horizontales.	45
4.2. Mediciones Wenner promedio para Modelo real de capas inclinadas.	45
4.3. Mediciones Wenner promedio para Modelo real de capas inclinadas opuestas.	46
4.4. Mediciones Wenner promedio para Modelo real con roca incrustada.	46
4.5. Distribución de los errores relativos de R_g al comparar los modelos reales.	52
4.6. Distribución de errores relativos de R_g para los distintos modelos de terreno analizados mediante aproximación equivalente de doble capa.	53
4.7. Distribución de los errores relativos de E_{step} al comparar los modelos reales.	54

4.8. Distribución de errores relativos de E_{step} para los distintos modelos de terreno analizados mediante aproximación equivalente de doble capa.	55
4.9. Distribución de los errores relativos de E_{touch} al comparar los modelos reales. . .	56
4.10. Distribución de errores relativos de E_{touch} para los distintos modelos de terreno analizados mediante aproximación equivalente de doble capa.	57

Índice de Tablas

3.1. Variación de Resistencia de puesta a tierra en función de la relación R_b/L [6]. . .	24
3.2. Comparación entre la resistencia de puesta a tierra obtenida mediante el cálculo analítico y la simulación numérica.	27
3.3. Resistividad y espesor correspondientes al modelo de terreno de tres capas [7]. .	28
3.4. Mediciones de resistividad obtenidas mediante el método de Wenner [7].	28
3.5. Comparación de los resultados obtenidos en COMSOL con modelos de referencia.	33
3.6. Error relativo del modelo desarrollado en COMSOL respecto a los modelos de referencia.	33
3.7. Parámetros empleados en las simulaciones realizadas.	34
3.8. Permutaciones de resistividades ρ_1 , ρ_2 y ρ_3 consideradas para el modelo M1. . .	35
3.9. Permutaciones de resistividades ρ_1 , ρ_2 y ρ_3 consideradas para el modelo M2. . .	36
3.10. Permutaciones de resistividades ρ_1 , ρ_2 y ρ_3 consideradas para el modelo M3. . .	37
3.11. Parámetros geométricos y eléctricos empleados en las simulaciones del modelo M4.	37
3.12. Permutaciones de resistividades ρ_1 y ρ_2 consideradas para el modelo M4.	38
3.13. Parámetros del electrodo utilizados para las mediciones mediante el método de Wenner [8].	38
3.14. Espaciamientos utilizados para las mediciones mediante el método de Wenner según el modelo analizado.	39
3.15. Características geométricas de la MPT utilizada en las simulaciones.	41
4.1. Parámetros de los modelos equivalentes obtenidos a partir de mediciones Wenner.	47
4.2. Resultados eléctricos obtenidos para los modelos de referencia.	49
4.3. Resultados eléctricos obtenidos para los modelos equivalentes de doble capa. . .	50
4.4. Resultados eléctricos obtenidos para los modelos equivalentes homogéneos. . . .	50
4.5. Errores relativos obtenidos para las variables eléctricas de interés respecto a los modelos de referencia.	51
4.6. Interpretación general del sesgo obtenido para las variables eléctricas analizadas.	57
A.1. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 1 – Caso 1.	62
A.2. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 1 – Caso 2.	63
A.3. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 1 – Caso 3.	63
A.4. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 1 – Caso 4.	64
A.5. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 1 – Caso 5.	64
A.6. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 1 – Caso 6.	65

A.7. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 2 – Caso 1.	65
A.8. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 2 – Caso 2.	66
A.9. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 2 – Caso 3.	66
A.10. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 2 – Caso 4.	66
A.11. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 2 – Caso 5.	66
A.12. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 2 – Caso 6.	67
A.13. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 3 – Caso 1.	67
A.14. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 3 – Caso 2.	67
A.15. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 3 – Caso 3.	68
A.16. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 3 – Caso 4.	68
A.17. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 3 – Caso 5.	68
A.18. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 3 – Caso 6.	68
A.19. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 4 – Caso 1.	69
A.20. Resultados de resistividad aparente para el Modelo 4 – Caso 2.	70

Resumen

La presente memoria aborda el estudio de sistemas de puesta a tierra mediante modelación basada en el método de elementos finitos, con énfasis en el análisis de variables eléctricas críticas tales como la resistividad del terreno, determinada a través del método de Wenner, la resistencia de puesta a tierra y las tensiones de contacto y de paso. Estas variables resultan fundamentales en el diseño, construcción y operación de instalaciones eléctricas, ya que garantizan la seguridad tanto de los equipos como del personal operativo.

El estudio surge de la necesidad de cuantificar las diferencias existentes entre la representación simplificada de un terreno estratificado de doble capa, comúnmente utilizada en la práctica ingenieril, y el comportamiento de configuraciones de suelo más complejas que se aproximan de mejor manera a un terreno real.

En una primera etapa, se desarrolla el marco teórico que sustenta el análisis, incluyendo la formulación matemática del problema y la descripción de los métodos de medición aplicables a las variables de interés. Posteriormente, se valida el entorno de simulación en COMSOL Multiphysics mediante la comparación de los resultados obtenidos para un electrodo de puesta a tierra con antecedentes teóricos y resultados reportados en la literatura técnica, verificándose la consistencia y confiabilidad del software.

A continuación, se realiza un análisis de sensibilidad de los parámetros geométricos del dominio de estudio, con el objetivo de definir dimensiones de terreno adecuadas que permitan reducir el tiempo computacional sin afectar significativamente la precisión de los resultados.

Finalmente, se definen cuatro configuraciones de terreno: un modelo de tres capas horizontales, un modelo con capas inclinadas, un modelo con capas inclinadas con distintos ángulos y un modelo con inclusión de roca incrustada. Para cada configuración se analizan seis casos de estudio y para el último 2 configuraciones, totalizando 20 escenarios evaluados, lo que permite realizar una comparación sistemática del comportamiento eléctrico frente a distintas condiciones de estratificación.

Los resultados obtenidos evidencian que la simplificación del terreno puede generar diferencias relevantes en la estimación de tensiones de paso y contacto en comparación con modelos de doble capa. En particular, se observó que ciertos escenarios pueden conducir a una subestimación de las tensiones de seguridad cuando no se considera adecuadamente la estratificación del suelo. Este aspecto resulta crítico desde el punto de vista del diseño, ya que podría comprometer el cumplimiento de los límites de seguridad establecidos normativamente.

Finalmente, el trabajo presenta un aporte para el diseño de terrenos infinitos sin un costo computacional importante mediante método de elementos finitos y cuantificar la diferencia de un terreno real a su equivalente doble capa. Dado los resultados, se recomienda incorporar criterios conservativos o factores adicionales de seguridad cuando se utilicen modelos estratificados en softwares especializados, con el fin de garantizar el cumplimiento de los estándares de seguridad bajo condiciones reales de operación.

Abstract

This thesis addresses the study of grounding systems through modeling based on the finite element method, with emphasis on the analysis of critical electrical variables such as soil resistivity, determined using the Wenner method, grounding resistance, and touch and step voltages. These variables are fundamental in the design, construction, and operation of electrical installations, since they ensure the safety of both equipment and operating personnel.

The study arises from the need to quantify the differences between the simplified representation of a two-layer stratified soil, commonly used in engineering practice, and the behavior of more complex soil configurations that better approximate real ground conditions.

In the first stage, the theoretical framework supporting the analysis is developed, including the mathematical formulation of the problem and the description of the measurement methods applicable to the variables of interest. Subsequently, the simulation environment in COMSOL Multiphysics is validated by comparing the results obtained for a grounding electrode with theoretical references and results reported in the technical literature, verifying the consistency and reliability of the software.

Next, a sensitivity analysis of the geometric parameters of the study domain is carried out in order to define appropriate soil dimensions that reduce computational time without significantly affecting the accuracy of the results.

Finally, four soil configurations are defined: a three-layer horizontal model, a model with inclined layers, a model with inclined layers at different angles, and a model including embedded rock. For each configuration, six study cases are analyzed, while the latter includes two configurations, resulting in a total of 20 evaluated scenarios. This allows for a systematic comparison of electrical behavior under different stratification conditions.

The obtained results show that soil simplification may generate significant differences in the estimation of touch and step voltages compared to two-layer models. In particular, certain scenarios were found to potentially underestimate safety voltages when soil stratification is not properly considered. This aspect is critical from a design perspective, as it may compromise compliance with safety limits established by standards.

Finally, this work contributes to the design of infinite soil domains using the finite element method without requiring excessive computational cost, while also quantifying the differences between real soil models and their equivalent two-layer representations. Based on the obtained results, it is recommended to incorporate conservative criteria or additional safety factors when stratified models are used in specialized software, in order to ensure compliance with safety standards under real operating conditions.

Capítulo 1

Introducción

En el ámbito de la ingeniería eléctrica, tanto en el contexto educativo como en el industrial, resulta fundamental contar con sistemas de puesta a tierra (SPT) adecuados. Estos sistemas no solo garantizan la confiabilidad y protección de los equipos eléctricos conectados, sino que, sobre todo, salvaguardan la vida de las personas que operan o manipulan equipos energizados en cualquier tipo de infraestructura eléctrica. Los SPT están conformados por elementos conductores que conectan los equipos eléctricos al suelo de forma continua y sin interrupciones, creando una ruta segura para la disipación de corrientes eléctricas no deseadas. Este sistema incluye tanto la conexión a tierra como todos los elementos asociados a ella, asegurando una interacción efectiva entre el sistema eléctrico y el entorno.

Entre las diversas configuraciones de los sistemas de puesta a tierra, las mallas de puesta a tierra (MPT) destacan por su capacidad para garantizar la seguridad en instalaciones eléctricas de gran escala, como subestaciones y plantas industriales. Estas mallas consisten en una red de conductores enterrados en el suelo que trabajan de manera conjunta para evitar que se produzcan tensiones de paso peligrosas en la superficie y minimizar los riesgos de contacto eléctrico durante eventos de falla o maniobra. Además, estos SPT proporcionan una ruta controlada y de baja impedancia para las corrientes de falla, desviándolas directamente a la tierra y evitando que circulen a través de los equipos. Esto permite el correcto funcionamiento de los sistemas de protecciones, manteniendo la confiabilidad y selectividad de los mismos.

Actualmente, existen normas específicas, como [2, 3], que proporcionan metodologías para el diseño de MPT o SPT adaptados a los requisitos operativos deseados. El diseño tradicional de un SPT se basa en mediciones de la resistividad del terreno y en la suposición de un modelo de suelo que represente adecuadamente las características del lugar. A partir de esta información, se determina la cantidad de conductores y varillas necesarias para garantizar el cumplimiento de los parámetros exigidos por la norma [3], tales como las tensiones de paso, las tensiones de contacto y la resistencia de puesta a tierra.

Uno de los principales desafíos en el diseño de una MPT radica en la consideración de la naturaleza no homogénea del suelo [9]. En la práctica, es común que los diseños asuman un modelo de suelo homogéneo o, en algunos casos, de dos o más capas. Aunque estos modelos ofrecen una aproximación al comportamiento de los SPT en una instalación eléctrica, pueden dar lugar a errores, como sobre dimensionamientos o diseños que, una vez implementados, no cumplen con las condiciones técnicas y de seguridad exigidas por la normativa [3]. Un estudio realizado por el Coordinador Eléctrico Nacional (CEN) [10] verificó mediante simulaciones si las MPT de diversas subestaciones cumplían con las tensiones de paso y de contacto tolerables. Los resultados mostraron que ocho de las diez subestaciones analizadas no cumplían con al menos una de las tensiones dentro del rango admisible por la norma. Como parte de las recomendaciones, el CEN destacó la importancia de verificar los valores de resistividad del terreno para mejorar la precisión en el diseño y garantizar el cumplimiento normativo.

Es por ello que surge el planteamiento de desarrollar el modelamiento del terreno bajo un foco más preciso, capaz de plantear el comportamiento real de una estructura en un terreno; por ello, se hace indispensable usar herramientas de simulación que permitan representar de manera fiel la interacción de sistemas de puesta a tierra.

1.1. Antecedentes.

La metodología propuesta en la norma [3] para el diseño de MPT es ampliamente utilizada debido a su enfoque sistemático y la robustez de sus criterios para garantizar la seguridad eléctrica. Sin embargo, el diseño basado en esta norma no está exento de desafíos, especialmente cuando se enfrenta a condiciones complejas como la heterogeneidad del suelo. Por esta razón, numerosos estudios han buscado optimizar el algoritmo de diseño, explorando alternativas que permitan mejorar la eficiencia y precisión de las MPT. Estos trabajos incluyen desde ajustes en la modelación del suelo hasta la implementación de técnicas avanzadas, como algoritmos de optimización y simulaciones numéricas, para minimizar costos y garantizar el cumplimiento de los parámetros normativos.

El artículo [9], muestra un enfoque de diseño alternativo para la puesta a tierra de subestaciones en zonas con alta resistividad del suelo en donde se demostró que una malla con un valor alto de resistencia de puesta a tierra (R_g) también puede ser segura modificando el factor de división, lo que implica que la corriente de falla circula por el cable neutro de las líneas de transmisión, ya que este presenta un valor menor de impedancia, así disminuyendo las tensiones de paso y contacto en la MPT. También resaltaron la importancia del material superficial, confirmando que materiales de alta resistividad como el asfalto son una solución práctica.

Se han estudiado resistencias de puesta a tierra con terrenos no homogéneos con un enfoque con modelos analíticos, pero el terreno no homogéneo se modela como un suelo estratificado; este tipo de geometría no se acerca a los terrenos reales y es por ello que en diseños realizados de mallas para subestaciones no han cumplido con resistencias de puesta a tierra dentro de la normativa [3], por lo que considerar un terreno no estratificado es relevante para el diseño [11].

Modelos matemáticos han sido aplicados para el modelo de sistemas de puesta a tierra [12] en donde se implementan suelos estratificados, obteniendo resultados con el modelo propuesto cercanos a la normativa [3], por ello en la práctica se induce error en la implementación del SPT final.

Siguiendo modelos matemáticos implementados a método de elementos finitos o *Finite element Method* (FEM) con la teoría de campos electromagnéticos se han implementado para el análisis de SPT [13], en donde se demuestra resultados similares con el modelo analítico resaltando la capacidad de este método para el análisis, es por ello que FEM muestra un método de análisis en donde se pueda implementar sistemas reales, si bien los autores utilizan softwares propios para la implementación, existen diferentes softwares gratuitos o de pago en donde se puede implementar FEM para distintas aplicaciones.

1.2. Definición del problema

El diseño de mallas de puesta a tierra para subestaciones eléctricas se basa en los lineamientos establecidos por la norma IEEE Std 80, la cual considera el terreno como un medio no homogéneo estratificado, compuesto por dos o más capas. Si bien esta aproximación representa de manera razonable el comportamiento real del suelo, en la práctica es frecuente que, al momento de la construcción e instalación de la MPT, la resistencia obtenida no coincida con el valor considerado en la etapa de diseño, pudiendo incluso incumplir los límites exigidos por la normativa.

Esta diferencia se debe principalmente a la complejidad de la estructura real del terreno y a las simplificaciones presentes en la formulación normativa, ya que las expresiones utilizadas para determinar las tensiones de paso y contacto consideran un terreno homogéneo equivalente. Debido a ello, durante las campañas de medición se busca obtener un valor representativo de resistividad que permita aproximar el comportamiento eléctrico del suelo para efectos de cálculo.

La determinación de la resistividad del terreno para el diseño de sistemas de puesta a tierra se realiza comúnmente mediante el método de Wenner de cuatro electrodos. A partir de este procedimiento se obtiene una curva de resistividad aparente en función de la separación entre electrodos, permitiendo posteriormente definir modelos equivalentes de suelo utilizados en el diseño de la MPT. En consecuencia, resulta necesario desarrollar modelos de simulación que representen de mejor manera las condiciones reales del terreno.

En este contexto, el presente trabajo aborda el análisis de terrenos no homogéneos aplicados al diseño de mallas de puesta a tierra según los criterios establecidos en la norma IEEE Std 80, utilizando métodos comúnmente empleados en la medición de resistividad. Para ello, se modelarán distintos tipos de terrenos y se simularán procedimientos de medición basados en la metodología indicada por la normativa. Posteriormente, se implementarán diseños de mallas sobre los modelos de suelo definidos y se evaluarán parámetros relevantes para la seguridad eléctrica, tales como la resistencia de puesta a tierra y las tensiones de paso y contacto.

1.3. Objetivos.

En función de la problemática expuesta y de la importancia que tiene la caracterización del suelo en el desempeño de los sistemas de puesta a tierra, esta memoria tiene como objetivo diseñar mallas de puesta a tierra para suelos de diferentes estructuras y composiciones, analizando su comportamiento mediante simulaciones basadas en el método de elementos finitos. De esta manera, se busca comparar la influencia de la naturaleza no homogénea del suelo sobre parámetros eléctricos relevantes, tales como la resistencia de puesta a tierra y las tensiones de paso y contacto.

1.4. Estructura del documento.

Para alcanzar este objetivo, en primer lugar se validará el entorno de simulación mediante la comparación de resultados obtenidos para una barra de puesta a tierra en suelo homogéneo con

soluciones analíticas disponibles en la literatura. Posteriormente, se definirán casos de estudio representativos considerando distintas configuraciones de suelos no homogéneos y condiciones de operación, además de desarrollar procedimientos simulados para la medición de resistividad aparente en cada caso.

A continuación, se diseñarán mallas de puesta a tierra para cada uno de los casos estudiados utilizando como referencia los lineamientos establecidos por la norma IEEE Std 80. Luego, se evaluará el desempeño eléctrico de las mallas diseñadas en condiciones de suelo no homogéneo, determinando parámetros como la resistencia de puesta a tierra y las tensiones de paso y contacto.

Finalmente, se analizarán los resultados obtenidos con el propósito de identificar el impacto de la no homogeneidad del suelo en los procedimientos normativos de diseño y proponer mejoras que contribuyan a reforzar su aplicación en contextos reales.

Capítulo 2

Marco teórico

Uno de los parámetros más importantes a la hora de trabajar en obras de la ingeniería eléctrica son las protecciones hacia los equipos y operadores. Es por ello que para cualquier instalación eléctrica se tienen presentes diferentes tipos de protecciones, para distintos propósitos, pero se tiene un factor común, siendo este SPT. Estos sistemas son cruciales para dar un camino de baja impedancia a las corrientes de falla. Si bien estos sistemas ayudan a que la corriente de falla circule por una ruta segura para el operador o el equipo, se genera una tensión proporcional a la impedancia impuesta por el SPT.

Por ello, el estudio del terreno es importante para el diseño de SPT, ya que estos son instalados directamente en contacto con el suelo, por lo tanto, la resistencia del suelo influye en los SPT. En este capítulo se describirá la resistividad eléctrica del suelo, siendo este de importancia para el diseño de los SPT, que para este trabajo se tomará como estudio las mallas de puesta a tierra (MPT) usadas en instalaciones eléctricas, donde se detallará el diseño impuesto por la normativa [3] y los valores límites que estas no deben superar según formulación analítica. También se presentarán métodos de medición de resistividad, dando detalles para el método de Wenner, dado que se usará para el análisis en este documento.

Finalmente, se describirá la teoría de método elementos finitos (FEM), siendo este el método para analizar los modelos a implementar de terrenos no homogéneos y su respectiva MPT diseñada bajo la IEEE Std 80, con el fin de obtener valores más cercanos a la realidad, es decir, sin seguir el modelo de doble capa impuesto por la normativa [3]. Como punto de comparación, se tendrán los modelos representativos de doble capa de los modelos creados para este trabajo.

2.1. Resistividad y resistencia en sistemas de puesta a tierra.

2.1.1. Resistividad eléctrica de terreno.

La resistividad del terreno (ρ) esta definida como la resistencia que se presenta al paso de la corriente por un cubo de 1 metro de lado, esta influenciada directamente por la naturaleza del terreno, humedad, temperatura, salinidad y compactación.

Este parámetro es de suma importancia para el conocimiento de la composición del terreno y por tanto para poder mejorar el diseño de los SPTs. Es por ello que la medición de este es de importancia para la ingeniería eléctrica, llevando con sus resultados a tomar decisiones de diseño cruciales para la seguridad en la instalación que se requiera.

2.1.2. Resistencia de puesta a tierra.

La resistencia de puesta a tierra (R_g) está relacionada directamente con la resistividad del terreno y la resistencia del equipo de puesta a tierra; entiéndase como elemento que se lleva a terreno, como electrodos, mallas, etc. Entonces, R_g se entiende como la razón entre el potencial del equipo de puesta a tierra y la corriente que fluye a través del equipo hacia el terreno, es por ello que R_g también está influenciada por los factores que afectan a la resistividad [1].

A modo de ejemplo, se presenta la Figura 2.1, en donde se encuentra el equipo de puesta a tierra hemisférico con potencial V_0 , corriente I y radio r_0 . El terreno presenta una resistividad homogénea de ρ .

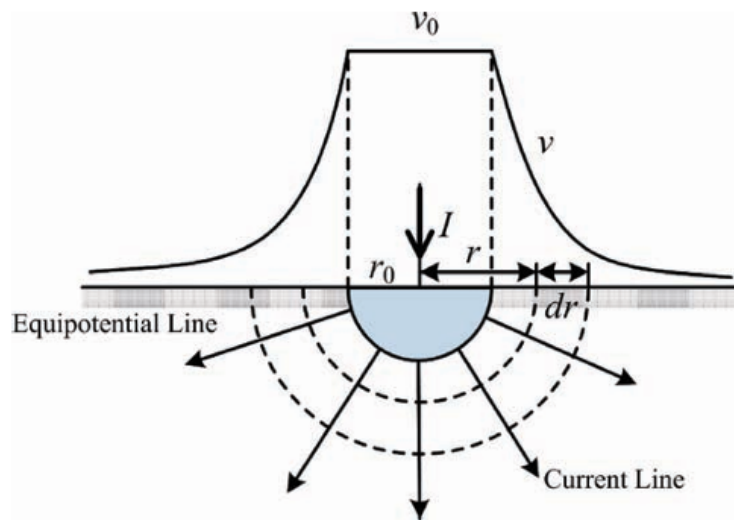


Figura 2.1: Equipo de puesta a tierra hemisférico con potencial V_0 [1].

La resistencia de puesta a tierra está dada por [1]:

$$R_g = \frac{V}{I} = \frac{\rho}{2\pi r_0}, \quad (2.1)$$

De (2.1) se evidencia la influencia directa de la resistividad del terreno, es decir, si esta presenta una gran resistividad, implica que R_g aumentaría. Es por ello que identificar la composición del terreno es de importancia al momento de plantearse la instalación de dispositivos de puesta a tierra.

2.2. Métodos de cálculo y medición de cuatro puntos.

Los análisis que se realizarán posteriormente se realizarán con (MPT), a menudo en lugares donde se realizarán estas instalaciones se lleva un exhaustivo trabajo geotécnico, en donde se desprenden una considerable información del terreno. Una de las características que resalta en este análisis es la resistividad del terreno, y para ello se utilizan métodos recomendados por la normativa [3], [2].

Estos métodos constan de la disposición de 4 electrodos espaciados en línea recta, en la siguiente sección se describirán los métodos recomendados.

2.2.1. Método arreglo de Wenner.

En este arreglo los electrodos están igualmente espaciados como se muestra en la Figura 2.2, donde a es la distancia entre electrodos y b el largo del electrodo enterrado. La corriente es inyectada por los electrodos externos y la tensión se mide en los electrodos centrales [3].

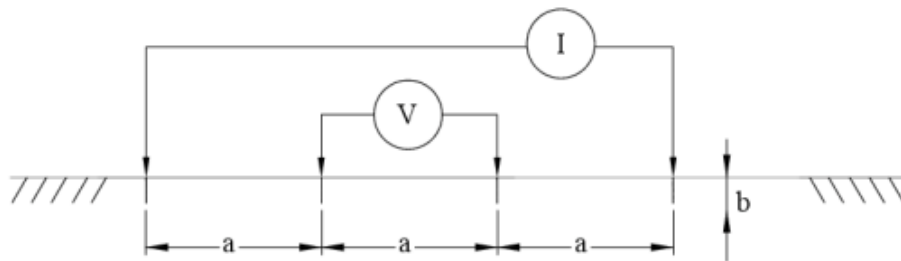


Figura 2.2: Método de los cuatro puntos, electrodos espaciados igualmente [2].

La tensión medida V y la corriente inyectada I , por tanto $R = \frac{V}{I}$ y la resistividad aparente ρ_a se puede determinar [2]:

$$\rho_a = \frac{4\pi a R}{1 + \frac{2a}{\sqrt{a^2 + 4b^2}} - \frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}}. \quad (2.2)$$

Por otra lado, en la práctica los electrodos son enterrados a no más de $b < 0.1a$, entonces se puede asumir que $b = 0$, entonces la expresión 2.2 queda

$$\rho_a = 2\pi a R, \quad (2.3)$$

con este arreglo, se mide para diferentes mediciones de a , en donde al trazar un gráfico de resistividad aparente (ρ_a) en función de a se puede observar diferentes resistividades a mayor valor de a , lo que indica diferentes tipos de terreno a mayor profundidad, indicando indicios de modelos multicapa para su modelo.

Este arreglo es el más comúnmente usado por lo que es recomendado para mediciones de resistividad, con el objetivo de extraer un modelo multicapa [2].

2.2.2. Método arreglo de Schlumberger-Palmer.

A diferencia del método de Wenner, en este arreglo solo los dos electrodos exteriores se desplazan para cada medición, mientras que los electrodos interiores permanecen fijos. De igual manera, la corriente es inyectada a través de los electrodos exteriores y la medición de potencial se realiza en los electrodos interiores.

La distancia d se refiere a la separación de los electrodos de potencial y c la separación de los electrodos de corriente con los de potencial como lo muestra la Figura 2.3.

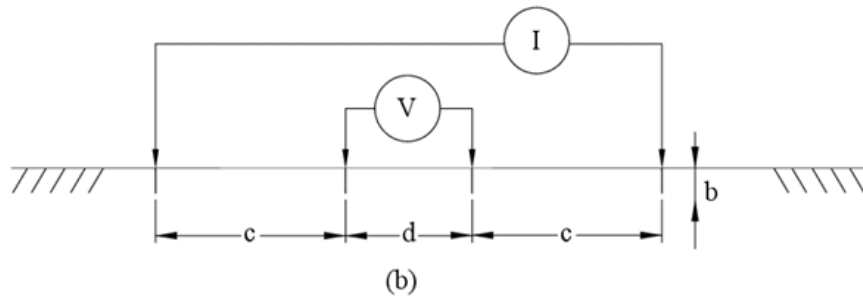


Figura 2.3: Método de los cuatro electrodos no espaciados igualmente [2].

La ecuación que determina la resistividad, si la profundidad b de los electrodos es pequeña comparada con la separación d y c , además $c > 2d$, entonces la resistividad aparente puede ser calculada como [2] [14]

$$\rho_a = \frac{\pi c(c+d)R}{d}. \quad (2.4)$$

Para ambos métodos anteriormente descritos, se recomienda medir en diferentes perfiles del área del terreno a estudiar para detectar cambios laterales en su resistividad, por ello en la práctica se mide hacia una dirección y luego se mide con las mismas distancias de los electrodos giradas 90° . Los valores medidos se deben relacionar.

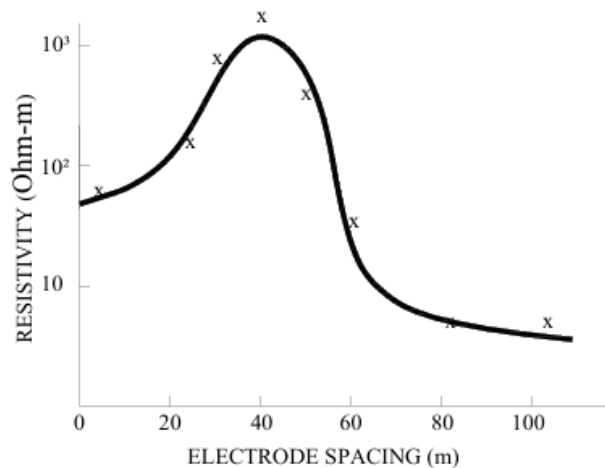


Figura 2.4: Curva típica de resistividad [2].

Al medir con los métodos señalados, se puede determinar una curva de resistividad aparente típica como se muestra en el Figura 2.4, La cual posteriormente es usada para el diseño de modelo de doble capa y malla de puesta a tierra.

2.3. Diseño de malla de puesta a tierra y modelo de terreno.

Una vez realizadas las mediciones antes descritas, son utilizadas para modelar el terreno en donde se instalara la MPT, es por eso que el modelo debe ser representativo, la normativa [3] establece que un modelo de doble capa es suficiente para el diseño de una MPT, siempre y cuando se muestre una curva suave en las mediciones, si bien en ocasiones el terreno es mas complejo, se debe indagar en modelos multicapa.

2.3.1. Modelo estratificación doble capa.

2.3.1.a. Forma analítica.

De la formulación de Wenner, se desprende la ecuación (2.5), la cual describe la resistividad aparente para el arreglo mencionado, en donde $\alpha = a/h$ corresponde a la relación entre la separación de los electrodos a y la profundidad de la primera capa del terreno h . Además, $\mu_1 = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2)$ representa el coeficiente de reflexión del suelo, siendo ρ_1 y ρ_2 las resistividades de la primera y segunda capa del terreno [4].

$$\rho_a = \rho_1 \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-\mu_1)^n}{\sqrt{1 + (2n/\alpha)^2}} \right], \quad (2.5)$$

dado (2.5) se presentan parámetros desconocidos, siendo estos ρ_1 , ρ_2 y h , se debe calcular la resistividad aparente a partir desde un punto de inicio, es decir, entregar a la ecuación valores iniciales y comparar lo calculado (2.5) con lo medido 2.2. Para ello se requiere una formulación para minimizar errores

$$E(\rho_1, \rho_2, h) = \sum_{i=1}^{\infty} [\rho_a(a_i)_{medida} - \rho_a(a_i, \rho_1, \rho_2, h)]^2, \quad (2.6)$$

con ello se obtiene los parámetros $[\rho_1, \rho_2$ y $h]$ con menor error posible para el modelo de doble capa, si bien se puede programar, ya existen funciones como "lsqnonlin" de Matlab que implementa este método de mínimos cuadrados.

2.3.1.b. Forma Gráfica.

En la Normativa IEEE Std 80 se detalla este método en donde se utiliza las curvas de Sunde de la Figura 2.5 extraídas de la ecuación analítica (2.5). La forma gráfica consta de escoger valores

representativos de la curva de mediciones ρ_a vs a reflejadas en la Figura 2.4 e interpolar en las curvas de Sunde [3] [4].

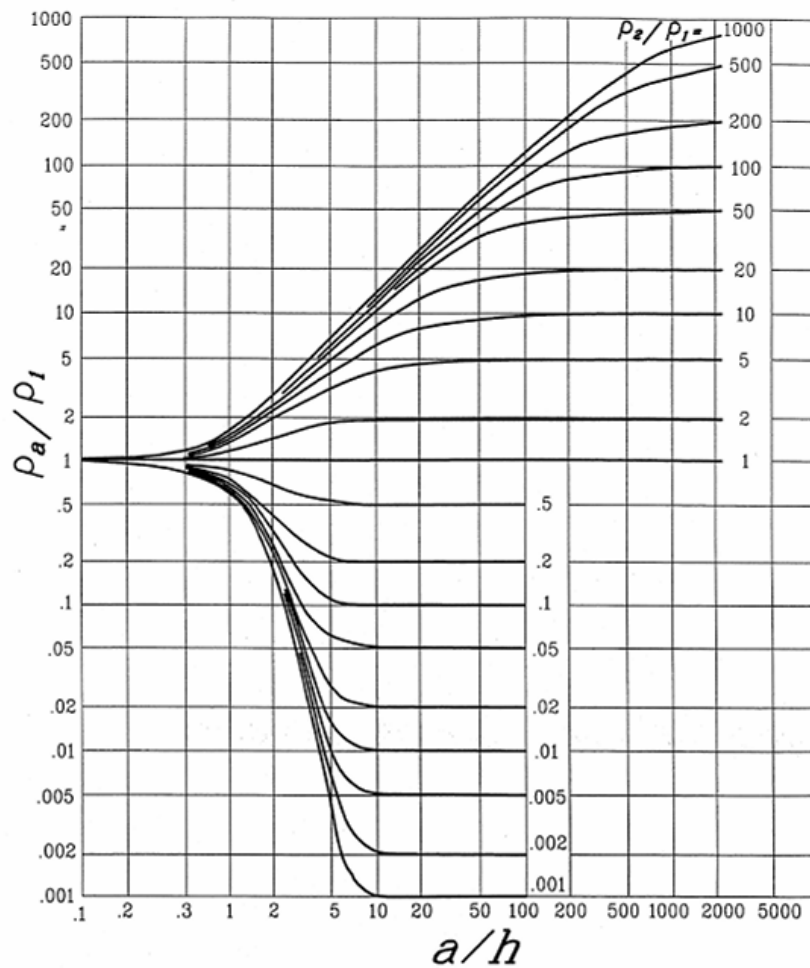


Figura 2.5: Método Trafico de Sunde [3] [4].

Para ello se debe obtener los parámetros ρ_1 y ρ_2 por inspección de las mediciones 2.4. Solamente h es obtenida de las curvas de Sunde 2.5, para eso se sigue los siguientes pasos:

1. Crear un gráfico de resistividad aparente en función de la distancia de separación de electrodos, ρ_a vs a .
2. Estimar ρ_1 y ρ_2 del gráfico de $\rho_a(a)$ creado del punto anterior. Donde ρ_1 corresponde a el espaciado de electrodos más pequeño y ρ_2 al espaciado mas largo.
3. Determinar $\frac{\rho_1}{\rho_2}$ y seleccionar la curva en el gráfico de Sunde de la figura 2.5, esta debe cerca la mas cercana, o interpolar y dibujar una nueva curva en el gráfico.
4. Seleccionar el valor $\frac{\rho_a}{\rho_1}$ del eje Y, el cual se encuentra en la región inclinada de la curva antes creada o escogida.
5. Determinar el valor de $\frac{a}{h}$ en el eje X.
6. Calcular ρ_a multiplicando el valor seleccionado de $\frac{\rho_a}{\rho_1}$ por ρ_1 .
7. Con el valor de ρ_a antes calculado, leer el correspondiente espaciamiento a en el gráfico creado en el primer paso, $\rho_a(a)$.

8. Calcular el valor de h , correspondiendo a la profundidad de la primera capa, usando el valor apropiado de a antes seleccionado.

Con ambos métodos se logra obtener el modelo con los parámetros necesarios $[\rho_1, \rho_2 \text{ y } h]$ a partir de las mediciones con arreglo Wenner. En la figura 2.6 se representa el modelo obtenido con ambos métodos.

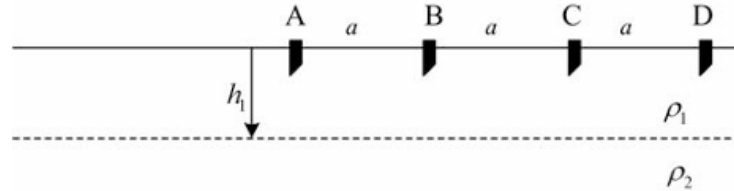


Figura 2.6: Perfil geológico de modelo de doble capa [1].

2.3.2. Modelo estratificación n capas horizontales.

Si se tiene mucha variación en las mediciones es mejor un modelo mas complejo, por ello un modelo con múltiples capas horizontales resulta mas razonable a la hora de crear un modelo representativo. Cada capa presenta su propia resistividad (ρ_i) y espesor (h_i), con la ultima capa del modelo como infinita. Si bien es una presentación mas exacta, la normativa [3] recomienda el modelo doble capa para una medición de resistividad que muestre una variación clara respecto a la profundidad.

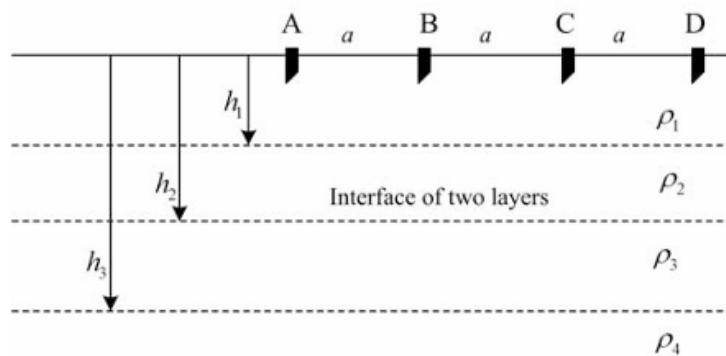


Figura 2.7: Perfil geológico de modelo de n capas horizontales [1].

2.3.3. Criterio de diseño de malla de puesta a tierra.

Principalmente, el diseño de una MPT segura considera dos objetivos fundamentales: proveer un camino de baja impedancia para la circulación de corriente hacia tierra bajo condiciones normales y de falla, sin exceder los límites operacionales del equipamiento ni afectar la continuidad del servicio, y reducir el riesgo de que una persona ubicada en las cercanías de instalaciones con MPT expuestas sufra un choque eléctrico crítico [3].

Usualmente, se asume que un objeto o equipo eléctrico conectado a tierra es seguro al contacto; sin embargo, esto no siempre es así. No existe una relación simple entre la resistencia de puesta a tierra y la máxima corriente que puede soportar una persona. Por esta razón, se han establecido estándares que deben respetarse durante el proceso de diseño. Dichos criterios dependen fuertemente de la corriente de cortocircuito y de la resistividad del terreno donde se instalará la MPT.

Para ello, el diseño se enfoca en las tensiones tolerables presentes en la instalación. En este contexto, la elevación del potencial de tierra o *Ground Potential Rise* (GPR) se define como el máximo potencial eléctrico que puede alcanzar la MPT de una subestación respecto a una tierra remota. Este voltaje puede obtenerse a partir de R_g de la MPT y la máxima corriente de malla I_g :

$$GPR = I_g \cdot R_g. \quad (2.7)$$

La tensión de paso E_{step} corresponde a la diferencia de potencial superficial a la que se encuentra expuesta una persona al mantener una separación de 1 [m] entre sus pies, sin contacto con otro elemento aterrizado. Por otra parte, la tensión de contacto E_{touch} se define como la diferencia de tensión entre el GPR y la superficie donde la persona se encuentra de pie. Asimismo, la tensión de malla E_m corresponde a la máxima tensión de contacto dentro de la malla de puesta a tierra.

En Figura 2.8 se representan las posiciones típicas de riesgo eléctrico ante contacto, donde se ilustran los conceptos anteriormente descritos. Además, las curvas mostradas representan el potencial superficial del terreno.

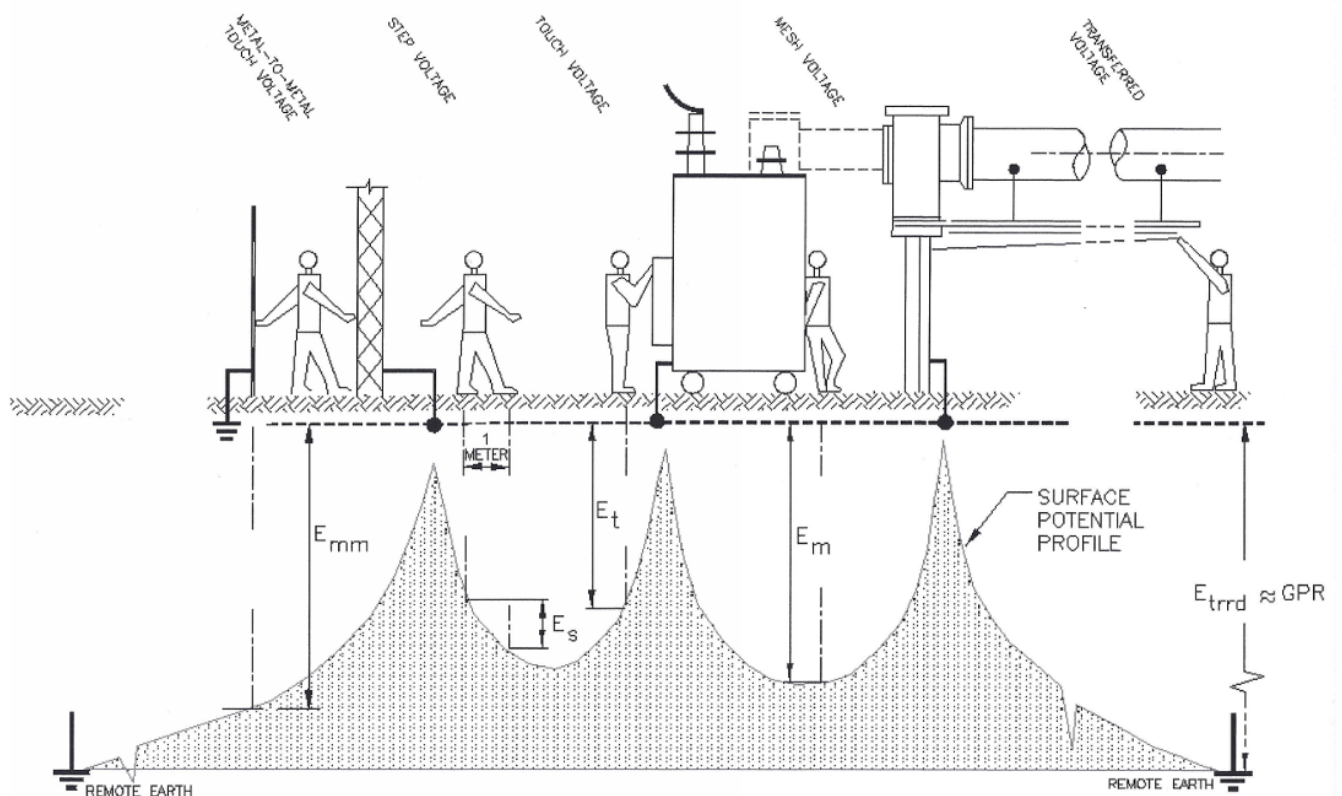


Figura 2.8: Lugares típicos de electrocución [3].

2.3.4. Procedimiento de diseño.

En Figura 2.9 se presenta el diagrama de flujo que resume las principales etapas del diseño de una malla de puesta a tierra. A continuación, se describen los cálculos a realizar según la normativa IEEE Std 80.

a) **Selección del calibre del conductor.**

El calibre del conductor puede calcularse mediante [3]:

$$A_{kcmil} = \frac{197.4 \cdot I_f}{\sqrt{\left(\frac{TCAP}{T_c \cdot \alpha_r \cdot \rho_r}\right) \ln\left(\frac{K_0 + T_m}{K_0 + T_a}\right)}}, \quad (2.8)$$

donde I_f corresponde a la corriente de falla en kA_{rms} , T_m a la temperatura máxima en $^{\circ}C$, T_a a la temperatura ambiente en $^{\circ}C$, T_r a la temperatura de referencia para las constantes del material en $^{\circ}C$, t_c al tiempo de despeje de falla, α_r al coeficiente térmico de resistividad a la temperatura de referencia y ρ_r a la resistividad del conductor a la temperatura de referencia en $\mu\Omega cm^{-3}$. Además, K_0 se define como:

$$K_0 = \left(\frac{1}{\alpha_r}\right) - T_r, \quad (2.9)$$

mientras que $TCAP$ representa el factor de capacidad térmica en $J cm^{-3} ^{\circ}C^{-1}$. Estos parámetros dependen directamente del material conductor y sus valores pueden obtenerse mediante tablas o especificaciones entregadas por el fabricante. Asimismo, la corriente de falla debe calcularse para cada subestación o instalación eléctrica en particular [3].

b) **Cálculo de tensiones tolerables de paso y contacto.**

Las tensiones tolerables se encuentran definidas para distintos estándares de peso corporal. Para una persona de 50 kg, las tensiones de paso y contacto están dadas por:

$$E_{step50} = \frac{(1000 + 6C_s\rho_s) \cdot 0.116}{\sqrt{t_s}}, \quad (2.10)$$

$$E_{touch50} = \frac{(1000 + 1.5C_s\rho_s) \cdot 0.116}{\sqrt{t_s}}. \quad (2.11)$$

De forma análoga, para una persona de 70 kg se tiene:

$$E_{step70} = \frac{(1000 + 6C_s\rho_s) \cdot 0.157}{\sqrt{t_s}}, \quad (2.12)$$

$$E_{touch70} = \frac{(1000 + 1.5C_s\rho_s) \cdot 0.157}{\sqrt{t_s}}. \quad (2.13)$$

En estas expresiones, C_s corresponde al coeficiente de reducción, ρ_s a la resistividad de la capa superficial en Ωm y t_s al tiempo de despeje de falla en s. El coeficiente de reducción puede calcularse mediante:

$$C_s = \frac{1}{0.96} \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{K^n}{\sqrt{1 + \left(\frac{2nh_s}{0.08}\right)^2}} \right], \quad (2.14)$$

o bien, asumiendo un error del 5 %:

$$C_s = 1 - \frac{0.09 \cdot \left(1 - \frac{\rho}{\rho_s}\right)}{2h_s + 0.09}. \quad (2.15)$$

Donde h_s corresponde al espesor de la capa superficial en m y:

$$K = \frac{\rho - \rho_s}{\rho + \rho_s}, \quad (2.16)$$

representa el coeficiente de reflexión.

Para fines de este estudio no se considerará una capa superficial, por lo que se asumirá $\rho_s = 0$ Ω m. En consecuencia, para una persona de 50 kg las expresiones se reducen a:

$$E_{step50} = \frac{1000 \cdot 0.116}{\sqrt{t_s}}, \quad (2.17)$$

$$E_{touch50} = \frac{1000 \cdot 0.116}{\sqrt{t_s}}. \quad (2.18)$$

De igual manera, para una persona de 70 kg se obtiene:

$$E_{step70} = \frac{1000 \cdot 0.157}{\sqrt{t_s}}, \quad (2.19)$$

$$E_{touch70} = \frac{1000 \cdot 0.157}{\sqrt{t_s}}. \quad (2.20)$$

Estas expresiones permiten determinar las tensiones tolerables utilizadas posteriormente en el diseño de las mallas.

c) Cálculo de la resistencia de puesta a tierra.

Para el cálculo de la resistencia de puesta a tierra se considera la profundidad de enterramiento de la malla h_m . De esta manera, la resistencia puede obtenerse mediante [3]:

$$R_g = \rho \left[\frac{1}{L_T} + \frac{1}{\sqrt{20A}} \left(1 + \frac{1}{1 + h\sqrt{20/A}} \right) \right], \quad (2.21)$$

donde ρ corresponde a la resistividad del terreno en Ω m, A al área ocupada por la malla en m^2 y L_T a la longitud total de conductor enterrado en m. Si bien (2.21) considera un terreno homogéneo mediante un único valor de resistividad, para terrenos no homogéneos puede utilizarse un valor representativo obtenido a partir de mediciones. Asimismo, para modelos multicapa esta formulación puede emplearse como punto de partida utilizando la resistividad de la primera capa del modelo.

d) Cálculo de la corriente inyectada a la malla.

La corriente inyectada debe corresponder a la máxima corriente presente en la malla y puede calcularse mediante [3]:

$$I_g = D_f \cdot S_f \cdot I_f, \quad (2.22)$$

donde I_f corresponde a la corriente de falla simétrica equivalente, definida como $I_f = 3I_0$, D_f al factor de decremento asociado a la duración de la falla y S_f al factor de división

de corriente. Tanto S_f como D_f dependen de las características propias de la instalación eléctrica y sus valores se encuentran tabulados en la normativa. Para efectos de este trabajo se asumirá $S_f = D_f = 1$.

La normativa IEEE Std 80 e IEEE Std 81 establecen diversas formulaciones analíticas para determinar las tensiones de paso y contacto. Si bien estas expresiones son ampliamente utilizadas debido a su simplicidad y respaldo normativo, su validez resulta limitada para terrenos con resistividades variables. Por ello, en el presente trabajo las tensiones de paso, contacto y la resistencia de puesta a tierra serán obtenidas mediante simulaciones con calculo de FEM, permitiendo representar de mejor manera las condiciones reales del terreno [2,3].

e) **Cálculo de tensión de paso.**

La tensión de paso se obtiene a partir de la diferencia de potencial superficial entre dos puntos separados aproximadamente 1 m. Sea $V_{sup}(r)$ la tensión superficial en función de la distancia, la tensión de paso máxima puede calcularse mediante [2]:

$$E_{step}(r_{i,j}) = \max_{|\mathbf{r}_j - \mathbf{r}_i| \approx s} |V_{sup}(\mathbf{r}_i) - V_{sup}(\mathbf{r}_j)|, \quad (2.23)$$

donde $s = 1$ m corresponde a la longitud de un paso, y $\mathbf{r}_i$ y $\mathbf{r}_j$ representan dos puntos distintos sobre la superficie del terreno separados aproximadamente una distancia s . Además, $\mathbf{r} = (x, y)$ define la posición sobre la superficie del terreno.

f) **Cálculo de tensión de contacto.**

La tensión de contacto se obtiene a partir de la diferencia entre el GPR y el potencial superficial del terreno:

$$E_{touch} = \max |GPR - V_{sup}(r_{i,j})|, \quad (2.24)$$

g) **Cálculo de la resistencia de puesta a tierra mediante FEM.**

La resistencia de puesta a tierra puede obtenerse mediante el máximo valor de tensión presente en la malla ante la inyección de una corriente definida. Sea $E_{max}(a, b)$ el punto de máxima tensión asociado a las coordenadas (a, b) , la resistencia se calcula como:

$$R_g = \frac{E_{max}(a, b)}{I_f}, \quad (2.25)$$

o, equivalentemente, utilizando el valor de GPR.

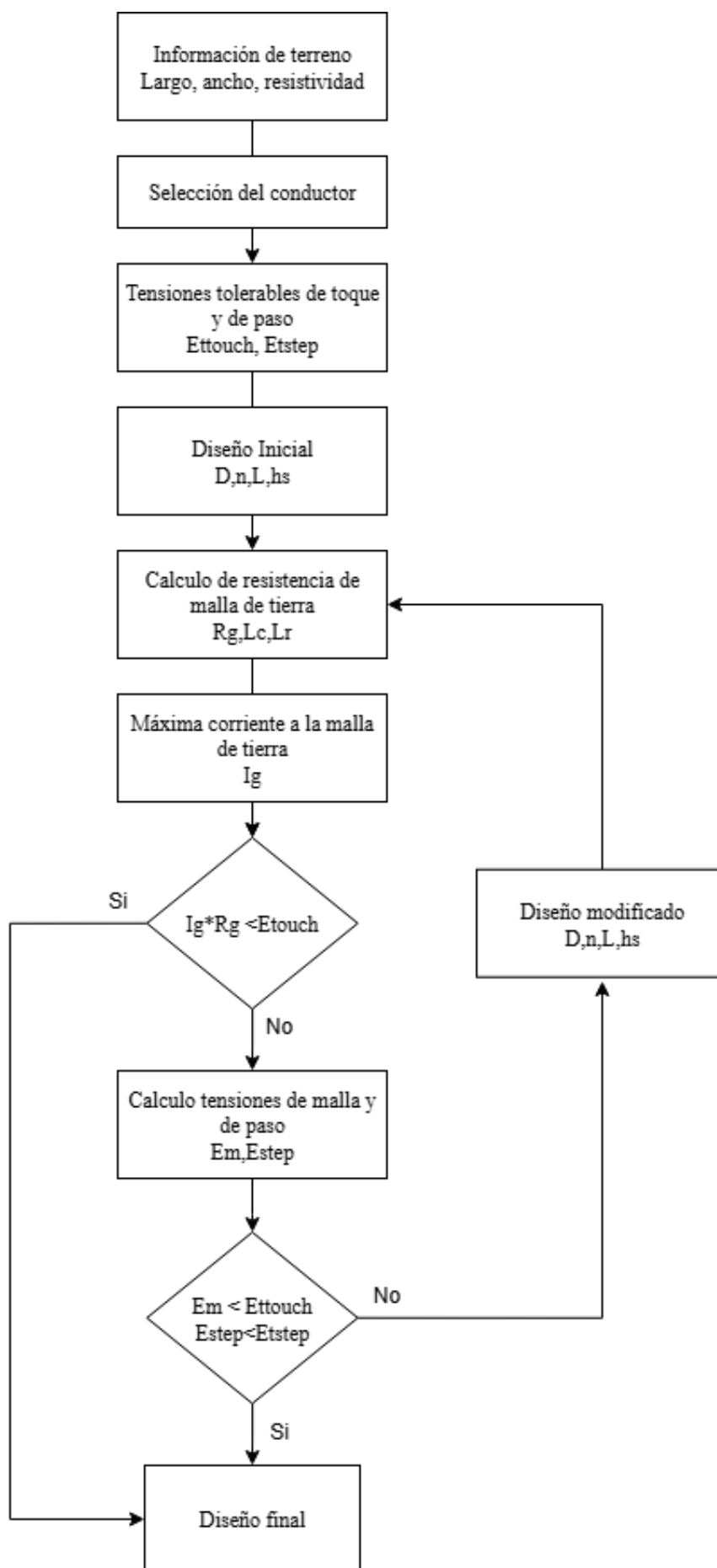


Figura 2.9: Diagrama de flujo proceso diseño malla de puesta a tierra [3].

2.4. Teoría de Método de Elementos Finitos.

El método de elementos finitos es una técnica numérica para obtener soluciones aproximadas de un problema matemático-físico en un dominio específico definido por geometrías. Es ampliamente utilizado para resolver ecuaciones diferenciales parciales reduciendo su complejidad. Este método se basa en dividir el dominio en regiones más pequeñas denominados elementos finitos, esto se denomina discretización del dominio, y resolver ecuaciones simplificadas en cada región generada. En la Figura 2.10 se muestra como se discretiza el dominio exterior del cuerpo para un análisis, por ejemplo aerodinámico.

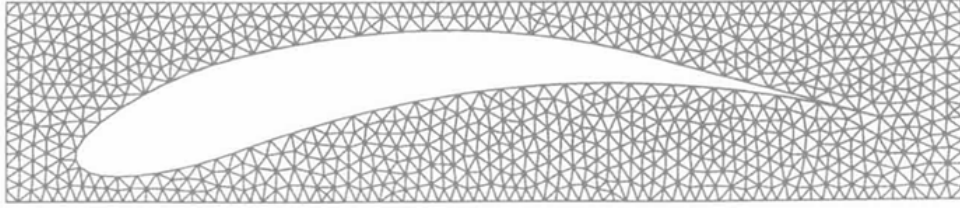


Figura 2.10: Discretización del dominio en dos dimensiones con trinagulos [5].

En el ámbito de la ingeniería eléctrica, el FEM es útil para resolver las ecuaciones de Maxwell del electromagnetismo. En el caso de este estudio, es necesario analizar el potencial eléctrico en medios con distintas resistividades, donde el uso de FEM resulta fundamental debido a la compleja geometría que presenta el terreno, producto de diferentes formaciones, como rocas o estratos con distintas conductividades. Uno de los aspectos que se debe considerar es el costo computacional, el cual depende de la complejidad de la geometría y, por tanto, de la discretización de sus dominios. Mientras más fina sea esta discretización, mayor será el tiempo requerido para realizar el cálculo.

La ecuación dominante a resolver para el potencial eléctrico en un problema de puestas a tierra ante una inyección de corriente es la ecuación de Poisson [5]:

$$\nabla \cdot (\sigma \nabla \phi) = -I, \quad (2.26)$$

donde ϕ es el potencial eléctrico, σ conductividad del medio y I es la corriente en un dominio en tres dimensiones. Se deben considerar las condiciones de frontera $\partial\Omega = \Gamma_N \cup \Gamma_D$, en donde el borde Γ_D Dirichlet indica que

$$\phi = \phi_D, \quad (2.27)$$

Y Neumann en Γ_N :

$$-\sigma \frac{\partial \phi}{\partial n} = J_n. \quad (2.28)$$

En (2.26) esta escrita de la forma $\mathcal{L}\phi = f$ donde $\mathcal{L}$ es un operador diferencial, ϕ la función desconocida y f es la función de fuerza, esto es llamado problema de valor de frontera. Uno de los métodos para la solución es propuesto por Galerkin. Este expresa este problema como [5]:

$$r = \mathcal{L}\hat{\phi} - f \neq 0. \quad (2.29)$$

Se propone sustituir φ por $\hat{\varphi}$, es por ello que la ecuación nunca será 0, siempre se tendrá un residuo, ya que se tiene una aproximación. Es por ello que es razonable que este error sea el menor posible, entonces este error se puede minimizar para todo el dominio Ω forzando la condición:

$$R_i = \int_{\Omega} \omega_i r d\Omega = 0, \quad (2.30)$$

donde R_i se refiere a todo el residuo del dominio y ω_i funciones de prueba. Aplicando este método y teorema de la divergencia a la ecuación fuerte (2.26), se obtiene la forma débil de la ecuación [5]

$$\int_{\Omega} \sigma \nabla \omega_i \cdot \nabla \hat{\phi} d\Omega = \int_{\Omega} I d\Omega + \int_{\Gamma_N} \omega_i J_n d\Gamma, \quad (2.31)$$

donde $J_n = \sigma \nabla \hat{\phi} \cdot n$ es el flujo de corriente normal a la frontera y en las fronteras Dirichlet $\omega_i = 0$ ya que el potencial es conocido. Ahora el siguiente paso es para un análisis de elemento finito es la selección de una función de interpolación para aproximar soluciones desconocidas. Estas funciones suelen ser lineales, cuadráticas o de un orden mayor, pero es de recordar que ante mas complejo mas tiempo toma la resolución computacional. Una vez escogido el grado del polinomio se puede escribir la solución como [5]:

$$\hat{\phi} = \sum_{j=1}^n N_j \phi_j^e, \quad (2.32)$$

donde n es el número de nodos en el elemento, ϕ_j^e es el valor de potencial ϕ en el nodo j del elemento y N_j es la función de interpolación en el nodo j . Si se escogen las funciones de prueba $w_i = N_i$ funciones de forma, las ecuaciones (2.32) y (2.31) se puede sustituir y se tiene:

$$[K_{ij}][\phi] = [F_i], \quad (2.33)$$

donde:

$$K_{ij} = \int_{\Omega} \sigma \nabla N_i \cdot \nabla N_j d\Omega, \quad (2.34)$$

$$F_i = \int_{\Omega} N_i Q d\Omega + \int_{\Gamma_N} N_i J_n d\Gamma. \quad (2.35)$$

En forma general, $\mathbf{K}$ corresponde a la matriz de rigidez, ϕ al vector de incógnitas, representando en este caso los potenciales eléctricos, y $\mathbf{F}$ al vector de alimentación de corriente.

Capítulo 3

Metodología de trabajo

Para cumplir con los objetivos propuestos se trazó una línea determinada y específica a seguir para el desarrollo del presente trabajo. Para ello se realizó un análisis de sensibilidad para la determinación de parámetros geométricos para la construcción de los modelos de terrenos dado su propiedad infinita y verificar los efectos que causan en las variables de interés. Una vez establecidos, se generan 4 modelos de terrenos, en donde se realizaran mediciones con método Wenner implementado en COMSOL Multiphysics junto a Matlab para su automatización.

A partir de las distintas mediciones de resistividad obtenidas, se generan mediante Matlab modelos equivalentes de doble capa, los cuales corresponden a una aproximación ampliamente utilizada y recomendada por la normativa IEEE Std 80 [3]. Tanto para los modelos equivalentes como para los modelos de referencia, se emplea una misma malla de puesta a tierra, con el objetivo de evaluar y comparar las tensiones de paso, tensiones de contacto y la resistencia de puesta a tierra obtenidas en cada caso. En la Figura 3.1 se presenta un diagrama resumen de la metodología desarrollada en el presente trabajo.

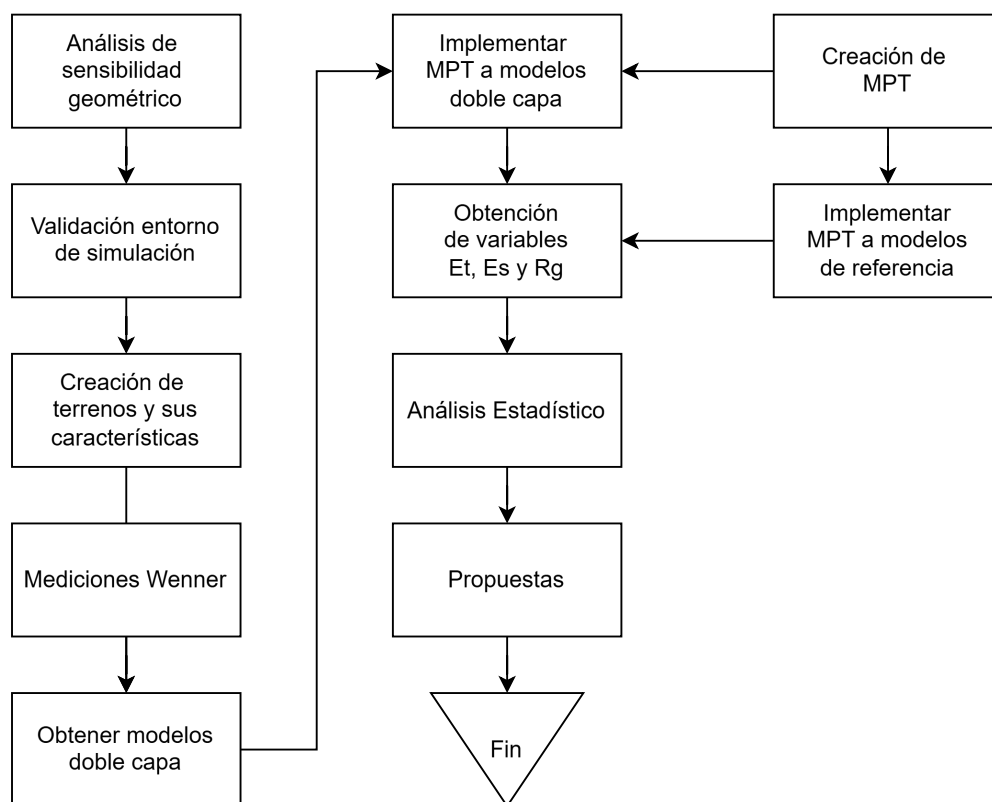


Figura 3.1: Resumen General de la Metodología de trabajo.

3.1. Herramientas computacionales

Para el desarrollo del estudio, es necesario utilizar software capaz de incorporar dominios con propiedades eléctricas, resolver mediante FEM y que permita la evaluación de escenarios a los que se desea el estudio. Crear geometrías arbitrarias, configuración del estudio físico, configuración de discretización de dominio, son características que emplea COMSOL Multiphysics para el cálculo de estos, es por ello que resulta útil modelar terrenos de distintas formas en este software, dado que prestan las herramientas para lograrlo. En los siguientes puntos se detalla lo utilizado en el presente trabajo.

3.1.1. Hardware

Uno de los factores que influye en el tiempo de simulación es el hardware del computador utilizado para el estudio. En este caso, las simulaciones fueron realizadas en un equipo con procesador Intel i5 12600KF de 3.70 GHz, 16 GB de memoria RAM a 3600 MHz y una unidad de almacenamiento SSD NVMe de 1 TB, con velocidades de escritura y lectura de 3600 MB/s y 5000 MB/s, respectivamente.

3.1.2. COMSOL Multiphysics

COMSOL Multiphysics 5.4 es un software de propósito general usado en todos los campos de ingeniería, manufactura e investigación científica, es basado en el cálculo de elementos finitos en donde incluye una amplia gama de aspectos físicos como electromagnetismo, termodinámica, estructurales. Para el presente estudio se requiere un análisis electro cuasiestático que permita inyecciones de corriente y calcular el potencial eléctrico. Para ello el software dispone del estudio “Electric Currents” donde esta interfaz es usada para calcular campos eléctricos, corriente y distribuciones de potencial donde los efectos inductivos son despreciables, este estudio resuelve ecuaciones de conservación de corriente basada en la ley de ohm usando el potencial escalar como la variable dependiente.

El software dispone de una interfaz visual (GUI) en donde se entregan herramientas de medición, construcción geométrica arbitraria, diferentes discretizaciones de mallado, frecuencia del estudio, ecuaciones dominantes, condiciones de borde y materiales a dominios. Su flexibilidad permite representar los fenómenos eléctricos en modelos heterogéneos del terreno de una forma realista y detallada. Además COMSOL cuenta con una extensión llamada LiveLink, que permite el control del software mediante Matlab, abriendo la posibilidad de automatización de medición y guardado de datos.

Una de las opciones de guardado en COMSOL, es el archivo .m, el cual corresponde a un archivo de matlab, este archivo contiene una función de todo el modelo diseñado dentro del GUI de COMSOL, por tanto este puede llamarse desde matlab y simularlo, para la extracción de los datos necesarios, lo que puede ser útil para el post proceso de datos inmediato.

3.1.3. Matlab

Matlab 2018 es un software que combina un entorno de escritorio optimizado para procesos iterativos de análisis y diseño con un lenguaje de programación que expresa directamente operaciones matemáticas con matrices y vectores. Incluye el “LiveEditor” para crear scripts que combinan código, resultados y texto formateado en un cuaderno ejecutable. Entre sus capacidades se encuentra análisis de datos, creación de gráficos, programación, creación de aplicaciones, interfaces con otros lenguajes, conexiones a hardware externo entre otros.

Dado que COMSOL admite la conexión con matlab, este será usado para automatizar el proceso de medición, captura de datos, ajuste de resistividades, ajuste de discretización de malla, debido a la naturaleza iterativa de mediciones en terreno con diferentes estructuras.

La conexión entre COMSOL-Matlab permite una estructura robusta en procesos iterativos de simulación y análisis de datos para modelos heterogéneos de terreno, en donde COMSOL se configura todo el ambiente físico para el cálculo mediante FEM, mientras que MATLAB se encarga de los cálculos previos y posteriores, así como de la integración entre modelos y del ajuste de datos medidos.

3.2. Ajustes de parámetros de geometría infinita y validación.

Uno de los principales desafíos a la hora de modelar terrenos, es que estos son infinitos, es por ello que la geometría entorno a un SPT debe ser bien definida. Para poder modelar el infinito, COMSOL tiene una herramienta disponible, denominada “Infinite Element Domain” la cual aplica un escalado de coordenadas a una capa de dominios virtuales que rodean la región física de interés, los elementos finitos pueden estirarse en dirección radial de modo que las condiciones de contorno en la capa exterior de elementos finitos se apliquen efectivamente a una distancia muy grande. Esto se aplica directamente como solución al problema de inicio.

3.2.1. Análisis de sensibilidad geométrico.

A continuación se debe definir el dominio de estudio en el que se debe encerrar con el dominio infinito. La selección del terreno se basa en lo analizado en el documento [6] en donde se demuestra con análisis FEM el tamaño del terreno que se debe tener para un electrodo enterrado y una malla enterrada.

En el documento tomado como referencia se hace el análisis en un terreno semiesférico, en la Tabla 3.1 se muestra los resultados para un electrodo enterrado, donde “L” es el largo del electrodo

Ratio R_b/L	2	5	10	20	50	100
Grounding resistance R / Ω	32,99	35,56	36,30	36,62	36,96	37,17
Change compared to the previous calculation	0	2,57	0,74	0,32	0,34	0,21
Relative change compared to the previous calculation / %	0	7,79	2,08	0,88	0,93	0,56
Error in relation to the analytical expression / %	-13,09	-6,32	-4,37	-3,53	-2,63	-2,08

 Tabla 3.1: Variación de Resistencia de puesta a tierra en función de la relación R_b/L [6].

y “ R_b ” es el radio del terreno esférico. Para este análisis se define un largo de electrodo y se varia R_b , y se demuestra que si la relación $R_b/L > 20$ no habrá mayor cambio en el valor de R_g .

Si bien el análisis realizado por el documento es esférico, se prefiere modelar un terreno con geometría cuadrada debido a su simplicidad, esto no afecta el modelo físico, dado que un modelo esférico puede considerarse dentro de un modelo cuadrado, y las variables eléctricas de interés cambian radialmente.

Adicionalmente se incorpora un dominio infinito que encierre el dominio a estudio, permitiendo representar adecuadamente la disipación de potencial hacia el infinito. El espesor (δ) se define bajo un estudio de sensibilidad, fijando el largo del terreno y variar δ , en la Figura 3.2 se tiene el corte laminar del terreno modelado. El terreno fue modelado como conductor isotrópico, caracterizado por su resistividad eléctrica. En cuanto a los electrodos son modelados como conductores de cobre, propiedad que viene integrada en COMSOL.

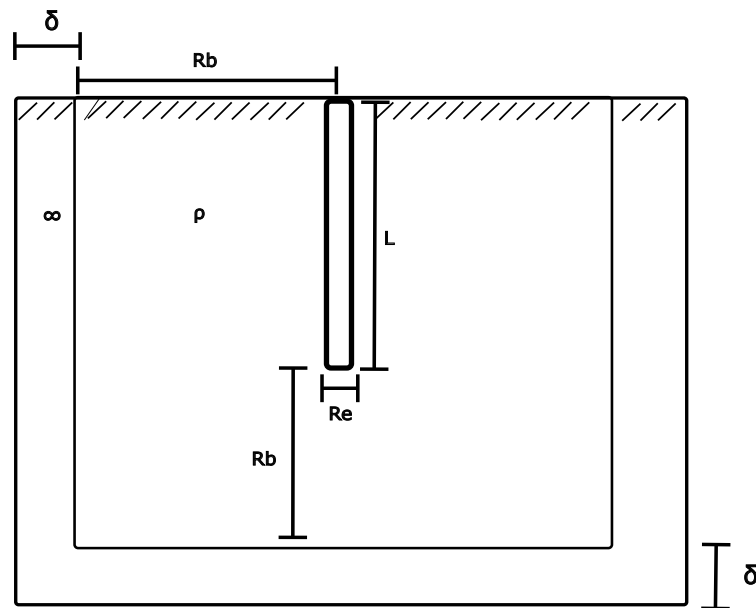


Figura 3.2: Terreno de análisis de sensibilidad para definir variables geométricas.

Considerando la condición $R_b/L > 20$ se escoge que esta relación debe ser $R_b/L = 50$ cumpliendo con la relación anterior, considerando un electrodo de $L = 2$ m se obtiene que el largo total del terreno cuadrado es $L_{terr} = 100 + 2 \cdot \delta$ m. Respecto al conductor cilíndrico se considera del mismo radio que en [6] con radio $R_e = 0.025$ m al igual que la resistividad $\rho = 100 \Omega \text{ m}$.

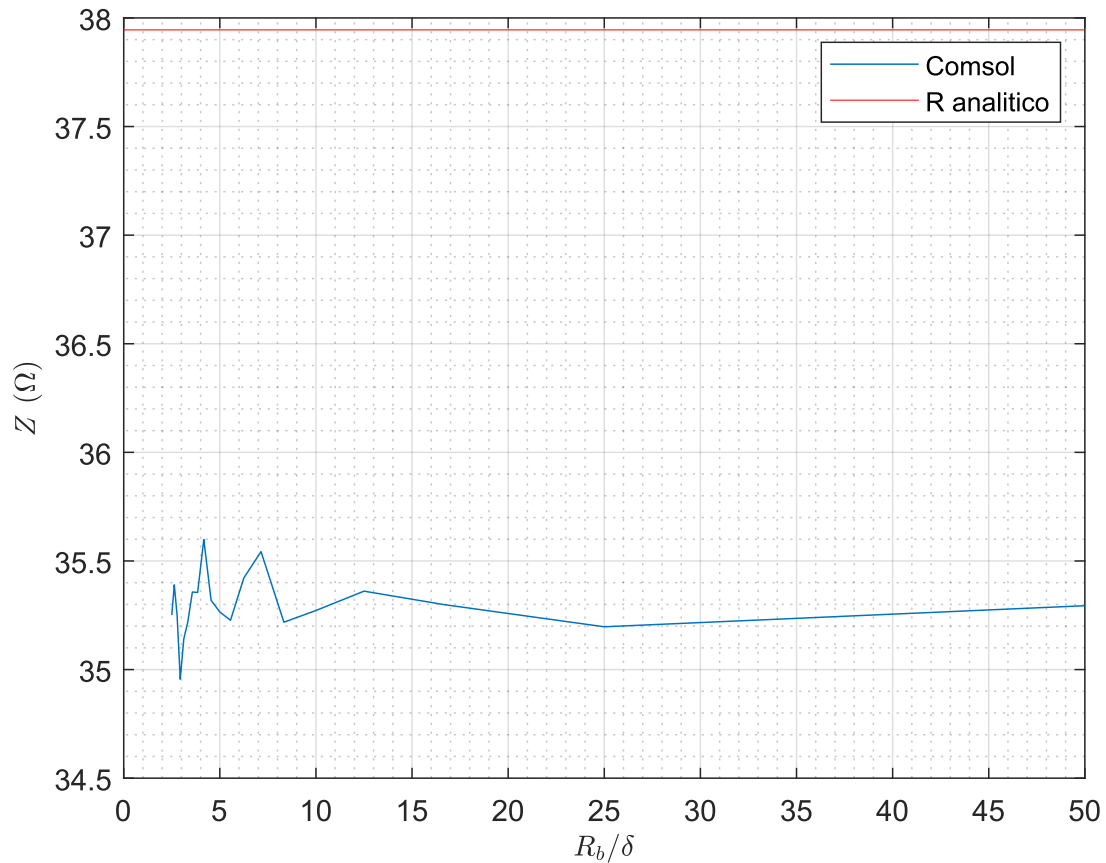


Figura 3.3: Impedancia de electrodo enterrado en función a relación radio terreno y espesor dominio infinito, con resistencia analítica para su comparación.

Considerando la ecuación analítica de un electrodo enterrado en terreno homogéneo, se obtiene la Figura 3.3, en donde se muestra que para relaciones $R_b/\delta > 25$ se obtienen resultados estables. Por ello, para el diseño del terreno se debe considerar la relación previamente establecida. El error mostrado se debe principalmente a la discretización del dominio; para este estudio se utilizó un mallado grueso [3, 6].

Bajo este análisis, se establece que la distancia desde el electrodo enterrado hasta el final del dominio del terreno (R_b), como se muestra en la Figura 3.2, se determina mediante:

$$R_b = 50 \cdot L. \quad (3.1)$$

Con ello, el espesor del dominio infinito, considerando la relación obtenida anteriormente, queda definido como:

$$\delta = \frac{R_b}{25}. \quad (3.2)$$

Para la geometría de una malla de puesta a tierra, se considera el mismo análisis realizado en [6]. Debido al elevado tiempo de simulación asociado a geometrías de mayor tamaño, se adopta la relación:

$$\frac{R_b}{D_{\text{malla}}} = 5, \quad (3.3)$$

donde D_{malla} corresponde a la diagonal más larga de la MPT. Esta relación resulta suficiente para las mediciones a realizar, considerando además que el borde infinito incorporado en este trabajo reduce considerablemente el error. En cuanto al espesor del dominio infinito, se considera la misma relación definida en (3.2).

Para las dimensiones en profundidad, se considera la misma distancia R_b , agregando además las distancias entre capas. Con ello, se asegura una distancia mínima adecuada, cumpliendo con las condiciones previamente expuestas.

3.2.2. Validación entorno de simulación.

Para validar el entorno de simulación en COMSOL Multiphysics, se modela un terreno semiesférico con un electrodo de puesta a tierra de distintos largos, evaluando la resistencia de puesta a tierra obtenida y comparándola con la ecuación analítica correspondiente. Para ello, se considera un terreno homogéneo de resistividad $\rho = 100 \, \Omega \text{ m}$, un radio de electrodo $R_e = 0.025 \text{ m}$ y largos enterrados del electrodo de $L = [0.1, 0.4, 0.8, 1, 1.4, 1.6, 2] \text{ m}$.

Además, el dominio del electrodo se define mediante la relación $R_b = 50 \cdot L \text{ m}$, mientras que el espesor del dominio infinito se establece como $\delta = \frac{R_b}{25} \text{ m}$. Finalmente, el largo total del terreno utilizado en la simulación corresponde a:

$$L_{\text{terreno}} = 2 \cdot (R_b + \delta). \quad (3.4)$$

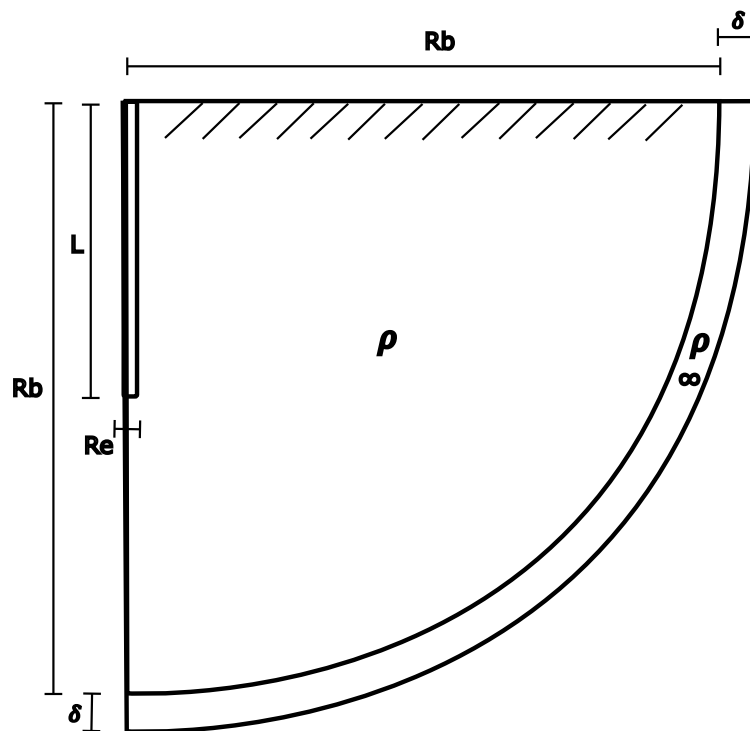


Figura 3.4: Corte laminar de terreno semi infinito con electrodo enterrado.

En la Figura 3.4 se muestra el corte del terreno modelado para la validación del entorno de simulación, se inyecta una corriente de 1 A y se mide la máxima tensión con el objetivo de obtener

R_g . Mediante el uso de matlab se logra automatizar el proceso de cambio de largo del electrodo y se guarda la resistencia de puesta a tierra simulada, para la simulación se utiliza una discretización de dominio fina.

Largo (m)	R_g analítica (Ω)	R_g simulada (Ω)	Error absoluto (Ω)	Error relativo (%)
0.1	282.1163	281.0780	1.0383	0.3680
0.4	125.6880	120.6124	5.0756	4.0382
0.6	94.5473	91.0555	3.4918	3.6932
0.8	76.6337	74.0134	2.6203	3.4193
1.0	64.8584	62.7934	2.0650	3.1839
1.4	50.1525	48.7261	1.4264	2.8441
1.6	45.2117	43.9834	1.2283	2.7167
2.0	37.9451	36.9934	0.9516	2.5080

Tabla 3.2: Comparación entre la resistencia de puesta a tierra obtenida mediante el cálculo analítico y la simulación numérica.

Utilizando la formula analítica para un electrodo enterrado en terreno homogéneo [6] se obtiene la comparación de la Tabla 3.2 en donde se demuestra que las resistencias de puesta a tierra obtenidas desde COMSOL no superan el 5 % de error relativo en todo el rango analizado, lo que permite validar las definiciones geométricas propuestas y el uso del modelo numérico para los estudios posteriores.

3.2.3. Análisis de sensibilidad de discretización de dominio.

Uno de los parámetros para ajustar en COMSOL que permiten mayor o menor precisión es la discretización o “mallado” de los dominios de los modelos a simular. Por ello escoger el mas optimo es de suma importancia, si este parámetro es el mas fino, el costo computacional se eleva reflejándose en el tiempo de simulación. Si bien en secciones anteriores se usaron mallados arbitrarios, sus resultados se equiparan a las soluciones analíticas, por ello se debe definir un solo mallado para todos los modelos posteriores que sea rápido y con una precisión alta.

Para este fin se utiliza como comparación [7] de donde se extrae los datos para el modelo equivalente de 3 capas representados en la Tabla 3.3.

Número de capas	Resistividad específica ρ (Ω m)	Espesor de la capa (m)
1	150.8457	0.990462
2	64.09731	1.694774
3	14.05551	∞

Tabla 3.3: Resistividad y espesor correspondientes al modelo de terreno de tres capas [7].

Ademas se tiene las mediciones Wenner en la Tabla 3.4 en donde se muestra lo medido en [7]. Con estos datos se puede comparar directamente re diseñando el modelo en COMSOL con los paramentros antes estudiados en secciones anteriores.

Espaciamiento a (m)	Resistividad medida ρ (Ω m)
1	125.0354
1.5	108.6677
2	85.3257
2.5	69.4292
3	55.4177
4	37.4478
5	30.7876
6	26.0124
7	22.8708
8	16.0850
9	17.5301
10	16.3364

Tabla 3.4: Mediciones de resistividad obtenidas mediante el método de Wenner [7].

Con las características del terreno, se modela un terreno rectangular con las propiedades geométricas obtenidas en la sección 3.2.1. En la Figura 3.5 se muestra un corte laminar del terreno para el análisis de la mejor opción de mallado, en donde se destaca las dimensiones de este.

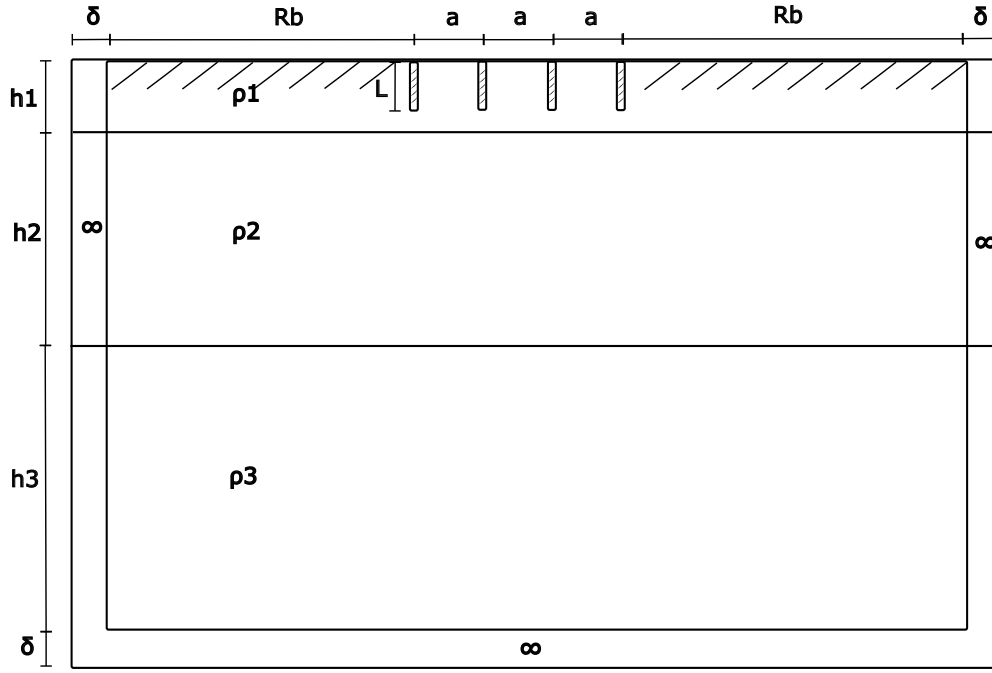


Figura 3.5: Corte laminar de terreno referencia de 3 capas.

Con el modelo previamente definido, se asignan las propiedades de los materiales considerando electrodos enterrados de cobre y las resistividades correspondientes al modelo equivalente presentado en la Tabla 3.3. En cuanto a las dimensiones geométricas utilizadas en la simulación, se considera un electrodo de largo $L = 0.0086$ m, mientras que los espesores de las dos primeras capas corresponden a $h_1 = 0.990462$ m y $h_2 = 1.694774$ m, respectivamente.

Para la tercera capa del terreno, el espesor se define mediante:

$$h_3 = \frac{h_1 + h_2}{2} + R_b + \delta. \quad (3.5)$$

Asimismo, el espesor del dominio infinito se establece como:

$$\delta = \frac{R_b}{25}, \quad (3.6)$$

mientras que el dominio asociado a los electrodos enterrados se determina mediante:

$$R_b = 50 \cdot L. \quad (3.7)$$

Una vez definido el modelo geométrico, se analiza el impacto del mallado sobre los resultados obtenidos. Para ello, se desarrolla una rutina en MATLAB que automatiza las mediciones de resistividad mediante el método de Wenner, considerando los espaciamientos indicados en la Tabla 3.4.

Debido a la naturaleza creciente del modelo geométrico, ya que la separación entre electrodos aumenta progresivamente, el largo total del terreno se define en función del espaciamiento entre electrodos:

$$L_{\text{terr}} = 2(\delta + R_b) + 3a, \quad (3.8)$$

con ello, se optimiza el costo computacional manteniendo dimensiones adecuadas para realizar correctamente las mediciones. Finalmente, el estudio de convergencia del mallado se desarrolla de manera progresiva, considerando desde la discretización más fina hasta la más gruesa. Para este análisis se emplean cuatro niveles de mallado: *coarse*, *normal*, *fine* y *finer*.

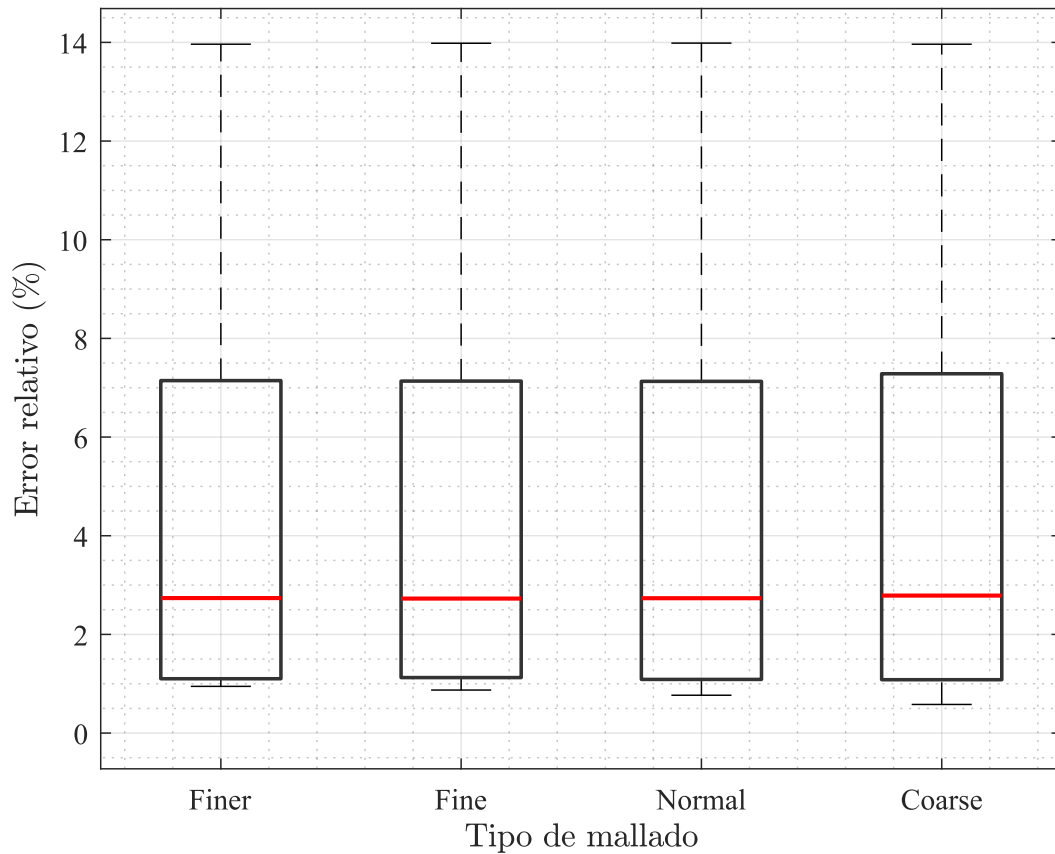


Figura 3.6: Error relativo promedio cada mallado en estudio.

En la Figura 3.6 el análisis estadístico mediante diagramas de caja muestra que los distintos niveles de mallado presentan distribuciones de error relativo similares. Tanto la mediana como la dispersión de los datos permanecen prácticamente constantes entre los diferentes mallados, indicando que la discretización adicional del mallado no produce mejoras significativas en la precisión de las mediciones de resistividad.

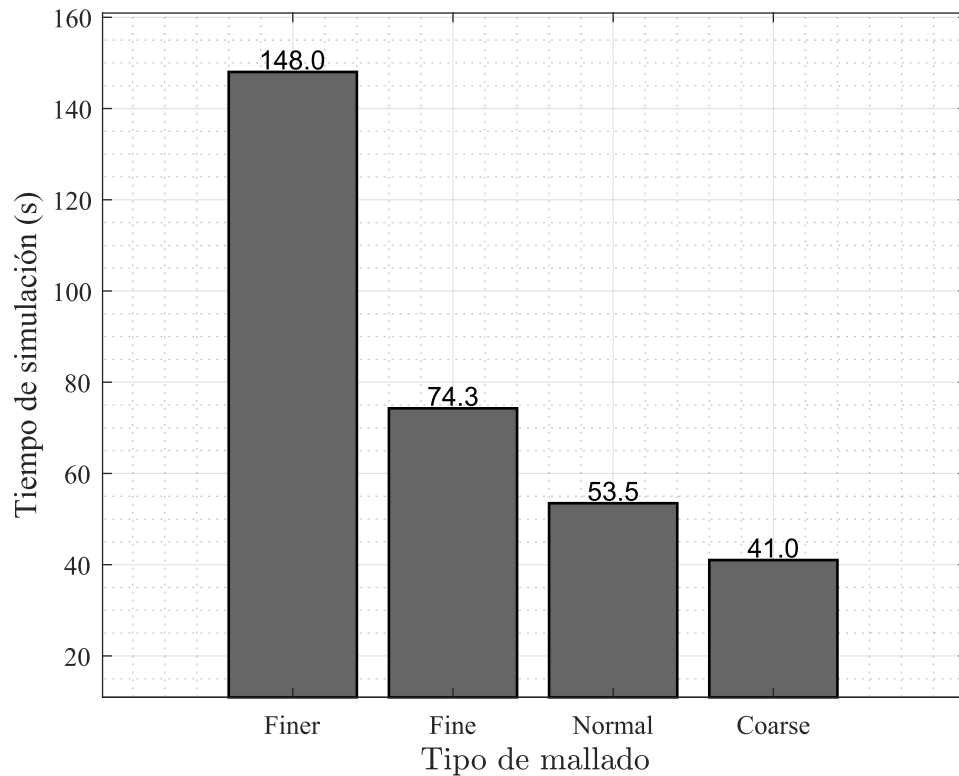


Figura 3.7: Tiempo de simulación para 12 instancias por mallado.

En la Figura 3.7 se dispone de los tiempos en simular 12 instancias, es decir, la misma cantidad de mediciones establecidas en la Tabla 3.4. Se muestra que mientras más fina sea el mallado el tiempo aumenta directamente, por tanto se opta por definir para todo el resto de mediciones Wenner el mallado mas grueso, Coarse, dado que representa un compromiso adecuado entre precisión y costo computacional.

3.2.4. Ajuste discretización de dominio para MPT.

Como ultimo ajuste, se debe considerar que para las mediciones posteriores se implementara una MPT con multiples conductores, por ello se ensayo una MPT arbitraria y se dio problemas con la discretización *Coarse*, debido al dominio pequeño que representan los conductores. Sin embargo este trae problemas detallados en la siguiente sección.

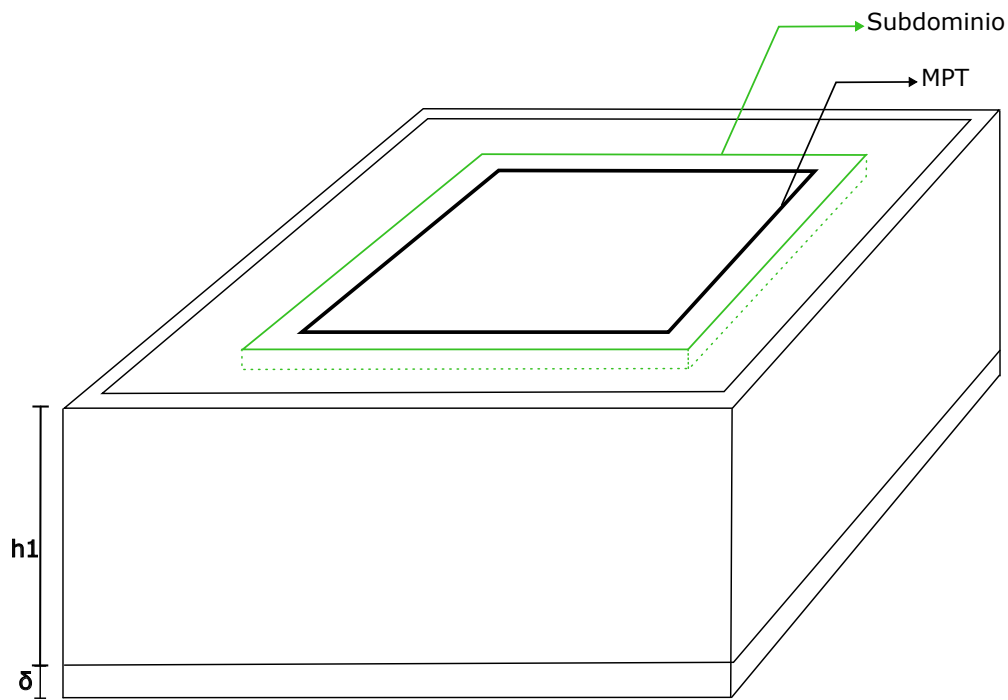


Figura 3.8: Modelo implementado para validar ajuste para dominio MPT.

Como ajuste para este caso, se optó por crear un subdominio que envuelve la MPT, facilitando así el proceso de mallado en la región de análisis. El tamaño de este subdominio se define como el 10% del largo de la MPT. En la Figura 3.8 se muestra la implementación realizada, donde además se observa cómo el terreno completo es envuelto por una caja con propiedad de dominio infinito, tal como se describió en secciones anteriores.

Con el objetivo de mejorar la discretización numérica, se definió un mallado personalizado. En este caso, el dominio correspondiente a los conductores cilíndricos se configura con un mallado *extra fine*, mientras que el subdominio envolvente se discretiza utilizando un mallado *finer*. Para el resto de los dominios se emplea un mallado *normal*, permitiendo así reducir el costo computacional sin afectar significativamente la precisión de los resultados.

Como caso de validación, se considera el modelo presentado en [15], correspondiente al Ejemplo 18, el cual se ilustra en la Figura 3.8. Cabe mencionar que se realizó una modificación en el radio del electrodo con el objetivo de mejorar la calidad del mallado en dicho dominio, considerando además que se cumple la condición:

$$R_e \ll D_{\text{elec}}, \quad (3.9)$$

donde D_{elec} corresponde a la menor distancia entre electrodos [4].

La MPT considerada corresponde a una geometría de 8×8 m con un lazo conductor enterrado a una profundidad de 0.5 m, en un terreno homogéneo de resistividad $100 \Omega \text{ m}$. Para los electrodos se considera un radio de 10 mm, manteniendo las condiciones geométricas adecuadas para el análisis numérico realizado.

Con parámetros definidos se determina los valores de E_{touch} , E_{step} y R_g los cuales son presentados en a Tabla 3.5 en porcentaje según el GPR de cada modelo para compararlos.

Modelo	E_{touch}/GPR (%)	E_{step}/GPR (%)	R_g (Ω)
Cmsol	51.00	21.62	6.11
GMT	45.76	20.21	6.42
Resis	45.54	19.80	6.42

Tabla 3.5: Comparación de los resultados obtenidos en COMSOL con modelos de referencia.

Modelo de referencia	E_{touch} (%)	E_{step} (%)	R_g (%)
GMT	11.43	6.98	4.83
Resis	11.97	9.19	4.83

Tabla 3.6: Error relativo del modelo desarrollado en COMSOL respecto a los modelos de referencia.

En la Tabla 3.6 se demuestra que el modelo desarrollado bajo las características descritas muestra un error de menor al 5 % en R_g por lo que señala que el comportamiento global del sistema es correcto.

Si bien el error de E_{touch} alcanza valores del 12 % se considera aceptable para fines de evaluación en la tensión de contacto, debido a que para el cálculo se considera la tensión de GPR como el contacto a la malla provocando una sobre estimación.

Las variaciones observadas en el error de E_{step} difieren a ambos modelos debido a que depende fuertemente al calculo local de los modelos, de la discretización del dominio de estudio, por ello se considerara correcto el calculo desarrollado para los fines de este trabajo.

3.3. Creación y definición de terrenos de referencia.

Para el estudio se establecieron 4 modelos específicos seleccionados de manera arbitraria para reflejar de una manera realista a un terreno real. Se establece un modelo de tres capas, un modelo de capas inclinadas, un modelo de capas inclinadas opuestas y por ultimo un modelo de dos capas con una roca en medio de ambas capas, en cada uno de ellos se intercambiara el valor de resistividad entre capas creando diferentes casos para cada modelo.

Cada uno de ello se trataran como si fuese un terreno real al que se decide medir su resistividad para instalar un SPT. En este contexto, en ellos se planifica instalar una MPT de tamaño 10 x 10 de mismas dimensiones y características para todos los modelos, por ello se planifica que es suficiente medir resistividad en el lugar correspondiente de emplazamiento de la MPT. En la Tabla 3.7 se muestra los parámetros utilizados en los modelos multicapa.

Descripción	Valor
Resistividad ρ_1	150.8457 Ω m
Resistividad ρ_2	64.09731 Ω m
Resistividad ρ_3	14.05551 Ω m
Espesor capa h_1	0.990462 m
Espesor capa h_2	1.694774 m
Espesor capa h_3	$\frac{h_1 + h_2}{2} + \delta + R_b$

Tabla 3.7: Parámetros empleados en las simulaciones realizadas.

3.3.1. Modelo tres capas.

Como primer modelo se considera un terreno típico de tres capas horizontales como se muestra en la Figura 3.9, en donde se muestra la geometría diseñada anteriormente. Los parámetros eléctricos y espesor de capas son tomados de [7] presentados en la Tabla 3.3.

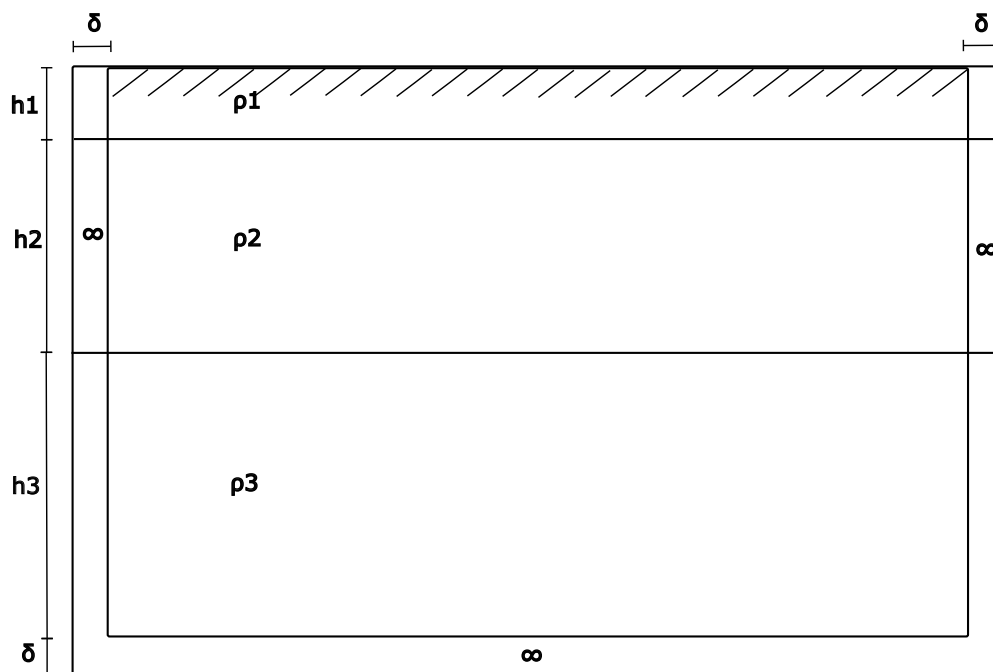


Figura 3.9: Esquema de modelo de tres capas horizontales.

Las dimensiones del terreno están sujetas a parámetros antes estudiados 3.1, 3.2 y 3.8. Para el primer modelo se permutan los valores de resistividad entre las capas obteniendo 6 casos en total señalados en la Tabla 3.8 en donde se nombran los casos como MX_CY, y las capas de 1 a 3, donde la 1 es la superficie y 3 el fondo.

Modelo	Capa 1	Capa 2	Capa 3
M1_C1	ρ_1	ρ_2	ρ_3
M1_C2	ρ_1	ρ_3	ρ_2
M1_C3	ρ_2	ρ_1	ρ_3
M1_C4	ρ_2	ρ_3	ρ_1
M1_C5	ρ_3	ρ_1	ρ_2
M1_C6	ρ_3	ρ_2	ρ_1

Tabla 3.8: Permutaciones de resistividades ρ_1 , ρ_2 y ρ_3 consideradas para el modelo M1.

3.3.2. Modelo de capas inclinadas.

El segundo modelo estudiado, etiquetado como M2, corresponde a un terreno de tres capas con igual ángulo de inclinación entre interfaces. Los parámetros eléctricos utilizados son los mismos definidos en la Tabla 3.7. En este caso, las distancias de espesor se consideran a partir del centro del plano inclinado, tal como se muestra en la Figura 3.10.

Para la geometría propuesta, los ángulos de inclinación de las capas se definen como:

$$\alpha_1 = 8^\circ, \quad (3.10)$$

$$\alpha_2 = 8^\circ. \quad (3.11)$$

Las distintas permutaciones de resistividad consideradas para este modelo se presentan en la Tabla 3.9.

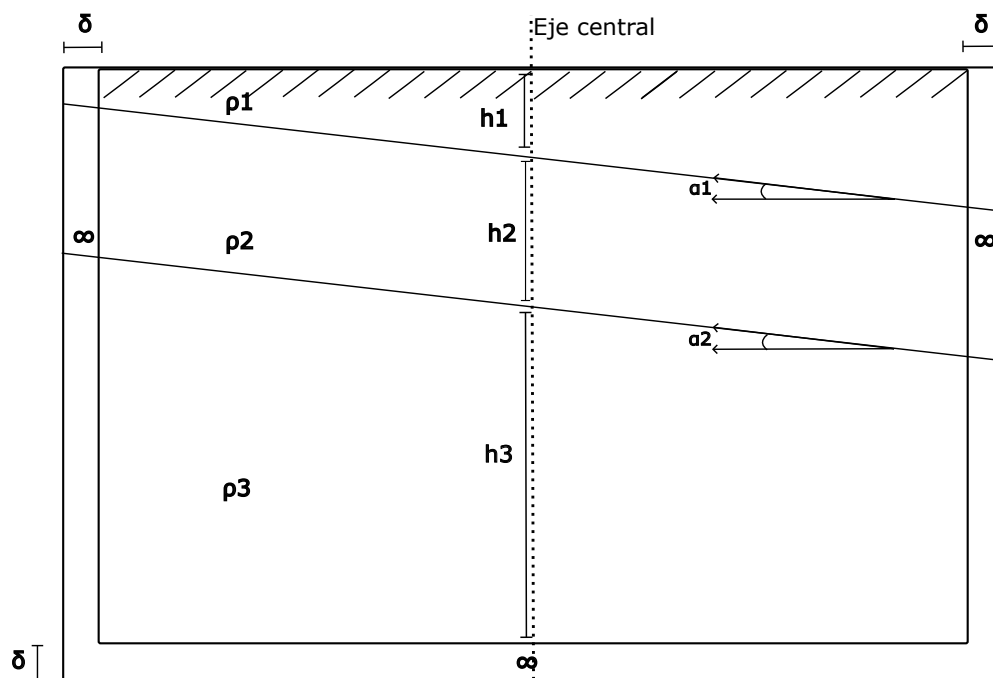


Figura 3.10: Esquema de modelo multicapa con mismo ángulo de inclinación.

Modelo	Capa 1	Capa 2	Capa 3
M2_C1	ρ_1	ρ_2	ρ_3
M2_C2	ρ_1	ρ_3	ρ_2
M2_C3	ρ_2	ρ_1	ρ_3
M2_C4	ρ_2	ρ_3	ρ_1
M2_C5	ρ_3	ρ_1	ρ_2
M2_C6	ρ_3	ρ_2	ρ_1

 Tabla 3.9: Permutaciones de resistividades ρ_1 , ρ_2 y ρ_3 consideradas para el modelo M2.

3.3.3. Modelo de capas inclinadas opuestas.

El tercer modelo estudiado, denominado M3, se define mediante la variación del ángulo α_2 , generando así capas inclinadas en sentidos opuestos, tal como se muestra en la Figura 3.11. Para este caso, se utilizan los mismos parámetros descritos en la Tabla 3.7.

De manera similar a los modelos anteriores, se consideran las seis permutaciones de resistividad presentadas en la Tabla 3.10. Los ángulos definidos para las interfaces del modelo corresponden a:

$$\alpha_1 = 8^\circ, \quad (3.12)$$

$$\alpha_2 = -3^\circ. \quad (3.13)$$

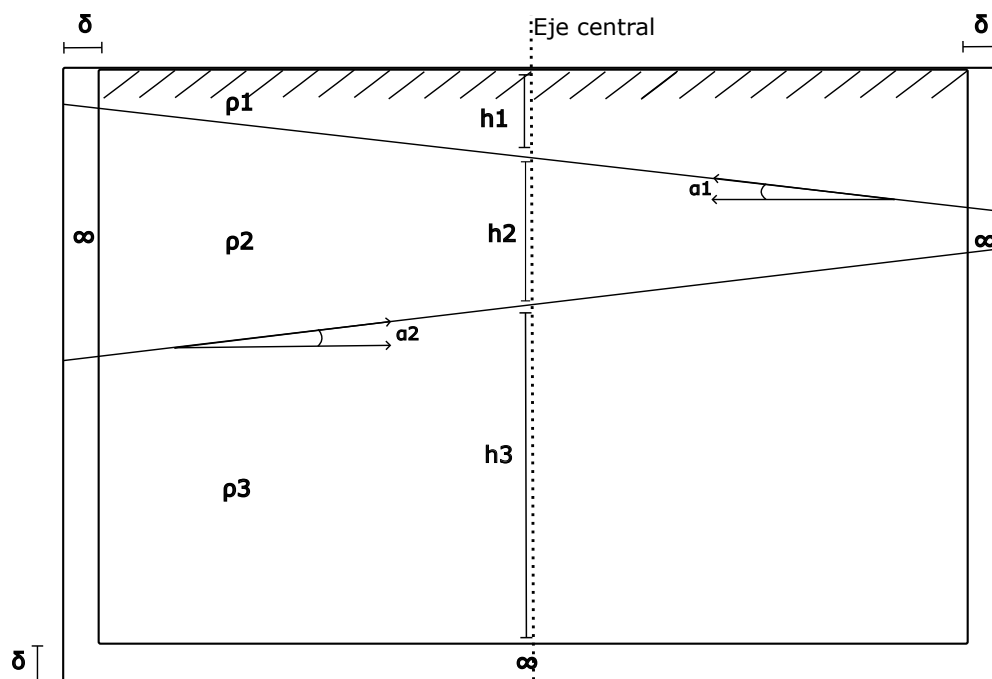


Figura 3.11: Esquema de modelo multicapa con diferente ángulo de inclinación.

Modelo	Capa 1	Capa 2	Capa 3
M3_C1	ρ_1	ρ_2	ρ_3
M3_C2	ρ_1	ρ_3	ρ_2
M3_C3	ρ_2	ρ_1	ρ_3
M3_C4	ρ_2	ρ_3	ρ_1
M3_C5	ρ_3	ρ_1	ρ_2
M3_C6	ρ_3	ρ_2	ρ_1

Tabla 3.10: Permutaciones de resistividades ρ_1 , ρ_2 y ρ_3 consideradas para el modelo M3.

3.3.4. Modelo con roca incrustada.

Para este estudio se adapta un modelo de doble capa basado en las mediciones presentadas en [7]. Considerando que en condiciones reales no es común encontrar formaciones rocosas perfectamente circulares, se optó por utilizar una geometría asimétrica con el objetivo de representar de mejor manera las condiciones del terreno sin incrementar significativamente el costo computacional.

Para ello, se implementa una geometría elipsoidal ubicada entre ambas capas del terreno, representando una formación rocosa, tal como se muestra en la Figura 3.12. Los parámetros geométricos y eléctricos considerados en el modelo se presentan en la Tabla 3.11, mientras que los distintos casos analizados se muestran en la Tabla 3.12.

Descripción	Valor
Resistividad ρ_1	126.0062 Ω m
Resistividad ρ_2	15.48484 Ω m
Resistividad roca ρ_{roca}	10000 Ω m
Espesor capa h_1	1.816445 m
Espesor capa h_2	$h_1 + R_b$ m
Eje elipsoide a_{axis}	8 m
Eje elipsoide b_{axis}	8 m
Eje elipsoide c_{axis}	$h_1 + R_b/4$ m
Profundidad roca (centro) h_3	$c_{axis} + h_1/2$ m

Tabla 3.11: Parámetros geométricos y eléctricos empleados en las simulaciones del modelo M4.

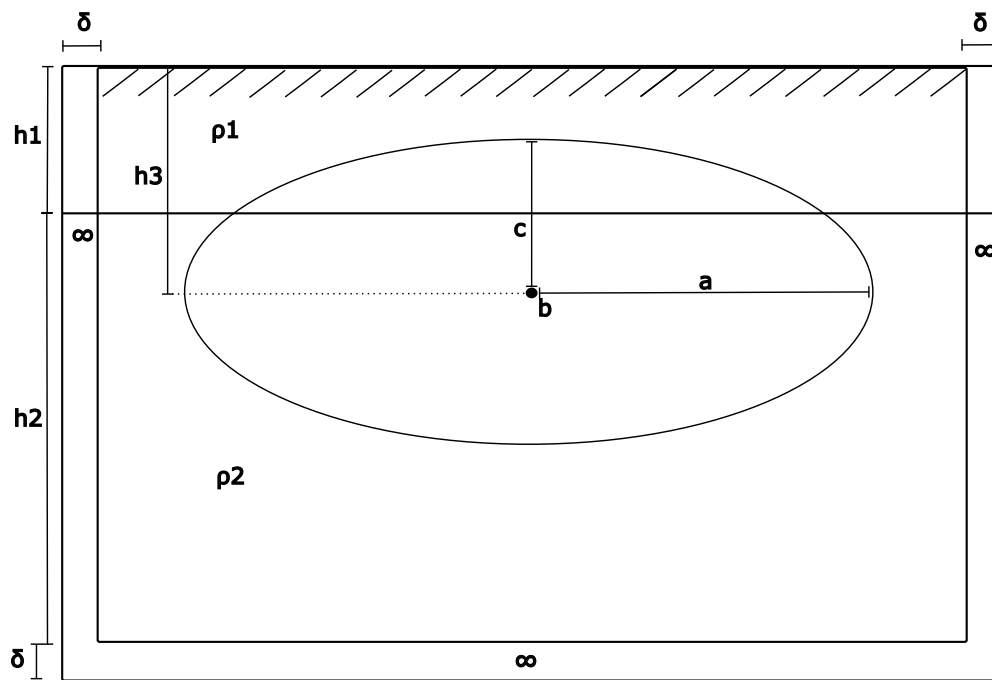


Figura 3.12: Esquema de modelo multicapa con roca.

Modelo	Capa 1	Capa 2
M4_C1	ρ_1	ρ_2
M4_C2	ρ_2	ρ_1

Tabla 3.12: Permutaciones de resistividades ρ_1 y ρ_2 consideradas para el modelo M4.

3.4. Mediciones con método Wenner en terrenos.

Se utilizara el procedimiento descrito por normativa discutido en el capitulo anterior 2.2.2, en cuanto los electrodos se determina usar parámetros geométricos comerciales tabulados en 3.13, los cuales se escogió el de mayor radio para mejorar la discretización del domino del electrodo. Para el material, se definió los parámetros de cobre establecidos por COMSOL.

Descripción	Valor
Largo enterrado L	0.1 m
Radio del electrodo R_e	0.0086 m

Tabla 3.13: Parámetros del electrodo utilizados para las mediciones mediante el método de Wenner [8].

Para medir las resistividades se define que se requiere instalar la MPT en el centro de cada modelo creado. Dado la cantidad de casos que se tiene se debe automatizar el proceso mediante Matlab, pero existen limitantes geométricas en el proceso en los modelos de capas inclinadas, ya que al estar el terreno parametrizado en función de la separación de electrodos como se muestra en (3.8) existe

un largo en donde los planos inclinados se cruzan y cortan otros dominios intercambiando valores de resistividades dificultando la automatización del mallado y la convergencia de la solución. Para evitar el problema, se estableció como separación de electrodos máxima $a = 5$ m para los modelos M2 y M3.

Una vez establecidas las limitaciones, se mide la resistividad aparente con la separación de electrodos de la Tabla 3.14.

Modelos	Espaciamiento a (m)
M1 y M4	1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14 y 15
M2 y M3	1, 2, 3, 4 y 5

Tabla 3.14: Espaciamientos utilizados para las mediciones mediante el método de Wenner según el modelo analizado.

Para energizar los electrodos, se les da la propiedad de terminal en COMSOL, adquiriendo la capacidad de inyectar la corriente necesaria, para este estudio se estableció inyección de 1 A y los electrodos de potencial se les dio la propiedades de medidor de potencial. Con ello se obtiene la resistencia y usando (2.3) se obtiene la resistividad aparente del terreno.

A continuación, se describe el procedimiento implementado en MATLAB para la realización de las mediciones en cada uno de los modelos analizados.

En primer lugar, se carga el modelo de terreno correspondiente, considerando los electrodos orientados tanto en el eje X como en el eje Y. Posteriormente, se asignan las resistividades de cada capa con el fin de configurar el caso de estudio asociado. Una vez definidos los parámetros eléctricos, se genera el mallado utilizando su respectiva configuración, seleccionada previamente a partir del análisis de sensibilidad de mallado presentado en la Sección 3.2.3.

A continuación, se inicia un proceso iterativo para recorrer los distintos espaciamientos establecidos para el arreglo Wenner. En cada iteración se realiza el reposicionamiento de los electrodos, seguido de la ejecución de la simulación en COMSOL. Posteriormente, se obtienen los valores de potencial en los electrodos interiores del arreglo, permitiendo calcular la resistividad aparente mediante la ecuación (2.3). Finalmente, los valores de espaciamento y resistividad aparente son almacenados para su posterior análisis.

Una vez completadas las iteraciones correspondientes a un caso, se actualizan las resistividades del modelo para evaluar la siguiente configuración. Del mismo modo, al finalizar un modelo completo, se modifica tanto la geometría como la orientación del arreglo Wenner para continuar con el resto de los casos considerados.

Finalmente, las mediciones obtenidas en los ejes X e Y son promediadas con el objetivo de reducir posibles variaciones asociadas a la orientación del arreglo.

El procedimiento descrito permitió automatizar las mediciones y cálculos para cada caso de estudio, facilitando además el almacenamiento y visualización de resultados para detectar posibles incoherencias durante el proceso. El código MATLAB empleado se presenta en el Anexo A.2.1.

3.5. Cálculo del modelo equivalente de doble capa

Una vez finalizadas las mediciones, se desarrolla en MATLAB el cálculo de modelos equivalentes de doble capa. El objetivo de este procedimiento es ajustar un modelo analítico de resistividad aparente a partir de las mediciones obtenidas mediante el arreglo Wenner.

Inicialmente, se realiza la lectura de los datos medidos de resistividad aparente. Posteriormente, se asume un modelo de suelo estratificado horizontal de doble capa, caracterizado por las resistividades ρ_1 y ρ_2 , además del espesor de la primera capa h_1 . A partir de las mediciones obtenidas, se generan estimaciones iniciales de estos parámetros con el propósito de favorecer la convergencia del proceso de ajuste.

Una vez definidos los parámetros iniciales, se calcula la resistividad aparente teórica utilizando una expresión analítica basada en integrales de Hankel y funciones de Bessel de primer tipo. Esta formulación permite representar la respuesta del arreglo Wenner sobre un terreno estratificado.

Posteriormente, el modelo es ajustado mediante mínimos cuadrados no lineales, minimizando el error cuadrático entre la resistividad aparente medida y la calculada por el modelo analítico. A partir de ello, se evalúa el error cuadrático medio y se realiza una comparación gráfica entre los datos medidos y los valores estimados.

Finalmente, los parámetros obtenidos para cada modelo equivalente de doble capa son almacenados para su posterior utilización en COMSOL, siguiendo los criterios geométricos discutidos en la Sección 3.2.

El código MATLAB utilizado para la obtención de los modelos equivalentes de doble capa se presenta en el Anexo A.2.2, desarrollado por el profesor guía Alejandro Angulo.

3.6. Creación de Malla de puesta a tierra.

Se adopta una geometría simple y regular con el objetivo de aislar los efectos asociados al modelo eléctrico y a las propiedades del suelo, evitando que decisiones particulares de diseño condicionen el análisis realizado. Debido a ello, se utiliza la misma configuración de MPT para todos los casos estudiados.

La norma IEEE 80 es considerada como referencia conceptual; sin embargo, no se emplea como procedimiento de diseño, dado que el enfoque principal de este trabajo corresponde al análisis del modelo eléctrico y no a la optimización normativa de la malla de puesta a tierra.

El diámetro del conductor se selecciona de manera pragmática, priorizando la factibilidad computacional del mallado y la estabilidad numérica del método de elementos finitos. Esto se debe a que la influencia del diámetro sobre las variables analizadas resulta marginal en comparación con otros parámetros, tales como la resistividad del suelo. Además, se considera la condición geométrica planteada en [4], donde la distancia entre conductores debe ser considerablemente mayor que el radio de estos.

Las características geométricas de la MPT utilizada en las simulaciones se presentan en la Ta-

bla 3.15.

Descripción	Valor
Largo	10 m
Ancho	10 m
Número de lazos	16
Diámetro de electrodos	0.02 m

Tabla 3.15: Características geométricas de la MPT utilizada en las simulaciones.

3.7. Obtención variables de estudio.

Para la obtención de las variables E_{step} , E_{touch} y R_g , se extraen directamente desde COMSOL los valores de tensión y las coordenadas de los nodos ubicados en la superficie del terreno. El modelo es alimentado mediante una fuente de corriente de 1000A, inyectada en el centro de la MPT. La tensión resultante en la fuente es considerada como el GPR, tal como se muestra en la Figura 3.13.

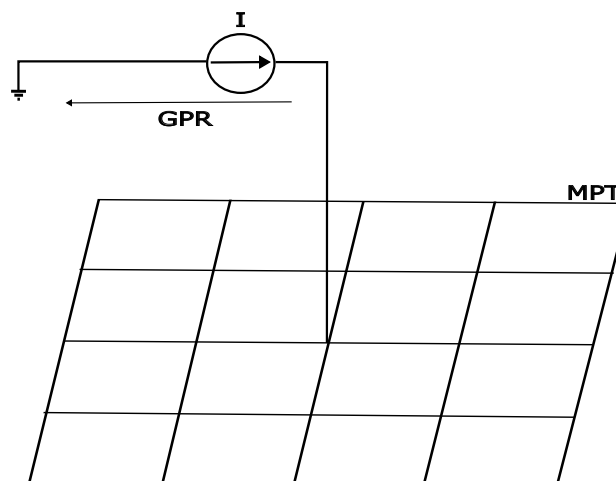


Figura 3.13: Diagrama de conexión de la fuente de corriente aplicada en COMSOL.

El procedimiento implementado en MATLAB para la extracción de variables consiste inicialmente en guardar el modelo de COMSOL como un archivo `.m`, permitiendo tratarlo posteriormente como una función. A partir de ello, se modifican los parámetros necesarios para habilitar la extracción de variables desde el modelo numérico.

Posteriormente, el modelo es ejecutado desde MATLAB y se obtiene directamente el valor de GPR, permitiendo calcular la resistencia de puesta a tierra mediante la ecuación (2.25). De forma adicional, se extraen las tensiones y coordenadas de los nodos de superficie considerando una tolerancia espacial adecuada para el procesamiento numérico.

Una vez obtenidos los datos, se calcula para cada coordenada la diferencia de potencial asociada a una separación de un metro, permitiendo determinar el valor máximo de E_{step} . Del mismo modo, el valor de E_{touch} se obtiene calculando la diferencia entre el GPR y las tensiones presentes en la

superficie, considerando únicamente puntos ubicados a una distancia no mayor a un metro desde el borde de la MPT.

Finalmente, las variables calculadas son almacenadas para cada caso de estudio, repitiendo posteriormente el procedimiento para las distintas configuraciones y modelos analizados.

La metodología descrita permitió obtener las variables de estudio presentando resultados comparables con otros métodos numéricos, tal como se discutió previamente en la Sección 3.2.4. El código desarrollado para este procedimiento se presenta en el Anexo A.2.3.

3.8. Proceso de comparación y análisis.

Una vez obtenido los valores de las variables de estudio tanto de los modelos creados denominados como modelos reales y los modelos equivalentes de doble capa se comparan para contrastar la desviación que tiene al implementar el modelo. Para poder compararlos se normaliza los valores de E_{step} y E_{touch} reales y equivalentes, dividiendo los valores respectivos con el GPR de la MPT instalada para cada caso:

$$E_{step_norm,i} = \frac{E_{step,i}}{GPR_i}(\%) \quad y \quad E_{touch_norm,i} = \frac{E_{touch,i}}{GPR_i}(\%) \quad (3.14)$$

Para cuantificar la diferencia entre las variables reales y las del modelo equivalente se utiliza el error relativo ($E_{rr,i}$) permitiendo evaluar la capacidad del modelo simplificado para reproducir el comportamiento eléctrico del sistema de puesta a tierra. Se define como:

$$E_{rr,i} = \frac{x_{eq,i} - x_{real,i}}{x_{real,i}} \quad (3.15)$$

Donde $x_{real,i}$ y $x_{eq,i}$ son los valores de resistividad, resistencia de puesta a tierra o tensiones normalizadas de paso y contacto según corresponda. Calculando el promedio de la ecuación 3.15 se obtiene el sesgo de la muestra (μ) indicando su tendencia a sobreestimar o subestimar las variables analizadas..

La cuantificación de la precisión del modelo equivalente se desarrolla mediante el cálculo de la desviación estándar del error. Se mide la dispersión de la muestra con n datos respecto a su media y se calcula como:

$$\sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (E_{rr,i} - \mu)^2} \quad (3.16)$$

Como comparación gráfica se hace uso de histogramas de error relativo contruidos a partir de una estimación de densidad de probabilidad, normalizados como función de densidad (pdf). El ancho de clase fue determinado automáticamente según criterios estadísticos robustos, permitiendo la comparación directa con una distribución normal ajustada a partir de la media y desviación estándar de los datos. La superposición de ambas distribuciones permite evaluar de manera exploratoria la presencia de sesgos sistemáticos y la dispersión del error del modelo equivalente. En el anexo

A.2.4 se presenta el código empleado para el calculo necesario y creación de herramientas visuales estadísticas.

Para medir que tan representativo es el modelo equivalente doble capa se calcula la raíz cuadrática media del error (*rmse*, del ingles Root Mean Square Error), se define como:

$$rmse = \sqrt{\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_{real,i} - x_{eq,i})^2} \quad (3.17)$$

Capítulo 4

Resultados y análisis

En este capítulo se presentan los resultados derivados de las simulaciones realizadas en base a la metodología descrita en el capítulo anterior. Se presentan las curvas de resistividad aparente medidas para cada caso de estudio. Se expone también los resultados de los modelos doble capa equivalentes obtenidos de las mediciones Wenner. Se presentan los valores a estudio de resistencia de puesta a tierra, tensiones de paso y contacto obtenidos tanto de los modelos de referencia o reales y los equivalentes. Finalmente se realiza una comparación estadística de los valores de estudio para analizar la precisión de un modelo equivalente de doble capa.

4.1. Mediciones Wenner de modelos de referencia.

En esta sección se muestra los resultados de las mediciones Wenner de cada modelo, se encuentra organizados según se dictaminó en la metodología, sean M1, M2, M3 y M4 los modelos medidos agregando el sufijo “ref” para indicar que son los modelos de referencia o reales. En cada gráfico se muestran los seis casos medidos de cada modelo. Los datos presentados representan el promedio de las mediciones realizadas tal como lo indica la normativa y planteado en la metodología, en el anexo se muestra las tablas de cada medición A.1.

En las figuras siguientes se muestra el promedio de las mediciones realizadas de resistividad aparente. Se desprende como varía la resistividad del suelo a mayor profundidad separando los electrodos para cada caso lo que concuerda con la teoría, además dependiendo los valores de resistividades de cada capa se visualiza la tendencia en los extremos a los valores puestos en la primera y última capa, esto se evidencia en la Figura 4.1 comparando con los valores de la Tabla 3.7.

Si se comparan las figuras 4.2 y 4.3 se muestra similitudes a pesar de ser terrenos con distinta geometría, esto indica que, para las condiciones analizadas, el arreglo Wenner no muestra una sensibilidad significativa frente al sentido de inclinación de las capas. Este comportamiento se atribuye a que el método de medición es más sensible a comportamientos horizontales. Adicionalmente las inclinaciones consideradas y espesores de capas podrían no ser suficientes para generar contrastes.

De la Figura 4.4 se puede diferenciar el efecto de la roca incrustada en los primeros metros de espaciamiento, para el caso 1 se muestra un máximo local como indicativo de la presencia de terreno con alta resistividad. En contraste el caso 2 no se distingue la presencia de una roca debido a la configuración de resistividades en las capas. Esta configuración revela que para detectar algún terreno local se debe presentar un contraste de resistividades y el volumen rocoso cercano a la superficie.

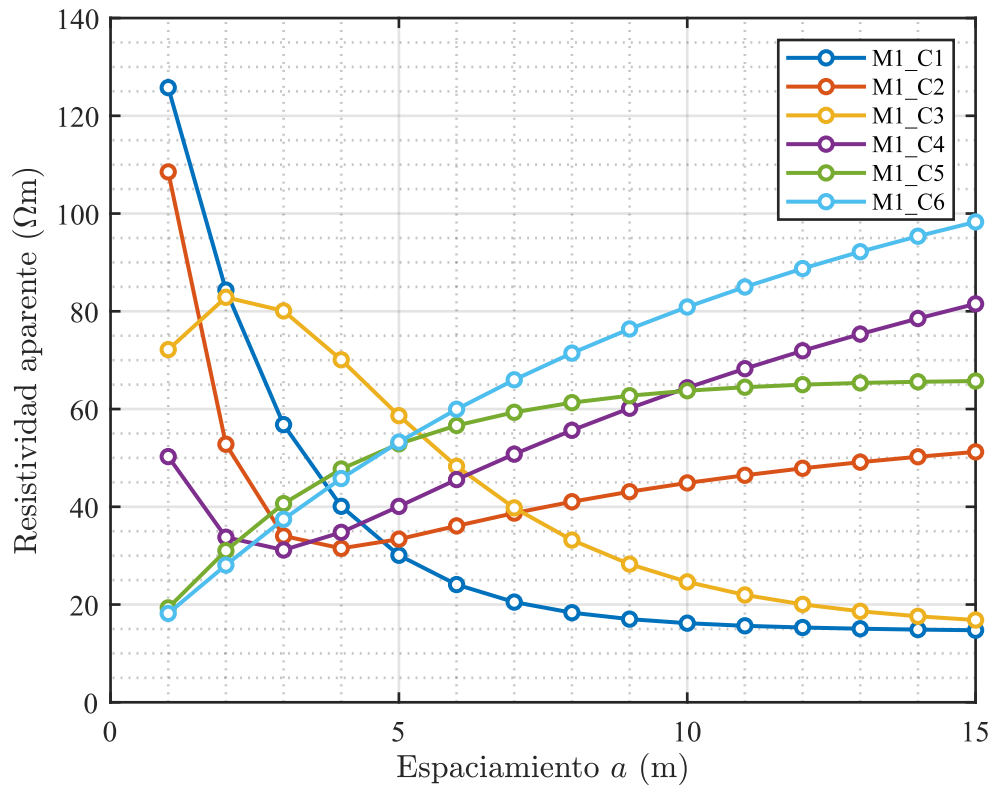


Figura 4.1: Mediciones Wenner promedio para Modelo real de 3 capas horizontales.

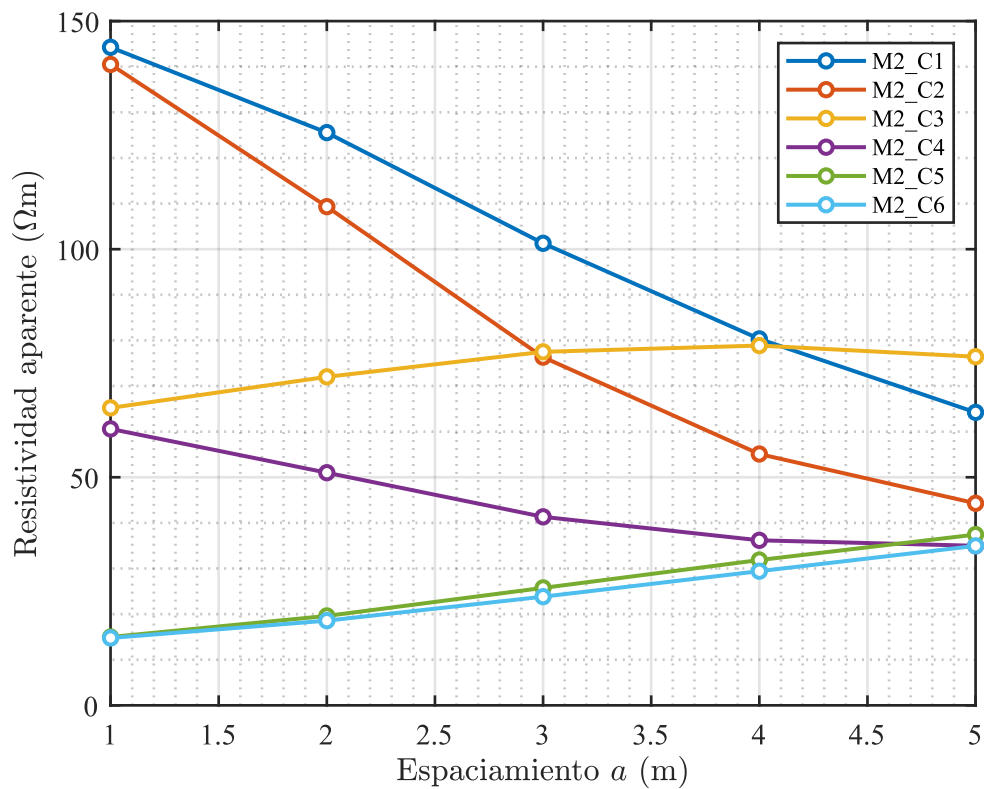


Figura 4.2: Mediciones Wenner promedio para Modelo real de capas inclinadas.

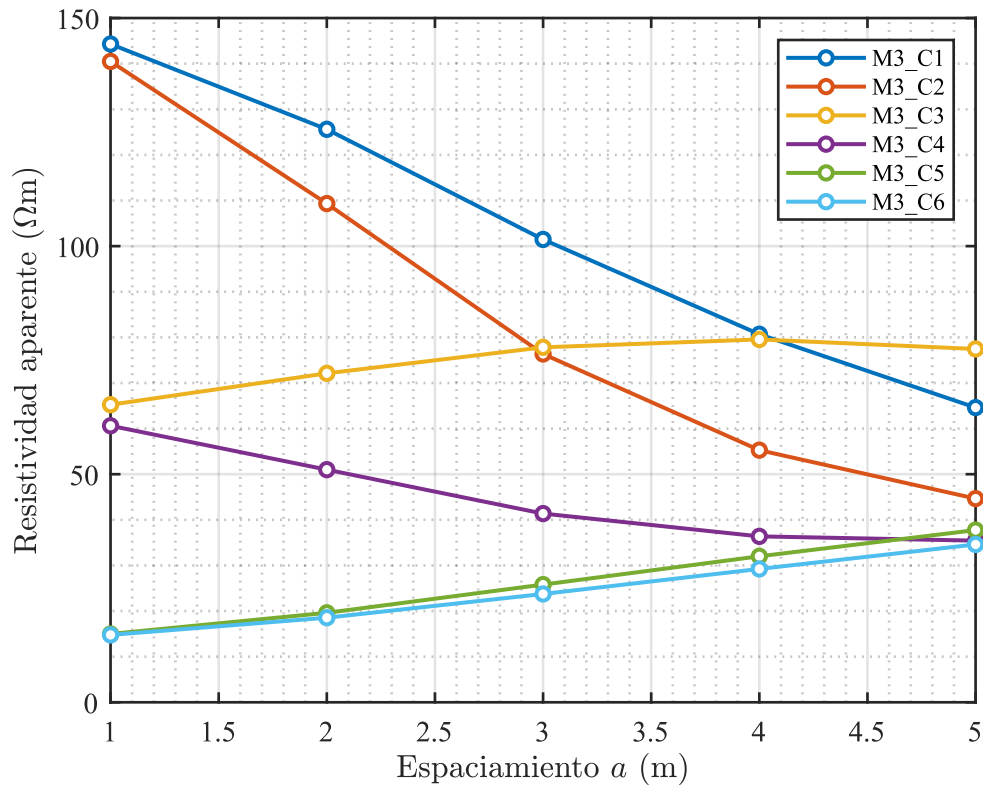


Figura 4.3: Mediciones Wenner promedio para Modelo real de capas inclinadas opuestas.

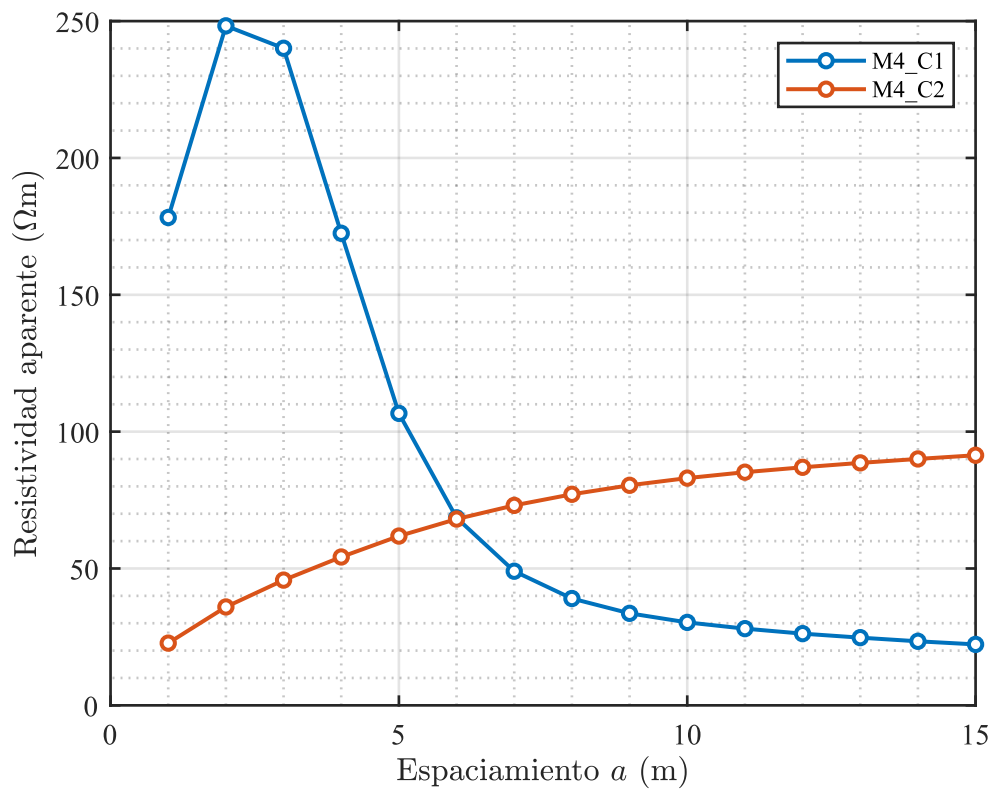


Figura 4.4: Mediciones Wenner promedio para Modelo real con roca incrustada.

4.2. Modelos equivalentes doble capa.

Con el procedimiento descrito en la metodología para la obtención de modelos equivalentes de doble capa, se obtienen los parámetros presentados en la Tabla 4.1. En ella se muestran los valores de resistividad de la capa superior ρ_1 , la resistividad de la capa inferior ρ_2 , el espesor de la capa superior h y la *rmse* asociada al ajuste realizado.

Modelo	ρ_1 (Ω m)	ρ_2 (Ω m)	h (m)	rmse
M1_C1	134.4863	15.6965	1.7026	1.7961
M1_C2	113.1043	48.9882	0.7743	12.0045
M1_C3	82.4852	9.7323	4.5786	3.5631
M1_C4	36.1736	247.7325	6.5333	4.4931
M1_C5*	0.0691	71.9516	0.0034	1.1372
M1_C6	15.7556	145.7187	1.3990	0.3256
M2_C1	148.3295	32.4607	2.3793	0.2001
M2_C2	150.3228	27.0861	1.7971	0.6203
M2_C3*	74.0033	-16.6983	253.4112	4.9601
M2_C4	64.7338	29.6945	1.4387	0.6368
M2_C5	13.8251	118.0392	1.8667	0.0107
M2_C6	13.9938	132.1204	2.1546	0.0628
M3_C1	148.3493	33.0026	2.3747	0.2273
M3_C2	150.3809	27.5689	1.7888	0.6549
M3_C3*	74.4335	-10.2385	245.7574	5.2278
M3_C4	64.8982	30.2909	1.4072	0.6921
M3_C5	13.8498	125.7154	1.8893	0.0032
M3_C6	13.9788	121.1028	2.1273	0.0519
M4_C1	239.3151	9.1900	3.5844	24.0218
M4_C2	16.3274	108.0098	0.9259	0.5405

Tabla 4.1: Parámetros de los modelos equivalentes obtenidos a partir de mediciones Wenner.

Los valores de *rmse* obtenidos indican que, en la mayoría de los casos, el ajuste del modelo equivalente presenta una buena concordancia con las mediciones Wenner. Los casos con *rmse* elevados se asocian a configuraciones complejas del suelo, tales como heterogeneidades localizadas o capas poco sensibles al método, lo cual pone de manifiesto las limitaciones del modelo de doble capa para representar ciertos escenarios.

Los casos de la Tabla 4.1 marcados con * representan modelos físicos imposibles. El modelo M1_C5 muestra un espesor de 34mm lo cual es físicamente no representativo en terrenos. Los modelos M2_C3 y M3_C3 se muestran resistividades negativas lo que es físicamente imposible.

Esto indica que el modelo equivalente multicapa sugiere que el terreno en dichas mediciones presenta una característica homogénea, por ello la obtención de modelos equivalentes se cambia a modelo homogéneo, es decir, una capa.

Debido a las irregularidades observadas en algunos modelos equivalentes de doble capa, se opta por representar ciertos casos mediante modelos homogéneos equivalentes de una sola capa. Para el caso M1_C5 se obtiene una resistividad equivalente de $\rho_1 = 54.7640 \Omega \text{ m}$, con un valor de $rmse = 13.7392$. En el caso M2_C3 se obtiene $\rho_1 = 74.0029 \Omega \text{ m}$ y $rmse = 4.9600$, mientras que para el modelo M3_C3 se obtiene $\rho_1 = 74.4333 \Omega \text{ m}$ con un valor de $rmse = 5.2276$.

La aparición de irregularidades en el cálculo de modelos equivalentes evidencia que ciertos perfiles de resistividad no pueden representarse adecuadamente mediante aproximaciones simples de doble capa. Debido a ello, dependiendo de la forma de la curva de resistividad aparente obtenida, algunos modelos presentan aproximaciones más representativas que otros.

Para el caso M1_C5 se mantienen inicialmente los parámetros obtenidos mediante el ajuste de doble capa, dado que presentan un menor valor de RMSE. Sin embargo, la capa superficial obtenida posee un espesor cercano a 34 mm, valor que resulta despreciable en comparación con la geometría global del sistema. Además, considerando que la separación mínima entre electrodos del arreglo Wenner corresponde a 1 m, la profundidad efectiva de medición se encuentra al menos a 0.6 m bajo la superficie, reduciendo considerablemente la influencia práctica de dicha capa superficial.

Dado que el objetivo principal de este trabajo corresponde a la comparación entre modelos de referencia y modelos equivalentes de doble capa, estas irregularidades son excluidas del análisis general.

4.3. Resistencias de puesta tierra, tensiones de contacto y paso.

En esta sección se detalla los resultados obtenidos para todos los modelos simulados, primero se exponen los valores de los modelos referenciales o reales ordenados en una tabla para una mejor inspección. Luego se presentan los valores a estudio de modelos doble capa y para finalizar la sección los resultados de modelos con irregularidades.

ModeloID	R_g (Ω)	GPR (V)	$V_{\text{touch,max}}$ (V)	$V_{\text{step,max}}$ (V)
M1_C1_real	2.3631	2363.10	1838.11	708.69
M1_C2_real	2.6703	2670.30	1640.22	603.54
M1_C3_real	2.1340	2133.97	1354.05	563.62
M1_C4_real	2.5783	2578.25	960.54	360.79
M1_C5_real	1.9105	1910.48	580.63	263.02
M1_C6_real	2.4913	2491.26	577.30	259.17
M2_C1_real	3.1574	3157.41	2407.43	950.11
M2_C2_real	3.1969	3196.87	2169.28	828.96
M2_C3_real	2.4286	2428.58	1398.22	581.78
M2_C4_real	2.4676	2467.55	1034.17	407.41
M2_C5_real	1.5290	1528.99	483.63	204.71
M2_C6_real	1.8287	1828.73	480.71	203.38
M3_C1_real	3.1739	3173.89	2361.28	929.99
M3_C2_real	3.1654	3165.37	2212.36	852.52
M3_C3_real	2.4286	2428.57	1456.07	598.50
M3_C4_real	2.3661	2366.12	1109.31	437.78
M3_C5_real	1.5346	1534.59	494.54	209.85
M3_C6_real	1.8060	1806.01	468.40	198.49
M4_C1_real	4.1701	4170.13	3199.72	1322.77
M4_C2_real	2.2721	2272.07	589.70	259.18

Tabla 4.2: Resultados eléctricos obtenidos para los modelos de referencia.

ModeloID	R_g (Ω)	GPR (V)	$V_{touch,max}$ (V)	$V_{step,max}$ (V)
M1_C1	2.2990	2299.04	1758.32	689.79
M1_C2	2.6524	2652.37	1541.44	596.00
M1_C3	2.1944	2194.43	1469.16	467.62
M1_C4	2.6455	2645.51	782.43	265.38
M1_C6	2.4828	2482.78	590.69	232.73
M2_C1	3.4312	3431.23	2339.24	803.81
M2_C2	2.9539	2953.94	2129.72	818.22
M2_C4	1.7559	1755.94	1034.17	395.94
M2_C5	1.8564	1856.40	448.70	203.65
M2_C6	1.8452	1845.24	436.37	167.27
M3_C1	3.4442	3444.25	2343.65	798.46
M3_C2	2.9652	2965.22	2113.75	810.42
M3_C4	1.7696	1769.63	1037.42	368.18
M3_C5	1.9022	1902.20	454.68	189.14
M3_C6	1.7858	1785.83	435.02	152.96
M4_C1	5.2732	5273.17	3930.90	1631.69
M4_C2	2.4953	2495.27	685.45	318.84

Tabla 4.3: Resultados eléctricos obtenidos para los modelos equivalentes de doble capa.

En la tablas se muestra en columnas las mediciones simuladas para cada caso y modelo diseñado. En las mediciones Wenner se mostró que los terrenos M2 y M3 son similares respecto a la resistividad aparente, pero de las tablas 4.2 y 4.3 se desprende que la geometría empleada afecta levemente a las variables eléctricas en estudio. En consecuencia, al comparar los valores reales con los obtenidos mediante modelos equivalentes, se observa un incremento notorio en la diferencia entre ambos conjuntos de resultados y en la Tabla 4.4 se tienen los resultados de mediciones en terrenos homogéneos.

ModeloID	R_g (Ω)	GPR (V)	$V_{touch,max}$ (V)	$V_{step,max}$ (V)
M1_C5*	3.0556	3055.58	1453.13	617.63
M2_C3*	3.1428	3142.85	1494.64	635.27
M3_C3*	3.1611	3161.13	1503.33	638.97

Tabla 4.4: Resultados eléctricos obtenidos para los modelos equivalentes homogéneos.

4.4. Análisis de resultados

En esta sección se presenta el análisis de los resultados previamente expuestos. El objetivo principal es comparar las magnitudes de interés desde el punto de vista de equivalencia. En primera instancia, se tabulan los errores asociados a cada variable eléctrica para todos los casos estudiados y los valores de tensión se normalizan respecto al GPR, de modo de independizar el análisis de la corriente inyectada y permitir la comparación con otros estudios y documentos técnicos. Posteriormente, con el fin de facilitar la comparación, se presentan histogramas de las tres variables eléctricas de interés.

ID	Error R_g	Error $V_{step,max}$	Error $V_{touch,max}$
	(%)	(%)	(%)
M1_C1	-2.7882	0.0452	-1.7040
M1_C2	-0.6749	-0.5851	-5.6938
M1_C3	2.7525	-23.9444	5.2239
M1_C4	2.5402	-39.4989	-25.9663
M1_C6	-0.3424	-10.9817	2.5995
M2_C1	7.9797	-28.4515	-11.8401
M2_C2	-8.2264	6.3861	5.8826
M2_C4	-40.5319	26.7773	28.8387
M2_C5	17.6363	-22.0454	-30.8652
M2_C6	0.8942	-22.6856	-11.1556
M3_C1	7.8480	-26.3944	-9.3346
M3_C2	-6.7517	1.4568	1.9529
M3_C4	-33.7082	11.0714	20.0269
M3_C5	19.3250	-37.5275	-34.8216
M3_C6	-1.1311	-28.3160	-6.4701
M4_C1	20.9190	-2.5106	-2.9300
M4_C2	8.9448	10.7261	5.5175

Tabla 4.5: Errores relativos obtenidos para las variables eléctricas de interés respecto a los modelos de referencia.

En la Tabla 4.5 se muestra los errores de las variables de interés sin contar los modelos homogéneos antes descritos, se desprende que la configuración del terreno afecta directamente a estos valores, esto se refleja directamente en los modelos M2 y M3, en mediciones Wenner no se encontraban diferencias notorias en su resistividad aparente, pero al instalar la MPT y medir parámetros de seguridad se ven reflejadas diferencias.

Para una comparación fina se presentan las siguientes figuras en donde se analiza el comportamiento del modelo equivalente de doble capa:

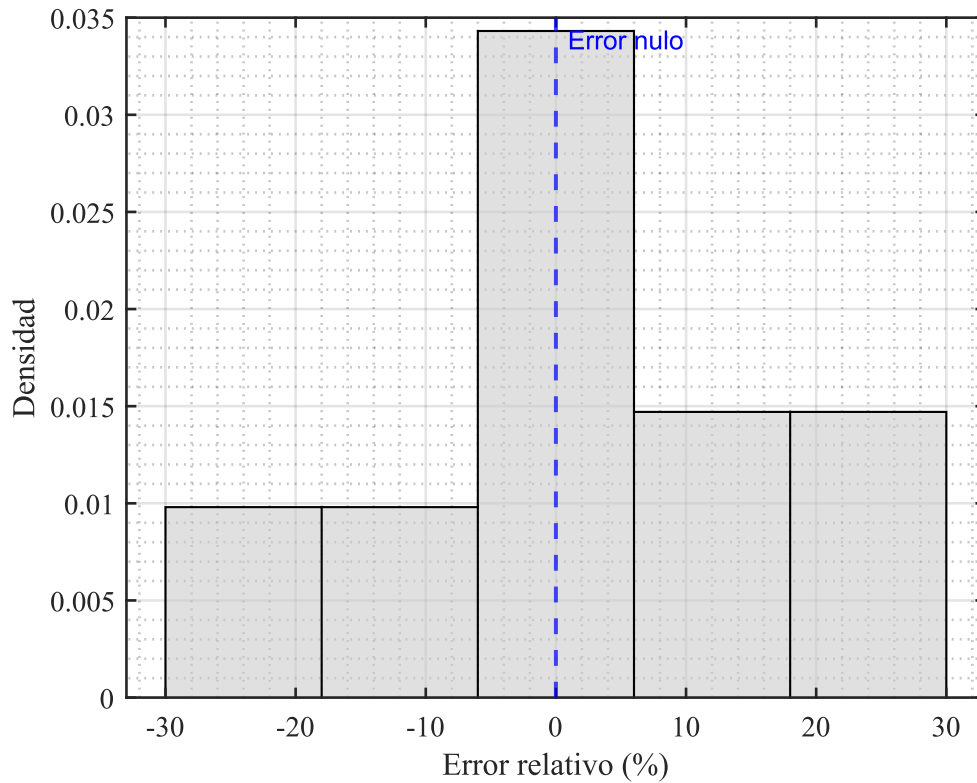


Figura 4.5: Distribución de los errores relativos de R_g al comparar los modelos reales.

En la Figura 4.5 se observa que los errores relativos obtenidos mediante simulación FEM presentan una distribución aproximadamente normal y centrada en torno al error nulo, lo que indica la ausencia de un sesgo sistemático significativo. La dispersión observada se atribuye a la sensibilidad del fenómeno frente a las propiedades del suelo y a la geometría del sistema de puesta a tierra. En términos generales, el modelo equivalente de doble capa logra reproducir con buena precisión la R_g a tierra, presentando un error medio cercano a cero. Sin embargo, la dispersión de los resultados sugiere que su aplicación debe evaluarse con cautela en configuraciones de terreno más complejas.

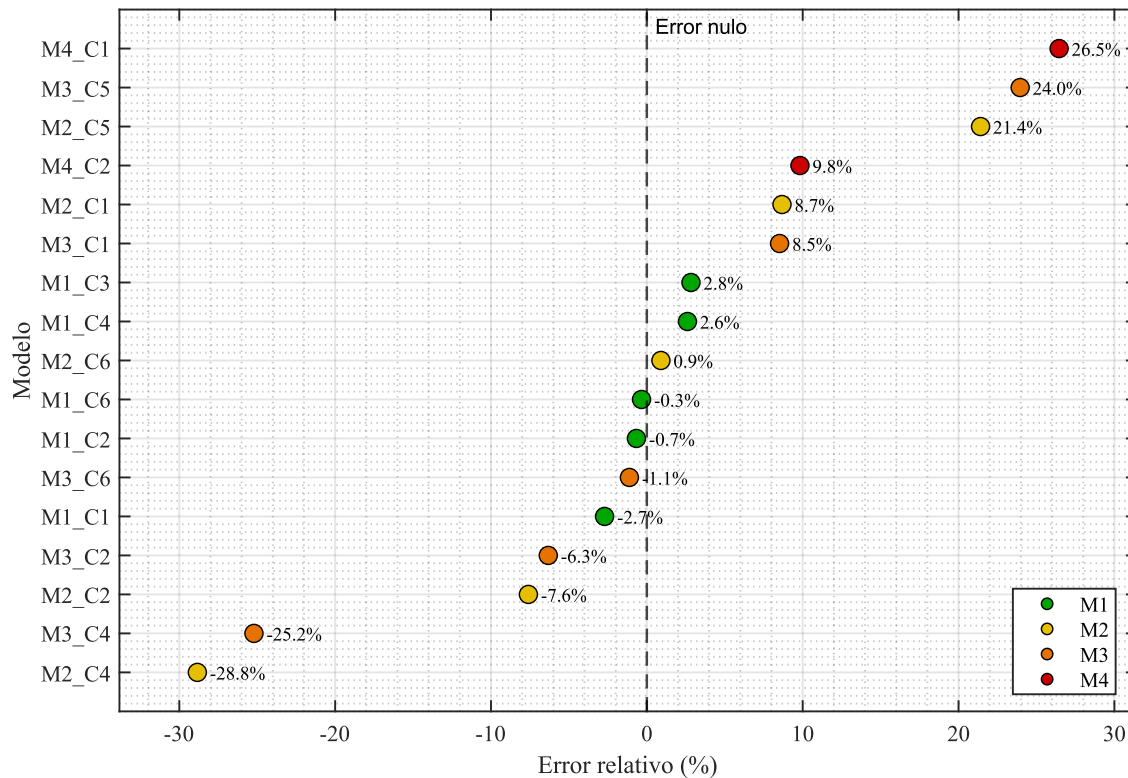


Figura 4.6: Distribución de errores relativos de R_g para los distintos modelos de terreno analizados mediante aproximación equivalente de doble capa.

Por otro lado, en la Figura 4.6 se presentan los errores relativos asociados a cada caso de estudio. Se observa que los modelos más uniformes, como M1, presentan una mejor representación mediante el modelo equivalente para R_g . No obstante, a medida que aumenta la complejidad geométrica del terreno, los errores obtenidos tienden a incrementarse, evidenciando las limitaciones del modelo equivalente frente a configuraciones más irregulares.

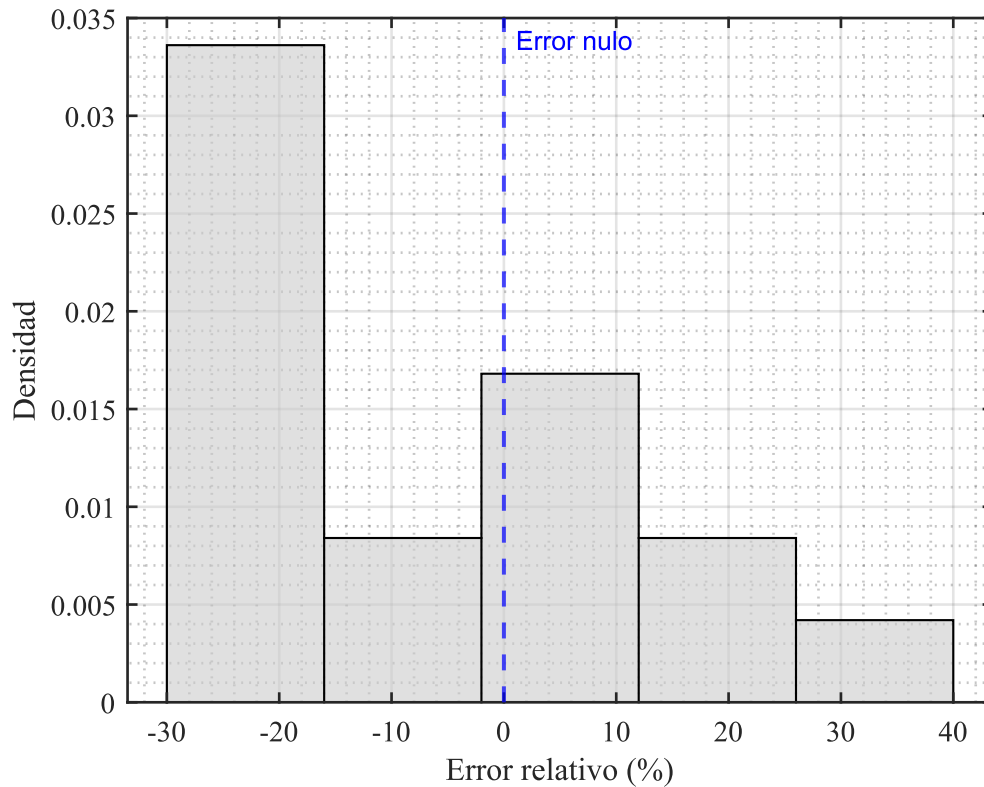


Figura 4.7: Distribución de los errores relativos de E_{step} al comparar los modelos reales.

La Figura 4.7 muestra una media de $\mu = -7,07 \%$, lo que indica que el modelo de suelo equivalente de doble capa tiende a subestimar la tensión de paso respecto a un terreno real. Esta subestimación sistemática sugiere que el uso del modelo simplificado puede conducir a valores no conservadores en el diseño de la malla de puesta a tierra, por lo que resulta necesario considerar márgenes o factores de seguridad adecuados.

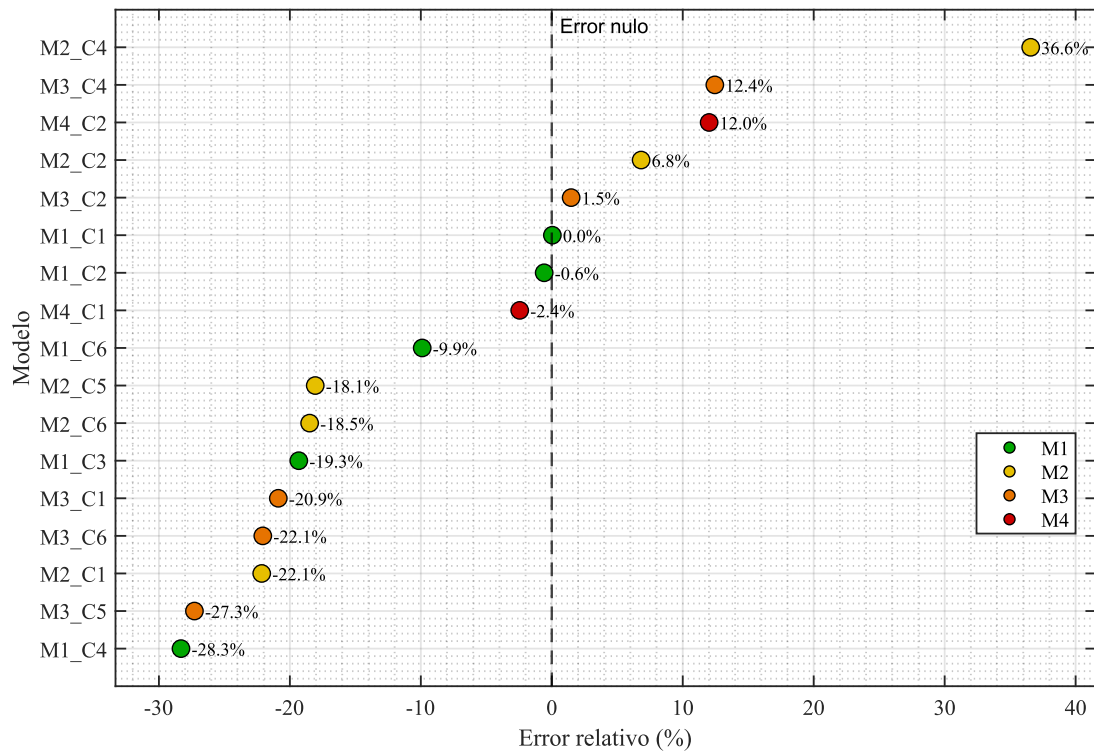


Figura 4.8: Distribución de errores relativos de E_{step} para los distintos modelos de terreno analizados mediante aproximación equivalente de doble capa.

La Figura 4.8 muestra que, independiente del caso o de la complejidad geométrica del terreno, el modelo equivalente de doble capa presenta una tendencia general a subestimar el valor de E_{step} . Sin embargo, la dispersión observada evidencia que existen casos particulares en los cuales la variable puede ser sobreestimada. Además, se aprecia que los mayores errores se presentan principalmente en configuraciones de terreno más complejas, especialmente en modelos con capas inclinadas y heterogeneidades localizadas.

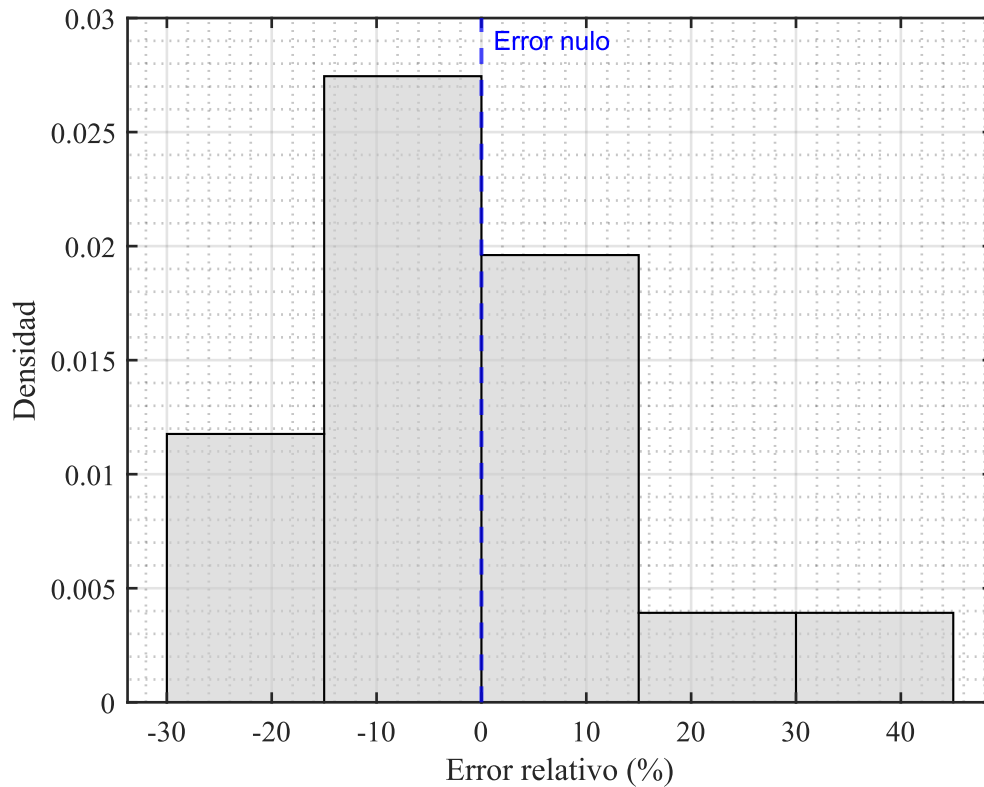


Figura 4.9: Distribución de los errores relativos de E_{touch} al comparar los modelos reales.

La distribución resultante de la tensión de paso en la Figura 4.9 representa una media de $\mu = -1.61$ % lo que indica una subestimación del modelo doble capa para la variable eléctrica. Los errores relativos obtenidos mediante simulación FEM presentan una distribución aproximadamente normal con media cercana a cero, lo que indica ausencia de sesgo sistemático relevante. La dispersión observada se atribuye a la sensibilidad del fenómeno frente a parámetros del suelo, geometría del sistema de puesta a tierra y la forma en que fue calculada.

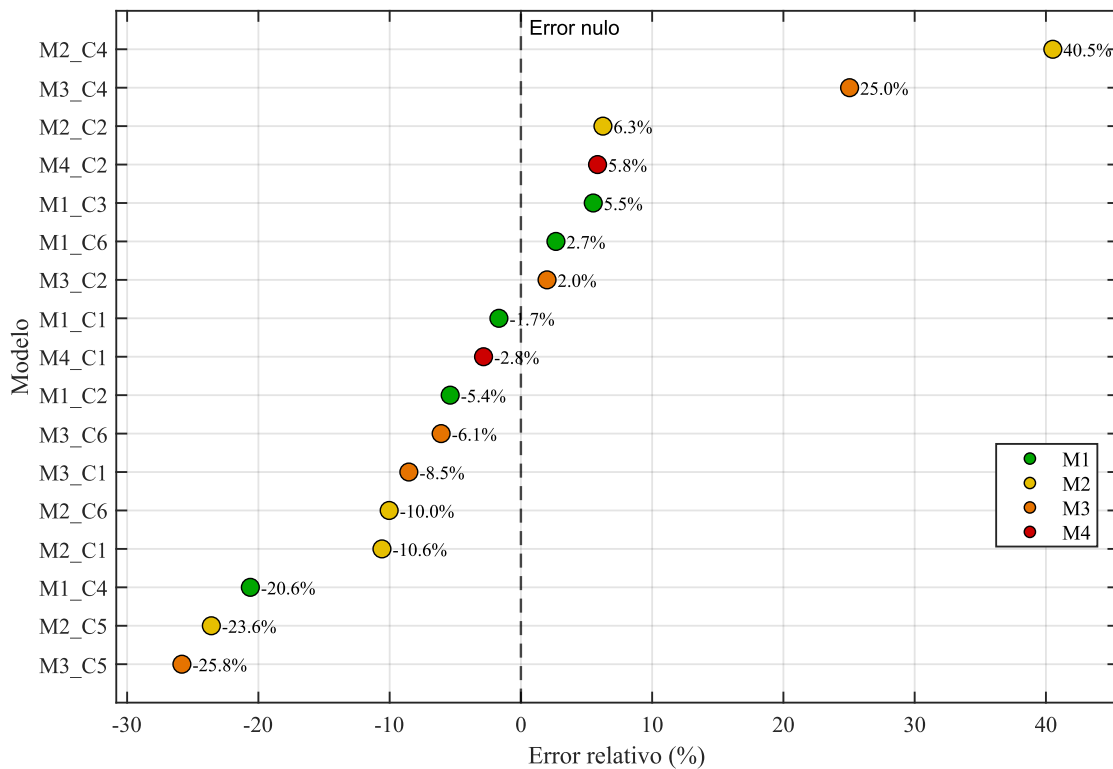


Figura 4.10: Distribución de errores relativos de E_{touch} para los distintos modelos de terreno analizados mediante aproximación equivalente de doble capa.

La Figura 4.10 muestra que, independiente del caso o de la complejidad geométrica del terreno, el modelo equivalente de doble capa presenta una tendencia general a subestimar el valor de E_{touch} . Sin embargo, la dispersión observada evidencia que existen ciertos casos particulares en los cuales la variable puede ser sobreestimada.

Además, se observa que los mayores errores relativos se presentan principalmente en configuraciones de terreno más complejas, especialmente en modelos con capas inclinadas y heterogeneidades localizadas, lo que evidencia la sensibilidad de E_{touch} frente a variaciones geométricas y eléctricas del terreno.

Variable	μ	Interpretación
R_g	≈ 0	El modelo equivalente representa adecuadamente el comportamiento global.
E_{touch}	< 0	Existe una tendencia leve a subestimar el comportamiento del terreno real.
E_{step}	$\ll 0$	Se observa una subestimación significativa respecto al terreno real.

Tabla 4.6: Interpretación general del sesgo obtenido para las variables eléctricas analizadas.

En la Tabla 4.6 se muestra una interpretación general del análisis expuesto, mientras la resistencia de puesta a tierra es poco sensible a la simplificación del suelo, las tensiones de seguridad (paso y contacto) presentan mayor dependencia de la estratificación real del terreno.

Asimismo, en el presente trabajo se han revisado las ecuaciones establecidas en la normativa IEEE

80, las cuales constituyen el marco de referencia para el diseño seguro de sistemas de puesta a tierra. No obstante, a partir de los resultados obtenidos, se observa que los modelos de suelo de doble capa implementados en distintos softwares pueden arrojar valores que difieren respecto de un terreno real homogéneo o respecto de las simplificaciones normativas.

Por lo tanto, se recomienda que, al emplear herramientas computacionales que modelen suelos estratificados, se incorpore un factor adicional de seguridad en el diseño, con el fin de compensar posibles subestimaciones y asegurar que las tensiones resultantes se mantengan dentro de límites aceptables bajo condiciones reales de operación.

Capítulo 5

Conclusiones

En este trabajo se desarrolló modelos de puesta a tierra basado en el método de elementos finitos para evaluar el comportamiento eléctrico de una malla de puesta a tierra considerando su interacción con el suelo. Se comparó el desempeño de un modelo de terreno real con su representación equivalente mediante un modelo simplificado de doble capa, con el objetivo de cuantificar el error asociado a esta aproximación en variables relevantes de diseño y seguridad.

Los resultados obtenidos muestran que la resistencia de puesta a tierra presenta una media de error cercana a cero al utilizar el modelo de doble capa, lo que indica que esta simplificación permite estimar adecuadamente el comportamiento global del sistema. No obstante, se observa una dispersión considerable en los resultados, lo que evidencia la sensibilidad del fenómeno frente a la estratificación del suelo y a las condiciones geométricas del sistema.

En contraste, las tensiones de seguridad, particularmente la tensión de contacto y la tensión de paso, presentan una subestimación sistemática al emplear el modelo de doble capa respecto al modelo de terreno real. Este efecto se atribuye a la naturaleza local de estas magnitudes, las cuales dependen fuertemente de los gradientes de potencial en el suelo y, por tanto, son más sensibles a simplificaciones en la representación de la resistividad del terreno.

El análisis estadístico de los errores muestra distribuciones aproximadamente normales, lo que confirma la consistencia del modelo numérico y permite caracterizar cuantitativamente la incertidumbre asociada al uso de modelos simplificados de suelo. En particular, se observa que la simplificación a doble capa puede conducir a resultados no conservadores en la estimación de tensiones de seguridad, lo que resalta la necesidad de considerar factores de seguridad adecuados o el uso de modelos más representativos del terreno en etapas críticas de diseño.

En términos generales, se concluye que el modelo de doble capa constituye una herramienta válida para estimaciones preliminares y análisis globales del sistema de puesta a tierra, especialmente en la determinación de la resistencia equivalente. Sin embargo, para la evaluación de tensiones de paso y contacto, parámetros directamente asociados a la seguridad de las personas, resulta recomendable emplear modelos de suelo más detallados o análisis numéricos mediante elementos finitos que permitan capturar con mayor precisión la distribución del potencial eléctrico en el terreno.

Finalmente, este trabajo demuestra la importancia de la caracterización del suelo en el diseño de sistemas de puesta a tierra y aporta una base metodológica para evaluar la validez de modelos simplificados frente a representaciones más realistas, contribuyendo a mejorar los criterios de diseño y seguridad en instalaciones eléctricas.

Referencias

- [1] J. He, R. Zeng, and B. Zhang, *Methodology and Technology for Power System Grounding*, 1st ed. Solaris South Tower, Singapore: Wiley and IEEE, 2013.
- [2] “IEEE guide for measuring earth resistivity, ground impedance, and earth surface potentials of a grounding system,” *IEEE Std 81-2012 (Revision of IEEE Std 81-1983)*, pp. 1–86, 2012.
- [3] “IEEE guide for safety in ac substation grounding,” *IEEE Std 80-2013 (Revision of IEEE Std 80-2000/ Incorporates IEEE Std 80-2013/Cor 1-2015)*, pp. 1–226, 2015.
- [4] E. D. Sunde, “Earth conduction effects in transmission system,” *Dover Publication, inc, New York*, 1968.
- [5] J.-M. Jin, *The Finite Element Method in Electromagnetics*, 3rd ed. New Jersey: Wiley, 2014.
- [6] T. BARIĆ, H. GLAVAŠ, Željko HEDERİĆ, and M. KARAKAŠIĆ, “Modelling grounding systems using the finite element method: The influence of the computational domain size on the accuracy of the numerical calculation,” *Tehnički vjesnik*, vol. 30, no. 6, 2023.
- [7] S. Nikolovski, G. Knežević, and Z. Baus, “Assessment of step and touch voltages for different multilayer soil models of complex grounding grid,” *International Journal of Electrical and Computer Engineering (IJECE)*, vol. 6, no. 4, 2016.
- [8] Sinlight Intelligent, “Varilla de tierra de acero revestido de cobre,” <https://es.sltup.com/UL-IEC-Listed-Copper-Clad-Steel-Grounding-Rod-Factory-Price-China-Manufacturer.html>, 2026, accedido: 19 de enero de 2026.
- [9] A. Ackerman, P. K. Sen, and C. Oertli, “Designing safe and reliable grounding in ac substations with poor soil resistivity: An interpretation of iee Std. 80,” *IEEE Transactions on Industry Applications*, vol. 49, no. 4, pp. 1883–1889, July 2013.
- [10] D. de Integridad del Sistema, “Estudio de diagnóstico de instalaciones comunes,” Coordinador Eléctrico Nacional, Santiago, Chile, Tech. Rep., 2019.
- [11] G. Rodrigues, Ígor M. dos Santos, M. Telló, and D. S. Gazzana, “Grounding grid resistance estimation in non homogeneous soils: A study focused on equivalent analytical models,” *IEEE Xplore*, 2021.
- [12] K. P. Sengar and K. Chandrasekaran, “A mathematical modelling of grounding system buried in multilayer soil structure,” *IEEE Xplore*, 2020.
- [13] M. V. F. da Luz and P. Dular, “Analytical and finite element modeling of grounding systems,” *IX International Symposium on Lightning Protection*, 2007.
- [14] L. Palmer, “Examples of geoelectric surveys,” *IEEE*, vol. 106, no. Part A, June 1959.

- [15] G. L, M. J, and T. A, “Desarrollo de un programa de computador para el análisis de mallas de puesta a tierra para tensiones ac y dc,” *Proyecto de Grado (Ingeniero Electricista), Universidad Nacional de Colombia*, 1999.

Anexo A

Anexos.

A.1. Mediciones Wenner de los modelos.

A.1.1. Mediciones modelo 3 capas horizontales.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	125.761	125.766	125.764
2	84.276	84.402	84.339
3	56.880	56.740	56.810
4	40.105	40.083	40.094
5	30.064	30.101	30.082
6	24.093	24.077	24.085
7	20.487	20.514	20.501
8	18.329	18.334	18.331
9	17.016	17.013	17.014
10	16.184	16.180	16.182
11	15.640	15.652	15.646
12	15.293	15.305	15.299
13	15.057	15.044	15.050
14	14.872	14.873	14.873
15	14.745	14.737	14.741

Tabla A.1: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 1 – Caso 1.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	108.505	108.538	108.521
2	52.755	52.842	52.798
3	34.020	34.050	34.035
4	31.506	31.487	31.496
5	33.366	33.380	33.373
6	36.083	36.088	36.086
7	38.699	38.703	38.701
8	41.021	41.041	41.031
9	43.089	43.084	43.086
10	44.883	44.879	44.881
11	46.425	46.469	46.447
12	47.869	47.883	47.876
13	49.139	49.120	49.130
14	50.234	50.235	50.234
15	51.238	51.229	51.233

Tabla A.2: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 1 – Caso 2.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	72.1614	72.1544	72.1579
2	82.8331	82.8867	82.8599
3	80.1087	80.0549	80.0818
4	70.0867	70.0769	70.0818
5	58.6419	58.6434	58.6426
6	48.2829	48.2825	48.2827
7	39.7622	39.7820	39.7721
8	33.1908	33.2040	33.1974
9	28.2750	28.2723	28.2737
10	24.6328	24.6257	24.6292
11	21.9520	21.9717	21.9618
12	20.0259	20.0401	20.0330
13	18.6202	18.6185	18.6193
14	17.5847	17.5954	17.5900
15	16.8330	16.8311	16.8321

Tabla A.3: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 1 – Caso 3.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	50.2632	50.2702	50.2667
2	33.7446	33.7943	33.7694
3	31.1695	31.1461	31.1578
4	34.7758	34.7649	34.7704
5	40.0797	40.0830	40.0813
6	45.5605	45.5689	45.5647
7	50.7725	50.7741	50.7733
8	55.6421	55.6453	55.6437
9	60.1598	60.1607	60.1603
10	64.3623	64.3586	64.3604
11	68.2402	68.2724	68.2563
12	71.9180	71.9276	71.9228
13	75.3434	75.3309	75.3371
14	78.5184	78.5235	78.5210
15	81.5206	81.5155	81.5181

Tabla A.4: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 1 – Caso 4.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	19.3166	19.3165	19.3165
2	31.0158	31.0258	31.0208
3	40.6443	40.6494	40.6469
4	47.7347	47.7311	47.7329
5	52.8915	52.8825	52.8870
6	56.6343	56.6412	56.6377
7	59.3403	59.3356	59.3379
8	61.3056	61.3108	61.3082
9	62.7266	62.7265	62.7265
10	63.7486	63.7450	63.7468
11	64.4590	64.4751	64.4670
12	64.9820	64.9921	64.9870
13	65.3436	65.3408	65.3422
14	65.5688	65.5803	65.5746
15	65.7267	65.7304	65.7286

Tabla A.5: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 1 – Caso 5.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	18.1896	18.1884	18.1890
2	28.0644	28.0775	28.0709
3	37.4465	37.4408	37.4437
4	45.7853	45.7794	45.7823
5	53.2503	53.2420	53.2461
6	59.9526	59.9610	59.9568
7	65.9847	65.9797	65.9822
8	71.4395	71.4409	71.4402
9	76.3835	76.3843	76.3839
10	80.8837	80.8800	80.8818
11	84.9677	84.9869	84.9773
12	88.7386	88.7493	88.7440
13	92.1940	92.1894	92.1917
14	95.3519	95.3638	95.3578
15	98.2848	98.2880	98.2864

Tabla A.6: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 1 – Caso 6.

A.1.2. Mediciones modelo capas inclinadas.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	144.2360	144.2843	144.2602
2	125.1296	125.9797	125.5546
3	100.6995	101.8727	101.2861
4	79.9758	80.6797	80.3278
5	64.4541	63.9931	64.2236

Tabla A.7: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 2 – Caso 1.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	140.4763	140.5246	140.5005
2	108.6540	110.0005	109.3273
3	75.6540	77.0049	76.3295
4	55.3432	54.8538	55.0985
5	45.7694	42.8109	44.2902

Tabla A.8: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 2 – Caso 2.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	65.2565	65.1640	65.2102
2	72.2195	71.8084	72.0139
3	77.8705	77.1166	77.4936
4	79.1255	78.6112	78.8684
5	76.3178	76.5396	76.4287

Tabla A.9: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 2 – Caso 3.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	60.5875	60.6162	60.6019
2	50.7649	51.2332	50.9991
3	41.0712	41.5778	41.3245
4	36.1963	36.1583	36.1773
5	35.3989	34.5542	34.9765

Tabla A.10: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 2 – Caso 4.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	15.0048	14.9577	14.9813
2	19.7628	19.4343	19.5986
3	26.1891	25.2982	25.7436
4	32.6697	31.0301	31.8499
5	38.7401	36.1232	37.4316

Tabla A.11: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 2 – Caso 5.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	14.7855	14.7487	14.7671
2	18.6838	18.4427	18.5633
3	24.1449	23.4935	23.8192
4	30.0062	28.8114	29.4088
5	35.9338	33.9881	34.9609

Tabla A.12: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 2 – Caso 6.

A.1.3. Mediciones modelo capas inclinadas opuestas.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	144.2471	144.3567	144.3019
2	125.1884	126.0360	125.6122
3	100.8886	102.0443	101.4665
4	80.4390	80.9233	80.6812
5	64.9441	64.2550	64.5996

Tabla A.13: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 3 – Caso 1.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	140.3844	140.5852	140.4848
2	108.6605	109.9898	109.3251
3	75.7043	77.0123	76.3583
4	55.6777	54.8664	55.2720
5	46.4518	42.8568	44.6543

Tabla A.14: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 3 – Caso 2.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	65.2760	65.1993	65.2377
2	72.3707	71.8579	72.1143
3	78.3683	77.2588	77.8136
4	80.2547	78.8403	79.5475
5	78.1012	76.8060	77.4536

Tabla A.15: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 3 – Caso 3.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	60.5875	60.6527	60.6201
2	50.7723	51.2224	50.9973
3	41.1522	41.5825	41.3674
4	36.5574	36.1882	36.3728
5	36.2279	34.6425	35.4352

Tabla A.16: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 3 – Caso 4.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	15.0074	14.9647	14.9861
2	19.7871	19.4397	19.6134
3	26.2801	25.3203	25.8002
4	32.9338	31.0765	32.0051
5	39.2909	36.2033	37.7471

Tabla A.17: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 3 – Caso 5.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	14.7822	14.7537	14.7680
2	18.6517	18.4318	18.5417
3	24.0250	23.4633	23.7441
4	29.7251	28.7388	29.2319
5	35.3453	33.8495	34.5974

Tabla A.18: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 3 – Caso 6.

A.1.4. Mediciones en modelo con roca incrustada.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	178.2849	178.1875	178.2362
2	248.2876	248.2555	248.2715
3	240.0991	240.0539	240.0765
4	172.4469	172.4974	172.4721
5	106.6810	106.6735	106.6773
6	68.5294	68.5016	68.5155
7	49.0086	48.9921	49.0004
8	39.0275	39.0259	39.0267
9	33.6180	33.6174	33.6177
10	30.3021	30.3080	30.3051
11	28.0156	28.0265	28.0211
12	26.1616	26.2286	26.1951
13	24.7350	24.7271	24.7311
14	23.3983	23.3965	23.3974
15	22.2496	22.2733	22.2614

Tabla A.19: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 4 – Caso 1.

a (m)	$\rho_{\text{eje X}}$ (Ω m)	$\rho_{\text{eje Y}}$ (Ω m)	ρ_{prom} (Ω m)
1	22.7328	22.7203	22.7266
2	35.9414	35.9405	35.9409
3	45.7542	45.7472	45.7507
4	54.2039	54.2054	54.2046
5	61.8498	61.8447	61.8473
6	68.0586	68.0543	68.0565
7	73.0621	73.0570	73.0595
8	77.1047	77.1119	77.1083
9	80.3944	80.4001	80.3972
10	83.0251	83.0234	83.0243
11	85.1874	85.1810	85.1842
12	86.9520	86.9864	86.9692
13	88.5853	88.5867	88.5860
14	90.0263	90.0235	90.0249
15	91.3668	91.3803	91.3736

Tabla A.20: Resultados de resistividad aparente para el Modelo 4 – Caso 2.

A.2. Códigos implementados en Matlab.

A.2.1. Medición resistividad aparente arreglo Wenner.

```

1 %% Control basico COMSOL desde MATLAB (LiveLink)
2 import com.comsol.model.*
3 import com.comsol.model.util.*
4
5 % Archivo y objetos
6 mph_file = '3capas_ejeX.mph'; % Traer modelo
7 model = mphload(mph_file); % carga el modelo
8 %%
9
10 % tabla de resultados y parametros
11 rho1 = 1/150.8457;
12 rho2 = 1/64.09731;
13 rho3 = 1/14.05551;
14 b=0.1; %electrodo enterrado
15 I=1; %corriente electrodos
16
17 h1 = 0.990462; %capa superior

```

```

18 h2 = 1.694774; %capa medio
19 a_vals = [1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15]; %Barrido de electrodo
20 radio_electrodo = 0.0086; %[m]
21
22
23 results = [];
24
25 %%
26
27 %setear parametros a suelo 3 capas
28 %son 6 casos rho [1 2 3;
29                 %1 3 2;
30                 %2 1 3;
31                 %2 3 1;
32                 %3 1 2 ;
33                 %3 2 1]
34 model.param.set('rho_top', sprintf('%g', rho3));
35 model.param.set('rho_mid', sprintf('%g', rho2));
36 model.param.set('rho_bot', sprintf('%g', rho1));
37
38
39 %setear mesh
40 mesh = model.mesh('mesh2'); % seleccionar mesh
41 sizeFeature = mesh.feature('size'); % la caracterastica de tamaño
42 sizeFeature.set('hauto', 6); % hauto: 6 = Coarse
43 mesh.run;
44 disp('termino de mallar')
45
46 for i = 1:length(a_vals)
47     a_val = a_vals(i);
48
49     % Cambiar el parametro 'a' en COMSOL
50     model.param.set('a', sprintf('%g[m]', a_val));
51
52     % Ejecutar el estudio
53     model.study('std1').run;
54
55     V1 = mphglobal(model, 'V1_prbe');
56     V2 = mphglobal(model, 'V2_prbe');
57     V_med = V2-V1;
58     rho = abs(2*pi*a_val*V_med/I);
59     % Mostrar en consola
60     fprintf('a = %.3f m -> V1 = %.4f V, V2 = %.4f V, V_med = %.4f V,
61     rho = %.4f ohm·m\n', a_val, V1, V2, V_med, rho);
62     results = [results; a_val, rho];
63     fprintf('Simulación con a = %.3f completada.\n', a_val);

```

```

63
64 end
65
66 %%
67 %resultados a tablas
68 rho_table = array2table(results, 'VariableNames', {'a','rho_ohm_m'});
69
70 writetable(rho_table, 'resultados_Modelo1_caso6_ejeX.txt')
71
72 %%
73 %Promedio mediciones
74
75
76 tablaX = readtable('resultados_Modelo1_Caso6_ejeX.txt');
77 rhoX = tablaX.rho_ohm_m;
78 a = tablaX.a;
79
80 tablaY = readtable('resultados_Modelo1_Caso6_ejeY.txt');
81 rhoY = tablaY.rho_ohm_m;
82 rho_prom = (rhoX + rhoY)./2;
83 Promedio = [a,rho_prom];
84 rho_table_prom = array2table(Promedio, 'VariableNames', {'a','rho_promedio'});
85 writetable(rho_table_prom, 'resultados_Modelo1_caso6_Promedio.txt')

```

A.2.2. Cálculo de modelo equivalente doble capa.

```

1 clc
2 clear
3 %close all
4 fclose all;
5 posMat=[1.3475e+03 1.0363e+03 763.8621 1.0601e+03];
6 SAVE_PDFS=true;
7 CLOSE_FIGS=true;
8 COLORS=[
9         255  51  51
10        51  51 255
11         0 153  0
12         0 204 204
13        153  0  0
14         0  0 153
15        153  0 153
16        255  51 255
17         0 153 153
18        51 255 255

```

```

19         0 102 102]/255;
20 N=2000;
21
22 %% Reading parameters ...
23 data = jsondecode(fileread("resultados.json"));
24 id = find(strcmp({data.id}, "M1_C1"));
25
26
27 a=data(id).a;
28 rhoa=data(id).rho;
29 M=length(rhoa);
30
31 %% Solve model ...
32 K=2; % 1-3
33 x0=initSol(a,rhoa,K);
34 %x0=x3L;
35 options=optimoptions('lsqnonlin','Display','iter','OptimalityTolerance',
    ,1e-16);
36 x=lsqnonlin(@(x) funKL(x,a,rhoa,K),x0,[],[],options);
37 %x=x3L';
38 rho=x(1:K);
39 h=x(K+1:2*K-1);
40 rms2=sqrt(mean(funKL(x,a,rhoa,K).^2));
41 fprintf('Modelo de %d capas\n',K);
42 for i=1:K
43     fprintf(' rho%d .... %.6f Ohm.m\n',i,rho(i));
44 end
45 for i=1:K-1
46     fprintf(' h%d ..... %.6f m\n',i,h(i));
47 end
48 fprintf(' rmse .... %.6f\n',rms2);
49 aest=linspace(1E-6,max(a),50);
50 rhoaest=rho(1)*rhoAnalytic(rho,h,aest);
51 plot(a,rhoa,'kv',aest,rhoaest,'b');
52 grid
53
54
55 fprintf('\n');
56
57 %%
58 %idb = "M4_C2";
59 %rhob = rho;
60 %hb = h;
61 %rmseb = rms2;
62
63 %guardar_modelo(idb, rhob, hb, rmseb, "modelos.json");

```

```

64
65 %%
66 function x=initSol(a,rhoa,K)
67 rho=zeros(K,1);
68 h=zeros(K-1,1);
69 rho(1)=rhoa(1);
70 h(1)=a(1);
71 if rhoa(end)<rhoa(end-1)
72     rho(end)=rhoa(end)/2;
73 else
74     rho(end)=2*rhoa(end);
75 end
76 idxs=round(linspace(1,length(rhoa),K));
77 w(1)=a(1);
78 for i=2:K-1
79     rho(i)=rhoa(idxs(i));
80     w(i)=a(i);
81     h(i)=(w(i)-w(i-1))/(K-2);
82 end
83 x=[rho; h];
84 end
85
86 %%
87 function f=funKL(x,a,rhoa,K)
88 rho=x(1:K);
89 h=x(K+1:2*K-1);
90 rhoaest=rho(1)*rhoAnalytic(rho,h,a);
91 %f=1-rhoaest./rhoa*100;
92 f=rhoa-rhoaest;
93 end
94
95 %%
96 function rhopu=rhoAnalytic(rho,h,a)
97 M=length(a);
98 rhopu=zeros(M,1);
99 for i=1:M
100     f=@(x) fAnalytic(rho,h,x).*(besselj(0,x*a(i))-besselj(0,2*x*a(i)));
101     rhopu(i)=1+2*a(i)*integral(f,0,Inf,'AbsTol',1e-9,'RelTol',1e-9);
102 end
103 end
104
105 %%
106 function f=fAnalytic(rho,h,lambda)
107 N=length(rho);
108 alpha=1+0*lambda;
109 for i=N-1:-1:1

```

```

110     K=(alpha*rho(i+1)-rho(i))./(alpha*rho(i+1)+rho(i));
111     alpha=1+2*K.*exp(-2*lambda*h(i))./(1-K.*exp(-2*lambda*h(i)));
112 end
113 f=alpha-1;
114 end

```

A.2.3. Extracción de variables a estudio.

```

1      %%
2  %extraer tensiones V es potencial en todo el espacio, Vc = GPR
3  [V,Vc] = Mod_roca_real;
4  Modelo_ID= 'M4_C2_real'; %ID del modelo
5  I_inyectada = 1000; %A
6
7  GPR = abs(Vc);
8  Rg = GPR/I_inyectada;
9
10     %%
11  %extraer datos donde Z=0
12  Z = V.p(3,:); % coordenada Z
13  tol = 1e-6; % tolerancia numérica
14
15  idx = (abs(Z) < tol); % índice de puntos en Z=0
16
17  %encontrar pares X,Y donde Z=0
18  Xsurf = V.p(1, idx);
19  Ysurf = V.p(2, idx);
20
21  plot(Xsurf,Ysurf, '.') % revision de puntos
22  Vsurf = abs(V.dl(idx));
23
24     %%
25  [Xg, Yg] = meshgrid(-15:0.05:15 , -15:0.05:15); %crear un mesh donde
    se visualizar los datos
26
27  Vgrid = griddata(Xsurf, Ysurf, Vsurf, Xg, Yg);
28  mesh(Xg,Yg,Vgrid)
29
30
31     %% step
32
33  stepsize = 1.0; % 1 metro
34  dtol = 0.05; % tolerancia espacial (5 cm, ajustable)
35
36  N = length(Vsurf);

```

```

37 Vstep_max2 = 0;
38
39 for i = 1:N
40
41     xi = Xsurf(i);
42     yi = Ysurf(i);
43     Vi = Vsurf(i);
44
45     % Distancia a todos los demas puntos
46     dist = sqrt( (Xsurf - xi).^2 + (Ysurf - yi).^2 );
47
48     % Buscar puntos a ~1 m
49     idx1m = abs(dist - stepsize) < dtol;
50
51     if any(idx1m)
52         dV = abs(Vi - Vsurf(idx1m));
53         Vstep_local = max(dV);
54
55         % Máximo global
56         if Vstep_local > Vstep_max2
57             Vstep_max2 = Vstep_local;
58         end
59     end
60 end
61
62 fprintf('Tensión de paso máxima = %.2f V\n', Vstep_max2);
63
64 %% Tension de contacto
65
66 GPR_map = GPR*ones(size(Vgrid)) ;
67
68 V_touch = (GPR_map-Vgrid);
69 %% tension de contacto
70 % Límites de malla + 1m fuera
71 xmin = -6;
72 xmax = 6;
73 ymin = -6;
74 ymax = 6;
75
76 % Crear máscara lógica para obtener tensiones solo en la malla
77 mask = (Xg >= xmin & Xg <= xmax & Yg >= ymin & Yg <= ymax);
78 V_touch_acotado = V_touch(mask);
79 Vtouch_max = max(V_touch_acotado);
80
81
82 %%

```

```

83 % Guardar resultados en txt
84 %
85 archivo_txt = 'Resultados_PuestaTierra_real.txt';
86
87 if ~isfile(archivo_txt)
88     fid = fopen(archivo_txt,'w');
89     fprintf(fid,'ModeloID\tRg_ohm\tGPR_V\tVtouch_max_V\tVstep_max_V\n')
90     ;
91     fclose(fid);
92 end
93
94 fid = fopen(archivo_txt,'a');
95
96 fprintf(fid,' %s\t%.4f\t%.2f\t%.2f\t%.2f\n', ...
97     Modelo_ID, Rg, GPR, Vtouch_max, Vstep_max2);
98
99 fclose(fid);

```

A.2.4. Cálculos estadísticos para análisis.

```

1      %%
2 clear; clc
3
4 %% iniciar datos
5
6 Datos_real = readtable('Resultados_PuestaTierra_2cap.txt');
7 Datos_2cap = readtable('Resultados_PuestaTierra_real.txt');
8 %Resistencias de malla
9 Rg_real = Datos_real.Rg_ohm; %datos reales
10 Rg_eq = Datos_2cap.Rg_ohm; %datos equivalentes de modelo doble capa
11
12 %GPR
13 GPR_real = Datos_real.GPR_V;
14 GPR_eq = Datos_2cap.GPR_V;
15
16 %Tensionde paso Estep
17 Es_real = Datos_real.Vstep_max_V./GPR_real*100;
18 Es_eq = Datos_2cap.Vstep_max_V./GPR_eq*100;
19 %Tension de contacto Et
20 Et_real = Datos_real.Vtouch_max_V./GPR_real*100;
21 Et_eq = Datos_2cap.Vtouch_max_V./GPR_eq*100;
22
23 %% Error relativo Rg
24 Err = -(Rg_real - Rg_eq)./Rg_real*100;
25 mu_err = mean(Err);

```

```

26 sigma_err = std(Err);
27
28 %% Error relativo Estep
29 Err_step = -(Es_real - Es_eq)./Es_real*100);
30 mu_err_step = mean(Err_step);
31 sigma_err_step = std(Err_step);
32
33 %% Error relativo Etouch
34 Err_touch = -(Et_real - Et_eq)./Et_real*100;
35
36
37 %% Distribución Error Rg
38 X_values = linspace(-100, 100, 100);
39
40 pd = fitdist(Err,'Normal');
41
42 y = pdf(pd,X_values);
43 figure;
44 histogram(Err, 'Normalization', 'pdf','FaceColor',[0.8 0.8 0.8]);
45 hold on
46 plot(X_values, y, 'LineWidth', 2,'Color','K');
47 xline(0, '--b', 'Error Nulo', 'LineWidth', 1.5);
48 grid on
49
50 title(['Distribución Normal de Rg (\mu = ', num2str(pd.mu), ', \sigma = ',
    ' ', num2str(pd.sigma), ')']);
51 xlabel('Error relativo');
52 ylabel('Densidad');
53 legend('Histograma Real', 'Ajuste Normal', 'Referencia 0');
54 %% Distribución normal Estep
55
56 X_values_step = linspace(-100, 100, 100);
57
58 pd_step = fitdist(Err_step,'Normal');
59
60 y_step = pdf(pd_step,X_values_step);
61 figure;
62 histogram(Err_step, 'Normalization', 'pdf','FaceColor',[0.8 0.8 0.8]);
63 hold on
64 plot(X_values_step, y_step, 'LineWidth', 2,'Color','K');
65 xline(0, '--b', 'Error Nulo', 'LineWidth', 1.5);
66 grid on
67
68 title(['Distribución Normal de E_{step} (\mu = ', num2str(pd_step.mu),
    ' ', \sigma = ', num2str(pd_step.sigma), ')']);
69 xlabel('Error relativo');

```

```

70 ylabel('Densidad');
71 legend('Histograma Real', 'Ajuste Normal', 'Referencia 0');
72 %% Distribución normal Etouch
73
74 X_values_touch = linspace(-100, 100, 100);
75
76 pd_touch = fitdist(Err_touch,'Normal');
77
78 y_touch = pdf(pd_touch,X_values_touch);
79 figure;
80 histogram(Err_touch, 'Normalization', 'pdf','FaceColor',[0.8 0.8 0.8]);
81 hold on
82 plot(X_values_touch, y_touch, 'LineWidth', 2,'Color','K');
83 xline(0, '--b', 'Error Nulo', 'LineWidth', 1.5);
84 grid on
85
86 title(['Distribución Normal de E_{touch} (\mu = ', num2str(pd_touch.mu)
      , ', \sigma = ', num2str(pd_touch.sigma), ')']);
87 xlabel('Error relativo');
88 ylabel('Densidad');
89 legend('Histograma Real', 'Ajuste Normal', 'Referencia 0');

```

A.2.5. Creación de gráficos distribución de errores por casos.

```

1      %% =====
2  % Fuente estilo LaTeX
3  % =====
4
5  set(groot,'defaultAxesFontName','Times New Roman');
6  set(groot,'defaultTextFontName','Times New Roman');
7
8  %% =====
9  % Cargar datos
10 % =====
11
12 Datos_eq = readtable('Resultados_PuestaTierra_2cap.txt');
13 Datos_real = readtable('Resultados_PuestaTierra_real.txt');
14
15 IDs = string(Datos_eq.ModeloID);
16
17 %% =====
18 % Variables
19 % =====
20
21 Rg_real = Datos_real.Rg_ohm;

```

```

22 Rg_eq    = Datos_eq.Rg_ohm;
23
24 %% =====
25 % Error relativo
26 % =====
27
28 Err_Rg = (Rg_eq - Rg_real) ./ Rg_real * 100;
29
30 %% =====
31 % Ordenar errores
32 % =====
33
34 [Err_sorted, idx] = sort(Err_Rg);
35 IDs_sorted = IDs(idx);
36
37 %% =====
38 % Colores por modelo
39 % =====
40
41 colors = zeros(length(IDs_sorted),3);
42
43 for i = 1:length(IDs_sorted)
44
45     id = IDs_sorted(i);
46
47     if startsWith(id,"M1")
48         colors(i,:) = [0 0.65 0];           % Verde
49
50     elseif startsWith(id,"M2")
51         colors(i,:) = [0.9 0.75 0];         % Amarillo
52
53     elseif startsWith(id,"M3")
54         colors(i,:) = [0.9 0.45 0];         % Naranja
55
56     elseif startsWith(id,"M4")
57         colors(i,:) = [0.8 0 0];           % Rojo
58     end
59 end
60
61 %% =====
62 % Figura
63 % =====
64
65 figure('Position',[100 100 950 600]);
66
67 hold on;

```

```

68 grid on;
69 grid minor;
70 box on;
71
72 %% =====
73 % Línea referencia
74 % =====
75
76 xline(0,...
77     '--k',...
78     'Error nulo',...
79     'LineWidth',1.3,...
80     'LabelOrientation','horizontal',...
81     'FontSize',11);
82
83 %% =====
84 % Scatter coloreado
85 % =====
86
87 for i = 1:length(Err_sorted)
88
89     scatter(Err_sorted(i),...
90         i,...
91         90,...
92         'filled',...
93         'MarkerFaceColor',colors(i,:),...
94         'MarkerEdgeColor','black');
95
96 end
97
98 %% =====
99 % Etiquetas ejes
100 % =====
101
102 yticks(1:length(IDs_sorted));
103 yticklabels(IDs_sorted);
104
105 xlabel('Error relativo (%)',...
106     'FontSize',13);
107
108 ylabel('Modelo',...
109     'FontSize',13);
110
111 %% =====
112 % Configuración gráfica
113 % =====

```

```

114
115 set (gcf, 'color', 'w');
116 set (gca, 'color', 'w');
117
118 set (gca, ...
119     'FontSize', 12, ...
120     'GridAlpha', 0.12, ...
121     'LineWidth', 1);
122
123 xlim ([min(Err_sorted)-5 max(Err_sorted)+5]);
124
125 %% =====
126 % Ajuste margen
127 % =====
128
129 ax = gca;
130 ax.Position = [0.18 0.12 0.75 0.82];
131
132 %% =====
133 % Mostrar valores
134 % =====
135
136 for i = 1:length(Err_sorted)
137
138     text(Err_sorted(i)+0.8, ...
139         i, ...
140         sprintf(' %.1f%%', Err_sorted(i)), ...
141         'FontSize', 10);
142
143 end
144
145 %% =====
146 % Leyenda
147 % =====
148
149 h1 = scatter(nan,nan,90,'filled',...
150     'MarkerFaceColor',[0 0.65 0],...
151     'MarkerEdgeColor','black');
152
153 h2 = scatter(nan,nan,90,'filled',...
154     'MarkerFaceColor',[0.9 0.75 0],...
155     'MarkerEdgeColor','black');
156
157 h3 = scatter(nan,nan,90,'filled',...
158     'MarkerFaceColor',[0.9 0.45 0],...
159     'MarkerEdgeColor','black');

```

```
160
161 h4 = scatter(nan,nan,90,'filled',...
162             'MarkerFaceColor',[0.8 0 0],...
163             'MarkerEdgeColor','black');
164
165 legend([h1 h2 h3 h4],...
166        {'M1','M2','M3','M4'},...
167        'Location','best',...
168        'FontSize',11);
```