

2022-10

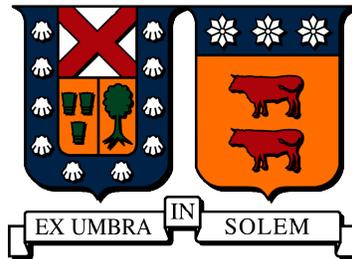
Estudio de algunos problemas que involucran al operador bilaplaciano

Masnú Berríos, Simón

<https://hdl.handle.net/11673/54730>

Repositorio Digital USM, UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
VALPARAÍSO, CHILE



Estudio de algunos problemas que involucran al operador bilaplaciano

Tesis presentada por

Simón Masnú Berríos

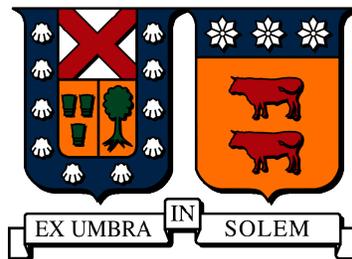
como requisito parcial para optar al grado de Magíster en Ciencias
mención Matemática y al título profesional de Ingeniero Civil
Matemático.

profesor guía:

Dr. Salomón Alarcón Araneda

Octubre de 2022

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
VALPARAÍSO, CHILE



Estudio de algunos problemas que involucran al operador bilaplaciano

Tesis presentada por

Simón Masnú Berríos

como requisito parcial para optar al grado de Magíster en Ciencias
mención Matemática y al título profesional de Ingeniero Civil
Matemático.

profesor guía:

Dr. Salomón Alarcón Araneda

profesor correferente:

Dr. Alexander Quaas Berger

Octubre de 2022

Material de referencia, su uso no involucra responsabilidad del autor o de la Institución.

Agradecimientos

En primer lugar, agradezco a mi familia por otorgarme un inmenso apoyo a lo largo de mi carrera. Agradezco especialmente a mis padres, Jéssica y José Miguel, por criarme con todo el cariño y cuidado del mundo, apoyarme incondicionalmente en todos mis proyectos, nunca dudar de mis capacidades y nunca permitir que nada me faltara. A mi hermana Sofía, por ser fuente inagotable de risas, buenos momentos y compañía desde que tengo memoria; y a mi hermana Magdalena, por estar en los momentos más importantes a pesar de la distancia.

Quiero agradecer también a mi pareja, Claudia, por ser un enorme pilar en lo emocional y en lo académico, sin el cual no habría podido superar la etapa universitaria. Gracias por ser el motor que me mantuvo siempre en marcha, incluso en los momentos más difíciles. Agradezco también a la familia Álvarez Latuz por siempre recibirme con los brazos abiertos en su hogar.

Doy gracias a mis amigos de siempre: Sebastián, Diego, Bruno, Maittaki, Francisca, Sofía, Paula, Antonia, Francisco, Andrés, Martín, Rodrigo, Manuel, Nicolás N., Nicolás M., Benjamín y a tantos otros por su cariño y amistad; gracias además a todos quienes me brindaron su compañía por Discord durante los largos días de pandemia. Gracias también a mis amigos de la universidad: Ike, Sebastián, Bruno, Gustavo, Bernardo, Bastián, Fabián R., Fabián C., Eduardo, Joaquín, Ricardo, Cristobal, Martín y muchos otros; con ustedes viví excelentes momentos en una etapa muy importante de mi vida.

Agradezco a mi profesor guía, Dr. Salomón Alarcón, por su apoyo a lo largo de todo este proceso, su excelente disposición y su gran paciencia. Gracias también a todos los profesores de la Universidad a cuyas clases tuve el placer de asistir, son todos una gran inspiración y objeto de enorme admiración.

Gracias también a ANID-Subdirección de Capital Humano por financiar este programa con la beca Magíster Nacional 2021 - 22210778.

Resumen

En este trabajo se abordarán dos problemas asociados al operador bilaplaciano. El primero de ellos consiste en estudiar la simetría de las soluciones positivas de la ecuación de tipo Hénon-Hardy de cuarto orden:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = |x|^\alpha u^p & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

donde $N \geq 5$, $\alpha \in (-4, 0)$ y $p = p_\alpha^* = \frac{N+4+2\alpha}{N-4}$. Se logra establecer que todas las soluciones $C^4(\mathbb{R}^N)$ son radialmente simétricas respecto al origen. Para ello nos basamos principalmente en el método de los planos móviles.

El segundo problema consiste en construir soluciones radiales cambiando de signo para la ecuación de tipo Lane-Emden de cuarto orden con condiciones de frontera de Navier:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = |u|^{p-\varepsilon-1} u & \text{en } \mathbf{B}_1, \\ u = \Delta u = 0 & \text{en } \partial\mathbf{B}_1, \end{cases}$$

donde \mathbf{B}_1 denota la bola unitaria en \mathbb{R}^N , $5 \leq N < 12$, $p = p^* = \frac{N+4}{N-4}$ y $\varepsilon > 0$ es una perturbación positiva suficientemente pequeña. Para esto utilizaremos una transformación de tipo Emden-Fowler y estudiaremos el problema asociado via el método de reducción de Lyapunov-Schmidt para obtener soluciones multinodales.

Palabras clave: Operador bilaplaciano, Ecuación de Lane-Emden, ecuación de Hénon-Hardy, simetría Radial, soluciones multinodales, método de planos móviles, método de reducción de Lyapunov-Schmidt

Abstract

In this work we will address two problems associated to the bilaplacian operator. The first one consists in studying the symmetry of positive solutions to the fourth-order Hénon-Hardy type equation:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = |x|^\alpha u^p & \text{in } \mathbb{R}^N, \\ u > 0 & \text{in } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

where $N \geq 5$, $\alpha \in (-4, 0)$ and $p = p_\alpha^* = \frac{N+4+2\alpha}{N-4}$. We prove that all $C^4(\mathbb{R}^N)$ solutions are radially symmetric with respect to the origin. We base our work mainly in the method of moving planes.

The second problem consists in building radial sing-changing solutions for the fourth-order Lane-Emden type equation with Navier boundary conditions:

$$\begin{cases} \Delta^2 u = |u|^{p-\varepsilon-1} u & \text{in } \mathbf{B}_1, \\ u = \Delta u = 0 & \text{on } \partial \mathbf{B}_1, \end{cases}$$

where \mathbf{B}_1 denotes the unit ball in \mathbb{R}^N , $5 \leq N < 12$, $p = p^* = \frac{N+4}{N-4}$ and $\varepsilon > 0$ is a small enough positive perturbation. We will use an Emden-Fowler type transformation and will study the associated problem via the Lyapunov-Schmidt reduction method to obtain multinodal solutions.

Keywords: Bilaplacian operator, Lane-Emden equation, Hénon-Hardy equation, radial symmetry, multinodal solutions, moving plane method, Lyapunov-Schmidt reduction method.

Índice general

1. Introducción	1
1.1. Los operadores laplaciano y bilaplaciano	1
1.1.1. El operador laplaciano	1
1.1.2. El operador bilaplaciano	3
1.2. Ecuaciones de Lane-Emden y Hénon-Hardy	4
1.2.1. Ecuación de Lane-Emden	4
1.2.2. Ecuación de Hénon-Hardy	5
1.3. Ecuaciones de tipo Lane-Emden y Hénon-Hardy de cuarto orden	6
1.3.1. Ecuación de tipo Lane-Emden de cuarto orden	7
1.3.2. Ecuación de tipo Hénon-Hardy de cuarto orden	8
1.4. Estructura del trabajo	8
2. Simetría de soluciones a la ecuación de tipo Hénon-Hardy para el bilaplaciano	9
2.1. Primer Resultado principal	9
2.2. Resultados Previos	9
2.2.1. Transformada de Kelvin	9
2.2.2. Método de Planos Móviles: Notación y lemas previos	21
2.3. Demostración del resultado principal	27
3. Existencia de soluciones multinodales a la ecuación de tipo Lane-Emden para el bilaplaciano	32
3.1. Segundo Resultado Principal	32
3.2. Resultados preliminares	33
3.2.1. Cambio de Emden-Fowler	33
3.2.2. Formulación Débil y Funcional de Energía	35
3.2.3. El Ansatz	37
3.3. Expansión del funcional de energía	39
3.4. El problema linealizado	47
3.5. Reducción finito dimensional	60
3.6. Demostración del resultado principal	63
A. Anexo A	68
A.1. Principios del Máximo y de Comparación	68

B. Anexo B	70
B.1. Lemas Técnicos	70

Capítulo 1

Introducción

En este capítulo se presenta información previa relevante. Se comienza definiendo los operadores laplaciano y bilaplaciano, dando motivación para su estudio y enunciando sus propiedades más elementales. También se destacan algunas diferencias entre ambos operadores. Luego se introducen las ecuaciones de Lane-Emden y Hénon-Hardy, dando un breve repaso de sus propiedades. Finalmente se abordan las ecuaciones de tipo Lane-Emden y Hénon-Hardy de cuarto orden, con las cuales trabajaremos el resto del documento.

1.1. Los operadores laplaciano y bilaplaciano

En esta sección introduciremos brevemente los operadores laplaciano y bilaplaciano.

1.1.1. El operador laplaciano

El operador laplaciano es un operador diferencial de segundo orden que, dada una función $u \in C^2(\mathbb{R}^N)$, se define como:

$$\Delta u(x) := \operatorname{div}(\nabla u(x)) = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2} u(x).$$

Este operador es sin duda uno de los operadores diferenciales más importantes en matemática y física, dado que surge naturalmente al momento de modelar una infinidad de problemas del mundo real. Esto ocurre porque generalmente modelamos los fenómenos de la vida real mediante tasas de cambio de ciertas cantidades respecto al tiempo y al espacio.

Por ejemplo, en electrostática las cargas eléctricas sienten fuerzas de acuerdo al campo eléctrico $E : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, que a cada punto del espacio le asigna un vector. La dirección de este vector representa hacia dónde se movería una carga positiva, y su magnitud nos dice la fuerza por unidad de carga que sentiría. La ley de Gauss dice que si consideramos un volumen $V \subseteq \mathbb{R}^3$, el flujo neto del campo eléctrico sobre su frontera (intuitivamente la suma de las líneas de campo que entran y salen de él) es proporcional a la cantidad de carga dentro de éste. Esto se puede expresar matemáticamente como:

$$\int_{\partial V} E \cdot \hat{n} dS = \frac{1}{\epsilon_0} \int_V \rho dV,$$

donde $\rho : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ es la densidad de carga. Gracias al teorema de la divergencia de Gauss sabemos que:

$$\int_{\partial V} E \cdot \hat{n} dS = \int_V \operatorname{div} E dV.$$

Como la ley de Gauss vale para cualquier volumen $V \subseteq \mathbb{R}^3$, podemos escribir la primera ecuación como:

$$\operatorname{div} E(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x).$$

Otro hecho increíble de la electrostática es que el campo eléctrico es irrotacional cuando no hay cargas en movimiento: $\nabla \times E = 0$. Esto implica que existe cierto campo escalar (llamado potencial electrostático) $\phi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $E = -\nabla \phi$. Si reemplazamos esto en la ecuación anterior llegamos a la relación:

$$-\operatorname{div}(\nabla \phi)(x) := -\Delta \phi(x) = \frac{1}{\epsilon_0} \rho(x).$$

¡Aparece el laplaciano! Esto nos dice que si tenemos una distribución de cargas conocida ρ que no varía en el tiempo y queremos saber cómo se comportaría otra carga, basta hallar una función ϕ cuyo laplaciano sea igual a $-\frac{1}{\epsilon_0} \rho$ y luego calcular $E = -\nabla \phi$.

Resulta que muchas leyes físicas pueden ser formuladas en términos del flujo neto de cierto campo vectorial gradiente y la integral de volumen de cierto campo escalar, obteniendo ecuaciones de la forma:

$$\int_{\partial V} -\nabla u \cdot \hat{n} dS = \int_V f dV,$$

las cuales pueden ser reescritas gracias al teorema de la divergencia de Gauss como:

$$-\Delta u(x) = f(x). \tag{1.1}$$

Esta es la *ecuación de Poisson*, y gobierna fenómenos tan variados como la gravitación, el flujo estacionario de calor, el flujo estacionario de fluidos incompresibles, no-viscosos e irrotacionales, y como vimos al principio, la electrostática. Cuando $f \equiv 0$, la ecuación anterior recibe el nombre de *ecuación de Laplace*, en honor al matemático que introdujo el operador. Las soluciones de la *ecuación de Laplace* se denominan *funciones armónicas*.

Otra situación muy recurrente en física, es que algo tienda a fluir de un lugar de mayor concentración a uno de menor concentración, dando lugar a ecuaciones de la forma:

$$\int_{\partial V} -\nabla u \cdot \hat{n} dS = -\frac{\partial}{\partial t} \int_V u dV,$$

que en su forma diferencial se escriben:

$$\Delta u(x) = \frac{\partial}{\partial t} u(x).$$

¡Nuevamente aparece el laplaciano! Esta ecuación es llamada *ecuación del calor*, y modela por ejemplo la conducción del calor y la difusión de químicos.

Del mismo modo, el operador laplaciano aparece en muchas otras ecuaciones de gran importancia, como la *ecuación de onda*, la *ecuación de Schrödinger*, las *ecuaciones de Navier-Stokes*, entre otras. Por esta razón, este operador ha sido (y seguirá siendo) objeto de arduo estudio durante mucho tiempo.

Para más detalles sobre las aplicaciones del laplaciano en física ver [11]. Para ver las propiedades de este operador y las soluciones de las ecuaciones aquí nombradas, ver [10]. Ambos textos sirvieron de base para esta sección.

1.1.2. El operador bilaplaciano

En esta sección introducimos el operador bilaplaciano, basándonos principalmente en [12]. El operador bilaplaciano es un operador diferencial de cuarto orden que, como su nombre sugiere, se define como “el laplaciano del laplaciano”:

$$\Delta^2 u(x) := \Delta(\Delta u(x)) = \sum_{i=1}^N \sum_{j=1}^N \frac{\partial^4}{\partial x_i^2 \partial x_j^2} u(x).$$

Este operador es de gran importancia en la teoría de elasticidad, pues surge en el estudio de la deformación de una placa delgada. Este fenómeno puede ser modelado mediante la *ecuación de Kirchhoff-Love*:

$$\Delta^2 u(x) = f(x), \tag{1.2}$$

donde $u : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ representa la desviación de la placa desde el equilibrio y $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ es la fuerza externa aplicada a la placa (ver [12] y las referencias allí hechas). Note que esta ecuación es muy similar a la ecuación de Poisson (1.1), con la diferencia de que el operador diferencial esta vez es el bilaplaciano. De forma análoga al caso del laplaciano, las soluciones de la ecuación $\Delta^2 u = 0$ se denominan *funciones biarmónicas*. Es inmediato que las funciones armónicas son biarmónicas, pero no al revés.

Como se describe en [12], el operador bilaplaciano adquiere especial interés a partir de principios del siglo XX, cuando comienzan a surgir preguntas respecto a la existencia y positividad de soluciones.

A pesar de que los operadores laplaciano y bilaplaciano tienen bastantes similitudes (por ejemplo, ambos son operadores elípticos), también tienen importantes diferencias. Un hecho muy conocido de las funciones subarmónicas (aquellas que verifican $-\Delta u \leq 0$) es que cumplen el *principio del máximo*. Este principio dice (ver, por ejemplo, [10]): Si $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un subconjunto abierto y acotado de \mathbb{R}^N con frontera $\partial\Omega$ “suficientemente buena” y $u \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ es tal que

$$-\Delta u(x) \leq 0 \text{ en } \Omega,$$

entonces

$$\max_{x \in \bar{\Omega}} u(x) = \max_{x \in \partial\Omega} u(x).$$

Dado que el laplaciano es lineal, es claro que se tiene un principio análogo para los mínimos de u . En contraste, es fácil notar que los mapeos $x \rightarrow -|x|^2$ y $x \rightarrow |x|^2$ son biarmónicos, y sin embargo el primero tiene un máximo global en $x = 0$ y el segundo un mínimo global en el mismo punto. Sigue inmediatamente que las funciones biarmónicas en general *no cumplen*

el *principio del máximo* (o del mínimo). Esta es una diferencia fundamental entre ambos operadores.

Otro principio relevante del operador laplaciano es el *principio de comparación*, que está íntimamente ligado al principio del máximo y dice que si dos funciones $u, v \in C^2(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ cumplen:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) \leq -\Delta v(x) & \text{en } \Omega, \\ u(x) \leq v(x) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces $u \leq v$ en todo $\bar{\Omega}$. Este principio es muy importante a la hora de estudiar ecuaciones que involucren al operador laplaciano y tampoco es cierto en general para el caso del bilaplaciano. Sin embargo, si consideramos condiciones de frontera específicas, como por ejemplo las *condiciones de Navier* ($u = \Delta u = 0$ en $\partial\Omega$), se puede enunciar un resultado similar. Si tenemos:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) \leq \Delta^2 v(x) & \text{en } \Omega, \\ \Delta u(x) \geq \Delta v(x) & \text{sobre } \partial\Omega, \\ u(x) \leq v(x) & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases}$$

entonces es posible escribir el problema como un sistema de ecuaciones diferenciales y demostrar que $u(x) \leq v(x)$ en $\bar{\Omega}$. Aunque este resultado es sencillo de probar, será crucial para demostrar el resultado del capítulo 3, por lo que se encuentra detallado en el anexo A.

1.2. Ecuaciones de Lane-Emden y Hénon-Hardy

Esta sección está dedicada a las ecuaciones de Lane-Emden y Hénon-Hardy, las cuales motivan el resto del trabajo. Presentaremos un resumen de los resultados principales relativos a estas ecuaciones, el cual no pretende ser exhaustivo. Para más detalles invitamos al lector a visitar las citas y las referencias allí hechas. Para esta sección considere $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ un conjunto abierto no vacío, con $N \geq 3$.

1.2.1. Ecuación de Lane-Emden

La *ecuación de Lane-Emden* es:

$$-\Delta u(x) = u^p(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.3)$$

Esta es una ecuación no lineal de segundo orden íntimamente ligada a las inyecciones de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$. Por ejemplo, es sencillo notar mediante integración por partes que las soluciones de (1.3) cumplen $\|u\|_{H_0^1}(\Omega) = \|u\|_{L^{p+1}}(\Omega)$ (con condiciones de frontera adecuadas). Esta ecuación ha sido extensamente estudiada en la literatura para diversos dominios y condiciones de frontera. A continuación resumiremos los resultados más importantes para esta ecuación.

En primer lugar, para el caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ y la condición $u \geq 0$ obtenemos la ecuación:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = u^p(x) & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \geq 0 & \text{sobre } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (1.4)$$

En [13] B. Gidas y J. Spruck demuestran que (1.4) tiene sólo la solución trivial si $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$. Luego, en [3], L. Caffarelli, B. Gidas y J. Spruck muestran que si $p = \frac{N+2}{N-2}$ entonces u necesariamente es de la forma:

$$u(x) = C_N \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + |x - x_0|^2} \right)^{\frac{N-2}{2}}, \quad (1.5)$$

donde C_N es una constante positiva que depende sólo de N , $\lambda > 0$ es un parámetro positivo y $x_0 \in \mathbb{R}^N$ es un punto cualquiera. A las funciones (1.5) se les denomina *burbujas para el laplaciano*.

Por otro lado, si consideramos $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ acotado y condiciones de frontera Dirichlet, entonces el problema queda:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = |u(x)|^{p-1}u(x) & \text{en } \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.6)$$

Mediante un análisis del funcional de energía asociado a (1.6) es posible establecer la existencia de soluciones no triviales cuando $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ (ver, p.ej., [10]). Este resultado depende fuertemente de la compacidad de la inyección $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, y por lo tanto el argumento falla cuando $p \geq \frac{N+2}{N-2}$. De hecho, se sabe que (1.6) tiene sólo la solución trivial $u \equiv 0$ cuando $p \geq \frac{N+2}{N-2}$ y Ω es un conjunto estrictamente estrellado, gracias a la famosa identidad de Pohozaev (ver [23]). Note que, igual que en el caso anterior, el valor $p = \frac{N+2}{N-2}$ marca un cambio cualitativo en la existencia y unicidad de soluciones de (1.3). Por esto, $p = \frac{N+2}{N-2}$ es llamado *exponente crítico* para la ecuación (1.3). Este exponente está estrechamente relacionado al exponente crítico de Sobolev 2^* (concretamente, se tiene que: $\frac{N+2}{N-2} = 2^* - 1$). En [5] se demuestra que existen soluciones cambiando de signo de (1.6) con una cantidad arbitraria de nodos si p está lo suficientemente cerca del valor crítico, para lo cual los autores utilizan el método de reducción de Lyapunov-Schmidt. Este último trabajo es el que inspira el capítulo 3.

1.2.2. Ecuación de Hénon-Hardy

Ahora, introducimos la ecuación:

$$-\Delta u(x) = |x|^\alpha u^p(x), \quad x \in \Omega.$$

Esta ecuación es denominada *ecuación de Hénon* si $\alpha > 0$ y *ecuación de Hardy* si $\alpha < 0$. Note que para el caso $\alpha = 0$ recuperamos la ecuación de Lane-Emden, cubierta en la subsección anterior. A pesar de recibir nombres distintos, conviene estudiar ambas ecuaciones de manera simultánea. A continuación daremos algunos resultados relevantes de esta ecuación.

La ecuación de Hénon fue introducida por el astrofísico M. Hénon en [14] para modelar polítopos generalizados en el contexto de sistemas estelares esféricos. Desde el punto de vista matemático, el estudio de la ecuación de Hénon comienza con la existencia de soluciones positivas. La identidad de Pohozaev impide la existencia de soluciones positivas si $p \geq \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$, Ω es un conjunto estrellado y consideramos condiciones de frontera Dirichlet. En [21] se demuestra que si Ω es la bola unitaria, la ecuación con condición de frontera Dirichlet:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = |x|^\alpha u^p(x) & \text{en } B_1, \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial B_1, \end{cases} \quad (1.7)$$

tiene una solución estrictamente positiva si $1 < p < \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$ y $\alpha > 0$, y en [22] prueban que esta solución es única en el espacio de funciones radiales. Al igual que en los casos anteriores, podemos distinguir dos comportamientos completamente distintos en los casos $1 < p < \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$ y $p \geq \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$. Esto hace que $p = \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$ sea llamado *exponente crítico para la ecuación de Hénon*. Note que α juega un rol en este exponente.

En cuanto a dominios no acotados, en [13] se demostró que si $1 < p < \frac{N+2}{N-2}$ y $\alpha \leq -2$ entonces la ecuación:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = |x|^\alpha u^p(x) & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \geq 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases}$$

no tiene soluciones no triviales. En el mismo trabajo se exhiben soluciones radiales explícitas cuando $p = \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$:

$$u_{\lambda,\alpha}(x) = C_{N,\alpha} \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + |x|^{2+\alpha}} \right)^{\frac{N-2}{2+\alpha}}, \quad (1.8)$$

las cuales son acotadas en torno a $x = 0$ para $\alpha > -2$. En la literatura, las funciones $u_{\lambda,\alpha}(x)$ se conocen como *burbujas de orden α* . Note la similitud entre estas funciones y las burbujas para el laplaciano (1.5). Además, en [13] se mencionan soluciones radiales C^2 cuando $p > \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$. El caso $\alpha > -2$ y $1 < p < \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$ permaneció esquivo por bastante tiempo, hasta que en [6] se probó que allí tampoco existen soluciones no triviales mediante el método de “scaling spheres”. Para más detalles, por favor ver [6] y las referencias allí hechas.

Ahora, hablemos un poco de las soluciones cambiando de signo. Si $\Omega = B_1$, la ecuación de interés es:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = |x|^\alpha |u(x)|^{p-1} u(x) & \text{en } B_1, \\ u(x) = 0 & \text{sobre } \partial B_1. \end{cases}$$

Para el caso $\alpha > 0$, Nagasaki demostró en [19] que existen infinitas soluciones radiales cambiando de signo cuando $1 < p < \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$, y que estas son únicas si fijamos $u(0) = 1$ y la cantidad de esferas nodales de la solución. En el mismo trabajo se prueba que no existen soluciones no triviales si $p \geq \frac{N+2+2\alpha}{N-2}$.

Es importante mencionar que en [1] se utiliza el método de reducción de Lyapunov-Schmidt para construir soluciones cambiando de signo para p ligeramente subcrítico y $\alpha > 0$ en dominios acotados más generales, específicamente dominios simétricos respecto a x_1, x_2, \dots, x_N que contengan el origen.

1.3. Ecuaciones de tipo Lane-Emden y Hénon-Hardy de cuarto orden

En esta sección hablaremos de las ecuaciones de tipo Lane-Emden y Hénon-Hardy de cuarto orden, que son generalizaciones de las ecuaciones vistas en la sección anterior. Nuevamente, esta introducción no pretende ser exhaustiva, por lo que se invita al lector a consultar las referencias para más detalles. En esta sección $\Omega \subseteq \mathbb{R}^N$ es un subconjunto abierto y no vacío, con $N \geq 5$.

1.3.1. Ecuación de tipo Lane-Emden de cuarto orden

La ecuación de tipo Lane-Emden de cuarto orden es:

$$\Delta^2 u(x) = u^p(x), \quad x \in \Omega. \quad (1.9)$$

Esta ecuación está íntimamente ligada a la mejor constante de Sobolev de la inyección $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^{\frac{2N}{N-4}}(\Omega)$ (ver [24] y las referencias allí hechas). Comencemos hablando de la existencia de soluciones positivas en $\Omega = \mathbb{R}^N$. En ese caso la ecuación queda:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = u^p(x) & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \geq 0 & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (1.10)$$

Las soluciones de (1.10) fueron totalmente clasificadas en el celebrado trabajo de C.-S. Lin [15]. Allí se demuestra que si $1 < p < \frac{N+4}{N-4}$, entonces la única solución de (1.10) es la trivial. Además, se establece que cuando $p = \frac{N+4}{N-4}$ existen infinitas soluciones, y todas ellas son de la forma:

$$u_{x_0, \lambda}(x) = C_N \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + |x - x_0|^2} \right)^{\frac{N-4}{2}}. \quad (1.11)$$

Note que estos resultados son análogos a los del caso de la ecuación de Lane-Emden normal. Nuevamente ocurre un cambio abrupto cuando $p = \frac{N+4}{N-4}$, por lo que este valor recibe el nombre de *exponente crítico para la ecuación (1.9)*. A las funciones (1.11) se les denomina *burujas para el bilaplaciano*. Para demostrar estos resultados, Lin utiliza el *método de planos móviles* para demostrar primero que las soluciones de la ecuación (1.10) son radialmente simétricas respecto a algún punto. Esto es lo que inspira el trabajo del capítulo 2.

Consideremos ahora el caso cuando $\Omega = B_1$. En este trabajo nos interesamos en las *condiciones de frontera de tipo Navier*:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = u^p(x) & \text{en } B_1, \\ u(x) = \Delta u(x) = 0 & \text{sobre } B_1. \end{cases} \quad (1.12)$$

De modo similar al caso del laplaciano, es posible demostrar que existen soluciones no triviales de (1.12) mediante el estudio del funcional de energía asociado cuando $1 < p < \frac{N+4}{N-4}$ (ver, p.ej., [12]). Nuevamente, esta demostración se basa fuertemente en la compacidad de la inyección $H^2(\Omega) \hookrightarrow L^{p+1}(\Omega)$, por lo que falla cuando $p \geq \frac{N+4}{N-4}$. En los trabajos [18, 25] se demuestra vía una identidad de tipo Pohozaev que la ecuación (1.12) no tiene soluciones positivas si $p \geq \frac{N+4}{N-4}$ (los resultados valen para dominios Ω estrictamente estrellados con frontera suave).

En cuanto a soluciones cambiando de signo, debemos estudiar la ecuación:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = |u(x)|^{p-1}u(x) & \text{en } B_1, \\ u(x) = \Delta u(x) = 0 & \text{sobre } B_1. \end{cases} \quad (1.13)$$

Al igual que antes, esta ecuación tiene soluciones no triviales cuando $1 < p < \frac{N+4}{N-4}$. Sin embargo, como se menciona en [12], las soluciones de esta ecuación que se obtienen mediante la minimización del funcional asociado deben ser de signo fijo y radialmente simétricas. Para el caso crítico, también es sabido que (1.13) no tiene soluciones no negativas ni soluciones radiales (ver teoremas 7.52 y 7.53 de [12]). El objetivo del capítulo 3 es construir soluciones

multinodales de (1.13) cuando $p = \frac{N+4}{N-4} - \varepsilon$, con $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño siguiendo los pasos de [5, 9].

Otro trabajo ligado a esta ecuación que nos gustaría destacar es [2], donde se estudian fenómenos de concentración de esta ecuación utilizando el método de Lyapunov-Schmidt.

1.3.2. Ecuación de tipo Hénon-Hardy de cuarto orden

Por último, centremos nuestra atención en la ecuación de tipo Hénon-Hardy de cuarto orden:

$$\Delta^2 u(x) = |x|^\alpha u^p(x), \quad x \in \Omega.$$

Específicamente, estamos interesados en el caso de soluciones positivas y $\Omega = \mathbb{R}^N$:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = |x|^\alpha u^p(x) & \text{en } \mathbb{R}^N, \\ u(x) \geq 0 & \text{en } \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (1.14)$$

En [7] los autores demuestran que si $\alpha \in (-4, 0)$ y $1 < p < \frac{N+4+2\alpha}{N-4}$ entonces (1.14) no tiene soluciones no triviales. En [6] se prueba que si $\alpha \in (0, \infty)$ y $1 < p < \frac{N+4+2\alpha}{N-4}$ entonces (1.14) tampoco tiene soluciones no triviales.

En cuanto a resultados de existencia, en [20] se demuestra que (1.14) siempre admite soluciones radiales positivas en $C(\mathbb{R}^N) \cap C^4(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Más aún, en [17] se estableció que todas las soluciones positivas de (1.14) en $H^2(\mathbb{R}^N)$ son radialmente simétricas. Este resultado es más general que lo se logró demostrar en el capítulo 2. Sin embargo, estimamos que el desarrollo de aquel capítulo constituye un buen ejemplo de aplicación del método de planos móviles clásico, por lo que decidimos incluirlo igualmente.

1.4. Estructura del trabajo

El resto de la tesis se organiza de la siguiente manera: En el capítulo 2 se demuestra la simetría radial de las soluciones suaves de (1.14) con exponente crítico mediante el método de los planos móviles, siguiendo particularmente el trabajo de [15]. En el capítulo 3 se construyen soluciones con una cantidad arbitraria de esferas nodales para la ecuación (1.12) con exponente ligeramente subcrítico. Para ello se utiliza el método de reducción de Lyapunov-Schmidt y el cambio de Emden-Fowler aplicados a la EDO radial asociada a (1.12), siguiendo principalmente los trabajos [5, 9]. Luego, se dan conclusiones y posibles trabajos futuros. Finalmente, en el anexo A se dan dos resultados básicos de la ecuación de Lane-Emden de cuarto orden con condiciones de frontera de Navier, y en el anexo B se incluyen todas las cuentas de carácter técnico relevantes para la correcta aplicación del método de reducción de Lyapunov-Schmidt.

Capítulo 2

Simetría de soluciones a la ecuación de tipo Hénon-Hardy para el bilaplaciano

2.1. Primer Resultado principal

El objetivo será estudiar la ecuación de tipo Hénon-Hardy para el bilaplaciano en \mathbb{R}^N :

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = |x|^\alpha u^p(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \\ u > 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (2.1)$$

donde $N \geq 5$, $\alpha \in (-4, 0)$ y $p = p_\alpha^* = \frac{N+4+2\alpha}{N-4}$.

El resultado principal a demostrar este capítulo es:

Teorema 2.1.1. *Sea u una solución $C^4(\mathbb{R}^N)$ de*

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = |x|^\alpha u^p(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \\ u > 0 & \text{en } \mathbb{R}^N, \end{cases} \quad (2.2)$$

Entonces u es radialmente simétrica respecto al origen.

Observación 2.1.1. *En vista del reciente trabajo [20], parece ser más adecuado trabajar en el espacio de funciones $C(\mathbb{R}^N) \cap C^4(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, o uno de otra naturaleza.*

2.2. Resultados Previos

Para demostrar el teorema 2.1.1 nos basaremos fuertemente en la demostración del teorema 1.3 de [15].

2.2.1. Transformada de Kelvin

Sea u una solución de (2.1). Consideremos la transformada de Kelvin para el bilaplaciano:

$$u^*(x) := |x|^{4-N} u \left(\frac{x}{|x|^2} \right) \quad (2.3)$$

Mediante cálculo directo es posible demostrar que:

$$\Delta^2 u^*(x) = \frac{1}{|x|^{N+4}} (\Delta^2 u) \left(\frac{x}{|x|^2} \right)$$

Luego, si u es solución de (2.4) entonces reemplazando obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u^*(x) &= \frac{1}{|x|^{N+4}} \left| \frac{x}{|x|^2} \right|^\alpha u^{p_\alpha^*} \left(\frac{x}{|x|^2} \right) \\ &= \frac{1}{|x|^{N+4+\alpha}} |x|^{p_\alpha^*(N-4)} \frac{1}{|x|^{p_\alpha^*(N-4)}} u^{p_\alpha^*} \left(\frac{x}{|x|^2} \right) \\ &= \frac{|x|^{N+4+2\alpha}}{|x|^{N+4+\alpha}} (u^*(x))^{p_\alpha^*} \\ &= |x|^\alpha (u^*(x))^{p_\alpha^*}. \end{aligned}$$

Es decir, la transformada de Kelvin de una solución de (2.1) satisface

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = |x|^\alpha u^{p_\alpha^*}(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \\ u > 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}. \end{cases} \quad (2.4)$$

Si definimos $v(x) = -\Delta u^*(x)$ entonces se tiene la siguiente expansión armónica en infinito:

$$\begin{cases} v(x) = c_0 |x|^{2-N} + \sum_{j=1}^N \frac{a_j x_j}{|x|^N} + O\left(\frac{1}{|x|^N}\right) \\ v_{x_i}(x) = -(N-2)c_0 |x|^{-N} x_i + O\left(\frac{1}{|x|^N}\right) \\ v_{x_i x_j}(x) = O\left(\frac{1}{|x|^N}\right) \end{cases} \quad (2.5)$$

Donde $c_0 > 0$ y $a_j \in \mathbb{R}$. De este modo, para $|x|$ suficientemente grande tendremos que:

$$\Delta u^*(x) < 0$$

Para lo que sigue, necesitamos que u^* sea subarmónica en todo $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. Para esto, veremos el siguiente lema, análogo al lema 4.1 de [15].

Lema 2.2.1. *Sea u solución de (2.4). Entonces Δu es subarmónica en $B(0,1)$ en el sentido distribucional.*

Demostración. Denotemos $p = p_\alpha^*$ Primero probaremos que $|x|^\alpha u^p \in L^1\left(\overline{B(0, \frac{1}{2})}\right)$. Procediendo por contradicción suponga que $|x|^\alpha u^p \notin L^1\left(\overline{B(0, \frac{1}{2})}\right)$. Aplicando integración por partes tendremos que:

$$\int_{\partial B(0, s_2)} \frac{\partial}{\partial \hat{n}}(\Delta u) dS - \int_{\partial B(0, s_1)} \frac{\partial}{\partial \hat{n}}(\Delta u) dS = \int_{B(0, s_2) \setminus B(0, s_1)} |x|^\alpha u^p(x) dx > 0 \quad (2.6)$$

Para todo $0 < s_1 \leq s_2 \leq \frac{1}{2}$. Luego, como suponemos que $|x|^\alpha u^p \notin L^1\left(\overline{B(0, \frac{1}{2})}\right)$ entonces el lado derecho de la ecuación (2.6) tiende a $+\infty$ cuando $s_1 \rightarrow 0$. Tomando $s_2 = \frac{1}{2}$, para $r > 0$ suficientemente pequeño tendremos que:

$$\int_{\partial B(0, r)} \frac{\partial}{\partial \hat{n}}(\Delta u) dS = \int_{\partial B(0, \frac{1}{2})} \frac{\partial}{\partial \hat{n}}(\Delta u) dS - \int_{B(0, \frac{1}{2}) \setminus B(0, r)} |x|^\alpha u^p(x) dx \leq -\frac{1}{2} \int_{B(0, \frac{1}{2}) \setminus B(0, r)} |x|^\alpha u^p(x) dx$$

En consecuencia, existirá $r_1 > 0$ tal que:

$$\int_{\partial B(0, r)} \frac{\partial}{\partial \hat{n}}(\Delta u) dS \leq -c_1 r^{1-N} \int_{B(0, \frac{1}{2}) \setminus B(0, r)} |x|^\alpha u^p(x) dx \quad (2.7)$$

Para todo $0 < r < r_1$. Recordemos que:

$$\frac{d}{dr} \int_{\partial B(0, r)} \Delta u dS = \int_{\partial B(0, r)} \frac{\partial}{\partial \hat{n}}(\Delta u) dS$$

Y por lo tanto, integrando la ecuación (2.7) obtenemos:

$$\int_{\partial B(0, r)} \Delta u dS - \int_{\partial B(0, s)} \Delta u dS \leq -c_1 \int_s^r t^{1-N} \int_{B(0, \frac{1}{2}) \setminus B(0, t)} |x|^\alpha u^p(x) dx dt$$

Para todo $0 < s < r < r_1$. Usando que $B(0, \frac{1}{2}) \setminus B(0, t) \supseteq B(0, \frac{1}{2}) \setminus B(0, r)$ para todo $s < t < r$ y que $|x|^\alpha u^p(x) > 0$ entonces:

$$\int_{\partial B(0, r)} \Delta u dS - \int_{\partial B(0, s)} \Delta u dS \leq -c_1 \int_s^r t^{1-N} \int_{B(0, \frac{1}{2}) \setminus B(0, r)} |x|^\alpha u^p(x) dx dt \quad (2.8)$$

Por la regularidad de u , el mapeo $x \rightarrow |x|^\alpha u^p(x)$ es acotado en $B(0, \frac{1}{2}) \setminus B(0, r)$ y por ende:

$$\begin{aligned}
\int_{\partial B(0,r_1)} \Delta u dS - \int_{\partial B(0,r)} \Delta u dS &\leq -c_1 \int_r^{r_1} t^{1-N} \int_{B(0,\frac{1}{2}) \setminus B(0,r_1)} |x|^\alpha u^p(x) dx dt \\
&\leq -\frac{\tilde{c}_2}{2-N} (r_1^{2-N} - r^{2-N}) \\
\Rightarrow -\int_{\partial B(0,r)} \Delta u dS &\leq -\int_{\partial B(0,r_1)} \Delta u dS + \tilde{c}_2 (r_1^{2-N} - r^{2-N}) \\
\Rightarrow \int_{\partial B(0,r)} \Delta u dS &\geq \int_{\partial B(0,r_1)} \Delta u dS + \tilde{c}_2 (r^{2-N} - r_1^{2-N}) \\
\Rightarrow \int_{\partial B(0,r)} \Delta u dS &\geq k_1 + \tilde{c}_2 r^{2-N} - k_2
\end{aligned}$$

Dado que $r^{2-N} \rightarrow +\infty$ cuando $r \rightarrow 0^+$ entonces existe $0 < r_2 < r_1$ tal que:

$$\int_{\partial B(0,r)} \Delta u dS \geq c_2 r^{2-N} \quad (2.9)$$

Para todo $0 < r \leq r_2$. Ahora sea $\bar{u} = \int_{\partial B(0,r)} u dS$. Recordemos la expresi3n para el laplaciano para funciones radiales:

$$\Delta \bar{u}(r) = \bar{u}''(r) + \frac{N-1}{r} \bar{u}'(r) = \frac{1}{r^{N-1}} (r^{N-1} \bar{u}'(r))'$$

Ahora, note lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\bar{u}'(r) &= \frac{d}{dr} \int_{\partial B(0,r)} u(x) dS(x) \\
&= \int_{\partial B(0,r)} \frac{\partial}{\partial \hat{n}} u(x) dS(x) \\
&= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{\partial B(0,r)} \frac{\partial}{\partial \hat{n}} u(x) dS(x) \\
&= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_{B(0,r)} \Delta u(x) dx \\
&= \frac{1}{N\omega_N r^{N-1}} \int_0^r \int_{\partial B(0,t)} \Delta u(x) dS(x) dt
\end{aligned}$$

De este modo, reordenando:

$$N\omega_N r^{N-1} \bar{u}'(r) = \int_0^r \int_{\partial B(0,t)} \Delta u(x) dS(x) dt$$

Derivando:

$$(N\omega_N r^{N-1} \bar{u}'(r))' = \int_{\partial B(0,r)} \Delta u(x) dS(x)$$

Reemplazando la expresion para el laplaciano para funciones radiales:

$$N\omega_N r^{N-1} \Delta \bar{u}(r) = N\omega_N (r^{N-1} \bar{u}'(r))' = \int_{\partial B(0,r)} \Delta u(x) dS(x)$$

Con lo que concluimos:

$$\Delta \bar{u}(r) = \int_{\partial B(0,r)} \Delta u dS$$

Con esto, de la ecuación (2.9) sigue que:

$$c_2 r^{2-N} \leq \bar{u}'' + \frac{N-1}{r} \bar{u}'$$

Reordenando concluimos que:

$$(r^{N-1} \bar{u}')' \geq c_2 r$$

Integrando obtenemos:

$$\begin{aligned} (r^{N-1} \bar{u}')' \geq c_2 r &\Rightarrow \int_0^r (t^{N-1} \bar{u}'(t))' dt \geq c_2 \int_0^r t dt \\ &\Rightarrow r^{N-1} \bar{u}'(r) - \lim_{r \rightarrow 0} r^{N-1} \bar{u}'(r) \geq \frac{1}{2} c_2 r^2 \end{aligned}$$

Si se tuviera que $\lim_{r \rightarrow 0} r^{N-1} \bar{u}' \geq 0$, entonces tendríamos que:

$$r^{N-1} \bar{u}'(r) \geq \frac{1}{2} c_2 r^2$$

Lo que implica:

$$\bar{u}(r) \geq \int_0^r \bar{u}'(t) dt \geq \frac{1}{2} c_2 \int_0^r t^{3-N} dt = +\infty$$

Lo que es una contradicción. De este modo, podemos asumir que existe $0 < r_3 < r_2$ y una constante positiva c_3 tal que para todo $r \leq r_3$ se tiene que:

$$r^{N-1}\bar{u}'(r) \leq -c_3$$

Integrando esta expresión se obtiene que para r pequeño se cumplirá que:

$$\bar{u}(r) \geq c_4 r^{2-N}$$

Suponga que $\bar{u} \geq c_4 r^{-\sigma}$ para algún $\sigma \geq N - 2$. Usando la desigualdad de Jensen:

$$\begin{aligned} \int_{B(0, \frac{1}{2}) \setminus B(0, r)} |x|^\alpha u^p(x) dx &= \int_r^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial B(0, t)} |x|^\alpha u^p(x) dS \right) dt \\ &= \int_r^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\partial B(0, t)} t^\alpha u^p(x) dS \right) dt \\ &= \int_r^{\frac{1}{2}} t^\alpha \left(\int_{\partial B(0, t)} u^p(x) dS \right) dt \\ &= \int_r^{\frac{1}{2}} t^\alpha \left(N\omega_N t^{N-1} \int_{\partial B(0, t)} u^p(x) dS \right) dt \\ &\geq N\omega_N \int_r^{\frac{1}{2}} t^{\alpha+N-1} \left(\int_{\partial B(0, t)} u(x) dS \right)^p dt \\ &= N\omega_N \int_r^{\frac{1}{2}} t^{\alpha+N-1} \bar{u}^p(t) dt \\ &= N\omega_N \int_r^{\frac{1}{2}} t^{\alpha+N-1} t^{-\sigma p} dt \\ &= N\omega_N \int_r^{\frac{1}{2}} t^{\alpha-\sigma p+N-1} dt \end{aligned}$$

Si definimos $\tilde{\sigma} = -\alpha + \sigma p$ entonces:

$$\begin{aligned} \int_{B(0, \frac{1}{2}) \setminus B(0, r)} |x|^\alpha u^p(x) dx &\geq N\omega_N \int_r^{\frac{1}{2}} t^{-\tilde{\sigma}+N-1} dt \\ &= \frac{N\omega_N}{-\tilde{\sigma} + N} t^{-\tilde{\sigma}+N} \Big|_{t=r}^{t=1/2} \\ &= k_1 r^{-\tilde{\sigma}+N} - k_2 \end{aligned}$$

Donde k_1, k_2 son constantes positivas debido a que $-\tilde{\sigma} + N$ es una cantidad negativa. En efecto:

$$\begin{aligned}
\tilde{\sigma} &:= -\alpha + \sigma p \\
&= -\alpha + \sigma \frac{N+4+2\alpha}{N-4} \\
&= -\alpha + ((N-2) + \sigma - (N-2)) \frac{N+4+2\alpha}{N-4} \\
&= -\alpha + ((N-4) + 2 + \sigma - (N-2)) \frac{N+4+2\alpha}{N-4} \\
&= -\alpha + N+4+2\alpha + (2 + \sigma - (N-2))p \\
&> \alpha + N+4+2 + \sigma - (N-2) \\
&= \alpha + \sigma + 8 \\
&> \sigma + 4 \geq N+2
\end{aligned} \tag{2.10}$$

De este modo concluimos que para r suficientemente pequeño:

$$\int_{B(0, \frac{1}{2}) \setminus B(0, r)} |x|^\alpha u^p(x) dx \geq c_1 r^{-\tilde{\sigma}+N}$$

Reemplazando en (2.7) obtenemos que:

$$\int_{\partial B(0, r)} \frac{\partial}{\partial \hat{n}} (\Delta u) dS \leq -c_1 r^{-\tilde{\sigma}+1}$$

Y por ende:

$$(\Delta \bar{u}(r))' \leq -c_1 r^{-\tilde{\sigma}+1} \tag{2.11}$$

Integrando esta expresión de manera similar a lo hecho en (2.9) se tendrá que:

$$\Delta \bar{u}(r) \geq c_2 r^{-\tilde{\sigma}+2}$$

Usando la expresión radial para el laplaciano:

$$r^{1-N} (r^{N-1} \bar{u}'(r))' \geq c_2 r^{-\tilde{\sigma}+2}$$

Reordenando e Integrando:

$$r^{N-1} \bar{u}'(r) \leq -c_3 r^{-\tilde{\sigma}+N+2} \tag{2.12}$$

Y por lo tanto:

$$\bar{u}(r) \geq c_4 r^{-\tilde{\sigma}+4} \tag{2.13}$$

Comparemos este nuevo exponente respecto al original. Por el desarrollo hecho en (2.10):

$$\tilde{\sigma} > \alpha + \sigma + 8 \Rightarrow (\tilde{\sigma} - 4) - \sigma > \alpha + 4$$

Dado que $\alpha \in (-4, 0)$, entonces $(\tilde{\sigma} - 4) - \sigma$ es una cantidad estrictamente mayor a cero. De este modo, en cada iteración mejoramos el exponente de la cota (esta mejora depende de la diferencia entre α y -4). Así, luego de una cantidad finita de pasos podremos obtener las siguientes cotas para r suficientemente pequeño:

$$\begin{aligned} (\Delta \bar{u}(r))' &\leq -r^{-(\beta+4)}, \\ \Delta \bar{u}(r) &\geq r^{-(\beta+3)}, \\ \bar{u}'(r) &\leq -r^{-(\beta+2)}, \\ \bar{u}(r) &\geq r^{-(\beta+1)}. \end{aligned}$$

Donde $\beta := \frac{4}{p-1}$. Usando la expresión del laplaciano para funciones radiales y el hecho de que $\bar{u}'(r) < 0$ tendremos que:

$$\Delta \bar{u}(r) = \bar{u}''(r) + \frac{N-1}{r} \bar{u}'(r) \leq \bar{u}''(r)$$

De esto concluimos que $\bar{u}''(r) > 0$. Luego:

$$(\Delta \bar{u}(r))' = \left(\bar{u}''(r) + \frac{N-1}{r} \bar{u}'(r) \right)' = \bar{u}'''(r) + \frac{N-1}{r} \bar{u}''(r) - \frac{N-1}{r^2} \bar{u}'(r) \geq \bar{u}'''(r)$$

Con todo esto, las cotas para \bar{u} y sus derivadas quedan:

$$\begin{aligned} \bar{u}(r) &\geq r^{-(\beta+1)}, \\ \bar{u}'(r) &\leq -r^{-(\beta+2)}, \\ \bar{u}''(r) &\geq r^{-(\beta+3)}, \\ \bar{u}'''(r) &\leq -r^{-(\beta+4)}. \end{aligned}$$

Para todo $0 < r < 2r_0$ donde r_0 es una cota suficientemente pequeña. Ahora, utilizando estas cotas y las anteriormente establecidas:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 \bar{u}(r) &= \Delta(\Delta \bar{u}(r)) \\
&= (\Delta \bar{u}(r))'' + \frac{N-1}{r} (\Delta \bar{u}(r))' \\
&\leq (\Delta \bar{u}(r))'' \\
&= \left(\bar{u}''(r) + \frac{N-1}{r} \bar{u}'(r) \right)'' \\
&= \left(\bar{u}'''(r) + \frac{N-1}{r} \bar{u}''(r) - \frac{N-1}{r^2} \bar{u}'(r) \right)' \\
&= \bar{u}''''(r) + \frac{N-1}{r} \bar{u}'''(r) - \frac{N-1}{r^2} \bar{u}''(r) - \frac{N-1}{r^2} \bar{u}''(r) + 2 \frac{N-1}{r^3} \bar{u}'(r) \\
&\leq \bar{u}''''(r)
\end{aligned}$$

Por otro lado, usando la desigualdad de Jensen:

$$\begin{aligned}
\Delta^2 \bar{u}(r) &= \Delta^2 \left(\int_{\partial B(0,r)} u dS \right) \\
&= \Delta \left(\int_{\partial B(0,r)} \Delta u dS \right) \\
&= \int_{\partial B(0,r)} \Delta^2 u dS \\
&= \int_{\partial B(0,r)} |x|^\alpha u^p(x) dS(x) \\
&= r^\alpha \left(\int_{\partial B(0,r)} u^p(x) dS(x) \right) \\
&\geq r^\alpha \left(\int_{\partial B(0,r)} u(x) dS(x) \right)^p \\
&= r^\alpha \bar{u}^p(r)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, concluimos que:

$$\bar{u}^{(4)}(r) \geq \Delta^2 \bar{u}(r) \geq r^\alpha \bar{u}^p(r)$$

Ahora, defina $v(r) = A(r - r_0)^{-\beta}$ para $r_0 < r < 2r_0$, con A una constante positiva. Por cálculos directos:

$$\begin{aligned}
v(r) &= A(r - r_0)^{-\beta} \\
\Rightarrow v'(r) &= -\beta A(r - r_0)^{-(\beta+1)} \\
\Rightarrow v''(r) &= \beta(\beta + 1)A(r - r_0)^{-(\beta+2)} \\
\Rightarrow v'''(r) &= -\beta(\beta + 1)(\beta + 2)A(r - r_0)^{-(\beta+3)} \\
\Rightarrow v^{(4)}(r) &= \beta(\beta + 1)(\beta + 2)(\beta + 3)A(r - r_0)^{-(\beta+4)}
\end{aligned}$$

Por la definición de β :

$$\beta + 4 = \frac{4}{p-1} + 4 = \frac{4 + 4(p-1)}{p-1} = \frac{4p}{p-1} = \beta p$$

Sigue que:

$$\begin{aligned}
v^{(4)}(r) &= \beta(\beta + 1)(\beta + 2)(\beta + 3)A(r - r_0)^{-(\beta+4)} \\
&= \beta(\beta + 1)(\beta + 2)(\beta + 3)A^{1-p}A^p(r - r_0)^{-\beta p} \\
&= \beta(\beta + 1)(\beta + 2)(\beta + 3)A^{1-p}v^p(r)
\end{aligned}$$

Dado que $p > 1$, para A suficientemente grande tendremos que:

$$\beta(\beta + 1)(\beta + 2)(\beta + 3)A^{1-p} < \left(\frac{1}{2}\right)^\alpha < r^\alpha, \quad \forall r \in (r_0, 2r_0)$$

Y por lo tanto:

$$v^{(4)}(r) < r^\alpha v^p(r)$$

Por el principio de comparación sigue que $v(r) \leq \bar{u}(r)$ en $(r_0, 2r_0)$. Sin embargo, como $\lim_{r \rightarrow r_0} v(r) = +\infty$ tenemos una contradicción. Concluimos que $|x|^\alpha u^p \in L^1\left(\overline{B(0, \frac{1}{2})}\right)$.

Ahora, sea $\varphi \in C_0^\infty(B(0, \frac{1}{2}))$. Demostraremos que:

$$\int \Delta \varphi \Delta u dx \geq 0$$

Sea $\eta_\varepsilon \in C_0^\infty(B(0, \frac{1}{2}))$ tal que $\eta_\varepsilon(x) \equiv 1$ para $|x| \geq 2\varepsilon$ y $\eta_\varepsilon(x) \equiv 0$ para $|x| \leq \varepsilon$. Asumamos además que:

$$|D^j \eta_\varepsilon(x)| \leq \frac{c}{\varepsilon^j}$$

para todo $j \in \{1, 2, 3, 4\}$. Multiplicando la ecuación (2.4) por $\varphi(x)\eta_\varepsilon(x)$ obtenemos:

$$\begin{aligned} 0 &< \int \varphi(x)\eta_\varepsilon(x)|x|^\alpha u^p(x)dx \\ &= \int \Delta(\varphi(x)\eta_\varepsilon(x))\Delta u(x)dx \end{aligned}$$

Desarrollando el laplaciano del producto:

$$\begin{aligned} \Delta(\varphi(x)\eta_\varepsilon(x)) &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2}{\partial x_i^2}(\varphi(x)\eta_\varepsilon(x)) \\ &= \sum_{i=1}^N \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \eta_\varepsilon(x) + \varphi(x) \frac{\partial \eta_\varepsilon(x)}{\partial x_i} \right) \\ &= \sum_{i=1}^N \left(\frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x_i^2} \eta_\varepsilon(x) + 2 \frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} \frac{\partial \eta_\varepsilon(x)}{\partial x_i} + \varphi(x) \frac{\partial^2 \eta_\varepsilon(x)}{\partial x_i^2} \right) \\ &= \Delta \varphi(x) \eta_\varepsilon(x) + 2 \nabla \varphi(x) \nabla \eta_\varepsilon(x) + \varphi(x) \Delta \eta_\varepsilon(x) \end{aligned}$$

De este modo:

$$\begin{aligned} 0 &< \int \Delta(\varphi(x)\eta_\varepsilon(x))\Delta u(x)dx \\ &= \int (\Delta \varphi(x) \eta_\varepsilon(x) + 2 \nabla \varphi(x) \nabla \eta_\varepsilon(x) + \varphi(x) \Delta \eta_\varepsilon(x)) \Delta u(x) dx \end{aligned}$$

Defina $\psi(x) := 2 \nabla \varphi(x) \nabla \eta_\varepsilon(x) + \varphi(x) \Delta \eta_\varepsilon(x)$. Por las propiedades de η_ε tenemos que $\psi(x) \equiv 0$ cuando $|x| \geq 2\varepsilon$ y cuando $|x| \leq \varepsilon$, y además $|\Delta \psi(x)| \leq c\varepsilon^{-4}$. Sea ahora q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Luego, usando integración por partes y la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned}
\left| \int \Delta u(x) \psi(x) dx \right| &\leq \int u(x) |\Delta \psi(x)| dx \\
&\leq c \varepsilon^{-4} \int_{B(0,2\varepsilon) \setminus B(0,\varepsilon)} u(x) dx \\
&= c \varepsilon^{-4} \int_{B(0,2\varepsilon) \setminus B(0,\varepsilon)} |x|^{-\frac{\alpha}{p}} |x|^{\frac{\alpha}{p}} u(x) dx \\
&\leq c \varepsilon^{-4} \left(\int_{B(0,2\varepsilon) \setminus B(0,\varepsilon)} (|x|^{-\frac{\alpha}{p}})^q \right)^{\frac{1}{q}} \underbrace{\left(\int_{B(0,2\varepsilon) \setminus B(0,\varepsilon)} |x|^\alpha u^p(x) \right)^{\frac{1}{p}}}_{\leq \text{cte.}} \\
&\leq c \varepsilon^{-4} \left(\int_{B(0,2\varepsilon) \setminus B(0,\varepsilon)} \varepsilon^{-\frac{\alpha q}{p}} \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= c \varepsilon^{-4} \varepsilon^{-\frac{\alpha}{p}} |B(0,2\varepsilon) \setminus B(0,\varepsilon)|^{\frac{1}{q}} \\
&= c \varepsilon^{-\frac{\alpha}{p}-4} (\omega_N (2\varepsilon)^N - \omega_N \varepsilon^N)^{\frac{1}{q}} \\
&= c \varepsilon^{-\frac{\alpha}{p}-4} (\omega_N (2^N - 1) \varepsilon^N)^{\frac{1}{q}} \\
&= c \varepsilon^{\frac{N}{q} - \frac{\alpha}{p} - 4}
\end{aligned}$$

Note que:

$$\begin{aligned}
\frac{N}{q} - \frac{\alpha}{p} &= N \left(1 - \frac{1}{p} \right) - \frac{\alpha}{p} \\
&= N - \frac{N + \alpha}{p}
\end{aligned}$$

Trabajando el segundo término:

$$\begin{aligned}
\frac{N + \alpha}{p} &= (N + \alpha) \frac{N - 4}{N + 4 + 2\alpha} \\
&= (N + 4 + 2\alpha - (\alpha + 4)) \frac{N - 4}{N + 4 + 2\alpha} \\
&= (N - 4) - \frac{(\alpha + 4)(N - 4)}{N + 4 + 2\alpha} \\
&= (N - 4) - \frac{(\alpha + 4)}{p}
\end{aligned}$$

Así:

$$\begin{aligned}\frac{N}{q} - \frac{\alpha}{p} &= N - (N - 4) + \frac{(\alpha + 4)}{p} \\ &= 4 + \frac{(\alpha + 4)}{p}\end{aligned}$$

Concluimos que:

$$\frac{N}{q} - \frac{\alpha}{p} - 4 = \frac{(\alpha + 4)}{p} > 0$$

Y por lo tanto:

$$\left| \int \Delta u(x) \psi(x) dx \right| \leq c \varepsilon^{\frac{N}{q} - \frac{\alpha}{p} - 4} \rightarrow 0, \text{ cuando } \varepsilon \rightarrow 0$$

De esta forma, tenemos que:

$$\begin{aligned}\int \Delta u(x) \Delta \varphi(x) dx &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \eta_\varepsilon(x) \Delta u(x) \Delta \varphi(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \eta_\varepsilon(x) \Delta u(x) \Delta \varphi(x) dx + \int \Delta u(x) \psi(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \Delta u(x) (\eta_\varepsilon(x) \Delta \varphi(x) + \psi(x)) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \Delta(\varphi(x) \eta_\varepsilon(x)) \Delta u(x) dx \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int \varphi(x) \eta_\varepsilon(x) \Delta^2 u(x) dx \\ &= \int \varphi(x) |x|^\alpha u^p(x) dx > 0\end{aligned}$$

Concluimos que Δu es subarmónica en $B(0, \frac{1}{2})$. □

2.2.2. Método de Planos Móviles: Notación y lemas previos

Ahora, para demostrar el teorema 2.1.1 utilizaremos el método de planos móviles. Para ello, introduciremos la siguiente notación:

Notación. Sea $\lambda \in \mathbb{R}$. Se definen los conjuntos:

- (i) $T_\lambda := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 = \lambda\}$
- (ii) $\Sigma_\lambda := \{x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N : x_1 > \lambda\}$

Además, para $x = (x_1, x_2, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ denotamos su reflexión respecto a T_λ como:

$$x^\lambda = (2\lambda - x_1, x_2, \dots, x_N)$$

Adicionalmente, necesitaremos los siguientes lemas:

Lema 2.2.2. *Sea v una función positiva definida en una vecindad del infinito que satisfaga la expansión asintótica (2.5). Entonces existe $\bar{\lambda}_0 < 0$ y $R > 0$ tal que la desigualdad*

$$v(x) > v(x^\lambda)$$

Se cumple para todo $\lambda \leq \bar{\lambda}_0$, $|x| > R$ y $x \in \Sigma_\lambda$.

Lema 2.2.3. *Sea v una función tal que cumpla las hipótesis del lema 2.2.2 y que $v(x) > v(x^{\lambda_0})$ para $x \in \Sigma_{\lambda_0}$. Suponga que $v(x) - v(x^{\lambda_0})$ es superarmónica en Σ_{λ_0} . Entonces existen $\varepsilon > 0$ y $S > 0$ tal que se cumple lo siguiente:*

- i) $v_{x_1}(x) > 0$ para todo x tal que $|x_1 - \lambda_0| < \varepsilon$ y $|x| > S$.*
- ii) $v(x) > v(x^\lambda)$ para $x_1 \geq \lambda_0 + \frac{\varepsilon}{2} > \lambda$ y $|x| > S$, para todo $x \in \Sigma_\lambda$ y $\lambda \leq \lambda_1$ con $|\lambda_1 - \lambda_0| < c_0\varepsilon$, donde c_0 es una constante positiva pequeña que depende solo de v y λ_0 .*

Estos lemas aparecen enunciados en [15] y sus demostraciones se encuentran en [3] (lemas 2.3 y 2.4), las cuales reproduciremos adaptadas a nuestro caso por completitud.

Demostración. (Lema 2.2.2) Por (2.5) tenemos que:

$$v_{x_1} = -(N-2)c_0 \frac{x_1}{|x|^N} + O\left(\frac{1}{|x|^N}\right)$$

Y además:

$$\begin{aligned} v(x) - v(x^\lambda) &= c_0|x|^{2-N} + \sum_{j=1}^N \frac{a_j x_j}{|x|^N} - c_0|x^\lambda|^{2-N} - \sum_{j=1}^N \frac{a_j x_j^\lambda}{|x^\lambda|^N} + O\left(\frac{1}{|x|^N}\right) \\ &= c_0(|x|^{2-N} - |x^\lambda|^{2-N}) + \sum_{j=1}^N \left(\frac{a_j x_j}{|x|^N} - \frac{a_j x_j^\lambda}{|x^\lambda|^N} \right) + O\left(\frac{1}{|x|^N}\right) \\ &= c_0(|x|^{2-N} - |x^\lambda|^{2-N}) + \left(\frac{a_1 x_1}{|x|^N} - \frac{a_1 x_1^\lambda}{|x^\lambda|^N} \right) + \sum_{j=2}^N \left(\frac{a_j x_j}{|x|^N} - \frac{a_j x_j^\lambda}{|x^\lambda|^N} \right) + O\left(\frac{1}{|x|^N}\right) \end{aligned}$$

Trabajando el término de en medio:

$$\begin{aligned} \frac{a_1 x_1}{|x|^N} - \frac{a_1 x_1^\lambda}{|x^\lambda|^N} &= \frac{a_1 x_1 + a_1 x_1^\lambda - a_1 x_1^\lambda}{|x|^N} - \frac{a_1 x_1^\lambda}{|x^\lambda|^N} \\ &= a_1 \frac{x_1 - x_1^\lambda}{|x|^N} + a_1 x_1^\lambda \left(\frac{1}{|x|^N} - \frac{1}{|x^\lambda|^N} \right) \end{aligned}$$

Con lo que concluimos:

$$\begin{aligned}
v(x) - v(x^\lambda) &= c_0(|x|^{2-N} - |x^\lambda|^{2-N}) + a_1 \frac{(x - x^\lambda)_1}{|x|^N} + a_1 x_1^\lambda \left(\frac{1}{|x|^N} - \frac{1}{|x^\lambda|^N} \right) \\
&\quad + \sum_{j=2}^N a_j x_j \left(\frac{1}{|x|^N} - \frac{1}{|x^\lambda|^N} \right) + O\left(\frac{1}{|x|^N}\right)
\end{aligned} \tag{2.14}$$

Si $|x^\lambda| \geq 2|x|$ entonces:

$$\frac{1}{|x|^{N-2}} - \frac{1}{|x^\lambda|^{N-2}} \geq \frac{1}{|x|^{N-2}} - \frac{1}{(2|x|)^{N-2}} = \left(1 - \frac{1}{2^{N-2}}\right) \frac{1}{|x|^{N-2}} \geq \frac{1}{2} \frac{1}{|x|^{N-2}}$$

Por lo que para $|x|$ suficientemente grande tendremos que:

$$v(x) - v(x^\lambda) \geq \frac{c_0}{2} \frac{1}{|x|^{N-2}} + O\left(\frac{1}{|x|^{N-1}}\right) \geq \frac{c_0}{4} \frac{1}{|x|^{N-2}}$$

Por lo que el resultado sigue de inmediato. Suponga que $|x^\lambda| < 2|x|$. Note que si $\lambda < 0$ y $x \in \Sigma_\lambda$ entonces:

$$\begin{aligned}
x_1 > \lambda &\Rightarrow \lambda x_1 < \lambda^2 \\
&\Rightarrow x_1^2 < 4\lambda^2 - 4\lambda x_1 + x_1^2 \\
&\Rightarrow x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2 < (2\lambda - x_1)^2 + x_2^2 + \dots + x_N^2 \\
&\Rightarrow |x| < |x^\lambda|
\end{aligned}$$

Por lo que $|x| < |x^\lambda|$ en Σ_λ . De esto sigue que

$$\begin{aligned}
|x| < |x^\lambda| &\Rightarrow |x|^{N-3} < |x^\lambda|^{N-3} \\
&\Rightarrow \frac{|x|^{N-3}}{|x^\lambda|^{N-2}} \leq \frac{1}{|x^\lambda|} \\
&\Rightarrow \frac{1}{|x|} - \frac{|x|^{N-3}}{|x^\lambda|^{N-2}} \geq \frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x^\lambda|} \\
&\Rightarrow \frac{1}{|x|^{N-2}} - \frac{1}{|x^\lambda|^{N-2}} \geq \frac{1}{|x|^{N-3}} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x^\lambda|} \right)
\end{aligned}$$

Por otro lado, se cumple que:

$$\begin{aligned}
2|x| > |x^\lambda| &\Rightarrow 2|x|^2 > |x^\lambda| \cdot |x| \\
&\Rightarrow \frac{|x|^2(|x^\lambda| - |x|)}{|x^\lambda| \cdot |x|} \geq \frac{1}{2}(|x^\lambda| - |x|) \\
&\Rightarrow \frac{1}{|x|^{N-3}} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x^\lambda|} \right) \geq \frac{1}{2} \frac{|x^\lambda| - |x|}{|x|^{N-1}}
\end{aligned}$$

Resumiendo:

$$\frac{1}{|x|^{N-2}} - \frac{1}{|x^\lambda|^{N-2}} \geq \frac{1}{|x|^{N-3}} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x^\lambda|} \right) \geq \frac{1}{2} \frac{|x^\lambda| - |x|}{|x|^{N-1}}$$

lo que nos da una cota para el primer término de (2.14). Para estimar el cuarto término usamos la equivalencia de normas en \mathbb{R}^N y $|x| < |x^\lambda|$ para escribir:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=2}^N a_j x_j \left(\frac{1}{|x|^N} - \frac{1}{|x^\lambda|^N} \right) \right| &\leq \left(\frac{1}{|x|^N} - \frac{1}{|x^\lambda|^N} \right) \cdot \max_{1 \leq j \leq N} \{|a_j|\} \sum_{j=1}^N |x_j| \\ &\leq c|x| \left(\frac{1}{|x|^N} - \frac{1}{|x^\lambda|^N} \right) \end{aligned}$$

Note que:

$$\left(\frac{1}{|x|^N} - \frac{1}{|x^\lambda|^N} \right) \leq \frac{N}{|x|^{N-1}} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x^\lambda|} \right), \quad \forall x \in \Sigma_\lambda$$

En efecto, la función $f(t) = (N-1)t^N - Nt^{N-1} + 1$ tiene derivada positiva en $(1, +\infty)$ y por lo tanto es creciente en ese intervalo. Además $f(1) = 0$, por lo que:

$$\begin{aligned} f(t) &\geq 0 \quad \forall t > 1 \\ \Rightarrow (N-1)t^N &\geq Nt^{N-1} - 1, \quad \forall t > 1 \\ \Rightarrow (N-1) \frac{|x^\lambda|^N}{|x|^N} &\geq N \frac{|x^\lambda|^{N-1}}{|x|^{N-1}} - 1, \quad \forall x \in \Sigma_\lambda \\ \Rightarrow (N-1) \frac{1}{|x|^N} &\geq N \frac{1}{|x^\lambda||x|^{N-1}} - \frac{1}{|x^\lambda|^N}, \quad \forall x \in \Sigma_\lambda \\ \Rightarrow N \left(\frac{1}{|x|^N} - \frac{1}{|x^\lambda||x|^{N-1}} \right) &\geq \frac{1}{|x|^N} - \frac{1}{|x^\lambda|^N}, \quad \forall x \in \Sigma_\lambda \\ \Rightarrow \frac{N}{|x|^{N-1}} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x^\lambda|} \right) &\geq \frac{1}{|x|^N} - \frac{1}{|x^\lambda|^N}, \quad \forall x \in \Sigma_\lambda \end{aligned}$$

De este modo, concluimos que:

$$\begin{aligned} \left| \sum_{j=2}^N a_j x_j \left(\frac{1}{|x|^N} - \frac{1}{|x^\lambda|^N} \right) \right| &\leq c|x| \left(\frac{1}{|x|^N} - \frac{1}{|x^\lambda|^N} \right) \\ &\leq \frac{c|x|}{|x|^{N-1}} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x^\lambda|} \right) \\ &= \frac{c}{|x|^{N-2}} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x^\lambda|} \right) \end{aligned}$$

Ahora, para acotar el segundo término hacemos el siguiente desarrollo:

$$\frac{|x - x^\lambda|}{|x|^N} = \frac{2(x_1 - \lambda)}{|x|^N} = \frac{1}{2\lambda} \frac{|x|^2 - |x^\lambda|^2}{|x|^N} \leq \frac{3}{2\lambda} \frac{|x| - |x^\lambda|}{|x|^{N-1}}$$

Donde la última desigualdad viene de que $\lambda < 0$ y $(|x^\lambda| - |x|)(2|x| - |x^\lambda|) > 0$ en este caso. Para el tercer término notamos:

$$\begin{aligned} |(x^\lambda)_1| \left(\frac{1}{|x|^N} - \frac{1}{|x^\lambda|^N} \right) &\leq \frac{N|x^\lambda|}{|x|^{N-1}} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x^\lambda|} \right) \\ &\leq \frac{2N}{|x|^{N-2}} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x^\lambda|} \right) \end{aligned}$$

De esta forma, reemplazando en (2.14) tenemos que:

$$v(x) - v(x^\lambda) \geq \frac{c_0}{2} \frac{|x^\lambda| - |x|}{|x|^{N-1}} - a_1 \frac{3}{(-2\lambda)} \frac{|x^\lambda| - |x|}{|x|^{N-1}} - a_1 \frac{2N}{|x|^{N-2}} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x^\lambda|} \right) - \frac{c}{|x|^{N-2}} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x^\lambda|} \right)$$

Agrupando y renombrando constantes:

$$\begin{aligned} v(x) - v(x^\lambda) &\geq c_1 \frac{|x^\lambda| - |x|}{|x|^{N-1}} - c_2 \frac{1}{|x|^{N-2}} \left(\frac{1}{|x|} - \frac{1}{|x^\lambda|} \right) \\ &= c_1 \frac{|x^\lambda| - |x|}{|x|^{N-1}} - c_2 \frac{1}{|x|^{N-2}} \left(\frac{|x^\lambda| - |x|}{|x||x^\lambda|} \right) \\ &= c_1 \frac{|x^\lambda| - |x|}{|x|^{N-1}} \left(1 - \frac{c_2}{c_1} \frac{1}{|x^\lambda|} \right) \\ &\geq c_1 \frac{|x^\lambda| - |x|}{|x|^{N-1}} \left(1 - \frac{c_2}{c_1} \frac{1}{|x|} \right) \end{aligned}$$

Note que c_1 es positiva para λ suficientemente negativo y c_2 es positiva siempre. Así, para $|x|$ grande concluimos que

$$v(x) - v(x^\lambda) \geq 0$$

Que es lo que queríamos demostrar. □

Ahora demostremos el otro lema:

Demostración. (Lema 2.2.3) Sea $w(x) := v(x^{\lambda_0}) - v(x)$. Luego, por hipótesis se cumple que:

$$w(x) < 0 \quad \forall x \in \Sigma_{\lambda_0} \quad \text{y} \quad -\Delta w(x) \leq 0 \quad \forall x \in \Sigma_{\lambda_0}$$

Si aplicamos el Lema de Hopf a un punto en T_{λ_0} es fácil ver que:

$$w_{x_1} < 0 \text{ en } \Sigma_{\lambda_0}$$

Tomemos k suficientemente pequeña de tal modo que:

$$w(x) < -k \frac{x_1 - \lambda_0}{|x|^N} \text{ en } \Sigma_{\lambda_0}, |x| = R + 1$$

Luego, como $\frac{x_1}{|x|^N}$ es armónica, por el principio del máximo tenemos que:

$$w(x) < -k \frac{x_1 - \lambda_0}{|x|^N} \text{ en } \Sigma_{\lambda_0}, |x| > R + 1$$

Note que:

$$w_{x_1}(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} (v(x^{\lambda_0}) - v(x)) = v_{x_1}(x^{\lambda_0}) \frac{\partial x^{\lambda_0}}{\partial x_1} - v_{x_1}(x) = -v_{x_1}(x^{\lambda_0}) - v_{x_1}(x)$$

De modo que para $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$:

$$w_{x_1}(\lambda_0, x') = -2v_{x_1}(\lambda_0, x')$$

Además:

$$\begin{aligned} w_{x_1}(\lambda_0, x') &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{w(\lambda_0 + t, x') - w(\lambda_0, x')}{t} \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{w(\lambda_0 + t, x')}{t} \\ &< \lim_{t \rightarrow 0} -k \frac{t}{t|x|^N} = -\frac{k}{|x|^N} \end{aligned}$$

Y por lo tanto:

$$v_{x_1}(\lambda_0, x') > \frac{1}{2} \frac{k}{|x|^N}$$

Así, usando una expansión de Taylor y la expresión (2.5), tendremos que:

$$\begin{aligned} v_{x_1}(h, x') &= v_{x_1}(\lambda_0, x') + v_{x_1 x_1}(\lambda_0, x')(h - \lambda_0) + O((h - \lambda_0)^2) \\ &\geq \frac{1}{2} k \frac{1}{|x|^N} - C \frac{|h - \lambda_0|}{|x|^N} \\ &\geq \frac{1}{4} k \frac{1}{|x|^N} \\ &> 0 \end{aligned}$$

Esto último para $|h - \lambda_0| < \varepsilon := \frac{k}{4C}$ y $|x|$ suficientemente grande. Esto demuestra la primera parte del lema. Para la segunda parte, sean $\lambda < \lambda_1 < \lambda_0$. Por el teorema del valor medio, existe $t \in [2\lambda, 2\lambda_0]$ tal que:

$$\begin{aligned}
v(x^{\lambda_0}) - v(x^\lambda) &= 2(\lambda_0 - \lambda) \cdot v_{x_1}(t - x_1, x') \\
&= 2(\lambda_0 - \lambda) \cdot \left(-\frac{(N-2)c_0}{|(t-x_1, x')|^N} (t - x_1) + O\left(\frac{1}{|x|^N}\right) \right) \\
&\geq 2(\lambda_0 - \lambda_1) \cdot \left(-\frac{(N-2)c_0}{|(t-x_1, x')|^N} (t - x_1) - \frac{C}{|x|^N} \right) \\
&\geq -c \frac{(\lambda_0 - \lambda_1)}{|x|^N} ((\lambda_0 - x_1) + 1)
\end{aligned}$$

Utilizando la cota obtenida en la primera parte de la demostración:

$$\begin{aligned}
v(x^\lambda) - v(x) &= \left(v(x^{\lambda_0}) - v(x) \right) + \left(v(x^\lambda) - v(x^{\lambda_0}) \right) \\
&< -\frac{k(x_1 - \lambda_0)}{|x|^N} + \frac{c(\lambda_0 - \lambda_1)}{|x|^N} ((\lambda_0 - x_1) + 1)
\end{aligned}$$

Reordenando:

$$\begin{aligned}
v(x) - v(x^\lambda) &> \frac{k(x_1 - \lambda_0) + c(\lambda_0 - \lambda_1)(x_1 - \lambda_0) - c(\lambda_0 - \lambda_1)}{|x|^N} \\
&= \frac{(k + c(\lambda_0 - \lambda_1))(x_1 - \lambda_0) - c(\lambda_0 - \lambda_1)}{|x|^N}
\end{aligned}$$

Ahora, si pedimos que $|x_1 - \lambda_0| > \frac{\varepsilon}{2}$ y $c|\lambda_0 - \lambda_1| < \bar{c}\varepsilon$,

$$v(x) - v(x^\lambda) = \frac{(k + c(\lambda_0 - \lambda_1))(x_1 - \lambda_0) - c(\lambda_0 - \lambda_1)}{|x|^N} > \frac{(4C\varepsilon - \bar{c}\varepsilon)\frac{\varepsilon}{2} - \bar{c}\varepsilon}{|x|^N} > 0$$

para $\bar{c} > 0$ fijada suficientemente pequeña. Esto demuestra la segunda parte del lema. \square

2.3. Demostración del resultado principal

Ahora estamos en condiciones de demostrar el teorema 2.1.1. Para ello, utilizaremos el método de planos móviles, basándonos en [15, 4].

Demostración. (Teorema 2.1.1). Sea u una solución suave de (2.1) y $v(x) = -\Delta u^*(x)$. Para demostrar el teorema aplicaremos el método de planos móviles a la función v . Definamos

$w_\lambda(x) := u^*(x) - u^*(x^\lambda)$. Note que como u^* puede tener una singularidad en el origen, entonces w_λ puede tener singularidades en $x = 0$ y $x = 0^\lambda = (2\lambda, 0, \dots, 0)$. Por esto, definimos w_λ en el conjunto:

$$\tilde{\Sigma}_\lambda := \Sigma_\lambda \setminus \{0\}$$

Observe que no sacamos el punto 0^λ pues estamos trabajando con $\lambda \leq 0$, por lo que $0^\lambda \notin \Sigma_\lambda$. A lo largo de la demostración tendremos especial cuidado de que los puntos de interés estén lejos de las singularidades de w_λ . Dividiremos lo que sigue en pasos:

Paso 1:

En este paso demostraremos que para λ suficientemente negativa se tiene que:

$$\Delta w_\lambda(x) \leq 0 \quad \forall x \in \tilde{\Sigma}_\lambda.$$

Por el lema 2.2.2 sabemos que existen $\bar{\lambda}_0 \leq 0$ y $R > 0$ tales que

$$v(x) > v(x^\lambda), \quad \forall \lambda \leq \bar{\lambda}_0, |x| > R, x \in \Sigma_\lambda.$$

De este modo, falta extender este resultado a $|x| \leq R$. Por el lema 2.2.1 y la ecuación (2.5), Δu^* es subarmónica y por ende v es superarmónica. Dado que $v(x) > 0$ para $|x|$ grande, el principio del máximo implica que $v(x) > 0$ en $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ y además:

$$v(x) \geq \inf_{\partial B(0,r)} v(y) > 0, \quad \text{para } x \in B(0,r), \forall r > 0. \quad (2.15)$$

Ahora, sea $x \in \tilde{\Sigma}_\lambda$ tal que $|x| \leq R$. Sin pérdida de generalidad supondremos que $\bar{\lambda}_0 < -R$, de modo que $\overline{B(0,R)} \subseteq \Sigma_\lambda$ para $\lambda \leq \bar{\lambda}_0$. Usando el resultado anterior, obtenemos que

$$v(x) \geq \inf_{\partial B(0,R)} v(y) > 0, \quad \forall x \in \tilde{\Sigma}_\lambda \cap \overline{B(0,R)}.$$

De las definiciones es fácil notar que si $x \in \Sigma_\lambda$ entonces $x^\lambda \notin \Sigma_\lambda$ y en particular

$$|x^\lambda| > -\lambda \geq -\bar{\lambda}_0.$$

Dado que $v(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, existirá $\tilde{\lambda} \leq \bar{\lambda}_0$ tal que

$$\inf_{\partial B(0,R)} v(y) \geq v(x^\lambda) \quad \forall x \in \tilde{\Sigma}_\lambda \cap \overline{B(0,R)}, \lambda \leq \tilde{\lambda}.$$

De este modo, aplicando la definición de w_λ concluimos que

$$\Delta w_\lambda(x) \leq 0 \quad \forall x \in \tilde{\Sigma}_\lambda, \lambda \leq \tilde{\lambda}. \quad (2.16)$$

Paso 2:

En este paso moveremos continuamente el plano $T_{\tilde{\lambda}}$ hacia el plano T_0 todo lo que podamos de modo que la desigualdad (2.16) se siga cumpliendo. Definimos λ_0 como el valor donde ese proceso termina. Matemáticamente:

$$\lambda_0 = \sup\{\lambda < 0 : \Delta w_\mu(x) \leq 0 \text{ en } \tilde{\Sigma}_\mu \text{ para } \mu \leq \lambda\}.$$

Tendremos dos casos:

Caso 1: $\lambda_0 < 0$

En este caso demostraremos que necesariamente:

$$w_{\lambda_0} \equiv 0 \text{ en } \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$$

Procederemos por contradicción. Suponga que $w_{\lambda_0}(x) \not\equiv 0$ en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$. Dada la definición de λ_0 , por continuidad tenemos que $\Delta w_{\lambda_0}(x) \leq 0$ en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$. Como $\Delta w_{\lambda_0}(x)$ tiende a cero cuando $|x|$ tiende a infinito, el principio del máximo implica que $w_{\lambda_0}(x) > 0$ en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$.

Si aplicamos la ecuación (2.4), obtenemos que:

$$\begin{aligned} \Delta^2 w_{\lambda_0}(x) &= \Delta^2 u^*(x) - \Delta^2 u^*(x^{\lambda_0}) \\ &= |x|^\alpha (u^*)^p(x) - |x^{\lambda_0}|^\alpha (u^*)^p(x^{\lambda_0}) \\ &= |x|^\alpha ((u^*)^p(x) - (u^*)^p(x^{\lambda_0})) + (|x|^\alpha - |x^{\lambda_0}|^\alpha) (u^*)^p(x^{\lambda_0}) \\ &> 0. \end{aligned}$$

Sigue que $\Delta w_{\lambda_0}(x)$ es subarmónica y, aplicando el principio del máximo nuevamente, tenemos que $\Delta w_{\lambda_0}(x) < 0$ en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$.

Ahora, afirmamos que existe una sucesión $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}$ tal que:

$$\lambda_n \searrow \lambda_0 \quad \text{y} \quad \Delta w_{\lambda_n}(x) > 0 \text{ para algún } x \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_n}.$$

En efecto, como $\lambda_0 < 0$ existirá $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $\lambda_0 + \frac{1}{n_0} < 0$. Denotemos

$$\Lambda := \{\lambda < 0 : \Delta w_\mu(x) \leq 0 \text{ en } \Sigma_\mu \text{ para } \mu \leq \lambda\}.$$

Luego, por la definición de λ_0 existirá $\tilde{\lambda}_1 \in (\lambda_0, \lambda_0 + \frac{1}{n_0})$ tal que $\tilde{\lambda}_1 \notin \Lambda$, y por lo tanto existirán $\lambda_1 \leq \tilde{\lambda}_1$ y $x \in \Sigma_{\lambda_1}$ tales que $\Delta w_{\lambda_1}(x) > 0$.

Veamos que $\lambda_1 \geq \lambda_0$. De lo contrario, existe $\bar{\lambda} \in [\lambda_1, \lambda_0] \cap \Lambda$ (Si $[\lambda_1, \lambda_0] \cap \Lambda$ fuera vacío, entonces λ_1 sería una cota superior de Λ menor a λ_0). De la definición de Λ sigue que $\Delta w_{\lambda_1} \leq 0$ en Σ_{λ_1} , lo que es contradictorio. Concluimos que $\lambda_0 \leq \lambda_1$. Más aún, como sabemos que $\Delta w_{\lambda_0} < 0$ en Σ_{λ_0} , claramente $\lambda_1 \neq \lambda_0$ y por ende $\lambda_0 < \lambda_1 < \lambda_0 + \frac{1}{n_0}$. De manera inductiva podemos obtener la sucesión $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$.

Mostremos ahora que las funciones Δw_{λ_n} alcanzan sus máximos en los conjuntos $\tilde{\Sigma}_{\lambda_n}$, y que estos se alcanzan lejos de la singularidad en $x = 0$. Sabemos que $\Delta w_{\lambda_0}(x)$ es estrictamente negativa y subarmónica en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$. Luego, existen $\varepsilon > 0$ y $\delta > 0$ tales que

$$\Delta w_{\lambda_0}(x) \leq -\varepsilon, \text{ para } x \in B(0, \delta) \setminus \{0\}.$$

Además, es claro que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sup_{x \in B(0, \delta) \setminus \{0\}} \Delta w_{\lambda_n}(x) \leq \sup_{x \in B(0, \delta) \setminus \{0\}} \Delta w_{\lambda_0}(x) \leq -\varepsilon.$$

De este modo, para n suficientemente grande tendremos que las funciones Δw_{λ_n} son negativas cerca de la singularidad. Dado que $\Delta w_{\lambda_n}(x) > 0$ para algún $x \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_n}$ y $\Delta w_{\lambda_n}(x) \rightarrow 0$ cuando $|x| \rightarrow \infty$, concluimos que Δw_{λ_n} alcanza su máximo en algún punto $x_n \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_n} \setminus B(0, \delta)$. En particular tendremos que:

$$\Delta w_{\lambda_n}(x_n) > 0 \text{ y } \nabla(\Delta w_{\lambda_n}(x_n)) = 0. \tag{2.17}$$

Demostremos que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada. Para ello procederemos por contradicción. Si $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ no es acotada, entonces existirá una sub-sucesión, que seguiremos llamando igual, tal que

$$|x_n| > S \quad \forall n \in \mathbb{N},$$

donde S está dada por el lema 2.2.3. Por construcción tenemos que $v(x_n) < v(x_n^{\lambda_n})$. Como $\lambda_n \rightarrow \lambda_0$, sin pérdida de generalidad podemos asumir que $|\lambda_n - \lambda_0| < c_0 \varepsilon$. Dado que $x_n \in \Sigma_{\lambda_n}$ y $|x_n| > S$, la única manera de no contradecir el ítem (ii) del lema 2.2.3 es que

$$|(x_n)_1 - \lambda_0| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por el ítem (i) del lema 2.2.3, sigue que

$$v_{x_1}(x_n) > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Por el teorema del valor medio, existirá $\xi_n \in (0, 1)$ tal que:

$$v_{x_1}(x_n^*) = \frac{1}{2} \frac{v(x_n) - v(x_n^{\lambda_n})}{(x_n)_1 - \lambda_n}$$

Donde $x_n^* = \xi_n x_n + (1 - \xi_n) x_n^{\lambda_n}$. Dado que $(x_n)_1 > \lambda_n > \lambda_0$ y $v(x_n^{\lambda_n}) > v(x_n)$ tenemos que $v_{x_1}(x_n^*) < 0$. Sin embargo,

$$\begin{aligned} |(x_n^*)_1 - \lambda_0| &= |\xi_n (x_n)_1 + (1 - \xi_n) (x_n^{\lambda_n})_1 - \lambda_0| \\ &= |\xi_n (x_n)_1 + (1 - \xi_n) (2\lambda_n - (x_n)_1) - \lambda_0| \\ &= |2(1 - \xi_n)\lambda_n + (2\xi_n - 1)(x_n)_1 - \lambda_0| \\ &\leq 2(1 - \xi_n)|\lambda_n - \lambda_0| + (2\xi_n - 1)|(x_n)_1 - \lambda_0| \\ &< \varepsilon \quad (\text{para } n \text{ suficientemente grande}). \end{aligned}$$

El ítem (i) del lema 2.2.3 implica que $v_{x_1}(x_n^*) > 0$ para n suficientemente grande, lo que es una contradicción. Concluimos que la sucesión $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ es acotada.

De este modo, sin pérdida de generalidad podemos suponer que $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ converge a cierto x_0 . Dado que $x_n \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_n} \setminus B(0, \delta)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, tendremos que $x_0 \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_0} \setminus B(0, \delta)$. Note que esto implica que x_0 está lejos de las singularidades de w_{λ_0} .

Si pasamos al límite en la expresión (2.17), obtenemos:

$$\Delta w_{\lambda_0}(x_0) \geq 0 \text{ y } \nabla(\Delta w_{\lambda_0}(x_0)) = 0. \quad (2.18)$$

Dado que $\Delta w_{\lambda_0} < 0$ en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$, entonces claramente $x_0 \notin \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$, por lo que necesariamente $x_0 \in T_{\lambda_0}$. Luego, $x_0 = x_0^{\lambda_0}$ y por ende $w_{\lambda_0}(x_0) = 0$. Como w_{λ_0} es subarmónica y positiva en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$, entonces el lema de Hopf implica que

$$\frac{\partial}{\partial \hat{n}}(\Delta w_{\lambda_0}(x_0)) < 0.$$

Esto contradice (2.18). Concluimos que si $\lambda_0 < 0$ entonces $w_{\lambda_0} \equiv 0$ en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$.

Veamos que esto no puede ser. Si $w_{\lambda_0} \equiv 0$ en $\tilde{\Sigma}_{\lambda_0}$ entonces

$$u^*(x) = u^*(x^\lambda) \quad \forall x \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}.$$

Aplicando bilaplaciano y utilizando la ecuación que resuelve u^* obtenemos:

$$|x|^\alpha (u^*)^p(x) = |x^{\lambda_0}|^\alpha (u^*)^p(x^{\lambda_0}) \quad \forall x \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}.$$

Simplificando llegamos a que

$$|x| = |x^{\lambda_0}| \quad \forall x \in \tilde{\Sigma}_{\lambda_0}.$$

Lo que es claramente una contradicción. Concluimos que este caso no puede ocurrir.

caso 2: $\lambda_0 = 0$

En este caso tenemos que:

$$\Delta w_0 \leq 0 \text{ en } \tilde{\Sigma}_0.$$

Ahora, hacemos el mismo proceso pero al revés: comenzamos con λ suficientemente positivo y movemos el plano T_λ en la dirección $-x_1$. Si el plano para en un valor menor a cero, llegaremos a una contradicción del mismo modo que en caso 1. Luego necesariamente el plano llegará hasta $\lambda_0 = 0$ con la desigualdad contraria. Así, tendremos que:

$$\Delta u^*(x_1, x_2, \dots, x_N) = \Delta u^*(-x_1, x_2, \dots, x_N).$$

Esto implica que Δu^* es simétrica en la dirección x_1 . Dado que nuestra ecuación es invariante bajo rotaciones, podemos escoger x_1 de manera arbitraria, por lo que Δu^* es en realidad radialmente simétrica respecto al cero. Sigue que u^* es radialmente simétrica y por lo tanto u también lo es.

□

Capítulo 3

Existencia de soluciones multinodales a la ecuación de tipo Lane-Emden para el bilaplaciano

3.1. Segundo Resultado Principal

Estudiaremos la existencia de soluciones cambiando de signo de la ecuación:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = |u(x)|^{p-\varepsilon-1} u(x) & \text{en } \mathbf{B}_1 \\ u = \Delta u = 0 & \text{sobre } \partial\mathbf{B}_1 \end{cases} \quad (3.1)$$

Donde \mathbf{B}_1 es la bola unitaria abierta en \mathbb{R}^N , $5 \leq N < 12$, $p = \frac{N+4}{N-4}$ es el exponente crítico de Sobolev y $\varepsilon > 0$ es una perturbación positiva pequeña. Para esto, utilizaremos el método de reducción de Lyapunov-Schmidt, siguiendo el esquema exhibido en ([5, 9]). El resultado a demostrar es el siguiente:

Teorema 3.1.1. *Dada $k \geq 2$ y $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño, existe una solución radial $u_{k,\varepsilon}$ de la ecuación (3.1) con exactamente $(k-1)$ esferas nodales. Más aún, $u_{k,\varepsilon}$ es de la forma:*

$$u_{k,\varepsilon}(r) = K_N \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} a_i \varepsilon^{-(i-\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{1 + \left(a_i \varepsilon^{-(i-\frac{1}{2})} \right)^{\frac{4}{N-4}} r^2} \right)^{\frac{N-4}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}}).$$

Observación 3.1.1. *Unos meses antes de acabar esta tesis se halló el trabajo de Y. Dammak y R. Ghoudi [8], donde se demuestra este mismo resultado. Allí se hace uso de otra versión del método de reducción de Lyapunov-Schmidt. Sin embargo, ambos trabajos son distintos en el sentido de que aquí trabajamos con la EDO radial asociada y aplicamos un cambio de Emden-Fowler, mientras en [8] se trabaja en \mathbb{R}^N directamente.*

3.2. Resultados preliminares

3.2.1. Cambio de Emden-Fowler

Suponga que $u(x)$ es una solución radial de (3.1) (Es decir, $u(x) = u(|x|) = u(r)$). Es sabido que el laplaciano para funciones radiales toma la forma:

$$\Delta u(x) = u''(r) + \frac{(N-1)}{r}u'(r). \quad (3.2)$$

De este modo, aplicando laplaciano dos veces obtenemos:

$$\begin{aligned} \Delta^2 u(x) &= \Delta(\Delta u(x)) \\ &= \Delta \left(u''(r) + \frac{(N-1)}{r}u'(r) \right) \\ &= \left(u''(r) + \frac{(N-1)}{r}u'(r) \right)'' + \frac{(N-1)}{r} \left(u''(r) + \frac{(N-1)}{r}u'(r) \right)' \\ &= u^{(4)}(r) + \frac{2(N-1)}{r}u'''(r) + \frac{(N-1)(N-3)}{r^2}u''(r) - \frac{(N-1)(N-3)}{r^3}u'(r). \end{aligned}$$

Así, las soluciones radiales de (3.1) deben cumplir:

$$u^{(4)}(r) + \frac{2(N-1)}{r}u'''(r) + \frac{(N-1)(N-3)}{r^2}u''(r) - \frac{(N-1)(N-3)}{r^3}u'(r) = |u(r)|^{p-\varepsilon-1}u(r) \quad (3.3)$$

Esta ecuación es poco amigable pues tiene derivadas de orden impar. Esto nos lleva a considerar un cambio de tipo Emden-Fowler:

$$u(r) = Ce^{at}v(t); \quad r = e^t.$$

Mediante cálculo directo, obtenemos:

$$\begin{aligned} u'(r) &= \frac{d}{dr} (Ce^{at}v(t)) = C \frac{d}{dt} (e^{at}v(t)) \cdot \frac{dt}{dr} \\ &= Ce^{(a-1)t} (av(t) + v'(t)) \\ u''(r) &= \frac{d}{dt} \left(Ce^{(a-1)t} (av(t) + v'(t)) \right) \cdot \frac{dt}{dr} \\ &= Ce^{(a-2)t} ((a^2 - a)v(t) + (2a - 1)v'(t) + v''(t)) \\ u'''(r) &= \frac{d}{dt} \left(Ce^{(a-2)t} ((a^2 - a)v(t) + (2a - 1)v'(t) + v''(t)) \right) \cdot \frac{dt}{dr} \\ &= Ce^{(a-3)t} ((a^3 - 3a^2 + 2a)v(t) + (3a^2 - 6a + 2)v'(t) + (3a - 3)v''(t) + v'''(t)) \\ u^{(4)}(r) &= \frac{d}{dt} \left(Ce^{(a-3)t} ((a^3 - 3a^2 + 2a)v(t) + (3a^2 - 6a + 2)v'(t) + (3a - 3)v''(t) + v'''(t)) \right) \cdot \frac{dt}{dr} \\ &= Ce^{(a-4)t} ((a^4 - 6a^3 + 11a^2 - 6a)v(t) + (4a^3 - 18a^2 + 22a - 6)v'(t) + (6a^2 - 18a + 11)v''(t) \\ &\quad + (4a - 6)v'''(t) + v^{(4)}(t)) \end{aligned}$$

Reemplazando en (3.3) tenemos:

$$C e^{(a-4)t} \left(v^{(4)}(t) + C_{3,a} v'''(t) + C_{2,a} v''(t) + C_{1,a} v'(t) + C_{0,a} v(t) \right) = C^{p-\varepsilon} e^{(p-\varepsilon)at} |v(t)|^{p-\varepsilon-1} v(t)$$

Donde

$$C_{3,a} = (4a - 6) + 2(N - 1)$$

$$C_{2,a} = (6a^2 - 18a + 11) + 2(N - 1)(3a - 3) + (N - 1)(N - 3)$$

$$C_{1,a} = (4a^3 - 18a^2 + 22a - 6) + 2(N - 1)(3a^2 - 6a + 2) + (N - 1)(N - 3)(2a - 1) - (N - 1)(N - 3)$$

$$C_{0,a} = (a^4 - 6a^3 + 11a^2 - 6a) + 2(N - 1)(a^3 - 3a^2 + 2a) + (N - 1)(N - 3)(a^2 - a) - (N - 1)(N - 3)a.$$

Queremos que a sea tal que los exponentes de las exponenciales sean iguales en el caso crítico ($\varepsilon = 0$). Haciendo los cálculos obtenemos

$$(a - 4) = p \cdot a \Rightarrow a = -\frac{4}{p-1} \Rightarrow a = -\frac{N-4}{2}$$

Con esta elección de a , las constantes son

$$\tilde{C}_3 := C_{3, -\frac{N-4}{2}} = 0$$

$$\tilde{C}_2 := C_{2, -\frac{N-4}{2}} = -\frac{1}{2}N^2 + 2N - 4$$

$$\tilde{C}_1 := C_{1, -\frac{N-4}{2}} = 0$$

$$\tilde{C}_0 := C_{0, -\frac{N-4}{2}} = \frac{1}{16}N^2(N-4)^2.$$

y la ecuación queda:

$$v^{(4)}(t) - \frac{1}{2}(N^2 - 4N + 8)v''(t) + \frac{1}{16}N^2(N-4)^2v(t) = C^{p-\varepsilon-1}e^{-\varepsilon at}|v(t)|^{p-\varepsilon-1}v(t).$$

Ahora, considere el cambio

$$w(x) = v(t); \quad x = at.$$

Luego de una simple aplicación de la regla de la cadena, obtenemos:

$$a^4 w^{(4)}(x) - \frac{1}{2}(N^2 - 4N + 8)a^2 w''(x) + \frac{1}{16}N^2(N-4)^2 w(x) = C^{p-\varepsilon-1}e^{-\varepsilon x}|w(x)|^{p-\varepsilon-1}w(x).$$

Escogemos la constante C tal que $C^{p-\varepsilon-1} = a^4$, es decir:

$$C := a^{\frac{4}{p-\varepsilon-1}} = \left(\frac{N-4}{2} \right)^{\frac{4}{p-\varepsilon-1}}$$

Y obtenemos:

$$w^{(4)}(x) - C_2 w''(x) + C_0 w(x) = e^{-\varepsilon x} |w(x)|^{p-\varepsilon-1} w(x).$$

Donde

$$C_2 := \frac{1}{a^2} \frac{1}{2} (N^2 - 4N + 8) = \frac{2N^2 - 8N + 16}{(N-4)^2}$$

$$C_0 := \frac{1}{a^4} \frac{1}{16} N^2 (N-4)^2 = \frac{N^2}{(N-4)^2}.$$

Note que ambas constantes son positivas y cumplen que

$$1 - C_2 + C_0 = 0.$$

Las funciones $u(r)$ y $w(x)$ se relacionan según la expresión:

$$u(r) = \left(\frac{N-4}{2} \right)^{\frac{4}{p-\varepsilon-1}} e^x w(x); \quad r = e^{-\frac{2}{N-4}x}. \quad (3.4)$$

Para el caso límite ($\varepsilon = 0$) este cambio de variables induce la siguiente transformación:

$$\mathcal{T}[u](x) := \left(\frac{2}{N-4} \right)^{\frac{N-4}{2}} e^{-x} u(e^{-\frac{2}{N-4}x}) \quad (3.5)$$

La cual es conocida como transformación de tipo Emden-Fowler.

Veamos como quedan las condiciones de borde. Claramente la condición $u(x) = 0$ en $\partial\mathbf{B}_1$ se traduce en $u(1) = 0$ y por ende en $w(0) = 0$. Por otro lado de (3.2) tenemos:

$$u''(1) + (N-1)u'(1) = 0$$

Aplicando la regla de la cadena, la ecuación en términos de w y sus derivadas es:

$$(N-4)w''(0) - 4w'(0) - Nw(0) = 0 \quad (3.6)$$

De este modo, para hallar soluciones radiales de la ecuación (3.1) basta resolver:

$$\begin{cases} w^{(4)}(x) - C_2 w''(x) + C_0 w(x) = e^{-\varepsilon x} |w(x)|^{p-\varepsilon-1} w(x), & x \in (0, +\infty) \\ w(0) = 0. \\ (N-4)w''(0) - 4w'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.7)$$

3.2.2. Formulación Débil y Funcional de Energía

Diremos que una función $w \in H_0^1(0, \infty) \cap H^2(0, \infty)$ es solución débil de (3.7) si cumple:

$$\int_0^\infty w''(x)v''(x) + C_2 w'(x)v'(x) + C_0 w(x)v(x) dx + \frac{4}{N-4} w'(0)v'(0) = \int_0^\infty |w(x)|^{p-1} w(x)v(x) dx \quad (3.8)$$

$$\forall v \in H_0^1(0, \infty) \cap H^2(0, \infty)$$

Recuerde que $H^2(0, \infty) \subseteq C^1[0, \infty)$, por lo que la expresión $w'(0)v'(0)$ tiene sentido. Veamos que las soluciones débiles suficientemente regulares son soluciones clásicas. Suponga que $w \in C^4[0, \infty) \cap H_0^1(0, \infty) \cap H^2(0, \infty)$ es una solución débil. En primer lugar, es claro que

$w(0) = 0$. Por otra parte, de la definición sigue que para toda función *test* $\varphi \in C_c^\infty(0, \infty)$ tendremos:

$$\int_0^\infty w''(x)\varphi''(x) + C_2w'(x)\varphi'(x) + C_0w(x)\varphi(x)dx = \int_0^\infty |w(x)|^{p-1}w(x)\varphi(x)dx$$

Aplicando integración por partes y reordenando obtenemos:

$$\int_0^\infty (w^{(4)}(x) - C_2w''(x) + C_0w(x) - |w(x)|^{p-1}w(x))\varphi(x)dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^\infty(0, \infty)$$

y por lo tanto, gracias a la regularidad de w :

$$w^{(4)}(x) - C_2w''(x) + C_0w(x) - |w(x)|^{p-1}w(x) = 0.$$

Por otro lado, para cualquier $v \in H^2(0, \infty)$ se cumplirá que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty w''(x)v''(x) + C_2w'(x)v'(x) + C_0w(x)v(x)dx \\ = -w''(0)v'(0) + w'''(0)v(0) - w'(0)v(0) + \int_0^\infty (w^{(4)}(x) - C_2w''(x) + C_0w(x))v(x)dx \\ = -w''(0)v'(0) + w'''(0)v(0) - w'(0)v(0) \end{aligned}$$

De este modo, si $v \in H_0^1(0, \infty) \cap H^2(0, \infty)$ entonces:

$$\int_0^\infty w''(x)v''(x) + C_2w'(x)v'(x) + C_0w(x)v(x)dx = -w''(0)v'(0).$$

Dado que estamos suponiendo que w es solución débil concluimos que:

$$-w''(0)v'(0) + \frac{4}{N-4}w'(0)v'(0) = 0 \quad \forall v \in H_0^1(0, \infty) \cap H^2(0, \infty)$$

En particular, si escogemos $v \in H_0^1(0, \infty) \cap H^2(0, \infty)$ tal que $v'(0) \neq 0$ concluimos que:

$$w''(0) - \frac{4}{N-4}w'(0) = 0.$$

Es decir, w cumple (3.7).

Ahora defina el funcional:

$$I_\varepsilon(w) := \frac{1}{2} \int_0^\infty |w''(x)|^2 + C_2|w'(x)|^2 + C_0|w(x)|^2 dx + \frac{2}{N-4}|w'(0)|^2 - \frac{1}{p-\varepsilon+1} \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} |w(x)|^{p-\varepsilon+1} dx. \quad (3.9)$$

Un cálculo sencillo nos permite notar que:

$$\begin{aligned} DI_\varepsilon(w)[v] = \int_0^\infty w''(x)v''(x) + C_2w'(x)v'(x) + C_0w(x)v(x)dx + \frac{4}{N-4}w'(0)v'(0) \\ - \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} |w(x)|^{p-\varepsilon-1}w(x)v(x)dx. \end{aligned}$$

y por lo tanto $w \in H_0^1(0, \infty) \cap H^2(0, \infty)$ es solución débil de (3.7) si y solo si es un punto crítico de I_ε .

3.2.3. El Ansatz

En esta sección propondremos un prototipo de solución al problema (3.7). Comencemos considerando la ecuación

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = u^p(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \\ u > 0 & \text{en } \mathbb{R}^N \end{cases} \quad (3.10)$$

En [15] se demuestra que todas las soluciones suaves de (3.10) son radialmente simétricas respecto a algún punto $x_0 \in \mathbb{R}^N$ y tienen la forma

$$U_{\lambda, x_0}(x) = \tilde{K}_N \left(\frac{\lambda}{1 + \lambda^2 |x - x_0|^2} \right)^{\frac{N-4}{2}}$$

para alguna constante $\lambda > 0$, donde $\tilde{K}_N = [N(N-4)(N-2)(N+2)]^{\frac{N-4}{8}}$. Por comodidad definimos:

$$U(x) := U_{1,0}(x) = \tilde{K}_N (1 + |x|^2)^a, \quad x \in \mathbb{R}^N, \quad (3.11)$$

$$U_\lambda(x) := U_{\lambda,0}(x) = \lambda^{-a} U(\lambda x), \quad x \in \mathbb{R}^N. \quad (3.12)$$

que son naturalmente soluciones radiales de (3.10). Abusando un poco de la notación también escribiremos:

$$U(r) = \tilde{K}_N (1 + r^2)^a, \quad r \in \mathbb{R}.$$

Aplicando la transformación (3.5), definimos:

$$W(x) := \mathcal{T}[U](x) = K_N e^{-x} (1 + e^{\frac{2}{a}x})^a, \quad x \in \mathbb{R}. \quad (3.13)$$

donde $K_N = \left(\frac{2}{N-4} \right)^{\frac{N-4}{2}} \tilde{K}_N$. Es sencillo verificar que

$$\mathcal{T}[U_\lambda](x) = W \left(x - \frac{N-4}{2} \log \lambda \right)$$

Además, es posible demostrar (ver lema B.1.2) que W cumple:

$$W^{(4)}(x) - C_2 W''(x) + C_0 W(x) = W^p(x),$$

Lo que era de esperarse por el desarrollo hecho en la sección del cambio de Endem-Fowler. Sin embargo, W no cumple las condiciones de borde de (3.7).

Para sortear este problema, sea PU_λ la proyección de U_λ en el espacio $H^2(\mathbf{B}_1) \cap H_0^1(\mathbf{B}_1)$. Esto es, PU_λ es la única solución de la ecuación:

$$\begin{cases} \Delta^2 PU_\lambda(x) = U_\lambda^p(x) & \text{en } \mathbf{B}_1 \\ PU_\lambda(x) = 0 & \text{sobre } \partial \mathbf{B}_1 \\ \Delta PU_\lambda(x) = 0 & \text{sobre } \partial \mathbf{B}_1 \end{cases} \quad (3.14)$$

Definamos la función auxiliar $\pi_\lambda(x) := PU_\lambda(x) - U_\lambda(x)$. Luego, π_λ cumple que:

$$\begin{cases} \Delta^2 \pi_\lambda(x) = 0 & \text{en } \mathbf{B}_1 \\ \pi_\lambda(x) = -U_\lambda(x) & \text{sobre } \partial \mathbf{B}_1 \\ \Delta \pi_\lambda(x) = -\Delta U_\lambda(x) & \text{sobre } \partial \mathbf{B}_1 \end{cases} \quad (3.15)$$

Intuitivamente, la función π_λ corrige a la función U_λ en la frontera. La única solución de (3.15) es (ver lema B.1.4):

$$\pi_\lambda(x) = -\frac{\Delta U_\lambda(1)}{2N}|x|^2 - U_\lambda(1) + \frac{\Delta U_\lambda(1)}{2N}. \quad (3.16)$$

Hasta ahora hemos hecho un análisis para un λ cualquiera. Ahora, sean $0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_k$ puntos en \mathbb{R} y denotemos $\lambda_i = e^{\frac{2}{N-4}\eta_i}$. Si Definimos las funciones

$$W_i(x) = W(x - \eta_i) = K_N e^{-(x-\eta_i)} (1 + e^{\frac{2}{a}(x-\eta_i)})^a, \quad (3.17)$$

entonces estas verificarán

$$W_i(x) = \mathcal{T}[U_{\lambda_i}](x)$$

y cumplirán la ecuación:

$$W_i^{(4)}(x) - C_2 W_i''(x) + C_0 W_i(x) = W_i^p(x). \quad (3.18)$$

Similar a lo que ocurre con la burbuja W , estas funciones W_i no cumplen las condiciones de borde, por lo que es necesario corregirlas. Esto nos lleva a definir las funciones:

$$V_i(x) := \mathcal{T}[PU_{\lambda_i}](x); \quad \Pi_i(x) := \mathcal{T}[\pi_{\lambda_i}](x) \quad (3.19)$$

Gracias al lema B.1.5:

$$\Pi_i(x) = A_i e^{-x} + B_i e^{-(1-\frac{2}{a})x},$$

Donde

$$\begin{aligned} A_i &= \frac{(N-4)^2}{8N} W_i''(0) - \frac{N-4}{2N} W_i'(0) - \frac{N+4}{8} W_i(0) \\ B_i &= -\frac{(N-4)^2}{8N} W_i''(0) + \frac{N-4}{2N} W_i'(0) + \frac{N-4}{8} W_i(0) \end{aligned}$$

Como la transformación \mathcal{T} es lineal, es claro que $V_i(x) = W_i(x) + \Pi_i(x)$. Es posible verificar que, como es de esperar, estas funciones son soluciones de la ecuación:

$$\begin{cases} V_i^{(4)}(x) - C_2 V_i''(x) + C_0 V_i(x) = W_i^p(x), & x \in (0, +\infty), \\ V_i(0) = 0, \\ (N-4)V_i''(0) - 4V_i'(0) = 0. \end{cases} \quad (3.20)$$

Estos cálculos se encuentran explicitados en el lema B.1.6. Note que la ecuación (3.20) es muy similar a (3.7). Esto, sumado al hecho de que estamos buscando soluciones cambiando de signo, nos invita a definir:

$$V(x) := \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} V_i(x). \quad (3.21)$$

En lo que sigue, buscaremos soluciones de (3.7) de la forma $V + \phi$ con ϕ pequeña. Para este fin, haremos que los puntos η_i dependan de ε de una manera conveniente:

$$\eta_1 := -\frac{1}{2} \log \varepsilon + \log \Lambda_1; \quad \eta_{i+1} - \eta_i = -\log \varepsilon - \log \Lambda_{i+1}, \quad i \in \{1, 2, \dots, k-1\}. \quad (3.22)$$

Las constantes Λ_i son parámetros positivos que serán determinados más adelante. Asumiremos que para una constante pequeña $\delta > 0$ fija se cumple que:

$$\delta < \Lambda_i < \frac{1}{\delta}, \quad i \in \{1, 2, \dots, k\}. \quad (3.23)$$

Note que para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$ se tiene:

$$\eta_i = -\frac{(2i-1)}{2} \log \varepsilon + \log \Lambda_1 - \sum_{n=2}^i \log \Lambda_n.$$

3.3. Expansión del funcional de energía

En esta sección probaremos el siguiente lema:

Lema 3.3.1. *Sea V definido como en (3.21), tal que los puntos η_i cumplan (3.22) y los parámetros Λ_i verifiquen (3.23). Entonces, existen constantes $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_5$ que dependen solo de N tales que:*

$$I_\varepsilon(V) = k\theta_1 + \varepsilon\Psi_k(\Lambda) - \frac{k^2}{2}\theta_4\varepsilon \log \varepsilon + \theta_5\varepsilon + \varepsilon\beta_\varepsilon(\Lambda)$$

donde $\Lambda = (\Lambda_1, \Lambda_2, \dots, \Lambda_k)$ y

$$\Psi_k(\Lambda) = \frac{\theta_2}{\Lambda_1^2} + k\theta_4 \log \Lambda_1 - \sum_{i=2}^k ((k-i+1)\theta_4 \log \Lambda_i - \theta_3\Lambda_i)$$

Además, $\beta_\varepsilon \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$ de manera uniforme para los Λ_i cumplen (3.23).

Demostración. Por el teorema de Taylor tenemos

$$I_\varepsilon(w) = I_0(w) + \varepsilon \cdot \left(\frac{d}{d\varepsilon} I_\varepsilon(w) \Big|_{\varepsilon=0} \right) + o(\varepsilon) \quad (3.24)$$

Calculemos el segundo término. Derivando:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\varepsilon} I_\varepsilon(w) &= \frac{d}{d\varepsilon} \left(\frac{1}{2} \int_0^\infty |w''(x)|^2 + C_2 |w'(x)|^2 + C_0 |w(x)|^2 dx + \frac{2}{N-4} |w'(0)|^2 \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{p-\varepsilon+1} \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} |w(x)|^{p-\varepsilon+1} dx \right) \\ &= -\frac{1}{(p-\varepsilon+1)^2} \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} |w(x)|^{p-\varepsilon+1} dx + \frac{1}{p-\varepsilon+1} \int_0^\infty x e^{-\varepsilon x} |w(x)|^{p-\varepsilon+1} dx \\ &\quad + \frac{1}{p-\varepsilon+1} \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} |w(x)|^{p-\varepsilon+1} \log(|w(x)|) dx. \end{aligned}$$

De este modo,

$$\begin{aligned} I_\varepsilon(V) &= I_0(V) - \frac{1}{(p+1)^2} \varepsilon \int_0^\infty |V(x)|^{p+1} dx + \frac{1}{p+1} \varepsilon \int_0^\infty x |V(x)|^{p+1} dx \\ &\quad + \frac{1}{p+1} \varepsilon \int_0^\infty |V(x)|^{p+1} \log(|V(x)|) dx + o(\varepsilon) \end{aligned} \quad (3.25)$$

Aplicando las estimaciones del lema **B.1.8**:

$$I_\varepsilon(V) = I_0(V) - \frac{1}{(p+1)^2} \varepsilon k \int_{-\infty}^{\infty} |W(x)|^{p+1} dx + \frac{1}{p+1} \varepsilon \left(\sum_{i=1}^k \eta_i \right) \int_{-\infty}^{\infty} |W(x)|^{p+1} dx \quad (3.26)$$

$$+ \frac{1}{p+1} \varepsilon k \int_{-\infty}^{\infty} |W(x)|^{p+1} \log(|W(x)|) dx + o(\varepsilon).$$

Ahora, nos gustaría aproximar $I_0(V)$ como la suma de las $I_0(V_i)$. Para esto, estudiaremos la cantidad $I_0(V) - \sum_{i=1}^k I_0(V_i)$:

$$\begin{aligned} I_0(V) - \sum_{i=1}^k I_0(V_i) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty |V''(x)|^2 + C_2 |V'(x)|^2 + C_0 |V(x)|^2 dx + \frac{2}{N-4} |V'(0)|^2 - \frac{1}{p+1} \int_0^\infty |V(x)|^{p+1} dx \\ &\quad - \sum_{i=1}^k \left(\frac{1}{2} \int_0^\infty |V_i''(x)|^2 + C_2 |V_i'(x)|^2 + C_0 |V_i(x)|^2 dx + \frac{2}{N-4} |V_i'(0)|^2 - \frac{1}{p+1} \int_0^\infty |V_i(x)|^{p+1} dx \right) \\ &= \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(|V''(x)|^2 - \sum_{i=1}^k |V_i''(x)|^2 \right) dx + \frac{1}{2} C_2 \int_0^\infty \left(|V'(x)|^2 - \sum_{i=1}^k |V_i'(x)|^2 \right) dx \\ &\quad + \frac{1}{2} C_0 \int_0^\infty \left(|V(x)|^2 - \sum_{i=1}^k |V_i(x)|^2 \right) dx + \frac{2}{N-4} \left(|V'(0)|^2 - \sum_{i=1}^k |V_i'(0)|^2 \right) \\ &\quad - \frac{1}{p+1} \int_0^\infty \left(|V(x)|^{p+1} - \sum_{i=1}^k |V_i(x)|^{p+1} \right) dx. \end{aligned}$$

Veamos el tercer término en más detalle. Utilizaremos la siguiente fórmula:

$$\left(\sum_{i=1}^k a_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^k a_i^2 \right) + 2 \left(\sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{i-1} a_i a_j \right).$$

Desarrollando:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} C_0 \int_0^\infty \left(|V(x)|^2 - \sum_{i=1}^k |V_i(x)|^2 \right) &= \frac{1}{2} C_0 \int_0^\infty \left(\left(\sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} V_i(x) \right)^2 - \sum_{i=1}^k |V_i(x)|^2 \right) \\ &= C_0 \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{i-1} \int_0^\infty (-1)^{i+j+2} V_i(x) V_j(x) dx. \end{aligned}$$

Análogamente:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}C_2 \int_0^\infty \left(|V'(x)|^2 - \sum_{i=1}^k |V_i'(x)|^2 \right) &= C_2 \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{i-1} \int_0^\infty (-1)^{i+j+2} V_i'(x) V_j'(x) dx, \\ \frac{1}{2} \int_0^\infty \left(|V''(x)|^2 - \sum_{i=1}^k |V_i''(x)|^2 \right) &= \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{i-1} \int_0^\infty (-1)^{i+j+2} V_i''(x) V_j''(x) dx, \\ \frac{2}{N-4} \left(|V'(0)|^2 - \sum_{i=1}^k |V_i'(0)|^2 \right) &= \frac{4}{N-4} \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{i-1} V_i'(0) V_j'(0). \end{aligned}$$

Reemplazando llegamos a que:

$$\begin{aligned} I_0(V) - \sum_{i=1}^k I_0(V_i) &= \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+j+2} \left(\int_0^\infty V_i''(x) V_j''(x) + C_2 V_i'(x) V_j'(x) + C_0 V_i(x) V_j(x) dx + \frac{4}{N-4} V_i'(0) V_j'(0) \right) \\ &\quad - \frac{1}{p+1} \int_0^\infty \left(|V(x)|^{p+1} - \sum_{i=1}^k |V_i(x)|^{p+1} \right) dx. \end{aligned}$$

Aplicando integración por partes, de la definición de las V_i y las propiedades de W_i y Π_i obtenemos:

$$\begin{aligned} I_0(V) - \sum_{i=1}^k I_0(V_i) &= \left[\sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+j+2} \left(\int_0^\infty W_i^p(x) V_j(x) dx \right) \right] \\ &\quad + \frac{1}{p+1} \int_0^\infty \left(\sum_{i=1}^k |V_i(x)|^{p+1} - |V(x)|^{p+1} \right) dx. \end{aligned}$$

Definamos de manera conveniente:

$$T_l := \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+j+2} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} W_i^p(x) V_j(x) dx + \frac{1}{p+1} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} \left(\sum_{i=1}^k |V_i(x)|^{p+1} - |V(x)|^{p+1} \right) dx$$

Donde:

$$\mu_1 := 0; \quad \mu_{i+1} := \frac{1}{2} (\eta_{i+1} + \eta_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, k-1\}; \quad \mu_{k+1} := \infty.$$

Claramente $I_0(V) - \sum_{i=1}^k I_0(V_i) = \sum_{l=1}^k T_l$. Aplicando el teorema del valor medio al mapeo $t \rightarrow (W_i(x) + t\Pi_i(x))^p$ es sencillo ver que $|V_i^p(x) - W_i^p(x)| \leq C\Pi_i(x)$ para todo $x \in (0, \infty)$. Luego:

$$\left| \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} (V_i^p(x) - W_i^p(x)) V_j(x) dx \right| \leq C \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} \Pi_i(x) V_j(x) dx \leq C e^{-\eta_i} \leq C \varepsilon^{\frac{3}{2}}, \quad \forall i \geq 2.$$

Además, gracias al lema B.1.8 sabemos que:

$$\int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |V_i(x)|^{p+1} dx \leq C\varepsilon^{\frac{p+1}{2}} \quad \forall i \neq l,$$

y por ende:

$$T_l = \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+j+2} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} V_i^p(x) V_j(x) dx + \frac{1}{p+1} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} (|V_l(x)|^{p+1} - |V(x)|^{p+1}) dx + o(\varepsilon).$$

Note que:

$$\begin{aligned} \sum_{i=2}^k \sum_{j=1}^{i-1} (-1)^{i+j+2} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} V_i^p(x) V_j(x) dx &= \sum_{i=1}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (-1)^{i+j+2} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} V_i^p(x) V_j(x) dx \\ &\quad - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k (-1)^{i+j+2} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} V_i^p(x) V_j(x) dx \end{aligned}$$

Por lo tanto podemos reescribir T_l como:

$$\begin{aligned} T_l &= - \sum_{i=1}^{k-1} \sum_{j=i+1}^k (-1)^{i+j+2} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} V_i^p(x) V_j(x) dx \\ &\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k (-1)^{l+j+2} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} V_l^p(x) V_j(x) dx + \frac{1}{p+1} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} (|V_l(x)|^{p+1} - |V(x)|^{p+1}) dx \\ &\quad + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^k \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^k (-1)^{i+j+2} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} V_i^p(x) V_j(x) dx + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Aplicando la segunda parte del lema B.1.8 notamos que varios términos son de orden inferior, por lo que en realidad tenemos que $T_k = o(\varepsilon)$ y:

$$\begin{aligned} T_l &= - \sum_{j=l+1}^k (-1)^{l+j+2} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} V_l^p(x) V_j(x) dx \\ &\quad + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k (-1)^{l+j+2} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} V_l^p(x) V_j(x) dx + \frac{1}{p+1} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} (|V_l(x)|^{p+1} - |V(x)|^{p+1}) dx + o(\varepsilon), \quad l < k. \end{aligned}$$

Veremos que los últimos dos términos combinados también son de orden inferior. Sea $x \in [\mu_l, \mu_{l+1}]$ fijo. El teorema del valor medio aplicado al mapeo $t \rightarrow \left| (-1)^{l+1} V_l(x) + t \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k (-1)^{j+1} V_j(x) \right) \right|^{p+1}$

nos dice que existe $\xi_1 \in (0, 1)$ tal que:

$$\begin{aligned} r_{1,l}(x) &:= \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k (-1)^{l+j+2} V_l^p(x) V_j(x) + \frac{1}{p+1} (|V_l(x)|^{p+1} - |V(x)|^{p+1}) \\ &= \left(V_l^p(x) - \left| (-1)^{l+1} V_l(x) + \xi_1 \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k (-1)^{j+1} V_j(x) \right) \right|^p \right) \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k (-1)^{l+j+2} V_j(x) \right) \end{aligned}$$

Aplicando el teorema del valor medio a la función $t \rightarrow \left| (-1)^{l+1} V_l(x) + t \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k (-1)^{j+1} V_j(x) \right) \right|^p$ tenemos que existe $\xi_2 \in (0, \xi_1)$ tal que:

$$r_{1,l}(x) = -p\xi_1 \left| (-1)^{l+1} V_l(x) + \xi_2 \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k (-1)^{j+1} V_j(x) \right) \right|^{p-1} \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k (-1)^{l+j+2} V_j(x) \right)^2$$

Como $|x - \eta_l| \leq |x - \eta_i|$ para todo $x \in [\mu_l, \mu_{l+1}]$ e $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, entonces:

$$\left| (-1)^{l+1} V_l(x) + \xi_2 \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k (-1)^{j+1} V_j(x) \right) \right| \leq \sum_{i=1}^k |V_i(x)| \leq \sum_{i=1}^k e^{-|x-\eta_i|} \leq k e^{-|x-\eta_l|} \quad \forall x \in [\mu_l, \mu_{l+1}].$$

Reagrupando convenientemente y usando la desigualdad de Hölder:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} r_{1,l}(x) dx \right| &\leq C \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} e^{-(p-1)|x-\eta_l|} \left(\sum_{j \neq l} |V_j(x)| \right)^2 dx \\ &= \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} e^{-(p-1)|x-\eta_l|} \left(\sum_{j \neq l} |V_j(x)| \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\sum_{j \neq l} |V_j(x)| \right)^{\frac{p+1}{p}} dx \\ &\leq \left(\int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} e^{-p|x-\eta_l|} \left(\sum_{j \neq l} |V_j(x)| \right) dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} \left(\sum_{j \neq l} |V_j(x)| \right)^{p+1} dx \right)^{\frac{1}{p}} \end{aligned}$$

Por un lado tenemos que:

$$\begin{aligned} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} e^{-p|x-\eta_l|} \sum_{j \neq l} |V_j(x)| dx &= \int_{\mu_l-\eta_l}^{\mu_{l+1}-\eta_l} e^{-p|x|} \left(\sum_{j \neq l} |V_j(x+\eta_l)| \right) dx \\ &\leq \int_{\mu_l-\eta_l}^{\mu_{l+1}-\eta_l} e^{-p|x|} \left(\sum_{j \neq l} e^{-|x+\eta_l-\eta_j|} \right) dx \\ &\leq \int_{\mu_l-\eta_l}^{\mu_{l+1}-\eta_l} e^{-p|x|} \left(\sum_{j \neq l} e^{|x|-\eta_l-\eta_j} \right) dx \leq C\varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(p-1)|x|} dx \leq C\varepsilon. \end{aligned}$$

donde hemos utilizado que $|\eta_l - \eta_j| \geq -\log(\varepsilon) + C$ para todo $j \neq l$. Por otro lado, también se cumple que:

$$\int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} \left(\sum_{j \neq l} |V_j(x)| \right)^{p+1} dx \leq C \sum_{j \neq l} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |V_j(x)|^{p+1} dx \leq C\varepsilon^{\frac{p+1}{2}}.$$

y por lo tanto:

$$\left| \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} r_{l,1}(x) dx \right| \leq C\varepsilon^{\frac{p-1}{p}} \varepsilon^{\frac{p+1}{2p}} = C\varepsilon^{\frac{3p-1}{2p}} = o(\varepsilon).$$

Recapitulando, hasta ahora tenemos que:

$$T_k = o(\varepsilon), \quad T_l = - \sum_{j=l+1}^k (-1)^{l+j+2} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} V_l^p(x) V_j(x) dx + o(\varepsilon), \quad l < k.$$

Suponga que $j \geq l + 2$. Luego $|\eta_j - \eta_l| \geq -2\log(\varepsilon) + C$ y por lo tanto:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} V_l^p(x) V_j(x) dx \right| &\leq C \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} e^{-p|x-\eta_l|} e^{-|x-\eta_j|} dx \\ &= C \int_{\mu_l-\eta_l}^{\mu_{l+1}-\eta_l} e^{-p|x|} e^{-|x-\eta_j+\eta_l|} dx \\ &\leq C \int_{\mu_l-\eta_l}^{\mu_{l+1}-\eta_l} e^{-p|x|} e^{|x|-\eta_j-\eta_l} dx \leq C e^{-|\eta_j-\eta_l|} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(p-1)|x|} dx \leq C\varepsilon^2. \end{aligned}$$

De este modo, el único término que no es de orden inferior es aquel con $j = l + 1$:

$$T_l = \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} V_l^p(x) V_{l+1}(x) dx + o(\varepsilon).$$

Utilizando el teorema del valor medio y procediendo de similar a lo hecho anteriormente es posible demostrar que de hecho se tiene que:

$$T_l = \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} W_l^p(x) W_{l+1}(x) dx + o(\varepsilon).$$

Aplicando el teorema del valor medio al mapeo $t \rightarrow K_N e^{-|x-\eta_{l+1}|} (1 + t e^{\frac{2}{a}(x-\eta_{l+1})})^a$ obtenemos que:

$$\left| W_{l+1}(x) - K_N e^{-|x-\eta_{l+1}|} \right| \leq C e^{-(1-\frac{2}{a})|x-\eta_{l+1}|}$$

Mediante cálculo directo llegamos a que:

$$\begin{aligned} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} W_l^p(x) \left(W_{l+1}(x) - K_N e^{-|x-\eta_{l+1}|} \right) dx &\leq \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} e^{-p|x-\eta_l|} e^{-(1-\frac{2}{a})(\eta_{l+1}-x)} dx \\ &\leq C \int_{\mu_l-\eta_l}^{\mu_{l+1}-\eta_l} e^{-p|x|} e^{(1-\frac{2}{a})(x-\eta_{l+1}+\eta_l)} dx \\ &\leq C e^{-(1-\frac{2}{a})(\eta_{l+1}-\eta_l)} \int_{\mu_l-\eta_l}^{\mu_{l+1}-\eta_l} e^{(1-\frac{2}{a}-p)|x|} dx \\ &\leq C \varepsilon^{\frac{N}{N-4}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{4}{N-4}|x|} dx = o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Por ende, se cumple que:

$$\int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} W_l^p(x) W_{l+1}(x) dx = K_N \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} W_l^p(x) e^{-|x-\eta_{l+1}|} dx + o(\varepsilon) = K_N e^{-(\eta_{l+1}-\eta_l)} \int_{-\infty}^{\infty} e^x W^p(x) dx + o(\varepsilon).$$

Con todo lo anterior, concluimos que

$$I_0(V) - \sum_{i=1}^k I_0(V_i) = \sum_{l=1}^{k-1} K_N e^{-(\eta_{l+1}-\eta_l)} \int_{-\infty}^{\infty} e^x W^p(x) dx + o(\varepsilon).$$

Por último, estimaremos la cantidad $I_0(V_i)$. por el teorema del valor medio, existe $\xi \in (0, 1)$ tal que:

$$I_0(V_i) = I_0(W_i) + DI_0(W_i)[\Pi_i] + \underbrace{\frac{1}{2} D^2 I_0(W_i + \xi \Pi_i)[\Pi_i, \Pi_i]}_{=o(\varepsilon)}$$

Veamos el segundo término. Sabemos que:

$$\begin{aligned} DI_0(W_i)[\Pi_i] &= \int_0^{\infty} W_i''(x) \Pi_i''(x) + C_2 W_i'(x) \Pi_i'(x) + C_0 W_i(x) \Pi_i(x) dx + \frac{4}{N-4} W_i'(0) \Pi_i'(0) \\ &\quad - \int_0^{\infty} |W_i(x)|^{p-1} W_i(x) \Pi_i(x) dx \end{aligned}$$

Aplicando integración por partes y (3.18):

$$\begin{aligned} DI_0(W_i)[\Pi_i] &= W_i''(x) \Pi_i'(x) \Big|_0^{\infty} - W_i'''(x) \Pi_i(x) \Big|_0^{\infty} + C_2 W_i'(x) \Pi_i(x) \Big|_0^{\infty} + \frac{4}{N-4} W_i'(0) \Pi_i'(0) \\ &= -W_i''(0) \Pi_i'(0) + W_i'''(0) \Pi_i(0) - C_2 W_i'(0) \Pi_i(0) + \frac{4}{N-4} W_i'(0) \Pi_i'(0). \end{aligned}$$

Gracias al lema B.1.5 tenemos que:

$$\begin{aligned} \Pi_i'(0) &= -A_i - \left(1 - \frac{2}{a}\right) B_i = -(A_i + B_i) - \frac{4}{N-4} B_i = W_i(0) + \frac{N-4}{2N} W_i''(0) - \frac{2}{N} W_i'(0) - \frac{1}{2} W_i(0) \\ &= \frac{N-4}{2N} W_i''(0) - \frac{2}{N} W_i'(0) + \frac{1}{2} W_i(0) \end{aligned}$$

Por las estimaciones establecidas en B.1.3 podemos escribir:

$$\Pi_i'(0) = \left(\frac{N-4}{2N} - \frac{2}{N} + \frac{1}{2} \right) W_i(0) + o(\varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}) = \frac{N-4}{N} W_i(0) + o(\varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}).$$

Usando el lema B.1.3 y el hecho de que $W_i(0) \cdot o(\varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}) = o(\varepsilon^{2i-1})$ llegamos a que:

$$-W_i''(0) \Pi_i'(0) = - \left(W_i(0) + o(\varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}) \right) \left(\frac{N-4}{N} W_i(0) + o(\varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}) \right) = -\frac{N-4}{N} W_i^2(0) + o(\varepsilon).$$

y

$$\frac{4}{N-4} W_i'(0) \Pi_i'(0) = \frac{4}{N-4} \left(W_i(0) + o(\varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}) \right) \left(\frac{N-4}{N} W_i(0) + o(\varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}) \right) = \frac{4}{N} W_i^2(0) + o(\varepsilon).$$

Adicionalmente, como $\Pi_i(0) = -W_i(0)$ tenemos:

$$W_i'''(0)\Pi_i(0) = -W_i^2(0) + o(\varepsilon); \quad -C_2W_i''(0)\Pi_i(0) = C_2W_i^2(0) + o(\varepsilon).$$

Por lo tanto, la estimación de $DI_0(W_i)[\Pi_i]$ queda:

$$\begin{aligned} DI_0(W_i)[\Pi_i] &= \left(-\frac{N-4}{N} - 1 + C_2 + \frac{4}{N} \right) W_i^2(0) + o(\varepsilon) \\ &= \frac{16(N^2 - 5N + 8)}{N(N-4)^2} W_i^2(0) + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Más aún, para $i \geq 2$ se tiene que $W_i^2(0) = o(\varepsilon)$, por lo que podemos escribir:

$$\begin{aligned} I_0(V_1) &= I_0(W_1) + \frac{16(N^2 - 5N + 8)}{N(N-4)^2} W_1^2(0) + o(\varepsilon), \\ I_0(V_i) &= I_0(W_i) + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad i \in \{2, 3, \dots, k\}.$$

Es claro que:

$$\begin{aligned} I_0(W_i) &= \frac{1}{2} \int_0^\infty |W_i''(x)|^2 + C_2|W_i'(x)|^2 + C_0|W_i(x)|^2 dx + \frac{4}{N-4} |W_i(0)|^2 \\ &\quad - \frac{1}{p+1} \int_0^\infty |W_i(x)|^{p+1} dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty |W''(x)|^2 + C_2|W'(x)|^2 + C_0|W(x)|^2 dx + \frac{4}{N-4} W_i^2(0) \\ &\quad - \frac{1}{p+1} \int_{-\infty}^\infty |W(x)|^{p+1} dx + o(\varepsilon). \end{aligned}$$

Luego, lo anterior queda:

$$\begin{aligned} DI_0(W_1) &= \theta_1 + \frac{4(5N^2 - 24N + 32)}{N(N-4)^2} W_1^2(0) + o(\varepsilon), \\ DI_0(W_i) &= \theta_1 + o(\varepsilon), \end{aligned} \quad i \in \{2, 3, \dots, k\}.$$

Donde:

$$\theta_1 = \frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty |W''(x)|^2 + C_2|W'(x)|^2 + C_0|W(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{-\infty}^\infty |W(x)|^{p+1} dx$$

Por otro lado, de la definición de W_1 es fácil ver que:

$$W_1^2(0) = K_N^2 e^{-2\eta_1} + o(\varepsilon)$$

Reuniendo todas estas estimaciones concluimos que:

$$I_\varepsilon(V) = \theta_1 k + \theta_2 e^{-2\eta_1} + \theta_3 \sum_{l=1}^{k-1} e^{-(\eta_{l+1}-\eta_l)} + \theta_4 \left(\sum_{i=1}^k \eta_i \right) \varepsilon + \theta_5 k \varepsilon + o(\varepsilon)$$

Donde:

$$\begin{cases} \theta_1 &= \frac{1}{2} \int_{-\infty}^{\infty} |W''(x)|^2 + C_2 |W'(x)|^2 + C_0 |W(x)|^2 dx - \frac{1}{p+1} \int_{-\infty}^{\infty} |W(x)|^{p+1} dx \\ \theta_2 &= \frac{4(5N^2 - 24N + 32)}{N(N-4)^2} K_N^2 \\ \theta_3 &= K_N \int_{-\infty}^{\infty} e^x W^p(x) dx \\ \theta_4 &= \frac{1}{p+1} \int_{-\infty}^{\infty} W^{p+1}(x) dx \\ \theta_5 &= \frac{1}{(p+1)} \int_{-\infty}^{\infty} W^{p+1}(x) \log(W(x)) dx - \frac{1}{(p+1)^2} \int_{-\infty}^{\infty} W^{p+1}(x) dx \end{cases}$$

El resultado sigue de reemplazar las definiciones de las η_i y agrupar términos de manera conveniente. \square

3.4. El problema linealizado

En esta sección estudiaremos el problema linealizado relacionado al problema (3.7). Considere $0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_k$ arbitrarios y defina las funciones:

$$Z_i(x) := -\frac{\partial V_i}{\partial \eta_i}(x) = W'_i(x) - \left(\frac{\partial}{\partial \eta_i} A_i \right) e^{-x} - \left(\frac{\partial}{\partial \eta_i} B_i \right) e^{-(1-\frac{2}{a})x}$$

De la ecuación (3.20) se desprende que:

$$Z_i(0) = 0; \quad (N-4)Z''_i(0) - 4Z'_i(0) = 0. \quad (3.27)$$

Ahora abordaremos el problema de hallar una función ϕ para la cual existan ciertas constantes c_i tales que:

$$\begin{cases} (V + \phi)^{(4)} - C_2(V + \phi)'' + C_0(V + \phi) - e^{-\varepsilon x} |V + \phi|^{p-\varepsilon-1}(V + \phi) = \sum_0^k c_i Z_i, & x \in (0, +\infty) \\ \phi(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0. \\ (N-4)\phi''(0) - 4\phi'(0) = 0. \\ \int_0^\infty Z_i \phi dx = 0. & \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \end{cases} \quad (3.28)$$

Resulta conveniente reordenar esta ecuación introduciendo los siguientes operadores:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon \phi &:= \phi^{(4)} - C_2 \phi'' + C_0 \phi - (p-\varepsilon)e^{-\varepsilon x} |V|^{p-\varepsilon-1} \phi. \\ N_\varepsilon(\phi) &:= e^{-\varepsilon x} (|V + \phi|^{p-\varepsilon-1}(V + \phi) - |V|^{p-\varepsilon-1}V - (p-\varepsilon)|V|^{p-\varepsilon-1} \phi) \\ R_\varepsilon &:= e^{-\varepsilon x} |V|^{p-\varepsilon-1}V - \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} W_i^p \end{aligned}$$

Donde L_ε recoge la parte lineal de la ecuación, N_ε la parte no lineal, y R_ε es el resto. También definimos el operador:

$$L\phi := \phi^{(4)} - C_2 \phi'' + C_0 \phi - p|V|^{p-1} \phi.$$

Con esto, el problema (3.28) queda:

$$\begin{cases} L_\varepsilon \phi = N_\varepsilon(\phi) + R_\varepsilon + \sum_0^k c_i Z_i, & x \in (0, +\infty) \\ \phi(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0. \\ (N-4)\phi''(0) - 4\phi'(0) = 0. \\ \int_0^\infty Z_i \phi dx = 0. & \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \end{cases} \quad (3.29)$$

Note que si hallamos una función ϕ que cumpla esta ecuación y logramos demostrar que las constantes c_i asociadas son todas nulas, entonces $V + \phi$ es efectivamente la solución de nuestro problema.

Para abordar el problema (3.29), es útil estudiar primero los problemas lineales intermedios:

$$\left\{ \begin{array}{l} L_\varepsilon \phi = h + \sum_0^k c_i Z_i, \quad x \in (0, +\infty) \\ \phi(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0. \\ (N-4)\phi''(0) - 4\phi'(0) = 0. \\ \int_0^\infty Z_i \phi dx = 0. \end{array} \right. \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \quad (3.30)$$

y

$$\left\{ \begin{array}{l} L\phi = h + \sum_0^k c_i Z_i, \quad x \in (0, +\infty) \\ \phi(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \phi(x) = 0. \\ (N-4)\phi''(0) - 4\phi'(0) = 0. \\ \int_0^\infty Z_i \phi dx = 0. \end{array} \right. \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \quad (3.31)$$

Centraremos nuestros esfuerzos en demostrar que bajo ciertas condiciones, los problemas (3.30) y (3.31) tienen una única solución. Para ello, introducimos la siguiente norma:

$$\|\phi\|_* := \inf \left\{ C \mid C \sum_{i=1}^k e^{-\sigma|x-\eta_i|} \geq |\phi(x)|, \quad \forall x \in (0, \infty) \right\}.$$

o equivalentemente:

$$\|\phi\|_* = \sup_{x>0} \left(\sum_{i=1}^k e^{-\sigma|x-\eta_i|} \right)^{-1} |\phi(x)|.$$

Donde $\sigma \in (0, \min\{1, p-1\})$. Por comodidad, denotaremos:

$$\rho(x) = \left(\sum_{i=1}^k e^{-\sigma|x-\eta_i|} \right)^{-1}$$

Llamaremos C_* al espacio de funciones continuas con norma $\|\cdot\|_*$ finita:

$$C_* := \{f \in C[0, \infty) : \|f\|_* < \infty\}$$

El cual es un espacio de Banach. Además, denotaremos por $\mathcal{L}(C_*)$ al espacio de operadores lineales en C_* .

El siguiente lema es de carácter técnico y es el primer paso para demostrar que los problemas (3.30) y (3.31) tienen una única solución.

Lema 3.4.1. Sean $\{\eta_i^n\}_{n \in \mathbb{N}}$ sucesiones tales que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \eta_1^n = \infty, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\min_{1 \leq i \leq k} \eta_{i+1}^n - \eta_i^n \right) = \infty.$$

Sea además $\{\phi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión de soluciones de (3.31) para $h = h_n$, con $\|h_n\|_* \rightarrow 0$. Entonces $\|\phi_n\|_\infty \rightarrow 0$.

Demostración. Procediendo por contradicción, supongamos que $\|\phi_n\|_\infty$ no tiende a cero. Sin pérdida de generalidad podemos asumir que $\|\phi_n\|_\infty = 1$. En lo que sigue el superíndice n denota la dependencia de las funciones involucradas de las sucesiones $\{\eta_i^n\}_{n \in \mathbb{N}}$. Integrando la ecuación (3.31) contra Z_l^n obtenemos:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty c_i^n Z_i^n(x) Z_l^n(x) dx + \int_0^\infty h_n(x) Z_l^n(x) dx \\
&= \int_0^\infty (L\phi_n)(x) Z_l^n(x) dx \\
&= \int_0^\infty \left(\phi_n^{(4)}(x) - C_2 \phi_n''(x) + C_0 \phi_n(x) - p|V(x)|^{p-1} \phi(x) \right) Z_l^n(x) dx \\
&= \phi_n'''(x) Z_l^n(x) \Big|_0^\infty - \phi_n''(x) Z_l^{n'}(x) \Big|_0^\infty + \phi_n'(x) Z_l^{n''}(x) \Big|_0^\infty - \phi_n(x) Z_l^{n'''}(x) \Big|_0^\infty \\
&\quad - C_2 \phi_n'(x) Z_l^n(x) \Big|_0^\infty + C_2 \phi_n(x) Z_l^{n'}(x) \Big|_0^\infty \\
&\quad + \int_0^\infty \left(Z_l^{n(4)}(x) - C_2 Z_l^{n''}(x) + C_0 Z_l^n(x) - p|V(x)|^{p-1} Z_l^n(x) \right) \phi_n(x) dx
\end{aligned}$$

De (3.27) y (3.31) sigue que:

$$\begin{aligned}
& \int_0^\infty c_i^n Z_i^n(x) Z_l^n(x) dx + \int_0^\infty h_n(x) Z_l^n(x) dx \\
&= \int_0^\infty \left(Z_l^{n(4)}(x) - C_2 Z_l^{n''}(x) + C_0 Z_l^n(x) - p|V(x)|^{p-1} Z_l^n(x) \right) \phi_n(x) dx
\end{aligned}$$

Esto último se puede reescribir como un sistema lineal de la forma $A_n \cdot \vec{c}_n = \vec{b}_n$, donde A_n es una matriz de $k \times k$, mientras que \vec{c}_n y \vec{b}_n son vectores columna, cuyas entradas son:

$$\begin{aligned}
(A_n)_{l,i} &:= \int_0^\infty Z_i^n(x) Z_l^n(x) dx; \\
(\vec{b}_n)_l &:= \int_0^\infty \left(Z_l^{n(4)}(x) - C_2 Z_l^{n''}(x) + C_0 Z_l^n(x) - p|V(x)|^{p-1} Z_l^n(x) \right) \phi_n(x) dx - \int_0^\infty h_n(x) Z_l^n(x) dx; \\
(\vec{c}_n)_i &:= c_i^n.
\end{aligned}$$

Es posible demostrar que para n suficientemente grande la matriz A_n es diagonal dominante y por lo tanto invertible. Luego, para n grande las constantes c_i^n están únicamente determinadas por la expresión $\vec{c}_n = A_n^{-1} \cdot \vec{b}_n$.

Por otro lado, note que:

$$Z_l^n(x) + \left(\frac{\partial}{\partial \eta_i} A_i \right) e^{-x} + \left(\frac{\partial}{\partial \eta_i} B_i \right) e^{-(1-\frac{2}{a})x} = W_l'(x)$$

De (3.18) se desprende que $W_l'(x)$ es solución de la ecuación:

$$Z^{(4)} - C_2 Z'' + C_0 Z = pW_l^{p-1} Z.$$

Adicionalmente, gracias a los lemas **B.1.5** y **B.1.3** tenemos que $\left(\frac{\partial}{\partial \eta_i} A_i\right) e^{-x} + \left(\frac{\partial}{\partial \eta_i} B_i\right) e^{-(1-\frac{2}{a})x}$ tiende a cero cuando $n \rightarrow \infty$. Por el teorema de convergencia dominada tenemos que $\lim_{n \rightarrow \infty} c_i^n = 0$.

Ahora, considere $x_n > 0$ un punto donde ϕ_n alcanza su máximo, es decir $|\phi_n(x_n)| = 1$. Demostraremos que, tomando subsucesiones de ser necesario, existe un índice l y una constante M fijos tales que:

$$|\eta_l^n - x_n| \leq M, \quad \forall n \in \mathbb{N} \quad (3.32)$$

Suponga que lo anterior es falso. Entonces se tiene que:

$$|\eta_i^n - x_n| \rightarrow \infty, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Defina las funciones $\psi_n(x) = \phi_n(x + x_n)$. Luego, estas funciones convergen uniformemente sobre compactos a cierta ψ . Pasando al límite en la ecuación (3.31) obtenemos que ψ es solución de la ecuación:

$$\psi^{(4)} - C_2 \psi'' + C_0 \psi = 0.$$

Aplicando la transformación inversa de \mathcal{T} y extendiendo radialmente a $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ definimos:

$$\Psi(x) := \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N-4}{2}} |x|^{-\frac{N-4}{2}} \psi\left(-\frac{N-4}{2} \log(|x|)\right).$$

Luego, Ψ es una función radial biarmónica en $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$. El hecho de que $\|\psi\|_\infty = 1$ se traduce en que:

$$|\Psi(x)| \leq \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N-4}{2}} |x|^{-\frac{N-4}{2}}; \quad \text{en } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}.$$

Así, necesariamente $\Psi \equiv 0$, lo que es una contradicción.

De este modo, tomando subsucesiones de ser necesario, existen l y M tales que se cumple (3.32). Defina ahora $\vartheta_n(x) := \phi_n(x + \eta_l^n)$. De manera similar a lo hecho anteriormente, las funciones ϑ_n convergen uniformemente sobre compactos a cierta ϑ . Pasando al límite en la ecuación (3.31) obtenemos que ϑ es solución de la ecuación:

$$\vartheta^{(4)} - C_2 \vartheta'' + C_0 \vartheta = pW^{p-1} \vartheta.$$

Veamos que esto implica que $\vartheta = CW'$. En efecto, aplicando la transformación inversa de \mathcal{T} y extendiendo radialmente a $\mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ definimos:

$$\Theta(x) := \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N-4}{2}} |x|^{-\frac{N-4}{2}} \vartheta\left(-\frac{N-4}{2} \log(|x|)\right).$$

Aplicando el lema **B.1.1** es posible demostrar que $\Theta : \mathbb{R}^N \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ es solución de la ecuación:

$$\Delta^2 \Theta(x) = pU^{p-1}(x)\Theta(x).$$

Así, Θ se puede extender a todo \mathbb{R}^N . Luego, por el resultado de no-degenerancia (ver [16]), tenemos que:

$$\Theta(x) \in \text{span} \left\{ \frac{\partial U_{\lambda, \xi}}{\partial \lambda}, \frac{\partial U_{\lambda, \xi}}{\partial \xi_1}, \frac{\partial U_{\lambda, \xi}}{\partial \xi_2}, \dots, \frac{\partial U_{\lambda, \xi}}{\partial \xi_N} \right\}$$

Dado que Θ es radial, entonces necesariamente:

$$\Theta(x) = C \frac{\partial U_{\lambda,0}}{\partial \lambda}(x).$$

Mediante cálculo directo obtenemos:

$$\Theta(x) = C \frac{1 - \lambda^2 |x|^2}{(1 + \lambda^2 |x|^2)^{\frac{N-2}{2}}}.$$

Para ciertas constantes $C, \lambda \in \mathbb{R}$. Esto implica que:

$$\vartheta(x) = C e^{-x} \frac{1 - e^{\frac{2}{a}(x-\eta)}}{\left(1 + e^{\frac{2}{a}(x-\eta)}\right)^{\frac{N-2}{2}}} = C e^\eta W'(x - \eta).$$

donde $\eta = -a \log(\lambda)$. Renombrando la constante C obtenemos

$$\vartheta(x) = C W'(x - \eta).$$

Resta probar que $\eta = 0$. Reemplazando la última igualdad en la ecuación tenemos:

$$\begin{aligned} pW^{p-1}(x)\vartheta(x) &= \vartheta^{(4)}(x) - C_2 \vartheta''(x) + C_0 \vartheta(x) \\ &= C \left((W'(x - \eta))^{(4)} - C_2 (W'(x - \eta))'' + C_0 W'(x - \eta) \right) \\ &= C \left(W^{(4)}(x - \eta) - C_2 W''(x - \eta) + C_0 W(x - \eta) \right)' \\ &= C (W^p(x - \eta))' \\ &= C p W^{p-1}(x - \eta) W'(x - \eta) \\ &= p W^{p-1}(x - \eta) \vartheta(x). \end{aligned}$$

Si $\eta \neq 0$ entonces, evaluando la última expresión en $x = 0$ obtenemos:

$$C p W^{p-1}(0) W'(-\eta) = C p W^{p-1}(-\eta) W'(-\eta).$$

Esto es una contradicción pues W tiene un único máximo en $x = 0$. Concluimos que $\vartheta = C W'$.

Por último, de las condiciones de ortogonalidad tenemos que:

$$\int_0^\infty Z_l^n(x) \phi_n(x) = 0$$

Que después de un cambio de variables queda:

$$\int_{-\eta_l^n}^\infty Z_l^n(x + \eta_l^n) \phi_n(x + \eta_l^n) = 0$$

Pasando al límite tenemos que:

$$\int_{-\infty}^\infty W'(x) \vartheta(x) = 0$$

Esto último es una contradicción. Concluimos que $\|\phi_n\|_\infty \rightarrow 0$

□

El siguiente corolario es un refinamiento del lema anterior.

Corolario 3.4.1. *Considere las hipótesis del lema 3.4.1. Entonces $\|\phi_n\|_* \rightarrow 0$.*

Demostración. Por hipótesis, las funciones ϕ_n cumplen

$$\phi_n^{(4)} - C_2\phi_n'' + C_0\phi_n = p|V|^{p-1}\phi_n + h_n + \sum_{i=1}^k c_i^n Z_i^n$$

Aplicando valor absoluto y acotando:

$$\left| \phi_n^{(4)} - C_2\phi_n'' + C_0\phi_n \right| \leq p|V|^{p-1}|\phi_n| + |h_n| + \sum_{i=1}^k |c_i^n| |Z_i^n|.$$

Es sencillo notar que $|Z_i^n(x)| \leq C e^{-|x-\eta_i^n|}$. Si denotamos $\hat{c}_n = \max\{|c_1^n|, |c_2^n|, \dots, |c_k^n|\}$ entonces:

$$\sum_{i=1}^k |c_i^n| |Z_i^n(x)| \leq C \hat{c}_n \sum_{i=1}^k e^{-|x-\eta_i^n|}.$$

Por otro lado, de la definición de $\|\cdot\|_*$ tenemos que:

$$|h_n(x)| \leq \|h_n\|_* \left(\sum_{i=1}^k e^{-\sigma|x-\eta_i^n|} \right)$$

De manera similar, el último término cumple que:

$$|V(x)|^{p-1} \leq C \sum_{i=1}^k e^{-(p-1)|x-\eta_i^n|}$$

Reemplazando notamos que para σ suficientemente pequeño obtenemos:

$$\left| \phi_n^{(4)} - C_2\phi_n'' + C_0\phi_n \right| \leq C (\|\phi_n\|_\infty + \|h_n\|_* + \hat{c}_n) \sum_{i=1}^k e^{-\sigma|x-\eta_i^n|}$$

Definimos:

$$\psi_n(x) := C (\|\phi_n\|_\infty + \|h_n\|_* + \hat{c}_n) \sum_{i=1}^k e^{-\sigma|x-\eta_i^n|}$$

y

$$\begin{aligned} \Psi_n(x) &:= \left(\frac{N-4}{2} \right)^{\frac{N-4}{2}} |x|^{-\frac{N-4}{2}} \psi_n \left(-\frac{N-4}{2} \log(|x|) \right). \\ \Phi_n(x) &:= \left(\frac{N-4}{2} \right)^{\frac{N-4}{2}} |x|^{-\frac{N-4}{2}} \phi_n \left(-\frac{N-4}{2} \log(|x|) \right). \end{aligned}$$

Del lema [B.1.1](#) tenemos:

$$\begin{aligned}\Delta^2\Psi_n(x) &= \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N+4}{2}} e^{pt} \left(\psi_n^{(4)}(t) - C_2\psi_n''(t) + C_0\psi_n(t)\right) \\ &= \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N+4}{2}} e^{pt} (\sigma^4 - C_2\sigma^2 + C_0) \psi_n(t), \\ \Delta^2\Phi_n(x) &= \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N+4}{2}} e^{pt} \left(\phi_n^{(4)}(t) - C_2\phi_n''(t) + C_0\phi_n(t)\right) \\ &\leq \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N+4}{2}} e^{pt} \psi_n(t)\end{aligned}$$

Donde $t = a \log(|x|)$. Similarmente:

$$\begin{aligned}\Delta\Psi_n(x) &= \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N}{2}} e^{(1-\frac{a}{2})t} \left(\psi_n''(t) - \frac{4}{N-4}\psi_n'(t) - \frac{N}{N-4}\psi_n(t)\right) \\ &\leq \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N}{2}} e^{(1-\frac{a}{2})t} \left(\sigma^2 + \frac{4}{N-4}\sigma - \frac{N}{N-4}\right) \psi_n(t) \leq 0 \\ \Delta\Phi_n(x) &= \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N}{2}} e^{(1-\frac{a}{2})t} \left(\phi_n''(t) - \frac{4}{N-4}\phi_n'(t) - \frac{N}{N-4}\phi_n(t)\right)\end{aligned}$$

Note que por las condiciones de borde se tiene que si $|x| = 1$ entonces $\Delta\Phi_n(x) = \Phi_n(x) = 0$. De este modo, para $C > 0$ suficientemente grande tenemos:

$$\begin{cases} \Delta^2(C\Psi_n)(x) \geq \Delta^2\Phi_n(x) & \text{en } \mathbf{B}_1 \\ \Delta(C\Psi_n)(x) \leq \Delta\Phi_n(x) & \text{sobre } \partial\mathbf{B}_1 \\ C\Psi_n(x) \geq \Phi_n(x) & \text{sobre } \partial\mathbf{B}_1 \end{cases}$$

La proposición [A.1.2](#) nos permite concluir que $C\Psi_n \geq \Phi_n$ en \mathbf{B}_1 . Análogamente obtenemos $-C\Psi_n \leq \Phi_n$ en \mathbf{B}_1 . Aplicando las definiciones obtenemos que:

$$|\phi_n(x)| \leq C (\|\phi_n\|_\infty + \|h_n\|_* + \hat{c}_n) \sum_{i=1}^k e^{-\sigma|x-\eta_i^n|}$$

Acomodando términos y tomando supremo concluimos que:

$$\|\phi_n\|_* \leq C (\|\phi_n\|_\infty + \|h_n\|_* + \hat{c}_n) \rightarrow 0$$

□

Ahora estamos en condiciones de probar la primera proposición de esta sección.

Proposición 3.4.1. *Existen constantes positivas R_0 y C tales que si los puntos $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ satisfacen*

$$R_0 < \eta_1, R_0 < \min_{1 \leq i < k} (\eta_{i+1} - \eta_i), \quad (3.33)$$

entonces para toda $h \in C[0, \infty)$ con $\|h\|_* < \infty$, el problema (3.31) admite una única solución, que llamaremos $T(h) := \phi$, la cual cumple:

$$\|T(h)\|_* \leq C \|h\|_*, \quad c_i \leq C \|h\|_*.$$

Demostración. Considere el espacio de Hilbert

$$H := \left\{ \phi \in H_0^1(0, \infty) \cap H^2(0, \infty) : \int_0^\infty Z_i \phi = 0, \forall i \in \{1, 2, \dots, k\} \right\}$$

dotado del producto interno:

$$(u, v)_H := \int_0^\infty u'' v'' + C_2 u' v' + C_0 u v dx + \frac{4}{N-4} u'(0) v'(0).$$

El cual es equivalente al producto interno usual de $H^2(0, \infty)$. Integrando la ecuación (3.31) contra una función $\psi \in H$ arbitraria obtenemos:

$$\int_0^\infty \left(\phi^{(4)} - C_2 \phi'' + C_0 \phi - p|V|^{p-1} \phi \right) \psi dx = \int_0^\infty h \psi dx + \int_0^\infty \sum_{i=1}^k c_i Z_i \psi dx$$

Aplicando la definición de H e integración por partes llegamos a la formulación débil:

$$(\phi, \psi)_H = \int_0^\infty p|V|^{p-1} \phi \psi dx + \int_0^\infty h \psi dx, \forall \psi \in H.$$

Definamos:

$$\tilde{h}(\psi) := \int_0^\infty h \psi dx, \quad K[\phi](\psi) := \int_0^\infty p|V|^{p-1} \phi \psi dx$$

Entonces claramente \tilde{h} y $K[\phi]$ son elementos de H^* . Gracias al teorema de representación de Riesz, la formulación débil puede ser escrita como:

$$\phi = K[\phi] + \tilde{h}. \quad (3.34)$$

Dado que K es un operador compacto, la alternativa de Fredholm nos dice que si

$$\phi = K[\phi] \quad (3.35)$$

Tiene solo la solución trivial, entonces (3.34) tiene una única solución. De esta manera, demostrar la primera parte de la proposición es equivalente a demostrar que si los puntos $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ satisfacen (3.33) con R_0 suficientemente grande entonces (3.35) tiene solo la solución trivial. Suponga que esto es falso. Entonces, para todo $n \in \mathbb{N}$ existen $\eta_1^n, \eta_2^n, \dots, \eta_k^n$ tales que:

$$n \leq \eta_1^n; \quad n \leq \min_{1 \leq i < k} (\eta_{i+1}^n - \eta_i^n)$$

de modo que (3.35) tiene una solución no trivial, la cual denotamos ϕ_n . Normalizando de ser necesario, podemos asumir que $\|\phi_n\|_\infty = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Note que estas ϕ_n cumplen

$$\int_0^\infty \left(\phi_n^{(4)} - C_2 \phi_n'' + C_0 \phi_n - p|V|^{p-1} \phi_n \right) \psi dx = \int_0^\infty \sum_{i=1}^k \hat{c}_i Z_i \psi dx, \quad \forall \psi \in H.$$

Para ciertas constantes \hat{c}_i . Luego, aplicando el lema 3.4.1 obtenemos que $\|\phi_n\|_\infty \rightarrow 0$, lo que es una contradicción. Se concluye que para R_0 suficientemente grande el problema (3.31) tiene una única solución, la cual denominaremos $T(h)$.

Ahora, demostraremos que si R_0 es suficientemente grande, T es continua. Ya vimos que T está bien definida para R_0 suficientemente grande, digamos para $R_0 \geq M$. Procediendo por contradicción, suponga que para todo $n \in \mathbb{N}$, existen $\eta_1^n, \eta_2^n, \dots, \eta_k^n$ y $\tilde{h}_n \in C[0, \infty)$ tales que:

$$M + n < \eta_1^n, \quad M + n < \min_{1 \leq i < k} (\eta_{i+1}^n - \eta_i^n), \quad \text{y} \quad \left\| T(\tilde{h}_n) \right\|_* > n \left\| \tilde{h}_n \right\|_*$$

Defina

$$\phi_n := \frac{T(\tilde{h}_n)}{\left\| T(\tilde{h}_n) \right\|_*}; \quad h_n := \frac{\tilde{h}_n}{\left\| T(\tilde{h}_n) \right\|_*}.$$

Luego, basta aplicar el corolario 3.4.1 a estas sucesiones para llegar a la contradicción.

Para demostrar que $|c_i| \leq C \|h\|_*$ basta notar lo siguiente:

$$\begin{aligned} L(\phi) &= h + \sum_{i=1}^k c_i Z_i \\ &\Rightarrow \sum_{i=1}^k c_i \int_0^\infty Z_i Z_j dx = \int_0^\infty L(\phi) Z_j dx - \int_0^\infty h Z_j dx \\ &\Rightarrow |c_j| \int_0^\infty Z_j^2 dx + o(1) = \int_0^\infty L(Z_j) \phi dx - \int_0^\infty h Z_j dx \\ &\Rightarrow |c_j| \leq C \left(\left| \int_0^\infty L(Z_j) \phi dx \right| + \left| \int_0^\infty h Z_j dx \right| \right) \\ &\Rightarrow |c_j| \leq C (\|\phi\|_* + \|h\|_*) \\ &\therefore |c_j| \leq C \|h\|_* \end{aligned}$$

Esto concluye la demostración. □

Ahora podemos extender este resultado al problema (3.30)

Proposición 3.4.2. *Existen constantes positivas $\varepsilon_0, \delta_0, R_0, C$ tales que si los puntos $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ satisfacen*

$$R_0 < \eta_1, \quad R_0 < \min_{1 \leq i < k} (\eta_{i+1} - \eta_i), \quad \eta_k < \frac{\delta_0}{\varepsilon} \tag{3.36}$$

entonces para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ y toda $h \in C[0, \infty)$ con $\|h\|_* < \infty$, el problema (3.30) admite una única solución, que llamaremos $T_\varepsilon(h) := \phi$, la cual cumple:

$$\|T_\varepsilon(h)\|_* \leq C \|h\|_*, \quad c_i \leq C \|h\|_*.$$

Demostración. Defina

$$P(\phi) := T(h + ((p - \varepsilon)|V|^{p-\varepsilon-1} - p|V|^{p-1})\phi)$$

Veamos que P es una contracción para ε suficientemente pequeño. Note primero que T es lineal gracias a la linealidad del operador L . Luego:

$$\begin{aligned} \|P(\phi_2) - P(\phi_1)\|_* &= \left\| T \left(((p - \varepsilon)|V|^{p-\varepsilon-1} - p|V|^{p-1}) (\phi_2 - \phi_1) \right) \right\|_* \\ &\leq C \left\| ((p - \varepsilon)|V|^{p-\varepsilon-1} - p|V|^{p-1}) (\phi_2 - \phi_1) \right\|_* \\ &\leq C \cdot o(1) \cdot \|\phi_2 - \phi_1\|_* \end{aligned}$$

De este modo, P tiene un único punto fijo en C_* , al cual llamaremos momentáneamente $\hat{\phi}$. Por definición tendremos que:

$$\hat{\phi} = T \left(h + ((p - \varepsilon)|V|^{p-\varepsilon-1} - p|V|^{p-1})\hat{\phi} \right).$$

Por la definición de T , tenemos entonces que $\hat{\phi}$ es la solución de la ecuación

$$\left\{ \begin{array}{l} L\hat{\phi} = h + ((p - \varepsilon)|V|^{p-\varepsilon-1} - p|V|^{p-1})\hat{\phi} + \sum_0^k c_i Z_i, \quad x \in (0, +\infty) \\ \hat{\phi}(0) = \lim_{x \rightarrow \infty} \hat{\phi}(x) = 0. \\ (N - 4)\hat{\phi}''(0) - 4\hat{\phi}'(0) = 0. \\ \int_0^\infty Z_i \hat{\phi} dx = 0. \end{array} \right. \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}$$

Re-acomodando obtenemos que $\hat{\phi}$ es solución de (3.30). Definimos $T_\varepsilon(\phi) = \hat{\phi}$. Por la definición y los resultados anteriores tendremos que:

$$\begin{aligned} \|T_\varepsilon(\phi)\|_* &= \|T(h + ((p - \varepsilon)|V|^{p-\varepsilon-1} - p|V|^{p-1})T_\varepsilon(\phi))\|_* \\ &\leq C \|h + ((p - \varepsilon)|V|^{p-\varepsilon-1} - p|V|^{p-1})T_\varepsilon(\phi)\|_* \\ &\leq C \|h\|_* + o(1) \|T_\varepsilon(\phi)\|_* \\ \therefore (1 - o(1)) \|T_\varepsilon(\phi)\|_* &\leq C \|h\|_* \end{aligned}$$

Escogiendo ε tal que $o(1) < \frac{1}{2}$ obtenemos que $\|T_\varepsilon(\phi)\|_* \leq 2C \|h\|_*$. Similarmente, de las constantes c_i podemos decir:

$$\begin{aligned} |c_i| &\leq C \|h + ((p - \varepsilon)|V|^{p-\varepsilon-1} - p|V|^{p-1})T_\varepsilon(\phi)\|_* \\ &\leq C \|h\|_* + o(1) \|T_\varepsilon(\phi)\|_* \\ &\leq C \|h\|_* + o(1) 2C \|h\|_* \\ &\leq 2C \|h\|_* \end{aligned}$$

□

En el siguiente lema estudiemos algunas propiedades de diferenciabilidad del operador T_ε respecto a las η_i .

Lema 3.4.2. *Suponga que se cumplen las condiciones de la proposición 3.4.2 y denote $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k) \in \mathbb{R}^k$. Entonces, el mapeo $\eta \rightarrow T_\varepsilon$ es de clase C^1 . Más aún, existe una constante $C > 0$ tal que:*

$$\|\nabla_\eta T_\varepsilon\|_{\mathcal{L}(C_*)} \leq C.$$

Uniformemente para los vectores $\eta \in \mathbb{R}^k$ que satisfagan

$$R_0 < \eta_1, R_0 < \min_{1 \leq i < k} (\eta_{i+1} - \eta_i), \eta_k < \frac{\delta_0}{\varepsilon}. \quad (3.37)$$

Demostración. Sea $h \in C_*$ fija y defina $\phi = T_\varepsilon(h)$. Sabemos que ϕ satisface la ecuación:

$$L_\varepsilon(\phi) = h + \sum_{i=1}^k c_i Z_i$$

para ciertas constantes c_i . Fijemos $l \in \{1, 2, \dots, k\}$. Diferenciando la expresión anterior con respecto a η_l obtenemos:

$$\begin{aligned} \partial_{\eta_l}(L_\varepsilon(\phi)) &= \partial_{\eta_l} \left(\sum_{i=1}^k c_i Z_i \right) \\ \Rightarrow \partial_{\eta_l} \left(\phi^{(4)} - C_2 \phi'' + C_0 \phi - (p - \varepsilon) e^{-\varepsilon x} |V|^{p-\varepsilon-1} \phi \right) &= \sum_{i=1}^k c_i (\partial_{\eta_l} Z_i) + \sum_{i=1}^k (\partial_{\eta_l} c_i) Z_i \\ \Rightarrow L_\varepsilon(\partial_{\eta_l} \phi) - (p - \varepsilon) e^{-\varepsilon x} \partial_{\eta_l} (|V|^{p-\varepsilon-1}) \phi &= c_l \partial_{\eta_l} Z_l + \sum_{i=1}^k (\partial_{\eta_l} c_i) Z_i \end{aligned}$$

Considere constantes b_i tales que:

$$\sum_{i=1}^k b_i \int_0^\infty Z_i Z_j dx = \int_0^\infty \phi \partial_{\eta_l} Z_j dx, \quad \forall j \in \{1, 2, \dots, k\}. \quad (3.38)$$

Estas constantes existen pues el sistema lineal asociado es diagonal dominante. Defina además:

$$f := \sum_{i=1}^k b_i L_\varepsilon(Z_i) + c_l \partial_{\eta_l} Z_l + (p - \varepsilon) e^{-\varepsilon x} \partial_{\eta_l} (|V|^{p-\varepsilon-1}) \phi$$

Luego, del desarrollo anterior concluimos que:

$$L_\varepsilon \left(\partial_{\eta_l} \phi + \sum_{i=1}^k b_i Z_i \right) = f + \sum_{i=1}^k (\partial_{\eta_l} c_i) Z_i.$$

Sea $g = \partial_{\eta_l} \phi + \sum_{i=1}^k b_i Z_i$. Note que, por la elección de las constantes b_i , para todo $j \in \{1, 2, \dots, k\}$ se tiene que:

$$\begin{aligned} \int_0^\infty g Z_j dx &= \int_0^\infty \partial_{\eta_l} \phi Z_j dx + \sum_{i=1}^k b_i \int_0^\infty Z_i Z_j dx \\ &= \int_0^\infty \partial_{\eta_l} \phi Z_j dx + \int_0^\infty \phi \partial_{\eta_l} Z_j dx \\ &= 0. \end{aligned}$$

Es decir, g cumple las condiciones de ortogonalidad. Es sencillo ver que g también cumple las condiciones de frontera. De este modo, por la definición de T_ε tenemos que $T_\varepsilon(f) = g$. Re-acomodando obtenemos la siguiente expresión para $\partial_{\eta_l} \phi$:

$$\partial_{\eta_l} \phi = T_\varepsilon(f) - \sum_{i=1}^k b_i Z_i \quad (3.39)$$

Ahora veamos que $\|f\|_* \leq C \|h\|_*$ y $|b_l| \leq C \|\phi\|_*$. En primer lugar, reemplazando $j = l$ en (3.38) obtenemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k b_i \int_0^\infty Z_i Z_l dx &= \int_0^\infty \phi \partial_{\eta_l} Z_l dx \\ \Rightarrow |b_l| \int_0^\infty |Z_l|^2 dx &= \left| \int_0^\infty \phi \partial_{\eta_l} Z_l dx - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^k b_i \int_0^\infty Z_i Z_l dx \right| \\ &\leq \|\phi\|_\infty \int_0^\infty |\partial_{\eta_l} Z_l| dx + o(1) \\ &\leq C \|\phi\|_* + o(1) \end{aligned}$$

Y por ende $|b_l| \leq C \|\phi\|_*$. Si tomamos $j \neq l$ en (3.38) llegamos a que

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k b_i \int_0^\infty Z_i Z_j dx &= \int_0^\infty \phi \partial_{\eta_j} Z_j dx = 0 \\ \Rightarrow |b_j| \int_0^\infty |Z_j|^2 dx &= \left| \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq l}}^k b_i \int_0^\infty Z_i Z_l dx \right| = o(1) \end{aligned}$$

Por lo que $|b_j| \rightarrow 0$ para R grande. De la definición de f es directo que:

$$\|f\|_* \leq \sum_{i=1}^k \|b_i L_\varepsilon(Z_i)\|_* + \|c_l \partial_{\eta_l} Z_l\|_* + p \|\partial_{\eta_l} (|V|^{p-\varepsilon-1}) \phi\|_*$$

Para acotar el primer término notamos que $L_\varepsilon(Z_i)$ es acotado. En efecto:

$$\begin{aligned} L_\varepsilon(Z_i) &= Z_i^{(4)} - C_2 Z_i'' + C_0 Z_i - (p-\varepsilon)e^{-\varepsilon x} |V|^{p-\varepsilon-1} Z_i \\ &= pW^{p-1}(x-\eta_i)W'(x-\eta_i) - (p-\varepsilon)e^{-\varepsilon x} |V|^{p-\varepsilon-1} Z_i. \end{aligned}$$

Así,

$$\sum_{i=1}^k \|b_i L_\varepsilon(Z_i)\|_* \leq C \sum_{i=1}^k |b_i| \leq C \|\phi\|_* \leq C \|h\|_*$$

Los otros términos se pueden acotar de manera sencilla. Concluimos que $\|f\|_* \leq C \|h\|_*$ y $|b_l| \leq C \|\phi\|_*$. De (3.39) concluimos que:

$$\|\partial_{\eta_l} \phi\|_* \leq C \|h\|_*$$

Dado que la elección de l fue arbitraria, podemos escribir:

$$\|\nabla_\eta T_\varepsilon(h)\|_* \leq \sum_{i=1}^k \|\partial_{\eta_i} T_\varepsilon(h)\|_* \leq C \|h\|_*$$

Sigue el resultado deseado. □

En lo que resta de la sección consideraremos que las η_i cumplen las condiciones requeridas en los lemas anteriores, que por comodidad escribiremos de la siguiente forma:

$$\begin{cases} \eta_1 > \frac{1}{2} \log\left(\frac{1}{M\varepsilon}\right), \log\left(\frac{1}{M\varepsilon}\right) < \min_{1 \leq i < k} (\eta_{i+1} - \eta_i), \\ \eta_k < k \log\left(\frac{1}{M\varepsilon}\right). \end{cases} \quad (3.40)$$

Donde M es una constante positiva. Es posible demostrar que si suponemos $N < 12$, escogemos σ suficientemente pequeño a priori y consideramos $\|\phi\|_* \leq \frac{1}{4}$ entonces existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ se cumple que:

$$\|N_\varepsilon(\phi)\|_* \leq C \|\phi\|_*^{\min\{p-\varepsilon, 2\}}, \quad \|D_\phi N_\varepsilon(\phi)\|_{\mathcal{L}(C_*)} \leq C \|\phi\|_*^{\min\{p-\varepsilon-1, 1\}}, \quad \|R_\varepsilon\|_* \leq C\varepsilon^{\tilde{\sigma}}. \quad (3.41)$$

donde $\tilde{\sigma} \in (\frac{1}{2}, 1)$ (ver lemas [B.1.9](#) y [B.1.10](#)). Con esto estamos en condiciones de probar el resultado principal de esta sección.

Proposición 3.4.3. *Suponga que $N < 12$. Entonces, existen constantes $C > 0$ y $\varepsilon_0 > 0$ tales que si $\varepsilon_0 > \varepsilon > 0$ y los puntos $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ satisfacen (3.40), entonces existe una única solución $\phi = \phi(\eta)$ del problema (3.29), la cual satisface:*

$$\|\phi\|_* \leq C\varepsilon^{\tilde{\sigma}}, \quad \|\nabla_\eta \phi\|_* \leq C\varepsilon^{\tilde{\sigma}}.$$

donde $\tilde{\sigma} \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Demostración. Sea $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño y sea $\hat{\eta} \in \mathbb{R}^k$ fijo que cumpla (3.40). Defina $\mathcal{A}_\varepsilon(\phi) := T_\varepsilon(N_\varepsilon(\phi) + R_\varepsilon)$. Es directo de la definición de T_ε que si ϕ es un punto fijo de \mathcal{A}_ε entonces es solución del problema (3.29). Demostraremos que \mathcal{A}_ε es una contracción en una región adecuada para concluir que tiene un único punto fijo. Para $r > 0$ defina:

$$\mathcal{F}_r := \{\phi \in C[0, \infty) \mid \|\phi\|_* \leq r\varepsilon^{\tilde{\sigma}}\}$$

Por la proposición [3.4.2](#) y las estimaciones de (3.41) tenemos que:

$$\|\mathcal{A}_\varepsilon(\phi)\|_* \leq C \|N_\varepsilon(\phi) + R_\varepsilon\|_* \leq C \left(\|\phi\|_*^{\min\{p-\varepsilon, 2\}} + \varepsilon^{\tilde{\sigma}} \right) \leq r\varepsilon^{\tilde{\sigma}} \quad \forall \phi \in \mathcal{F}_r.$$

donde en la última desigualdad consideramos r adecuado. Luego $\mathcal{A}_\varepsilon(\mathcal{F}_r) \subseteq \mathcal{F}_r$. Note además que \mathcal{F}_r es un conjunto convexo y por la estimación (3.41) se tiene que $\|D_\phi N_\varepsilon(\phi)\|_{\mathcal{L}(C_*)} \leq C\varepsilon^{\tilde{\sigma} \min\{p-\varepsilon_0-1, 1\}}$. Por el teorema de incrementos finitos, se tiene que:

$$\|N_\varepsilon(\phi_2) - N_\varepsilon(\phi_1)\|_* \leq C\varepsilon^{\tilde{\sigma} \min\{p-\varepsilon_0-1, 1\}} \|\phi_2 - \phi_1\|_* \quad \forall \phi_1, \phi_2 \in \mathcal{F}_r.$$

Así, N_ε es una contracción en la región \mathcal{F}_r para ε suficientemente pequeño, y por lo tanto \mathcal{A}_ε también lo es. El teorema del punto fijo de Banach nos permite concluir que existe cierto $\hat{\phi} \in \mathcal{F}_r$ (que depende de $\hat{\eta}$) punto fijo de \mathcal{A}_ε , y por lo tanto solución del problema (3.29).

Para estudiar la diferenciabilidad, consideramos el funcional:

$$B(\eta, \phi) = \phi - T_\varepsilon(\eta, N_\varepsilon(\eta, \phi) + R_\varepsilon(\eta)).$$

Donde ahora estamos dejando clara la dependencia de η de las funciones T_ε , N_ε y R_ε . Por lo hecho anteriormente tenemos $B(\hat{\eta}, \hat{\phi}) = 0$. Además, mediante cálculo directo obtenemos:

$$D_\phi B(\eta, \phi)[\psi] = \psi - D_\phi T_\varepsilon(\eta, N_\varepsilon(\eta, \phi) + R_\varepsilon(\eta)) \circ D_\phi N_\varepsilon(\eta, \phi)[\psi] = \psi - T_\varepsilon(\eta, D_\phi N_\varepsilon(\eta, \phi)[\psi])$$

Nuevamente, gracias a las estimaciones de la proposición (3.4.2) y de (3.41) tenemos que:

$$\|T_\varepsilon(\eta, D_\phi N_\varepsilon(\eta, \phi)[\psi])\|_* \leq C \|D_\phi N_\varepsilon(\eta, \phi)[\psi]\|_* \leq C \|\phi\|_*^{\min\{p-\varepsilon_0-1, 1\}} \|\psi\|_* = o(1) \|\psi\|_*$$

Luego, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeño $D_\phi B(\eta, \phi)$ es invertible. Por el teorema de la función implícita existe $\mathcal{V} \subseteq \mathbb{R}^k$ vecindad de $\hat{\eta}$ y una función $\phi : \mathcal{V} \rightarrow C_*$ tal que:

$$\phi(\hat{\eta}) = \hat{\phi}, \quad \phi(\eta) = T_\varepsilon(\eta, N_\varepsilon(\eta, \phi) + R_\varepsilon(\eta)), \quad \forall \eta \in \mathcal{V}. \quad (3.42)$$

Además, la función ϕ es continuamente diferenciable. Diferenciando la segunda expresión en (3.42) obtenemos:

$$\begin{aligned} \nabla_\eta \phi(\eta) &= \nabla_\eta T_\varepsilon(\eta, N_\varepsilon(\eta, \phi) + R_\varepsilon(\eta)) + D_\phi T_\varepsilon(\eta, N_\varepsilon(\eta, \phi) + R_\varepsilon(\eta)) \circ (\nabla_\eta N_\varepsilon(\eta, \phi) + \nabla_\eta R_\varepsilon(\eta)) \\ &= \nabla_\eta T_\varepsilon(\eta, N_\varepsilon(\eta, \phi) + R_\varepsilon(\eta)) + T_\varepsilon(\eta, \nabla_\eta N_\varepsilon(\eta, \phi)) + T_\varepsilon(\eta, \nabla_\eta R_\varepsilon(\eta)) \end{aligned}$$

Por lo tanto, gracias a los lemas :

$$\|\nabla_\eta \phi(\eta)\|_* \leq C \|N_\varepsilon(\eta, \phi) + R_\varepsilon(\eta)\|_* + C \|\nabla_\eta N_\varepsilon(\eta, \phi) + \nabla_\eta R_\varepsilon(\eta)\|_* \leq C\varepsilon^{\bar{\sigma}}$$

Lo que concluye la demostración. \square

Observación 3.4.1. *La suposición de que $N < 12$ es necesaria para asegurar que $p - 2 > 0$, hecho que necesitamos en una parte muy puntual de la demostración del lema B.1.9. Creemos fuertemente que esta suposición puede ser relajada, extendiendo el resultado a todo $N \geq 5$. Bastaría establecer la desigualdad:*

$$\|\nabla_\eta N_\varepsilon(\phi)\|_* \leq C \|\phi\|_*$$

3.5. Reducción finito dimensional

En la sección anterior demostramos que dado un vector $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$ que satisfaga las condiciones (3.40) existe una única solución ϕ y ciertas constantes c_i tales que se cumple la ecuación (3.29). Si logramos hallar un vector $\eta \in \mathbb{R}^k$ tal que las constantes c_i asociadas sean todas nulas, entonces $V + \phi$ será solución a la ecuación (3.7), que es precisamente lo que necesitamos. En esta sección abordaremos ese problema.

Defina

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\eta) := I_\varepsilon(V + \phi),$$

Donde ϕ es la solución de (3.29) asociada a η . Se tiene lo siguiente:

Lema 3.5.1. *Un vector $\eta = (\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k)$ que satisfaga las condiciones (3.40) es punto crítico del funcional \mathcal{I}_ε si y solo si sus constantes asociadas $c_i(\eta)$ son todas nulas.*

Demostración. Debemos demostrar una doble implicancia. Suponga primero que η satisface (3.40) y es tal que todas las constantes $c_i(\eta)$ son nulas. Luego, por definición la función $V + \phi(\eta)$ es solución de la ecuación (3.29) y por lo tanto:

$$\nabla_\eta I_\varepsilon(V + \phi(\eta)) = 0.$$

Por cálculo directo se obtiene que:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} \mathcal{I}_\varepsilon(\eta) = DI_\varepsilon(V + \phi) \left[\frac{\partial}{\partial \eta_i} (V + \phi) \right], \quad (3.43)$$

y por lo tanto $\frac{\partial}{\partial \eta_i} \mathcal{I}_\varepsilon(\eta) = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$, es decir, η es punto crítico de \mathcal{I}_ε .

Por otro lado, suponga ahora que η satisface (3.40) y es punto crítico de \mathcal{I}_ε . Fijemos $l \in \{1, 2, \dots, k\}$. Por hipótesis se tiene que:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_l} \mathcal{I}_\varepsilon(\eta) = 0$$

Por (3.43) tenemos que:

$$DI_\varepsilon(V + \phi) \left[\frac{\partial}{\partial \eta_l} (V + \phi) \right] = 0$$

Denotando $\vartheta := \frac{\partial}{\partial \eta_l} \phi(\eta)$ podemos reescribir esto como:

$$DI_\varepsilon(V + \phi) [Z_l + \vartheta] = 0$$

Por las estimaciones de la proposición 3.4.3, sabemos que $\|\vartheta\|_* \rightarrow 0$ cuando $\varepsilon \rightarrow 0$. Note que existen constantes $b_1^l, b_2^l, \dots, b_k^l$ tales que:

$$\int_0^\infty \vartheta Z_i = \sum_{j=1}^k b_j^l \int_0^\infty Z_i Z_j \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Esto último pues el sistema lineal asociado es diagonal dominante para ε suficientemente pequeño. Dado que $\|\vartheta\|_* \rightarrow 0$, entonces $b_i^l \rightarrow 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Con esto, podemos reescribir ϑ como:

$$\vartheta = \sum_{j=1}^k b_j^l Z_j + \left(\vartheta - \sum_{j=1}^k b_j^l Z_j \right) =: \vartheta_1 + \vartheta_2$$

Por construcción, $\vartheta_1 \in \text{Span}\{Z_1, Z_2, \dots, Z_k\}$ y

$$\int_0^\infty \vartheta_2 Z_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Esto último implica que $DI_\varepsilon(V + \phi) [\vartheta_2] = 0$. De este modo,

$$DI_\varepsilon(V + \phi) \left[(1 + b_l^l) Z_l + \sum_{j \neq l} b_j^l Z_j \right] = 0.$$

Como la elección de l fue arbitraria, en general existirán constantes b_j^i pequeñas tales que:

$$DI_\varepsilon(V + \phi) \left[(1 + b_i^i)Z_i + \sum_{j \neq i} b_j^i Z_j \right] = 0. \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Definiendo $a_i = DI_\varepsilon(V + \phi)[Z_i]$ obtenemos el siguiente sistema:

$$\begin{pmatrix} 1 + b_1^1 & b_2^1 & \dots & b_k^1 \\ b_1^2 & 1 + b_2^2 & \dots & b_k^2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_1^k & b_2^k & \dots & 1 + b_k^k \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_k \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Este sistema es diagonal dominante y por lo tanto:

$$DI_\varepsilon(V + \phi)[Z_i] = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Utilizando la definición de I_ε e integrando por partes llegamos a que:

$$\int_0^\infty \left((V + \phi)^{(4)} - C_2(V + \phi)'' + C_0(V + \phi) - e^{-\varepsilon x} |V + \phi|^{p-\varepsilon-1}(V + \phi) \right) Z_i = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

De la definición de $\phi(\eta)$ sigue que:

$$\int_0^\infty \sum_{j=1}^k c_j Z_i Z_j = 0 \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Así, concluimos que $c_i(\eta) = 0$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. □

El siguiente lema nos permite aproximar puntos críticos del funcional \mathcal{I}_ε .

Lema 3.5.2. *Se tiene que:*

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\eta) = I_\varepsilon(V) + o(\varepsilon)$$

Donde $o(\varepsilon)$ es uniforme en el sentido C^1 para todos los $\eta \in \mathbb{R}^k$ que satisfagan (3.40), con M dado.

Demostración. Defina la función $f(t) = I_\varepsilon(V + t\phi)$. De la definición de derivada es fácil notar que:

$$f'(t) = DI_\varepsilon(V + t\phi)[\phi], \quad f''(t) = D^2I_\varepsilon(V + t\phi)[\phi][\phi].$$

Además, por integración por partes tenemos que:

$$\int_0^1 f''(t)t dt = f'(t)t \Big|_0^1 - \int_0^1 f'(t) dt = f'(1) - f(1) + f(0).$$

Reemplazando y utilizando el hecho de que $f'(1) = I_\varepsilon(V + \phi)[\phi] = 0$, pues $(V + \phi)$ es solución de la ecuación (3.29), obtenemos:

$$I_\varepsilon(V + \phi) - I_\varepsilon(V) = - \int_0^1 t D^2I_\varepsilon(V + t\phi)[\phi][\phi] dt$$

Por otro lado, vía cálculo directo se puede hallar la siguiente expresión para $f''(t)$:

$$\begin{aligned}
f''(t) &= \int_0^\infty (\phi'')^2 + C_2(\phi')^2 + C_0\phi^2 dx + \frac{4}{N-4}|\phi'(0)|^2 - (p-\varepsilon) \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} |V + t\phi|^{p-\varepsilon-1} \phi^2 dx \\
&= \int_0^\infty (\phi^{(4)} - C_2\phi'' + C_0\phi)\phi dx - (p-\varepsilon) \int_0^\infty e^{-\varepsilon x} |V + t\phi|^{p-\varepsilon-1} \phi^2 dx \\
&= \int_0^\infty L_\varepsilon(\phi)\phi + (p-\varepsilon)e^{-\varepsilon x} (|V|^{p-\varepsilon-1} - |V + t\phi|^{p-\varepsilon-1}) \phi^2 dx \\
&= \int_0^\infty (N_\varepsilon(\phi) + R_\varepsilon)\phi + (p-\varepsilon)e^{-\varepsilon x} (|V|^{p-\varepsilon-1} - |V + t\phi|^{p-\varepsilon-1}) \phi^2 dx
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$|I_\varepsilon(V + \phi) - I_\varepsilon(V)| = \left| \int_0^1 t \int_0^\infty (N_\varepsilon(\phi) + R_\varepsilon)\phi + (p-\varepsilon)e^{-\varepsilon x} (|V|^{p-\varepsilon-1} - |V + t\phi|^{p-\varepsilon-1}) \phi^2 dx dt \right| \quad (3.44)$$

Dado que $\|\phi\|_* \leq C\varepsilon^{\tilde{\sigma}}$, $\|R_\varepsilon\|_* \leq C\varepsilon^{\tilde{\sigma}}$ y $\|N_\varepsilon(\phi)\|_* \leq C\varepsilon^{\tilde{\sigma}}$, entonces:

$$|I_\varepsilon(V + \phi) - I_\varepsilon(V)| \leq C\varepsilon^{2\tilde{\sigma}}.$$

Como $\tilde{\sigma} \in (\frac{1}{2}, 1)$, concluimos que

$$I_\varepsilon(V + \phi) - I_\varepsilon(V) = o(\varepsilon).$$

En cuanto a la diferenciabilidad, directamente de (3.44) tenemos:

$$\begin{aligned}
&\left| \frac{\partial}{\partial \eta_i} (I_\varepsilon(V + \phi) - I_\varepsilon(V)) \right| \\
&= \left| \int_0^1 t \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial \eta_i} [(N_\varepsilon(\phi) + R_\varepsilon)\phi] + (p-\varepsilon)e^{-\varepsilon x} \frac{\partial}{\partial \eta_i} [(|V|^{p-\varepsilon-1} - |V + t\phi|^{p-\varepsilon-1}) \phi^2] dx dt \right|
\end{aligned}$$

Una aplicación de la regla de la cadena y las estimaciones de la proposición 3.4.3 y los lemas B.1.9 y B.1.10 nos permiten concluir que:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \eta_i} (I_\varepsilon(V + \phi) - I_\varepsilon(V)) \right| \leq C\varepsilon^{2\tilde{\sigma}} = o(\varepsilon).$$

y por lo tanto

$$\nabla_\eta \mathcal{I}_\varepsilon(\eta) = \nabla_\eta I_\varepsilon(V) + o(\varepsilon).$$

□

3.6. Demostración del resultado principal

Por último, en esta sección demostraremos el resultado principal de este capítulo:

Demostración. (Teorema 3.1.1) Por los resultados anteriores, basta hallar un punto crítico de $\mathcal{I}_\varepsilon(\eta)$. Por los lemas (3.3.1) y (3.5.2):

$$\mathcal{I}_\varepsilon(\eta(\Lambda)) = I_\varepsilon(V) + o(\varepsilon) = k\theta_1 + \varepsilon\Psi_k(\Lambda) - \frac{k^2}{2}\theta_4\varepsilon \log \varepsilon + \theta_5\varepsilon + \varepsilon\beta_\varepsilon(\Lambda) + o(\varepsilon).$$

Y por lo tanto:

$$\varepsilon^{-1}\nabla\mathcal{I}_\varepsilon(\eta(\Lambda)) = \nabla\Psi_k(\Lambda) + o(1)$$

Veamos que Ψ tiene un mínimo no degenerado. Calculando las primeras derivadas:

$$\begin{aligned}\frac{\partial\Psi}{\partial\Lambda_1} &= -2\frac{\theta_2}{\Lambda_1^3} + k\frac{\theta_4}{\Lambda_1}, \\ \frac{\partial\Psi}{\partial\Lambda_i} &= -(k-i+1)\frac{\theta_4}{\Lambda_i} + \theta_3, \quad \forall i \geq 2.\end{aligned}$$

Y por lo tanto, Ψ tiene un punto crítico en:

$$\bar{\Lambda} = \left(\sqrt{\frac{2\theta_2}{k\theta_4}}, (k-1)\frac{\theta_4}{\theta_3}, (k-2)\frac{\theta_4}{\theta_3}, \dots, \frac{\theta_4}{\theta_3} \right)$$

En cuanto a las segundas derivadas, cálculos sencillos nos muestran que:

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\Psi}{\partial\Lambda_1^2} &= 6\frac{\theta_2}{\Lambda_1^4} - k\frac{\theta_4}{\Lambda_1^2}, \\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial\Lambda_i\partial\Lambda_1} &= 0, \quad \forall i \geq 2, \\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial\Lambda_i^2} &= (k-i+1)\frac{\theta_4}{\Lambda_i^2}, \quad \forall i \geq 2, \\ \frac{\partial^2\Psi}{\partial\Lambda_j\partial\Lambda_i} &= 0, \quad \forall i \geq 2, j \geq 2, i \neq j.\end{aligned}$$

y por ende, la matriz Hessiana de Ψ está dada por:

$$\nabla^2\Psi(\Lambda) = \begin{pmatrix} 6\frac{\theta_2}{\Lambda_1^4} - k\frac{\theta_4}{\Lambda_1^2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 2(k-1)\frac{\theta_4}{\Lambda_2^2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2\frac{\theta_4}{\Lambda_k^2} \end{pmatrix}$$

Evaluando en el punto crítico obtenemos:

$$\nabla^2\Psi(\bar{\Lambda}) = \begin{pmatrix} \frac{k^2\theta_4^2}{\theta_2} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \frac{2}{k-1}\frac{\theta_3^2}{\theta_4} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 2\frac{\theta_3^2}{\theta_4} \end{pmatrix}$$

De este modo, concluimos que $\bar{\Lambda}$ es un mínimo de Ψ no degenerado. Esto último implica que:

$$\deg(\nabla\Psi, \mathcal{V}, 0) \neq 0 \quad \forall \mathcal{V} \text{ vecindad pequeña de } \bar{\Lambda}$$

Luego, gracias a la continuidad del grado de Brauer respecto a la función, podemos hallar puntos Λ^* de la forma

$$\Lambda^* = \bar{\Lambda} + o(1)$$

tales que:

$$\varepsilon^{-1} \nabla \mathcal{I}_\varepsilon(\eta(\Lambda^*)) = 0$$

Por construcción, las funciones $w = V + \phi(\eta(\Lambda^*))$ son soluciones de (3.7). Devolviéndonos en el cambio de variables, obtenemos:

$$u_{k,\varepsilon}(r) = K_N \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} a_i \varepsilon^{-(i-\frac{1}{2})} \left(\frac{1}{1 + \left(a_i \varepsilon^{-(i-\frac{1}{2})} \right)^{\frac{4}{N-4}} r^2} \right)^{\frac{N-4}{2}} + O(\varepsilon^{\frac{1}{2}})$$

donde

$$a_1 = \Lambda_1^*, \quad a_i = \frac{\Lambda_1^*}{\Lambda_2^* \cdot \Lambda_2^* \cdot \dots \cdot \Lambda_i^*} \quad \forall i \geq 2$$

□

Conclusiones

Cerramos el trabajo presentando las conclusiones de lo desarrollado en las secciones anteriores y comentando posibles líneas de investigación futuras.

Conclusiones

Respecto al primer problema, concluimos que en efecto las soluciones clásicas de la ecuación de Hénon-Hardy son radialmente simétricas respecto al origen. En un principio abordamos este problema con la idea de reproducir los resultados de C.-S. Lin en ([15]), donde se demuestra que las soluciones clásicas de (1.10) con exponente crítico son de la forma:

$$u_{\lambda, x_0}(x) = C_N \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + |x - x_0|^2} \right)^{\frac{N-4}{2}}.$$

Sabíamos que sería difícil hallar una fórmula explícita, pues en ([15]) simplemente se propone esa forma y luego se demuestra unicidad. Por esto, el objetivo era al menos demostrar que las soluciones tenían una tasa de decaimiento adecuada. Las soluciones halladas por [15] decaen como:

$$u(x) \sim |x|^{4-N}, \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty.$$

Por lo que se buscaba que en el caso de la ecuación de Hénon-Hardy se obtuviera un decaimiento similar. Sin embargo, el método de planos móviles sólo permitió demostrar la simetría radial, pues para probar decaimiento se requería que la ecuación fuera invariante bajo traslaciones, dificultad que no se puede sortear.

A pesar de que el resultado obtenido ya se conocía de antes (ver [17]), creemos que existe valor en el capítulo 2 a modo de ejemplo de aplicación del método de planos móviles, razón por la que se decidió incluirlo en este trabajo de todas formas.

En cuanto al segundo problema, podemos decir que se logró aplicar satisfactoriamente el método de reducción de Lyapunov-Schmidt para extender el trabajo de [5] a la ecuación de tipo Lane-Emden de cuarto orden, logrando hallar soluciones para el caso ligeramente sub-crítico con una cantidad arbitraria de nodos.

Es importante resaltar que, si bien en [8] se halló el mismo resultado para dominios más generales, allí se trabajó directamente en \mathbb{R}^N , sin pasar a la ecuación radial ni aplicar la transformación de tipo Emden-Fowler. Cabe señalar que el método usado en [8] no es lo suficientemente versátil como para adaptarlo a problemas cercanos al aquí abordado. Sin embargo, nuestro enfoque sí puede ser fácilmente adaptado a otros problemas similares, como comentaremos en la siguiente subsección.

Por último, nos gustaría resaltar que la aplicación del método de Lyapunov-Schmidt requiere estimaciones muy técnicas, las cuales varían de ecuación en ecuación. En el anexo B se encuentran diversas cuentas asociadas al operador bilaplaciano, la burbuja transformada W , las proyecciones Π_i , etcétera. Creemos que estas cuentas serán valiosas para trabajos futuros ligados a todo tipo de ecuaciones con el operador bilaplaciano.

Trabajos Futuros

Como mencionamos en la introducción, en la última revisión bibliográfica se halló un trabajo muy reciente [20], donde se logró demostrar que (1.10) tiene soluciones clásicas radiales que decaen de la forma:

$$u(x) \sim |x|^{\frac{4-N}{2}}, \quad \text{cuando } |x| \rightarrow \infty.$$

Este decaimiento es distinto al que se esperaría teniendo en cuenta que para las burbujas del laplaciano (1.5) y de la ecuación de Hénon-Hardy (1.8) se tiene el decaimiento $u(x) \sim |x|^{2-N}$ y para las burbujas del bilaplaciano (1.11) se tiene $u(x) \sim |x|^{4-N}$. Una buena pregunta es si este decaimiento puede ser mejorado al decaimiento esperado. De no ser así, de todos modos valdría la pena evaluar si el decaimiento obtenido [20] permite aplicar el método de reducción de Lyapunov-Schmidt a la ecuación de tipo Hénon-Hardy de cuarto orden en un dominio acotado, con condiciones de frontera de Navier:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = |x|^\alpha |u(x)|^{\frac{8+2\alpha}{N-4}} u(x) & \text{en } B_1, \\ u(x) = \Delta u(x) = 0 & \text{sobre } \partial B_1. \end{cases}$$

Evidentemente, para esto último se requeriría además de un resultado de no-degenerancia, el cual es de interés en sí mismo.

Por otro lado, en cuanto al segundo resultado, creemos que se puede aplicar la misma metodología empleada al problema de dominio exterior:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = |u(x)|^{\frac{8}{N-4} + \varepsilon} u(x) & \text{en } \mathbb{R}^N \setminus B_1, \\ u(x) = \Delta u(x) = 0 & \text{sobre } \partial B_1, \end{cases}$$

de manera análoga a lo que se hace en [5].

Del mismo modo, creemos que nuestro resultado puede extenderse a un resultado de tipo Brézis-Nirenberg levemente supercrítico:

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) = u(x)^{\frac{N+4}{N-4} + \varepsilon} + \lambda u(x) & \text{en } B_1, \\ u(x) > 0 & \text{en } B_1, \\ u(x) = \Delta u(x) = 0 & \text{sobre } \partial B_1. \end{cases}$$

Por último, creemos fuertemente que nuestro resultado es válido para todo el rango $N \geq 5$, pues la restricción $N < 12$ ha sido sorteada en otros trabajos mediante artilugios técnicos que aquí se podrían adaptar.

Por todo lo anteriormente expuesto, creemos que este trabajo constituye un punto de partida para diversas investigaciones futuras.

Apéndice A

Anexo A

A.1. Principios del Máximo y de Comparación

En esta sección se recopilan algunos resultados importantes relacionados al bilaplaciano.

Proposición A.1.1. *Sea Ω un conjunto abierto y acotado y sea $u \in C^4(\Omega) \cap C^3(\bar{\Omega})$ tal que*

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) \geq 0 & \text{en } \Omega \\ \Delta u \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega \\ u \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Entonces $u \geq 0$ en Ω .

Demostración. Defina la función $v = \Delta u$. Luego, es claro que:

$$\begin{cases} \Delta v(x) \geq 0 & \text{en } \Omega \\ v \leq 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

De este modo, v es subarmónica en Ω y por lo tanto alcanza su máximo en la frontera. De esta manera, para todo $x \in \Omega$ tenemos:

$$v(x) \leq \max_{y \in \bar{\Omega}} v(y) = \max_{y \in \partial\Omega} v(y) \leq 0$$

De esto y la condición de Navier obtenemos:

$$\begin{cases} \Delta u(x) \leq 0 & \text{en } \Omega \\ u \geq 0 & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Así, u es una función superarmónica en Ω y por lo tanto alcanza su mínimo en la frontera. Sigue que

$$u(x) \geq \min_{y \in \bar{\Omega}} u(y) = \min_{y \in \partial\Omega} u(y) \geq 0, \quad \forall x \in \Omega$$

□

Proposición A.1.2. Sea Ω un conjunto abierto y acotado y sean $u, v \in C^4(\Omega) \cap C^3(\bar{\Omega})$ tales que

$$\begin{cases} \Delta^2 u(x) \geq \Delta^2 v(x) & \text{en } \Omega \\ \Delta u \leq \Delta v & \text{sobre } \partial\Omega \\ u \geq v & \text{sobre } \partial\Omega \end{cases}$$

Entonces $u \geq v$ en Ω .

Demostración. Aplicar la proposición [A.1.1](#) a la función $w := u - v$. □

Apéndice B

Anexo B

B.1. Lemas Técnicos

En esta sección se exhiben detalladamente resultados auxiliares de carácter técnico.

Lema B.1.1. *Sea $u \in C^4(\mathbb{R})$ una función. Si definimos*

$$w(x) := \mathcal{T}[u](x),$$

Entonces se cumple que:

$$\begin{aligned} u'(r) &= \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N-4}{2}} e^{(1-1/a)x} (aw(x) + aw'(x)) \\ u''(r) &= \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N-4}{2}} e^{(1-2/a)x} ((a^2 - a)w(x) + (2a^2 - a)w'(x) + a^2w''(x)) \\ u'''(r) &= \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N-4}{2}} e^{(1-3/a)x} ((a^3 - 3a^2 + 2a)w(x) + (3a^3 - 6a^2 + 2a)w'(x) \\ &\quad + (3a^3 - 3a^2)w''(x) + a^3w'''(x)) \\ u^{(4)}(r) &= \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N-4}{2}} e^{(1-4/a)x} ((a^4 - 6a^3 + 11a^2 - 6a)w(x) + (4a^4 - 18a^3 + 22a^2 - 6a)w'(x) \\ &\quad + (6a^4 - 18a^3 + 11a^2)w''(x) + (4a^4 - 6a^3)w'''(x) + a^4w^{(4)}(x)) \end{aligned}$$

donde $r = e^{\frac{x}{a}}$. Además, si extendemos u a \mathbb{R}^N de manera radial (abusando de la notación, $u(y) = u(|y|)$), Entonces:

$$\Delta u(y) = \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N}{2}} e^{(1-2/a)x} \left(w''(x) - \frac{4}{N-4}w'(x) - \frac{N}{(N-4)}w(x) \right)$$

y

$$\Delta^2 u(y) = \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N+4}{2}} e^{2x} \left(w^{(4)}(x) - C_2w''(x) + C_0w(x) \right)$$

Demostración. Por definición:

$$w(x) = \left(\frac{2}{N-4} \right)^{\frac{N-4}{2}} e^{-x} u(e^{\frac{x}{a}}).$$

Despejando y usando la relación $r = e^{\frac{x}{a}}$ tenemos:

$$u(r) = \left(\frac{N-4}{2} \right)^{\frac{N-4}{2}} r^a w(a \log r).$$

Derivando obtenemos:

$$\begin{aligned} u'(r) &= \left(\frac{N-4}{2} \right)^{\frac{N-4}{2}} \left(ar^{a-1} w(a \log r) + r^a w'(a \log r) \frac{a}{r} \right) \\ &= \left(\frac{N-4}{2} \right)^{\frac{N-4}{2}} r^{a-1} (aw(a \log r) + aw'(a \log r)) \end{aligned}$$

Siguiendo del mismo modo se llega a que:

$$\begin{aligned} u''(r) &= \left(\frac{N-4}{2} \right)^{\frac{N-4}{2}} r^{a-2} ((a^2 - a)w(a \log r) + (2a^2 - a)w'(a \log r) + a^2 w''(a \log r)) \\ u'''(r) &= \left(\frac{N-4}{2} \right)^{\frac{N-4}{2}} r^{a-3} ((a^3 - 3a^2 + 2a)w(a \log r) + (3a^3 - 6a^2 + 2a)w'(a \log r) \\ &\quad + (3a^3 - 3a^2)w''(a \log r) + a^3 w'''(a \log r)) \\ u^{(4)}(r) &= \left(\frac{N-4}{2} \right)^{\frac{N-4}{2}} r^{a-4} ((a^4 - 6a^3 + 11a^2 - 6a)w(a \log r) + (4a^4 - 18a^3 + 22a^2 - 6a)w'(a \log r) \\ &\quad + (6a^4 - 18a^3 + 11a^2)w''(a \log r) + (4a^4 - 6a^3)w'''(a \log r) + a^4 w^{(4)}(a \log r)) \end{aligned}$$

La primera parte del resultado sigue de reescribir el lado izquierdo en términos de x .

Para la segunda parte, basta recordar que para funciones radiales se tiene que:

$$\Delta u(y) = u''(r) + \frac{N-1}{r} u'(r); \quad r = |y|.$$

Reemplazando lo anterior en esta ecuación:

$$\begin{aligned} \Delta u(y) &= \left(\frac{N-4}{2} \right)^{\frac{N-4}{2}} r^{a-2} ((a^2 - a)w(a \log r) + (2a^2 - a)w'(a \log r) + a^2 w''(a \log r)) \\ &\quad + \frac{N-1}{r} \left(\frac{N-4}{2} \right)^{\frac{N-4}{2}} r^{a-1} (aw(a \log r) + aw'(a \log r)) \\ &= \left(\frac{N-4}{2} \right)^{\frac{N-4}{2}} r^{a-2} ((a^2 + (N-2)a)w(a \log r) + (2a^2 + (N-2)a)w'(a \log r) + a^2 w''(a \log r)) \end{aligned}$$

Usando que $a = -\frac{N-4}{2}$ hallamos que:

$$\Delta u(y) = \left(\frac{N-4}{2} \right)^{\frac{N-4}{2}} r^{a-2} \left(-\frac{N(N-4)}{4} w(a \log r) - (N-4)w'(a \log r) + \frac{(N-4)^2}{4} w''(a \log r) \right)$$

El resultado sigue nuevamente de reescribir el lado izquierdo en términos de x . El resultado para el bi-laplaciano se obtiene de manera análoga, reemplazando las derivadas halladas en la primera parte en la expresión:

$$\Delta^2 u(y) = u^{(4)}(r) + \frac{2(N-1)}{r} u'''(r) + \frac{(N-1)(N-3)}{r^2} u''(r) - \frac{(N-1)(N-3)}{r^3} u'(r); \quad r = |y|.$$

□

Lema B.1.2. *Considere la función W definida en (3.13). Se tiene que:*

$$\begin{aligned} W'(x) &= -K_N e^{-x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^a + K_N \cdot 2e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} \\ W''(x) &= K_N e^{-x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^a \\ &\quad - K_N \cdot \left(4 - \frac{4}{a}\right) e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} \\ &\quad + K_N \cdot \left(4 - \frac{4}{a}\right) e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-2} \\ W'''(x) &= -K_N e^{-x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^a \\ &\quad + K_N \cdot \left(6 - \frac{12}{a} + \frac{8}{a^2}\right) e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} \\ &\quad - K_N \cdot \left(12 - \frac{36}{a} + \frac{24}{a^2}\right) e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-2} \\ &\quad + K_N \cdot \left(8 - \frac{24}{a} + \frac{16}{a^2}\right) e^{-(1-\frac{6}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-3} \\ W^{(4)}(x) &= K_N e^{-x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^a \\ &\quad - K_N \cdot \left(8 - \frac{24}{a} + \frac{32}{a^2} - \frac{16}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} \\ &\quad + K_N \cdot \left(24 - \frac{120}{a} + \frac{208}{a^2} - \frac{112}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-2} \\ &\quad - K_N \cdot \left(32 - \frac{192}{a} + \frac{352}{a^2} - \frac{192}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{6}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-3} \\ &\quad + K_N \cdot \left(16 - \frac{96}{a} + \frac{176}{a^2} - \frac{96}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{8}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-4} \end{aligned}$$

Además, se cumple que:

$$W^{(4)}(x) - C_2 W''(x) + C_0 W(x) = W^p(x)$$

Demostración. La demostración es por cálculo directo. Por definición:

$$W(x) = K_N e^{-x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^a$$

Derivando, obtenemos que:

$$\begin{aligned}
W'(x) &= -K_N e^{-x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^a + K_N e^{-x} a \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} e^{\frac{2}{a}x} \frac{2}{a} \\
&= -K_N e^{-x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^a + K_N \cdot 2e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1}
\end{aligned}$$

Derivando por segunda vez obtenemos:

$$\begin{aligned}
W''(x) &= K_N e^{-x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^a - K_N \cdot 2e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} \\
&\quad - K_N \cdot \left(2 - \frac{4}{a}\right) e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} + K_N \cdot \left(4 - \frac{4}{a}\right) e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-2} \\
&= K_N e^{-x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^a \\
&\quad - K_N \cdot \left(4 - \frac{4}{a}\right) e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} \\
&\quad + K_N \cdot \left(4 - \frac{4}{a}\right) e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-2}
\end{aligned}$$

De manera similar:

$$\begin{aligned}
W'''(x) &= -K_N e^{-x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^a + K_N \cdot 2e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} \\
&\quad + K_N \cdot \left(4 - \frac{4}{a}\right) \left(1 - \frac{2}{a}\right) e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} \\
&\quad - K_N \cdot \left(4 - \frac{4}{a}\right) \left(2 - \frac{2}{a}\right) e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-2} \\
&\quad - K_N \cdot \left(4 - \frac{4}{a}\right) \left(1 - \frac{4}{a}\right) e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-2} \\
&\quad + K_N \cdot \left(4 - \frac{4}{a}\right) \left(2 - \frac{4}{a}\right) e^{-(1-\frac{6}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-3} \\
&= -K_N e^{-x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^a \\
&\quad + K_N \cdot \left(6 - \frac{12}{a} + \frac{8}{a^2}\right) e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} \\
&\quad - K_N \cdot \left(12 - \frac{36}{a} + \frac{24}{a^2}\right) e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-2} \\
&\quad + K_N \cdot \left(8 - \frac{24}{a} + \frac{16}{a^2}\right) e^{-(1-\frac{6}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-3}
\end{aligned}$$

Por último:

$$\begin{aligned}
W^{(4)}(x) &= K_N e^{-x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^a - K_N \cdot 2e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} \\
&\quad - K_N \cdot \left(6 - \frac{12}{a} + \frac{8}{a^2}\right) \left(1 - \frac{2}{a}\right) e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} \\
&\quad + K_N \cdot \left(6 - \frac{12}{a} + \frac{8}{a^2}\right) \left(2 - \frac{2}{a}\right) e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-2} \\
&\quad + K_N \cdot \left(12 - \frac{36}{a} + \frac{24}{a^2}\right) \left(1 - \frac{4}{a}\right) e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-2} \\
&\quad - K_N \cdot \left(12 - \frac{36}{a} + \frac{24}{a^2}\right) \left(2 - \frac{4}{a}\right) e^{-(1-\frac{6}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-3} \\
&\quad - K_N \cdot \left(8 - \frac{24}{a} + \frac{16}{a^2}\right) \left(1 - \frac{6}{a}\right) e^{-(1-\frac{6}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-3} \\
&\quad + K_N \cdot \left(8 - \frac{24}{a} + \frac{16}{a^2}\right) \left(2 - \frac{6}{a}\right) e^{-(1-\frac{8}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-4} \\
&= K_N e^{-x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^a - K_N \cdot 2e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} \\
&\quad - K_N \cdot \left(6 - \frac{24}{a} + \frac{32}{a^2} - \frac{16}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} \\
&\quad + K_N \cdot \left(12 - \frac{36}{a} + \frac{40}{a^2} - \frac{16}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-2} \\
&\quad + K_N \cdot \left(12 - \frac{84}{a} + \frac{168}{a^2} - \frac{96}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-2} \\
&\quad - K_N \cdot \left(24 - \frac{120}{a} + \frac{192}{a^2} - \frac{96}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{6}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-3} \\
&\quad - K_N \cdot \left(8 - \frac{72}{a} + \frac{160}{a^2} - \frac{96}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{6}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-3} \\
&\quad + K_N \cdot \left(16 - \frac{96}{a} + \frac{176}{a^2} - \frac{96}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{8}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-4}
\end{aligned}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned}
W^{(4)}(x) &= K_N e^{-x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^a \\
&\quad - K_N \cdot \left(8 - \frac{24}{a} + \frac{32}{a^2} - \frac{16}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} \\
&\quad + K_N \cdot \left(24 - \frac{120}{a} + \frac{208}{a^2} - \frac{112}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-2} \\
&\quad - K_N \cdot \left(32 - \frac{192}{a} + \frac{352}{a^2} - \frac{192}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{6}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-3} \\
&\quad + K_N \cdot \left(16 - \frac{96}{a} + \frac{176}{a^2} - \frac{96}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{8}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-4}
\end{aligned}$$

Esto concluye la primera parte de la demostración. Para la segunda, primero notemos que:

$$a = -\frac{N-4}{2} \Rightarrow N = -2a + 4.$$

Luego, por sustitución directa tenemos que:

$$C_0 = \frac{(2a-4)^2}{4a^2} = \frac{(a-2)^2}{a^2} = 1 - \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}$$

y por lo tanto:

$$C_2 = 2 - \frac{4}{a} + \frac{4}{a^2}.$$

Luego, Sustituyendo:

$$\begin{aligned} & W^{(4)}(x) - C_2 W''(x) + C_0 W(x) \\ &= K_N \cdot (1 - C_2 + C_0) e^{-x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^a \\ &\quad - K_N \cdot \left(8 - \frac{24}{a} + \frac{32}{a^2} - \frac{16}{a^3} - C_2 \left(4 - \frac{4}{a}\right)\right) e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} \\ &\quad + K_N \cdot \left(24 - \frac{120}{a} + \frac{208}{a^2} - \frac{112}{a^3} - C_2 \left(4 - \frac{4}{a}\right)\right) e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-2} \\ &\quad - K_N \cdot \left(32 - \frac{192}{a} + \frac{352}{a^2} - \frac{192}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{6}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-3} \\ &\quad + K_N \cdot \left(16 - \frac{96}{a} + \frac{176}{a^2} - \frac{96}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{8}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-4} \\ &= -K_N \cdot \left(8 - \frac{24}{a} + \frac{32}{a^2} - \frac{16}{a^3} - \left(8 - \frac{24}{a} + \frac{32}{a^2} - \frac{16}{a^3}\right)\right) e^{-(1-\frac{2}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-1} \\ &\quad + K_N \cdot \left(24 - \frac{120}{a} + \frac{208}{a^2} - \frac{112}{a^3} - \left(8 - \frac{24}{a} + \frac{32}{a^2} - \frac{16}{a^3}\right)\right) e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-2} \\ &\quad - K_N \cdot \left(32 - \frac{192}{a} + \frac{352}{a^2} - \frac{192}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{6}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-3} \\ &\quad + K_N \cdot \left(16 - \frac{96}{a} + \frac{176}{a^2} - \frac{96}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{8}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-4} \\ &= +K_N \cdot \left(16 - \frac{96}{a} + \frac{176}{a^2} - \frac{96}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-2} \\ &\quad - K_N \cdot \left(32 - \frac{192}{a} + \frac{352}{a^2} - \frac{192}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{6}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-3} \\ &\quad + K_N \cdot \left(16 - \frac{96}{a} + \frac{176}{a^2} - \frac{96}{a^3}\right) e^{-(1-\frac{8}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-4} \end{aligned}$$

Por comodidad definimos $\kappa := (16 - \frac{96}{a} + \frac{176}{a^2} - \frac{96}{a^3})$. Factorizando:

$$\begin{aligned}
W^{(4)}(x) - C_2 W''(x) + C_0 W(x) &= K_N \cdot \kappa e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-4} \left(\left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^2 - 2e^{\frac{2}{a}x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right) + e^{\frac{4}{a}x} \right) \\
&= K_N \cdot \kappa e^{-(1-\frac{4}{a})x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{a-4} \left(\left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right) - e^{\frac{2}{a}x} \right)^2 \\
&= K_N \kappa e^{-px} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{ap} \\
&= \frac{K_N \kappa}{K_N^p} \cdot W^p(x).
\end{aligned}$$

El resultado sigue de notar que $\kappa = K_N^{p-1}$. □

Lema B.1.3. *Considere la función W definida en (3.13) y las funciones W_i definidas en (3.17), donde $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ dependen de $\varepsilon > 0$ como en (3.22). Entonces:*

$$\begin{aligned}
W_i'(0) &= W_i(0) + o(\varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}), \\
W_i''(0) &= W_i(0) + o(\varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}), \\
W_i'''(0) &= W_i(0) + o(\varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}), \\
W_i^{(4)}(0) &= W_i(0) + o(\varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}).
\end{aligned}$$

Demostración. Note que W es una función par. En efecto:

$$W(-x) = K_N e^x \left(1 + e^{-\frac{2}{a}x}\right)^a = K_N e^{-x} \left(e^{\frac{2}{a}x} \left(1 + e^{-\frac{2}{a}x}\right)\right)^a = K_N e^{-x} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^a = W(x).$$

Luego, las funciones W', W''' son impares y las funciones $W'', W^{(4)}$ son pares. De este modo:

$$\begin{aligned}
W_i'(0) &= -W'(\eta_i), \\
W_i''(0) &= W''(\eta_i), \\
W_i'''(0) &= -W'''(\eta_i), \\
W_i^{(4)}(0) &= W^{(4)}(\eta_i).
\end{aligned}$$

Para continuar, debemos notar que:

$$e^{-\eta_i} = \kappa_i \varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}; \quad \kappa_i = \frac{\prod_{n=2}^i \Lambda_n}{\Lambda_1}$$

Reemplacemos ahora esto en los resultados obtenidos en el lema B.1.2:

$$\begin{aligned}
W_i'(0) &= -W'(\eta_i) \\
&= K_N e^{-\eta_i} \left(1 + e^{\frac{2}{a}\eta_i}\right)^a - K_N \cdot 2e^{-(1-\frac{2}{a})\eta_i} \left(1 + e^{\frac{2}{a}\eta_i}\right)^{a-1} \\
&= W_i(0) - K_N \cdot 2 \left(\kappa_i \varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}\right)^{\left(1-\frac{2}{a}\right)} \left(1 + \kappa_i^{-\frac{2}{a}} \varepsilon^{-\frac{2i-1}{a}}\right)^{a-1}.
\end{aligned}$$

Dado que $0 < \left(1 + \kappa_i^{-\frac{2}{a}} \varepsilon^{-\frac{2i-1}{a}}\right)^{a-1} < 1$ para todo $\varepsilon > 0$, y que $a = -\frac{N-4}{2}$ tenemos que:

$$W_i'(0) = W_i(0) + o(\varepsilon^{\frac{2i-1}{2}})$$

De manera similar, para W'' tenemos que:

$$\begin{aligned} W_i''(0) &= W''(\eta_i) \\ &= K_N e^{-\eta_i} \left(1 + e^{\frac{2}{a}\eta_i}\right)^a \\ &\quad - K_N \cdot \left(4 - \frac{4}{a}\right) e^{-(1-\frac{2}{a})\eta_i} \left(1 + e^{\frac{2}{a}\eta_i}\right)^{a-1} \\ &\quad + K_N \cdot \left(4 - \frac{4}{a}\right) e^{-(1-\frac{4}{a})\eta_i} \left(1 + e^{\frac{2}{a}\eta_i}\right)^{a-2} \\ &= W_i(0) - K_N \cdot \left(4 - \frac{4}{a}\right) \left(\kappa_i \varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}\right)^{\left(1-\frac{2}{a}\right)} \left(1 + \kappa_i^{-\frac{2}{a}} \varepsilon^{-\frac{2i-1}{a}}\right)^{a-1} \\ &\quad + K_N \cdot \left(4 - \frac{4}{a}\right) \left(\kappa_i \varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}\right)^{\left(1-\frac{4}{a}\right)} \left(1 + \kappa_i^{-\frac{2}{a}} \varepsilon^{-\frac{2i-1}{a}}\right)^{a-2} \\ &= W_i(0) + o(\varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}). \end{aligned}$$

Para W''' :

$$\begin{aligned} W_i'''(0) &= -W'''(\eta_i) \\ &= K_N e^{-\eta_i} \left(1 + e^{\frac{2}{a}\eta_i}\right)^a \\ &\quad - K_N \cdot \left(6 - \frac{12}{a} + \frac{8}{a^2}\right) e^{-(1-\frac{2}{a})\eta_i} \left(1 + e^{\frac{2}{a}\eta_i}\right)^{a-1} \\ &\quad + K_N \cdot \left(12 - \frac{36}{a} + \frac{24}{a^2}\right) e^{-(1-\frac{4}{a})\eta_i} \left(1 + e^{\frac{2}{a}\eta_i}\right)^{a-2} \\ &\quad - K_N \cdot \left(8 - \frac{24}{a} + \frac{16}{a^2}\right) e^{-(1-\frac{6}{a})\eta_i} \left(1 + e^{\frac{2}{a}\eta_i}\right)^{a-3} \\ &= W_i(0) - K_N \cdot \left(6 - \frac{12}{a} + \frac{8}{a^2}\right) \left(\kappa_i \varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}\right)^{\left(1-\frac{2}{a}\right)} \left(1 + \kappa_i^{-\frac{2}{a}} \varepsilon^{-\frac{2i-1}{a}}\right)^{a-1} \\ &\quad + K_N \cdot \left(12 - \frac{36}{a} + \frac{24}{a^2}\right) \left(\kappa_i \varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}\right)^{\left(1-\frac{4}{a}\right)} \left(1 + \kappa_i^{-\frac{2}{a}} \varepsilon^{-\frac{2i-1}{a}}\right)^{a-2} \\ &\quad - K_N \cdot \left(8 - \frac{24}{a} + \frac{16}{a^2}\right) \left(\kappa_i \varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}\right)^{\left(1-\frac{6}{a}\right)} \left(1 + \kappa_i^{-\frac{2}{a}} \varepsilon^{-\frac{2i-1}{a}}\right)^{a-3} \\ &= W_i(0) + o(\varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}). \end{aligned}$$

Finalmente, de manera análoga obtenemos que:

$$W_i^{(4)}(0) = W_i(0) + o(\varepsilon^{\frac{2i-1}{2}}).$$

□

Lema B.1.4. Sea U_λ como se define en (3.11), y sea π_λ la única solución de (3.15). Entonces,

$$\pi_\lambda(x) = -\frac{\Delta U_\lambda(1)}{2N}|x|^2 - U_\lambda(1) + \frac{\Delta U_\lambda(1)}{2N}$$

Demostración. Proponemos que la solución de la ecuación es de la forma:

$$u(x) = \alpha + \beta|x|^2$$

Luego, aplicando la fórmula del laplaciano para funciones radiales tenemos que:

$$\Delta u(x) = u''(|x|) + \frac{N-1}{|x|}u'(|x|) = 2\beta + \frac{N-1}{|x|} \cdot 2\beta|x| = 2N\beta$$

De esto último se desprende que:

$$\Delta^2 u(x) = \Delta(\Delta u(x)) = \Delta(2N\beta) = 0$$

Es decir, efectivamente u es bi-armónica. Resta hallar α y β adecuados para satisfacer las condiciones de borde. Reemplazando en la primera condición obtenemos:

$$u(x) = -U_\lambda(x) \text{ sobre } \partial B_1 \quad \Leftrightarrow \quad \alpha + \beta = -U_\lambda(1)$$

De la segunda condición inferimos:

$$\Delta u(x) = -\Delta U_\lambda(x) \text{ sobre } \partial B_1 \quad \Leftrightarrow \quad 2N\beta = -\Delta U_\lambda(1)$$

El resultado sigue de resolver el sistema para α y β y reemplazar. □

Lema B.1.5. Sean $0 < \eta_1 < \eta_2 < \dots < \eta_k$ números positivos y defina $\lambda_i := e^{\frac{2}{N-4}\eta_i}$. Considere además la función π_{λ_i} definida en (3.16) y sea $\Pi_i(x) := \mathcal{T}[\pi_{\lambda_i}](x)$. Luego,

$$\Pi_i(x) = A_i e^{-x} + B_i e^{-(1-\frac{2}{a})x},$$

Donde

$$A_i = \left(\frac{2}{N-4}\right)^{\frac{N-4}{2}} \left(\frac{\Delta U_{\lambda_i}(1)}{2N} - U_{\lambda_i}(1)\right),$$

$$B_i = -\left(\frac{2}{N-4}\right)^{\frac{N-4}{2}} \frac{\Delta U_{\lambda_i}(1)}{2N}.$$

Además, las constantes A_i y B_i pueden ser reescritas en términos de las funciones W_i y sus derivadas como:

$$A_i = \frac{(N-4)^2}{8N} W_i''(0) - \frac{N-4}{2N} W_i'(0) - \frac{N+4}{8} W_i(0)$$

$$B_i = -\frac{(N-4)^2}{8N} W_i''(0) + \frac{N-4}{2N} W_i'(0) + \frac{N-4}{8} W_i(0)$$

Demostración. Por comodidad, escribamos

$$\alpha_i = -U_{\lambda_i}(1) + \frac{\Delta U_{\lambda_i}(1)}{2N}; \quad \beta_i = -\frac{\Delta U_{\lambda_i}(1)}{2N},$$

de modo que

$$\pi_{\lambda_i}(x) = \alpha_i + \beta_i|x|^2$$

Entonces, es directo de la definición de \mathcal{T} que:

$$\Pi_i(x) := \mathcal{T}[\pi_{\lambda_i}](x) = \left(\frac{2}{N-4}\right)^{\frac{N-4}{2}} e^{-x} \pi_{\lambda_i}(e^{-\frac{2}{N-4}x}) = \left(\frac{2}{N-4}\right)^{\frac{N-4}{2}} e^{-x} \left(\alpha_i + \beta_i e^{-\frac{2}{a}x}\right)$$

La primera parte del resultado sigue de definir

$$A_i = \left(\frac{2}{N-4}\right)^{\frac{N-4}{2}} \alpha_i; \quad B_i = \left(\frac{2}{N-4}\right)^{\frac{N-4}{2}} \beta_i.$$

Ahora, note que como $\mathcal{T}[U_{\lambda_i}](x) = W_i(x)$, entonces $U_{\lambda_i}(1) = \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N-4}{2}} W_i(0)$ y por lo tanto $A_i + B_i = -W_i(0)$. Aplicando el lema B.1.1 obtenemos que:

$$\Delta U_{\lambda_i}(1) = \left(\frac{N-4}{2}\right)^{\frac{N}{2}} \left(W_i''(0) - \frac{4}{N-4} W_i'(0) - \frac{N}{N-4} W_i(0) \right).$$

De este modo,

$$B_i = -\frac{\Delta U_{\lambda_i}(1)}{2N} = -\frac{(N-4)^2}{8N} W_i''(0) + \frac{N-4}{2N} W_i'(0) + \frac{N-4}{8} W_i(0)$$

y

$$A_i = -B_i - W_i(0) = \frac{(N-4)^2}{8N} W_i''(0) - \frac{N-4}{2N} W_i'(0) - \frac{N+4}{8} W_i(0)$$

□

Lema B.1.6. *Considere las funciones V_i definidas en (3.19). Entonces,*

$$\begin{cases} V_i^{(4)}(x) - C_2 V_i''(x) + C_0 V_i(x) = W_i^p(x), & x \in (0, +\infty), \\ V_i(0) = 0, \\ (N-4)V_i''(0) - 4V_i'(0) = 0. \end{cases}$$

Demostración. Gracias al lema B.1.2 sabemos que:

$$W_i^{(4)}(x) - C_2 W_i''(x) + C_0 W_i(x) = W_i^p(x),$$

por lo que para la primera parte basta demostrar que:

$$\Pi_i^{(4)}(x) - C_2 \Pi_i''(x) + C_0 \Pi_i(x) = 0$$

En efecto, por cálculo directo tenemos que:

$$\begin{aligned}\Pi_i'(x) &= -A_i e^{-x} - \left(1 - \frac{2}{a}\right) B_i e^{-(1-\frac{2}{a})x} \\ \Pi_i''(x) &= A_i e^{-x} + \left(1 - \frac{2}{a}\right)^2 B_i e^{-(1-\frac{2}{a})x} \\ \Pi_i'''(x) &= -A_i e^{-x} - \left(1 - \frac{2}{a}\right)^3 B_i e^{-(1-\frac{2}{a})x} \\ \Pi_i^{(4)}(x) &= A_i e^{-x} + \left(1 - \frac{2}{a}\right)^4 B_i e^{-(1-\frac{2}{a})x}\end{aligned}$$

Luego, reemplazando:

$$\begin{aligned}\Pi_i^{(4)}(x) - C_2 \Pi_i''(x) + C_0 \Pi_i(x) \\ = (1 - C_2 + C_0) A_i e^{-x} + \left(\left(1 - \frac{2}{a}\right)^4 - C_2 \left(1 - \frac{2}{a}\right)^2 + C_0 \right) B_i e^{-(1-\frac{2}{a})x}\end{aligned}$$

Note que, por la definición de a se tiene que:

$$C_0 = \frac{N^2}{(N-4)^2} = \frac{(a-2)^2}{a^2} = \left(1 - \frac{2}{a}\right)^2$$

Usando eso y el hecho de que $C_2 = C_0 + 1$ obtenemos:

$$\begin{aligned}\Pi_i^{(4)}(x) - C_2 \Pi_i''(x) + C_0 \Pi_i(x) \\ = (C_0^2 - (C_0 + 1)C_0 + C_0) B_i e^{-(1-\frac{2}{a})x} \\ = 0\end{aligned}$$

Esto concluye la primera parte de la demostración. Veamos ahora que $V_i(0) = 0$. Mediante cálculo directo:

$$\begin{aligned}V_i(0) &= W_i(0) + \Pi_i(0) \\ &= W_i(0) + A_i + B_i \\ &= W_i(0) - \left(\frac{2}{N-4}\right)^{\frac{N-4}{2}} U_{\lambda_i}(1) \\ &= K_N e^{\eta_i} \left(1 + e^{-\frac{2}{a}\eta_i}\right)^a - \left(\frac{2}{N-4}\right)^{\frac{N-4}{2}} \tilde{K}_N \lambda_i^{-a} U(\lambda_i) \\ &= K_N e^{\eta_i} \left(1 + e^{-\frac{2}{a}\eta_i}\right)^a - K_N e^{\eta_i} \left(1 + e^{-\frac{2}{a}\eta_i}\right)^a \\ &= 0.\end{aligned}$$

Verifiquemos ahora la tercera parte de la ecuación. Por un lado tenemos:

$$\begin{aligned}
V_i''(0) &= W_i''(0) + \Pi_i''(0) \\
&= W_i''(0) + A_i + \left(1 - \frac{2}{a}\right)^2 B_i \\
&= W_i''(0) + \left(\frac{2}{N-4}\right)^{\frac{N-4}{2}} \left(\frac{\Delta U_{\lambda_i}(1)}{2N} - U_{\lambda_i}(1)\right) - C_0 \left(\frac{2}{N-4}\right)^{\frac{N-4}{2}} \frac{\Delta U_{\lambda_i}(1)}{2N} \\
&= W_i''(0) + \frac{(1-C_0)}{2N} \left(\frac{2}{N-4}\right)^{\frac{N-4}{2}} \Delta U_{\lambda_i}(1) - \left(\frac{2}{N-4}\right)^{\frac{N-4}{2}} U_{\lambda_i}(1)
\end{aligned}$$

Dado que $W_i(x) = \mathcal{T}[U_{\lambda_i}](x)$, gracias al lema B.1.1 tenemos:

$$\begin{aligned}
V_i''(0) &= W_i''(0) + \frac{(1-C_0)}{2N} \left(\frac{(N-4)^2}{4} W_i''(x) - (N-4)W_i'(x) - \frac{N(N-4)}{4} W_i(x)\right) \\
&\quad - \left(\frac{2}{N-4}\right)^{\frac{N-4}{2}} U_{\lambda_i}(1) \\
&= W_i''(0) - \frac{4(N-2)}{N(N-4)^2} \left(\frac{(N-4)^2}{4} W_i''(x) - (N-4)W_i'(x) - \frac{N(N-4)}{4} W_i(x)\right) - W_i(0) \\
&= \left(1 - \frac{N-2}{N}\right) W_i''(0) + \frac{4(N-2)}{N(N-4)} W_i'(x) + \left(\frac{N-2}{N-4} - 1\right) W_i(0) \\
&= \frac{2}{N} W_i''(0) + \frac{4(N-2)}{N(N-4)} W_i'(x) + \frac{2}{N-4} W_i(0)
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
V_i'(0) &= W_i'(0) + \Pi_i'(0) \\
&= W_i'(0) - A_i - \left(1 - \frac{2}{a}\right) B_i \\
&= W_i'(0) - (A_i + B_i) + \frac{2}{a} B_i \\
&= W_i'(0) - \Pi_i(0) - \frac{2}{a} \left(\frac{2}{N-4}\right)^{\frac{N-4}{2}} \frac{\Delta U_{\lambda_i}(1)}{2N} \\
&= W_i'(0) + W_i(0) + \frac{2}{N(N-4)} \left(\frac{(N-4)^2}{4} W_i''(x) - (N-4)W_i'(x) - \frac{N(N-4)}{4} W_i(x)\right) \\
&= \frac{(N-4)}{2N} W_i''(0) + \frac{N-2}{N} W_i'(0) + \frac{1}{2} W_i(0)
\end{aligned}$$

Reemplazando estos resultados obtenemos que $(N-4)V_i''(0) - 4V_i'(0) = 0$, lo que concluye la demostración. \square

Lema B.1.7. *Considere las funciones W_i, Π_i y V_i como se definen en (3.17) y (3.19). Entonces:*

$$|W_i(x)| \leq C e^{-|x-\eta_i|}, \quad |\Pi_i(x)| \leq C e^{-|x-\eta_i|} \quad y \quad |V_i(x)| \leq C e^{-|x-\eta_i|}.$$

Donde $C > 0$ es una constante que depende solo de N . Más aún, las funciones Π_i cumplen:

$$|\Pi_i(x)| \leq C e^{-(x+\eta_i)}.$$

Demostración. En primer lugar, dado que la función W es par, tenemos:

$$\begin{aligned} W_i(x) &= W(|x - \eta_i|) \\ &= K_N e^{-|x-\eta_i|} \left(1 + e^{-\frac{4}{N-4}|x-\eta_i|}\right)^{-\frac{N-4}{2}} \end{aligned}$$

Es claro que $\left(1 + e^{-\frac{4}{N-4}|x-\eta_i|}\right) \geq 1$ para todo $x \in \mathbb{R}$ y por lo tanto $\left(1 + e^{-\frac{4}{N-4}|x-\eta_i|}\right)^{-\frac{N-4}{2}} \leq 1$. Sigue que

$$|W_i(x)| \leq K_N e^{-|x-\eta_i|}.$$

Estudiamos ahora el decaimiento de las funciones Π_i . Por el lema B.1.5 sabemos que:

$$\Pi_i(x) = A_i e^{-x} + B_i e^{-(1-\frac{2}{a})x},$$

donde A_i y B_i son combinaciones lineales de $W_i(0)$, $W_i'(0)$ y $W_i''(0)$, con constantes que dependen solo de N . Gracias a los cálculos realizados en el lema B.1.2, tenemos que:

$$W_i'(0) = W'(-\eta_i) = -W'(\eta_i) = K_N e^{-\eta_i} \left(1 + e^{-\frac{4}{N-4}\eta_i}\right)^{-\frac{N-4}{2}} - K_N \cdot 2e^{-\frac{N}{N-4}\eta_i} \left(1 + e^{\frac{2}{a}x}\right)^{-\frac{N-2}{2}}$$

y por lo tanto:

$$|W_i'(0)| \leq C e^{-\eta_i}.$$

Similarmente:

$$|W_i''(0)| \leq C e^{-\eta_i}.$$

De este modo, las constantes A_i y B_i cumplen:

$$|A_i| \leq C e^{-\eta_i}, \quad |B_i| \leq C e^{-\eta_i}.$$

Sigue que:

$$|\Pi_i(x)| \leq |A_i| e^{-x} + |B_i| e^{-(1-\frac{2}{a})x} \leq C e^{-\eta_i} e^{-x} = C e^{-(x+\eta_i)}.$$

Aplicando la desigualdad triangular tenemos que $|x - \eta_i| \leq x + \eta_i$ y por lo tanto:

$$|\Pi_i(x)| \leq C e^{-|x-\eta_i|}$$

Por último, la cota para V_i sigue directamente de su definición y las cotas anteriores:

$$|V_i(x)| := |W_i(x) + \Pi_i(x)| \leq |W_i(x)| + |\Pi_i(x)| \leq C e^{-|x-\eta_i|}.$$

□

Lema B.1.8. Sean $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ que cumplan (3.22). Se tienen las siguientes estimaciones:

- $\varepsilon \int_0^\infty |V(x)|^{p+1} dx = \varepsilon k \int_{-\infty}^\infty |W(x)|^{p+1} dx + o(\varepsilon),$
- $\varepsilon \int_0^\infty x |V(x)|^{p+1} dx = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^k \eta_i \right) \int_0^\infty x |W(x)|^{p+1} dx + o(\varepsilon),$

$$\blacksquare \quad \varepsilon \int_0^\infty |V(x)|^{p+1} \log |V(x)| dx = \varepsilon k \int_{-\infty}^\infty |W(x)|^{p+1} \log |W(x)| dx + o(\varepsilon),$$

Además, si consideramos los puntos:

$$\mu_1 := 0; \quad \mu_{i+1} := \frac{1}{2}(\eta_{i+1} + \eta_i), \quad i \in \{1, 2, \dots, k-1\}; \quad \mu_{k+1} := \infty.$$

Tendremos:

$$\int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} V_i^p(x) V_j(x) dx = \begin{cases} O(\varepsilon^{\frac{p+1}{2}}) & \text{si } i \neq l, \\ O(\varepsilon) & \text{si } i = l \neq j. \end{cases}$$

Demostración. Comencemos estimando la integral $\varepsilon \int_0^\infty |V(x)|^{p+1} dx$. Reescribiendo convenientemente:

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |V(x)|^{p+1} dx &= \varepsilon \int_{-\infty}^\infty |W(x)|^{p+1} dx + \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} (|V(x)|^{p+1} - |V_l(x)|^{p+1}) dx \\ &\quad + \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} (|V_l(x)|^{p+1} - |W_l(x)|^{p+1}) dx \\ &\quad - \varepsilon \int_{-\infty}^{\mu_l} |W_l(x)|^{p+1} dx - \varepsilon \int_{\mu_{l+1}}^\infty |W_l(x)|^{p+1} dx. \end{aligned}$$

Usando el lema [B.1.7](#) y [\(3.22\)](#) obtenemos:

$$\int_{\mu_{l+1}}^\infty |W_l(x)|^{p+1} dx \leq C \int_{\mu_{l+1}}^\infty e^{-(p+1)(x-\eta_l)} dx = C e^{-(p+1)(\mu_{l+1}-\eta_l)} = C e^{-\frac{1}{2}(p+1)(\eta_{l+1}-\eta_l)} \leq C \varepsilon^{\frac{(p+1)}{2}}.$$

De manera similar, si $l \geq 2$:

$$\int_{-\infty}^{\mu_l} |W_l(x)|^{p+1} dx \leq C \int_{-\infty}^{\mu_l} e^{-(p+1)(\eta_l-x)} dx = C e^{-(p+1)(\eta_l-\mu_l)} = C e^{-\frac{1}{2}(p+1)(\eta_l-\eta_{l-1})} \leq C \varepsilon^{\frac{(p+1)}{2}}.$$

y si $l = 1$, entonces:

$$\int_{-\infty}^{\mu_l} |W_l(x)|^{p+1} dx \leq C e^{(p+1)(\mu_l-\eta_1)} = C e^{-\eta_1(p+1)} \leq C \varepsilon^{\frac{(p+1)}{2}}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |V(x)|^{p+1} dx &= \varepsilon \int_{-\infty}^\infty |W(x)|^{p+1} dx + \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} (|V(x)|^{p+1} - |V_l(x)|^{p+1}) dx \\ &\quad + \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} (|V_l(x)|^{p+1} - |W_l(x)|^{p+1}) dx + o(\varepsilon) \end{aligned}$$

Estimemos ahora el segundo término. Sea $x \in [\mu_l, \mu_{l+1}]$ fijo y defina la función

$$f(t) := (-1)^{l+1} V_l(x) + t \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k (-1)^{j+1} V_j(x). \quad (\text{B.1})$$

Aplicando el teorema del valor medio al mapeo $t \rightarrow |f(t)|^{p+1}$, sabemos que existe $\xi \in (0, 1)$ tal que

$$|V(x)|^{p+1} - |V_l(x)|^{p+1} = (p+1)|f(\xi)|^{p-1}f(\xi) \left(\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k (-1)^{j+1} V_j(x) \right).$$

Note que como $x \in [\mu_l, \mu_{l+1}]$ entonces si $j < l$ se tiene que:

$$\eta_j < \mu_{j+1} \leq \mu_l \leq x \quad \Rightarrow \quad 0 < \frac{1}{2}(\eta_{j+1} - \eta_j) \leq (x - \eta_j),$$

y si $j > l$:

$$x \leq \mu_{l+1} \leq \mu_j < \eta_j \quad \Rightarrow \quad (x - \eta_j) \leq -\frac{1}{2}(\eta_j - \eta_{j-1}) < 0.$$

Por lo tanto, se tiene la siguiente cota:

$$\left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k (-1)^{j+1} V_j(x) \right| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k |V_j(x)| \leq C \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k e^{|x - \eta_j|} \leq C\varepsilon^{\frac{1}{2}}. \quad (\text{B.2})$$

Sigue que:

$$\begin{aligned} & \left| \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} (|V(x)|^{p+1} - |V_l(x)|^{p+1}) dx \right| \\ & \leq C\varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |f(\xi)|^p \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k (-1)^{j+1} V_j(x) \right| dx \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}}(\mu_{l+1} - \mu_l) \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \log(\varepsilon) = o(\varepsilon) \end{aligned}$$

Donde en el último paso hemos asumido que $l < k$. El caso $l = k$ se puede abordar usando las cotas (B.2) dentro de la integral e integrando directamente. Recopilando, hasta ahora tenemos:

$$\varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |V(x)|^{p+1} dx = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |W(x)|^{p+1} dx + \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} (|V_l(x)|^{p+1} - |W_l(x)|^{p+1}) dx + o(\varepsilon).$$

En cuanto al último término, una aplicación del teorema del valor medio al mapeo $t \rightarrow |W_l(x) - t\Pi_l(x)|^{p+1}$ nos da la existencia de cierto $\xi \in (0, 1)$ tal que

$$|V_l(x)|^{p+1} - |W_l(x)|^{p+1} = (p+1)|W_l(x) - \xi\Pi_l(x)|^{p-1} (W_l(x) - \xi\Pi_l(x)) \Pi_l(x).$$

Así, gracias al lema B.1.7, el último término de la primera integral puede ser acotado como:

$$\left| \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} (|V_l(x)|^{p+1} - |W_l(x)|^{p+1}) dx \right| \leq C\varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |\Pi_l(x)| dx \leq C\varepsilon e^{-\eta} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} e^{-x} dx \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}}$$

Concluyendo que:

$$\varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |V(x)|^{p+1} dx = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |W(x)|^{p+1} dx + o(\varepsilon).$$

Sumando de $l = 1$ a $l = k$ se obtiene la primera estimación del lema. Para la segunda estimación primero note que:

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} x |V(x)|^{p+1} dx &= \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} x |W_l(x)|^{p+1} dx + \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} x (|V(x)|^{p+1} - |V_l(x)|^{p+1}) dx \\ &\quad + \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} x (|V_l(x)|^{p+1} - |W_l(x)|^{p+1}) dx. \end{aligned} \quad (\text{B.3})$$

Utilizando cotas que ya hallamos anteriormente, para $l < k$ podemos escribir:

$$\left| \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} x (|V(x)|^{p+1} - |V_l(x)|^{p+1}) dx \right| \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} x dx \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} \mu_{l+1}^2 = C\varepsilon^{\frac{3}{2}} (c_1 \log(\varepsilon) + c_2)^2 = o(\varepsilon).$$

y para el caso $l = k$ tendremos:

$$\begin{aligned} \left| \varepsilon \int_{\mu_k}^{\infty} x (|V(x)|^{p+1} - |V_l(x)|^{p+1}) dx \right| &\leq C\varepsilon \int_{\mu_k}^{\infty} x \left| \sum_{j=1}^{k-1} (-1)^{j+1} V_j(x) \right| dx \\ &\leq C\varepsilon \sum_{j=1}^{k-1} \int_{\mu_k}^{\infty} x e^{-(x-\eta_j)} dx \\ &\leq C\varepsilon \int_{\mu_k}^{\infty} x e^{-(x-\eta_{k-1})} dx \\ &= C\varepsilon (\mu_k + 1) e^{-(\mu_k - \eta_{k-1})} \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} (c_1 \log(\varepsilon) + c_2) = o(\varepsilon). \end{aligned}$$

De manera análoga se obtiene:

$$\left| \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} x (|V_l(x)|^{p+1} - |W_l(x)|^{p+1}) dx \right| \leq C\varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} x |\Pi_l(x)| dx \leq C\varepsilon e^{-\eta} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} x e^{-x} dx \leq C\varepsilon^{\frac{3}{2}} = o(\varepsilon).$$

Llegando a que:

$$\varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} x |V(x)|^{p+1} dx = \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} x |W_l(x)|^{p+1} dx + o(\varepsilon).$$

Para estimar esta integral usaremos hecho de que el mapeo $x \rightarrow x |W(x)|^{p+1}$ es impar. Abordaremos el caso en que $l < k$ (el caso $l = k$ es similar). Suponga sin pérdida de generalidad

que η_l está más cerca de μ_l que de μ_{l+1} (es decir, $\eta_l - \mu_l < \mu_{l+1} - \eta_l$). Luego:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} x |W_l(x)|^{p+1} dx &= \varepsilon \int_{\mu_l - \eta_l}^{\mu_{l+1} - \eta_l} (x + \eta_l) |W(x)|^{p+1} dx \\
&= \varepsilon \int_{\mu_l - \eta_l}^{\mu_{l+1} - \eta_l} x |W(x)|^{p+1} dx + \varepsilon \eta_l \int_{\mu_l - \eta_l}^{\mu_{l+1} - \eta_l} |W(x)|^{p+1} dx \\
&= \underbrace{\varepsilon \int_{-(\eta_l - \mu_l)}^{\eta_l - \mu_l} x |W(x)|^{p+1} dx}_{=0} + \varepsilon \int_{\eta_l - \mu_l}^{\mu_{l+1} - \eta_l} x |W(x)|^{p+1} dx + \varepsilon \eta_l \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |W_l(x)|^{p+1} dx \\
&= \varepsilon \int_{\eta_l - \mu_l}^{\mu_{l+1} - \eta_l} x |W(x)|^{p+1} dx + \varepsilon \eta_l \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |W_l(x)|^{p+1} dx
\end{aligned}$$

Acotando convenientemente:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \left| \int_{\eta_l - \mu_l}^{\mu_{l+1} - \eta_l} x |W(x)|^{p+1} dx \right| &\leq \varepsilon (\mu_{l+1} - \eta_l) \int_{\eta_l - \mu_l}^{\mu_{l+1} - \eta_l} |W(x)|^{p+1} dx \\
&\leq \frac{1}{2} \varepsilon (\eta_{l+1} - \eta_l) \int_{\eta_l - \mu_l}^{\infty} |W(x)|^{p+1} dx \\
&\leq C \varepsilon (c_1 \log \varepsilon + c_2) \int_{\eta_l - \mu_l}^{\infty} e^{-(p+1)x} dx \\
&\leq C \varepsilon (c_1 \log \varepsilon + c_2) e^{-(p+1)(\eta_l - \mu_l)} \leq C \varepsilon^{\frac{p+3}{2}} (c_1 \log \varepsilon + c_2) = o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Luego:

$$\varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} x |W_l(x)|^{p+1} dx = \varepsilon \eta_l \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |W_l(x)|^{p+1} dx + o(\varepsilon).$$

Y por consiguiente:

$$\varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} x |V(x)|^{p+1} dx = \varepsilon \eta_l \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |W_l(x)|^{p+1} dx + o(\varepsilon) = \varepsilon \eta_l \int_{-\infty}^{\infty} |W(x)|^{p+1} dx + o(\varepsilon).$$

donde en la última igualdad hemos usado estimaciones previas. Concluimos que:

$$\varepsilon \int_0^{\infty} x |V(x)|^{p+1} dx = \varepsilon \left(\sum_{i=1}^k \eta_i \right) \int_{-\infty}^{\infty} |W(x)|^{p+1} dx + o(\varepsilon).$$

Para la tercera estimación considere lo siguiente:

$$\begin{aligned}
\varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |V(x)|^{p+1} \log(|V(x)|) dx &= \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |W_l(x)|^{p+1} \log(|W_l(x)|) dx \\
&\quad + \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} (|V(x)|^{p+1} \log(|V(x)|) - |V_l(x)|^{p+1} \log(|V_l(x)|)) dx \\
&\quad + \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} (|V_l(x)|^{p+1} \log(|V_l(x)|) - |W_l(x)|^{p+1} \log(|W_l(x)|)) dx
\end{aligned}$$

Veremos que los últimos dos términos son de orden inferior. Sea $x \in [\mu_l, \mu_{l+1}]$ y considere el mapeo $t \rightarrow |f(t)|^{p+1} \log |f(t)|$, con f definida en (B.1). Por el teorema del valor medio existe $\xi \in (0, 1)$ tal que:

$$|V(x)|^{p+1} \log(|V(x)|) - |V_l(x)|^{p+1} \log(|V_l(x)|) = ((p+1) \log |f(\xi)| + 1) |f(\xi)|^{p-1} f(\xi) f'(\xi)$$

Note que $t \rightarrow ((p+1) \log |t| + 1) |t|^{p-1} t$ tiene una singularidad reparable en $t = 0$, y $f(t)$ es uniformemente acotada, por lo cual:

$$||V(x)|^{p+1} \log(|V(x)|) - |V_l(x)|^{p+1} \log(|V_l(x)|)| \leq C \left| \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq l}}^k (-1)^{j+1} V_j(x) \right| \leq C \varepsilon^{\frac{1}{2}}.$$

Argumentando de manera similar a los casos anteriores se obtiene que:

$$\varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} (|V(x)|^{p+1} \log(|V(x)|) - |V_l(x)|^{p+1} \log(|V_l(x)|)) dx = o(\varepsilon).$$

Más aún, si usamos la misma técnica con el mapeo $t \rightarrow |W_l(x) + t\Pi_l(x)|^{p+1} \log |W_l(x) + t\Pi_l(x)|$ también tendremos que:

$$\varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} (|V_l(x)|^{p+1} \log(|V_l(x)|) - |W_l(x)|^{p+1} \log(|W_l(x)|)) dx = o(\varepsilon).$$

Así, llegamos a que:

$$\varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |V(x)|^{p+1} \log(|V(x)|) dx = \varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |W_l(x)|^{p+1} \log(|W_l(x)|) dx + o(\varepsilon).$$

Usando argumentos análogos a los ya exhibidos concluimos que:

$$\varepsilon \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |V(x)|^{p+1} \log(|V(x)|) dx = \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} |W(x)|^{p+1} \log(|W(x)|) dx + o(\varepsilon).$$

La tercera estimación sigue de sumar sobre todos los $l \in \{1, 2, \dots, k\}$.

Trabajemos ahora en la segunda parte del lema. Estudiaremos las integrales de la forma:

$$\int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} V_i^p(x) V_j(x) dx$$

Suponga que $i \neq l$. Hay dos opciones: $i = j$ o $i \neq j$. Trabajemos primero el caso $i = j \neq l$. Si $i > l$ entonces

$$\begin{aligned} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} |V_i(x)|^{p+1} dx &\leq \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} e^{-(p+1)|x-\eta_i|} dx \\ &= \frac{1}{p+1} e^{(p+1)(x-\eta_i)} \Big|_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} \\ &\leq \frac{1}{p+1} e^{(p+1)(\mu_{l+1}-\eta_i)} \leq C e^{-\frac{p+1}{2}(\eta_i-\eta_{i-1})} \leq C \varepsilon^{\frac{p+1}{2}}. \end{aligned}$$

Análogamente, si $i < l$ se tiene

$$\begin{aligned} \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} |V_i(x)|^{p+1} dx &\leq \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} e^{-(p+1)|x-\eta_i|} dx \\ &= \left. -\frac{1}{p+1} e^{-(p+1)(x-\eta_i)} \right|_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} \\ &\leq \frac{1}{p+1} e^{-(p+1)(\mu_i-\eta_i)} \leq C e^{-\frac{p+1}{2}(\eta_{i+1}-\eta_i)} \leq C \varepsilon^{\frac{p+1}{2}}. \end{aligned}$$

En cualquier caso sigue que:

$$\left| \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} V_i^{p+1}(x) dx \right| \leq C \varepsilon^{\frac{p+1}{2}} \quad \forall i \neq l.$$

Note que de manera completamente análoga se puede demostrar que:

$$\left| \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} V_i^{p-1}(x) dx \right| \leq C \varepsilon^{\frac{p-1}{2}} \quad \forall i \neq l. \quad (\text{B.4})$$

Ahora trabajemos con el caso $i \neq l$, $i \neq l$. Mediante cálculo directo:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} V_i^p(x) V_j(x) dx \right| &\leq C \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} e^{-p|x-\eta_i|} e^{-|x-\eta_j|} dx \\ &= C \int_{\mu_i-\eta_i}^{\mu_{i+1}-\eta_i} e^{-p|x|} e^{-|x-\eta_j+\eta_i|} dx \\ &\leq C \int_{\mu_i-\eta_i}^{\mu_{i+1}-\eta_i} e^{-p|x|} e^{|x|-\eta_j-\eta_i} dx \\ &\leq C e^{-|\eta_j-\eta_i|} \int_{\mu_i-\eta_i}^{\mu_{i+1}-\eta_i} e^{-(p-1)|x|} dx \leq C \varepsilon \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} e^{-(p-1)|x-\eta_i|} dx \leq C \varepsilon^{\frac{p+1}{2}}. \end{aligned}$$

Donde en la última desigualdad utilizamos (B.4). Concluimos que:

$$\int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} V_i^p(x) V_j(x) dx = O(\varepsilon^{\frac{p+1}{2}}) \quad \forall i \neq l.$$

Suponga ahora que $i = l \neq j$. Usando estimaciones anteriores, es sencillo ver que si $j < l$ entonces:

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} (V_l^p(x) - W_l^p(x)) V_j(x) dx \right| &\leq C e^{-\eta_i} \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} e^{-x} e^{-|x-\eta_j|} dx \\ &= C e^{-\eta_i} \int_{\mu_i}^{\mu_{i+1}} e^{-x} e^{\eta_j-x} dx \\ &= C e^{-(\eta_i-\eta_j)} \int_{\mu_i}^{\infty} e^{-2x} dx \leq C e^{-(\eta_i+2\mu_i-\eta_j)} \leq C e^{-2\eta_i} \leq C \varepsilon^3. \end{aligned}$$

y si $j > l$:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} (V_l^p(x) - W_l^p(x)) V_j(x) dx \right| &\leq C e^{-\eta_l} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} e^{-x} e^{-|x-\eta_j|} dx \\
&= C e^{-\eta_l} \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} e^{-x} e^{x-\eta_j} dx \\
&\leq C e^{-(\eta_l+\eta_j)} (\mu_{l+1} - \mu_l) \leq C \varepsilon^2 (c_1 \log(\varepsilon) + c_2)
\end{aligned}$$

En cualquier caso tendremos que:

$$\int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} V_l^p(x) V_j(x) dx = \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} W_l^p(x) V_j(x) dx + o(\varepsilon).$$

Finalmente, acotando convenientemente obtenemos:

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} V_l^p(x) V_j(x) dx \right| &\leq \int_{\mu_l}^{\mu_{l+1}} W_l^p(x) |V_j(x)| dx + o(\varepsilon) \\
&= \int_{\mu_l-\eta_l}^{\mu_{l+1}-\eta_l} W^p(x) |V_j(x+\eta_l)| dx + o(\varepsilon) \\
&\leq \int_{\mu_l-\eta_l}^{\mu_{l+1}-\eta_l} W^p(x) e^{-|x+\eta_l-\eta_j|} dx + o(\varepsilon) \\
&\leq \int_{\mu_l-\eta_l}^{\mu_{l+1}-\eta_l} W^p(x) e^{|x|} e^{-|\eta_l-\eta_j|} dx + o(\varepsilon) \\
&\leq \varepsilon \int_{-\infty}^{\infty} W^p(x) e^{|x|} dx + o(\varepsilon) \\
&\leq C \varepsilon + o(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Lo que concluye la demostración. □

Lema B.1.9. Sean $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ que cumplan (3.40). Suponga además que $\|\phi\|_* \leq \frac{1}{4}$ y σ es suficientemente pequeño. Entonces, existe $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ se tiene que:

$$\|N_\varepsilon(\phi)\|_* \leq C \|\phi\|_*^{\min\{p-\varepsilon_0, 2\}}, \quad \|D_\phi N_\varepsilon(\phi)\|_{\mathcal{L}(C^*)} \leq C \|\phi\|_*^{\min\{p-\varepsilon_0-1, 1\}}$$

Más aún, si $N < 12$ entonces:

$$\|\nabla_\eta N_\varepsilon(\phi)\|_* \leq C \|\phi\|_*$$

Demostración. Por definición:

$$N_\varepsilon(\phi) := e^{-\varepsilon x} (|V + \phi|^{p-\varepsilon-1} (V + \phi) - |V|^{p-\varepsilon-1} V - (p-\varepsilon) |V|^{p-\varepsilon-1} \phi)$$

Defina la función auxiliar:

$$f(t) = |V + t\phi|^{p-\varepsilon-1} (V + t\phi)$$

Por teorema del valor medio, existe $\xi \in (0, 1)$ tal que:

$$|V + \phi|^{p-\varepsilon-1} (V + \phi) - |V|^{p-\varepsilon-1} V = (p-\varepsilon) |V + \xi\phi|^{p-\varepsilon-1} \phi$$

y por lo tanto:

$$N_\varepsilon(\phi) = (p - \varepsilon)e^{-\varepsilon x} (|V + \xi\phi|^{p-\varepsilon-1} - |V|^{p-\varepsilon-1}) \phi \quad (\text{B.5})$$

Ahora considere otra función auxiliar, dada por:

$$g(t) = |V + t\phi|^{p-\varepsilon-1}.$$

Nuevamente, por el teorema del valor intermedio existe $\zeta \in (0, \xi)$ tal que:

$$|V + \xi\phi|^{p-\varepsilon-1} - |V|^{p-\varepsilon-1} = \xi(p - \varepsilon - 1)|V + \zeta\phi|^{p-\varepsilon-3}(V + \zeta\phi)\phi,$$

y en consecuencia:

$$N_\varepsilon(\phi) = \xi(p - \varepsilon)(p - \varepsilon - 1)e^{-\varepsilon x}|V + \zeta\phi|^{p-\varepsilon-3}(V + \zeta\phi)\phi^2$$

Consideraremos dos casos: $p > 2$ y $p \leq 2$. Para el primer caso consideramos ε suficientemente pequeño tal que $p - \varepsilon - 2 > 0$. Luego, tenemos que si $|\phi| \leq |V|$ entonces:

$$|N_\varepsilon(\phi)| \leq C|V + \zeta\phi|^{p-\varepsilon-2}|\phi|^2 \leq C|\phi|^2$$

y si $|V| \leq |\phi|$:

$$|N_\varepsilon(\phi)| \leq C|V + \zeta\phi|^{p-\varepsilon-2}|\phi|^2 \leq C|\phi|^{p-\varepsilon} \leq C|\phi|^2$$

Por lo tanto, si $p > 2$ entonces $\|N_\varepsilon(\phi)\|_* \leq C\|\phi\|_*^2$.

Para el caso $p \leq 2$ consideramos ε suficientemente pequeño tal que $1 < p - \varepsilon < 2$. Luego, de (B.5) tenemos que:

$$|N_\varepsilon(\phi)| \leq C \left| |V + \xi\phi|^{p-\varepsilon-1} - |V|^{p-\varepsilon-1} \right| |\phi|$$

Sea $s(t) = (t + 1)^{p-\varepsilon-1} - t^{p-\varepsilon-1}$. Mediante cálculo directo tenemos que:

$$s'(t) = (p - \varepsilon - 1)((t + 1)^{p-\varepsilon-2} - t^{p-\varepsilon-2}).$$

Dado que $p - \varepsilon - 2 < 0$ entonces $s'(t) < 0$ y por lo tanto es decreciente. Como $s(0) = 1$ entonces $s(t) \leq 1$ para $t \geq 0$. Si $|V + \xi\phi| > |V|$ entonces:

$$\begin{aligned} & \left| |V + \xi\phi|^{p-\varepsilon-1} - |V|^{p-\varepsilon-1} \right| \\ &= |V + \xi\phi|^{p-\varepsilon-1} - |V|^{p-\varepsilon-1} \\ &= (|V + \xi\phi| - |V|)^{p-\varepsilon-1} \left[\left(\frac{|V + \xi\phi|}{|V + \xi\phi| - |V|} \right)^{p-\varepsilon-1} - \left(\frac{|V|}{|V + \xi\phi| - |V|} \right)^{p-\varepsilon-1} \right] \\ &= (|V + \xi\phi| - |V|)^{p-\varepsilon-1} s \left(\frac{|V|}{|V + \xi\phi| - |V|} \right) \\ &\leq (|V + \xi\phi| - |V|)^{p-\varepsilon-1} \end{aligned}$$

Si $|V + \xi\phi| < |\phi|$ entonces:

$$\begin{aligned}
& \left| |V + \xi\phi|^{p-\varepsilon-1} - |V|^{p-\varepsilon-1} \right| \\
&= |V|^{p-\varepsilon-1} - |V + \xi\phi|^{p-\varepsilon-1} \\
&= (|V| - |V + \xi\phi|)^{p-\varepsilon-1} \left[\left(\frac{|V|}{|V| - |V + \xi\phi|} \right)^{p-\varepsilon-1} - \left(\frac{|V + \xi\phi|}{|V| - |V + \xi\phi|} \right)^{p-\varepsilon-1} \right] \\
&= (|V| - |V + \xi\phi|)^{p-\varepsilon-1} s \left(\frac{|V + \xi\phi|}{|V| - |V + \xi\phi|} \right) \\
&\leq (|V| - |V + \xi\phi|)^{p-\varepsilon-1}
\end{aligned}$$

Concluimos que:

$$|N_\varepsilon(\phi)| \leq C \left| |V + \xi\phi|^{p-\varepsilon-1} - |V|^{p-\varepsilon-1} \right| |\phi| \leq C \left| |V + \xi\phi| - |V| \right|^{p-\varepsilon-1} |\phi| \leq C |\phi|^{p-\varepsilon}.$$

Y por lo tanto, en cualquier caso tenemos que $\|N_\varepsilon(\phi)\|_* \leq \|\phi\|_*^{\min\{p-\varepsilon, 2\}}$.

Por otro lado, mediante cálculos estándar es fácil ver que:

$$DN_\varepsilon(\phi)(\psi) = (p - \varepsilon)e^{-\varepsilon x} (|V + \phi|^{p-\varepsilon-1} - |V|^{p-\varepsilon-1}) \psi.$$

Nuevamente, debemos estudiar los casos $p > 2$ y $p \leq 2$ por separado. Si $p > 2$, aplicando el teorema del valor medio obtenemos:

$$|DN_\varepsilon(\phi)(\psi)| = e^{-\varepsilon x} (p - \varepsilon)(p - \varepsilon - 1) |V + \vartheta\phi|^{p-\varepsilon-2} |\phi| |\psi| \leq C |\phi| |\psi|$$

Donde estamos suponiendo $p - \varepsilon - 2 > 0$. Por otro lado, si $p \leq 2$ tenemos:

$$|DN_\varepsilon(\phi)(\psi)| = (p - \varepsilon)e^{-\varepsilon x} (|V + \phi|^{p-\varepsilon-1} - |V|^{p-\varepsilon-1}) \psi \leq C (|V + \phi| - |V|)^{p-\varepsilon-1} \psi \leq C |\phi|^{p-\varepsilon-1} |\psi|$$

Así, en general se cumple que $|DN_\varepsilon(\phi)(\psi)[x]| \leq C |\phi(x)|^{\min\{p-\varepsilon-1, 1\}} |\psi(x)|$. por lo tanto, multiplicando por ρ y tomando supremo obtenemos:

$$\|DN_\varepsilon(\phi)(\psi)\|_* \leq C \|\phi\|_*^{\min\{p-\varepsilon-1, 1\}} \|\psi\|_*$$

Esto concluye la demostración de la segunda cota.

Por último, si suponemos que $N < 12$ entonces:

$$p - 2 = \frac{N + 4}{N - 4} - 2 = \frac{12 - N}{N - 4} > 0.$$

Luego, derivando directamente la definición de $N_\varepsilon(\phi)$ respecto a η_i obtenemos:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} N_\varepsilon(\phi) = e^{-\varepsilon x} (p - \varepsilon) (|V + \phi|^{p-\varepsilon-1} - |V|^{p-\varepsilon-1} - (p - \varepsilon - 1) |V|^{p-\varepsilon-3} V \phi) \frac{\partial}{\partial \eta_i} V.$$

Aplicando el teorema del valor medio tendremos que existe $0 < \xi < 1$ tal que:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} N_\varepsilon(\phi) = e^{-\varepsilon x} (p - \varepsilon) (p - \varepsilon - 1) (|V + \xi\phi|^{p-\varepsilon-3} (V + \xi\phi) - |V|^{p-\varepsilon-3} V) \phi \frac{\partial}{\partial \eta_i} V.$$

Y por lo tanto:

$$\left| \frac{\partial}{\partial \eta_i} N_\varepsilon(\phi) \right| \leq C \left| |V + \xi\phi|^{p-\varepsilon-2} - |V|^{p-\varepsilon-2} \right| |\phi| \left| \frac{\partial}{\partial \eta_i} V \right| \leq C |\phi|.$$

Sigue directamente la última estimación. \square

Lema B.1.10. Sean $\eta_1, \eta_2, \dots, \eta_k$ que cumplan (3.40). Suponga además que σ es suficientemente pequeño. Entonces:

$$\|R_\varepsilon\|_* \leq C\varepsilon^{\tilde{\sigma}}, \quad \|\nabla_\eta R_\varepsilon\|_* \leq C\varepsilon^{\tilde{\sigma}}$$

Para cierto $\tilde{\sigma} \in (\frac{1}{2}, 1)$.

Demostración. Por definición:

$$R_\varepsilon = e^{-\varepsilon x} |V(x)|^{p-\varepsilon-1} V(x) - \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} W_i^p(x)$$

Reescribiendo convenientemente:

$$\begin{aligned} R_\varepsilon &= (e^{-\varepsilon x} |V(x)|^{p-\varepsilon-1} V(x) - e^{-\varepsilon x} |V(x)|^{p-1} V(x)) \\ &\quad + (e^{-\varepsilon x} |V(x)|^{p-1} V(x) - |V(x)|^{p-1} V(x)) \\ &\quad + \left(|V(x)|^{p-1} V(x) - \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} W_i^p(x) \right) \\ &=: T_1 + T_2 + T_3 \end{aligned}$$

Primero, acotemos el término T_1 . Aplicando convenientemente el teorema del valor intermedio obtenemos que existe $\xi \in (0, \varepsilon)$ tal que:

$$|V(x)|^{p-\varepsilon-1} V(x) - |V(x)|^{p-1} V(x) = -\varepsilon \log(|V(x)|) |V(x)|^{p-\xi-1} V(x)$$

De este modo:

$$\rho(x) |T_1(x)| \leq e^{-\varepsilon x} \rho(x) \varepsilon \log(|V(x)|) |V(x)|^{p-\xi}$$

Si $|V(x)| \geq 1$ entonces:

$$\rho(x) |T_1(x)| \leq \varepsilon \rho(x) |V(x)|^{p+1} \leq C \|V\|_* \varepsilon \leq C\varepsilon$$

Por otro lado, si $|V(x)| < 1$ utilizamos el hecho de que el mapeo $t \in [0, 1] \rightarrow t^{p-\xi-1} |\log(t)|$ alcanza su máximo en $t = e^{-\frac{1}{p-\xi-1}}$ para escribir:

$$\rho(x) |T_1(x)| \leq C\varepsilon \frac{1}{e^{(p-\xi-1)}} \rho(x) |V(x)| \leq C \frac{2}{e^{(p-1)}} \|V\|_* \varepsilon < C\varepsilon.$$

Donde estamos suponiendo que $\varepsilon < \frac{p-1}{2}$. En cualquier caso, concluimos que:

$$\|T_1\|_* \leq C\varepsilon$$

Ahora, trabajemos el término T_2 . Por definición tenemos que:

$$|\rho(x) T_2(x)| = (1 - e^{-\varepsilon x}) \rho(x) |V(x)|^p$$

Aplicando el teorema del valor medio es sencillo ver que:

$$|\rho(x)T_2(x)| \leq \varepsilon x \rho(x) |V(x)|^p$$

Si $x \leq \eta_k$ entonces:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \sum_{i=1}^k e^{-\sigma|x-\eta_i|} \geq e^{-\sigma|x-\eta_k|} = e^{-\sigma(\eta_k-x)}$$

Y por ende $\rho(x) \leq e^{\sigma(\eta_k-x)}$. De (3.40) sigue que $e^{\sigma\eta_k} \leq (M\varepsilon)^{-k\sigma}$. De este modo:

$$|\rho(x)T_2(x)| \leq \|V\|_\infty^p \varepsilon (xe^{-\sigma x}) e^{\sigma\eta_k} \leq C\varepsilon^{1-k\sigma}$$

Por otro lado, si $x > \eta_k$ entonces nos conviene reescribir la expresión $|\rho(x)T_2(x)|$ como:

$$|\rho(x)T_2(x)| = (1 - e^{-\varepsilon x})[\rho(x)]^{1-p} |\rho(x)V(x)|^p \leq \varepsilon x [\rho(x)]^{1-p} |\rho(x)V(x)|^p$$

Acotando tenemos que:

$$\frac{1}{\rho(x)} = \sum_{i=1}^k e^{-\sigma|x-\eta_i|} = \sum_{i=1}^k e^{-\sigma(x-\eta_i)} \leq ke^{-\sigma(x-\eta_k)}$$

y

$$|\rho(x)V(x)| = \frac{V(x)}{\sum_{i=1}^k e^{-\sigma|x-\eta_i|}} \leq \frac{Ce^{-|x-\eta_k|}}{e^{-\sigma|x-\eta_k|}} = Ce^{-(1-\sigma)(x-\eta_k)}$$

Lo que implica que:

$$\begin{aligned} |\rho(x)T_2(x)| &\leq C\varepsilon x [ke^{-\sigma(x-\eta_k)}]^{p-1} e^{-p(1-\sigma)(x-\eta_k)} \\ &= C\varepsilon x e^{-(p-\sigma)(x-\eta_k)} \\ &\leq C\varepsilon x e^{-\sigma(x-\eta_k)} \\ &= C\varepsilon (xe^{-\sigma x}) e^{\sigma\eta_k} \\ &\leq C\varepsilon^{1-k\sigma} \end{aligned}$$

En cualquier caso:

$$\|T_2\|_* \leq C\varepsilon^{1-k\sigma}$$

Por último, veamos que se cumple algo similar para T_3 . Trabajaremos con dos casos. Sea $\beta \in (0, 1)$ una constante positiva que determinaremos más adelante. Suponga primero que $|x - \eta_l| < \beta \log\left(\frac{1}{M\varepsilon}\right)$ para algún $l \in \{1, \dots, k\}$. Note que en este caso, para $i \neq l$ se cumple que:

$$|x - \eta_i| > |\eta_l - \eta_i| - |x - \eta_l| > \log\left(\frac{1}{M\varepsilon}\right) - \beta \log\left(\frac{1}{M\varepsilon}\right) = (1 - \beta) \log\left(\frac{1}{M\varepsilon}\right).$$

Y por lo tanto

$$e^{-|x-\eta_i|} \leq C\varepsilon^{(1-\beta)}, \quad \forall i \neq l.$$

De este modo, gracias al lema [B.1.7](#):

$$|W_i(x)| \leq C\varepsilon^{(1-\beta)}, \quad |\Pi_i(x)| \leq C\varepsilon^{(1-\beta)}, \quad |V_i(x)| \leq C\varepsilon^{(1-\beta)}, \quad \forall i \neq l.$$

Más aún, de la condición $|x - \eta_l| < \beta \log\left(\frac{1}{M\varepsilon}\right)$ sigue que $2\eta_1 - \beta \log\left(\frac{1}{M\varepsilon}\right) < x + \eta_l$, y por lo tanto:

$$|\Pi_l(x)| \leq Ce^{-(\eta_l+x)} \leq Ce^{\beta \log\left(\frac{1}{M\varepsilon}\right) - 2\eta_1} \leq Ce^{-2\eta_1} \varepsilon^{-\beta} \leq C\varepsilon^{(1-\beta)}.$$

Ahora, considere la función auxiliar:

$$h(t) = (-1)^{l+1}W_l(x) + t \left((-1)^{l+1}\Pi_l(x) + \sum_{i \neq l}^k (-1)^{i+1}V_i(x) \right)$$

Aplicando el teorema del valor medio al mapeo $t \rightarrow |h(t)|^{p-1}h(t)$ obtenemos que existe $\vartheta \in (0, 1)$ tal que:

$$|V(x)|^{p-1}V(x) - (-1)^{l+1}W_l^p(x) = p|h(\vartheta)|^{p-1} \left((-1)^{l+1}\Pi_l(x) + \sum_{i \neq l}^k (-1)^{i+1}V_i(x) \right)$$

De este modo:

$$\begin{aligned} & \rho(x) \left| |V(x)|^{p-1}V(x) - \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1}W_i^p(x) \right| \\ &= \rho(x) \left| p|h(\vartheta)|^{p-1} \left((-1)^{l+1}\Pi_l(x) + \sum_{i \neq l}^k (-1)^{i+1}V_i(x) \right) + \sum_{i \neq l}^k (-1)^{i+1}W_i^p(x) \right| \\ &\leq \rho(x)p|h(\vartheta)|^{p-1} \left| (-1)^{l+1}\Pi_l(x) + \sum_{i \neq l}^k (-1)^{i+1}V_i(x) \right| + \sum_{i \neq l}^k \rho(x)W_i^p(x) \end{aligned}$$

Note que para $i \neq l$ se cumple que:

$$\rho(x)W_i^p(x) \leq Ce^{-(p-\sigma)|x-\eta_i|} \leq C\varepsilon^{(p-\sigma)(1-\beta)} \leq C\varepsilon^{(1-\beta)}.$$

Además, es fácil ver que $\rho(x)|h(\vartheta)|^{p-1}$ es una función uniformemente acotada en x . Por lo tanto, concluimos que en este caso:

$$\rho(x) \left| |V(x)|^{p-1}V(x) - \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1}W_i^p(x) \right| \leq C\varepsilon^{(1-\beta)}.$$

Estudieemos el caso contrario. Suponga que x es tal que $|x - \eta_i| \geq \beta \log\left(\frac{1}{M\varepsilon}\right)$ para todo $i \in \{1, 2, \dots, k\}$. Es claro que en este caso:

$$e^{-|x-\eta_i|} \leq C\varepsilon^\beta, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

Note que, gracias al lema [B.1.7](#):

$$\rho^{\frac{1}{p}}(x)V_i(x) \leq C e^{-\left(1-\frac{\sigma}{p}\right)|x-\eta_i|} \leq C \varepsilon^{\left(1-\frac{\sigma}{p}\right)\beta}, \quad \forall i \in \{1, 2, \dots, k\}.$$

y por ende:

$$\rho(x)|V(x)|^p \leq C \varepsilon^{(p-\sigma)\beta}.$$

Es fácil ver que se tiene un resultado análogo para las funciones W_i . Acotando T_3 obtenemos:

$$\rho(x) \left| |V(x)|^{p-1}V(x) - \sum_{i=1}^k (-1)^{i-1} W_i^p(x) \right| \leq \rho(x)|V(x)|^p + \sum_{i=1}^k \rho(x)W_i^p(x) \leq C \varepsilon^{(p-\sigma)\beta}$$

Que es la cota para este caso. Por último, fijamos β de forma que $(1-\beta) = (p-\sigma)\beta$, es decir:

$$\beta := \frac{1}{p-\sigma+1}$$

Es importante notar que con esta elección se cumple que $\beta \in (0, \frac{1}{2})$ para σ suficiente pequeño (basta que $\sigma < p-1$). Luego, para todo $x \in (0, \infty)$ se cumplirá que:

$$\rho(x) \left| |V(x)|^{p-1}V(x) - \sum_{i=1}^k (-1)^{i+1} W_i^p(x) \right| \leq C \varepsilon^{(1-\beta)}$$

Tomando supremo concluimos que:

$$\|T_3\|_* \leq C \varepsilon^{(1-\beta)}.$$

Utilizando todas las cotas obtenidas llegamos a:

$$\|R_\varepsilon\|_* \leq C \varepsilon^{\tilde{\sigma}}.$$

con $\tilde{\sigma} := \min\{(1-k\sigma), (1-\beta)\}$. En cualquier caso se verifica que $\tilde{\sigma} \in (\frac{1}{2}, 1)$ para σ suficientemente pequeño.

Para demostrar que $\|\nabla_\eta R_\varepsilon\|_* \leq C \varepsilon^{\tilde{\sigma}}$, basta notar que:

$$\frac{\partial}{\partial \eta_i} R_\varepsilon = \frac{\partial}{\partial \eta_i} T_1 + \frac{\partial}{\partial \eta_i} T_2 + \frac{\partial}{\partial \eta_i} T_3$$

Luego, basta aplicar el mismo procedimiento anterior a estos términos, llegando al resultado deseado. \square

Bibliografía

- [1] S. ALARCÓN, *Sign-changing solutions at the almost Hénon critical exponent*, J. Math. Appl. 465 (2018) 624-642.
- [2] S. ALARCÓN AND A. PISTOIA, *A Paneitz-type problem in pierced domains*, Differential and Integral Equations 28 (2015) 823-838.
- [3] L. CAFFARELLI, B. GIDAS AND J. SPRUCK, *Asymptotic Symmetry and local behavior of semilinear elliptic equations with critical Sobolev growth*, Comm. Pure Appl. Math. 42 (1989) 271-297.
- [4] W. CHEN AND C. LI, *Methods on Nonlinear Elliptic Equations*, American Institute of Mathematical Sciences (2010).
- [5] A. CONTRERAS AND M. DEL PINO, *Nodal bubble-tower solutions to radial elliptic problems near criticality*, Discrete Contin. Dyn. Syst. Ser. B 16 (2006) 525-539.
- [6] W. DAI AND G. QIN, *Liouville-type theorems for fractional and higher-order Hénon-Hardy type equations via the method of scaling spheres*, International Mathematics Research Notices (2022), rnac079.
- [7] W. DAI, S. PENG AND G. QIN, *Liouville type theorems, a priori estimates and existence of solutions for sub-critical order Lane-Emden-Hardy equations*, J. d'Analyse Mathématique 146 (2022) 673-718.
- [8] Y. DAMMAK AND R. GHOUDI, *Sign-changing tower of bubbles to an elliptic subcritical equation*, Communications in Contemporary Mathematics, 21 (2019), no. 7, 1850052.
- [9] M. DEL PINO, J. DOLBEAULT AND M. MUSSO, *"Bubble tower" radial solutions in the slightly supercritical Brezis-Nirenberg problem*, J. Differential Equations 193 (2003) 280-306.
- [10] L. EVANS, *Partial Differential Equations*, Second Edition, American Mathematical Soc. (2010).
- [11] R. FEYNMAN, R. LEIGHTON AND M. SANDS, *The Feynman Lectures on Physics*, Vol II, Basic Books (2010).
- [12] F. GAZZOLA, H-C. GRUNAU AND G. SWEERS, *Polyharmonic boundary value problems*, Springer-Verlag Berlin etc., (2010).

- [13] B. GIDAS AND J. SPRUCK *Global and local behavior of positive solutions of nonlinear elliptic equations*, Comm. Pure Appl. Math. 34 (1981) 525-598.
- [14] M. HÉNON, *Numerical experiments on the stability of spherical stellar systems*, Astron. Astrophys. 24 (1973) 229-238.
- [15] C.-S. LIN, *A classification of solutions of a conformally invariant fourth order equation in R^n* , Comment. Math. Helv. 73 (1998) 206–231.
- [16] G. LU AND J. WEI, *On a Sobolev inequality with remainder terms*, Proc. Amer. Math. Soc. 128 (2000) 75-84.
- [17] G. LU AND J. ZHU, *Symmetry and regularity of extremals of an integral equation related to the Hardy-Sobolev inequality*, Calc. Var. Partial Differential Equations, 42 (2011) 563-577.
- [18] E. MITIDIERI, *A Rellich type identity and applications*, Comm. Partial Diff. Equations, 18 (1993) 125-151.
- [19] K. NAGASAKI, *Radial solutions for $\Delta u + |x|^l |u|^{p-1} u = 0$ on the unit ball in \mathbb{R}^N* , J. Fac. Sci., Univ. Tokyo, Sect. IA, Math. 36 (1989) 211-232.
- [20] Q. NGÔ AND D. YE, *Existence and non-existence results for the higher order Hardy-Hénon equations revisited*, J. Math. Pures Appl. 163 (2022) 265-298.
- [21] W.-M. NI, *A nonlinear dirichlet problem on the unit ball and its applications*, Indiana Univ. Math. J. 31 (1982) 801-807.
- [22] W.-M. NI AND R. NUSSBAUM, *Uniqueness and nonuniqueness for positive radial solutions of $\Delta u + f(u, r) = 0$* , Comm. Pure Appl. Math. 38 (1985) 67-108.
- [23] S. POHOZAEV, *Eigenfunctions of the equation $\Delta u + \lambda f(u) = 0$* , Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 165 (1965) no. 1, 36-39.
- [24] R. VAN DER VORST *Best constant for the embedding of the space $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ into $L^{2N/(N-4)}(\Omega)$* , Differential Integral Equations, 6 (1993) no. 2, 259-276.
- [25] R. VAN DER VORST *Variational identities and applications to differential systems*, Arch. Rational Mech. Anal. 116 (1991) 375-398.