UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS

OPTIMIZACIÓN DE CARTERAS DE INVERSIÓN MEDIANTE EL MODELO DE BLACK-LITTERMAN Y CVAR COMO MEDIDA DE RIESGO

MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

AUTOR
RENÉ OMAR MUÑOZ VALENZUELA

PROFESOR GUÍA
WERNER KRISTJANPOLLER

VALPARAÍSO, NOVIEMBRE 2018.

RESUMEN

El presente trabajo busca ser una ayuda al proceso de toma de decisiones relacionadas a con la labor difícil y compleja labor de invertir en un portafolio de acciones, dado que el retorno sobre esta inversión está altamente correlacionado con el nivel de riesgo el cual se está dispuesto a aceptar.

El principal propósito de este trabajo es presentar a quienes necesitan llevar una constante gestión o administración del riesgo de sus inversiones (personas individuales o instituciones financieras) una metodología práctica que permita minimizar los niveles riesgo, mediante la determinación del Condicional Value at Risk como medida coherente de riesgo, para un portafolio de acciones definido mediante el modelo de Black-Litterman. Dentro de sus objetivos específicos cuenta: la creación de un portafolio de acciones utilizando el modelo de Black-Litterman y evaluar las ventajas de uso del Condicional Value at Risk (CVaR) como medida de riesgo, además de analizar su comportamiento mediante la variación en niveles de confianza.

Para el logro de los objetivos se realizó una comparación del método tradicional de Markowitz con el modelo de Black-Litterman y mediante una programación desarrollada en Matlab se obtuvo resultados sobre los retornos de los portafolios de que maximizan retorno, maximizan Índice de Sharpe, minimizan varianza y Black Litterman. Para esto se tomó un portafolio de 25 acciones seleccionadas del IPSA en un periodo comprendido entre el 1º de julio del 2010 al 31 de julio del 2018. Además, se consideró como caso base un portafolio que consideraba la opción de comprar y mantener en el tiempo, no siendo factible la venta en corto en este portafolio. Otro aspecto importante desarrollado fue la obtención de índices de riesgo: VaR, CVaR e Índice de Sharpe, evaluándose su comportamiento con distintos niveles de confianza.

Dentro de los resultados obtenidos destaca que los mayores retornos a lo largo del periodo de estudio se generaron en el portafolio de mínima varianza, aunque si comparamos el portafolio de Black Litterman con el caso base de comprar y mantener, también arrojó mejores retornos históricos. Además, relación a los índices de riesgo se pudo observar la relativa estabilidad al variar los niveles de confianza en la mayoría de los casos, sin embargo, en el portafolio de máximo retorno hubo grandes variaciones de VaR y CVaR con 99% de confianza.

Dentro de las conclusiones se puede señalar que el modelo de Black-Litterman es un instrumento de construcción de portafolios muy útil en la actualidad y que presenta variados beneficios en comparación al modelo tradicional de Markowitz, siendo más consistente en el proceso de asignación de activos.

Keywords: Black-Litterman, Markowitz, portafolio, valor en riesgo, valor en riesgo condicional.

ÍNDICE

1. PROBLEMÁTICA 1
2. OBJETIVOS 5
2.1. Objetivo General 5
2.2. Objetivos Específicos 5
3. MARCO TEÓRICO 6
3.1. Asignación de Activos en el proceso de Inversión. 6
3.2 Introducción Teórica al Modelo de Markowitz sobre Asignación de Activos en Carteras de Inversión 11
3.2.1 Supuestos de la Teoría de Markowitz. 14
3.3 Introducción Teórica al Modelo de Black-Litterman para la Asignación de Activos. 16
3.3.1 Descripción del modelo de selección de portafolios de acuerdo con la propuesta de Black-Litterman. 18
3.3.2 Revisión del análisis bayesiano. 25
3.3.3 Supuestos del Modelo de Black-Litterman 28
3.3.4 Ventajas del modelo Black-Litterman 29
3.4 Riesgo 30
3.5 Medidas de Riesgo 32
3.5.1 Conditional Value at Risk (CVaR) 36
4. METODOLOGÍA 40
4.1 Implementación del modelo de Markowitz 42
4.2 Implementación del modelo de Black-Litterman 46
4.3 Análisis de las View: 47
5. RESULTADOS 53
6. DISCUSIONES 88
6. CONCLUSIONES 95
BIBLIOGRAFÍA 98
ANEXOS 103

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1. Frontera eficiente de Markowitz..... 13

Figura 2. Metodología de Black-Litterman. Fuente: Idzorek (2004) 23

Figura 3. Visualización en Solver para la solución del portafolio óptimo. 43

Figura 4. Visualización de portafolio de Markowitz que maximiza Retorno..... 44

Figura 5. Visualización de portafolio de Markowitz que maximiza Índice de Sharpe..... 44

Figura 6. Visualización de portafolio de Markowitz que minimiza Varianza. 45

Figura 7. Visualización de los parámetros utilizados en el modelo de Black-Litterman. 48

Figura 8. Visualización de portafolio de Black-Litterman..... 49

Figura 9. Visualización del cálculo del VaR..... 50

Figura 10. Visualización del cálculo del CVaR..... 51

Figura 11. Visualización del cálculo del Índice de Sharpe. 52

Figura 12. Frontera Eficiente de Markowitz..... 53

Figura 13. Retorno acumulado histórico portafolio con 252 días de entrenamiento y 252 días de trading. 56

Figura 14. Retorno acumulado histórico portafolio con 252 días de entrenamiento y 126 días de trading. 57

Figura 15. Retorno acumulado histórico portafolio con 252 días de entrenamiento y 63 días de trading. 58

Figura 16. Retorno acumulado histórico portafolio con 252 días de entrenamiento y 21 días de trading. 59

Figura 17. Retorno acumulado histórico portafolio con 126 días de entrenamiento y 252 días de trading. 60

Figura 18. Retorno acumulado histórico portafolio con 126 días de entrenamiento y 126 días de trading. 61

Figura 19. Retorno acumulado histórico portafolio con 126 días de entrenamiento y 63 días de trading. 62

Figura 20. Retorno acumulado histórico portafolio con 126 días de entrenamiento y 21 días de trading. 63

Figura 21. Retorno acumulado histórico portafolio con 63 días de entrenamiento y 252 días de trading. 64
Figura 22. Retorno acumulado histórico portafolio con 63 días de entrenamiento y 126 días de trading. 65
Figura 23. Retorno acumulado histórico portafolio con 63 días de entrenamiento y 63 días de trading. 66
Figura 24. Retorno acumulado histórico portafolio con 63 días de entrenamiento y 21 días de trading. 67
Figura 25. Retorno acumulado histórico portafolio con 21 días de entrenamiento y 252 días de trading. 68
Figura 26. Retorno acumulado histórico portafolio con 21 días de entrenamiento y 126 días de trading. 69
Figura 27. Retorno acumulado histórico portafolio con 21 días de entrenamiento y 63 días de trading. 70
Figura 28. Retorno acumulado histórico portafolio con 21 días de entrenamiento y 21 días de trading. 71
Figura 29. Evolución de pesos del portafolio de Black Litterman (E=252/T=252) 72
Figura 30. Evolución de pesos del portafolio de Black Litterman (E=126/T=252) 73
Figura 31. Evolución de pesos del portafolio de Black Litterman (E=63/T=252) 73
Figura 32. Evolución de pesos del portafolio de Black Litterman (E=21/T=252) 74
Figura 33. Evolución de pesos del portafolio de Máximo Retorno (E=63/T=252) 74
Figura 34. Evolución de pesos del portafolio de Máximo Retorno (E=63/T=126) 75
Figura 35. Evolución de pesos del portafolio de Máximo Retorno (E=63/T=63) 75
Figura 36. Evolución de pesos del portafolio de Máximo Retorno (E=63/T=21) 76
Figura 37. Evolución de pesos del portafolio de Máximo I. Sharpe (E=126/T=252) 76
Figura 38. Evolución de pesos del portafolio de Máximo I. Sharpe (E=126/T=126) 77
Figura 39. Evolución de pesos del portafolio de Máximo I. Sharpe (E=126/T=63) 77
Figura 40. Evolución de pesos del portafolio de Máximo I. Sharpe (E=126/T=21) 78
Figura 41. Evolución de pesos del portafolio de Mínima Varianza (E=21/T=252) 78
Figura 42. Evolución de pesos del portafolio de Mínima Varianza (E=21/T=126) 79
Figura 43. Evolución de pesos del portafolio de Mínima Varianza (E=21/T=63) 79
Figura 44. Evolución de pesos del portafolio de Mínima Varianza (E=21/T=21) 80

Figura 45. Comportamiento del VaR para cada portafolio y nivel de confianza. 82
Figura 46. Comportamiento del CVaR para cada portafolio y nivel de confianza. 82
Figura 47. Comportamiento del I. Sharpe para cada portafolio y nivel de confianza..... 83
Figura 48. Comportamiento del VaR para cada portafolio y nivel de confianza. 83
Figura 49. Comportamiento del CVaR para cada portafolio y nivel de confianza. 84
Figura 50. Comportamiento del I. Sharpe para cada portafolio y nivel de confianza..... 84
Figura 51. Comportamiento del VaR para cada portafolio y nivel de confianza. 85
Figura 52. Comportamiento del CVaR para cada portafolio y nivel de confianza. 85
Figura 53. Comportamiento del I. Sharpe para cada portafolio y nivel de confianza..... 86
Figura 54. Comportamiento del VaR para cada portafolio y nivel de confianza. 86
Figura 55. Comportamiento del CVaR para cada portafolio y nivel de confianza. 87
Figura 56. Comportamiento del I. Sharpe para cada portafolio y nivel de confianza..... 87

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1. Estadística descriptiva. Julio 2010 - Julio 2018 41
Tabla 2. Activos analizados para la implementación del modelo 46
Tabla 3. Riesgo, rentabilidad e índices de Sharpe de los portafolios 54
Tabla 4. Portafolio de Mínima Varianza 55
Tabla 5. Portafolio de Máximo Sharpe..... 55
Tabla 6. Portafolio de Máximo Retorno..... 55
Tabla 7. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 252 días de entrenamiento y 252 días de trading. 56
Tabla 8. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 252 días de entrenamiento y 126 días de trading. 57
Tabla 9. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 252 días de entrenamiento y 63 días de trading. 58
Tabla 10. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 252 días de entrenamiento y 21 días de trading. 59
Tabla 11. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 126 días de entrenamiento y 252 días de trading. 60
Tabla 12. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 126 días de entrenamiento y 126 días de trading. 61
Tabla 13. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 126 días de entrenamiento y 63 días de trading. 62
Tabla 14. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 126 días de entrenamiento y 21 días de trading. 63
Tabla 15. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 63 días de entrenamiento y 252 días de trading. 64
Tabla 16. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 63 días de entrenamiento y 126 días de trading. 65
Tabla 17. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 63 días de entrenamiento y 63 días de trading. 66
Tabla 18. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 63 días de entrenamiento y 21 días de trading. 67

Tabla 19. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 21 días de entrenamiento y 252 días de trading. 68

Tabla 20. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 21 días de entrenamiento y 126 días de trading. 69

Tabla 21. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 21 días de entrenamiento y 63 días de trading. 70

Tabla 22. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 21 días de entrenamiento y 21 días de trading. 71

Tabla 23. Portafolio constante en el tiempo para distintos niveles de confianza. 81

1. PROBLEMÁTICA

El mercado accionario es riesgoso porque hay un abanico de resultados posibles, cuya medida común es la desviación estándar o varianza. El riesgo de cualquier acción se divide en dos partes: la primera es el riesgo único, que es propio de cada acción, y la segunda es el riesgo del mercado, que está asociado con las variaciones del conjunto del mercado. (Brealey, Allen y Myers, 2010)

No existe una definición universalmente aceptada de riesgo. Una forma de pensar en el riesgo de los rendimientos de las acciones comunes es en términos del grado de dispersión. La dispersión, o diseminación, de una distribución es la medida de cuánto puede desviarse un rendimiento específico del rendimiento promedio. Si la distribución es muy dispersa, los rendimientos que se obtengan serán muy inciertos. En contraste, se dice que una distribución es concentrada cuando todos sus rendimientos se agrupan en un intervalo de algunos puntos porcentuales y los rendimientos son menos inciertos. (Stephen & Westerfield, 2012)

El proceso de realizar inversión en acciones es una labor difícil y compleja dado que el retorno sobre la inversión está altamente correlacionado con el nivel de riesgo el cual se está dispuesto a aceptar. En este proceso de toma de decisión por parte del inversionista, es necesario evaluar si las decisiones tomadas en el manejo de los recursos financieros son las más indicadas. Toda decisión económica implica la asignación de recursos, los cuales resultan ser escasos ante la inmensa cantidad de necesidades que se presentan, de manera

que la utilidad o nivel de satisfacción obtenida sea máxima. En tal sentido, la optimización de portafolios puede entenderse como la asignación eficiente del riesgo ante alternativas de inversión diversas en busca de obtener la máxima utilidad posible.

La gestión de portafolios de inversión es un proceso que implica un conjunto integrado de pasos o actividades que se realizan de una manera lógica y consistente para crear y mantener combinaciones apropiadas de activos.(Trujillo Segura, 2009)

En el contexto de las finanzas, cuando hablamos de riesgo, nos estamos refiriendo a la posibilidad de pérdida o ganancia, debido a los cambios sobre los factores que afectan el valor de un activo. Por esa razón, es importante que se identifiquen, se midan, se controlen, y se haga una monitorización de los diversos tipos de riesgo a los que están expuestos los inversores en los mercados de capitales.(Franco A. & Franco C., 2005)

En la toma de decisiones sobre inversiones cada vez existen más alternativas con niveles de rentabilidad más competitivas y acompañadas con un mayor riesgo. La diversificación en las inversiones facilita un manejo prudente frente al riesgo de la variabilidad en el retorno de la rentabilidad. (Cruz, Restrepo & Sánchez, 2005)

Las medidas de riesgo tienen un papel crucial en la optimización bajo incertidumbre, especialmente en hacer frente a las pérdidas que podrían incurrir en las finanzas o la industria de seguros.(Rockafellar & Uryasev, 2002)

Aunque el *Value at Risk* (VaR) tiene un rol importante dentro del modelo de optimización de portafolios, el énfasis estará sobre el *Condicional Value at Risk* (CVaR), el

cual ha demostrado poseer mejores cualidades que el VaR al ser una medida de riesgo coherente y que posee cualidades matemáticas superiores.

La finalidad del *Condicional Value at Risk* es promover prácticas de inversión más eficientes, ya que esta metodología ofrece una forma conveniente de calcular las pérdidas de valor de distintos instrumentos financieros que componen un portafolio de inversión, para un horizonte de tiempo determinado y para un nivel de confianza preestablecido. (García, 2005)

La creación de un portafolio eficiente según los postulados de Markowitz se basa en la idea de lograr un equilibrio entre rendimiento y riesgo, entendiéndose el riesgo como la volatilidad de los rendimientos de algún instrumento de inversión. La metodología propuesta por Markowitz es uno de los pilares fundamentales de las finanzas modernas, y permite a los agentes de mercado determinar de manera eficiente portafolios de inversión en los cuales destinan sus excedentes de liquidez. (Cárdenas et al., 2015). Sin embargo, en este trabajo se hará énfasis en la propuesta de Black-Litterman.

El modelo canónico Black-Litterman hace dos contribuciones significativas al problema de la asignación. En primer lugar, proporciona una cartera intuitiva previa, el mercado de equilibrio, como punto de estimación de los rendimientos de los activos. En segundo lugar, el modelo de Black-Litterman proporciona una manera clara de especificar las opiniones de los inversores sobre las devoluciones y de combinar las opiniones de los inversores con información previa. (Walters, 2011)

El aporte de la propuesta de Black-Litterman incorpora el supuesto que los individuos no solo toman decisiones basadas en los rendimientos históricos de los instrumentos financieros, sino en las expectativas sobre los rendimientos futuros que estos tienen sobre dichos instrumentos, y con base en estas imágenes o expectativas complementan la información que les brinda el estudio histórico del activo y toman sus decisiones de inversión.(Cárdenas et al., 2015)

En base a este contexto surgen algunas interrogantes como: ¿Qué factores dificultan la inversión en acciones? ¿Existen maneras simples para controlar los riesgos de estas inversiones? ¿Qué método es más idóneo de utilizar para diseñar un portafolio de acciones?

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo General

El principal propósito de este trabajo es presentar a quienes necesitan llevar una constante gestión o administración del riesgo de sus inversiones (personas individuales o instituciones financieras: bancos, administradoras de fondos de pensión, de fondos mutuos, entre otras) una metodología práctica que permita minimizar los niveles riesgo, mediante la determinación del Condicional Value at Risk como medida coherente de riesgo, para un portafolio de acciones definido mediante el modelo de Black-Litterman.

2.2. Objetivos Específicos

- Proponer la creación de un portafolio de acciones utilizando el modelo de Black-Litterman.
- Evaluar las ventajas de uso del Condicional Value at Risk (CVaR) como medida de riesgo de manera de presentarlo como medida coherente de control de riesgo al momento de diseñar un portafolio de acciones.
- Analizar el comportamiento del CVaR mediante la variación en niveles de confianza.
- Evaluar la estabilidad en la composición de una cartera óptima de acciones mediante variaciones en los niveles de confianza utilizados en el modelo de riesgo.

3. MARCO TEÓRICO

Uno de los modelos más utilizados para asignar activos en los portafolios de inversión busca minimizar el riesgo asociado a cada cartera formada, tomando como elemento principal los precios históricos de los activos considerados. Este modelo, desarrollado por H. Markowitz en 1952, presenta algunos inconvenientes, tales como portafolios altamente concentrados, poco intuitivos y considera los puntos de vista de los inversionistas. Como solución a estos problemas se presenta el modelo de Black-Litterman, para asignación de activos en portafolios de inversión, que desplaza la frontera eficiente como resultado de una nueva optimización riesgo-retorno.

Black and Litterman extendió el trabajo sobre la asignación de activos más allá del marco tradicional de media-varianza y afirmó que la asignación de activos basada en el modelo tradicional no había atraído a los gestores de cartera (Husnain, Hassan, & Lamarque, 2016).

3.1. Asignación de Activos en el proceso de Inversión.

"Portafolio de inversiones" es un concepto con múltiples definiciones, pero con una idea en común, para simplificarlo tomaremos el concepto de Pearson (2003, en Borge & Cervantes, 2012) que lo define como "un conjunto de activos o valores en los que una persona escoge para invertir su dinero", estos por lo general son valores como bonos,

acciones, fondos de pensiones, fondos mutuos, fondos de mercado monetario y fondos cotizados en la bolsa.

El portafolio de inversiones puede consistir en la compra de diversas acciones de la bolsa de valores, pero por lo general implican la inversión en más de un activo al tiempo, lo que se conoce como diversificación.

Otros autores como Varon (1998, en Borge & Cervantes, 2012) definen portafolio como vehículos jurídicos mediante los cuales se canalizan y administran recursos de uno o más sujetos económicos para la realización de inversión. Un portafolio puede incluir bienes inmuebles o barras en oro. Pero la mayoría de los portafolios de inversión se componen principalmente en valores como los bonos, las acciones, los fondos mutuos, los fondos de mercado monetario y los fondos cotizados en la bolsa.

La gestión de portafolios de inversión es un proceso que implica un conjunto integrado de pasos o actividades que se realizan de una manera lógica y consistente para crear y mantener combinaciones apropiadas de activos. Los pasos involucrados son la planeación, la ejecución y la retroalimentación. Durante la planeación se establecen los objetivos de inversión, las expectativas de mercado y la asignación de capital de largo plazo. En la etapa de ejecución se construye el portafolio. Finalmente, en la etapa de retroalimentación, el administrador monitorea y evalúa el desempeño del portafolio en comparación al plan original. A partir de los resultados de esta etapa el administrador puede decidir rebalancear el portafolio con el fin de que los objetivos de inversión sigan siendo satisfechos.(Maginn et al., 2005)

Uno de los pasos más importantes dentro de un proceso de inversión es definir la mezcla de las clases de activos en que se va a invertir los recursos. A este proceso se le conoce como la asignación de capital o activos (*asset allocation*). El proceso de seleccionar una asignación objetivo es llamado asignación estratégica de activos. La variación en la asignación de activos alrededor del objetivo se llama asignación táctica de activos. En principio, las posiciones estratégicas deben permanecer estables hasta que las opiniones sobre los fundamentales cambien. Las posiciones tácticas, por el contrario, pueden cambiar frecuentemente.

La asignación estratégica de activos establece, con base en la política de inversión y las expectativas de mercado, las exposiciones admisibles a las clases de activos que logren los objetivos de largo plazo del inversionista y respeten las restricciones impuestas. El objetivo de la asignación estratégica de activos es crear una mezcla de activos estable que maximice los retornos esperados de largo plazo para un nivel de riesgo deseado. La asignación estratégica conlleva la generación de un índice de referencia y la posterior determinación y monitoreo de las asignaciones del portafolio con respecto a ese índice.

Al crear la asignación estratégica de activos el inversionista también establece generalmente las ponderaciones máximas y mínimas que se permiten en cada clase de activo como un mecanismo de control de riesgo. Un administrador puede decidir desviarse temporalmente de su portafolio de referencia para reflejar sus expectativas de corto plazo sobre el mercado o sobre su situación actual que puede ser muy diferente a la normal o esperada.

Para tomar decisiones de asignación los inversionistas tienen en cuenta varias fuentes de información, además de su intuición y experiencia. Los inversionistas combinan los diferentes tipos de información y los resultados de diferentes modelos para tomar decisiones de inversión informadas. Como lo afirma (Lee, 2000), el procesamiento de la información y la combinación de modelos y opiniones son críticos para todas las decisiones de inversión. Usualmente la combinación de la información se realiza utilizando algún método de optimización.

A la hora de evaluar cualquier tipo de inversiones financieras, los agentes intentan obtener medidas de riesgo y retorno esperado, además de su intuición o percepción, que le permitan tomar decisiones. Al hablar de rendimiento, nos referimos a una simple medida de ingreso, la cual ignora la posibilidad de ganancias o pérdidas de capital inesperadas provenientes de cambios en los precios. Sin embargo, si hablamos de retorno, éste es una medida más completa de la performance histórica de un activo. Incluye el ingreso, pero le agrega las ganancias o pérdidas de capital provenientes de variaciones en los precios. Por lo tanto, a diferencia del rendimiento, el retorno puede ser positivo o negativo.

El mercado de valores es un elemento clave dentro del mercado de capitales y una pieza fundamental del desarrollo económico de Chile. Las mejoras en términos de liquidez y capitalización del sistema financiero, la creación de nuevos instrumentos e instituciones, condujeron a un aprendizaje constante a los distintos agentes del mercado chileno (Cuevas, 2015).

Por mercado de valores se entiende básicamente los espacios comunes y mecanismos que permiten que la oferta y demanda de valores se encuentren, y que da lugar

a las transacciones de instrumentos financieros como las acciones o títulos de deuda. La oferta de valores, o emisores, está compuesta principalmente por sociedades anónimas que buscan financiar y ampliar sus operaciones, bancos, fondos patrimoniales administrados por terceros (fondos mutuos, fondos de inversión, etc.) e instituciones del Estado. Los inversos, o demandante de valores, buscan los instrumentos que les permitan maximizar rentabilidad sujeto a su aversión al riesgo (Cuevas, 2015).

El mercado de valores, como cualquier otro mercado donde se transa algún bien, comprende aquellos mecanismos que permiten coordinar a los distintos agentes de la economía, permitiendo el encuentro entre demandantes y oferentes. En este mercado se transan diversos instrumentos financieros[1] debido a que estos representan un valor económico el cual puede ser valorado en dinero por lo que se constituyen como objetos de transacción (compra o venta) con distintos grados de continuidad.

[1] Los instrumentos financieros transados en el mercado de valores pueden ser agrupados en tres grandes grupos:
a) Instrumentos de Renta variable: Dentro de los instrumentos de renta variable se encuentran las acciones, valores emitidos por sociedades anónimas que representan un título de propiedad sobre una parte del patrimonio de una empresa. Además, encontramos cuotas de fondos mutuos o fondos de inversión que representan un título de propiedad sobre una fracción del patrimonio de los fondos.
b) Instrumentos de Renta Fija: títulos representativos de obligaciones emitidos generalmente a plazos superiores a un año el cual puede ser reajustado por algún índice o unidad. Dentro de estos instrumentos encontramos letras de crédito hipotecario, debentures, bonos bancarios y bonos emitidos por el estado.
c) Instrumentos de Intermediación Financiera: Al igual que los instrumentos de renta fija representan obligaciones con la diferencia que son emitidos con plazos inferiores al año. Efectos de comercio, pagares y certificados de depósitos, pagares descontables del banco central y otros instituciones públicas, constituyen instrumentos de intermediación financiera. Además, se transan otros valores como oro y plata, e instrumentos monetarios como dólares. Fuente: Manual de Operaciones de la Bolsa de Comercio de Santiago.

Las acciones[2] son instrumentos de renta variable, emitidos por sociedades anónimas y en comanditas por acciones, que representan un título de propiedad sobre una fracción del patrimonio de la empresa, es decir, el comprador de una acción pasa a ser propietario de una parte de la empresa emisora.

3.2 Introducción Teórica al Modelo de Markowitz sobre Asignación de Activos en Carteras de Inversión

En el campo de la teoría de selección de carteras, ocupa un lugar destacado Harry Markowitz, que en 1952 publicó en la revista Journal of Finance un artículo basado en su tesis doctoral y titulado «Portfolio Selection». En dicho artículo planteaba un modelo de conducta racional del decisor para la selección de carteras de títulos-valores con liquidez inmediata. Posteriormente, en 1959, publicó su libro Portfolio Selection, Efficient Diversification of Investments, en el que expone y desarrolla con mayor detalle su teoría. (Markowitz, 1952)

Es evidente que la relación del inversionista con este concepto pasa por la conjunción de su perfil de riesgo (disposición a asumir un mayor o menor riesgo) y la globalización de las incertezas que proyectan la totalidad de las inversiones. Markowitz da un paso más allá en este concepto y postula que no basta con mirar los activos individual y estáticamente, sino que debe asumirse como una relación dinámica que evoluciona

[2] Fuente: Manual de Operaciones de la Bolsa de Comercio de Santiago. http://bolsadesantiago.com/Normativas%20Bolsa%20de%20Comercio/1.%20Manual%20de%20Operaciones%20en%20acciones.pdf

permanentemente en el tiempo, de acuerdo a las interacciones que se generan al interior de la cartera. De esta forma surge como concepto fundamental la covarianza de ellos, siendo ésta un elemento significativo al momento de mejorar la calidad de predicción del modelo. (Gálvez, 2008)

El método de Markowitz consiste en maximizar la utilidad esperada del inversionista a través de la diversificación del portafolio, lo cual implica la búsqueda de las carteras eficientes a través de la técnica matemática de programación cuadrática, permitiendo seleccionar la óptima combinación media-varianza de los retornos de los activos, dadas las preferencias del inversor.(Flórez, 2008)

Markowitz desarrolla su modelo sobre la base del comportamiento racional del inversor. Es decir, el inversor desea la rentabilidad y rechaza el riesgo. Por lo tanto, para él una cartera será eficiente si proporciona la máxima rentabilidad posible para un riesgo dado, o de forma equivalente, si presenta el menor riesgo posible para un nivel determinado de rentabilidad.

El modelo postulado por Markowitz se presenta a continuación:

$$Min\ \sigma^2\left(R_p\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i \cdot x_j \sigma_{ij}$$

Sujeto a:

$$E\left(R_p\right) = \sum_{i=1}^{n} x_i \cdot E(R_i) = V^*$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i = 1$$

$$x_i \geq 0 \quad (i = 1, \dots, n)$$

donde x_i es la proporción del presupuesto del inversor destinado al activo financiero i e incógnita del programa, $\sigma^2(Rp)$, la varianza de la cartera p, y σ_{ij}, la covarianza entre los rendimientos de los valores i y j. $E(Rp)$, es la rentabilidad o rendimiento esperado de la cartera p, de tal forma que al variar el parámetro V^* obtendremos en cada caso, al resolver el programa, el conjunto de proporciones x_i que minimizan el riesgo de la cartera, así como su valor correspondiente. El conjunto de pares [$E(Rp)$, $\sigma^2(Rp)$] o combinaciones rentabilidad- riesgo de todas las carteras eficientes es denominado «frontera eficiente». Una vez conocida ésta, el inversor, de acuerdo con sus preferencias, elegirá su cartera de inversión óptima.

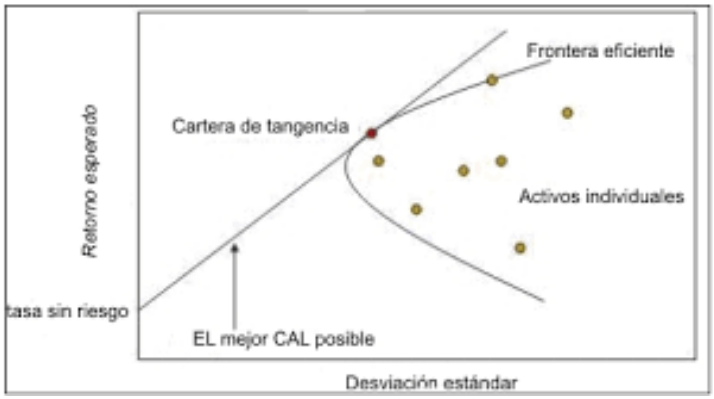


Figura 1. Frontera eficiente de Markowitz

Markowitz demostró que el riesgo de la cartera de activos depende de las ponderaciones de los activos y las desviaciones estándar de los rendimientos del activo, y de manera crucial en la correlación (covarianza) de los rendimientos de los activos.

Los resultados que entrega esta optimización son las proporciones del presupuesto a invertir, destinadas a cada activo. Esto es, la asignación completa de los recursos a invertir en el universo de instrumentos posibles. Es fácil ver que se busca reducir la varianza total del conjunto de inversiones, como un todo, considerando las interacciones entre cada par de activos. Esto, considerando que la rentabilidad del conjunto es la combinación lineal de las rentabilidades de cada instrumento y, por supuesto, que la cartera es el 100% de la inversión.

Analizando los casos extremos del modelo se observa que, si el portafolio es conformado por todos los activos del mercado, el riesgo se diversificará siendo exactamente el riesgo de mercado; por el contrario, si se compone de sólo un activo, el riesgo se concentrará en la inseguridad de dicho instrumento.

3.2.1 Supuestos de la Teoría de Markowitz.

Como punto de partida, la teoría considera como supuestos:

- Los agentes inversores son racionales, es decir minimizan el riesgo para cualquier rentabilidad esperada.

- La selección de activos a optimizar sólo es válida para un período, cualquiera sea éste.
- En el universo de capitales existen n activos que pueden combinarse para formar un portafolio.
- Los activos son perfectamente divisibles.
- Se ignora todo costo de transacción, como comisiones u otros.
- Se considera que no existen asimetrías de información, ni poder de mercado.
- Se supone conocida o calculable la esperanza de la rentabilidad, la varianza y la covarianza de los activos del mercado.
- Los rendimientos de los instrumentos financieros se comportan según una distribución Normal de probabilidades.

En general, se pueden considerar estos supuestos como respetados ya que, usualmente, los mercados son suficientemente grandes como para ignorar las posibles asimetrías de información; la unidad a adquirir es pequeña en relación al capital disponible, como los son las acciones; y los datos históricos sobre rentabilidades permiten establecer varianzas, covarianzas y rentabilidades esperadas.

El modelo de Markowitz revolucionó el modo de estructurar los portafolios de inversión, sin embargo, los problemas asociados son motivo de la búsqueda de una teoría más estable. Fue así como en el año 1992 Fisher Black y Robert Litterman crearon un

modelo que permitió corregir las dificultades que se presentaban a la hora de asignar activos en carteras de inversión.

3.3 Introducción Teórica al Modelo de Black-Litterman para la Asignación de Activos.

El modelo de asignación de activos Black-Litterman, creado por Fischer Black y Robert Litterman, es un sofisticado método de construcción de cartera que supera el problema de las carteras altamente intuitivas y altamente concentradas, la sensibilidad a los insumos y la maximización del error de estimación. (Satchell, 2007)

Estos tres problemas relacionados y bien documentados con la optimización de la varianza media son las razones más probables de que más practicantes no utilicen el paradigma de Markowitz, en el cual el retorno se maximiza para un nivel dado de riesgo. El modelo Black-Litterman utiliza un enfoque bayesiano para combinar las opiniones subjetivas de un inversor con respecto a los retornos esperados de uno o más activos con el vector de equilibrio de mercado de retornos esperados (la distribución anterior) para formar una nueva estimación mixta de retornos esperados. El nuevo vector resultante de retornos (la distribución posterior) conduce a carteras intuitivas con pesos de cartera sensibles. Desafortunadamente, la construcción de los insumos requeridos es compleja y no ha sido completamente explicada en la literatura. (Satchell, 2007)

Black y Litterman tuvieron la idea de combinar el estado de equilibrio de la economía, con información que provoca ligeras desviaciones, ya sea en la oferta o la demanda por activos, antes de ser incorporadas en el mercado. Esta información es

conocida como visiones de mercado o especulación. Producto de esta combinación se genera un modelo de retornos esperados que obtiene una maximización de utilidades más acertada que los métodos conocidos.

En una introducción al modelo propuesto, ha de entenderse en primer lugar, el punto de inicio, que corresponde a la idea de equilibrio. Litterman supone que el mercado está permanentemente en un estado de equilibrio puntual, en que la oferta por activos es equiparada con la demanda por los mismos. El equilibrio instantáneo puede ser comprendido como el "centro de gravedad", del cual los mercados se desvían en todo instante, según la información que surja, pero el sistema y la información en él presionarán los precios permitiendo que el mercado vuelva a equilibrarse. La idea de equilibrio es básica para el modelo, y se entiende como un estado ideal. No obstante, es posible llegar a una aproximación razonable de éste, del que se puedan sacar ventajas. (Litterman, 2003)

Litterman indica que el motivo para considerar el equilibrio como punto de partida tiene relación con la creencia de que es un punto de referencia favorable y apropiado para identificar las desviaciones de las cuales se puede sacar ventaja. Si se asume que los mercados se mueven hacia el equilibrio racional, los inversores tratarán de tomar ventajas según las teorías de portafolio. Litterman (2003) postula que la teoría de portafolios indica a los inversores cómo los mercados reaccionarán ante ciertos eventos y por tanto cómo asignar sus activos en los portafolios.

El Modelo de Black y Litterman fue ideado como una solución elegante a los problemas del enfoque tradicional de Markowitz para la construcción de portafolios y para hacer más prácticas las herramientascuantitativas para la asignación de activos.

El modelo de Black-Litterman (MBL) parte de una situación de equilibrio de mercado, es decir de una serie de rentabilidades esperadas que igualen la oferta y la demanda de activos financieros, si todos los inversionistas tuvieran las mismas expectativas. En el MBL, si las expectativas del inversionista no difieren con respecto a las del mercado, no es necesario especificar un rendimiento para cada activo, ya que éstos entran al modelo con su respectivo retorno de equilibrio. El paso a seguir es la obtención de la rentabilidad esperada que se alcanza por optimización inversa; es decir, en lugar de preguntarse qué ponderación es necesaria para tener determinada rentabilidad, se plantea qué rentabilidad esperada supone la ponderación que indica la capitalización. Después de calcular la rentabilidad esperada, el modelo procede con uno de sus más importantes aportes, la incorporación de las expectativas que el inversionista tiene del mercado. (Franco, Avendaño, & Barbutín, 2011)

3.3.1 Descripción del modelo de selección de portafolios de acuerdo con la propuesta de Black-Litterman.

El modelo de Black-Litterman como versión mejorada del modelo Markowitz considera los siguientes aspectos: en el mercado existen *n* activos, con capitalizaciones M = M_1, M_2 ,…,M_n y donde la capitalización de mercado es igual al número de títulos o

unidades del activo disponibles en el mercado por su respectivo precio. (Cárdenas et al., 2015)

Las ponderaciones de mercado de los *n* activos están dadas por el vector W = W_1, W_2, …, W_n en donde la ponderación del activo *i* es:

$$W_i = \frac{M_i}{\sum_{i=1}^{n} M_i}$$

El coeficiente de aversión al riesgo del inversionista (δ), el cual es constante, se determina de la siguiente forma:

$$\delta = \frac{R_M - R_f}{\sigma_M^2}$$

Donde R_M es el retorno esperado del mercado, R_f es la tasa libre de riesgo y σ_M^2 es la varianza del retorno del mercado, el exceso de retornos implícitos de equilibrio (Π) se puede expresar como sigue:

$$\prod = \delta \Sigma W$$

Estos retornos se llaman Retornos Implícitos de Equilibrio, debido a que si los precios de los activos se ajustan hasta los retornos esperados, estos serán iguales a lo que creen los inversionistas, haciendo la suposición de que en general se tiene la misma expectativa de mercado; dichos ajustes hacen que la demanda iguale la oferta.

El modelo Black-Litterman utiliza la aproximación bayesiana para la inferencia de los retornos esperados de los activos del portafolio. Este enfoque hace que a los

rendimientos esperados se les pueda inferir su distribución de probabilidad con base en las creencias o expectativas previas que se tengan sobre la evolución de los activos que conformarían el portafolio y los rendimientos esperados de un portafolio inicial, el cual se obtiene mediante un modelo CAPM, de Markowitz o un índice de mercado.

Suponiendo que existen N activos en el mercado, que pueden incluir acciones, bonos, divisas y otros activos, los rendimientos de estos activos tienen una distribución normal donde μ es el rendimiento esperado y Σ la correspondiente matriz de covarianza; con base en esto el retorno de los activos en su conjunto se asume que sigue una distribución normal con parámetros μ y Σ; así:

$$r \sim N\ (\mu, \Sigma)$$

donde r es el vector de los rendimientos de los activos. Si se asume que todos los inversionistas tienen la cartera de mercado, W_{eq} y en donde las primas de riesgo de equilibrio Π son tales que si todos los inversionistas tienen el mismo punto de vista, la demanda de estos activos es exactamente igual a la oferta. Suponiendo que la tolerancia al riesgo es representado por el parámetro de aversión al riesgo δ, las primas de riesgo de equilibrio se estiman como:

$$\prod = \delta\, \Sigma W_{eq}$$

El modelo bayesiano previo implica que los retornos esperados μ se ubiquen en los valores de equilibrio, distribuyéndose normalmente con la media de Π :

$$\mu = \Pi + \varepsilon^{(e)}$$

donde $\varepsilon^{(e)}$ es un vector aleatorio con distribución normal con media cero y matriz de covarianza $\tau\Sigma$, donde τ es una escala que indica la incertidumbre del portafolio inicial. Además del portafolio inicial, el inversionista también tiene una serie de puntos de vista sobre los rendimientos del mercado en donde el inversionista tiene un conjunto de K opiniones sobre el rendimiento de los instrumentos del portafolio. Las opiniones se expresan en términos del retorno esperado de un portafolio p_K, la cual distribuye normalmente con media q_K q_k y desviación estándar ω_K . De esta manera P es una matriz que selecciona los instrumentos del portafolio sobre los cuales se forma una opinión o expectativa, y Q es el vector de opiniones sobre los retornos:

$$P' = \left(p_{1,}p_2, \dots, p_k\right)$$

$$Q' = (q_{1,}q_2, \dots, q_k)$$

Los puntos de vista de los inversionistas se pueden expresar como:

$$P_\mu = \mathrm{Q} + \varepsilon^{(v)}$$

donde $\varepsilon^{(v)}$ es una inferencia no observable, normalmente distribuida con un vector aleatorio igual a cero y una matriz de covarianza diagonal Ω : $P_\mu \sim N(Q, \Omega)$. La matriz Ù representa la matriz de la confianza en las opiniones o expectativas, y dependen de la matriz de covarianza inicial Σ, el parámetro de incertidumbre τ y la matriz P:

$$\Omega = diagonal\ (P(\tau\Sigma)P^{\tau})$$

Se supone, además que tanto $\varepsilon^{(e)}$ como $\varepsilon^{(v)}$ son independientes.

$$\begin{pmatrix} \varepsilon^{(e)} \\ \varepsilon^{(v)} \end{pmatrix} \sim N(0, \begin{bmatrix} \mathrm{T}\Sigma & 0 \\ 0 & \Omega \end{bmatrix}$$

Los puntos de vista del inversionista expresados con las matrices anteriores se combinan con el portafolio inicial, o de equilibrio (obtenidos mediante el modelo CAPM, definición inicial del portafolio o un modelo de Markowitz). Considerando lo anterior, los rendimientos esperados del modelo Black-Litterman se distribuyen como una normal $N(\overline{\mu_{BL}}, \bar{M}^{-1})$, donde la media, $\overline{\mu_{BL}}$ está dada por:

$$\overline{\mu_{BL}} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}[(\tau\Sigma)^{-1}\Pi + P'\Omega^{-1}Q]$$

Y la matriz de covarianza $\bar{M}^{-1}$está dada por:

$$\bar{M}^{-1} = [(\tau\Sigma)^{-1} + P'\Omega^{-1}P]^{-1}$$

A partir de la creación de un portafolio inicial de mercado y mediante el modelo de Black-Litterman que se acaba de describir es posible construir un portafolio óptimo que considere las visiones y expectativas que se tienen sobre el desempeño futuro de los activos que lo conformarían; la selección de los pesos posteriores del portafolio se obtienen como:

$$W_{BL} = (\delta\Sigma P)^{-1}\mu_{BL}$$

Una vez se definen los pesos relativos de cada una de los activos se obtiene la asignación óptima de recursos, de acuerdo con las expectativas del inversionista, determinando así el portafolio óptimo de acuerdo con el modelo Black-Litterman.

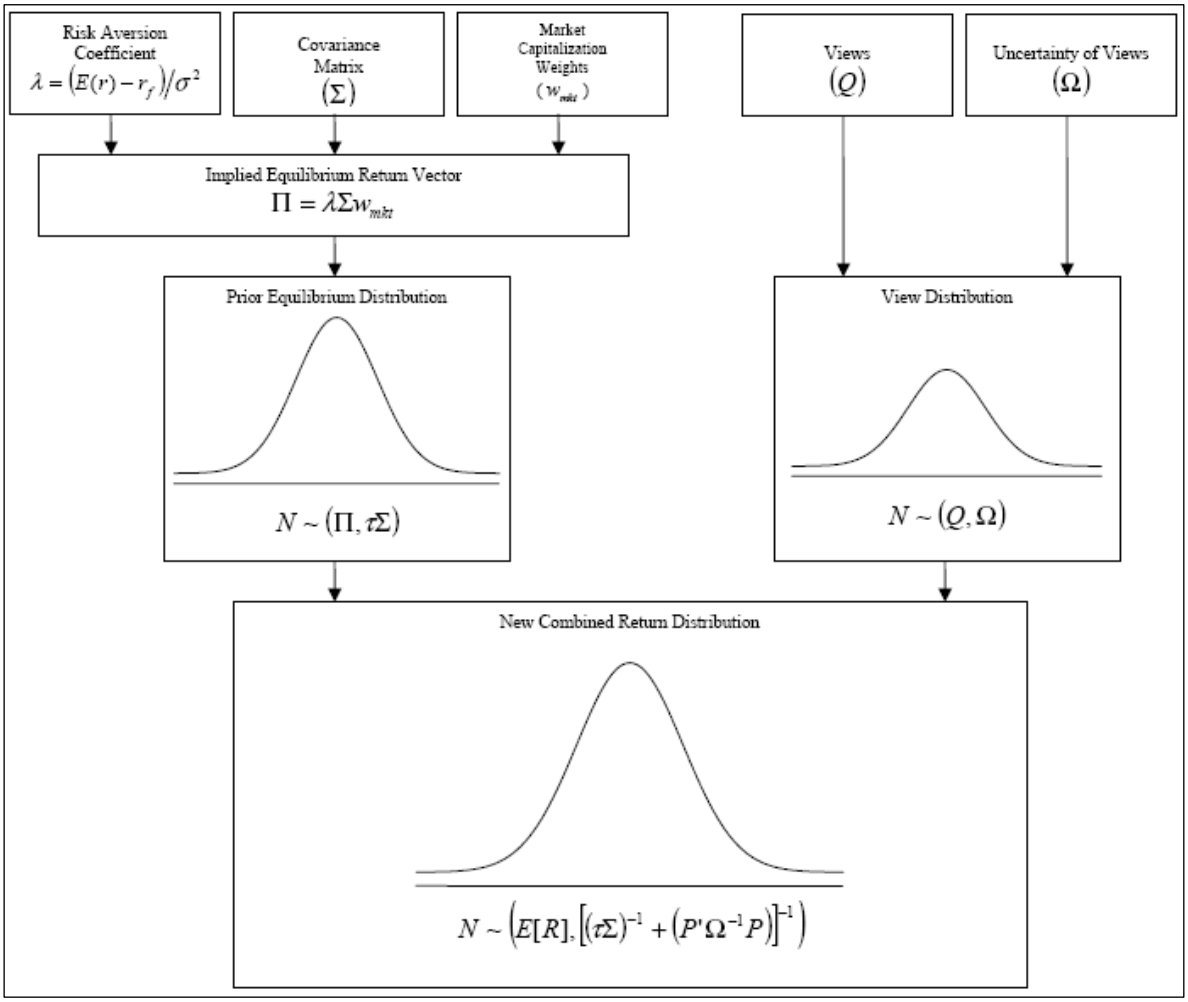


Figura 2. Metodología de Black-Litterman. Fuente: Idzorek (2004)

La figura 2 resume la metodología de Black-Litterman que se ha presentado hasta el momento.

Finalmente, como supuestos subyacentes en la aplicación del modelo Black-Litterman y al igual que en todos los modelos de teoría de portafolios analizados, se ignora el efecto de los impuestos y costos de transacción. Se supone que el mercado es eficiente y que los precios reflejan toda la información disponible en cada momento y se ajustan

rápidamente a todas las variables que podrían afectar el valor de los activos; además de considerar que los inversionistas son racionales y no existe la posibilidad de realizar arbitraje.

El aporte de Black y Litterman consiste en mostrar que el equilibrio de mercado puede ser combinado con las visiones que los inversionistas tienen sobre el mercado, debido a que será posible adelantarse a las desviaciones que surgirán del equilibrio y podrá tomarse posiciones ventajosas antes que el mercado vuelva a acomodarse de forma natural, como ha postulado Litterman. Entonces, es necesario entender qué son las visiones de mercado y como se comportan. (Gálvez, 2008)

Visiones son comportamientos específicos que, a juicio de los inversionistas, tendrían algunos activos del portafolio y que serían distintos al comportamiento general del mercado. Éstas pueden expresarse de tres formas distintas, en términos absolutos o relativos, he aquí un ejemplo genérico para cada forma:

- Visión Absoluta: El activo A presentará un retorno absoluto de R%, con un nivel de confianza de C%.
- Visión Relativa Simple: El activo A superará al activo C en R%, con un nivel de confianza de C%.
- Visión Relativa Múltiple: Los activos A y B superarán a los activos C y D en R%, con un nivel de confianza de C%.

En cada asignación de activos, el nivel de confianza de cada visión es determinado por el administrador del portafolio. El enfoque tradicional de varianza media de Markowitz, en cambio, no permite la introducción de estas visiones de mercado y menos aún el nivel de confianza de ellas. Respecto al nivel de confianza de cada visión, es posible encontrar varios puntos de vista en la literatura, siendo el enfoque de la desviación estándar el más recurrente. Al fijar el precio objetivo de un activo en particular, éste presentará una amplia desviación estándar si el emisor de la recomendación no posee gran certeza sobre el futuro del activo, por el contrario, la desviación estándar del precio objetivo será pequeña si posee convicción sobre su pronóstico.

La manera en que las visiones afectan la asignación de los activos en el portafolio dependerá ampliamente de la certidumbre de las visiones. A mayor confianza en un pronóstico, mayor influencia tendrá éste en la asignación de la cartera.

3.3.2 Revisión del análisis bayesiano.

El problema de error de estimación de los parámetros no se puede solucionar únicamente con información muestral. Además de requerir un gran número de datos, también se requiere información no muestral como la intuición y las opiniones subjetivas del administrador de portafolios. La estadística bayesiana ha hecho una contribución muy importante a la práctica de toma de decisiones al haber formulado una teoría estadística coherente que ha permitido estructurar y modelar probabilidades subjetivas en el contexto de un problema de decisión.

La estadística bayesiana es una aproximación natural para la construcción de portafolios porque provee una teoría para combinar información de diferentes fuentes y modelar la incertidumbre inherente en esta información (Herold, 2003).

En el análisis estadístico clásico o frecuentista, los parámetros de interés son estimados mediante un conjunto de datos observados. La aproximación bayesiana, sin embargo, propone que las opiniones sobre el estado del mundo son subjetivas. En vez de estimar parámetros como si fueran fijos, el analista debe usar los datos observados recientemente para actualizar y afinar de forma constante las opiniones subjetivas priores sobre el estado actual. La noción subjetiva de probabilidad (grado de creencia) usado por los bayesianos es diferente a la noción objetiva de probabilidad empleada por los frecuentistas (cuántas enumeraciones se lograrán con muestreo repetido) (Scherer, 2002).

El teorema de Bayes es la base de todos los métodos bayesianos. En el caso de la estimación de los retornos esperados a partir de la información muestral se tiene que, según el teorema de Bayes:

$$\mathrm{P}(\mathrm{E}[R]|datos) = \frac{P(datos|E[E])P(E[R])}{P(datos)}$$

El primer término en el numerador del lado derecho es la probabilidad conjunta de los datos observados dado el retorno esperado. El segundo término es la creencia prior o las opiniones subjetivas sobre el retorno esperado. El producto de estos dos términos es

escalado por la probabilidad de los datos observados para obtener el lado izquierdo, el cual es conocido como la densidad posterior del retorno esperado.

El uso de una distribución prior es, de acuerdo con el análisis bayesiano, la mejor forma de resumir la información disponible (o incluso la falta de información) sobre los parámetros, como también sobre la incertidumbre residual, permitiendo así la incorporación de esta información imperfecta en el proceso de decisión.(Robert, 2006)

En vez de estimadores puntuales, el análisis bayesiano produce una función de densidad (densidad posterior) para los parámetros involucrados dados los datos observados. Esta probabilidad posterior es por tanto una mezcla de opiniones priores y del estado actual del mundo basado en los datos observados. La distribución posterior trata de compaginar la información prior con la información muestral, encontrando una distribución que sea lo más consistente posible con ambas fuentes de información.

Bajo el enfoque bayesiano los datos observados son utilizados para refinar las opiniones subjetivas sobre los retornos esperados. Ante el arribo de nueva información, el posterior actual se convierte en las nuevas opiniones priores dada la nueva información y así sucesivamente. Este proceso de actualización secuencial de la función de densidad es utilizado en el modelo Black-Litterman. Una de las mayores ventajas de utilizar un modelo bayesiano en la gestión de portafolios y en las decisiones de inversión es que permite al administrador combinar información prior de una o más fuentes con información muestral de los retornos para tomar una decisión. Esto es particularmente importante cuando el administrador tiene información muestral limitada (e.g., retornos mensuales para uno o dos

años). En este caso la información muestral no domina al prior y es bastante probable que este agregue valor al proceso de inversión. La clase de información que un inversionista puede utilizar para formar un prior incluye los resultados de modelos de proyección de retornos, análisis técnico e información sobre los fundamentos de la economía, entre otros.

3.3.3 Supuestos del Modelo de Black-Litterman

Como punto de partida del modelo de Black-Litterman, se consideran los siguientes supuestos:

- Los retornos se encuentran normalmente distribuídos.
- Cada retorno sobre una inversión tiene asociado una distribución de probabilidad para el próximo período.
- Los inversionistas tienen visiones sobre los activos que podrían formar mejores portafolios.
- Puede estimarse un nivel de confianza para cada visión emitida.
- Los inversionistas no están absolutamente seguros sobre las visiones que emiten.
- Los riesgos son tomados sobre los activos en que se tienen visiones.
- Los portafolios sugeridos son comparados respecto a un portafolio de referencia o benchmark.
- Se ignoran todo tipo de impuestos y costos de transacción.

- Los mercados son eficientes, por tanto los precios reflejan toda la información disponible y se ajustan rápidamente a todas las variables que podrían afectar el valor de los activos.
- Los inversionistas son racionales.
- No existe el arbitraje.

3.3.4 Ventajas del modelo Black-Litterman

Entre las ventajas más importantes del modelo se encuentran las siguientes:

1. Una de las ventajas de este modelo es su flexibilidad. El modelo de Black-Litterman permite al administrador de portafolios incluir sus expectativas de mercado y, ante el arribo de nueva información, actualizarlas. A diferencia del modelo de Markowitz, el modelo de Black-Litterman no requiere que los retornos esperados de cada activo sean estimados. Sólo es necesario que el inversionista provea un retorno esperado para aquellos activos sobre los que tiene una opinión valiosa. Esto es más congruente con la práctica debido a que es muy difícil que el administrador tenga un conocimiento detallado o una expectativa significativa sobre cada uno de los activos en el portafolio. Adicionalmente, hay muchos grados de libertad en la implementación del modelo; comúnmente es utilizado de forma iterativa hasta que el inversionista siente que ha logrado obtener el balance apropiado en el portafolio.

Esta flexibilidad es la que hace el modelo tan atractivo a diferentes inversionistas con diferentes situaciones (Lee, 2000).

2. El modelo de Black-Litterman produce portafolios más equilibrados y estables en el tiempo al utilizar los retornos de equilibrio como centro de gravedad. La solución es "anclada" en el reconocido portafolio de mercado. Por consiguiente, la necesidad de rotar el portafolio y los costos de transacción son menores.

3. Además, en el modelo de Black-Litterman el inversionista puede tomar riesgo en donde realmente tiene una opinión y en una mayor magnitud en donde tenga una mayor confianza. En efecto, el modelo permite a los inversionistas separar las proyecciones del grado de confianza en ellas.

4. Suaviza en gran medida el problema de maximización del error de estimación esparciendo los errores a lo largo del vector de retornos esperados (Idzorek, 2004).

5. El model de Black-Litterman admite expresar las opiniones o expectativas de mercado de forma relativa entre los activos, es decir, clasificar el desempeño esperado de un activo en comparación a otro.

3.4 Riesgo

Primeramente comenzaremos definiendo que por riesgo entendemos la existencia de alguna probabilidad de caer en pérdidas, donde las pérdidas serían la obtención de una

rentabilidad menor a la que se espera. De esta manera el riesgo financiero se ve reflejado en la pérdida de valor económico de los activos producto de la variabilidad que experimentan los retornos, así el valor económico de una cartera de inversión se ve influenciado por distintos factores de riesgo como son: tasas de interés, tipos de cambio, precios de acciones, opciones sobre activos subyacentes, etc.(García, 2005)

Debido a los constantes cambios económicos que se generan en el mundo, diversos instrumentos, tales como acciones, bonos y derivados financieros se han visto afectados por variaciones de su precio, lo que genera incertidumbre en los diversos stakeholders. Esta incertidumbre está reflejada en el riesgo que cada instrumento posee, que a su vez es asumido por sus dueños y se manifiesta en las ganancias o pérdidas que tenga la empresa. Es por esto, que las diversas instituciones financieras y no financieras, utilizan derivados financieros para cubrirse de otros instrumentos que pueden verse fluctuados por cambios económicos; en lo que se denomina como administración del riesgo financiero. Este riesgo financiero es medido a través de modelos, donde el más utilizado es el Value-at-Risk o VaR, sin embargo, en este trabajo se presentará el Conditional VaR como medida más eficaz para administrar el riesgo financiero.

Cruz (2012) analiza las diferentes mediciones de riesgo y sus diferencias, aplicándolo luego a México, e indica que las empresas están expuestas a tres tipos de riesgo: riesgo del negocio, riesgo estratégico y riesgo financiero. El primero tiene que ver con la industria en que se desenvuelve la empresa, sus innovaciones tecnológicas, la variación del producto, etc. El segundo es sobre la toma de decisiones de la empresa, sus procesos y estrategias. Y el tercero, que trata sobre la probabilidad de ocurrencia de un

evento que tenga consecuencias negativas para la organización, teniendo la posibilidad de administrar su exposición y disminuir la posible pérdida ocasionada.

Jorion (2001) expone que existen cinco tipos de riesgos financieros: (1) riesgo de mercado, que proviene de movimientos en la volatilidad de los precios del mercado; (2) riesgo de crédito, que se origina al posible incumplimiento de obligaciones de la otra parte; (3) riesgo de liquidez, que es una pérdida excesiva por enajenación de activos o descuentos inusuales para obtener dinero; (4) riesgo operacional, que provienen de errores o accidentes humanos y técnicos; y (5) riesgo legal, que resulta cuando una transacción no puede ser aplicable por ley.

3.5 Medidas de Riesgo

Desde que existió la necesidad de administrar el riesgo financiero, se han presentado diversos autores a través del tiempo con sus respectivos modelos. (Díaz, 2014)

Romero (2005) identifica tres períodos de importantes desarrollos en las finanzas modernas: (1) media-varianza 1952-1956 que fue iniciado por Markowitz, donde establece medidas de riesgo para inversiones individuales (el cuadrado de la desviación con respecto a la media de la distribución de los retornos, que es la varianza) y para una combinación de activos o portafolio (elegir ponderaciones para cada activo que minimice la varianza del portafolio1); (2) modelos en tiempo continuo 1969-1973 iniciado por Robert Merton, Fisher Black y Myron Scholes, que permiten abordar problemas asociados a la valoración de opciones y otros derivados; (3) medidas de riesgo 1998 – actualidad, que fue iniciado

por Artzner et al. (1998), donde se modelan situaciones más reales como el sesgo en el retorno de activos o skewness, leptocurtosis y/o colas anchas. Estos orígenes se ven respaldados por el trabajo de Cruz (2012), donde además de proponer el trabajo de Markowitz y Black-Scholes, agrega el modelo CAPM2(Capital Asset Pricing Model) para la valoración de activos, que se basa en una relación lineal entre rendimiento esperado y riesgo (el rendimiento esperado se iguala al combinar el activo libre de riesgo y la cartera de mercado que incluye el riesgo sistemático denominado β); y también agrega el modelo APT3(Arbitrage Pricing Theory), que es una generalización del CAPM y se le conoce como modelo multifactorial, ya que supone que la correlación de los activos proviene de diferentes factores de riesgo y el CAPM sólo de una fuente.

Entre otras muchas medidas de riesgo (por ejemplo, la desviación estándar, el déficit esperado, la expectativa condicional de la cola y la medida de riesgo entrópico), el Value-at-Risk (en adelante, VaR) es la medida de riesgo más destacada.(Wang & Zhao, 2016) .

A pesar de que el término "Valor en Riesgo" no fue ampliamente utilizado antes de mediados de la década de 1990, el impulso para el uso de medidas de VaR vino de las crisis que aquejaban a las empresas de servicios financieros a través del tiempo y las respuestas normativas a estas crisis.(Angelovska, 2013)

El valor en riesgo (VaR) es una medida de riesgo estadística de pérdidas potenciales del valor de un portafolio de activos financieros que podría ocurrir con una probabilidad determinada durante un horizonte de tiempo específico. «El VaR responde a la pregunta

¿cuánto puedo perder con x% de probabilidad durante un horizonte de tiempo dado?». A pesar de no ser una medida perfecta, por su simplicidad, comparabilidad y fácil interpretación, el VaR se ha convertido en una medida estándar en la industria para medir la exposición al riesgo de mercado y en una herramienta de supervisión importante para la gran mayoría de instituciones financieras.(Álvarez, Restrepo, & Velásquez, 2017)

Para el VaR se han encontrado muchas ventajas en comparación con los métodos previamente utilizados para cuantificar el riesgo financiero, entre las cuales se pueden señalar:

- El VaR es una medida muy reconocida entre los operadores y reguladores en el mundo. Se ha convertido en un estándar en la industria financiera.
- Es aplicable a portafolios con instrumentos no lineales, tales como opciones, con distribuciones de pérdidas no necesariamente zimétricas, ni normales.
- El VaR es una medida común de riesgo para diferentes posiciones y factores de riesgo.
- El VaR es probabilístico y le proporciona al gestor del riesgo información útil sobre las probabilidades asociadas con un monto específico de pérdidas.
- El VaR se expresa en la unidad de medida más simple y fácil de entender en el contexto del riesgo financiero, esto es, pérdida en dinero. Otras medidas son expresadas en unidades mucho menos claras tales como período promedio del flujo

de caja. Puede ser aplicado a cualquier tipo de portafolio y permite comparar riesgos de diferentes portafolios ya sean de renta fija o variable.

Estas son algunas de las significativas ventajas que explican la razón por la cual el VaR es tan popular como medida de riesgo. Sin embargo, el VaR como medida de riesgo tiene problemas de incoherencia desde el punto de vista matemático, lo cual se refleja en situaciones prácticas. (Franco A. & Franco C., 2005) El VaR únicamente es coherente cuando está basado en distribuciones continuas normalizadas.(Angel & Mato, 2005)

Una medida coherente de riesgo es una medida de riesgo que satisface las siguientes propiedades (Artzner et al., 1998):

- Monotonicidad: Esto significa que a mayor rentabilidad debe corresponder mayor riesgo.
- Homogeneidad positiva: Esto significa que si se aumenta la posición en un portafolio, o en alguno de sus activos componentes, el riesgo debe incrementarse proporcionalmente. El riesgo escala con el tamaño de la posición.
- Subaditividad: Es decir, el riesgo global de un portafolio formado por dos o más activos es menor o igual que la suma de los riesgos individuales. Una fusión no crea riesgo extra.

- Invarianza traslacional: Esto significa que si se invierte una cantidad adicional en el portafolio, y se invierte prudentemente, entonces su riesgo se debe reducir en esa cantidad proporcional.

3.5.1 Conditional Value at Risk (CVaR)

Dadas las limitaciones presentadas por el VaR, se han generado medidas alternativas que mantienen los beneficios de este en términos de globalidad, universalidad, contenido probabilístico, etc., evitando al mismo tiempo sus inconvenientes. Una de estas medidas es el Conditional Value at Risk o CVaR, que busca cuantificar las pérdidas que se podrían encontrar en la cola. Como una herramienta de modelado de optimización, el CVaR tiene propiedades superiores en muchos aspectos. CVaR también se llama exceso de pérdida media, mean shortfall, o Tail VaR. Es la pérdida esperada condicional (o retorno) superior (o inferior) al VaR. Por otra parte, el CVaR es una medida de riesgo más consistente que el VaR, ya que es sub-aditiva y cóncava (Tian, Cox, Lin, & Zuluaga, 2010).

Como lo explican Tian et al. (2010) el CVaR tiene algunas características superiores a la varianza y al VaR. La varianza es una medida simétrica y no diferencia entre las desviaciones deseables y las indeseables. En contraste, el CVaR no se basa en el supuesto de distribución simétrica por lo que se puede usar para mejorar la asimetría de una cartera. Por otra parte, en comparación con el VaR, el CVaR no sólo toma en cuenta la probabilidad sino también el tamaño de una pérdida (o retorno). Además, el CVaR es una medida coherente de riesgo que satisface las propiedades de monotonicidad, sub-aditividad,

homogeneidad, y la invariancia traslacional, las cuales se describen ampliamente en el trabajo de Artzner et al. (1998).

Según Uryasev (2002), el CVaR puede definirse como la pérdida esperada dado que las pérdidas son mayores a la pérdida esperada dada, que es más grande o igual que el VaR. El CVaR es la media de las pérdidas respecto a un nivel de probabilidad A% que se designa con α, es decir, las pérdidas esperadas que pueden darse con esa probabilidad. La distribución de probabilidad de las pérdidas podría definirse como:

$$\psi(x) = \begin{cases} 0, & si\ x > x^{\alpha} \\ \dfrac{[\alpha - p(x)]}{\alpha}, & si\ x < x^{\alpha} \end{cases}$$

Para el cálculo del CVaR como una media ponderadadel VaR y del CVaR- definamos cada uno de los elementos intervinientes:

VaR.- es el α percentil de la distribución de la de los resultados de una cartera (el valor en términos absolutos más grande que no exceda la probabilidad de α)

CVaR^{-} = es la pérdida esperada que estrictamente supera al VaR siendo CVaR^{-} $= -E(X|X < x^{\alpha})$ lo que también se designa con el nombre Mean Excess Loss.

Dada la distribución de probabilidad de las pérdidas, puede definirse λ_{α} como la probabilidad asignada para que se produzca la pérdida x^{a} en dicha distribución. Si $p(x^{\alpha})$ es la probabilidad de que las pérdidas excedan (sean estrictamente mayores) al VaR, el peso asignado al VaR será:

$$\lambda_\alpha = \frac{[\alpha - p(x)]}{\alpha} \in [0,1]$$

Si $\psi(x^\alpha) < 1$ hay opción a que las pérdidas sean mayores a que x^α entonces, el CVaR puede obtenerse como una media ponderada del VaR y delCVaR− Rockafellar & Uryasev (2002) como muestra la ecuación:

$$CVaR^\alpha = \lambda_\alpha\, x^\alpha + [1 - \lambda_\alpha]\, CVaR^-$$

El objetivo de la optimización es obtener aquellas proporciones sobre los instrumentos que componen una cartera que minimice su VaR o CVaR para un nivel de confianza específico. Sea $\xi = (\xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots, \xi_k)$ el vector de rendimientos aleatorios de determinadas categorías de activos 1,2,…k. Y sea $w = (w_1, w_2, w_3, \ldots, w_k)$ el vector de posiciones de la cartera. De este modo, w_j será la proporción del instrumento j en la cartera.

$$w_j \geq 0, j = 1, 2, \ldots, k \qquad \sum_{j=1}^{k} \geq 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k$$

La rentabilidad total de la cartera vendrá dada por $-Y = w'\boldsymbol{\xi}$, donde el objetivo es minimizar el VaR o CVaR bajo la restricción de que la rentabilidad esperada exceda un determinado nivel $w'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi}) \geq \boldsymbol{\mu}$. El problema de optimización para el CVaR se resume en la ecuación:

$$Minimizar\ (en\ W) \qquad CVaR_\alpha\ (-w'\xi)$$

Sujeto a:

$$w'\boldsymbol{E}(\boldsymbol{\xi}) \geq \boldsymbol{\mu}$$

$$w' \cdot 1 = 1 \qquad\qquad w \geq 0$$

Para una optimización en la práctica, si Y es una variable discreta, la cual puede tomar los valores $w'\boldsymbol{\xi^i}$ con igual probabilidad, los vectores $\boldsymbol{\xi^i}$, $\boldsymbol{i = 1, 2, \ldots N}$ son llamados escenarios.

Otros aspectos positivos del valor en riesgo condicional, CVAR, son los siguientes:

• CVaR es continua con respecto al nivel de confianza α , comparada con el VaR (VaR, CVaR-, CVaR+ pueden ser discontinuas en α)

• Aún para distribuciones no normales, el CVaR es fácil de controlar y optimizar.

• Puede ser minimizado usando algoritmos de programación lineal, lo cual no ocurre con el VAR, permitiendo el manejo de portafolios con un gran número de instrumentos y escenarios.

• El CVAR, por ser una medida convexa, hace posible construir algoritmos eficientes para controlar el CVAR.

• Realmente proporciona información sobre la magnitud de las pérdidas cuando ellas exceden el VAR.

4. METODOLOGÍA

La realización de este proyecto tendrá diferentes fases. La primera fase consiste en entender la implementación y aplicación del modelo Black-Litterman, tomando como base diferentes textos de la literatura con sus respectivas modificaciones.

Después de entender la lógica del modelo se realizará su implementación en el Matlab R2017b. Para ello se tomará como base un portafolio de 25 acciones seleccionadas del Índice de Precios Selectivos de Acciones (IPSA), que corresponde a un indicador de rentabilidad de las 40 acciones con mayor presencia bursátil en Chile, ocupándose los precios al cierre. Los datos diarios de los rendimientos de los activos se tomaron de la plataforma *Bloomberg* para el perido comprendido entre el 1º de julio del 2010 al 31 de julio del 2018. En el anexo 1 se muestra los valores promedios del portafolio para el periodo anteriormente señalado.

Las predicciones de los análistas fueron determinadas mediante el uso de un modelo ARMA, el cual utiliza datos del pasado para predecir lo que sucederá en el periodo siguiente. En base a esta predicción se ajusta el modelo de Black-Litterman.

Tabla 1. Estadística descriptiva. Julio 2010 - Julio 2018

	Retorno Promedio	Desv. Estándar (diaria)	Beta
FALABELLA	0,0340%	1,3318%	0,89
ENTEL	-0,0003%	1,3387%	1,04
AESGENER	-0,0073%	1,3898%	0,87
CENCOSUD	-0,0027%	1,5938%	1,23
LATAM	-0,0007%	1,7094%	1,85
EMBOTELLADORA ANDINA S.A.	0,0267%	1,6283%	1,08
SANTANDER	0,0296%	1,3412%	1,06
CMPC	0,0174%	1,5308%	1,19
CAP	-0,0112%	2,6817%	2,04
SOQUIMICH-B	0,0464%	1,9587%	1,56
VIÑA CONCHA TORO	0,0191%	1,3378%	0,48
SONDA	0,0171%	1,5100%	0,97
RIPLEY	0,0181%	1,8336%	1,34
PARQUE ARAUCO	0,0547%	1,4792%	0,82
CERVECERIAS UNIDAS	0,0396%	1,3371%	0,85
ANTAR CHILE	0,0129%	1,3397%	1,17
ENGIE ENERGIA CHILE	0,0231%	1,3548%	1,01
SALFACORP	0,0133%	2,0762%	1,96
COLBUN	0,0097%	1,3145%	0,89
BANCO DE CREDITO E INVERSIONES	0,0459%	1,4058%	0,77
ENEL AMERICAS	-0,0169%	1,5833%	0,97
INVERSIONES AGUAS METROPOLITANAS S.A.	0,0282%	1,2485%	0,81
BANCO DE CHILE	0,0395%	1,0930%	0,72
ENEL GENERACION CHILE	-0,0202%	1,3600%	0,82
BESALCO	0,0331%	2,3283%	2,67

Fuente: elaboración propia, en base a información proporcionada por Bloomberg.

La tabla 1 muestra un análisis descriptivo de los datos utilizados como inputs del modelo.

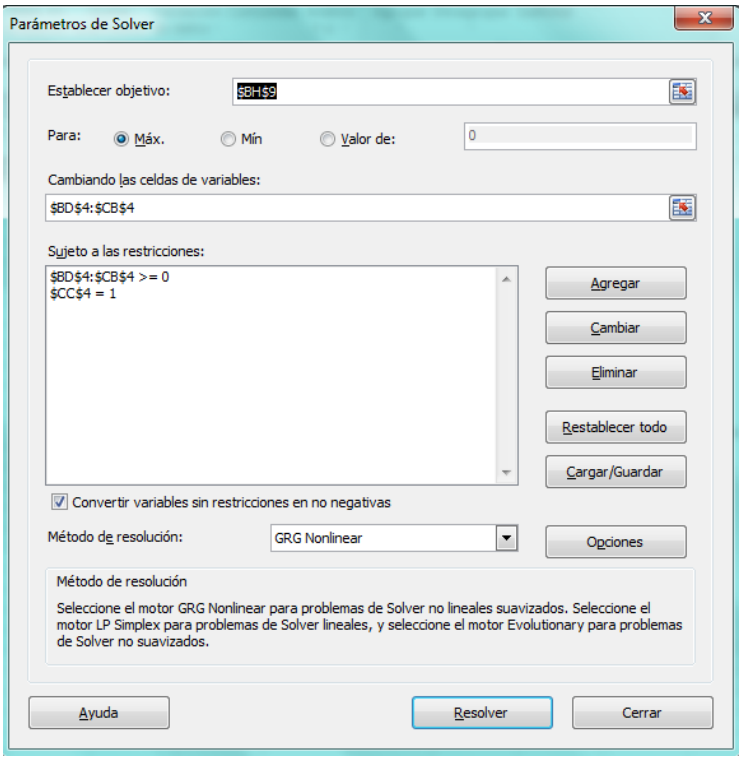
4.1 Implementación del modelo de Markowitz

En la aplicación del modelo de Markowitz, lo primero que se hizo fue determinar el el portafolio eficiente, calculando la esperanza de retorno (rentabilidad) y el riesgo asociado de cada acción. Además se deberá calcular la matriz de varianzas y covarianzas para determinar el riesgo asociado al portafolio, y apoyado con la herramienta Solver se procederá a calcular el portafolio eficiente con las restricciones dadas. En el anexo 2 se muestra un ejemplo de matriz de covarianzas obtenida como resultado de la determinación del portafolio que maximiza el Índice de Sharpe.

Una vez obtenidos todos los indicadores de las acciones se realiza un análisis gráfico con la recta CML y la frontera eficiente. Este análisis gráfico muestra el punto óptimo de las combinaciones de riesgo rentabilidad.

El portafolio óptimo se puede hallar maximizando la pendiente de la recta que une el punto de la rentabilidad libre de riesgo y la frontera eficiente. Una vez se alcanza dicho valor máximo, la recta resultante es la línea del Mercado de Capitales (LMC), es decir la tangente a la frontera eficiente. Este procedimiento es simple y no requiere calcular la frontera eficiente.

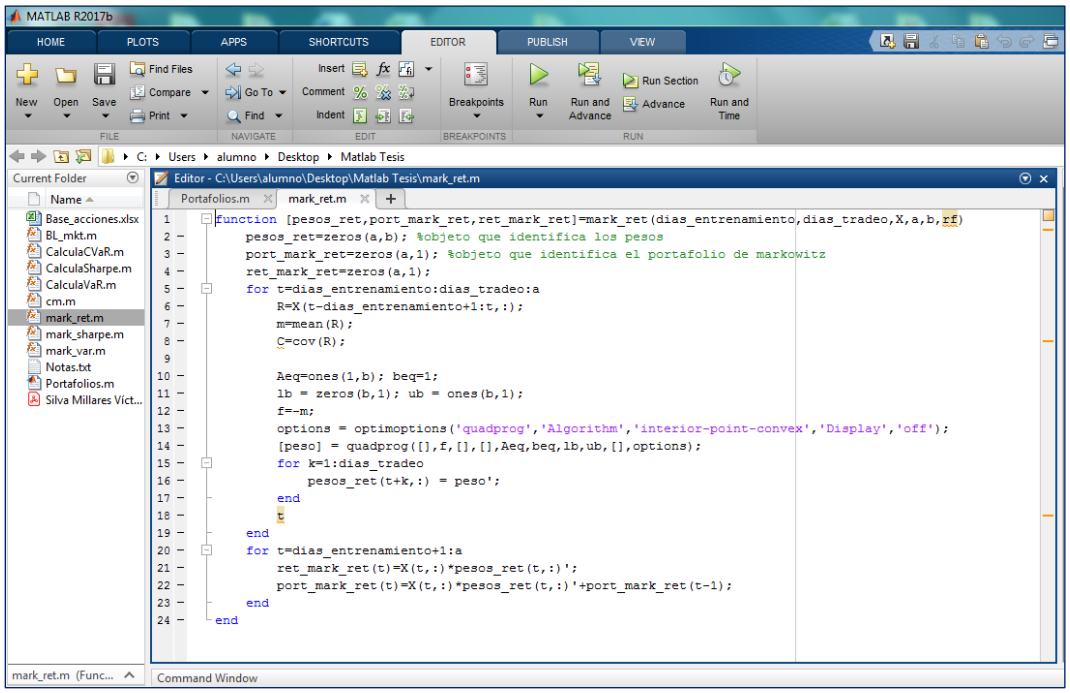
Figura 3. Visualización en Solver para la solución del portafolio óptimo.



Fuente: Elaboración propia en Excel.

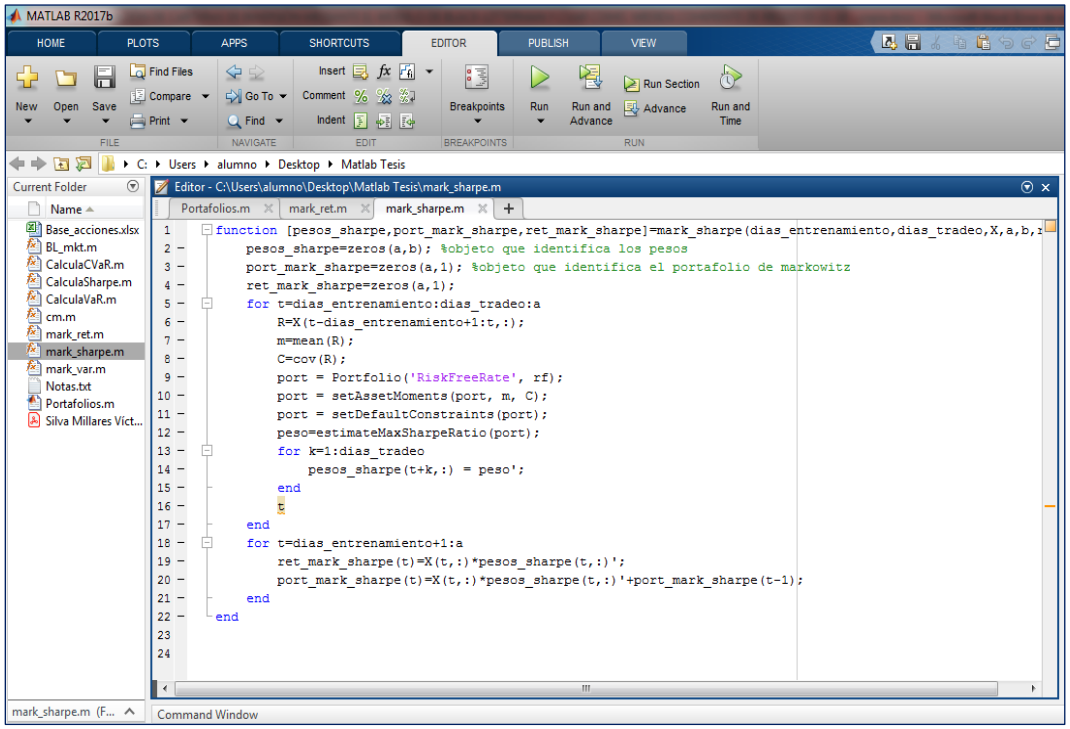
Para la obtención de resultados, se programó en el software Matlab, 3 portafolios de Markowitz los cuales maximizan el retorno, el índice de Sharpe y minimizan la varianza, con la única restricción de que la suma de pesos sea 1.

Figura 4. Visualización de portafolio de Markowitz que maximiza Retorno.



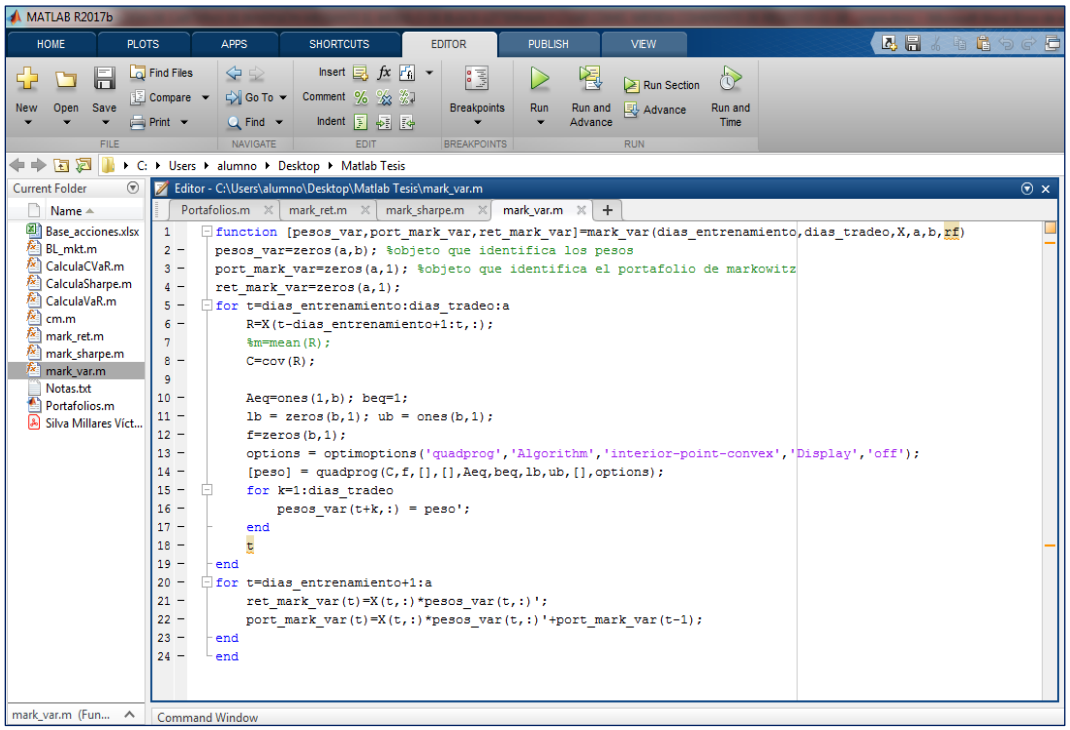
Fuente: Elaboración propia Matlab.

Figura 5. Visualización de portafolio de Markowitz que maximiza Índice de Sharpe.



Fuente: Elaboración propia Matlab.

Figura 6. Visualización de portafolio de Markowitz que minimiza Varianza.



Fuente: Elaboración propia Matlab.

4.2 Implementación del modelo de Black-Litterman

El primer paso para implementar el modelo fue seleccionar los activos que serían analizados. Para ello se escogieron 25 activos con 100% de presencia bursátil. Estos activos fueron seleccionados desde el IPSA entre el 1 de julio del 2010 y el 31 de julio del 2018.

Tabla 2. Activos analizados para la implementación del modelo

	Peso Capitalización
FALABELLA	14,46%
ENTEL	2,33%
AESGENER	2,84%
CENCOSUD	7,08%
LATAM	4,92%
EMB. ANDINA S.A.	2,43%
SANTANDER	8,27%
CMPC	5,09%
CAP	1,92%
SOQUIMICH-B	2,87%
VIÑA CONCHA TORO	1,00%
SONDA	1,30%
RIPLEY	1,06%
PARQUE ARAUCO	1,17%
CERVECERIAS UNIDAS	2,93%
ANTAR CHILE	4,49%
ENGIE ENERGIA CHILE	1,39%
SALFACORP	0,45%
COLBUN	3,12%
BANCO DE CREDITO E INVERSIONES	4,32%
ENEL AMERICAS	9,09%
IAM SA	1,15%
BANCO DE CHILE	8,48%
ENEL GENERACION CHILE	7,46%
BESALCO	0,39%

Fuente: elaboración propia, en base a información proporcionada por Bloomberg

Los datos mostrados en la tabla 2 corresponden al portafolio base de este estudio. El modelo de Black-Litterman menciona que la capitalización de mercado de los distintos activos determinara el peso (w) en la cartera de mercado, el cual se muestra en la tabla como “Peso Capitalización”.

4.3 Análisis de las View:

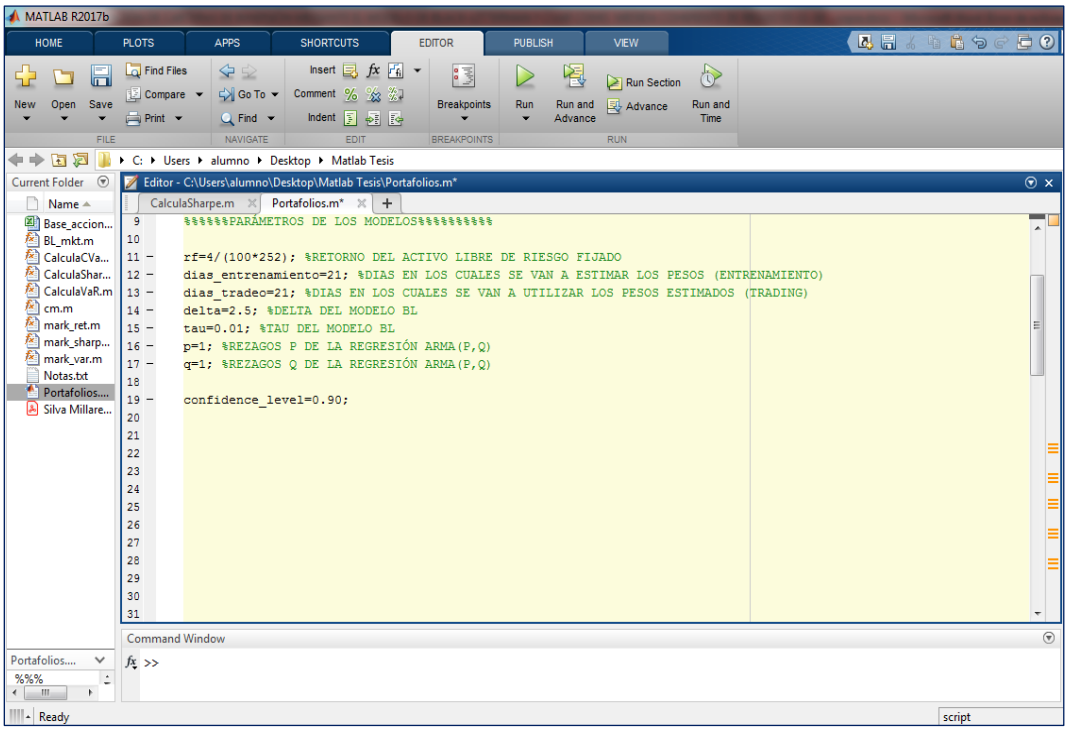
Unos de los puntos más innovadores del modelo de Black-Litteraman es, sin lugar a duda, la incorporación de las views en su modelo. Como se explicó anteriormente al modelo se le pueden incorporar views relativas y absolutas, para este trabajo se decidió omitir las views relativas.

Usualmente modelo de BL usa predicciones de analistas o expertos, y según lo que ellos crean que va a suceder con las acciones se ajusta el modelo. En el presente trabajo las predicciones no vienen dadas por expertos, sino que por un modelo ARMA (auto regresivo de media móvil), el cual mediante el uso de datos del pasado permitirá predecir períodos siguientes.

La mayoría de los autores especifica el valor de δ de forma diferente basados en su experiencia como inversionistas, para este estudio se ocupa un δ de 2,5 el cual representa la aversión al riesgo promedio mundial.(Michaud, 1989)

Se considera un valor para τ de 0,01, que es la magnitud recomendada por los autores del modelo.

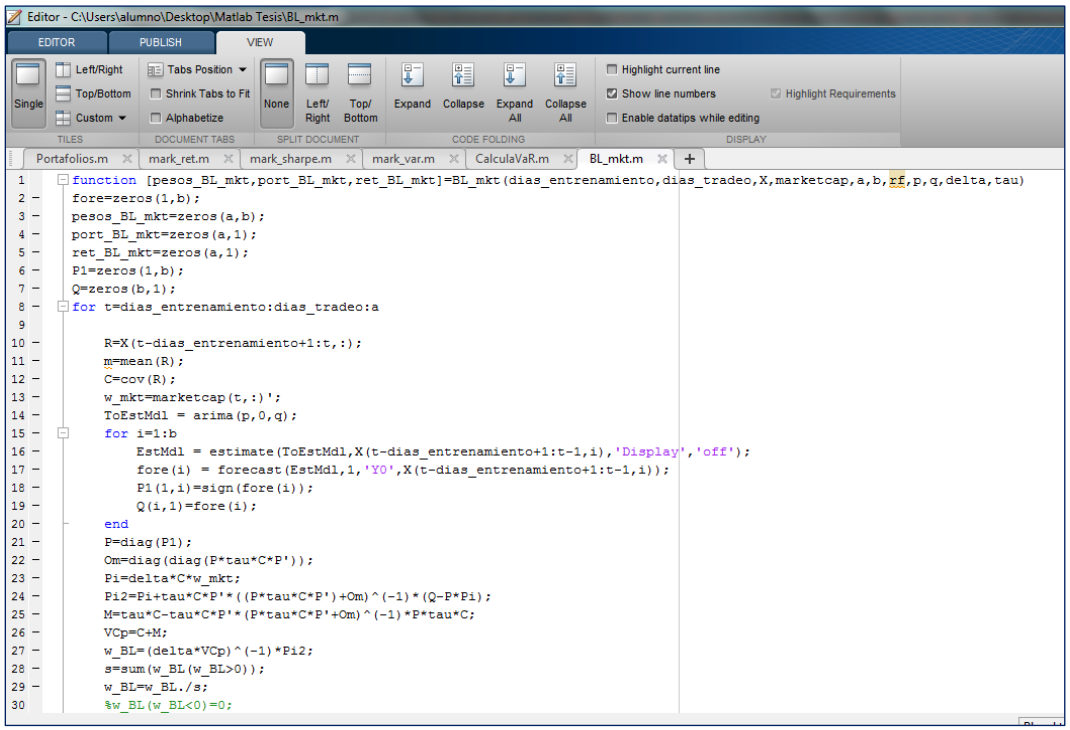
Figura 7. Visualización de los parámetros utilizados en el modelo de Black-Litterman.



Fuente: Elaboración propia Matlab.

El portafolio de Black-Litterman esta hecho en base a su modelo canónico, en donde las matrices P y Q estan confeccionadas en base a una predicción hecha por un modelo ARMA(p,q).

Figura 8. Visualización de portafolio de Black-Litterman.



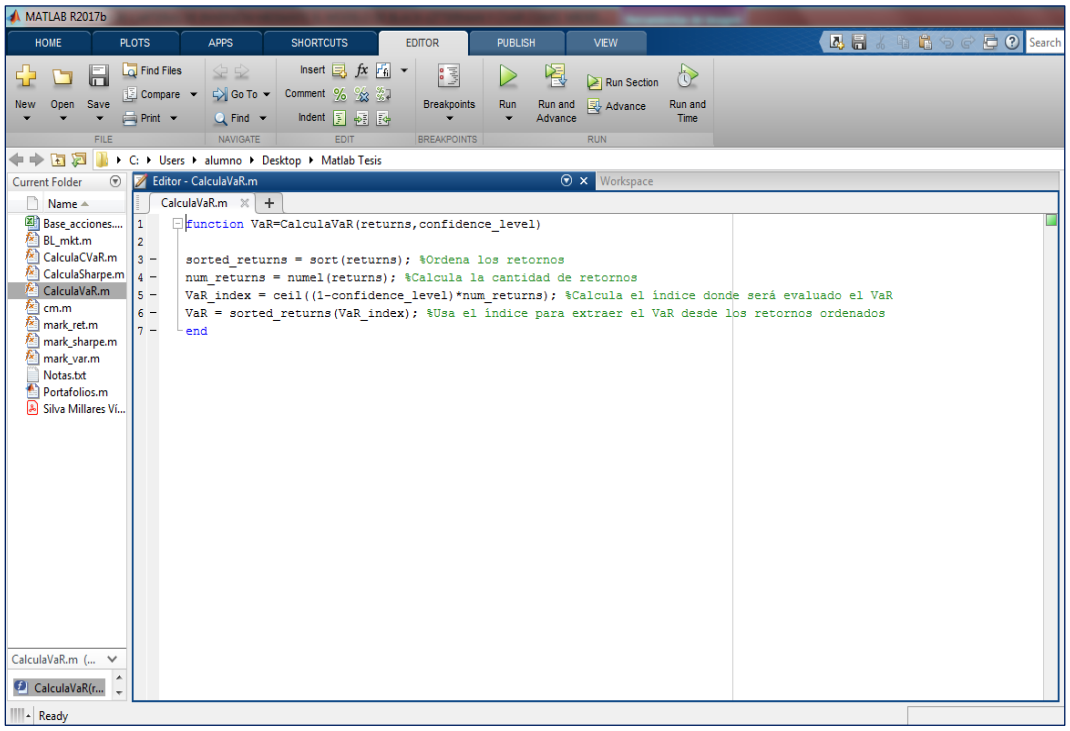
Fuente: Elaboración propia Matlab.

Todos los portafolios tienen un enfoque real, es decir hay un periodo de entrenamiento previo donde se calculan los pesos de cada acción y posterior a eso hay un periodo de trading con estos pesos, una vez terminado este periodo se vuelven a calcular los pesos y asi sucesivamente.

Adicionalmente a los portafolios de Markowitz y Black-Litterman se generó un portafolio adicional que será timado como caso base, el cual considera la opción de comprar y mantener las acciones

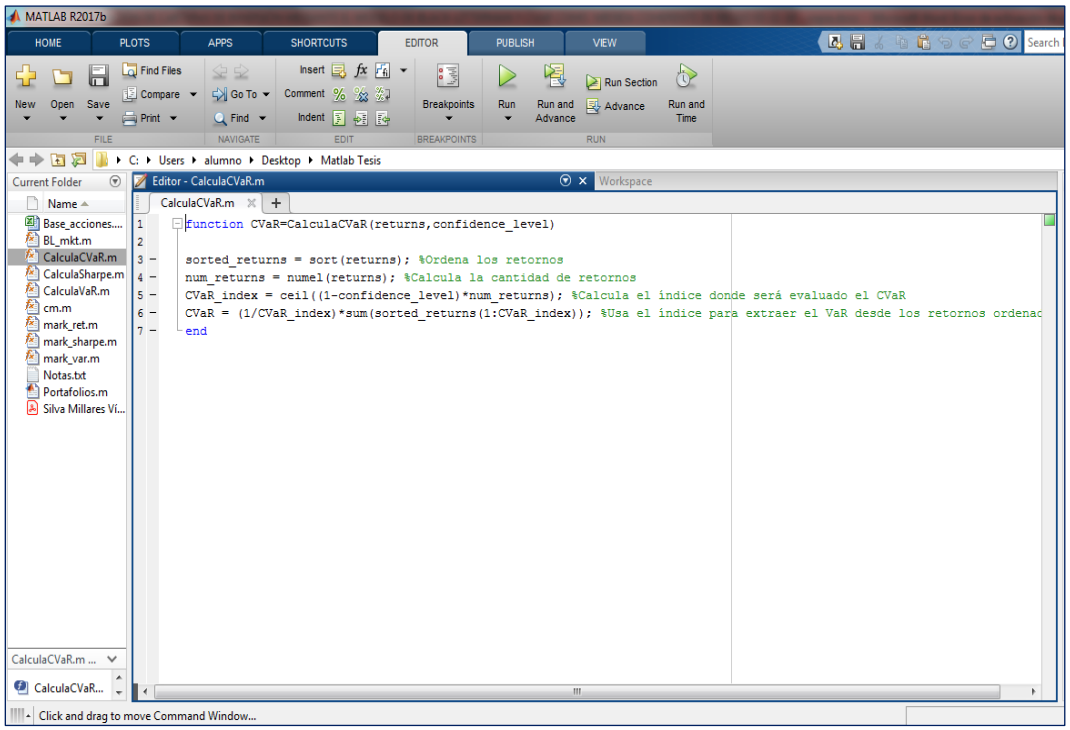
Cada Portafolio tiene calculado su VaR, CVaR y Sharpe, para un R_f = 4% y para niveles de confiabilidad del 90%, 95% y 99%.

Figura 9. Visualización del cálculo del VaR.



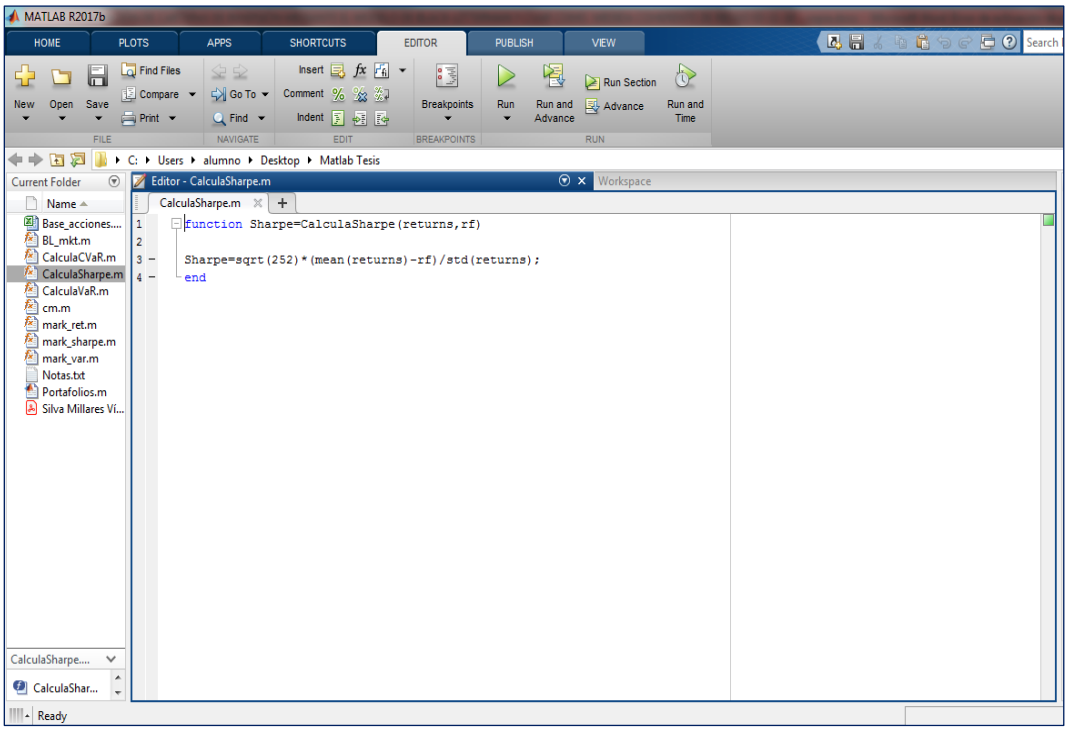
Fuente: Elaboración propia Matlab.

Figura 10. Visualización del cálculo del CVaR.



Fuente: Elaboración propia Matlab.

Figura 11. Visualización del cálculo del Índice de Sharpe.



Fuente: Elaboración propia Matlab.

5. RESULTADOS

En la figura 12 se representa la frontera de carteras eficientes que nos ha proporcionado el modelo de Markowitz.

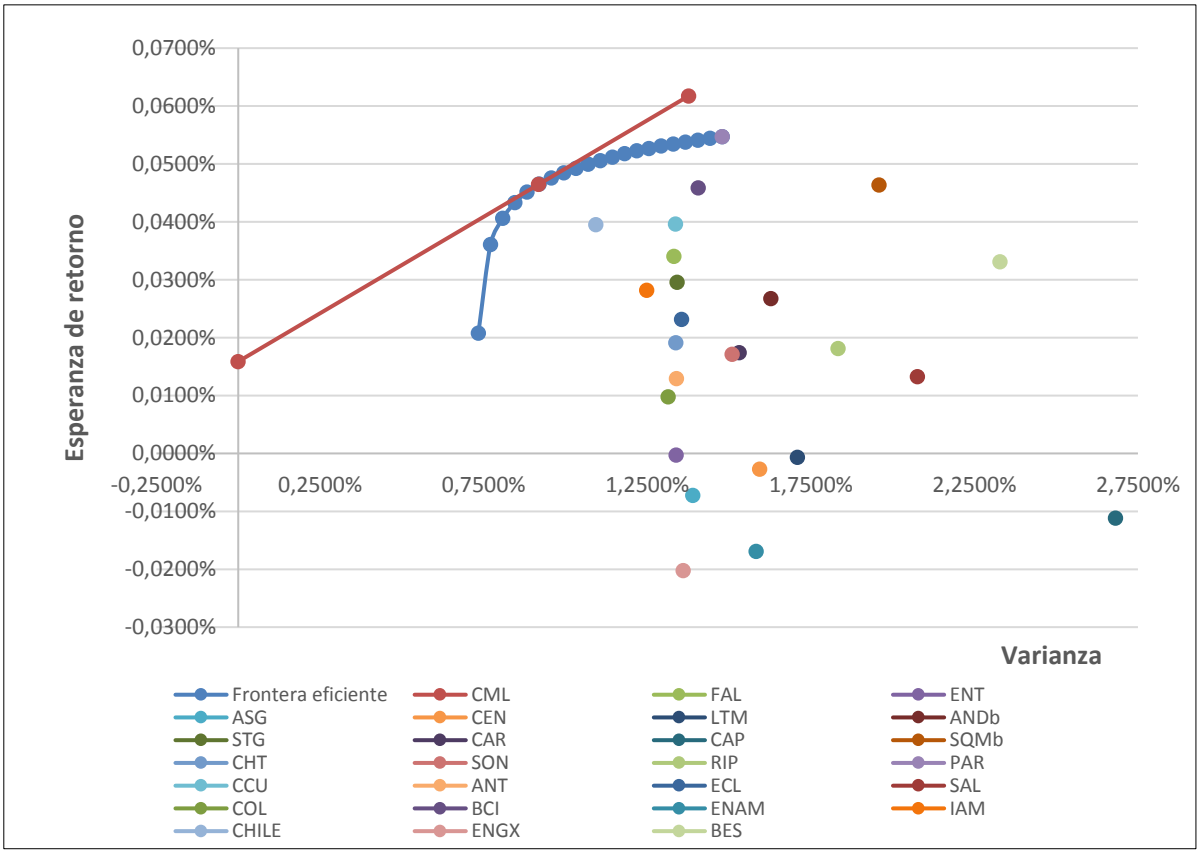


Figura 12. Frontera Eficiente de Markowitz.

En la tabla 3 se muestra el valor del índice de Sharpe para las carteras eficientes.

	σp	E(Rp)	I.Sharpe
PMV	0,7340%	0,0208%	0,0067
Port1	0,7713%	0,0361%	0,0262
Port2	0,8085%	0,0406%	0,0306
Port3	0,8458%	0,0433%	0,0325
Port4	0,8831%	0,0451%	0,0331
Port5	0,9203%	0,0465%	0,0333
Port6	0,9576%	0,0476%	0,0331
Port7	0,9948%	0,0485%	0,0328
Port8	1,0321%	0,0492%	0,0323
Port9	1,0694%	0,0499%	0,0318
Port10	1,1066%	0,0506%	0,0314
Port11	1,1439%	0,0512%	0,0309
Port12	1,1811%	0,0517%	0,0304
Port13	1,2184%	0,0522%	0,0299
Port14	1,2556%	0,0527%	0,0293
Port15	1,2929%	0,0531%	0,0288
Port16	1,3302%	0,0534%	0,0282
Port17	1,3674%	0,0538%	0,0277
Port18	1,4047%	0,0541%	0,0272
Port19	1,4419%	0,0544%	0,0267
PMR	1,4792%	0,0547%	0,0263

Tabla 3. Riesgo, rentabilidad e índices de Sharpe de los portafolios

A continuación se muestra la composición del portafolio de acciones consierando los casos de optimización por mínima varianza, máximo Índice de Sharpe y Máximo Retorno.

Portafolio de Mínima Varianza				
FAL	ENT	ASG	CEN	LTM
0,60%	6,91%	6,06%	0%	0%
ANDb	STG	CAR	CAP	SQMb
2,62%	0%	0%	0%	0%
CHT	SON	RIP	PAR	CCU
9,04%	1,85%	0,54%	3,10%	10,65%
ANT	ECL	SAL	COL	BCI
7,67%	7,87%	0%	4,41%	0%
ENAM	IAM	CHILE	ENGX	BES
0%	17,01%	14,52%	7,17%	0%

Tabla 4. Portafolio de Mínima Varianza

Portafolio de Máximo Índice de Sharpe				
FAL	ENT	ASG	CEN	LTM
0%	0%	0%	0%	0%
ANDb	STG	CAR	CAP	SQMb
0%	0%	0%	0%	6,74%
CHT	SON	RIP	PAR	CCU
0%	0%	0%	35,01%	17,55%
ANT	ECL	SAL	COL	BCI
0%	0%	0%	0%	17,87%
ENAM	IAM	CHILE	ENGX	BES
0%	0%	22,82%	0%	0%

Tabla 5. Portafolio de Máximo Sharpe

Portafolio de Máximo Retorno				
FAL	ENT	ASG	CEN	LTM
0%	0%	0%	0%	0%
ANDb	STG	CAR	CAP	SQMb
0%	0%	0%	0%	0%
CHT	SON	RIP	PAR	CCU
0%	0%	0%	100%	0%
ANT	ECL	SAL	COL	BCI
0%	0%	0%	0%	0%
ENAM	IAM	CHILE	ENGX	BES
0%	0%	0%	0%	0%

Tabla 6. Portafolio de Máximo Retorno

A continuación se muestra una serie de gráficos que reflejan el retorno acumulado histórico del portafolio de acciones seleccionado a lo largo de ocho años, mostranto la evolución diaria.

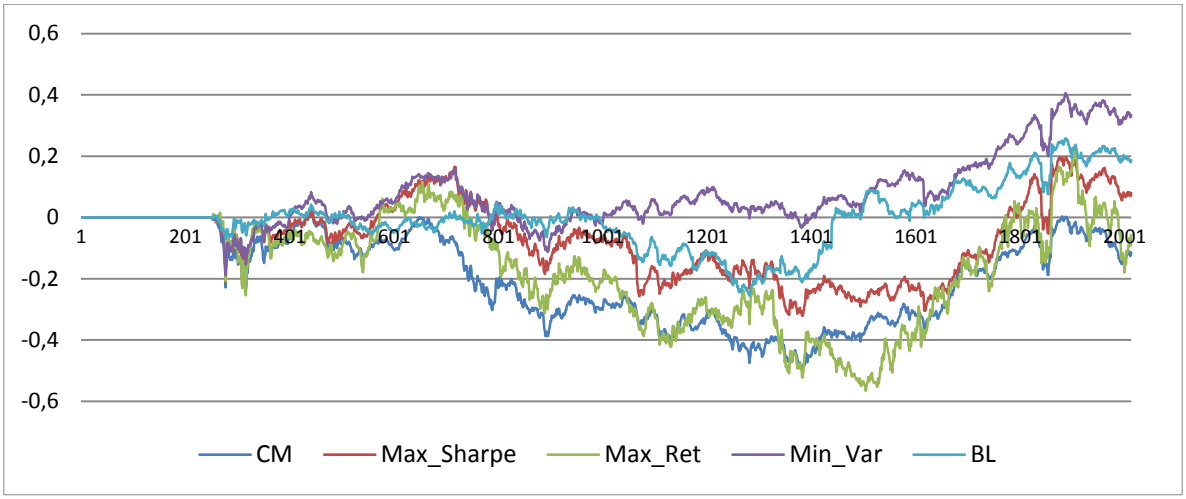


Figura 13. Retorno acumulado histórico portafolio con 252 días de entrenamiento y 252 días de trading.

El retorno promedio para cada uno de los portafolios se detalla a continuación:

CM	Max_Sharpe	Max_Ret	Min_Var	BL
-21,82%	-7,87%	-18,02%	8,06%	-0,25%

Los cálculos de VaR, CVaR e I. Sharpe para este primer caso se muestran en la tabla 7.

Portafolio	confidence_level=0,90			confidence_level=0,95			confidence_level=0,99		
	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe
CM	-0,94%	-1,53%	-41,21%	-1,31%	-1,96%	-41,21%	-2,13%	-3,41%	-41,21%
Max_Sharpe	-1,13%	-1,85%	-17,20%	-1,51%	-2,39%	-17,20%	-2,86%	-4,44%	-17,20%
Max_Ret	-1,82%	-2,85%	-18,65%	-2,44%	-3,62%	-18,65%	-4,33%	-5,71%	-18,65%
Min_Var	-0,80%	-1,36%	6,08%	-1,05%	-1,79%	6,08%	-2,07%	-3,41%	6,08%
BL	-0,77%	-1,22%	-11,02%	-1,06%	-1,57%	-11,02%	-1,83%	-2,61%	-11,02%

Tabla 7. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 252 días de entrenamiento y 252 días de trading.

En la figura 14 se aprecia el retorno acumulado histórico, para el mismo período de tiempo, utilizando 252 días de entrenamiento y 126 días de trading.

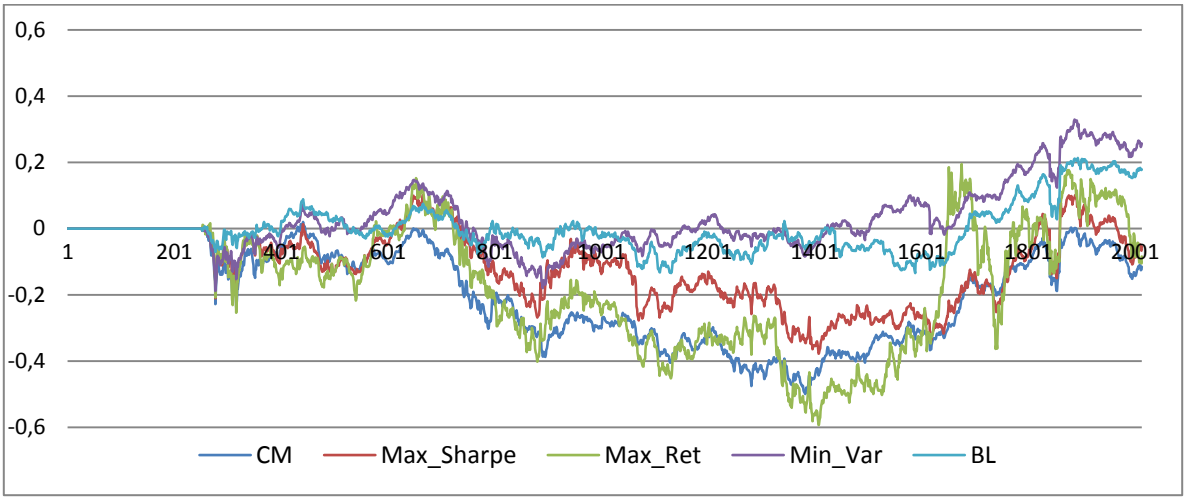


Figura 14. Retorno acumulado histórico portafolio con 252 días de entrenamiento y 126 días de trading.

El retorno promedio para cada uno de los portafolios se detalla a continuación:

CM	Max_Sharpe	Max_Ret	Min_Var	BL
-21,82%	-13,06%	-18,62%	3,18%	0,03%

Los cálculos de VaR, CVaR e I. Sharpe para este caso se muestran en la tabla 8.

Portafolio	confidence_level=0,90			confidence_level=0,95			confidence_level=0,99		
	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe
CM	-0,94%	-1,53%	-41,21%	-1,31%	-1,96%	-41,21%	-2,13%	-3,41%	-41,21%
Max_Sharpe	-1,25%	-2,02%	-26,17%	-1,69%	-2,60%	-26,17%	-3,06%	-4,56%	-26,17%
Max_Ret	-1,98%	-3,28%	-17,48%	-2,90%	-4,20%	-17,48%	-5,20%	-6,31%	-17,48%
Min_Var	-0,78%	-1,34%	-2,67%	-1,08%	-1,77%	-2,67%	-2,07%	-3,31%	-2,67%
BL	-0,76%	-1,22%	-12,35%	-1,06%	-1,54%	-12,35%	-1,74%	-2,60%	-12,35%

Tabla 8. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 252 días de entrenamiento y 126 días de trading.

La figura 15 muestra el retorno acumulado histórico, utilizando 252 días de entrenamiento y 63 días de trading.

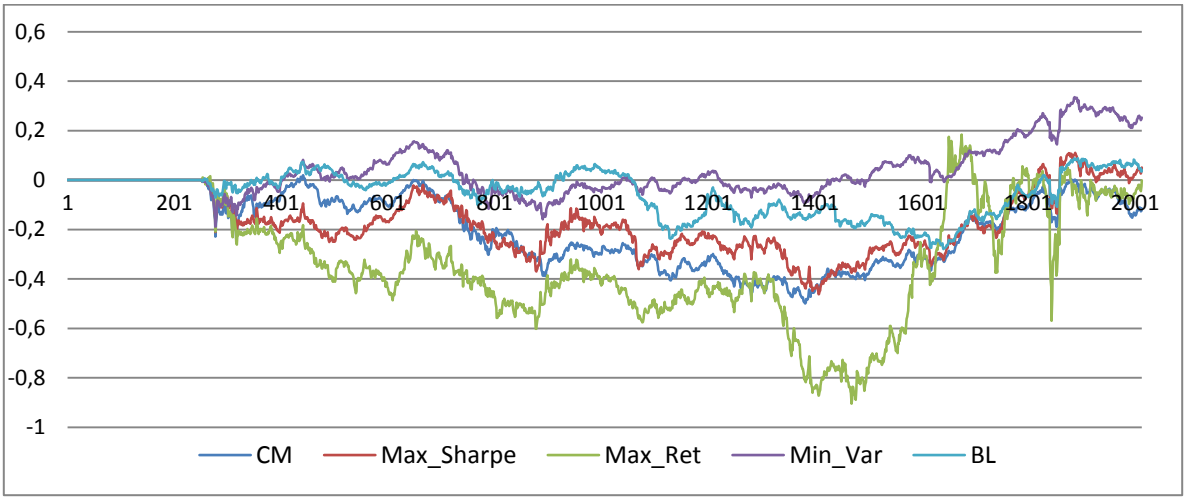


Figura 15. Retorno acumulado histórico portafolio con 252 días de entrenamiento y 63 días de trading.

El retorno promedio para cada uno de los portafolios se detalla a continuación:

CM	Max_Sharpe	Max_Ret	Min_Var	BL
-21,82%	-18,95%	-35,41%	3,87%	-5,95%

Los cálculos de VaR, CVaR e I. Sharpe para este caso se muestran en la tabla 9.

Portafolio	confidence_level=0,90			confidence_level=0,95			confidence_level=0,99		
	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe
CM	-0,94%	-1,53%	-41,21%	-1,31%	-1,96%	-41,21%	-2,13%	-3,41%	-41,21%
Max_Sharpe	-1,23%	-2,05%	-17,67%	-1,71%	-2,66%	-17,67%	-3,30%	-4,69%	-17,67%
Max_Ret	-2,00%	-3,57%	-11,65%	-2,94%	-4,74%	-11,65%	-5,80%	-8,09%	-11,65%
Min_Var	-0,77%	-1,32%	-3,12%	-1,07%	-1,73%	-3,12%	-2,04%	-3,19%	-3,12%
BL	-0,83%	-1,32%	-28,17%	-1,13%	-1,67%	-28,17%	-1,91%	-2,81%	-28,17%

Tabla 9. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 252 días de entrenamiento y 63 días de trading.

La figura 16 muestra el retorno acumulado histórico, utilizando 252 días de entrenamiento y 21 días de trading.

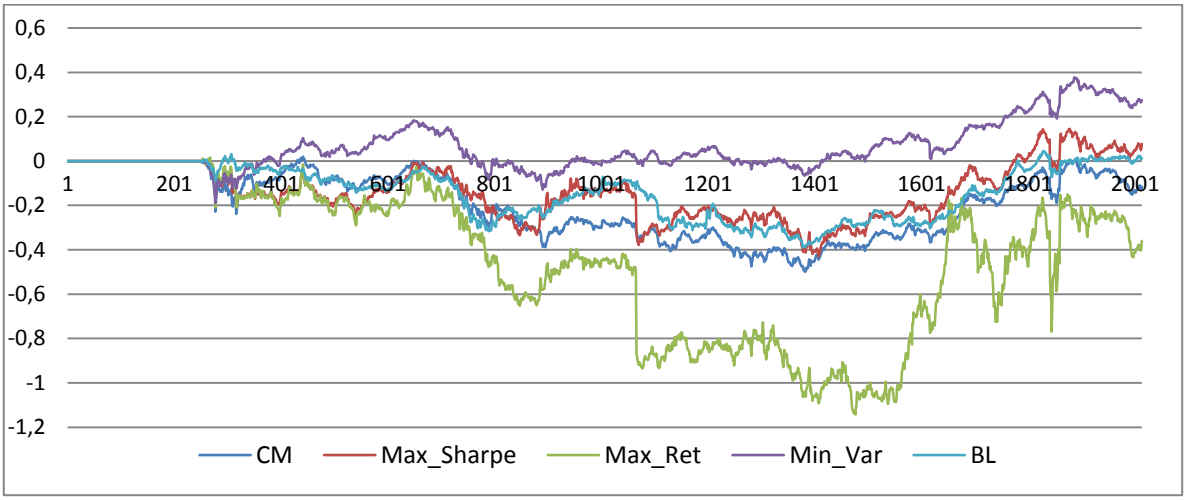


Figura 16. Retorno acumulado histórico portafolio con 252 días de entrenamiento y 21 días de trading.

El retorno promedio para cada uno de los portafolios se detalla a continuación:

CM	Max_Sharpe	Max_Ret	Min_Var	BL
-21,82%	-15,57%	-49,46%	6,84%	-15,70%

Los cálculos de VaR, CVaR e I. Sharpe para este caso se muestran en la tabla 10.

Portafolio	confidence_level=0,90			confidence_level=0,95			confidence_level=0,99		
	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe
CM	-0,94%	-1,53%	-41,21%	-1,31%	-1,96%	-41,21%	-2,13%	-3,41%	-41,21%
Max_Sharpe	-1,24%	-2,07%	-15,27%	-1,70%	-2,69%	-15,27%	-3,00%	-5,09%	-15,27%
Max_Ret	-2,08%	-3,88%	-24,35%	-3,11%	-5,20%	-24,35%	-5,80%	-9,80%	-24,35%
Min_Var	-0,77%	-1,31%	-0,71%	-1,07%	-1,71%	-0,71%	-2,04%	-3,16%	-0,71%
BL	-0,81%	-1,30%	-33,16%	-1,13%	-1,65%	-33,16%	-1,84%	-2,56%	-33,16%

Tabla 10. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 252 días de entrenamiento y 21 días de trading.

La figura 17 muestra el retorno acumulado histórico, utilizando 126 días de entrenamiento y 252 días de trading.

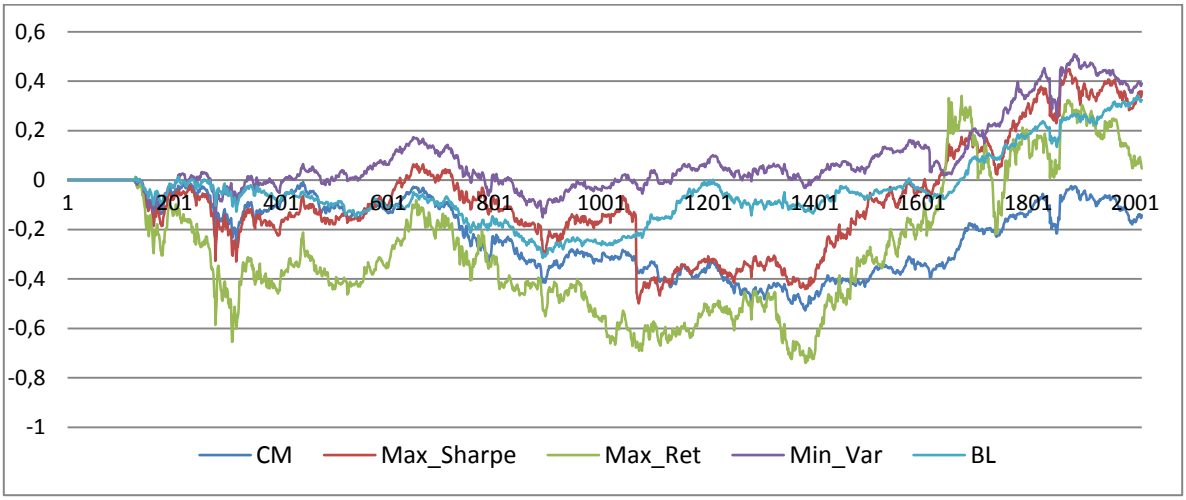


Figura 17. Retorno acumulado histórico portafolio con 126 días de entrenamiento y 252 días de trading.

El retorno promedio para cada uno de los portafolios se detalla a continuación:

CM	Max_Sharpe	Max_Ret	Min_Var	BL
-23,30%	-8,86%	-28,96%	8,22%	-5,09%

Los cálculos de VaR, CVaR e I. Sharpe para este caso se muestran en la tabla 11.

Portafolio	confidence_level=0,90			confidence_level=0,95			confidence_level=0,99		
	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe
CM	-0,96%	-1,55%	-42,89%	-1,34%	-1,96%	-42,89%	-2,13%	-3,38%	-42,89%
Max_Sharpe	-1,32%	-2,22%	3,67%	-1,84%	-2,89%	3,67%	-3,04%	-5,69%	3,67%
Max_Ret	-2,16%	-3,50%	-10,64%	-3,06%	-4,45%	-10,64%	-5,25%	-6,70%	-10,64%
Min_Var	-0,87%	-1,47%	8,65%	-1,18%	-1,93%	8,65%	-2,18%	-3,61%	8,65%
BL	-0,78%	-1,24%	2,76%	-1,09%	-1,55%	2,76%	-1,84%	-2,56%	2,76%

Tabla 11. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 126 días de entrenamiento y 252 días de trading.

La figura 18 muestra el retorno acumulado histórico, utilizando 126 días de entrenamiento y 126 días de trading.

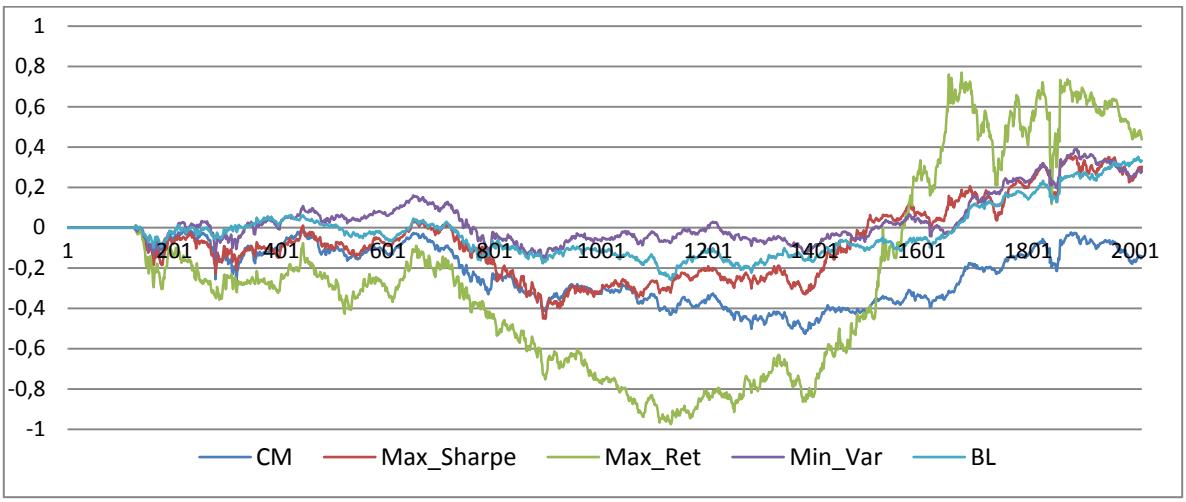


Figura 18. Retorno acumulado histórico portafolio con 126 días de entrenamiento y 126 días de trading.

El retorno promedio para cada uno de los portafolios se detalla a continuación:

CM	Max_Sharpe	Max_Ret	Min_Var	BL
-23,30%	-7,42%	-24,71%	3,58%	-2,53%

Los cálculos de VaR, CVaR e I. Sharpe para este caso se muestran en la tabla 12.

Portafolio	confidence_level=0,90			confidence_level=0,95			confidence_level=0,99		
	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe
CM	-0,96%	-1,55%	-42,89%	-1,34%	-1,96%	-42,89%	-2,13%	-3,38%	-42,89%
Max_Sharpe	-1,25%	-1,97%	0,20%	-1,74%	-2,48%	0,20%	-2,90%	-3,89%	0,20%
Max_Ret	-2,14%	-3,58%	5,24%	-2,96%	-4,66%	5,24%	-5,14%	-8,05%	5,24%
Min_Var	-0,85%	-1,40%	-2,03%	-1,15%	-1,82%	-2,03%	-2,10%	-3,21%	-2,03%
BL	-0,77%	-1,16%	3,97%	-1,08%	-1,43%	3,97%	-1,57%	-2,08%	3,97%

Tabla 12. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 126 días de entrenamiento y 126 días de trading.

La figura 19 muestra el retorno acumulado histórico, utilizando 126 días de entrenamiento y 63 días de trading.

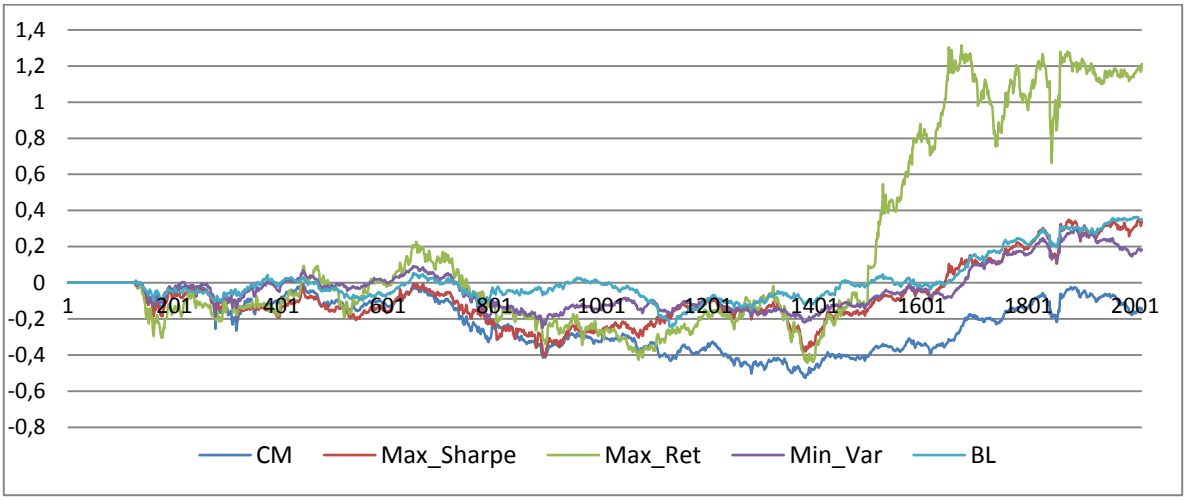


Figura 19. Retorno acumulado histórico portafolio con 126 días de entrenamiento y 63 días de trading.

El retorno promedio para cada uno de los portafolios se detalla a continuación:

CM	Max_Sharpe	Max_Ret	Min_Var	BL
-23,30%	-8,40%	16,05%	-3,39%	0,80%

Los cálculos de VaR, CVaR e I. Sharpe para este caso se muestran en la tabla 13.

Portafolio	confidence_level=0,90			confidence_level=0,95			confidence_level=0,99		
	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe
CM	-0,96%	-1,55%	-42,89%	-1,34%	-1,96%	-42,89%	-2,13%	-3,38%	-42,89%
Max_Sharpe	-1,26%	-2,00%	3,00%	-1,74%	-2,53%	3,00%	-2,90%	-4,11%	3,00%
Max_Ret	-2,15%	-3,64%	33,81%	-2,99%	-4,76%	33,81%	-5,23%	-8,10%	33,81%
Min_Var	-0,84%	-1,35%	-12,49%	-1,13%	-1,75%	-12,49%	-2,01%	-3,08%	-12,49%
BL	-0,75%	-1,18%	6,47%	-1,09%	-1,46%	6,47%	-1,70%	-2,18%	6,47%

Tabla 13. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 126 días de entrenamiento y 63 días de trading.

La figura 20 muestra el retorno acumulado histórico, utilizando 126 días de entrenamiento y 21 días de trading.

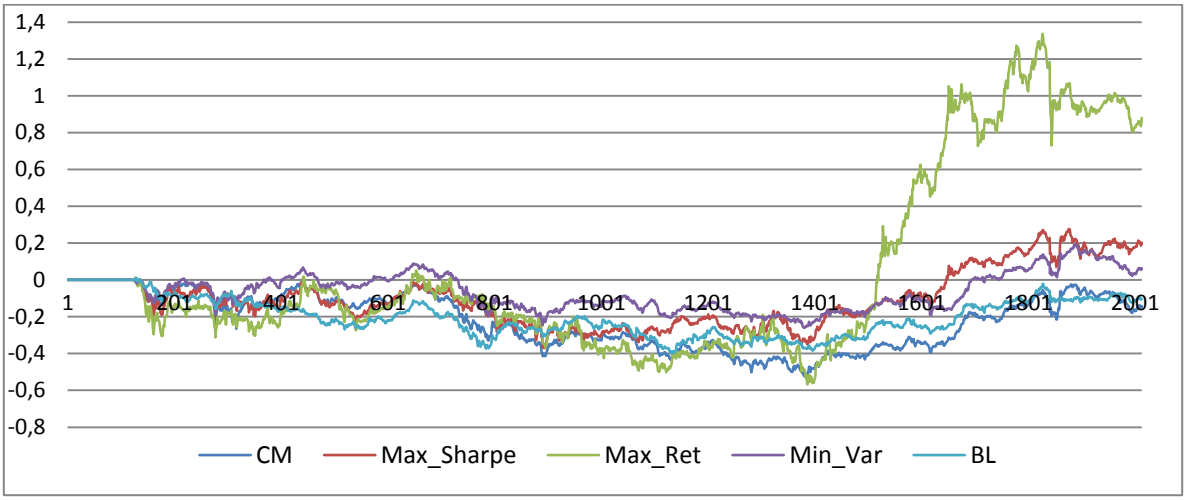


Figura 20. Retorno acumulado histórico portafolio con 126 días de entrenamiento y 21 días de trading.

El retorno promedio para cada uno de los portafolios se detalla a continuación:

CM	Max_Sharpe	Max_Ret	Min_Var	BL
-23,30%	-11,04%	4,10%	-6,82%	-21,32%

Los cálculos de VaR, CVaR e I. Sharpe para este caso se muestran en la tabla 14.

Portafolio	confidence_level=0,90			confidence_level=0,95			confidence_level=0,99		
	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe
CM	-0,96%	-1,55%	-42,89%	-1,34%	-1,96%	-42,89%	-2,13%	-3,38%	-42,89%
Max_Sharpe	-1,27%	-2,08%	-7,23%	-1,84%	-2,63%	-7,23%	-2,94%	-4,15%	-7,23%
Max_Ret	-2,12%	-3,58%	23,26%	-2,99%	-4,66%	23,26%	-5,26%	-7,81%	23,26%
Min_Var	-0,82%	-1,36%	-25,73%	-1,16%	-1,76%	-25,73%	-2,07%	-3,09%	-25,73%
BL	-0,79%	-1,18%	-50,25%	-1,05%	-1,45%	-50,25%	-1,58%	-2,18%	-50,25%

Tabla 14. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 126 días de entrenamiento y 21 días de trading.

La figura 21 muestra el retorno acumulado histórico, utilizando 63 días de entrenamiento y 252 días de trading.

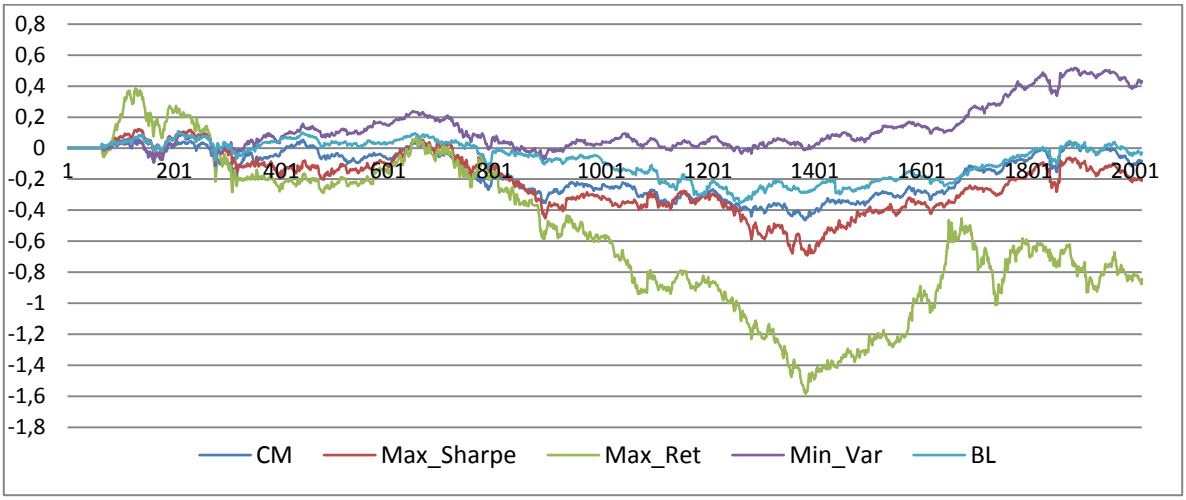


Figura 21. Retorno acumulado histórico portafolio con 63 días de entrenamiento y 252 días de trading.

El retorno promedio para cada uno de los portafolios se detalla a continuación:

CM	Max_Sharpe	Max_Ret	Min_Var	BL
-16,51%	-22,41%	-55,97%	12,22%	-7,74%

Los cálculos de VaR, CVaR e I. Sharpe para este caso se muestran en la tabla 15.

Portafolio	confidence_level=0,90			confidence_level=0,95			confidence_level=0,99		
	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe
CM	-0,96%	-1,53%	-36,97%	-1,34%	-1,94%	-36,97%	-2,13%	-3,31%	-36,97%
Max_Sharpe	-1,36%	-2,16%	-34,42%	-1,85%	-2,73%	-34,42%	-3,20%	-4,42%	-34,42%
Max_Ret	-2,34%	-3,65%	-45,56%	-3,20%	-4,55%	-45,56%	-5,23%	-6,74%	-45,56%
Min_Var	-0,88%	-1,45%	12,00%	-1,26%	-1,87%	12,00%	-2,11%	-3,03%	12,00%
BL	-0,86%	-1,39%	-35,06%	-1,13%	-1,79%	-35,06%	-1,90%	-3,13%	-35,06%

Tabla 15. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 63 días de entrenamiento y 252 días de trading.

La figura 22 muestra el retorno acumulado histórico, utilizando 63 días de entrenamiento y 126 días de trading.

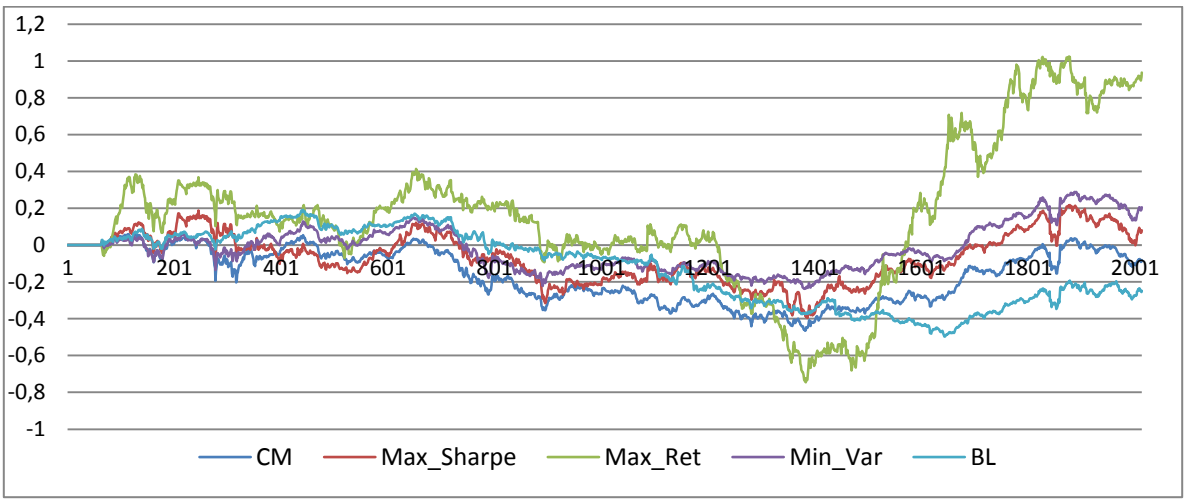


Figura 22. Retorno acumulado histórico portafolio con 63 días de entrenamiento y 126 días de trading.

El retorno promedio para cada uno de los portafolios se detalla a continuación:

CM	Max_Sharpe	Max_Ret	Min_Var	BL
-16,51%	-6,63%	16,73%	-1,42%	-12,38%

Los cálculos de VaR, CVaR e I. Sharpe para este caso se muestran en la tabla 16.

	confidence_level=0,90			confidence_level=0,95			confidence_level=0,99		
Portafolio	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe
CM	-0,96%	-1,53%	-36,97%	-1,34%	-1,94%	-36,97%	-2,13%	-3,31%	-36,97%
Max_Sharpe	-1,28%	-2,04%	-16,07%	-1,77%	-2,57%	-16,07%	-3,08%	-4,11%	-16,07%
Max_Ret	-2,22%	-3,45%	24,98%	-3,00%	-4,34%	24,98%	-5,06%	-6,50%	24,98%
Min_Var	-0,85%	-1,40%	-10,66%	-1,16%	-1,80%	-10,66%	-2,13%	-2,94%	-10,66%
BL	-0,84%	-1,34%	-61,77%	-1,14%	-1,69%	-61,77%	-1,86%	-2,66%	-61,77%

Tabla 16. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 63 días de entrenamiento y 126 días de trading.

La figura 23 muestra el retorno acumulado histórico, utilizando 63 días de entrenamiento y 63 días de trading.

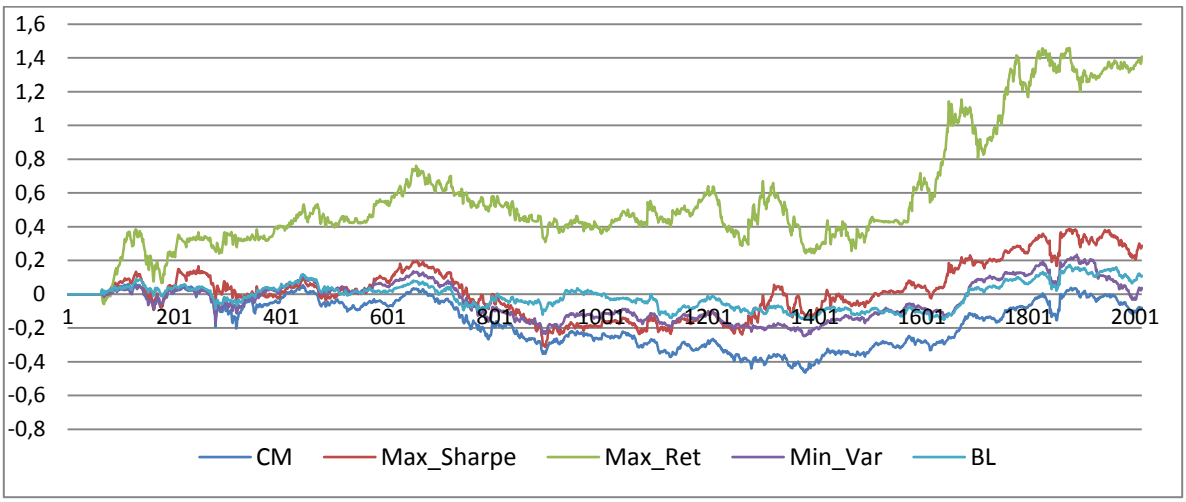


Figura 23. Retorno acumulado histórico portafolio con 63 días de entrenamiento y 63 días de trading.

El retorno promedio para cada uno de los portafolios se detalla a continuación:

CM	Max_Sharpe	Max_Ret	Min_Var	BL
-16,51%	2,33%	58,54%	-4,01%	-0,97%

Los cálculos de VaR, CVaR e I. Sharpe para este caso se muestran en la tabla 17.

	confidence_level=0,90			confidence_level=0,95			confidence_level=0,99		
Portafolio	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe
CM	-0,96%	-1,53%	-36,97%	-1,34%	-1,94%	-36,97%	-2,13%	-3,31%	-2,13%
Max_Sharpe	-1,28%	-2,09%	-1,57%	-1,78%	-2,66%	-1,57%	-3,15%	-4,19%	-3,15%
Max_Ret	-2,06%	-3,29%	45,66%	-2,90%	-4,18%	45,66%	-5,06%	-6,05%	-5,06%
Min_Var	-0,84%	-1,40%	-27,85%	-1,18%	-1,81%	-27,85%	-2,16%	-3,11%	-2,16%
BL	-0,79%	-1,22%	-23,23%	-1,07%	-1,52%	-23,23%	-1,78%	-2,30%	-1,78%

Tabla 17. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 63 días de entrenamiento y 63 días de trading.

La figura 24 muestra el retorno acumulado histórico, utilizando 63 días de entrenamiento y 21 días de trading.

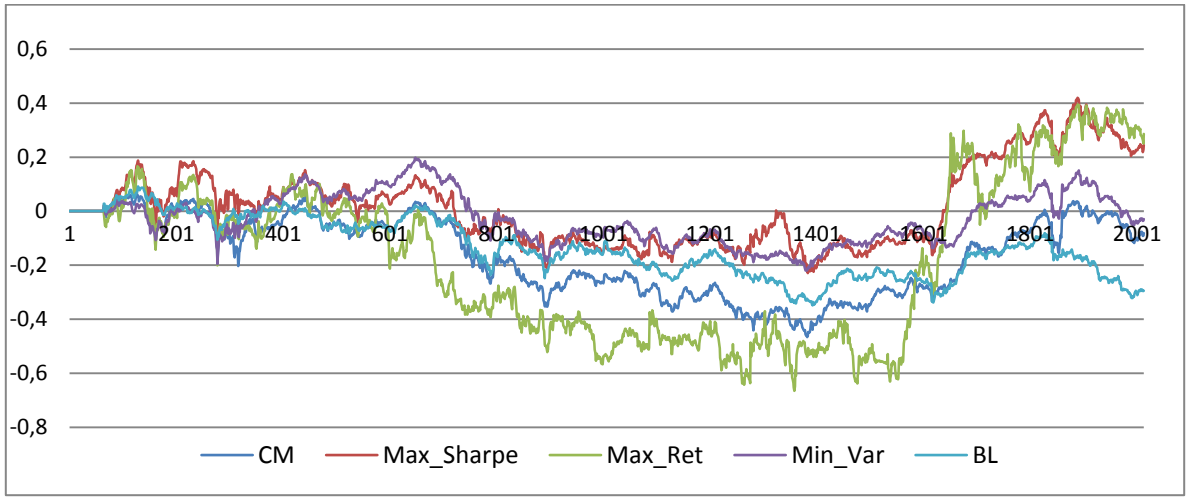


Figura 24. Retorno acumulado histórico portafolio con 63 días de entrenamiento y 21 días de trading.

El retorno promedio para cada uno de los portafolios se detalla a continuación:

CM	Max_Sharpe	Max_Ret	Min_Var	BL
-16,51%	1,88%	-17,43%	-2,82%	-13,74%

Los cálculos de VaR, CVaR e I. Sharpe para este caso se muestran en la tabla 18.

Portafolio	confidence_level=0,90			confidence_level=0,95			confidence_level=0,99		
	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe
CM	-0,96%	-1,53%	-36,97%	-1,34%	-1,94%	-36,97%	-2,13%	-3,31%	-36,97%
Max_Sharpe	-1,22%	-2,07%	-4,52%	-1,78%	-2,67%	-4,52%	-3,08%	-4,40%	-4,52%
Max_Ret	-2,15%	-3,36%	-0,98%	-3,03%	-4,23%	-0,98%	-5,10%	-6,15%	-0,98%
Min_Var	-0,84%	-1,33%	-36,15%	-1,11%	-1,71%	-36,15%	-2,05%	-2,96%	-36,15%
BL	-0,78%	-1,19%	-74,10%	-1,06%	-1,47%	-74,10%	-1,60%	-2,22%	-74,10%

Tabla 18. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 63 días de entrenamiento y 21 días de trading.

La figura 25 muestra el retorno acumulado histórico, utilizando 21 días de entrenamiento y 252 días de trading.

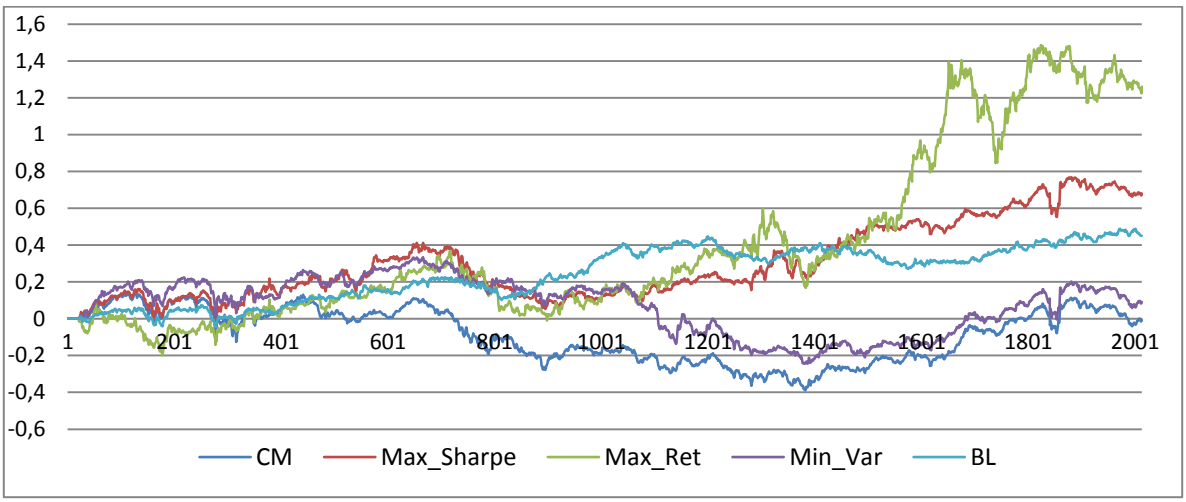


Figura 25. Retorno acumulado histórico portafolio con 21 días de entrenamiento y 252 días de trading.

El retorno promedio para cada uno de los portafolios se detalla a continuación:

CM	Max_Sharpe	Max_Ret	Min_Var	BL
-8,57%	30,43%	40,25%	7,56%	24,60%

Los cálculos de VaR, CVaR e I. Sharpe para este caso se muestran en la tabla 19.

Portafolio	confidence_level=0,90			confidence_level=0,95			confidence_level=0,99		
	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe
CM	-0,96%	-1,53%	-29,79%	-1,32%	-1,94%	-29,79%	-2,13%	-3,32%	-29,79%
Max_Sharpe	-1,05%	-1,71%	29,32%	-1,45%	-2,18%	29,32%	-2,65%	-3,41%	29,32%
Max_Ret	-1,87%	-3,20%	40,93%	-2,76%	-4,16%	40,93%	-5,10%	-6,24%	40,93%
Min_Var	-1,00%	-1,63%	-19,46%	-1,41%	-2,06%	-19,46%	-2,28%	-3,47%	-19,46%
BL	-0,74%	-1,07%	17,11%	-1,00%	-1,27%	17,11%	-1,44%	-1,68%	17,11%

Tabla 19. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 21 días de entrenamiento y 252 días de trading.

La figura 26 muestra el retorno acumulado histórico, utilizando 21 días de entrenamiento y 126 días de trading.

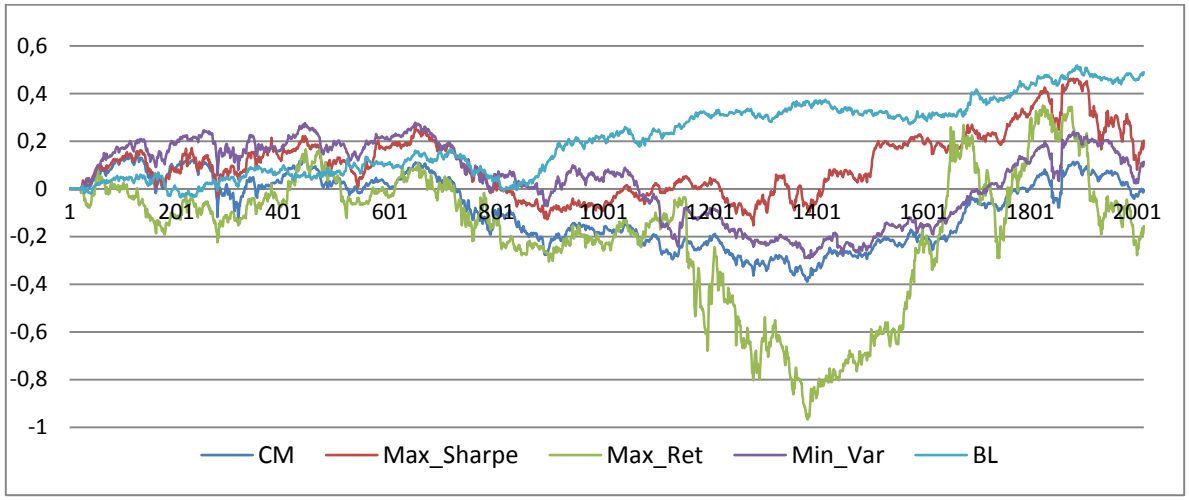


Figura 26. Retorno acumulado histórico portafolio con 21 días de entrenamiento y 126 días de trading.

El retorno promedio para cada uno de los portafolios se detalla a continuación:

CM	Max_Sharpe	Max_Ret	Min_Var	BL
-8,57%	10,51%	-17,91%	3,86%	21,26%

Los cálculos de VaR, CVaR e I. Sharpe para este caso se muestran en la tabla 20.

Portafolio	confidence_level=0,90			confidence_level=0,95			confidence_level=0,99		
	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe
CM	-0,96%	-1,53%	-29,79%	-1,32%	-1,94%	-29,79%	-2,13%	-3,32%	-29,79%
Max_Sharpe	-1,26%	-1,96%	-8,06%	-1,72%	-2,50%	-8,06%	-3,06%	-4,00%	-8,06%
Max_Ret	-2,27%	-3,88%	-17,31%	-3,32%	-5,06%	-17,31%	-6,20%	-7,80%	-17,31%
Min_Var	-1,00%	-1,62%	-17,54%	-1,40%	-2,07%	-17,54%	-2,41%	-3,58%	-17,54%
BL	-0,77%	-1,09%	21,99%	-1,03%	-1,29%	21,99%	-1,44%	-1,66%	21,99%

Tabla 20. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 21 días de entrenamiento y 126 días de trading.

La figura 27 muestra el retorno acumulado histórico, utilizando 21 días de entrenamiento y 63 días de trading.

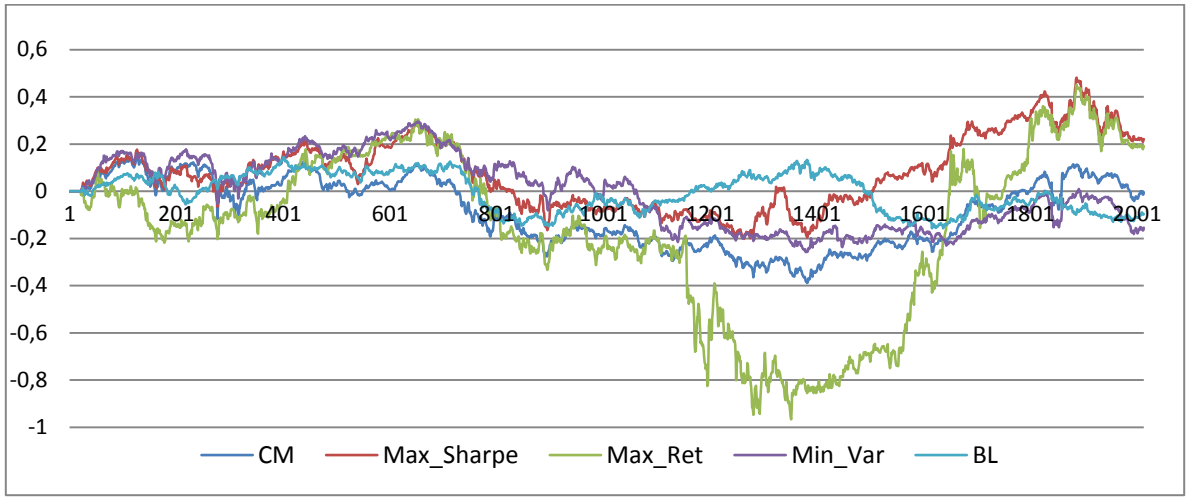


Figura 27. Retorno acumulado histórico portafolio con 21 días de entrenamiento y 63 días de trading.

El retorno promedio para cada uno de los portafolios se detalla a continuación:

CM	Max_Sharpe	Max_Ret	Min_Var	BL
-8,57%	7,95%	-15,58%	-0,34%	-0,42%

Los cálculos de VaR, CVaR e I. Sharpe para este caso se muestran en la tabla 21.

Portafolio	confidence_level=0,90			confidence_level=0,95			confidence_level=0,99		
	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe
CM	-0,96%	-1,53%	-29,79%	-1,32%	-1,94%	-29,79%	-2,13%	-3,32%	-29,79%
Max_Sharpe	-1,14%	-1,92%	-7,09%	-1,70%	-2,47%	-7,09%	-3,08%	-3,81%	-7,09%
Max_Ret	-2,04%	-3,56%	-4,95%	-3,00%	-4,66%	-4,95%	-5,85%	-7,58%	-4,95%
Min_Var	-0,93%	-1,54%	-43,50%	-1,26%	-2,00%	-43,50%	-2,37%	-3,47%	-43,50%
BL	-0,81%	-1,23%	-49,21%	-1,08%	-1,51%	-49,21%	-1,67%	-2,25%	-49,21%

Tabla 21. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 21 días de entrenamiento y 63 días de trading.

La figura 28 muestra el retorno acumulado histórico, utilizando 21 días de entrenamiento y 21 días de trading.

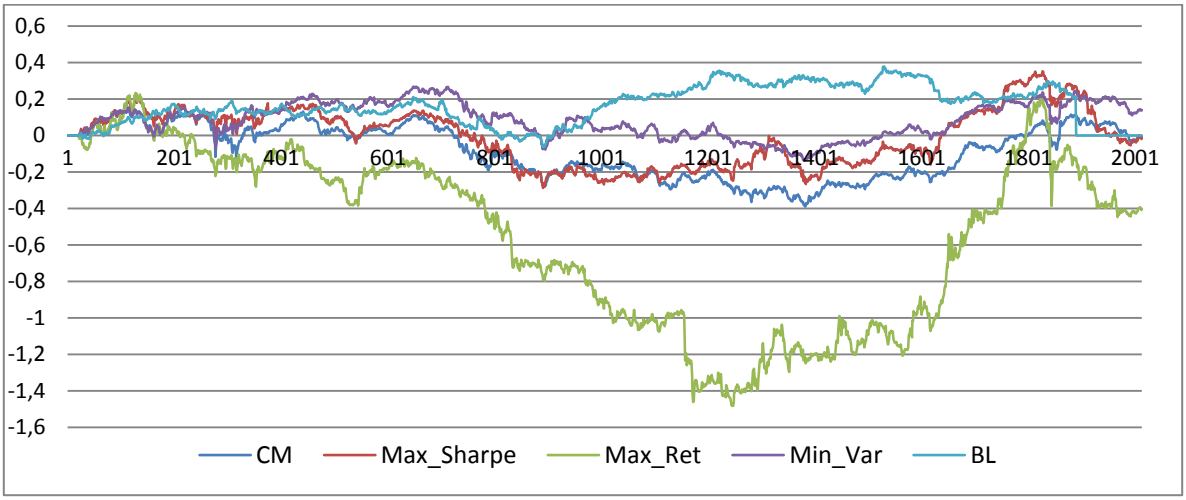


Figura 28. Retorno acumulado histórico portafolio con 21 días de entrenamiento y 21 días de trading.

El retorno promedio para cada uno de los portafolios se detalla a continuación:

CM	Max_Sharpe	Max_Ret	Min_Var	BL
-8,57%	-0,63%	-54,37%	8,41%	17,55%

Los cálculos de VaR, CVaR e I. Sharpe para este caso se muestran en la tabla 22.

Portafolio	confidence_level=0,90			confidence_level=0,95			confidence_level=0,99		
	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe	VaR	CVaR	Isharpe
CM	-0,96%	-1,53%	-29,79%	-1,32%	-1,94%	-29,79%	-2,13%	-3,32%	-29,79%
Max_Sharpe	-1,19%	-2,00%	-23,80%	-1,74%	-2,57%	-23,80%	-3,10%	-4,13%	-23,80%
Max_Ret	-2,11%	-3,68%	-27,17%	-3,11%	-4,83%	-27,17%	-5,22%	-8,20%	-27,17%
Min_Var	-0,88%	-1,47%	-17,13%	-1,24%	-1,90%	-17,13%	-2,29%	-3,19%	-17,13%
BL	-0,78%	-1,22%	NaN	-1,06%	-1,52%	NaN	-1,80%	-2,30%	NaN

Tabla 22. Cálculos de VaR, CVaR e Índice de Sharpe para portafolios construidos con 21 días de entrenamiento y 21 días de trading.

A continuación se presenta una comparación de la variación de los pesos del portafolio para los distintos modelos a lo largo de los 2016 días que considera el estudio. Esta comparación se efectuó para 64 casos diferentes realizando variaciones del periodo de entrenamiento (252, 126, 63 y 21 días) y el periodo de trading (252, 126, 63 y 21 días), sin embargo, para efectos demostrativos sólo se presentarán algunos de ellos seleccionados de manera aleatoria.

Notación: E = entrenamiento, T = trading.

Figura 29. Evolución de pesos del portafolio de Black Litterman (E=252/T=252)

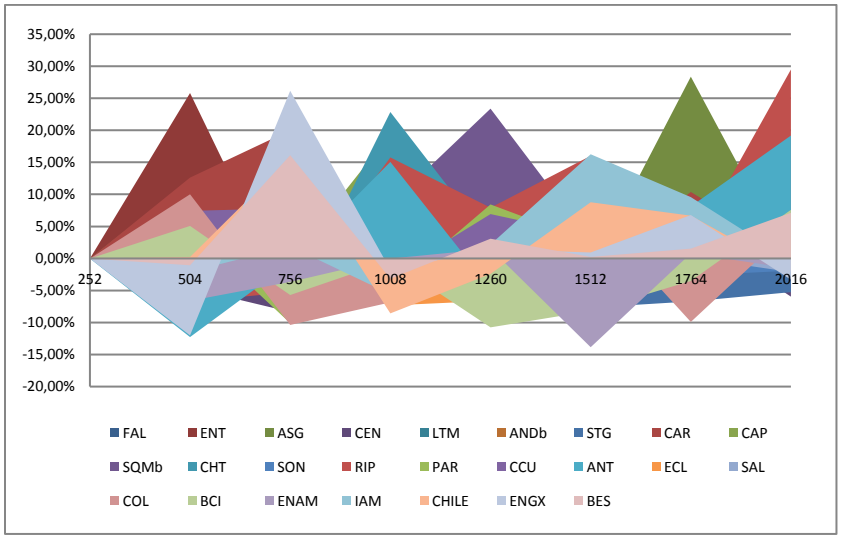


Figura 30. Evolución de pesos del portafolio de Black Litterman (E=126/T=252)

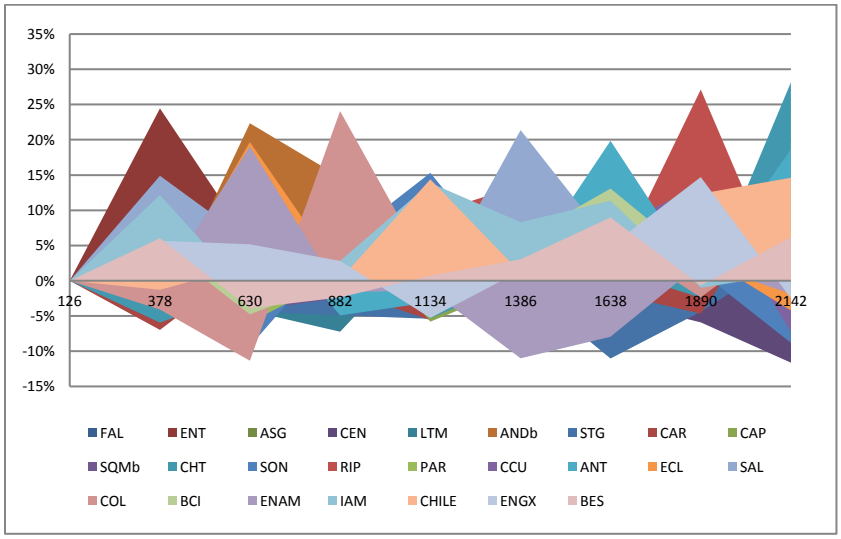


Figura 31. Evolución de pesos del portafolio de Black Litterman (E=63/T=252)

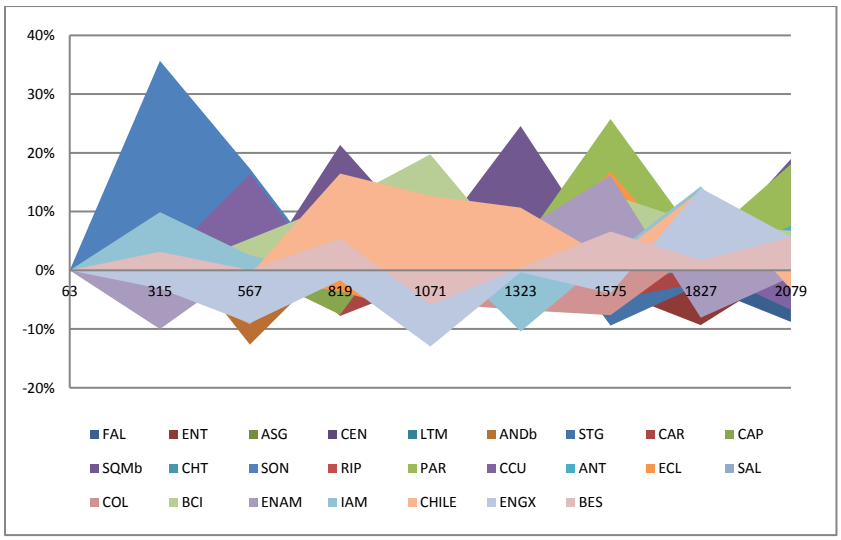


Figura 32. Evolución de pesos del portafolio de Black Litterman (E=21/T=252)

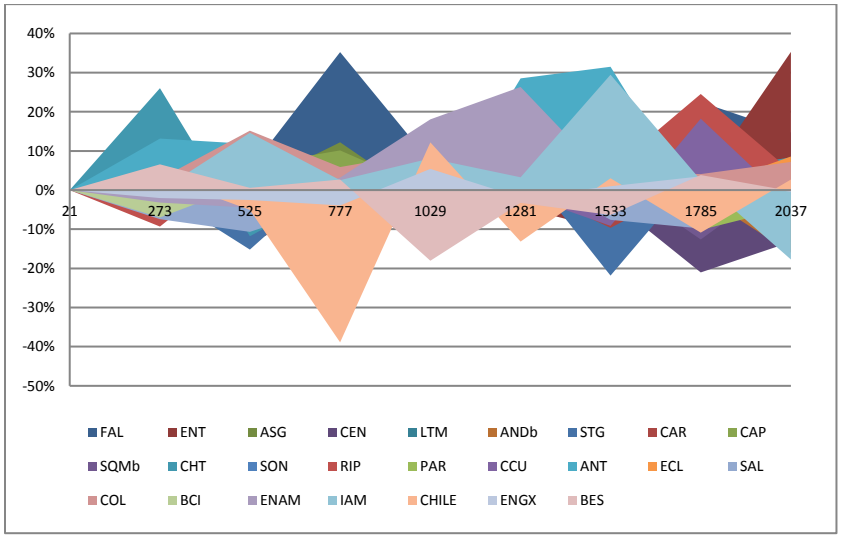


Figura 33. Evolución de pesos del portafolio de Máximo Retorno (E=63/T=252)

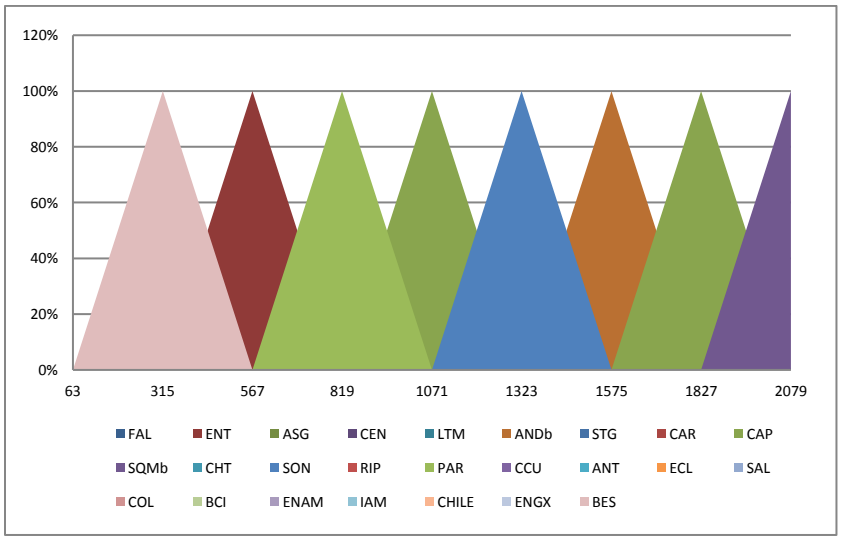


Figura 34. Evolución de pesos del portafolio de Máximo Retorno (E=63/T=126)

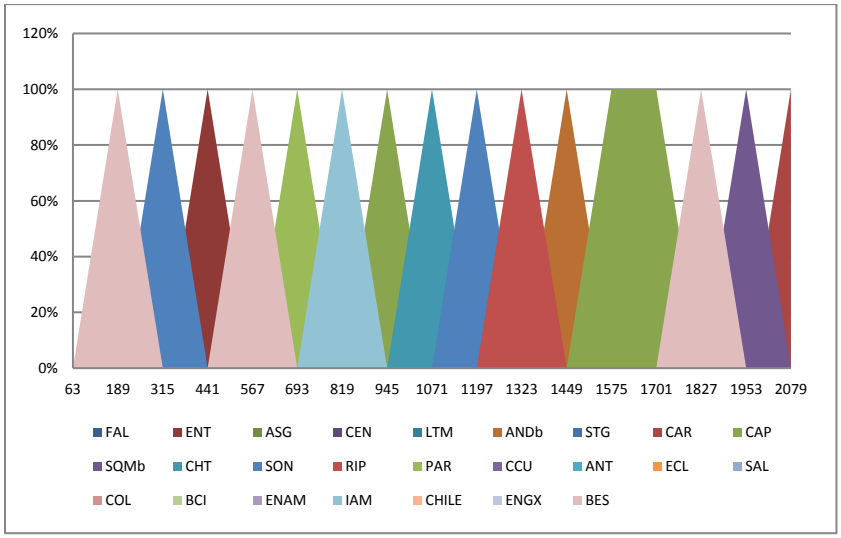


Figura 35. Evolución de pesos del portafolio de Máximo Retorno (E=63/T=63)

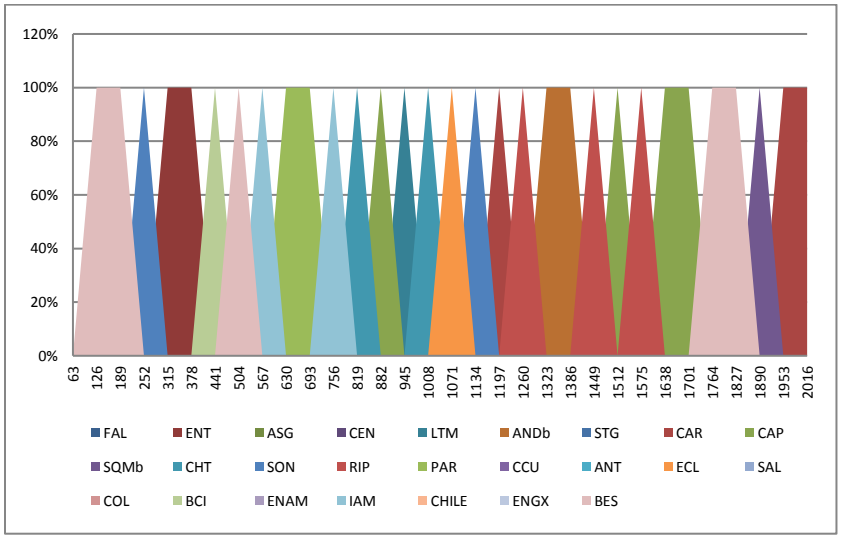


Figura 36. Evolución de pesos del portafolio de Máximo Retorno (E=63/T=21)

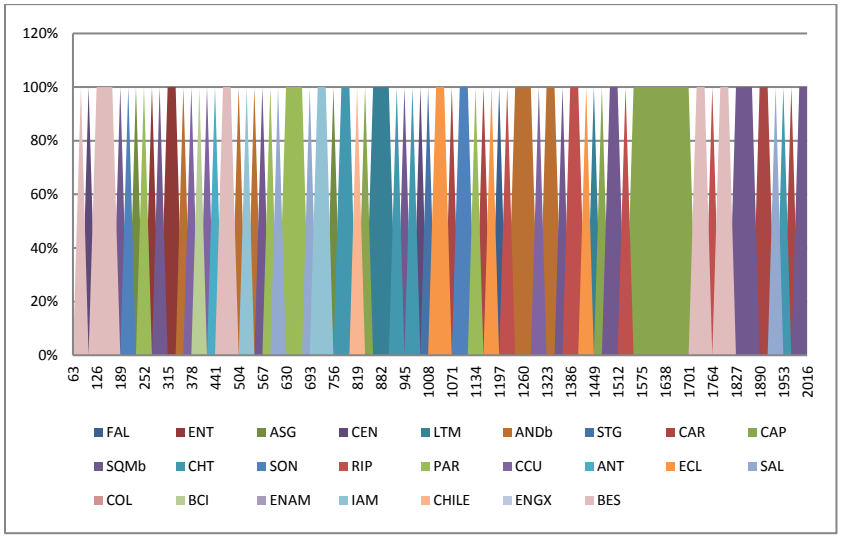


Figura 37. Evolución de pesos del portafolio de Máximo I. Sharpe (E=126/T=252)

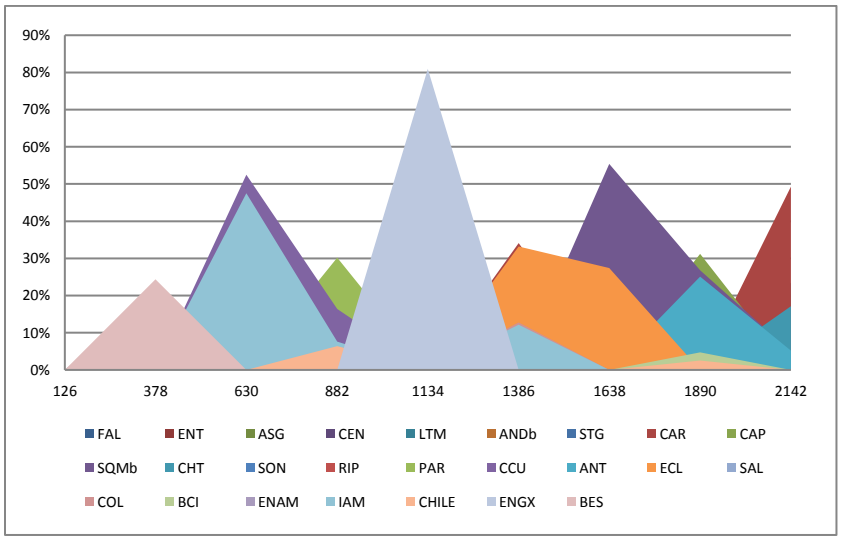


Figura 38. Evolución de pesos del portafolio de Máximo I. Sharpe (E=126/T=126)

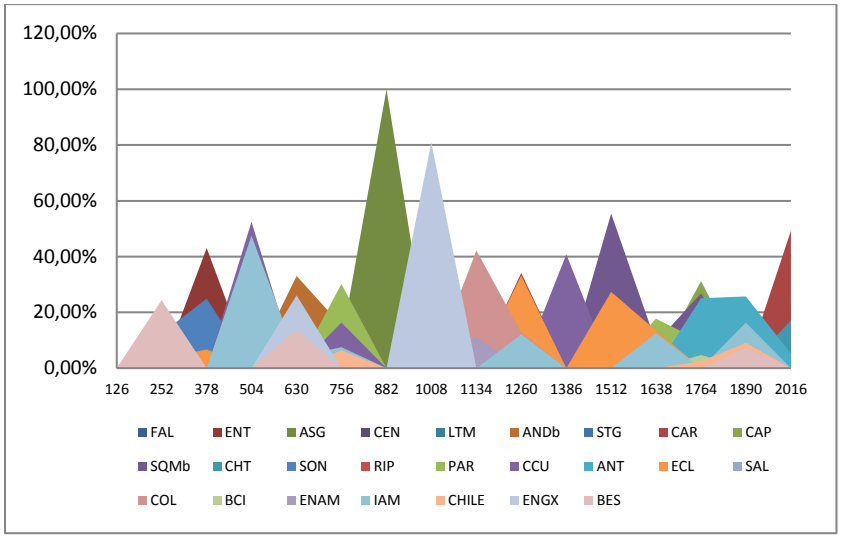


Figura 39. Evolución de pesos del portafolio de Máximo I. Sharpe (E=126/T=63)

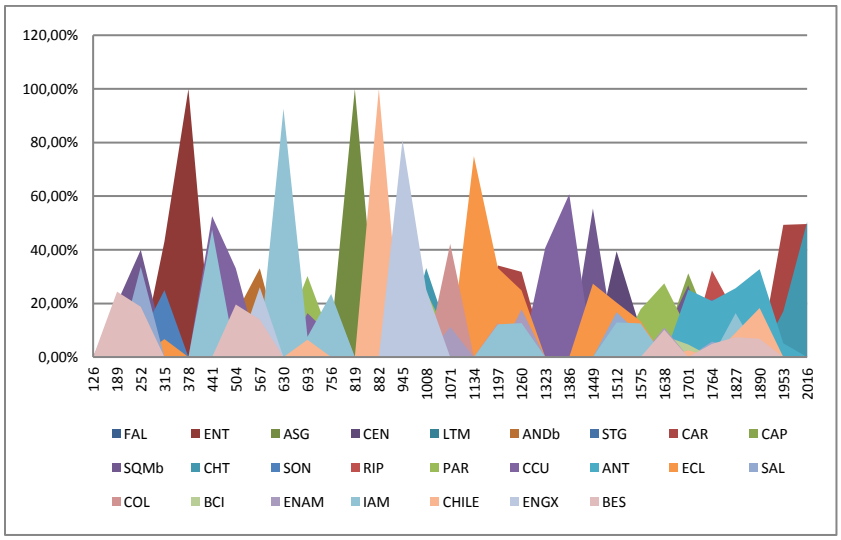


Figura 40. Evolución de pesos del portafolio de Máximo I. Sharpe (E=126/T=21)

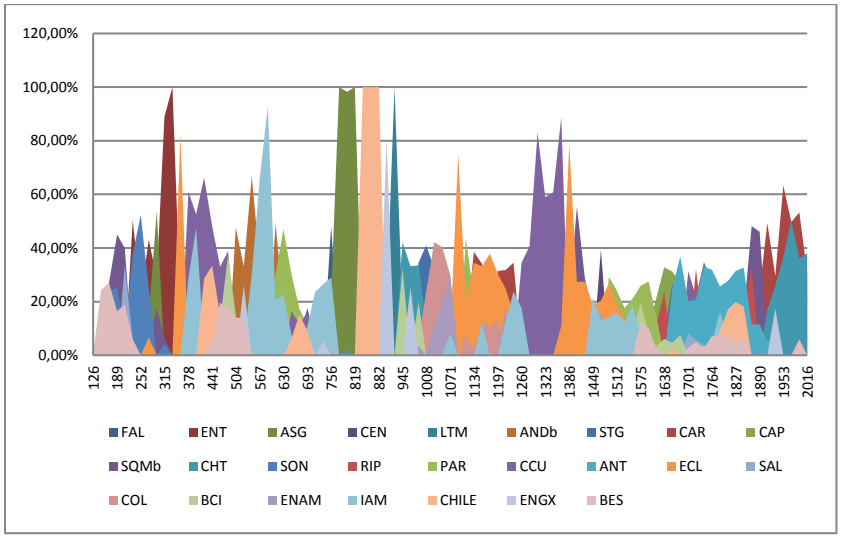


Figura 41. Evolución de pesos del portafolio de Mínima Varianza (E=21/T=252)

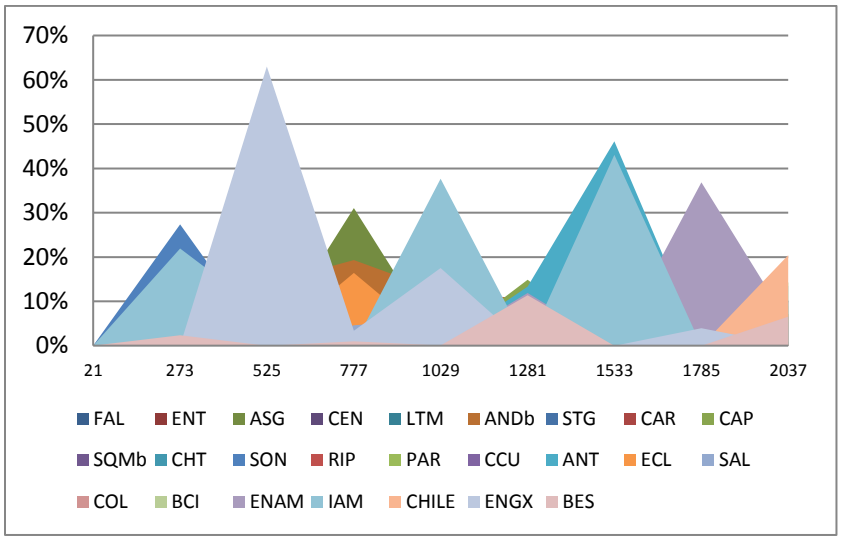


Figura 42. Evolución de pesos del portafolio de Mínima Varianza (E=21/T=126)

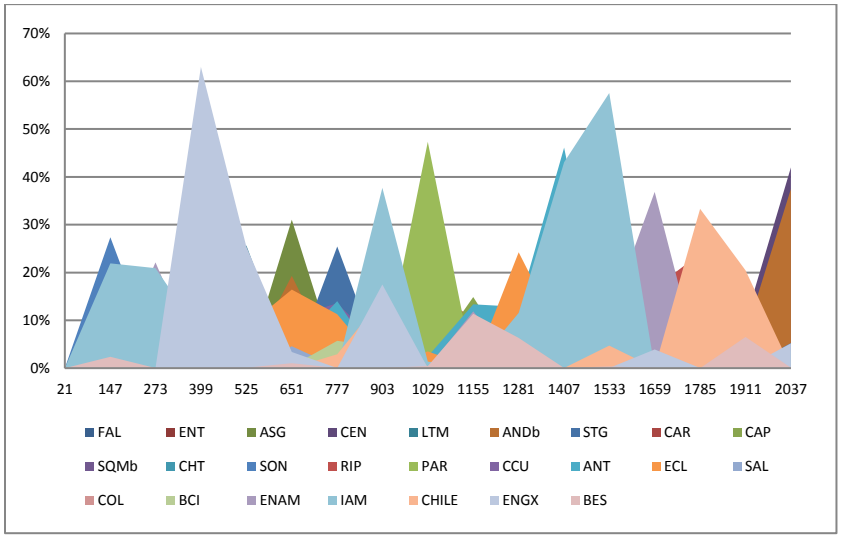


Figura 43. Evolución de pesos del portafolio de Mínima Varianza (E=21/T=63)

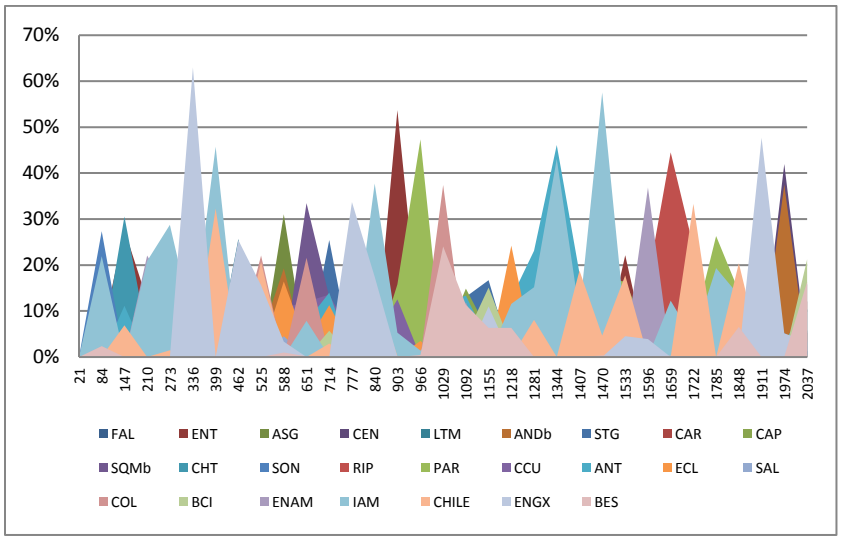
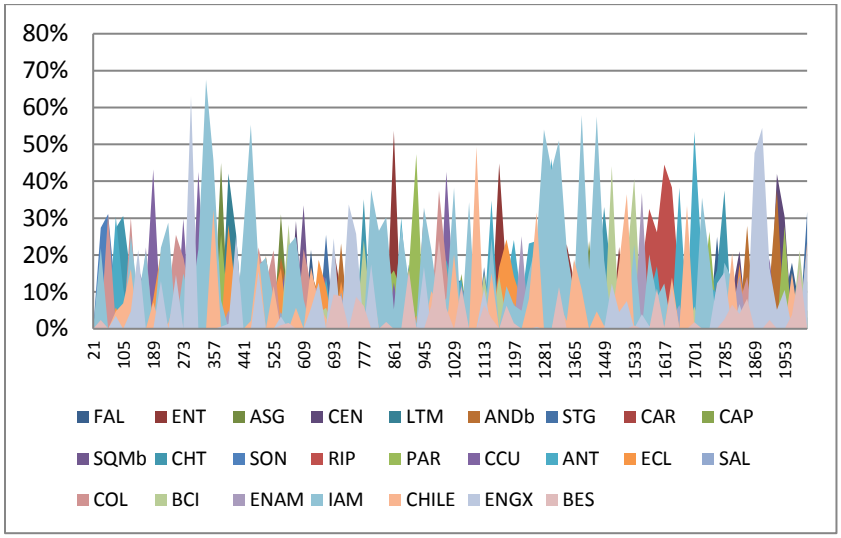


Figura 44. Evolución de pesos del portafolio de Mínima Varianza (E=21/T=21)



Para dar cumplimiento a uno de los objetivos, se realizó una simulación en el Matlab para un portafolio de Black-Litterman variando los niveles de confianza,

obteniéndose que para un 90%, 95% y 99% de confianza el portafolio no sufre variaciones, manteniendo todos los demás parámetros fijos (tiempo de entrenamiento, tiempo de trading, tau, delta, rf=4%).

Tabla 23. Portafolio constante en el tiempo para distintos niveles de confianza.

	Tiempo (días)								
	21	273	525	777	1029	1281	1533	1785	2037
FAL	0,0%	3,7%	5,3%	35,2%	7,2%	2,2%	6,1%	22,4%	14,7%
ENT	0,0%	-1,2%	-13,6%	-2,5%	1,8%	-4,4%	-10,3%	1,8%	35,3%
ASG	0,0%	4,1%	0,8%	12,2%	-3,6%	2,5%	-8,1%	-8,4%	-5,4%
CEN	0,0%	0,1%	9,0%	4,7%	-4,5%	-2,2%	-2,5%	-21,0%	-13,2%
LTM	0,0%	3,8%	5,6%	-1,4%	-8,1%	3,3%	2,9%	-7,4%	-2,0%
ANDb	0,0%	4,1%	4,8%	9,9%	-3,2%	0,5%	-2,0%	-1,2%	-16,0%
STG	0,0%	-0,7%	-15,2%	5,4%	8,6%	7,1%	-21,8%	5,3%	5,4%
CAR	0,0%	0,8%	-10,1%	-1,3%	0,0%	1,1%	-9,7%	2,3%	0,6%
CAP	0,0%	7,3%	6,2%	10,1%	0,0%	-0,3%	-8,1%	6,3%	-4,0%
SQMb	0,0%	9,1%	4,2%	-3,8%	1,0%	7,7%	3,3%	-12,6%	4,1%
CHT	0,0%	26,0%	-11,8%	0,8%	-0,5%	-4,4%	3,6%	4,9%	8,4%
SON	0,0%	10,0%	11,2%	0,2%	-3,6%	0,4%	-2,8%	-4,2%	-1,7%
RIP	0,0%	-9,3%	9,0%	-2,5%	-14,4%	0,3%	5,1%	24,5%	4,8%
PAR	0,0%	1,8%	-1,9%	0,7%	8,8%	0,8%	-2,0%	-10,2%	-4,4%
CCU	0,0%	3,0%	-1,1%	1,6%	-0,9%	-1,1%	-9,1%	18,2%	-3,5%
ANT	0,0%	13,2%	11,8%	4,8%	-9,5%	28,5%	31,5%	-5,6%	6,0%
ECL	0,0%	0,2%	-5,6%	-1,3%	13,5%	11,0%	7,1%	0,3%	8,5%
SAL	0,0%	-7,4%	-10,7%	-3,1%	1,8%	4,9%	-7,6%	-9,8%	2,3%
COL	0,0%	2,8%	15,2%	5,9%	9,9%	0,0%	4,6%	4,1%	7,2%
BCI	0,0%	-7,0%	1,7%	-5,7%	3,6%	-1,9%	-3,0%	-0,4%	-4,4%
ENAM	0,0%	-3,2%	-4,5%	3,2%	18,0%	26,3%	2,3%	-3,2%	-1,3%
IAM	0,0%	-0,2%	14,6%	2,5%	8,1%	3,3%	29,5%	2,5%	-17,7%
CHILE	0,0%	3,4%	-5,1%	-38,9%	12,2%	-13,2%	3,0%	-10,9%	2,7%
ENGX	0,0%	-2,0%	-2,5%	-3,9%	5,4%	-1,9%	1,0%	3,5%	-0,5%
BES	0,0%	6,6%	0,6%	2,7%	-18,0%	-3,3%	-6,3%	3,9%	-0,2%

A partir de los datos mostrados en las tablas 7 a la 22, se puede apreciar gráficamente el comportamiento del VaR, CVaR y Sharpe a medida que varía el periodo de training, los cuales se muestran a continuación:

Caso 1: 252 días de entrenamiento

Figura 45. Comportamiento del VaR para cada portafolio y nivel de confianza.

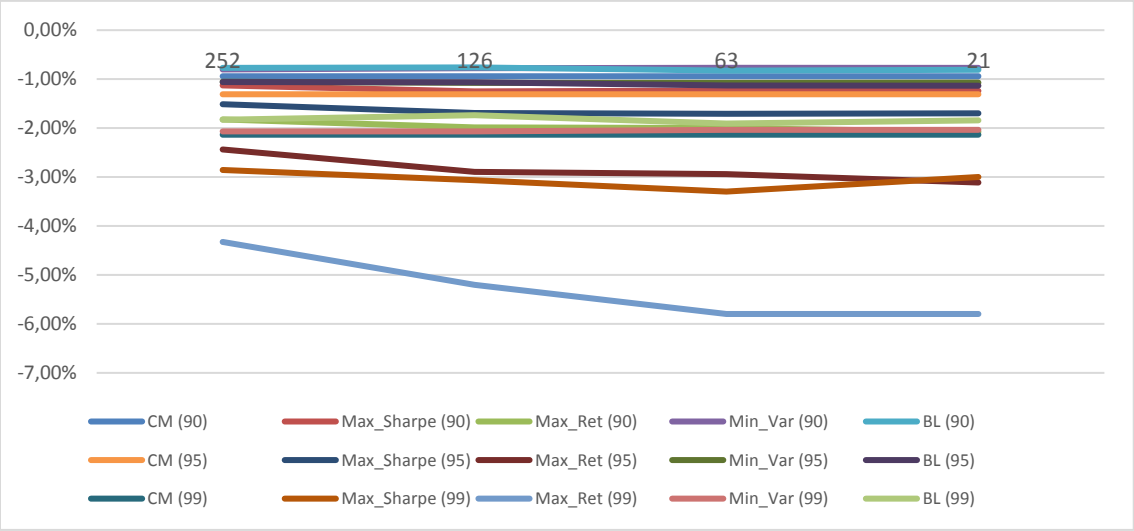


Figura 46. Comportamiento del CVaR para cada portafolio y nivel de confianza.

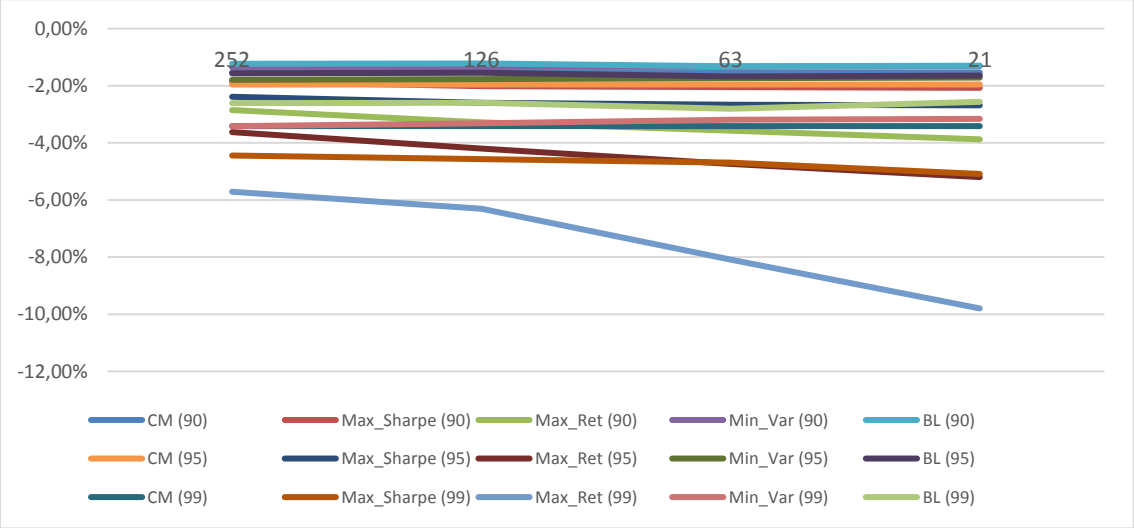
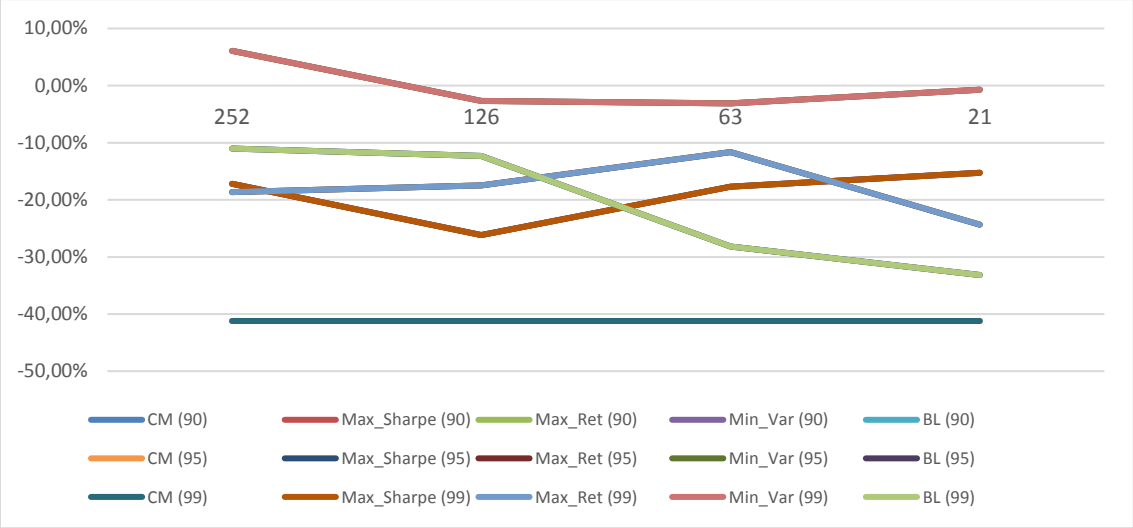


Figura 47. Comportamiento del I. Sharpe para cada portafolio y nivel de confianza.



Caso 2: 126 días de entrenamiento

Figura 48. Comportamiento del VaR para cada portafolio y nivel de confianza.

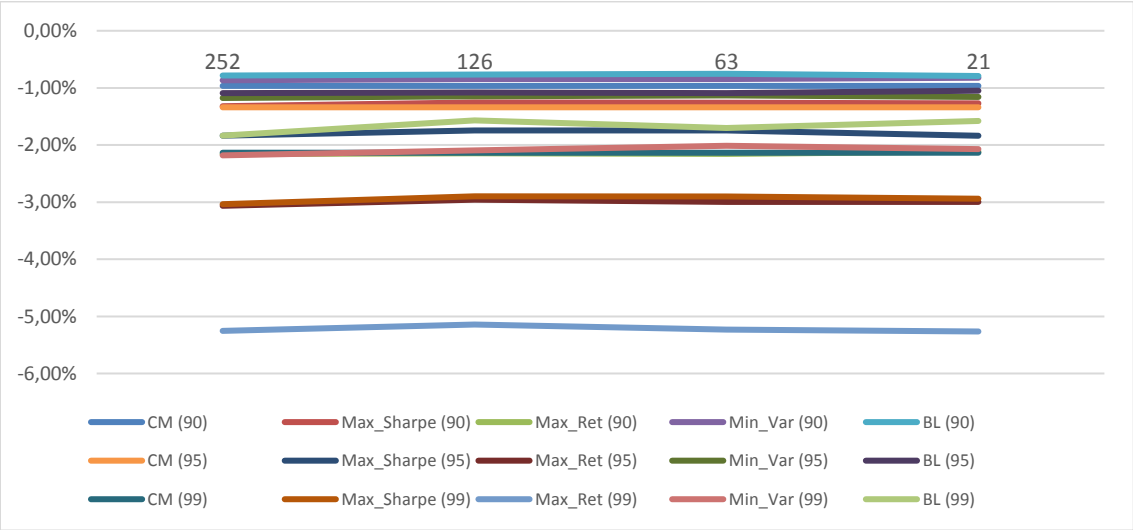


Figura 49. Comportamiento del CVaR para cada portafolio y nivel de confianza.

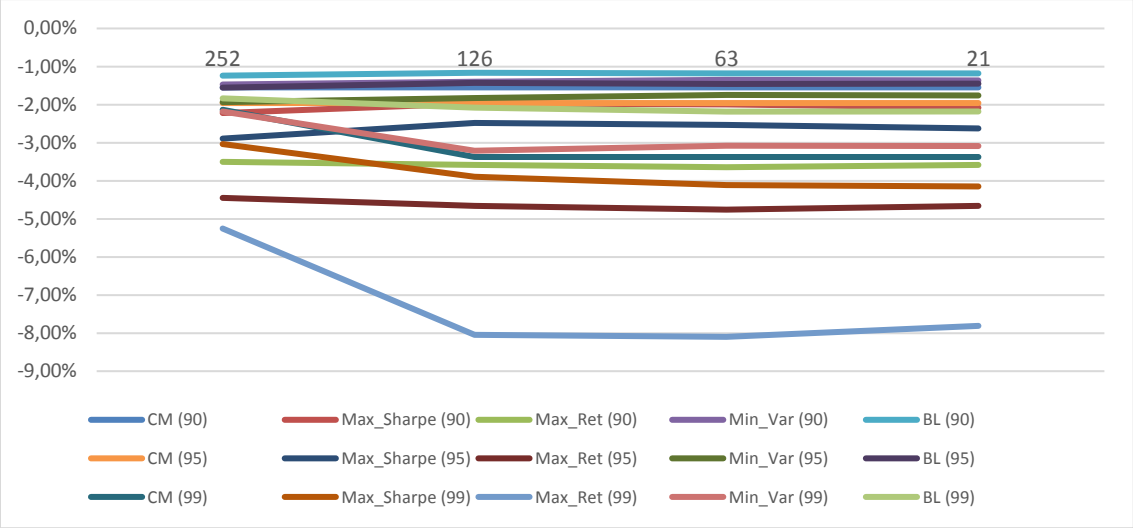
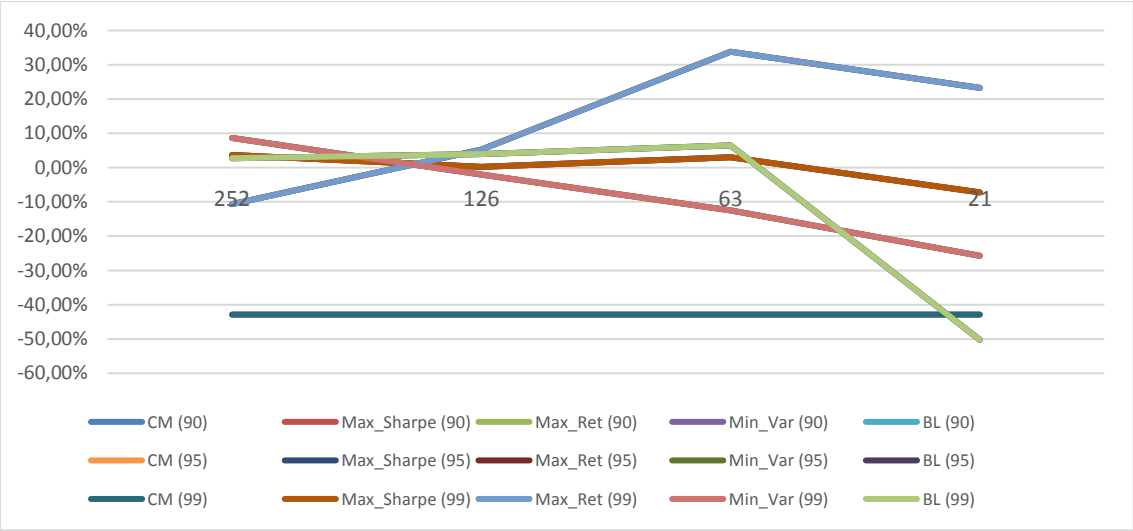


Figura 50. Comportamiento del I. Sharpe para cada portafolio y nivel de confianza.



Caso 3: 63 días de entrenamiento

Figura 51. Comportamiento del VaR para cada portafolio y nivel de confianza.

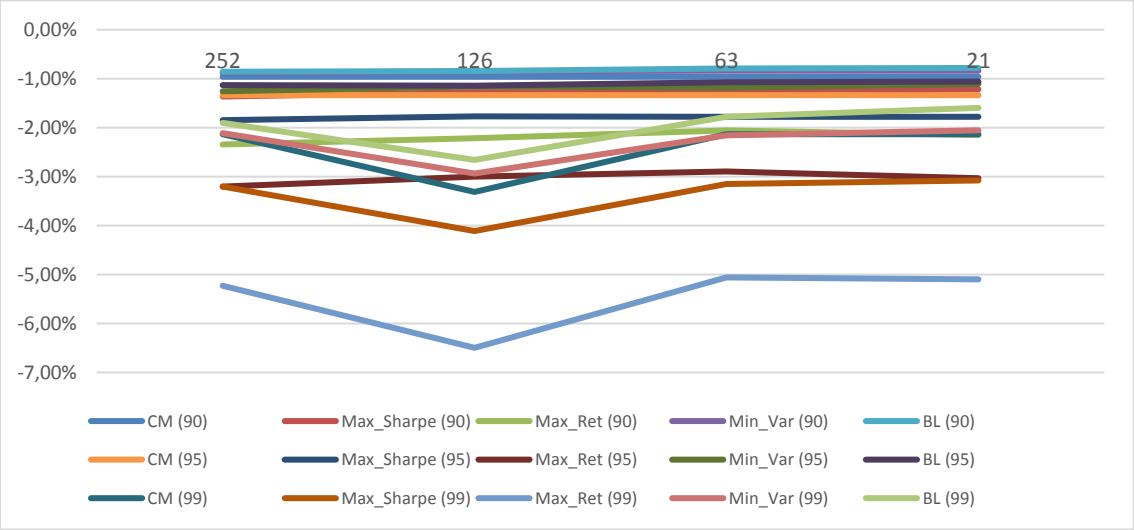


Figura 52. Comportamiento del CVaR para cada portafolio y nivel de confianza.

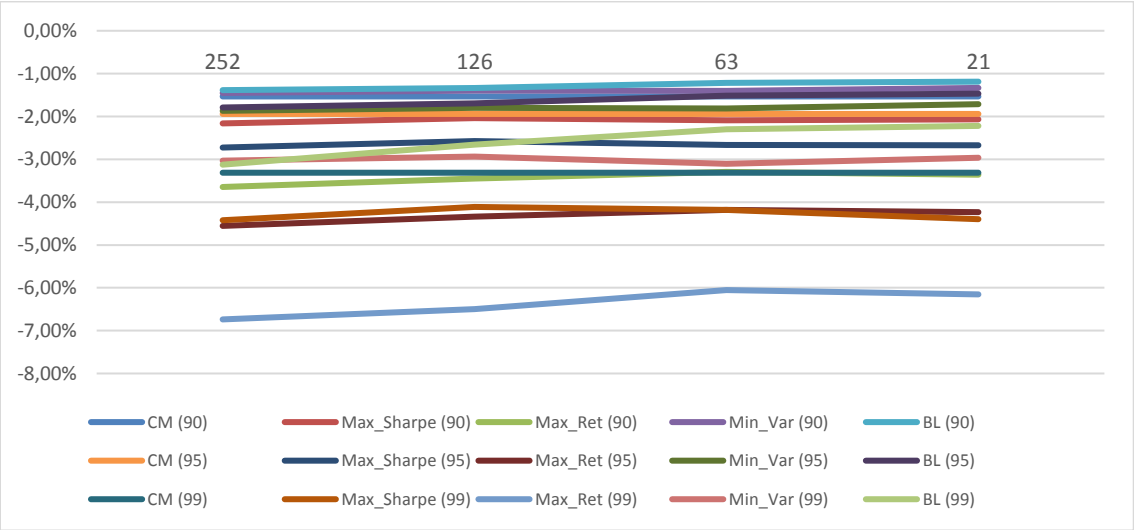
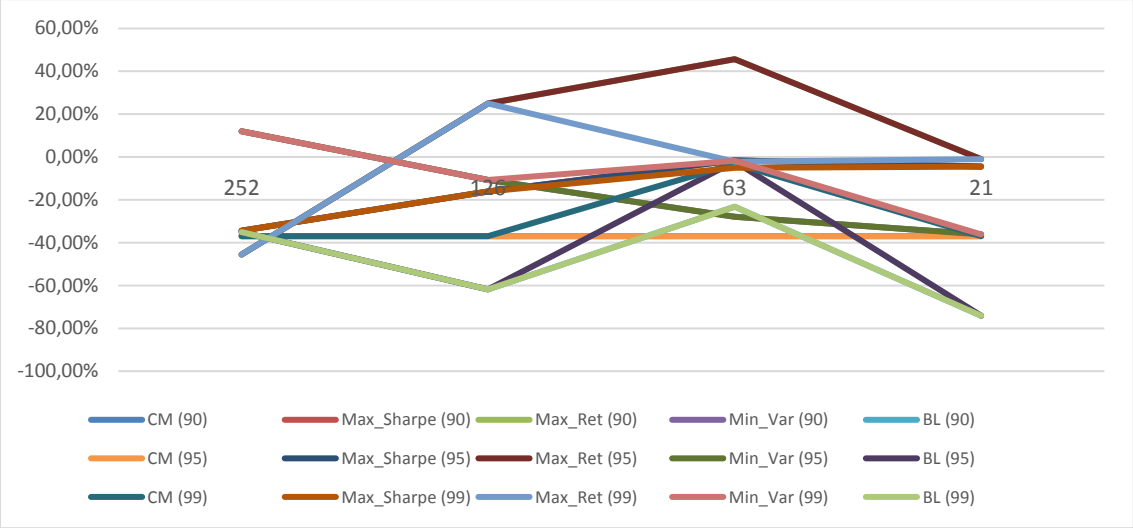


Figura 53. Comportamiento del I. Sharpe para cada portafolio y nivel de confianza.



Caso 4: 21 días de entrenamiento

Figura 54. Comportamiento del VaR para cada portafolio y nivel de confianza.

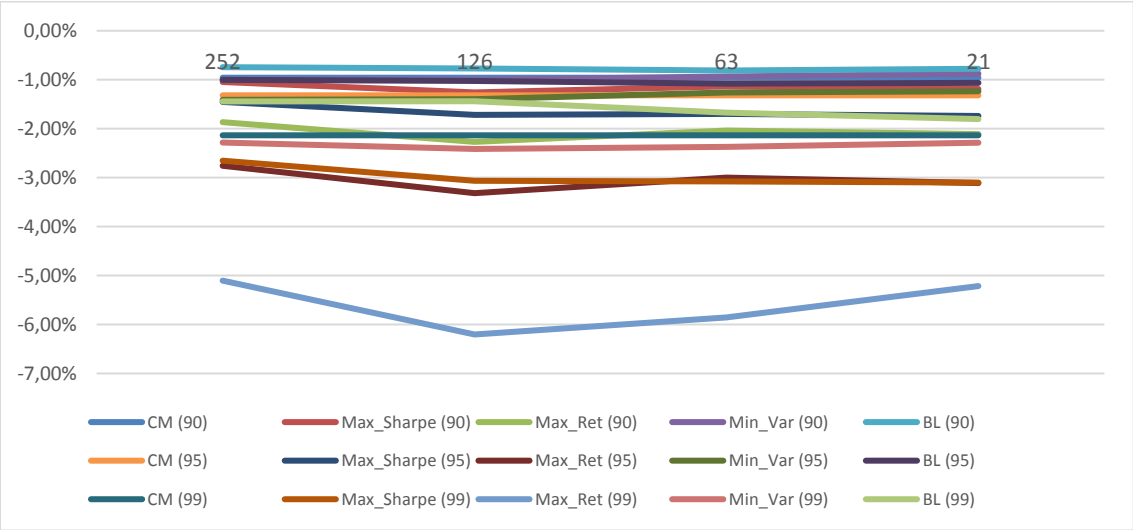


Figura 55. Comportamiento del CVaR para cada portafolio y nivel de confianza.

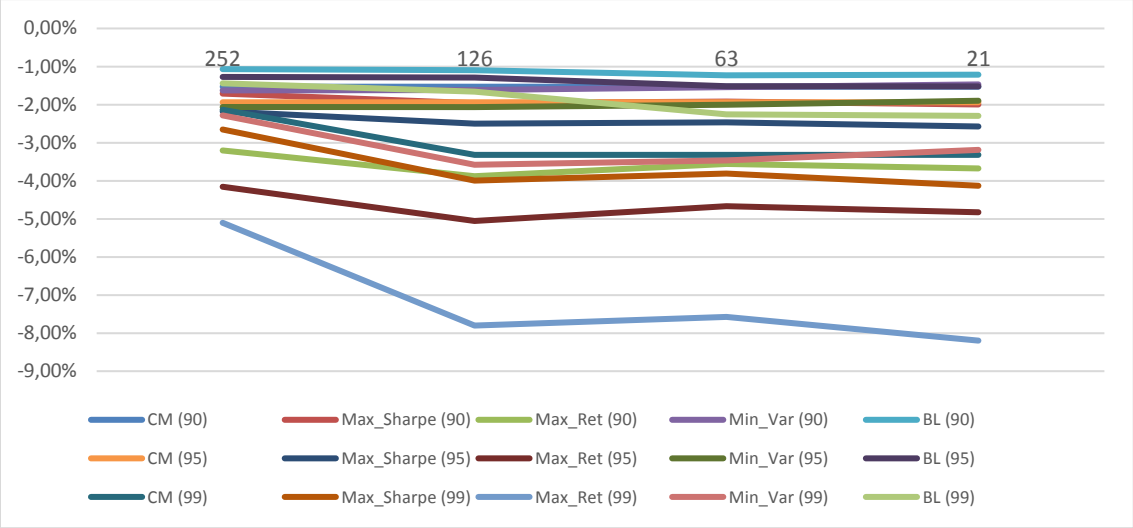
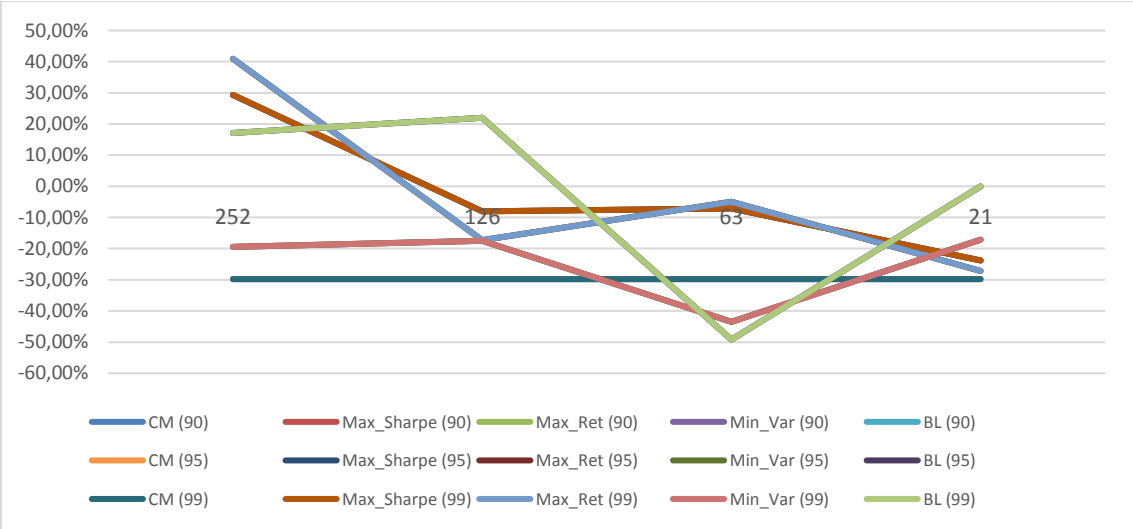


Figura 56. Comportamiento del I. Sharpe para cada portafolio y nivel de confianza.



6. DISCUSIONES

El modelo de Markowitz, referente teórico en el campo de la teoría de selección de carteras, puede resultar de gran utilidad en la práctica. Los analistas de inversiones, los gestores de carteras e incluso los inversores particulares pueden utilizarlo de forma sencilla, al disponer del software y hardware necesarios para su aplicación. No obstante, no debemos olvidar que el empleo de esta técnica requiere una estimación correcta de los rendimientos esperados de los títulos y de sus covarianzas. Además, las estimaciones realizadas en función de datos históricos no aseguran el comportamiento posterior del mercado bursátil.

En este sentido, Michaud (1989) considera que el empleo de parámetros históricos como estimadores de los parámetros esperados introduce sesgos importantes, que hace que las carteras eficientes proporcionadas por el modelo se formen fundamentalmente con activos de alta rentabilidad, reducida varianza y baja correlación con otros activos. Esto proporciona carteras concentradas en pocos títulos y que resultan poco atractivas para los inversores. No obstante, este inconveniente puede solucionarse introduciendo restricciones que limiten el porcentaje máximo del presupuesto que puede destinarse a cada título (Michaud, 1989; Haugen, 1993).

En el presente trabajo se pudo identificar a través de la elaboración de la frontera eficiente de Markowitz que siete de las venticinco acciones seleccionadas del IPSA presentan esperanzas de retorno negativas. Además, destaca el caso de las acciones de Banco de Chile (CHILE) que es la que presenta menor variabilidad dentro del portafolio de acciones con sólo un 1,093%, seguida de Inversiones Aguas Metropolitanas (IAM) con un

1,248%. Por el contrario, las acciones de este portafolio que presentaron mayor variabilidad son las de Compañía de Acero del Pacífico (CAP) y Besalco (BES) con 2,681% y 2,328% respectivamente.

Se determinó el portafolio de mínima varianza para este modelo de Markowitz, el cual estaba compuesto por las siguientes acciones y sus respectivos pesos específicos: IAM con 17,01%, CHILE con 14,52%, CCU con 10,65%, CHT con 9,04%, ECL con 7,87%, ANT con 7,67%, ENGX con 7,17%, ENT con 6,91%, ASG con 6,06%, COL con 4,41%, PAR con 3,10%, ANDb con 2,62%, SON con 1,85%, FAL con 0,60% y RIP con 0,54%.

El portafolio que maximiza el Índice de Sharpe[3] es: PAR con 35,01%, CHILE con 22,81%, BCI con 17,87%, CCU con 17,55% y SQMb con 6,74%. Es este portafolio el que se sitúa en la línea de mercado de capitales y se considera com portafolio óptimo. La CML representa la relación lineal entre el rendimiento esperado y el riesgo total para diferentes combinaciones de una sola cartera del mercado (cartera riesgosa) y varias proporciones de préstamo o endeudamiento libres de riesgo.

Para el caso del porafolio que privilegie el máximo retorno, el modelo arrojó que el adminsitrador debería invertir el 100% en acciones de PAR.

El valor en riesgo (VaR) se define como la máxima pérdida esperada, dado un horizonte de tiempo y un intervalo de confianza. El valor en riesgo decrece, en general, a medida que la escala temporal aumenta (frecuencias más bajas). Segundo, la contribución

[3] El Índice de Sharpe se define como la relación existente entre el beneficio adicional de un fondo de inversión, medido como la diferencia entre la rentabilidad del fondo y la rentabilidad de un activo sin riesgo, y su volatilidad, medida como su desviación típica.

al riesgo total es mayor en las escalas menores (alta frecuencia). Esto quiere decir que la pérdida potencial, para un horizonte de un día, es mayor cuando nos centramos en las fluctuaciones de más corto plazo de los retornos. En términos simples, tenemos más oportunidades de ganar dinero, al invertir en acciones, en el mediano y largo plazo.

Luego de desarrollar el modelo de Markowitz y de determinar su frontera eficiente se procedió a comparar los retornos del portafolio de acciones en base al modelo de Black-Litterman con los tres portafolios de Markowitz desarrollados (máximo retorno, máximo Sharpe y mínima varinza). Además se desarrolló un modelo portafolio adicional que consideraba la opción de comprar y mantener, sin permitir venta corta[4].

Se realizó distintas simulaciones en el software Matlab variando los días de entrenamiento y días de trading. El primer caso desarrollado fue considerando 252 días de entrenamiento. Los resultados para 252, 126, 63 y 21 días de trading mostraron que el portafolio que minimiza la varianza es el que presenta retornos promedios más altos en todos los casos: 8,06%, 3,18%, 3,87% y 6,84% respectivamente.

En la simulación realizada considerando 126 días de entrenamiento los resultados obtenidos fueron dispares, los cuales arrojaron que el mejor portafolio fue el de mínima varianza considerando 252 y 126 días de trading con un retorno esperado promedio de 8,22% y 3,58% respectivamente. Sin embargo, si consideramos 63 y 21 días de trading, el

[4] La venta en corto consiste en la venta de una acción de la que el vendedor no es propietario en el momento en el que la vende. El vendedor, para hacer efectiva la entrega de la acción vendida, toma la acción prestada con la intención de comprar más adelante la misma acción pero a menor precio, y devolverla a quien se la prestó. En esta operación el vendedor obtendrá un beneficio si, como consecuencia de la una bajada futura del precio, lo que paga por la acción que compra es menos de lo que percibe por la que había vendido antes. La esencia de la venta en corto es ser una apuesta por la bajada del precio de la acción que constituye su objeto. (Gabaldón, 2016)

portafolio que obtuvo los mejores resultados de retornos promedio fue el de máximo retorno con un 16,05% y 4,10% respectivamente.

En la simulación realizada con 63 días de entrenamiento y 252 días de trading el portafolio de mínima varianza fue el que obtuvo un retorno promedio más elevado con un valor del 12,22%. Si consideramos 126 y 63 días de trading es el portafolio de máximo retorno el que obtiene los valores más altos de retorno promedio, los cuales son 16,73% y 55,84% respectivamente. Por último, considerando 21 días de trading, el portafolio que obtiene el retorno promedio más elevado es el que maximiza el índice de Sharpe, con un 1,88%.

En la última simulación realizada con 21 días de entrenamiento se apreció que para 252 días de trading el portafolio de máximo retorno es quien obtiene un retorno promedio mayor, con un 40,25%; para 126 días de trading es el portafolio de Black-Litterman quien tiene un retorno promedio más alto con un 21,26%; si consideramos 63 días de trading es el portafolio con máximo índice de Sharpe con un retorno promedio de 7,95% y por último con 21 días de trading es el portafolio de Black-Litterman quien obtiene el retorno promedio más elevado con un 17,55%.

Ahora bien, si analizamos los gráficos considerando la evolución histórica del retorno los resultados respecto a cuál portafolio es mejor es muy similar en todos los casos. Si consideramos 252 días de trading es el portafolio que maximiza la varianza el que presenta mejores resultados de retorno al ir variando el periodo de entrenamiento. Es en el

periodo de 63 días de entrenamiento el cual presenta el retorno más elevado a lo largo del estudio el cual alcanza cerca de un 50% casi al final del periodo estudiado.

Para los casos con 126 días de trading no existe un portafolio que sobresalga de los demás, dependerá de los días de entrenamiento cuál será el que muestre una mejor evolución de los retornos a lo largo del estudio, siendo por ejemplo el portafolio de mínima varianza el que presenta mejores resultados para 252 días de entrenamiento, esto mismo se repite para 126 días de entrenamiento, sin embargo, en los últimos 20 meses es el portafolio de máximo retorno el que presenta mejores resultados con retornos que superan el 60%.

En el escenario de 63 días de trading sucede algo similar, no habiendo un portafolio que destaque en gran forma respecto a los demás, aún así podríamos considerar el portafolio de máximo retorno el que arroja los mejores resultados, siendo el periodo de 63 días de entrenamiento el que presenta un mejor desempeño alcanzando valores de retorno cercanos asl 140% en algún momento. Además, se destaca en este caso que el mismo portafolio es el que presenta peores resultados al considerar 21 días de entrenamiento, cuyos retornos son negativos con valores cercanos al -100%.

Por último, si consideramos 21 días de trading es nuevamente el portafolio de mínima varianza el que presenta resultados levemente mejores que los demás portafolios, a excepción de los últimos 20 meses en el cual el portafolio de maximo retorno destaca al considerar 126 días de entrenamiento. A su vez, si consideramos 21 días de entrenamiento el portafolio de Black Litterman es quien presenta resultados más parejos a lo largo de todo el periodo y con mejores retornos.

En relación a la distribución de los pesos del portafolio, se puede señalar que al variar tanto el periodo de entrenamiento como el periodo de trading, éstos experimentan notorias diferencias. Sin embargo, si consideramos un portafolio cualquiera y variamos los niveles de confianza para el cálculo de resultados el portafolio no sufre modificaciones en su distribución de pesos.

Al analizar la variación de los parámetros VaR, CVaR e I. Sharpe acorde a los periodos de trading podemos señalar que en el caso de 252 días de entrenamiento el VaR se mantiene relativamente estable para la mayoría de los portafolios al variar los niveles de confianza es el portafolio de máximo retorno el que presenta un aumento del -4,33% a -5,8% si reducimos el tiempo de trading, lo cual representaría una mayor probabilidad de pérdida. Lo mismo sucede en el caso del CVaR, en el cual la variación va del -5,71% al -9,8% entre los 252 y 21 días de trading, lo que también representaría un aumento en la probabilidad de pérdida del inversionista. Para el caso del Índice de Sharpe, descata el portafolio de Black Litterman el cual varía desde un -11,02% a -33,16%. Todos los casos antes descritos suceden con un nivel de confianza del 99%.

Al evaluar el escenario de 126 días de entrenamiento destaca la variación del CVaR para el portafolio de máximo retorno considerando un 99% de cofianza. Para el Índice de Sharpe destaca la variación de su porentaje pasando de un -10,64 a 23,26% para periodos de trading de 252 a 21 días respectivamente.

Para el escenario de 63 días de entrenamiento se pueden apreciar variaciones en el VaR, considerando un 99% de confianza y 126 días de trading. Los demás resultados

muestran relativa estavilidad al igual que los resultados del CVaR. En el caso del Índice de Sharpe presenta una gran cantidad de variaciones en todos los portafolios y en todos los niveles de confianza lo que no refleja un patrón definido.

Por último, para el caso de 21 días de entrenamiento el VaR muestra relativa estabilidad para todos los niveles de confianza, excepto en el portafolio de máximo retorno en el cual se puede apreciar una disminución en los periodo de 126 y 63 días de trading. Lo mismo ocurre en el cálculo del CVaR cuyo valor fluctúa de un -5,1% a un -8,2%, aumentando así su probabilidad de pérdida. Para el Índice de Sharpe se puede señalar que hay diversas variaciones en la cual los porcentajes de este indicador se hacen más negativos.

6. CONCLUSIONES

A partir del presente trabajo se puede concluir que actualmente el modelo de Markowitz actúa como un referente importante en la optimización de portafolios, además de ser de gran utilidad para los inversionistas, ya que ha permitido proporcionar portafolios con un desempeño mejor que los índices de referencia del mercado; sin embargo, es importante señalar que este modelo presenta una importante limitación que es realizar una correcta estimación de los rendimientos esperados de las acciones y de sus covarianzas. Además, todas las estimaciones se hacen considerando rendimientos históricos por lo que no es posible asegurar el futuro comportamiento de las acciones en el mercado.

Además, podemos señalar que el modelo de Black-Litterman es un instrumento de construcción de portafolios muy útil en la actualidad y que presenta variados beneficios en comparación al modelo tradicional de Markowitz. Uno de los principales beneficios de este modelo es que permite enfrentar los problemas tradicionales en las decisiones de inversión de una manera sistemática y transparente, enfocándose en aspectos del proceso de inversión que son controlables y permitiendo realizar recomendaciones tácticas vinculadas con las expectativas del inversionista.

Otra de las ventajas que presenta el modelo Black-Litterman en relación al modelo de Markowitz es que es más consistente en el proceso de asignación de activos, permitiendo una mayor diversificación del portafolio dado que otorga la posibilidad de incorporar las expectativas que tengan los inversionistas respecto a cada activo del

portafolio, lo cual genera se reduzca el número de activos en los cuales invertir suscitando así un portafolio más realista, eliminando los activos que se consideran ineficientes.

Otra cualidad importante del modelo de Black-Litterman es que tiene un enfoque estadístico para predicción de los retornos, donde un activo que haya tenido un rendimiento deficiente en los últimos períodos puede tener retornos positivos, mientras que la metodología Markowitz lo descartaría. Esto a su vez permitiría reducir el riesgo y a largo plazo obtener una mayor rentabilidad debido a que al no excluir estos activos se tiene un abanico más amplio para disminuir el riesgo vía correlación.

El modelo Black-Litterman además, incorpora más variables del mercado que permiten ajustar el modelo a la realidad, como lo es la capitalización de mercado, la aversión al riesgo, la tasa libre de riesgo y el número de observaciones.

El CVaR se propone como metodología para cuantificar el riesgo de mercado, siendo ésta una medida complementaria del VaR, se considera una medida coherente de riesgo, ya que satisface la invarianza traslacional, la homogeneidad positiva, la monotonicidad, y lo que se considera mucho más importante, satisface la subaditividad.

Se analizó las variaciones del CVaR y otras medidas de riesgo a medida que se modificaban los niveles de confianza, obteniéndose en la mayoría de los casos un aumento en sus indicadores lo cual reflejan un aumento en la probabilidad de pérdida para el inversionista.

Por último, se analizó si existía o no relación entre la composición del portafolio y los niveles de confianza, no encontrándose variaciones en éstos al variar los niveles de

confianza entre un 90%, 95% o 99%. Sin embargo, si se pudo apreciar notorias diferencias en la composición de los portafolios al variar el periodo de entrenamiento y el periodo de trading considerados por el inversionista.

BIBLIOGRAFÍA

Álvarez, S., Restrepo, D., & Velásquez, M. (2017). Medición del valor en riesgo de portafolios de renta fija usando modelos multifactoriales dinámicos de tasas de interés. *Estudios Gerenciales*, *33*(142), 52–63. https://doi.org/https://doi.org/10.1016/j.estger.2017.02.003

Angel, M., & Mato, M. (2005). El Condicional Value at Risk en la gestión de carteras latinoamericanas El Condicional Value at Risk en la gestión de carteras latinoamericanas. *Revista de Temas Financieros*, 105–118.

Angelovska, J. (2013). Managing market risk with VaR (Value at Risk). *Journal of Contemporary Management Issues*, *18*(2), 81–96.

Artzner, P., Delbaen, F., Eber, J.-M., & Heath, D. (1998). Coherent Measures of Risk, (June 1996), 1–24.

Borge, J., & Cervantes, M. N. (2012). *PORTAFOLIOS DE INVERSIÓN: UNA ALTERNATIVA PARA EL APROVECHAMIENTO DE LOS RECURSOS REMANENTES DE TESORERIA*.

Brealey, R., Allen, F., & Myers, S. (2010). *Principios de finanzas corporativas*. (McGraw-Hill, Ed.) (9a Ed.). México.

Cárdenas, L. G., Malver, J., Zapata, D., Milena, S., Ríos, A., Lucia, C., … Cuervo, F. I. (2015). Modelo de selección de portafolio óptimo de acciones mediante el análisis de

Black-Litterman. *Revista Ingenierías Universidad de Medellín*, *14*(27), 111–130.

Cruz, E., Restrepo, J., & Sánchez, J. (2005). Portafolio de inversión en acciones optimizado. *Scientia et Technica*, *No 1*(27), 175–180.

Cuevas, I. (2015). *Bolsas de valores en Chile: descripción del mercado e implicancias teóricas de la interconexión del mercado bursátil*. Universidad de Chile.

Díaz, A. (2014). *Una Comparación de Medidas de Riesgo Financiero*. Universidad de Chile.

Flórez, L. S. (2008). Evolución de la Teoría Financiera en el Siglo XX. *Ecos de Economía*, *12*(27), 145–168. Retrieved from http://www.redalyc.org/articulo.oa?id=329027263004

Franco A., L., & Franco C., L. (2005). El valor en riesgo condicional CVaR como medida coherente de riesgo. *Revista Ingenierias Universidad de Medellin*, *4*(6), 43–54.

Franco, L., Avendaño, C., & Barbutín, H. (2011). Modelo de Markowitz y Modelo de Black-Litterman en la Optimización de Portafolios de Inversión. *Tecno Lógicas*, (26), 71–88. Retrieved from http://www.scielo.org.co/scielo.php?script=sci_arttext&pid=S0123-77992011000100005&lng=en&nrm=iso&tlng=es

Gabaldón, E. (2016). *La regulación de la venta en corto en el mercado bursátil*. Universidad Complutense de Madrid.

Gálvez, R. (2008). *Análisis Costo Beneficio De La Implementación Del Modelo De Black-*

Litterman Para Asignación De Activos En Portafolios De Inversión. Universidad de Chile.

García, R. (2005). *Optimización del Condicional Value at Risk : Aplicación a las Compañías de Seguros en Chile*. Universidad de Chile.

Haugen, R. . (1993). *Modern investment theory*. (P. Hall, Ed.) (3a ed.). New Jersey.

Herold, U. (2003). Portfolio Construction with Qualitative Forecasts. *The Journal of Portfolio Management*, 61–72.

Husnain, M., Hassan, A., & Lamarque, E. (2016). THE BLACK-LITTERMAN MODEL : INCORPORATING THE, (January), 1–7.

Idzorek, T. M. (2004). A step by step guide to the Black Litterman model. https://doi.org/10.1016/B978-075068321-0.50003-0

Jorion, P. (2001). Value at Risk: the new benchmark for managing financial risk. McGraw-Hill.

Lee, W. (2000). *Advanced Theory and Methodology of Tactical Asset Allocation*. *Fabozzi, Frank J. Associates*. Pennsylvania.

Litterman, B. (2003). *Modern Investment Management*. United States: John Wiley & Sons, Inc.

Maginn, J. L., Tuttle, D. L., McLeavey, D. W., & Pinto, J. E. (2005). Managing Investment Portfolios: a Dynamic Process. *CFA Institute*, *37*(5), 960.

https://doi.org/10.1016/j.supflu.2003.09.004

Markowitz, H. (1952). Portfolio Selection. *The Journal of Finance*, *7*(1), 77–91. https://doi.org/10.1111/j.1540-6261.1952.tb01525.x

Michaud, R. (1989). The Markowirz Optimization Enigma: Is “Optimized” Optimal? *Financial Analysts Journal*, 31–42.

Rockafellar, R. T., & Uryasev, S. (2002). Conditional Value-at Risk for general loss distributions. *Journal of Banking and Finance*, *26*, 1443–1471. https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00271-6

Romero, R. (2005). Medidas de Riesgo Financiero. *Economia & Administración*, 57–63. https://doi.org/10.1016/S0378-4266(02)00262-5

Satchell, S. (2007). *Forecasting Expected Returns in the Financial Markets* (First edit). London.

Stephen, R., & Westerfield, R. (2012). *Finanzas Corporativas*. (McGraw-Hill, Ed.) (9a ed.). México.

Tian, R., Cox, S. H., Lin, Y., & Zuluaga, L. F. (2010). Portfolio Risk Management with CVaR-Like Constraints. *North American Actuarial Journal*, *14*(1), 86–106. https://doi.org/10.1080/10920277.2010.10597579

Trujillo Segura, M. E. (2009). *Construcción y gestión de portafolios con el modelo Black-Litterman: Una aplicación a los fondos de pensiones obligatorias en Colombia*. Universidad de los Andes. Retrieved from

http://www.scielo.org.co/pdf/teclo/n26/n26a05.pdf

Walters, J. (2011). The Black-Litterman Model in Detail. *SSRN Electronic Journal*, (February 2007), 1–65. https://doi.org/10.2139/ssrn.1314585

Wang, C., & Zhao, Z. (2016). Conditional Value-at-Risk : Semiparametric estimation and inference. *Journal of Econometrics*, *195*(1), 86–103. https://doi.org/10.1016/j.jeconom.2016.07.002

ANEXOS

Anexo 1. Valores históricos del portafolio.

	Min Valor	Máx Valor	Precio Promedio
FAL	3570,70	6498,40	4925,03
ENT	5379,57	10447,00	7660,40
ASG	159,93	372,54	280,46
CEN	1257,90	3742,53	2211,27
LTM	3270,20	14988,35	8743,63
ANDb	1570,60	3320,00	2452,30
STG	26,81	53,10	36,99
CAR	1140,02	2758,99	1774,09
CAP	1455,00	26110,00	10727,43
SQMb	8688,80	38626,00	21884,57
CHT	848,93	1438,90	1096,46
SON	854,00	1717,90	1269,70
RIP	218,13	718,22	455,32
PAR	734,50	2021,30	1222,06
CCU	4670,44	9250,00	6869,61
ANT	5950,90	12399,00	8166,99
ECL	633,64	1441,10	1090,50
SAL	350,00	1898,88	865,84
COL	106,26	192,31	145,69
BCI	21119,00	46678,02	31224,34
ENAM	95,48	235,18	166,88
IAM	656,73	1209,00	941,50
CHILE	50,53	102,99	72,58
ENGX	404,94	943,27	690,09
BES	204,69	1099,90	577,06

Anexo 2. Matriz de covarianzas para la obtención del máximo Índice de Sharpe.

	FAL	*ENT*	*ASG*	*CEN*	*LTM*	*ANDb*	*STG*	*CAR*	*CAP*	*SQMb*	*CHT*	*SON*	*RIP*	*PAR*	*CCU*	*ANT*	*ECL*	*SAL*	*COL*	*BCI*	*ENAM*	*IAM*	*CHILE*	*ENGX*	*BES*
FAL	1,0000	0,3234	0,3248	0,5086	0,3565	0,2720	0,4013	0,3926	0,2684	0,2684	0,3110	0,3562	0,3123	0,3565	0,2477	0,3017	0,2902	0,2970	0,3369	0,3988	0,2852	0,2384	0,3937	0,3136	0,2747
ENT	0,3234	1,0000	0,2667	0,2929	0,2653	0,2570	0,2964	0,3543	0,1998	0,1872	0,2426	0,2751	0,1900	0,2320	0,2388	0,2492	0,2581	0,2313	0,3008	0,3293	0,2330	0,2274	0,2939	0,2534	0,1781
ASG	0,3248	0,2667	1,0000	0,3091	0,2831	0,2165	0,2839	0,3613	0,2319	0,2294	0,2249	0,2850	0,1942	0,2446	0,2527	0,2358	0,2463	0,2287	0,3665	0,2929	0,2653	0,1667	0,3123	0,2652	0,2044
CEN	0,5086	0,2929	0,3091	1,0000	0,3979	0,2829	0,3865	0,4091	0,3002	0,2831	0,2845	0,3224	0,3597	0,3029	0,2589	0,3370	0,3149	0,3531	0,3443	0,4231	0,3048	0,2277	0,3679	0,3084	0,3026
LTM	0,3565	0,2653	0,2831	0,3979	1,0000	0,2602	0,3999	0,3574	0,3164	0,3244	0,2255	0,3409	0,2720	0,2834	0,2471	0,3016	0,2874	0,2914	0,3259	0,3644	0,3364	0,2183	0,3508	0,3288	0,2377
ANDb	0,2720	0,2570	0,2165	0,2829	0,2602	1,0000	0,2622	0,2766	0,1653	0,2139	0,2045	0,2211	0,1825	0,2024	0,2759	0,2563	0,2148	0,2127	0,2855	0,2829	0,2111	0,1329	0,2880	0,2352	0,2051
STG	0,4013	0,2964	0,2839	0,3865	0,3999	0,2622	1,0000	0,4038	0,2796	0,2920	0,2653	0,3041	0,2741	0,2883	0,3339	0,3510	0,2828	0,3139	0,3321	0,4254	0,3225	0,2127	0,4833	0,3235	0,3003
CAR	0,3926	0,3543	0,3613	0,4091	0,3574	0,2766	0,4038	1,0000	0,2808	0,2803	0,3193	0,3385	0,3026	0,2954	0,2829	0,3974	0,3140	0,3240	0,4155	0,4082	0,3258	0,1916	0,3863	0,3193	0,2604
CAP	0,2684	0,1998	0,2319	0,3002	0,3164	0,1653	0,2796	0,2808	1,0000	0,2665	0,1696	0,2576	0,2230	0,2483	0,1346	0,2622	0,2075	0,2489	0,2017	0,2833	0,1898	0,1726	0,2481	0,1898	0,2314
SQMb	0,2684	0,1872	0,2294	0,2831	0,3244	0,2139	0,2920	0,2803	0,2665	1,0000	0,1853	0,2506	0,1602	0,2045	0,2230	0,2447	0,2028	0,2571	0,2098	0,2915	0,1956	0,1485	0,2616	0,2271	0,2411
CHT	0,3110	0,2426	0,2249	0,2845	0,2255	0,2045	0,2653	0,3193	0,1696	0,1853	1,0000	0,2137	0,1699	0,2424	0,2445	0,2596	0,2269	0,2629	0,2943	0,2847	0,2299	0,1928	0,2753	0,2351	0,2198
SON	0,3562	0,2751	0,2850	0,3224	0,3409	0,2211	0,3041	0,3385	0,2576	0,2506	0,2137	1,0000	0,2567	0,2892	0,2354	0,2598	0,2812	0,2887	0,2874	0,2878	0,2819	0,2080	0,3018	0,2694	0,2553
RIP	0,3123	0,1900	0,1942	0,3597	0,2720	0,1825	0,2741	0,3026	0,2230	0,1602	0,1699	0,2567	1,0000	0,2502	0,1460	0,2875	0,2561	0,3394	0,2253	0,2644	0,1855	0,2032	0,2952	0,2027	0,2797
PAR	0,3565	0,2320	0,2446	0,3029	0,2834	0,2024	0,2883	0,2954	0,2483	0,2045	0,2424	0,2892	0,2502	1,0000	0,1771	0,3095	0,2921	0,3250	0,2471	0,2665	0,2478	0,2439	0,2800	0,2615	0,2540
CCU	0,2477	0,2388	0,2527	0,2589	0,2471	0,2759	0,3339	0,2829	0,1346	0,2230	0,2445	0,2354	0,1460	0,1771	1,0000	0,2189	0,1809	0,2186	0,2539	0,2541	0,2645	0,1482	0,2794	0,2554	0,1889
ANT	0,3017	0,2492	0,2358	0,3370	0,3016	0,2563	0,3510	0,3974	0,2622	0,2447	0,2596	0,2598	0,2875	0,3095	0,2189	1,0000	0,2584	0,3221	0,2595	0,2984	0,2592	0,1886	0,3115	0,2472	0,3092
ECL	0,2902	0,2581	0,2463	0,3149	0,2874	0,2148	0,2828	0,3140	0,2075	0,2028	0,2269	0,2812	0,2561	0,2921	0,1809	0,2584	1,0000	0,2907	0,3236	0,2991	0,2336	0,2142	0,2905	0,2150	0,2482
SAL	0,2970	0,2313	0,2287	0,3531	0,2914	0,2127	0,3139	0,3240	0,2489	0,2571	0,2629	0,2887	0,3394	0,3250	0,2186	0,3221	0,2907	1,0000	0,2289	0,3023	0,2101	0,2240	0,2833	0,2304	0,4852
COL	0,3369	0,3008	0,3665	0,3443	0,3259	0,2855	0,3321	0,4155	0,2017	0,2098	0,2943	0,2874	0,2253	0,2471	0,2539	0,2595	0,3236	0,2289	1,0000	0,3342	0,3096	0,1769	0,3253	0,3540	0,1780
BCI	0,3988	0,3293	0,2929	0,4231	0,3644	0,2829	0,4254	0,4082	0,2833	0,2915	0,2847	0,2878	0,2644	0,2665	0,2541	0,2984	0,2991	0,3023	0,3342	1,0000	0,2663	0,2168	0,4016	0,3134	0,2908
ENAM	0,2852	0,2330	0,2653	0,3048	0,3364	0,2111	0,3225	0,3258	0,1898	0,1956	0,2299	0,2819	0,1855	0,2478	0,2645	0,2592	0,2336	0,2101	0,3096	0,2663	1,0000	0,2008	0,2974	0,4109	0,1879
IAM	0,2384	0,2274	0,1667	0,2277	0,2183	0,1329	0,2127	0,1916	0,1726	0,1485	0,1928	0,2080	0,2032	0,2439	0,1482	0,1886	0,2142	0,2240	0,1769	0,2168	0,2008	1,0000	0,2757	0,1715	0,2176
CHILE	0,3937	0,2939	0,3123	0,3679	0,3508	0,2880	0,4833	0,3863	0,2481	0,2616	0,2753	0,3018	0,2952	0,2800	0,2794	0,3115	0,2905	0,2833	0,3253	0,4016	0,2974	0,2757	1,0000	0,3066	0,2926
ENGX	0,3136	0,2534	0,2652	0,3084	0,3288	0,2352	0,3235	0,3193	0,1898	0,2271	0,2351	0,2694	0,2027	0,2615	0,2554	0,2472	0,2150	0,2304	0,3540	0,3134	0,4109	0,1715	0,3066	1,0000	0,2132
BES	0,2747	0,1781	0,2044	0,3026	0,2377	0,2051	0,3003	0,2604	0,2314	0,2411	0,2198	0,2553	0,2797	0,2540	0,1889	0,3092	0,2482	0,4852	0,1780	0,2908	0,1879	0,2176	0,2926	0,2132	1,0000