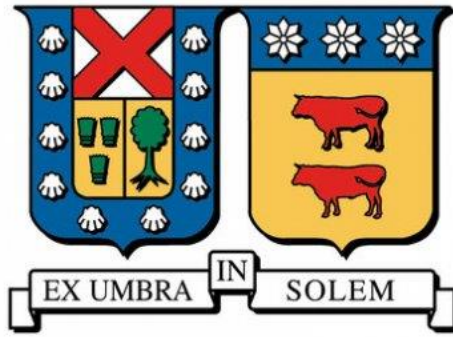




UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS

**OPTIMIZACIÓN DE RUTEO DE VEHÍCULOS CON RESTRICCIÓN DE
CAPACIDAD Y VENTANAS DE TIEMPO PARA LA DISTRIBUCIÓN DEL
PRODUCTO DE UNA CERVECERÍA ARTESANAL**

**MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL
INDUSTRIAL**

AUTOR

TAMARA PAZ VELÁSQUEZ MARTÍNEZ

PROFESOR GUÍA

CRISTOBAL FERNÁNDEZ

VALPARAÍSO, AGOSTO, 2019.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera expresar mis agradecimientos, primero que todo a mis padres por su paciencia, comprensión y apoyo, en todos los ámbitos durante mi formación tanto familiar como académica, puesto que gracias a ellos pude concretar mis aspiraciones y objetivos en esta etapa de mi vida, y que su gran ejemplo me motivó a crecer como persona y empujar todos mis límites; quiero destacar a mi padre por su modelo de esfuerzo, disciplina y sus grandes aspiraciones en la vida, y a mi madre por su ejemplo de luchadora, por nunca rendirse ante ningún obstáculo que la vida ha presentado y enseñarme que todo es posible.

A mi profesor guía el Dr. Cristóbal Fernández, puesto que tuve el privilegio de aprender en sus cátedras, me dio la oportunidad de abarcar un tema con muchos desafíos confiando en mí, y sobre todo por su comprensión, apoyo y guía. Estas palabras para usted.

A mi correferente Prof. Jorge Weston, quien me dio las herramientas para lograr completar este desafío, guiándome durante el proceso siempre con mucha disposición y apoyo.

Finalmente, a mis amigos que me acompañaron durante mi proceso universitario, quienes fueron un apoyo en todo ámbito; mis alegrías en los momentos buenos y orgullo e inspiración durante sus logros.

RESUMEN EJECUTIVO

El presente trabajo da una visión actual y real de la importancia en el proceso de distribución en las empresas y los beneficios que puede traer consigo económicamente. En principio se estudian las variantes del problema de ruteo de vehículos (VRP), para determinar la situación que más se asemeja al problema operativo de una empresa en particular, la cual será mantenida en anonimato. Esta empresa es una productora y distribuidora de cerveza artesanal de origen propio y buscaba una solución en el área operativa debido a los grandes costos que implica la distribución de sus productos.

Es así como el VRP con ventanas de tiempo (VRPTW por sus siglas en inglés), el cual es uno de los problemas de mayor complejidad en las empresas, fue un importante foco de investigación en el desarrollo de este caso. Mediante este modelo matemático se encontraron alternativas de ruteo de distribución que minimizaran la distancia recorrida satisfaciendo la demanda de todos los clientes bajo dos alternativas de visita de clientes, la actual y la propuesta, es decir, para ambas alternativas se encontró la ruta que optimiza el costo de transporte. Esto se logró además ajustándose a las restricciones de capacidad del vehículo, horizonte de tiempo y horario de los clientes; lo que llevó finalmente a mejorar la eficiencia del servicio y obtener beneficios mediante la reducción de costos de transporte.

Para alcanzar este objetivo, se utilizaron los softwares computacionales Python y AMPL; con el primero se buscó, a través de una heurística, hacer una aproximación de costo a la situación actual, y con el segundo, a través de un método exacto, se obtuvieron las rutas óptimas según la alternativa de clientes que se deseara visitar. Finalmente se concluyó que, para modelos similares, el uso de un método exacto de programación es el recomendado para minimizar los costos de transporte.

ÍNDICE

1	INTRODUCCIÓN.....	7
2	PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	11
3	OBJETIVOS	13
3.1	Objetivo General.....	13
3.2	Objetivos Específicos	13
4	MARCO TEÓRICO	14
4.1	Logística	14
4.2	Problema de optimización.....	15
4.3	Características del problema	16
4.3.1	Clientes	17
4.3.2	Bodega o Depósito.....	18
4.3.3	Vehículos	19
4.4	Visión General de problemas de clase VRP y Formulación Matemática	19
4.4.1	Problema del Agente Viajero (TSP).....	20
4.4.2	m-TSP	23
4.4.3	Problema con capacidades.....	25
4.4.4	CVRP con flota Heterogénea	28
4.4.5	Ventanas de tiempo	29
4.4.6	Pick up delivery con ventanas de tiempo	32
4.5	Complejidad computacional	37
4.6	Técnicas de Optimización.....	38
4.7	Métodos exactos	40
4.7.1	Branch & Bound con asignación de límite inferior	40
4.7.2	Partición de conjuntos y Generación de Columnas	42
4.8	Métodos Aproximados	45
4.8.1	Métodos Metaheurísticos.....	45
4.8.2	Métodos Heurísticos	46
5	METODOLOGÍA	53
5.1	Análisis del tema	53
5.2	Descripción de la empresa.....	53
5.2.1	Descripción Clientes.....	54
5.2.2	Descripción de Actividades para la repartición de productos	55
5.3	Elección de Modelo	56
5.3.1	Formulación Matemática.....	58
5.4	Parámetros del Modelo.....	58
5.5	Método Escogido	62

6	RECOPIACIÓN DE DATOS	62
6.1	Caso base.....	62
6.2	Caso propuesto	68
7	RESULTADOS.....	72
7.1	Resolución en lenguaje Computacional Python	72
7.2	Resolución en lenguaje Computacional AMPL	74
8	ANÁLISIS DE RESULTADOS	79
9	CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	81
10	BIBLIOGRAFÍA	83
11	ANEXOS.....	86
11.1	Mapas	86
11.1.1	Localización Clientes	86
11.1.2	Rutas Python.....	87
11.1.3	Rutas AMPL	89
11.2	Matrices Distancia	91
11.3	Matrices Tiempo	95

ÍNDICE DE ILUSTRACIONES

Ilustración 1: Variables del VRP (Fuente: Autor)	20
Ilustración 2: Sub-tour (Fuente: Autor)	23
Ilustración 3: Técnicas de optimización (Fuente:Autor)	39
Ilustración 4: Diagrama Ahorro de rutas (Fuente:Autor)	47

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Selección de Heurísticas para la solución del VRPTW	52
Tabla 2: Cantidad de visitas a clientes por mes.....	63
Tabla 3: Frecuencia de visita por zona	64
Tabla 4: Demanda clientes mensual	66
Tabla 5: Demanda clientes por visita	67
Tabla 6: Frecuencia de visita por zona	69
Tabla 7: Demanda por cliente por zona para caso aplicado	70
Tabla 8: Ventanas de tiempo por zona	71
Tabla 9: Ruteo Python Zona 1 Caso Base	73
Tabla 10: Ruteo Python Zona 2 Caso Base	74
Tabla 11: Ruteo AMPL Zona 1 Caso base	75
Tabla 12: Ruteo AMPL Zona 2 Caso base	76
Tabla 13: Ruteo AMPL Zona 2 Caso propuesto	77
Tabla 14: Ruteo AMPL Zona 2 Caso propuesto	78
Tabla 15: Comparación de métodos Zona 1 Caso base.....	79
Tabla 16: Comparación de métodos Zona 2 Caso base.....	79
Tabla 17: Resumen resultados caso propuesto por zona	80
Tabla 18: Cuadro comparativo de resultados	80

1 INTRODUCCIÓN

En la última década, el mercado global de vinos y bebidas espirituosas ha experimentado un crecimiento constante. Según la Organización mundial de la Salud (OMS) en el año 2010 se registró un consumo total de alcohol per cápita en el mundo de un promedio de 21,2 litros de alcohol puro entre los hombres, y 8,9 litros entre las mujeres.

Según el Registro Internacional de Vinos y Espirituosos (IWSR, por sus siglas en inglés), en el año 2016 el mercado global del alcohol se contrajo un 1,3%, lo que significa que por segundo año consecutivo experimentó un crecimiento negativo; acorde con el estudio esto se debe principalmente a las desaceleraciones de algunos países de grandes economías, sin embargo el consumo de bebidas espirituosas creció un 0,3% a nivel mundial; mercado en el que se puede observar que algunas bebidas se vieron muy beneficiadas mientras otras experimentaron grandes caídas. Por otro lado, el mercado de la cerveza se contrajo por cuarto año consecutivo, un 1,8% a nivel global.

Según la IWSR durante el 2016, en el mundo se consumió una totalidad de 184.834 millones de litros de cerveza, lo que como se mencionó previamente, corresponde a una caída del 1,8%. Esto se explica debido a que tres de los cinco países con mayor producción de cerveza en el Mundo: China, Brasil y Rusia, disminuyeran su producción un 4,2%, un 5,3% y un 7,8% respectivamente. (BBC Mundo, 2017)

Según la Organización Panamericana de la Salud (OPS), en la región de Las Américas el consumo de alcohol era alrededor de 2,2 litros mayor que el promedio mundial en 2014. En esta región además han aumentado los episodios de consumo excesivo, pasando de una

tasa del 4,6% el año 2005 al 13,0% el 2010 en el caso de las mujeres; y en el de los varones del 17,9% al 29,4% en los mismos años respectivos (SENDA-MINSAL, 2016)

En Chile, según la OMS, se presenta el mayor nivel de consumo de alcohol puro per cápita en América Latina, con 9,6 litros anuales, esta cifra que hace referencia al volumen de etanol presente en todos los tipos de alcohol consumidos en el país representa un volumen de 1.099.000 litros anuales, cifra que según Euromonitor alcanza los 61,3 litros por persona, además, Chile es uno de los países que tiene uno de los patrones de uso más riesgoso o “binge drinking” a nivel mundial.

Según la OMS el 2015 los chilenos bebían 55 gramos de alcohol por día de consumo, casi triplicando el límite de 20 gramos propuesto por la misma organización y además el uso de esta sustancia se concentra en sólo 1,6 días como promedio, sumado a esto en la población entre 15 a 24 años, en promedio beben 112 gramos de alcohol puro por día de consumo. (MINSAL, 2016). Cabe mencionar que según la Asociación de Productores de Cerveza de Chile (ACECHI), la Asociación Pro Consumo Responsable de Bebidas y Espirituosas (APROCOR) y Vinos de Chile, según un estudio que realizaron entre el 2015 y mayo de 2017 con la consultora Euromonitor Internacional, líder mundial en consultoría con 40 años de experiencia en publicaciones de informes y análisis de mercado, se determinó que en el 2015 se consumieron 10.454,5 [HL] de alcohol puro (AP) en bebidas alcohólicas ilegales, lo que representa tan solo al 1,2% del total del mercado, el cual se estima en 907.396,2 [HL] AP, lo que significa 0,1[L] de AP ilegal per cápita, siendo este el de los más bajos de la región; dicho estudio buscaba estimar el consumo per cápita con una metodología clara, robusta y comprobada para poder obtener de esta forma una mayor confiabilidad de los datos. Los resultados anteriormente mencionados fueron mencionados como un consumo ilegal de

alcohol prácticamente inexistente; lo que permitió determinar que los datos presentados representan una fiel radiografía de la industria y el mercado chileno. (ACECHI-APROCOR-Vinos de Chile, 2015)

Actualmente las importaciones de la cerveza siguen aumentando sostenidamente, sólo durante el primer semestre del 2016 se importaron 85 millones de litros, mientras que durante el primer semestre del 2017 la cantidad ascendió a 118 millones de litros lo que corresponde a un crecimiento del 40% y que según la Asociación de Productores de Cerveza de Chile representa un 20% del total de litros consumidos.

Según cifras de Euromonitor International, el consumo de cerveza en Chile, durante 2018, llegó casi a los 1.000 millones de litros, lo que se traduce a US\$3.805 millones de comercialización, correspondiente a un 6,6% de alza respecto al 2017 y a un 35% al 2013, donde se llegó a los 715, 2 litros.

En Chile, durante el 2017 el consumo de cerveza aumentó un 3%. Anualmente, cada chileno bebe 46 litros de cerveza, cantidad que ha ido en explosivo aumento, creciendo tres veces más que hace diez años. Este incremento se observa principalmente en el segmento artesanal, que ha experimentado un alza de un 15% en el consumo en relación con el año anterior. (Iturriaga, 2017) Durante este año, este último tipo de cervezas tuvo una participación de un 1% en el mercado de los alcoholes, cabe destacar que la Asociación de Productores de Cerveza de Chile proyecta que el consumo, la producción y la exportación de cervezas artesanales seguirán en un aumento paulatino.

Por otro lado, la entrega y logística para el cliente, es un factor fundamental; la eficiencia en la entrega de productos, el cumplimiento y la competencia son factores que

relacionan la distribución física con el éxito de las ventas de una empresa. Por ello, se deben establecer claramente los costos de la cadena logística, ya que cada operación requerirá de un trámite, una contratación, un documento e implicará costos y tiempos diferentes (Castellanos R., 2009). En las empresas los costos de transporte representan del 50% al 60% de los costos logísticos (Fernández Díez de los Ríos, 2014). Es así como se hace relevante, utilizar herramientas que permitan una optimización de distribución, para hacer frente al crecimiento constante de demanda considerando los costos y el servicio al cliente.

Para esta tesis se trabajará resolviendo un VRP con diversas restricciones operativas y se planteará su funcionamiento en el mercado de la cerveza artesanal, gracias a la facilitación de información de una empresa que opera en el rubro.

Las restricciones por considerar serán: el reparto de producto desde una única bodega o depósito central, capacidad limitada del vehículo, múltiples viajes de distribución, tipo de entrega “delivery” y ventanas de tiempo, lo que implica que no se puede entregar producto fuera del tiempo preestablecido, además se considerarán los parámetros de demanda específica por cliente, un único vehículo para hacer frente a la demanda, tiempo de servicio preestablecido, tiempos de viaje, horizonte de tiempo por parte de la empresa.

Con la resolución del problema se buscará mostrar como un control óptimo en la distribución de los productos de una empresa, puede tener grandes beneficios a nivel económico para ella.

2 PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

Hoy en día la logística y la gestión de operaciones como parte de la estrategia de operaciones de una empresa son de suma importancia dentro de las organizaciones debido a que con ellas es posible encontrar ventajas competitivas consistentes y sostenibles que permitan a la organización diferenciarse de otras empresas, este valor diferenciado puede ser de carácter de costos, calidad, flexibilidad, servicio o innovación; las acciones contempladas en el plan estratégico se dirigen a generar valor a través del proceso productivo.

Es de esta área que depende toda la operativa de producción de bienes o de prestación de servicios, con el mejor aprovechamiento posible de los recursos disponibles, y por tanto es un tema a considerar para todas las empresas sin importar el mercado al que estén apuntando.

Algunos problemas importantes que se deben resolver en el área de operaciones son los problemas de localización, ya sea para maximizar utilidad o para quitar a la competencia la mayor cantidad de participación de mercado posible, elección que usualmente depende si se está en un mercado competitivo o no, y los problemas de ruta, en los cuales se busca satisfacer a los clientes y minimizar costos de ruta.

La empresa con la que se trabaja en esta tesis está inmersa en el rubro de la cerveza artesanal; inició sus actividades en Viña del Mar con una capacidad de producción de 100 litros al mes, ventas que en su totalidad no superaban los 70 litros al mes y clientes ubicados únicamente en las comunas de Viña del Mar y Valparaíso a los cuales se les distribuía sin problema alguno con un solo vehículo destinado para ello.

Este panorama se fue modificando debido al crecimiento constante de demanda, lo que los llevó a tener que expandirse y cambiar la planta de producción a Casablanca, por lo que decidieron incluir en su mercado objetivo a la región metropolitana, aumentando drásticamente la cantidad de clientes y con ello también los puntos de entrega de producto y la distancia a recorrer para satisfacer la demanda, lo que ha culminado en un aumento considerable de costos de transporte y dificultad para satisfacer a sus clientes, lo que se ha transformado en un problema que debe ser solucionado para reducir los costos y tiempo de distribución.

3 OBJETIVOS

3.1 Objetivo General

Desarrollar, mediante un modelo, alternativas de ruteo para la distribución de cervezas artesanales de una empresa en particular, en las ciudades de Valparaíso, Viña del Mar y Santiago, que determinen una solución óptima de distribución y su costo asociado de transporte.

3.2 Objetivos Específicos

- Desarrollar dos algoritmos para resolver el problema mediante un método heurístico y un método exacto, respectivamente.
- Determinar el costo de transporte de la situación actual, mediante un método heurístico.
- Cuantificar los beneficios económicos del uso de la ruta inicial obtenida mediante la resolución del VRP por el método exacto frente a la situación actual.
- Cuantificar los beneficios económicos del uso de la ruta propuesta, obtenida mediante la resolución del VRP por el método exacto frente a la situación actual.

4 MARCO TEÓRICO

4.1 Logística

La logística es una pieza clave en la cadena de producción y/o suministro de cualquier empresa. A través de la logística, las empresas consiguen poner a disposición de los clientes sus productos y servicios en el momento y lugar adecuados, es decir, ésta supone la ejecución, planificación y control de todas las actividades relacionadas con la obtención, almacenamiento y traslado de materiales (ya sea desde las materias primas necesarias en las primeras etapas del proceso de producción hasta los productos terminados que van directos al cliente final). (Nuño, 2017) Sin embargo, normalmente las empresas no son capaces de controlar todo el canal de flujo de cada producto, por lo mismo la logística en las empresas tiene un alcance más limitado.

Los componentes de un sistema típico de logística son: servicios al cliente, pronóstico de la demanda, comunicaciones de distribución, control de inventarios, manejo de materiales, procesamiento de pedidos, apoyo de partes y servicio, selección de la ubicación de fábricas y almacenamiento (análisis de localización), compras, embalaje, manejo de bienes devueltos, eliminación de mercaderías aseguradas rescatadas (desechos) y desperdicios, tráfico y transporte, almacenamiento y provisión. (Ballou R. H., 2004)

De acuerdo con el autor Castellanos, en su *Manual de la gestión logística del transporte y distribución de mercancías* la logística determina y coordina en forma óptima el producto, cliente y tiempo correcto. La logística es por lo tanto un modelo, un marco referencial, un mecanismo de planificación; es una manera de pensar que permitirá incluso reducir la incertidumbre de un futuro desconocido. La importancia de ella radica en la

necesidad de mejorar el servicio a un cliente, optimizando la fase de mercadeo y transporte al menor costo posible.

La trascendencia económica del sector del transporte genera costos de gran envergadura. La distribución física representa para las empresas entre la sexta y la cuarta parte de las ventas y entre uno y dos tercios del total de los costos logísticos. (Ballou R. , 1991)

En este trabajo, el problema será enfocado en la logística de transporte y la optimización de costos de estos, para lo cual se construirá un modelo o representación aproximada de la realidad que permitirá definir el problema y traducirlo a relaciones matemáticas como un problema de optimización, el que se denomina comúnmente como problema de ruteo.

Para resolver los problemas de ruteo, se debe saber de qué forma distribuir los productos, es decir, saber qué tipo de vehículo utilizar y cuántos de estos son necesarios para satisfacer la demanda a un costo mínimo, además determinar cuál es la mejor ruta, definirla de forma que se generen beneficios de tiempo y/o económicos, considerar limitaciones de tiempo o restricciones de capacidad, etc.

4.2 Problema de optimización

En este tipo de problema, se busca calcular el valor máximo o mínimo de una función objetivo. Este problema se compone de una o más variables de decisión $(x_1, x_2, \dots, x_n) \in S$ y al subconjunto de números reales, las cuales se utilizan para construir la función objetivo $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$, donde S es el conjunto de soluciones factibles y un subconjunto de $\mathbb{R}^n$, los

parámetros pueden ser certeros o con incertidumbre, y por último se compone por las restricciones propias del modelo. (Amaya A., 2012)

En la optimización determinista tradicional se asume que los parámetros son conocidos, sin embargo, cuando hay cierta incertidumbre en los datos, ya sea por errores de medida, carencia de datos fiables, parámetros que representan información sobre el futuro, entonces se habla de optimización estocástica. (Ramos & Cerisola, 2016)

Cuando la función objetivo $f(x_0)$ y las restricciones del modelo son lineales, se presenta un problema de programación lineal, sin embargo, si alguno de las funciones del modelo no es lineal, se presenta un problema de optimización no lineal. Estos pueden ser linealizados a través de artificios matemáticos. (Quinteros, Alonso, Escudero, Monique, & Weintraub, 2006)

En otro caso si las variables de decisión de los problemas lineales pertenecen a enteros positivos, el problema de optimización se denomina problema de programación entera lineal o ILP (por sus siglas en inglés Integer Linear Problem), un caso particular de los ILP es el caso cuando las variables son binarias, denominándose BILP por sus siglas en inglés Binary Integer Linear Problem. Cuando solo algunas de las variables son de naturaleza discreta y las otras no, entonces se habla de un problema de programación lineal entera mixta o MILP (Mixed Integer Linear Problem). (Riff, s.f)

4.3 Características del problema

El problema de ruteo de vehículos se caracteriza a modo general por tener uno o más depósitos centrales o bodegas, clientes que requieren productos con cierta demanda y uno o más vehículos disponibles con cierta capacidad de transportación. Inicialmente, se debe

determinar una red vial que compone el conjunto de rutas que comunique a él o los depósitos, con los respectivos clientes y/o a los clientes entre sí, cuya demanda debe ser satisfecha tomando en consideración una serie de potenciales restricciones operacionales, las cuales se mencionarán más adelante. La red vial se puede describir como un grafo, donde los arcos de éste representan los tramos factibles y los vértices corresponden a los nodos clientes y depósito(s) central(es) o bodega(s). La ruta escogida permitiría minimizar los costos de transporte asociados a la distribución de los productos.

En el caso de presentarse el problema con un solo vehículo sin restricciones de capacidad el problema se denomina el problema del agente viajero o TSP (Travelling Salesman Problem), el cual vendría siendo una forma de VRP en su forma más sencilla; de lo contrario se debe definir la homogeneidad de la flota de vehículos, las capacidades de estos, ventanas de tiempo de existir, tipo de entrega, dinamicidad de la programación. etc. (Lozada & Cadena, 2012)

4.3.1 Clientes

Los clientes se caracterizan por poseer cierta demanda que se debe satisfacer. En algunos casos la demanda es un servicio, por lo que el cliente debe ser visitado por un vehículo para poder satisfacerlo, otra variante de servicio es que cada cliente tiene una ubicación y quiere ser trasladado a otra, en este caso el vehículo sí se ve limitado a la capacidad de pasajeros que puede transportar. En otros casos la demanda en sí, ocupa lugar en el vehículo, los cuales tienen capacidad limitada, y debe ser trasladada desde un depósito o almacén a los clientes, por lo que puede ocurrir que un vehículo no pueda satisfacer a la totalidad de los clientes; en estos casos se podría recurrir a tener que realizar más de un viaje, lo que matemáticamente se visualiza como más de un vehículo; en otro caso se puede dar

que los nodos clientes son proveedores y estos se deben visitar primero para llevar la mercadería a los depósitos/almacenes, o también puede ocurrir que la mercadería es llevada a los clientes directamente desde los proveedores o que ésta sea llevada desde los almacenes. Por otro lado, los clientes pueden tener restricciones de horario, estas limitaciones de tiempo generalmente se expresan en intervalos, los cuales se denominan comúnmente “ventanas de tiempo”. Otro caso en particular ocurre cuando al visitar al cliente/proveedor se debe dejar y recoger mercancía, esto ocurre generalmente cuando la visita al cliente es debido al agotamiento parcial o total de sus productos, lo que implica tener que recoger mercancía vacía y reponer los productos agotados. En este último caso descrito, se debe tener muy presente que la suma de lo que se debe dejar y recoger, no puede exceder la capacidad del vehículo en ningún momento del recorrido, ese caso en particular es conocido como pick-up (recogida) y delivery (entrega) de productos.

4.3.2 Bodega o Depósito

Las mercaderías a distribuir y los vehículos distribuidores se encuentran en la bodega o depósito principal. En algunos problemas con un único depósito se suele exigir que las rutas comiencen y terminen en la misma. En los problemas de múltiples depósitos, puede ocurrir que estos tengan una flota de vehículos asignada, por lo tanto, también se suele exigir que cada vehículo comience y finalice en su almacén/bodega respectiva.

Las bodegas, al igual que los clientes, suelen estar caracterizados por tener ventanas de tiempo, el cual es un margen de tiempo para que los vehículos inicien y terminen sus actividades; en dichas ventanas se debe tener en consideración el tiempo que se tarda en cargar/descargar el vehículo, en la preparación del vehículo al comenzar y/o en su limpieza al regresar.

4.3.3 Vehículos

Los vehículos se ven caracterizados principalmente por su capacidad, la cual puede ser medida por una o más dimensiones, como por ejemplo peso y/o volumen, además incluyen costos asociados a su uso, como el costo fijo al utilizarlo y los costos variables dependientes de la distancia recorrida.

Cuando se cuenta con vehículos que poseen los mismos atributos se denomina flota homogénea, si la capacidad, costos, o alguna otra dimensión cambia entonces la flota es heterogénea.

Para optimizar recursos se busca utilizar la menor cantidad de vehículos posible y que se minimice la distancia recorrida de cada uno de ellos.

4.4 Visión General de problemas de clase VRP y Formulación Matemática

En esta sección se proporcionará una definición formal y modelos teóricos gráficos de los problemas básicos de enrutamiento de vehículos que han recibido la mayor atención en la literatura científica. Primero se describirá el problema del TSP (Travelling Salesman Problem) y luego su extensión con múltiples viajes m-TSP, después el problema de ruteo de vehículos (VRP, por sus siglas en inglés “*Vehicle Routing Problem*”) con sus extensiones más típicas, como el VRP capacitado, que es el miembro más estudiado de la familia, el VRP con flota heterogénea, el VRP con ventanas de tiempo y por último el VRP con recogida y entrega. También se presentará la notación relevante y la terminología utilizada.

En la Ilustración 1, se presenta un diagrama que resume los principales problemas descritos en este capítulo y las conexiones entre ellos. Las flechas indican extensión del anterior; es decir, si la flecha va del globo A al globo B, el globo B es una extensión del A.

Cabe destacar que cada uno de estos problemas tienen variaciones asociadas, sin embargo, no se profundizará en ellas debido a que se salen del alcance de este trabajo.

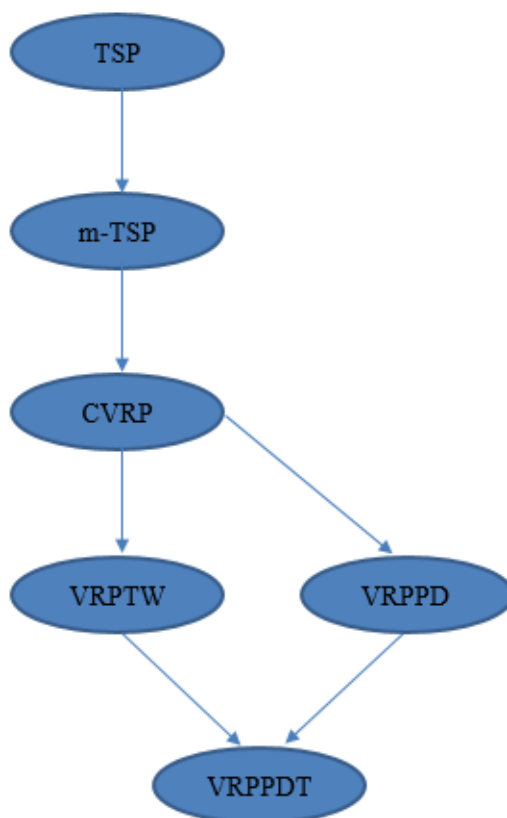


Ilustración 1: Variables del VRP (Fuente: Autor)

4.4.1 Problema del Agente Viajero (TSP)

El TSP es uno de los más estudiados en el campo de la optimización, ya que cuenta con diversas aplicaciones en la industria. Hace referencia a la visita a lugares o nodos (para entregar o recoger mercancías) con el fin de resolver problemas que impidan minimizar algún objetivo (tiempo o costos) o maximizar algún otro. (Espinosa, Sánchez, & Orlando, 2016). Además fue el primer problema que se demostró ser de clase de complejidad-NP (nondeterministic polynomial time) por Karp en 1972 (Jünger, Reinelt, & Rinaldi, 1995)

Este problema fue inicialmente propuesto de dos formas: una por Dantzig, Fulkerson y Johnson (DFJ); y la otra por Miller, Tucker y Zemlin (MTZ), sin embargo, la primera formulación funcionaba mejor, lo que no se sabía hasta que fue demostrado en 1990. Luego en mayo de 2017, Mark Velednitsky reformuló y demostró el problema de una forma mucho más sucinta, pasando de 28 páginas de demostración a tan solo un par de líneas, la cual ya fue publicada en *Operations Research Letters*. (Berkeley IE&OR, 2017)

En el estudio de Benhida & Mir (2018), “*Generating subtour elimination constraints for the Traveling Salesman Problem*” se resuelve el problema bajo tres formulaciones, MTZ, DFJ y DL (Desrochers-Laporte), obteniendo que la formulación DL es significativamente más fuerte que la MTZ, pero no compite con la DFJ, cuyo valor de relajación resultó ser el mejor de las tres formulaciones.

El TSP tiene como característica principal el uso de un solo vehículo, es decir, no se necesita especificar el conjunto vehículos. Este vehículo debe visitar y satisfacer a todos los clientes, mediante una sola ruta que inicia y termina en el mismo punto.

Antes de la formulación del problema, es importante mencionar que el problema se puede definir como un grafo $G(N, A)$, donde N es el conjunto de nodos, los que incluye los clientes y el depósito N_0 . Sea $C = C_{ij}$ la matriz de costos/distancias asociada a cada par (i, j) perteneciente a A ; se dice que C es simétrica cuando $c_{ij} = c_{ji}$ y asimétrica en cualquier otro caso. Se denotará como $D(i)$ al conjunto de nodos adyacentes e incidentes a i , tal que:

$D(i) = \{j \in V | (i, j) \in A\}$ y $O(i)$ a los que salen de i , tal que $O(i) = \{j \in V | (j, i) \in A\}$.

Luego, este problema puede formularse como:

$$\min \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} x_{ij} \quad (A)$$

$$s. a \quad \sum_{j \in O(i)} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N \quad (1)$$

$$\sum_{i \in D(j)} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N \quad (2)$$

$$\sum_{\substack{(i,j) \in A \\ i \neq j}} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall 2 \leq |S| \leq |N| - 2 \quad (3)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A \quad (4)$$

Notar que (A) es la función objetivo, la cual busca minimizar los costos totales de distancia/tiempo, dependiendo de en qué se haya querido medir el parámetro C .

Las restricciones (1) y (2) hacen que el vehículo entre y salga de cada nodo una vez, es decir que todos los nodos sean visitados. Ambas podrían resumirse en la siguiente restricción:

$$\sum_{j \in O(i)} x_{ij} - \sum_{j \in D(j)} x_{ji} = 0, \quad \forall i \in N \quad (*)$$

por lo que el modelo quedaría sujeto a tres restricciones en total, en lugar de cuatro. La restricción (3) evita el sub-tour, es decir, obliga a que todo subconjunto de nodos S sea abandonado al menos una vez, esto evita que haya una “teletransportación” por parte del vehículo, como se indica en la siguiente figura, en la cual se puede observar dos sub-tours. (Benhida & Mir, 2018)

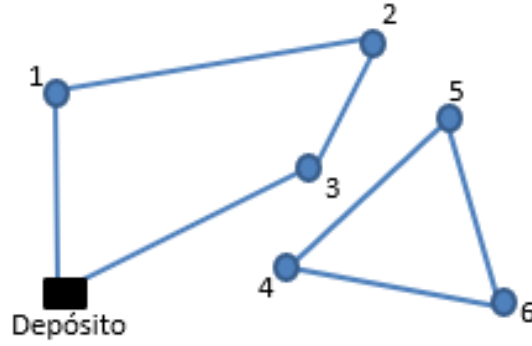


Ilustración 2: Sub-tour (Fuente: Autor)

Como se puede ver, cada uno de estos sub-tours cumple con todas las restricciones anteriormente mencionadas a excepción de la restricción (4), situación que en la realidad no es posible. Por último, la restricción (5) indica la naturaleza binaria de la variable x .

4.4.2 m-TSP

El problema de los m-agentes viajeros es la generalización del TSP, que consiste en determinar un set de rutas para m agentes viajeros, quienes comienzan y terminan su recorrido en un mismo depósito. El m-TSP puede definirse en general como: Dado un set de nodos, dejar m agentes viajeros en un mismo nodo inicial/depósito. Los nodos restantes los cuales deberán ser visitados, se denominan nodos intermedios. Luego, el m-TSP consiste en hallar rutas para todos los m agentes viajeros, quienes inician y terminan en el mismo nodo inicial/depósito de modo que cada nodo intermedio sea visitado exactamente una vez y el costo total de visitar todos los nodos sea minimizado. La métrica de este costo puede ser definida en términos de distancia, tiempo, etc. (Bektas, 2006).

Al igual que el problema con solo un agente viajero, este se puede definir como un grafo $G(N, A)$, donde N , es el conjunto de nodos, lo que incluyen los clientes y el depósito N_0 . Sea $C = C_{ij}$ la matriz de costos/distancias asociada a cada par (i, j) perteneciente a A ; se

dice que C es simétrica cuando $c_{ij} = c_{ji}$ y asimétrica en cualquier otro caso, al igual que en un TSP normal. Sin embargo, a diferencia del primero, el m-TSP es generalmente formulado usando una asignación basada en un ILP de doble índice donde se define x_{ij} binaria como:

$$x_{ij} = \begin{cases} 1, & \text{si el par } (i,j) \text{ es visitado} \\ 0, & \text{en otro caso} \end{cases}$$

Luego, este problema puede formularse:

$$\begin{aligned} \min & \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^n c_{ij} x_{ij} \\ \text{s. a.} & \sum_{i \in N} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N / \{0\} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N / \{0\} \quad (2)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i0} = m, \quad \forall i \in N \quad (3)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0j} = m, \quad \forall j \in N \quad (4)$$

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in S} x_{ij} \leq |S| - 1, \quad \forall |S|C = |N| \setminus \{0\}, \quad S \neq \emptyset \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\}, \quad \forall (i,j) \in A \quad (6)$$

En donde se observa que las restricciones (1) y (2) indican que cada nodo intermedio debe ser visitado exactamente una vez, las restricciones (3) y (4) hacen referencia al depósito e indican que se debe salir y entrar a él m veces, debido a la cantidad de agentes viajeros; esta restricción obliga a que todos los agentes viajeros tengan una ruta y retornen al depósito inicial. Observar que al igual que en el modelo anterior, las restricciones (1) con (2) y (3) con

(4) podrían juntarse en misma restricción, teniéndose así dos restricciones, en lugar de cuatro. La restricción (5) asegura la continuidad de las rutas evitando el sub-tours de los agentes. Por último, la restricción (6) especifica la naturaleza de la variable x , la cual es binaria.

Esta formulación fue propuesta por Dantzig et al. originalmente para los problemas TSP, sin embargo, también es válida para m-TSP (Bektas, 2006).

4.4.3 Problema con capacidades

Este problema es una generalización del m-TSP, por lo mismo, también lo es del TSP, esto implica que “todas las relajaciones propuestas para el TSP son válidas para el CVRP” (Toth & Vigo, 2002), y se denomina VRP. En este tipo de problemas cada cliente $i \in N \setminus \{0\}$ tiene asociada una demanda d_i , la cual debe ser satisfecha. A diferencia de los problemas TSP y m-TSP, la cantidad de rutas no es fijada de antemano. Luego para un conjunto de clientes S , la demanda total viene dada por:

$$d(S) = \sum_{i \in S} d_i$$

y la cantidad mínima de vehículos necesarios para suplir la demanda es indicada por $r(S)$. En los VRP la capacidad del vehículo debe ser definida, por lo mismo, el nombre correcto es CVRP por sus siglas en inglés (Capacitated Vehicle Routing Problem).

El problema tradicional CVRP puede ser descrito en su forma más sencilla como una flota de vehículos con capacidades uniformes que tiene que satisfacer la demanda de un grupo de clientes a través de un conjunto de rutas que empiezan y terminan en un almacén común y que representan el menor costo posible, así como la identificación del orden de visita a los mismos. (Gendreau, Vidal, Crainic, & Prins, 2012)

Este modelo de programación lineal entera del tipo de formulación de flujo de vehículos de dos índices utiliza $O(n^2)$ variables binarias x_{ij} para indicar con un valor tomado de 1 si el arco $(i, j) \in A$ pertenece a la solución óptima y toma un valor 0 en otro caso; es decir, toma su valor si el vehículo utiliza o no un arco en la solución óptima.

Los problemas CVRP se pueden modelar mediante un grafo $G(N, A, K)$, donde N es la unión del conjunto de clientes (C) más la bodega (0), A el conjunto de arcos posible y K el conjunto de vehículos. Cada arco $(i, j) \in A$ representa un camino que va desde i a j y tiene asociado un costo c_{ij} y un tiempo de viaje t_{ij} . En problemas con un depósito y n clientes, el nodo 0 representa al depósito y los nodos $1, \dots, n$ a los clientes. (Olivera, Agosto, 2004).

Considerando una flota homogénea la formulación queda como:

$$\min \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij} x_{ij} \quad (A)$$

$$s. a \quad \sum_{i \in N} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N \setminus \{0\} \quad (1)$$

$$\sum_{j \in N} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N \setminus \{0\} \quad (2)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i0} = K, \quad (3)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0j} = K, \quad (4)$$

$$\sum_{i \notin S} \sum_{j \in S} x_{ij} \geq r(S), \quad \forall S \subseteq N \setminus \{0\}, \quad S \neq \emptyset \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in N \quad (6)$$

Donde K es el número de vehículos de capacidad C necesarios para cargar toda la demanda, S es un subconjunto de nodos del grafo donde $S \subseteq N \setminus \{0\}$ y $r(S)$ el número mínimo de Vehículos necesarios para servir a todos los clientes en S . La función objetivo (A) minimiza los costos totales del problema. Las restricciones (1) y (2) obligan a que se “entre” y “salga” de cada nodo exactamente una vez, las restricciones (3) y (4) imponen que los mismos vehículos que entran a los depósitos salgan de estos. Finalmente, la restricción (5) actúa como restricción de eliminación de sub-tours y a la vez impone que la demanda total de los clientes visitados por un vehículo no supere la capacidad C . Cabe mencionar que para calcular $r(S)$ se debe resolver:

$$r(S) = \min \sum_{k \in K} y_k \quad (A)$$

$$s. a \quad \sum_{i \in S} d_i x_{ik} \leq C y_k, \quad \forall k \in K \quad (1)$$

$$\sum_{k \in K} x_{ik} = 1, \quad \forall i \in S \quad (2)$$

$$x_{ik} \in \{0,1\}, \quad \forall i \in S, \forall k \in K \quad (3)$$

$$y_k \in \{0,1\}, \quad \forall k \in K \quad (4)$$

Este problema es conocido como Bin Packing Problem (BPP). Una cota inferior para la cantidad de vehículos está dada por el valor óptimo de la relajación lineal del BPP, que es $\left\lceil \frac{d(S)}{C} \right\rceil$. La formulación es válida incluso cuando se sustituye $r(S)$ por la cota inferior $\left\lceil \frac{d(S)}{C} \right\rceil$ y $d(S) = \sum_{i \in S} d_i$, y corresponde a la demanda total.

4.4.4 CVRP con flota Heterogénea

Cuando la flota es Heterogénea, el problema se denomina FSMVRP por sus siglas en inglés (fleet size and mix vehicle routing problema), los costos y capacidades de los vehículos varían, existiendo un conjunto $K = \{1, \dots, |K|\}$ de tipos de vehículo. La capacidad de los vehículos $k \in K$ es q^k y su costo fijo f^k . Los costos y tiempos de viaje para cada tipo de ordenados en forma creciente, es decir $q^{k_1} \leq q^{k_2}$, para $k_1, k_2 \in K$, es decir, $k_1 < k_2$. En la siguiente formulación de flujo de vehículos de tres índices se agrega un índice para discriminar entre los tipos de vehículos (Golden, Assad, Levy, & Gheysens, 1984)

Luego la formulación queda como:

$$\min \sum_{k \in K} f^k \sum_{j \in N} x_{0j}^k + \sum_{k \in K} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij}^k x_{ijk}^k \quad (A)$$

$$s. a \quad \sum_{k \in K} \sum_{i \in N} x_{ij}^k = 1, \quad \forall j \in N \setminus \{0\} \quad (1)$$

$$\sum_{j \in D(i)} x_{ij}^k - \sum_{j \in O(i)} x_{ij}^k = 0, \quad \forall i \in N, k \in K \quad (2)$$

$$r_j - r_i \geq (d_j + q^{|K|}) \sum_{k \in K} x_{ij}^k - q^{|K|} \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, j \in D(i) \quad (3)$$

$$r_0 = 0 \quad (4)$$

$$r_j \leq \sum_{k \in K} \sum_{i \in O(j)} x_{ij}^k q_k, \quad \forall j \in N \setminus \{0\}, \quad (5)$$

$$x_{ij}^k \in \{0,1\} \quad \forall (i,j) \in A, k \in K \quad (6)$$

$$r_j \geq 0 \quad \forall j \in N \quad (7)$$

Donde la función busca minimizar el costo total considerando los costos fijos de uso de vehículos, sumado los costos variables de ruta. Se puede observar que el costo fijo es cobrado si y solo si el vehículo k inicia su recorrido. Las primeras dos restricciones aseguran que cada cliente sea visitado exactamente una vez y que cada vehículo que llegue a un nodo intermedio (nodo cliente) también abandone dicha localización, respectivamente. Las restricciones (3) y (4) fijan los valores de las variables r_i y actuando como restricciones de eliminación de sub-tours, mientras que la restricción (5) impide que la capacidad de los vehículos sea excedida. Por último, las restricciones (6) y (7) muestran la naturaleza de las variables.

Usualmente al tratar con problemas de flota heterogénea, se opta por utilizar este modelo aun cuando en algunos casos no refleja la realidad. Si la cantidad de vehículos disponibles de cada tipo k fuera v_k , conocida de antemano, debería agregarse la restricción:

$$\sum_{j \in N} x_{0j}^k \leq v_k, \quad \forall k \in K \quad (*)$$

(Olivera, Agosto, 2004)

4.4.5 Ventanas de tiempo

El problema de enrutamiento con ventanas de tiempo “VRPTW” es una generalización del VRP, donde el servicio de cualquier cliente comienza dentro de un intervalo de tiempo dado, llamado tiempo ventana.

Las ventanas de tiempo son consideradas suaves, cuando no vincula un costo el no respetarla, de lo contrario son duras, lo que implica que no puede ser violada; es decir, si el agente llega antes al nodo cliente debe esperar hasta que la ventana de tiempo abra y no se le

permite llegar atrasado. Los notables avances en tecnología de la información han permitido que las empresas se centren en la eficiencia y puntualidad en toda la cadena de suministro. A su vez, el VRPTW se ha convertido cada vez más en una herramienta invaluable para una variedad de aspectos en el diseño y operación de la cadena de suministros de las empresas.

El modelo del VRPTW se puede definir como una flota de vehículos K , un conjunto de clientes C y un grafo dirigido G . Típicamente la flota es considerada homogénea, lo que significa que todos los vehículos tienen idénticas características. El grafo se constituye de $|N| + 2$ vértices, donde los clientes son denotados $1, \dots, n$ y el depósito central está representado por el vértice 0 y el $n + 1$, mismo punto al cual regresan los vehículos. Luego el conjunto de nodos está dado por $0, 1, \dots, n + 1$ y se denota N . El set de arcos A , representa las conexiones directas entre el depósito y los clientes, y entre los nodos clientes. Los arcos que terminan en el depósito terminan en el nodo $n + 1$, mientras los que originan de este, parten del nodo 0; cabe la redundancia que no hay arcos que terminen en el nodo 0, ni que inicien en el nodo $n + 1$. Cada arco (i, j) , donde $i \neq j$, está asociado a un costo c_{ij} y un tiempo t_{ij} , el cual puede o no contener el tiempo de servicio del cliente i , t_i .

Cada vehículo tiene una capacidad q y cada cliente i una demanda d_i ; éste además tiene una *ventana de tiempo* $[a_i, b_i]$ y un vehículo debe llegar al cliente antes de b_i , si éste llega antes de que la ventana de tiempo comience, entonces debe esperar hasta a_i para poder servir al cliente i . La ventana de tiempo para ambos depósitos (0 y $n + 1$) se asume idéntica, puesto que es el mismo depósito y se define $[a_0, b_0]$ ó $[a_0, b_{n+1}]$, la cual representa el horizonte de planificación. Los vehículos no pueden dejar el depósito antes de a_0 y deben retornar máximo a b_{n+1} . Se asume que el triángulo de inequidad se cumple tanto para

c_{ij} como para t_{ij} ; lo que quiere decir que la suma del recorrido o el tiempo que toma llegar a un según cliente es mayor que el camino directo a este último cliente, por ejemplo: $c_{01} + c_{12} \geq c_{02}$ y lo mismo para el tiempo t_{ij} , es decir, $t_{01} + t_{12} \geq t_{02}$.

El modelo contiene dos sets de variables decisivas x y s . Para cada arco (i, j) , donde $i \neq j, i \neq n + 1, j \neq 0$, y para cada vehículo k , se define x_{ijk} como:

$$x_{ijk} = \begin{cases} 1, & \text{si el vehículo } k \text{ visita } j \text{ justo después de } i \\ 0, & \text{e. o. c.} \end{cases}$$

La variable s_{ik} es definida para cada nodo i y cada vehículo k y denota el tiempo que el vehículo k comienza a servir al cliente i . Así en el caso de que el vehículo k no sirva al cliente i , s_{ik} no tiene significancia, lo que hace su valor irrelevante. Se asume $a_0 = 0$, por lo tanto, $s_{0k} = 0$, para todo k .

Dado que este problema es una extensión del problema con restricción de capacidad, su formulación matemática para una flota posiblemente heterogénea puede quedar de manera informal como sigue (Kallehauge, Larsen, Madsen, & Solomon, 2005):

$$\min \sum_{k \in K} f^k \sum_{j \in N} x_{0j}^k + \sum_{k \in T} \sum_{i \in N} \sum_{j \in N} c_{ij}^k x_{ijk}^k \quad (\text{A})$$

$$\text{s. a.} \quad \sum_{k \in K} \sum_{i \in N} x_{ijk} = 1, \quad \forall j \in N \setminus \{0\} \quad (1)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ihk} - \sum_{j \in N} x_{hjk} = 0, \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, k \in K \quad (2)$$

$$\sum_{i \in N \setminus \{0\}} d_i \sum_{j \in N} x_{ijk} \leq q \quad \forall k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} = 1 \quad \forall k \in K \quad (4)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i,n+1,k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (5)$$

$$x_{ijk}(s_{ik} + t_{ij} - s_{jk}) \leq 0 \quad \forall i, j \in N, \forall k \in K \quad (6)$$

$$a_i \leq s_{ik} \leq b_i \quad \forall i \in N, k \in K \quad (7)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in N, k \in K \quad (8)$$

$$s_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j \in N \quad (9)$$

La función objetivo (A) minimiza el costo total de transporte. La restricción (1) asegura que cada cliente sea visitado exactamente una vez, mientras que la restricción (2) obliga a cada vehículo k a salir del nodo i al que entró y la (3) se asegura de que cada vehículo sea cargado máximo hasta su límite de capacidad. La restricción (4) obliga a todos los vehículos a salir de la bodega, mientras que la (5) se asegura que todos vuelvan a ella. Las inequidades de (6) establecen la relación de los vehículos entre el tiempo de partida desde un cliente hasta el de su sucesor inmediato. La restricción (7) hace referencia a las ventanas de tiempo para que no sean violadas. Por último, la restricción (8) define la naturaleza de las variables. Cabe notar que un vehículo que no se use estaría modelado por un viaje “vacío” entre los nodos 0 y $n+1$.

4.4.6 Pick up delivery con ventanas de tiempo

Los problemas de ruteo de vehículos con recogida y entrega de bienes o personas, VRPPD por sus siglas en inglés, Vehicle Routing Problem with Pickup and Delivery, involucran una flota heterogénea que en múltiples terminales debe satisfacer un conjunto de solicitudes. Cada solicitud está definida por un punto de recogida, un punto de entrega y una

demanda que debe ser transportada entre esos dos puntos. La función objetivo busca minimizar el costo del sistema. Este modelo también puede incluir ventanas de tiempo, denominándose VRPPD with Time Windows o VRPPDTW por sus siglas en inglés. Para el caso pickup el VRPTW es el caso particular del VRPPDTW donde el origen y término es en una bodega común.

Los problemas de esta clase incluyen restricciones de tiempo que establecen intervalos en los cuales el servicio para cada parada debe llevarse a cabo, o expresan el máximo tiempo que puede estar cada vehículo en ruta. Sumado esto los VRPPD involucran una serie de otras restricciones. El VRPPDTW tiene una variedad de aplicaciones prácticas, incluyendo el transporte de discapacitados y ancianos, levantamiento de carga y tropas marítima y aérea, pickup y delivery de servicios urbanos, etc. Dado la problemática que se quiere resolver en esta tesis se explicará solo el modelo estático donde toda la información es conocida con anterioridad y certeza al momento de tomar decisiones, pero cabe mencionar que la realización de un modelo dinámico donde información va surgiendo durante el horizonte de planeación es posible.

A continuación, se presenta la formulación matemática para el VRPPDTW, con n requerimientos de recogida y entrega y una demanda asociada a cada parada conocida.

Para la construcción de la red, inicialmente se deben identificar los n requerimientos/solicitudes entre los nodos i y $n + i$, correspondientes a los puntos de recogida y delivery respectivamente. Es posible que los diferentes nodos correspondan al mismo punto geográfico, es decir que i y $n + i$ sean el mismo punto para recoger y entregar productos. Posteriormente, se denota el conjunto de nodos entrega $P = \{1, \dots, n\}$ y el set de

nodos delivery $D = \{n + 1, \dots, 2n\}$. Luego el conjunto $N = P \cup D$. Si el requerimiento i consiste en transportar d_i unidades de i a $n + i$, entonces $l_i = d_i$ y $l_{n+i} = -d_i$.

Sea K el conjunto de vehículos. Como no todos los vehículos pueden satisfacer todos los requerimientos, cada vehículo k tiene un específico conjunto tal que $N_k = P_k \cup D_k$ asociado a él, donde N_k, P_k y D_k son subconjuntos de N, P , y D , respectivamente. Además, para cada vehículo k se define un grafo $G_k = (V_k, A_k)$, tal que el conjunto $V_k = N_k \cup \{o(k), d(k)\}$ se define como el conjunto de nodos que incluyen el origen $o(k)$, el destino $d(k)$ y los puntos de parada para el vehículo k respectivamente y el subconjunto A_k de $V_k \times V_k$ comprende todos los arcos factibles. La capacidad del vehículo k esta dada por C_k , y su tiempo de viaje y costos entre distintos nodos $i, j \in V_k$, están dadas por t_{ijk} y c_{ijk} respectivamente.

Cada ruta aceptable de entrega y recogida para este vehículo corresponde a un camino factible desde $o(k)$ hasta $d(k)$ en la red G_k , visitando cada nodo máximo una vez. Si el vehículo visita el nodo $i \in N$, debe hacerlo entre la ventana de tiempo $[a_i, b_i]$ en el cual el tiempo de servicio s_i debe comenzar. Como se mencionó previamente el vehículo solo puede comenzar a atender al cliente i durante la ventana de tiempo, por lo tanto, si llega antes puede esperar o visitar otro nodo.

La formulación matemática para este problema incluye tres tipos de variables, una binaria x_{ijk} , la cual es 1 si el vehículo k usa el arco $(i, j) \in A_k$, y 0 en cualquier otro caso, una variable de tiempo T_{ik} la cual especifica si el vehículo k comienza su servicio en el nodo $i \in V_k$; y la variable L_{ik} la cual entrega la carga del vehículo k después de que el servicio en

el nodo $i \in V_k$ se haya completado (Desaulniers, Desrosiers, Erdmann, Solomon, & François, 2002). Luego la formulación resulta como:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A_k} c_{ijk} x_{ijk} \quad (A)$$

$$s. a \quad \sum_{k \in K} \sum_{j \in N_k \cup \{d(k)\}} x_{ijk} = 1, \quad \forall i \in P \quad (1)$$

$$\sum_{i \in N_k} x_{ijk} - \sum_{j \in N_k} x_{j,n+i,k} = 0, \quad \forall k \in K, i \in P_k \quad (2)$$

$$\sum_{j \in P_k \cup \{d(k)\}} x_{o(k)jk} = 1 \quad \forall k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{i \in N_k \cup \{o(k)\}} x_{ijk} - \sum_{j \in N_k \cup \{d(k)\}} x_{jik} = 0, \quad \forall k \in K, i \in N_k \quad (4)$$

$$\sum_{i \in D_k \cup \{o(k)\}} x_{i,d(k),k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (5)$$

$$x_{ijk}(T_{ik} + s_i + t_{ijk} - T_{jk}) \leq 0 \quad \forall (i,j) \in A_k, \forall k \in K \quad (6)$$

$$a_i \leq T_{ik} \leq b_i \quad \forall i \in V_k, k \in K \quad (7)$$

$$T_{ik} + t_{i,n+i,k} \leq T_{n+i,k} \quad \forall i \in P_k, \forall k \in K \quad (8)$$

$$x_{ijk}(L_{ik} + l_j - L_{jk}) = 0 \quad \forall (i,j) \in A_k, \forall k \in K \quad (9)$$

$$l_i \leq L_{ik} \leq C_k \quad \forall i \in P_k, k \in K \quad (10)$$

$$0 \leq L_{n+i,k} \leq C_k - l_i \quad \forall n+i \in D_k, k \in K \quad (11)$$

$$L_{o(k),k} = 0 \quad \forall k \in K \quad (12)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad \forall (i,j) \in A_k, \forall k \in K \quad (13)$$

$$x_{ijk} \text{ binaria} \quad \forall (i,j) \in A_k, \forall k \in K \quad (14)$$

La función (A) correspondiente a la función objetivo, minimiza el total de los costos de viaje. Las restricciones (1) y (2) imponen que cada requerimiento (i.e. los nodos de recogida o entrega) sea satisfecho exactamente una vez por un mismo vehículo. Las restricciones (3), (4) y (5) caracterizan un modelo de flujo multicommodity y aseguran que cada vehículo k comience en su respectivo punto de partida $o(k)$ y termine su ruta en su determinado punto de destino $d(k)$. Para que se cumplan los requisitos de compatibilidad entre las rutas y la planificación de tiempo, están las restricciones (6) y (7), las cuales entregan los límites de las ventanas de tiempo. Para cada requerimiento, la restricción (8) obliga al vehículo a visitar un nodo de recogida antes que el nodo de entrega. Luego, la restricción (9) expresa la compatibilidad de los requisitos entre las rutas y la carga de los vehículos, mientras que las restricciones (10) y (11) forman los intervalos de capacidad dependientes del vehículo en los nodos de recogida y de entrega. Finalmente, la carga inicial del vehículo está impuesta por la restricción (12), mientras que la naturaleza positiva y binaria de la variable está dada en las restricciones (13) y (14), respectivamente. Notar que todas las restricciones entre la (2) y la (14), así como la función objetivo (A), son separable para cada vehículo $k \in K$, esto significa que se puede descomponer matemáticamente.

Esta formulación limita la duración de la ruta a lo más a $b_{d(k)} - a_{o(k)}$. Note también que la restricción (6), en conjunto con las restricciones de ventana de tiempo, permiten que el vehículo espere antes que visite un nodo, ya que no hay penalidad por el tiempo de espera. El tiempo de llegada al nodo j puede ser calculado como:

$$x_{ijk} = 1 = T_{jk} = \max\{a_j, T_{ik} + s_i + t_{ijk}\}, \quad (i, j) \in A_k$$

La minimización del tamaño de la flota puede también ser considerado en esta formulación mediante la incorporación de un gran valor en $c_{o(k),jk}$ para $j \in P_k$. Para este caso uno debiera incluir el arco $(o(k), d(k))$ en A_k a costo cero para permitir que un vehículo no sea usado. Cuando la flota es heterogénea, los coeficientes de costo pueden ser asignados con pesos desiguales para incentivar el uso de algunos tipos de vehículo por sobre otros. (Desaulniers, Desrosiers, Erdmann, Solomon, & François, 2002).

4.5 Complejidad computacional

Dada la dificultad de estos problemas, se vuelve necesario resolver mediante herramientas computacionales, por lo mismo, es aconsejable determinar el nivel de complejidad de los diversos problemas antes de escoger una técnica de optimización del caso a resolver.

Existen problemas de orden polinomial, lo que significa q la ejecución de estos se resuelve en tiempo polinómico, se definen como problemas de complejidad P, pueden ser resueltos por un modelo matemático determinista y son decidibles.

Por otro lado, existe otro tipo de problemas de orden exponencial, el que puede ser resuelto en tiempo polinómico, si y solo si se encuentra un algoritmo que lo permita, de lo contrario no puede ser resuelto en este tiempo debido a su “inherente dificultad”. Estos problemas son los de clase de complejidad NP (por su acrónimo en inglés *nondeterministic polynomial time*), los cuales se busca resolver mediante modelos matemáticos no deterministas, sin embargo, son indecidibles. Cuando el problema logra ser resueltos en tiempo polinómico, puede ser reducido a orden P. Lo problemas de clase NP-Completo son considerados con mayor dificultad; sin embargo, existe un nivel de complejidad aún mayor

definido como complejidad NP-Hard, el cual corresponde a un conjunto que contiene a los NP-Completo; estos problemas son como mínimo tan difícil como cualquier problema NP.

Los problemas de distribución logística, de ruteo, o de encaminamiento, como el problema del agente viajero (TSP), el problema de ruteo de vehículos (VRP) o el problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW), son problemas de orden NP-Hard debido a la dificultad que se tiene de enumerar todas las configuraciones de las soluciones, además a las múltiples interrelaciones de sus variables y al gran tamaño que tienen los datos de entrada del modelo. (Lozada & Cadena, 2012)

4.6 Técnicas de Optimización

Dada la complejidad mencionada anteriormente y la importancia de los problemas de optimización en aplicaciones prácticas, se han desarrollado múltiples métodos para la resolución de estos, las técnicas de optimización, las cuales se pueden clasificar en exactas o exhaustivas, y aproximadas.

Por métodos exactos sólo pueden ser resueltas consistentemente los casos que involucren hasta aproximadamente 50 clientes, éstas encuentran la solución óptima para cualquier instancia de un problema determinado en un tiempo determinado, sin embargo, el tiempo crece exponencialmente con el tamaño del problema, por lo mismo en este tipo de metodologías, suele resolverse alguna relajación del problema y utilizarse un esquema de ramificación y acotamiento al estilo del método “Branch and Bound”, el cual será visto de modo más detallado más adelante. Por otro lado, hay diversas implementaciones del método de “Generación de Columnas”, que han resultado especialmente efectivas para problemas con ventanas de tiempo muy ajustados.

Dada las limitaciones que se pueden presentar en la metodología exacta, se han desarrollado métodos aproximados que permiten encontrar una solución factible en un tiempo razonable y es recomendado para situaciones con mayor número de clientes. La solución entregada por los métodos exactos no es necesariamente la solución óptima del problema, pero puede considerarse como cercana a esta.

Existen dos tipos de métodos aproximados, las heurísticas y las metaheurísticas, las cuales se ahondarán más adelante. En la siguiente figura se aprecia una clasificación general de las principales técnicas de optimización.

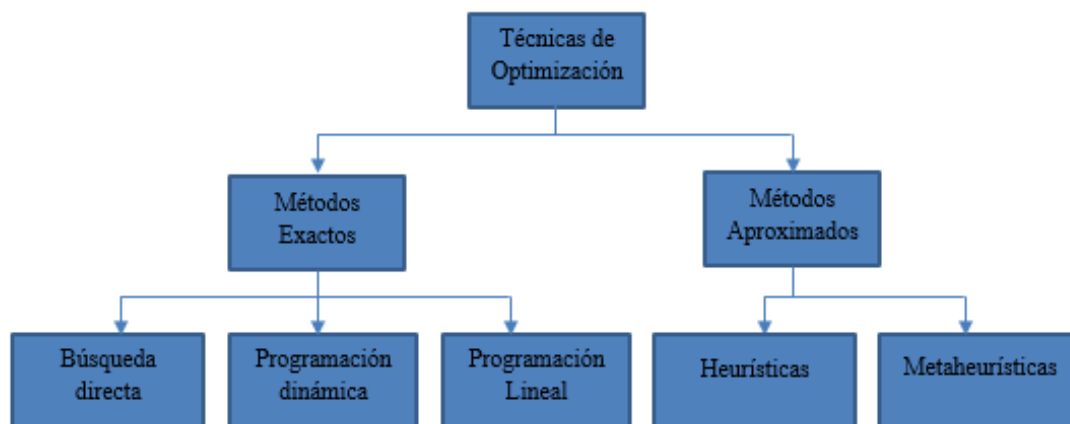


Ilustración 3: Técnicas de optimización (Fuente: Autor)

Por un completo compendio de métodos exactos para Problemas de Ruteo de Vehículos, puede consultarse los trabajos de Laporte y Norbert, *Exact algorithms for the vehicle routing problem. Annals of Discrete Mathematics* y de Laporte, *The vehicle routing problem: an overview of exact and approximate algorithms. European Journal of Operational Research*. (Lozada & Cadena, 2012)

4.7 Métodos exactos

Siguiendo el estudio de Laporte y Nobert (1987), los algoritmos exactos para los VRP pueden ser clasificados en tres categorías: (i) Método de búsqueda directa de árboles; (ii) Programación dinámica, y (iii) Programación lineal entera. A continuación, se describirán los métodos de Branch & Bound con asignación de límite inferior y el método participación de conjuntos con generación de columnas, correspondientes a la primera y tercera categoría respectivamente.

4.7.1 Branch & Bound con asignación de límite inferior

El siguiente algoritmo, de acuerdo a Laporte, Mercure y Nobert (1986) explota la relación entre el VRP y una de sus relajaciones, el m-TSP. Dado el gráfico $G = (V, A)$ con un depósito en el vértice 0 y m vehículos fijados en el depósito, el m-TSP consiste en establecer m rutas de vehículos al menor costo que comienzan y terminan en el depósito 0, y de tal manera que cada vértice restante sea visitado exactamente una vez. Como se muestra por Lenstra y Rinnooy Kan (1975), dado un límite superior m_U en m , el m-TSP se puede transformar en un 1-TSP como sigue:

(i) Aumente el número de vértices introduciendo $m_U - 1$ depósitos artificiales; sea $n' = n + m_U - 1$, $V' = \{1, \dots, n'\}$ y $A' = A \cup \{(i, j) : i, j \in V', i \neq j, i \text{ o } j \in V' \setminus V\}$

(ii) La matriz de distancia extendida $C' = (c'_{ij})$ asociada con A' se define como:

$$c'_{ij} = \begin{cases} c_{ij} & (i, j \in V), \\ c_{i0} & (i \in V \setminus \{0\}, j \in V' \setminus V), \\ c_{0j} & (i \in V' \setminus V, j \in V \setminus \{0\}), \\ \gamma & (i, j \in (V' \setminus V) \cup \{0\}), \end{cases} \quad (1)$$

Donde el valor de γ depende de la variante del problema considerado:

$\gamma = \infty$ entrega la distancia mínima para m_U vehículos;

$\gamma = 0$ entrega la distancia mínima para al menos m_U vehículos;

$\gamma = -\infty$ entrega la distancia mínima para el número mínimo de vehículos.

El VRP se puede formular de la siguiente manera. Sea $x_{ij} (i \neq j)$ una variable binaria igual a 1 si y sólo si el arco (i, j) de A' está en la solución óptima. Si $d_i + d_j \geq D$, i y j no pertenece a la misma ruta y x_{ij} no necesita ser definida. Luego el VRP1 queda como:

$$\min \sum_{i \neq j} c'_{ij} x_{ij} \quad (2)$$

$$s. a \quad \sum_{j=0}^{n'} x_{ij} = 1, \quad \forall i \in N' \quad (3)$$

$$\sum_{i=0}^{n'} x_{ij} = 1, \quad \forall j \in N' \quad (4)$$

$$\sum_{\substack{i, j \in S \\ i \neq j}} x_{ij} \leq |S| - v(S), \quad (S \subset V' \setminus \{0\}; |S| \geq 2) \quad (5)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\}, \quad \forall (i, j) \in A \quad (6)$$

En esta formulación, (2), (3), (4) y (6) definen un problema de asignación modificado (es decir, asignaciones en la diagonal principal están prohibidas). Las restricciones (5)

eliminan el sub-tour: $v(S)$ es un límite inferior apropiado según el número de vehículos requeridos para visitar a todos los vértices de S en la solución óptima. Estas restricciones se obtienen ya que para cualquier $S \subset V' \setminus \{0\}$, $|S| \geq 2$, $\bar{S} = V' \setminus S$, se debe tener que:

$$\sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij} \geq v(S),$$

Y que la siguiente identidad sostiene que:

$$|S| = \sum_{i \in S} x_{ij} + \sum_{i \in S} \sum_{j \in \bar{S}} x_{ij}$$

El valor de $v(S)$ depende en el tipo de VRP que se quiera considerar. Para el caso del CVRP y sus extensiones previamente mencionadas, es válido tomar:

$$v(S) = \left\lceil \frac{\sum_{i \in S} d_i}{D} \right\rceil.$$

Para la resolución de un VRPTW, problema en el cual se enfoca este trabajo, Kolen (1987) utiliza Branch & Bound, combinado con programación dinámica y relajación de Lagrange con división de variables.

4.7.2 Partición de conjuntos y Generación de Columnas

Balinski y Quandt (1964) fueron de los primeros en proponer una formulación de partición y generación de columnas para la resolución de los VRP's.

Considere J como el conjunto de todas las rutas posibles j y sea a_{ij} un coeficiente binario igual a 1 si y solo si el vértice $i > 1$, es decir, visitado, aparece en la ruta j . Sea c^* el

costo óptimo de la ruta j y x_j , una variable binaria igual a 1 si y sólo si la ruta j se utiliza en la solución óptima. El problema se puede formular de la siguiente manera:

$$\min \sum_{j \in J} c_{ij}^* x_{ij} \quad (1)$$

$$s. a \quad \sum_{j \in J} a_{ij} x_j = 1, \quad \forall i \in V \setminus \{0\} \quad (2)$$

$$x_j \in \{0,1\}, \quad \forall j \in J \quad (3)$$

Hay dos dificultades principales asociadas a esta formulación: (i) La gran cantidad de variables binarias x_j que pueden llegar a los millones en la mayoría de los casos de la vida real. Sólo en problemas extremadamente limitados (i.e, en problemas con muy pocas soluciones factibles) será el número de variables lo suficientemente pequeño para permitir que el problema se resuelva directamente.

(ii) La dificultad de computar los valores c^* . Por ejemplo, en el CVRP, cada ruta j corresponde a un conjunto de vértices S_j que satisfacen:

$$\sum_{i \in S_j} d_i \leq D.$$

El valor de c_j^* es entonces obtenido mediante la resolución de un TSP en S_j .

Sin embargo, si el número de variables es relativamente pequeño y el objetivo es minimizar el número de vehículos, i.e. $c_j^* = 1$ para todo $j \in J$, la relajación lineal del VPR previamente mencionado suele entregar una solución entera (Toregas & ReVelle, 1972). Si la solución (x^*) es no-entera y da un valor objetivo fraccional, entonces el plano de corte

$$\sum_{j \in J} x_j > \left\lceil \sum_{j \in J} x_j^* \right\rceil$$

puede ser introducida. Generalmente se requieren muy pocos cortes para alcanzar la integralidad. (Orloff, 1976)

Una forma natural de evitar las dificultades que acabamos de mencionar es usar un algoritmo de generación de columnas. Esta técnica ha sido aplicada en el campo del enrutamiento de vehículos por Rao y Zions (1968), Foster y Ryan (1976), Orloff (1976), Desrosiers, Soumis y Desrochers (1984), Agarwal, Mathur y Salkin (1989), y Desrochers, Desrosiers y Solomon (1990). Una reciente introducción al campo se puede encontrar en Haouari, Dejax y Desrochers (1990). (Laporte, 1992)

En la generación de columnas, un problema reducido, que contiene solo un subconjunto restringido de todas las columnas posibles(variables), se resuelve repetidamente. La relajación lineal del problema reducido entrega un vector variable λ óptimo dual. Verificar la optimalidad implica calcular o computar la columna s del menor costo marginal, es decir, determinando la columna s satisfaciendo

$$c_s^* - \lambda y_s = \min_{j \in J} \{c_j^* - \lambda y_j\} \quad (4)$$

donde y_j es el vector-columna de los coeficientes de restricción de la variable x_j . Si el costo marginal de x_s es no negativa, la solución actual es óptima y el procedimiento termina. De lo contrario, x_s entra en la base y el problema se re-optimiza. Dado que las soluciones VRP deben ser enteras, este procedimiento debe ser usado en conjunto con un algoritmo de ramificación y acotamiento (Branch & Bound). La resolución de (4) se realiza utilizando un

algoritmo para el “problema de la ruta más corta” restringido de la misma manera que el VRP original. Este procedimiento ha sido aplicado con éxito por Desrosiers, Soumis y Desrochers (1984) y más recientemente, por Desrochers, Desrosiers y Solomon (1991) para resolver los VRPs con ventanas de tiempo que contengan hasta 100 vértices.

Como se esperaba, el método funciona mejor en problemas estrechamente restringidos, ya que el número de columnas factibles es más pequeño. (Laporte, 1992)

4.8 Métodos Aproximados

4.8.1 Métodos Metaheurísticos

Estas técnicas son utilizadas cuando no hay un método exacto de solución; este tipo de metodología requiere tiempos de cálculo grandes y gran cantidad de recurso computacional.

Los metaheurísticos son métodos aproximados diseñados para resolver problemas de optimización combinatoria, en los que los heurísticos clásicos no son efectivos. Los metaheurísticos proporcionan un marco general para crear nuevos algoritmos híbridos, combinando diferentes conceptos derivados de la inteligencia artificial, la evolución biológica y los mecanismos estadísticos. (Kelly & Osman, 1996)

La mayor ventaja de los metaheurísticos frente a otros métodos está en su gran flexibilidad, lo que permite usarlos para abordar una amplia gama de problemas. (Voß & Woodruff, 2006)

Dentro de los métodos metaheurísticos podemos encontrar: Búsqueda Tabú, Algoritmo genético, Algoritmo de Hormigas, Recocido Simulado, etc. Sin embargo, no se

profundizará en el tema, debido a las características del problema. Para más información puede consultar a Kelly & Osman (1996) en su libro *Meta-Heuristics, Theory & Applications*

4.8.2 Métodos Heurísticos

Existen problemas para los que no es dispensable hallar la solución óptima, debido a que basta con una buena solución para poder analizar el comportamiento del modelo que se optimiza. Los métodos heurísticos permiten encontrar esas soluciones las cuales cumplen con las restricciones establecidas por el modelo y que pueden o no ser un óptimo global. Estos métodos permiten obtener buenas soluciones en tiempo razonable o cuando el tiempo disponible para realizar el análisis de sistemas logísticos es acostado.

Los métodos heurísticos son más flexibles para representar funciones y restricciones que los métodos exactos. Muchas veces son utilizados para obtener una primera aproximación de optimización a un problema.

Los algoritmos heurísticos para el VRP a menudo se pueden derivar de procedimientos derivados del TSP, como el algoritmo vecino más cercano, algoritmos de inserción y mejora de recorrido. (Laporte, 1992)

Los procedimientos se pueden aplicar a CVRPs y DVRPs (problemas dinámicos de ruteo de vehículos) casi sin modificaciones. Sin embargo, al aplicar estos métodos para los VRP deben tomarse con cuidado para garantizar que solo se creen rutas factibles para los vehículos.

En esta sección, describiremos cuatro heurísticas específicamente desarrolladas para el VRP.

4.8.2.1 Algoritmo de Ahorro de Clarke & Wright

El Algoritmo de Ahorro es uno de los algoritmos más difundidos para la resolución de los VRPs. Fue propuesto por primera vez en 1964 por Clarke y Wright para resolver CVRPs en los cuales el número de vehículos es libre. El método comienza con rutas de vehículos que contengan la bodega y otro vértice o nodo cliente.

Si en una solución dos rutas diferentes $(0, \dots, i, n)$ y $(0, \dots, j, n)$ pueden ser combinadas formando una nueva ruta $(0, \dots, i, j, \dots, n)$ como se muestra en la Ilustración 4, el ahorro (en distancia) obtenido por dicha unión es:

$$s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij},$$

pues en la nueva solución los arcos $(i, 0)$ y $(0, j)$ no serán utilizados y se agregará el arco (i, j) .

En este algoritmo se parte de una solución inicial y se realizan las uniones que den mayores ahorros siempre que no violen las restricciones del problema. Existe una versión paralela en la que se trabaja sobre todas las rutas simultáneamente, y otra secuencial que construye las rutas de a una por vez.

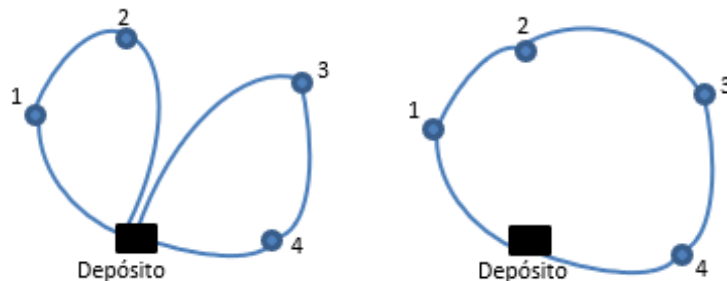


Ilustración 4: Diagrama Ahorro de rutas (Fuente: Autor)

En Ilustración anterior se pueden apreciar dos rutas antes y después de ser unidas. A continuación, se presentan los pasos para la resolución de este algoritmo secuencial, es decir, el método que resuelve las rutas de a una a la vez:

Paso 1. Computar los ahorros $s_{ij} = c_{i0} + c_{0j} - c_{ij}$, para $i, j = 0, \dots, n$ y $i \neq j$.
Crear $n - 1$ rutas de vehículos $(0, i, 0)$ ($i = 0, \dots, n$).

Paso 2. Ordenar los ahorros de forma decreciente.

Paso 3. Considerar dos rutas de vehículos que contengan arcos $(i, 0)$ y $(0, j)$, respectivamente. Si $s_{ij} > 0$, surge tentativamente la unión mediante la introducción del arco (i, j) y eliminando los arcos $(i, 0)$ y $(0, j)$.

Implementar la unión si la ruta resultante es factible. Repetir este paso hasta que ninguna mejora sea posible. Detenerse

4.8.2.2 Algoritmo de Barrido

Se estima que los orígenes del algoritmo de barrido se remontan al trabajo de Wren (1971) y Wren & Holliday (1972) para los CVRP con uno o varios depósitos, y vértices ubicados en el plano euclidiano. Sin embargo, el método se atribuye comúnmente a Gillett y Miller (1974) quienes le dieron su nombre.

Para facilitar la implementación de este método, es preferible representar los vértices por sus coordenadas polares (θ_i, ρ_i) , donde θ_i es el ángulo y ρ_i es la longitud del radio. Asignar un valor $\theta_{i^*} = 0$ a un vértice arbitrario i^* y computar los ángulos restantes de $(1, i^*)$. Clasifique los vértices en orden θ_i creciente. Una posible implementación del método es la siguiente:

Paso 1. Escoger un vehículo que no haya sido usado k .

Paso 2. Empezar por el vértice no enrutado que tenga el ángulo más pequeño y asignar vértices al vehículo sin sobrepasar su capacidad. Si quedan ángulos sin enrutar, volver al paso 1.

Paso 3. Optimizar cada vehículo de forma separada mediante la resolución de su TSP correspondiente, ya sea por método exacto o aproximado. Intercambiar vértices entre rutas adyacentes si es que esto ahorra distancia. Re optimizar. Detenerse

4.8.2.3 Algoritmo de ahorro extendido: Solomon (VRPTW)

Como su nombre lo dice, este algoritmo consiste en una extensión del algoritmo de Ahorro y fue propuesta por Solomon para específicamente resolver problemas con ventanas de tiempo. Puesto que determinar si la unión de dos rutas r_i y r_j es o no factible, no resulta directo cuando se tiene restricciones de ventanas de tiempo, pues el arribo a los clientes de r_j puede atrasarse y esto podría ocasionar que se violaran algunas de estas restricciones.

Dada una ruta factible $(v_0, \dots, v_{n+1})$ con $v_0 = v_{n+1} = 0$, llamamos b_i y w_i al tiempo de arribo al nodo $v_i (0 \leq i \leq n + 1)$. El mínimo tiempo de espera en el nodo $v_i (0 \neq i)$ es $w_i = \max\{0, e_i - (b_{i-1} + s_{i-1} + t_{i-1,i})\}$. Si el tiempo de arribo al nodo v_i se incrementa en PF_i , el tiempo de arribo a los nodos posteriores $v_j (i \leq j \leq n + 1)$ se incrementará en $PF_j = \max\{0, PF_{j-1} - w_j\}$. El valor PF recibe el nombre de *push forward* y mide cuánto se desplaza el tiempo de arribo respecto a su valor original. Dado que el Push Forward en un nodo sólo depende de sus predecesores, es posible determinar si un incremento en el tiempo de arribo a un cliente mantiene la factibilidad de la ruta, mediante una recorrida por los

clientes posteriores. Para cada uno de ellos se calcula el nuevo tiempo de arribo (que depende solamente del cliente anterior) y se verifica si está dentro de la ventana de tiempo. Puede observarse que los valores del push forward son no crecientes a lo largo de la ruta. La búsqueda puede terminarse antes si se encuentra algún nodo con push forward igual a 0, pues para todos los nodos posteriores a él también será igual a 0, y como la ruta original era factible la nueva también lo será. Este procedimiento es agregado al Algoritmo de Ahorros original para determinar, de manera eficiente, si la unión de dos rutas es factible.

Utilizando las definiciones originales del ahorro no se considera la dimensión temporal del problema. Esto puede llevar a unir rutas muy cercanas en cuanto a distancias, pero con ventanas de tiempo muy diferentes, provocando grandes tiempos de espera. Si el máximo ahorro se da en s_{ij} , pero e_j es mucho mayor que $b_i + t_{ij}$, en la nueva ruta el tiempo de espera en j será muy elevado. Dado que no se considera la posibilidad de insertar clientes entre i y j , otro vehículo deberá visitar clientes que podrían haber sido visitados en ese tiempo ocioso, resultando en soluciones que utilizan una gran cantidad de vehículos. Para resolver este problema, en lugar de modificar la definición de s_{ij} , se fija un valor máximo W para los tiempos de espera y no se realizan las uniones que ocasionen tiempos de espera mayores que W . (Olivera, Agosto, 2004)

4.8.2.4 Algoritmo de Inserción de Solomon

Las Heurísticas de inserción de Solomon (1987) son algoritmos de construcción de rutas los cuales proponen varios criterios de inserción:

- Más lejano al depósito
- Más cercano al depósito

- El Cliente cuya ventana de tiempo termine antes
- El cliente que minimice la suma del tiempo y distancia al depósito

Estas Heurísticas fueron propuestas para la solución del VRPTW, con el objetivo de hallar una solución factible en un tiempo computación razonable, buscando la minimización de costos. Se inicia cada ruta buscando un cliente que no haya sido considerado en alguna ruta y en cada iteración subsecuente, se busca a un cliente según uno de los criterios antes mencionados hasta añadir al último cliente a la ruta, el cual es adicional al final de la ruta recién construida. Cabe mencionar que una nueva ruta se origina cada vez que en la búsqueda falla el encontrar una inserción factible.

Dullaert (2000) argumenta que el criterio de inserción de Solomon (1987) con su heurística I1 (más lejano al depósito), subestima el tiempo adicional requerido para insertar un nuevo cliente entre el depósito y el primer cliente agregado a la ruta construida, lo que podría causar la selección de criterios de inserción subóptimos para los clientes que aún no han sido agregados a alguna ruta. Por lo mismo Dullaert introduce nuevas restricciones de tiempo para resolver el problema concluyendo que el nuevo criterio ofrece un ahorro significativo de costos de más del 50%. Sin embargo, el ahorro en costos decrece en la medida que el número de clientes por ruta se incrementa.

Es importante notar que los aspectos temporales pueden ir en otra orientación diferente a la minimización de distancias, por lo que se debe tener en cuenta ambos enfoques para evitar la ocurrencia de muchos tiempos ociosos por grandes esperas a la hora de visitar un cliente.

A continuación, se presenta una selección de heurísticas estudiadas para la solución del VRPTW con base en artículos referenciados; para mayor detalle se puede consultar “Solución del problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW) mediante métodos heurísticos” por Adriana Lozada y Ricardo Cadena. Trabajo en el cual muestran un compendio de artículos referenciados.

Observando la tabla a continuación se puede observar que el Algoritmo de Inserción de Solomon es el más adecuado al momento de resolver el problema del VRPTW mediante una Heurística de las preseleccionadas.

CRITERIOS	Algoritmo del Vecino más Cercano	Algoritmo de Barrido	Algoritmos de Inserción de Solomon	Algoritmo de Ahorros de Clarke y Wright	Algoritmo de Pétalos	Algoritmo de Inserción con Relajación Lagrangeana
Acceso y consecución de la información	3	3	4	4	3	2
Disminución del costo	4	3	4	5	3	3
Presencia de enfoque temporal	4	2	5	2	0	1
Disminución tiempos de espera	4	2	5	3	0	1
Fácil implementación en el lenguaje de programación	4	3	2	2	2	2
Totales	19	13	20	16	8	9

Tabla 1: Selección de Heurísticas para la solución del VRPTW (Fuente: Lozada & Cadena, 2012)

5 METODOLOGÍA

5.1 Análisis del tema

Para el desarrollo de esta tesis, se consultó a una empresa proveedora de cerveza artesanal para ver el funcionamiento del proceso distributivo. El primer paso para poder trabajar el problema fue tomar conocimiento de la situación que se quería resolver y así poder hacer un análisis de ella para poder abarcarla de la mejor manera posible. Así es como se realizó inicialmente una descripción de la empresa la cual se detallará más adelante en el punto 5.2. para así enmarcar el sistema, determinando sus variables y parámetros de control, tomando en cuenta que estos últimos son imprescindibles para lograr realizar la evaluación de la situación, y así determinar el objetivo principal, punto que se explicará más adelante.

Teniendo en cuenta esto, se realizó un estudio teórico en el cual se puede encontrar situado el problema en cuestión, abarcando modelos de problema de ruteo de vehículos que podrían modelar la situación actual, para así determinar cuál es el modelo que más se asemeja, proceso que se detallará más adelante.

5.2 Descripción de la empresa

La empresa en cuestión, es una cervecera artesanal que inició sus actividades en diciembre, 2012, y ha tenido un crecimiento exponencial desde entonces. Partió con una producción de 100 [L] repartidos entre pocos clientes en Viña y Valparaíso, mientras que en la actualidad mantiene una producción de alrededor de 3.000[L] mensuales con un aumento importante de clientes, manteniendo alrededor de 80 clientes, sin embargo, 53 clientes tienen mayor frecuencia de pedidos y demanda, por lo que la firma tiene un alto interés en mantener de forma ordenada, mejorando la calidad de su servicio optimizando recorrido y tiempo, es

decir, son los clientes que la empresa quiso incluir en el modelo. Además, la empresa tiene otros 30 clientes que tienen una frecuencia de demanda de dos veces al año en promedio, caracterizada por ser demandas pequeñas que podrían considerarse como casos excepcionales y por lo mismo no fueron ingresados al modelo.

La empresa cuenta con una bodega/depósito localizado en Casablanca la cual se encuentra en el mismo punto de producción y una camioneta la cual es utilizada para distribuir los productos a los clientes correspondientes.

En cuanto a los productos, la empresa, tiene una vasta variedad, sin embargo, sus entregas son exclusivamente en el formato de barriles o caja con botellas.

5.2.1 Descripción Clientes

Los clientes de fueron clasificados en tres tipos, según tipo de negocio; estos son: Botillerías, Bares o Restaurantes, los cuales son atendidos en horario “mañana” o “tarde” y visitados según estime conveniente el distribuidor de productos, sin embargo, la mayoría de las veces, los “horarios” considerados corresponden a los de apertura y cierre de los clientes de la compañía, por lo mismo, se propuso a la empresa determinar horarios más acotados para disminuir tiempos vacíos al momento de entregar productos, es decir, que el distribuidor no quede esperando a ser atendido, si no, que llegue en un horario esperado por el cliente (Este punto será detallado de mejor manera en el punto “5.4 Parámetros del Modelo”).

Luego de la clasificación de los clientes ayudó a determinar una propuesta de ventana de tiempo para ellos, la cual fue pre aprobada por los dueños de la empresa y luego conversada con los clientes de la empresa para confirmar o modificar la propuesta y llegar a un acuerdo.

Los clientes además fueron divididos en dos zonas según localización; la “Zona 1” está conformada por los clientes de la quinta región, los que se encuentran principalmente en Viña del Mar y Valparaíso, y algunos pocos clientes en Quilpué, y la “Zona 2” conformada por los clientes que se encuentran en la región Metropolitana.

5.2.2 Descripción de Actividades para la repartición de productos

Las actividades realizadas para la logística de transporte de la empresa son simples. Se comienza con la planificación de entrega de productos para el día siguiente; esto implica una revisión de la demanda de los clientes y un chequeo de inventario para análisis de disponibilidad, si el producto está disponible entonces se registran ambos datos para que el cliente pueda ser visitado. Luego, según localización se determina que clientes serán visitados por viaje.

Una vez que se tiene la lista de clientes a repartir por día con sus respectivas demandas y “horarios” anotados como “mañana” o “tarde”, se carga el vehículo de la compañía en la bodega localizada en Casablanca para que este inicie su recorrido y retorne al mismo punto para luego iniciar otro, y así sucesivamente; la cantidad de recorridos viene limitada por el tiempo disponible en ruta que puede tener el conductor y por la capacidad del vehículo; en este caso la empresa, cuenta con una camioneta la cual es cargada con cajas llenas de botellas o con barriles de cervezas.

Una vez que la camioneta inicia su recorrido y llega al cliente “i”, se realiza la descarga de los productos para este y luego se carga con los barriles que haya desocupado que tenga para devolverle a la empresa, es decir, la camioneta realiza un servicio de pick up de ser necesario y delivery de productos, sin embargo, debido a que para esta empresa en particular el volumen del pick up es siempre menor que el delivery, la parte pick up no fue

incluida en el modelo, debido a que no existe forma de que la recogida de productos exceda la entrega, puesto que la empresa entrega cajas y barriles, pero solo barriles son retornados, por lo tanto, las cajas transportadas son siempre un margen positivo en espacio para la camioneta.

De esta forma, el modelo fue simplificado y se considerará como un CVRP con ventanas de tiempo, el cual se abrevia como VRPTW.

5.3 Elección de Modelo

Tomando en cuenta las características del problema se determinó que el modelo más apropiado para el caso es el de VRP con ventanas de tiempo (VRPTW), el cual como se mencionó previamente será definido como un grafo $G(N, A, K)$, con un conjunto clientes C , una bodega definida como $\{0\}$, luego N es el conjunto de nodos totales, el cual corresponde a la unión de los conjuntos C y $\{0\}$. El conjunto de rutas A está definida por los arcos posibles cliente-cliente y cliente-bodega. Cada uno de estos arcos tiene un costo asociado c_{ij} , el cual será medido en distancia, la cual se debe recorrer para llegar de un nodo a otro. A su vez, cada arco se caracteriza por tener un tiempo promedio para ser recorrido t_{ij} ; tanto los valores de distancia como de tiempo se visualizarán mediante una matriz de $n \times n$. Por último, el conjunto de vehículos K será considerado homogéneo, puesto que en la realidad la empresa solo posee un vehículo.

Es relevante mencionar que cada arco (i, j) que inicie y termine en el mismo punto tiene un costo y tiempo asociado nulo, además el tiempo de servicio del cliente i es considerado para este modelo y es de t minutos.

Cada cliente i , tiene a sí asociado una demanda d_i y una ventana de tiempo $[a_i, b_i]$, lo que quiere decir que el vehículo debe llegar antes de b_i , y no podrá ser atendido antes que a_i ; para el caso de la bodega se tiene una situación similar; estos cuentan con una ventana de tiempo $[a_0, b_0]$, la cual representa el horizonte de planificación; y los vehículos no pueden salir de la bodega antes que a_0 , y deben estrictamente, por política de la empresa, retornar antes de b_0 .

Se definen las variables a utilizar como: x_{ijk} binaria, la cual toma valor 1 cuando el vehículo k visita el nodo j inmediatamente después de visitar al cliente i , y la variable s_i como el momento/tiempo en el que llega el vehículo al nodo i .

Además, se define el objetivo del modelo como la minimización de costos totales, la cual está definida como la suma de las variables binarias x_{ijk} por el costo que implica recorrer los arcos (i, j) . En la función objetivo no se incluyó el costo fijo de partida del vehículo, puesto que la flota es homogénea y además vehículo único. Este costo es importante incluirlo para modelos con flota heterogénea donde el costo de uso de los vehículos difiere entre sí.

5.3.1 Formulación Matemática

Luego la formulación matemática del modelo seleccionado queda como:

$$\min \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij}^k x_{ijk}^k \quad (A)$$

$$s. a \sum_{k \in K} \sum_{i \in N} x_{ijk} = 1, \quad \forall j \in N \setminus \{0\} \quad (1)$$

$$\sum_{i \in N} x_{ihk} - \sum_{j \in N} x_{hjk} = 0, \quad \forall i \in N \setminus \{0\}, k \in K \quad (2)$$

$$\sum_{i \in N} d_i \sum_{j \in N} x_{ijk} \leq q \quad \forall k \in K \quad (3)$$

$$\sum_{j \in N} x_{0jk} = 1 \quad \forall k \in K \quad (4)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i,n+1,k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (5)$$

$$x_{ijk}(s_{ik} + t_{ij} - s_{jk}) \leq 0 \quad \forall i, j \in N, \forall k \in K \quad (6)$$

$$a_i \leq s_{ik} \leq b_i \quad \forall i \in N, k \in K \quad (7)$$

$$x_{ijk} \in \{0,1\} \quad \forall i, j \in N, k \in K \quad (8)$$

$$s_{ij} \in \mathbb{R} \quad \forall i, j \in N \quad (9)$$

5.4 Parámetros del Modelo

Una vez determinado el modelo fue necesario realizar la determinación de los componentes de éste; es decir, determinar los valores de los parámetros: como el número de clientes, la demanda de éstos, sus respectivas ventanas de tiempo, distancias entre clientes y

entre bodega y clientes, tiempos de arribo entre clientes y entre bodega y clientes, tiempo de servicio, capacidad del vehículo y cantidad de vehículos a utilizar.

La obtención de estos parámetros será detallada a continuación:

- **Número de clientes y Frecuencia:** Este número hace en realidad referencia a los clientes frecuentes de la empresa, con los cuales se mantienen visitas regulares de al menos una vez al mes. Esta elección de clientes se realiza en conjunto con el dueño de la empresa, actual encargado de la parte de ventas de la empresa. La lista de clientes se mantendrá de manera anónima, sin embargo, la ubicación de éstos se puede observar en anexos, punto 11.1.1.
- **Capacidad del Vehículo:** El modelo del vehículo utilizado es un Faw Mammút V80, el cual tiene una capacidad de 4.000[L] o de 1[ton]. Actualmente la compañía cuenta con solo un vehículo.
- **Cantidad de Vehículos:** Como se mencionó en el punto anterior, la empresa sólo posee un vehículo, por lo tanto, esta cantidad de vehículos definirá la cantidad de rutas mínimas necesarias para poder hacer frente a la demanda de todos los clientes. Esta cantidad de vehículos se determinará realizando la siguiente ecuación, es decir:

$$N^{\circ} \text{ veh\acute{ı}culos} = \left\lceil \frac{\sum_i \text{Demanda}_i}{\text{Capacidad Veh\acute{ı}culo}} \right\rceil$$

- **Demanda por cliente:** La demanda del cliente es entregada por sólo un distribuidor, lo que tiene directa relación a la cantidad de vehículos disponibles. Dado el formato del producto, se determinó que la mejor forma de representar la demanda del cliente era según su peso, es decir, en kilogramos; esta decisión fue tomada debido a las

características del producto y del vehículo, el cual se ve mayormente limitado por su capacidad de peso y no de volumen. Es relevante destacar que el peso del envoltorio del producto fue considerado.

- Ventanas de tiempo: Dado que la empresa no trabajaba con ventanas de tiempo, si no, con el “horario de atención” de cada cliente a sus clientes, se realizaban llamadas de manera frecuente para determinar si el cliente podía ser visitado o no. Como se mencionó anteriormente, se propuso a la empresa fijar un horario más acotado para mejorar la calidad del servicio entregado, consultando el horario con cada cliente para su previa aprobación. Inicialmente se determinó que existen tres tipos de clientes: Botillerías, Bares, Restaurantes. En general, el primero se caracterizaría por tener una ventana de tiempo sumamente amplia; dado que en la botillería en sí, no importa el momento en que se reciben los productos, no así en los bares o restaurantes que para tener una buena calidad de servicio con sus clientes se suele preferir que el recibimiento de los productos no interfiera con la atención hacia sus clientes; por este motivo es que se determinó que la ventana de tiempo dependiera además del layout del restaurant o bar, es decir, cuando la entrada de los productos interfiera con la actividad de los clientes, la ventana de tiempo se acote a horarios fuera de la atención de estos, lo que la hace más limitada en comparación, mientras que cuando el recibimiento de productos por parte del cliente es por una entrada diferente a la de los clientes, entonces su ventana de tiempo es igual o más amplia que su horario de atención. Luego de esto la propuesta fue conversada con los clientes para establecer aceptación o modificación.

Después de la aprobación por parte de los clientes, el inicio y la duración en minutos de las ventanas de tiempo para cada uno de ellos se pueden visualizar en la tabla 4 del punto ventanas de tiempo del capítulo 6.1 Caso Base.

- Distancia entre Clientes: Dado la geografía de las ciudades, realizar distancias euclidianas no es una opción realista para este tipo de problemas, por lo mismo, se consultó en Google Maps para obtener una matriz de distancias entre nodos, es decir, que muestre la distancia entre cliente-cliente y cliente-bodega de manera confiable y realista. De esta manera la “Matriz Distancia” se puede observar en el punto 11.2 en Anexo 7 y Anexo 8 para la zona 1 y 2 respectivamente.
- Tiempo de arribo entre clientes: Dado las diferencias demográficas en las ciudades, el tiempo de arribo entre un cliente y otro, no es proporcional a la distancia entre ellos, por lo mismo, al igual que la distancia, se consultó la información en Google Maps, la cual representa una medida histórica del tiempo que se demora un vehículo de un punto a otro. De esta manera la “Matriz Tiempo de arribo” se puede observar en el punto 11.3 en el Anexo 9 y Anexo 10 para la zona 1 y 2 respectivamente.
- Tiempo de servicio: Este tiempo corresponde al tiempo que necesita un vehículo k , en terminar de atender a un cliente i , este tiempo será considerado como un promedio de lo que demora en descargar los productos, dejarlos con el cliente y un margen extra que puede ser utilizado para cargar mercancía vacía, hablar con el cliente y/o tiempo de espera en ser atendido.

5.5 Método Escogido

Para la elección del método que resolverá el problema se hizo un análisis de dos formas diferentes para resolver este problema, una por medio de un método heurístico y la otra por medio de un método exacto para así compararlos y decidir cuál era el mejor método para resolver este problema de ruteo. El método heurístico utilizado fue el algoritmo de Inserción de Solomon del camino más barato, costo que será medido en distancia y el lenguaje computacional a utilizar será Python; en cuanto al método exacto, éste será desarrollado a través de una modelo de tres índices en el software AMPL. Los resultados de las resoluciones serán presentados en el capítulo “7. Resultados” para su análisis y comparación.

6 RECOPIACIÓN DE DATOS

6.1 Caso base

Como se mencionó previamente, los clientes en estudio están divididos en dos zonas, la primera correspondiente a la quinta región, más específicamente Valparaíso, Viña del Mar, Quilpué y Casablanca, esta última considerada debido a la cercanía que tiene con la bodega; y la segunda zona correspondiente a la región Metropolitana, principalmente en las comunas de Santiago Centro, Las Condes y Providencia, y en menos cantidad en Ñuñoa, San Miguel y La reina. Estas zonas principales no fueron cambiadas, por lo que se mantienen en el caso aplicado. Los parámetros obtenidos en la situación actual fueron los siguientes:

- Número de Clientes y frecuencia de visita [por mes]: A continuación, se muestra una tabla con el promedio de frecuencia por mes de visita que se suele hacer a los clientes

en el año, además de la cantidad más recurrente de visita (Moda), y la mayor y menor cantidad de visitas por mes que se hicieron en el transcurso de un año.

Zona 1	Prom	Moda	Max	Min
Ciente 1	7,6	7	13	3
Ciente 2	6,4	6	9	3
Ciente 3	4,1	4	6	3
Ciente 4	3,5	3	6	1
Ciente 5	3,1	2	5	2
Ciente 6	2,9	3	6	1
Ciente 7	3,1	3	6	1
Ciente 8	3,0	3	4	2
Ciente 9	2,5	3	4	1
Ciente 10	2,2	2	4	1
Ciente 11	2,9	3	5	2
Ciente 12	2,4	1	6	1
Ciente 13	1,9	1	4	1
Ciente 14	1,7	2	3	1
Ciente 15	2,4	2	6	1
Ciente 16	1,6	1	3	1
Ciente 17	1,7	1	4	1
Ciente 18	1,7	1	3	1
Ciente 19	1,3	1	2	1
Ciente 20	2,0	1	4	1
Ciente 21	5,0	5	6	4
Ciente 22	1,3	1	3	1
Ciente 23	1,2	1	2	1
Ciente 24	1,3	1	2	1
Ciente 25	1,7	1	3	1
Ciente 26	1,0	1	1	1
Ciente 27	2,0	2	2	2
Ciente 28	2,0	2	2	2
Ciente 29	1,5	1	2	1

Zona 2	Prom	Moda	Max	Min
Ciente 1	4,1	4	5	2
Ciente 2	3,4	4	5	1
Ciente 3	2,8	3	4	1
Ciente 4	3,4	3	6	1
Ciente 5	2,4	3	3	1
Ciente 6	2,0	1	4	1
Ciente 7	2,1	1	4	1
Ciente 8	1,9	1	4	1
Ciente 9	1,4	1	3	1
Ciente 10	1,3	1	2	1
Ciente 11	2,0	2	3	1
Ciente 12	1,2	1	2	1
Ciente 13	1,2	1	2	1
Ciente 14	1,3	1	2	1
Ciente 15	2,0	2	2	2
Ciente 16	1,0	1	1	1
Ciente 17	1,3	1	2	1
Ciente 18	1,0	1	1	1
Ciente 19	1,0	1	1	1
Ciente 20	2,0	2	2	2
Ciente 21	1,0	1	1	1
Ciente 22	1,0	1	1	1
Ciente 23	1,0	1	1	1
Ciente 24	1,0	1	1	1

Tabla 2: Cantidad de visitas a clientes por mes

Como se puede apreciar en la Tabla 2, existe para la mayoría de los clientes una alta variabilidad en la frecuencia de visita a los clientes, además que muchas de ellas no son realmente necesarias, puesto que reduce la eficiencia en la entrega de los productos tanto en tiempo como en costos. Por lo mismo se usó la frecuencia modal,

dado que corresponde al dato más frecuentemente utilizado por la empresa. Por lo que la tabla de frecuencias por zona por mes se resume a la siguiente manera:

Zona 1	Moda	Zona 2	Moda
Ciente 2	7	Ciente 2	4
Ciente 3	6	Ciente 3	4
Ciente 4	4	Ciente 4	3
Ciente 5	3	Ciente 5	3
Ciente 6	2	Ciente 6	3
Ciente 7	3	Ciente 7	1
Ciente 8	3	Ciente 8	1
Ciente 9	3	Ciente 9	1
Ciente 10	3	Ciente 10	1
Ciente 11	2	Ciente 11	1
Ciente 12	3	Ciente 12	2
Ciente 13	1	Ciente 13	1
Ciente 14	1	Ciente 14	1
Ciente 15	2	Ciente 15	1
Ciente 16	2	Ciente 16	2
Ciente 17	1	Ciente 17	1
Ciente 18	1	Ciente 18	1
Ciente 19	1	Ciente 19	1
Ciente 20	1	Ciente 20	1
Ciente 21	1	Ciente 21	2
Ciente 22	5	Ciente 22	1
Ciente 23	1	Ciente 23	1
Ciente 24	1	Ciente 24	1
Ciente 25	1	Ciente 25	1
Ciente 26	1		
Ciente 27	1		
Ciente 28	2		
Ciente 29	2		
Ciente 30	1		

Tabla 3: Frecuencia de visita por zona

A pesar de que la empresa no posee la cantidad invertida en combustible o km recorridos, se puede hacer un aproximado, el cual correspondería a la distancia recorrida para la frecuencia de visita que tiene la empresa. La cual se verá con mayor detalle en el capítulo 7. Resultados.

- Capacidad del Vehículo: Considerando las características del vehículo y sus límites de capacidad de 4.000[L] o 1[ton], se utilizó como límite de capacidad la tonelada, la cual es más susceptible a ser excedida dadas las características del producto a entregar.
- Cantidad de Vehículos: Considerando los parámetros recién entregados de demanda y capacidad del vehículo, en conjunto con la ecuación a continuación:

$$N^{\circ} \text{ veh\u00edculos} = \left\lceil \frac{\sum_i Demanda_i}{Capacidad \text{ Veh\u00edculo}} \right\rceil$$

Con la ecuación se obtuvo que el número de vehículos mínimos necesarios para suplir la demanda mensual es de tres vehículos para la “Zona 1” y de dos vehículos para la “Zona 2”, mientras que para suplir la demanda por visita de todos los clientes sería necesario al menos un vehículo para la “Zona 1” y se mantendría la cantidad para la “Zona 2”; sin embargo, esto no considera los tiempos de entrega y servicio, ni la demanda máxima por visita que desean recibir los clientes. Además, como se mencionó anteriormente, la empresa sólo posee un vehículo, por lo tanto, esta cantidad de vehículos mínimos necesarios, en realidad define la cantidad mínima de salidas que se debiera realizar para poder hacer frente a la demanda de todos los clientes.

- Demanda por cliente: A continuación, se presentan tablas que muestran las cantidades demandadas por cliente según su zona; la Tabla 4 corresponde a las demandas totales mensuales y la Tabla 5 es el cálculo de la cantidad de producto entregada en promedio por visita.

Zona 1	Por mes [kg]
Ciente 2	253,5
Ciente 3	286,0
Ciente 4	60,2
Ciente 5	56,1
Ciente 6	19,8
Ciente 7	134,3
Ciente 8	54,0
Ciente 9	142,0
Ciente 10	148,2
Ciente 11	66,7
Ciente 12	11,9
Ciente 13	7,9
Ciente 14	19,0
Ciente 15	29,7
Ciente 16	210,0
Ciente 17	10,3
Ciente 18	6,9
Ciente 19	96,7
Ciente 20	7,9
Ciente 21	11,9
Ciente 22	483,3
Ciente 23	27,7
Ciente 24	14,9
Ciente 25	35,0
Ciente 26	45,0
Ciente 27	25,1
Ciente 28	21,1
Ciente 29	13,9
Ciente 30	42,6

Zona 2	Por mes [kg]
Ciente 2	310,4
Ciente 3	148,5
Ciente 4	47,5
Ciente 5	257,6
Ciente 6	192,0
Ciente 7	95,0
Ciente 8	100,0
Ciente 9	88,0
Ciente 10	40,0
Ciente 11	10,6
Ciente 12	60,0
Ciente 13	50,0
Ciente 14	29,0
Ciente 15	53,3
Ciente 16	90,0
Ciente 17	25,1
Ciente 18	30,0
Ciente 19	7,9
Ciente 20	30,0
Ciente 21	90,0
Ciente 22	90,0
Ciente 23	7,9
Ciente 24	15,0
Ciente 25	7,9

Tabla 4: Demanda clientes mensual

Y la demanda por visita al cliente:

Zona 1	Demanda [Kg]
Ciente 2	37,0
Ciente 3	48,0
Ciente 4	16,0
Ciente 5	19,0
Ciente 6	10,0
Ciente 7	45,0
Ciente 8	18,0
Ciente 9	48,0
Ciente 10	50,0
Ciente 11	34,0
Ciente 12	4,0
Ciente 13	8,0
Ciente 14	20,0
Ciente 15	15,0
Ciente 16	105,0
Ciente 17	11,0
Ciente 18	7,0
Ciente 19	97,0
Ciente 20	8,0
Ciente 21	12,0
Ciente 22	97,0
Ciente 23	28,0
Ciente 24	15,0
Ciente 25	35,0
Ciente 26	45,0
Ciente 27	26,0
Ciente 28	11,0
Ciente 29	7,0
Ciente 30	43,0

Zona 2	Demanda [Kg]
Ciente 2	78,0
Ciente 3	38,0
Ciente 4	16,0
Ciente 5	86,0
Ciente 6	64,0
Ciente 7	95,0
Ciente 8	100,0
Ciente 9	88,0
Ciente 10	40,0
Ciente 11	11,0
Ciente 12	30,0
Ciente 13	50,0
Ciente 14	30,0
Ciente 15	54,0
Ciente 16	45,0
Ciente 17	26,0
Ciente 18	30,0
Ciente 19	8,0
Ciente 20	30,0
Ciente 21	45,0
Ciente 22	90,0
Ciente 23	8,0
Ciente 24	15,0
Ciente 25	8,0

Tabla 5: Demanda clientes por visita

Cabe mencionar que, para generar un pequeño margen positivo, los valores de las demandas por visita fueron redondeados al entero superior. Luego la totalidad de producto a satisfacer por mes de la zona 1 es de 2341,6 [kg] y de la zona 2 es 1875,7 [kg]; mientras que la suma de las demandas por visita de todos los clientes por zona,

corresponden a 909,2 [kg] y 1080,1 [kg] respectivamente, sin embargo, luego de redondear estos últimos, los valores obtenidos fueron de 919,0[kg] y 1085,0[kg].

- Ventanas de tiempo: Inicialmente inexistentes, sin embargo, para una mejor comparación de los modelos, se utilizará en el caso inicial las mismas ventanas de tiempos que en el caso propuesto (ver punto 6.2 Caso Aplicado).
- Distancia entre Clientes: La distancia entre los clientes y la bodega, y entre clientes se puede visualizar en “Matriz Distancia zona 1” y “Matriz Distancia zona 2” en el capítulo 11.2
- Tiempo de arribo entre clientes: El tiempo de arribo entre los clientes y la bodega, y entre clientes se puede visualizar en “Matriz Tiempo zona 1” y “Matriz Distancia zona 2” en punto capítulo 11.3
- Tiempo de Servicio: Este tiempo fue tomado considerando aproximadamente el promedio histórico de lo que demora un cliente en ser atendido y corresponde a 25[min].

6.2 Caso propuesto

Dado las características de la situación inicial, se propuso ordenar la cantidad de visitas que se realizan, disminuyendo las visitas de los clientes altamente frecuentados para que no fuese necesario realizar tantos viajes mensualmente, entregándoles mayor mercancía a los clientes los días visitados para cubrir las demandas de manera semanal, y reorganizando la de otros clientes para equilibrar la carga entregada, así es como algunas frecuencias aumentaron, mientras otras disminuyeron.

La propuesta fue aceptada y las frecuencias de visita se pueden visualizar en las siguientes tablas según zona geográfica:

Zona 1	Frecuencia
Cliente 2	4,0
Cliente 3	4,0
Cliente 4	3,0
Cliente 5	2,0
Cliente 6	1,0
Cliente 7	4,0
Cliente 8	2,0
Cliente 9	4,0
Cliente 10	4,0
Cliente 11	3,0
Cliente 12	1,0
Cliente 13	1,0
Cliente 14	1,0
Cliente 15	2,0
Cliente 16	4,0
Cliente 17	1,0
Cliente 18	1,0
Cliente 19	4,0
Cliente 20	1,0
Cliente 21	1,0
Cliente 22	4,0
Cliente 23	1,0
Cliente 24	1,0
Cliente 25	1,0
Cliente 26	2,0
Cliente 27	1,0
Cliente 28	1,0
Cliente 29	1,0
Cliente 30	2,0

Zona 2	Frecuencia
Cliente 2	3,0
Cliente 3	3,0
Cliente 4	2,0
Cliente 5	3,0
Cliente 6	3,0
Cliente 7	3,0
Cliente 8	3,0
Cliente 9	3,0
Cliente 10	1,0
Cliente 11	1,0
Cliente 12	2,0
Cliente 13	2,0
Cliente 14	1,0
Cliente 15	2,0
Cliente 16	3,0
Cliente 17	1,0
Cliente 18	1,0
Cliente 19	1,0
Cliente 20	1,0
Cliente 21	3,0
Cliente 22	3,0
Cliente 23	1,0
Cliente 24	1,0
Cliente 25	1,0

Tabla 6: Frecuencia de visita por zona

Naturalmente la modificación en las frecuencias de visita tuvo como consecuencia un cambio en las demandas por visita, los valores fueron redondeados al entero superior, al igual que como se realizó previamente, quedando de la siguiente manera:

Zona 1	Demanda [Kg]
Ciente 2	64,0
Ciente 3	72,0
Ciente 4	21,0
Ciente 5	29,0
Ciente 6	20,0
Ciente 7	34,0
Ciente 8	27,0
Ciente 9	36,0
Ciente 10	38,0
Ciente 11	23,0
Ciente 12	12,0
Ciente 13	8,0
Ciente 14	20,0
Ciente 15	15,0
Ciente 16	53,0
Ciente 17	11,0
Ciente 18	7,0
Ciente 19	25,0
Ciente 20	8,0
Ciente 21	12,0
Ciente 22	121,0
Ciente 23	28,0
Ciente 24	15,0
Ciente 25	35,0
Ciente 26	23,0
Ciente 27	26,0
Ciente 28	22,0
Ciente 29	14,0
Ciente 30	22,0

Zona 2	Demanda [Kg]
Ciente 2	104,0
Ciente 3	50,0
Ciente 4	24,0
Ciente 5	86,0
Ciente 6	64,0
Ciente 7	32,0
Ciente 8	34,0
Ciente 9	30,0
Ciente 10	40,0
Ciente 11	11,0
Ciente 12	30,0
Ciente 13	25,0
Ciente 14	30,0
Ciente 15	27,0
Ciente 16	30,0
Ciente 17	26,0
Ciente 18	30,0
Ciente 19	8,0
Ciente 20	30,0
Ciente 21	30,0
Ciente 22	30,0
Ciente 23	8,0
Ciente 24	15,0
Ciente 25	8,0

Tabla 7: Demanda por cliente por zona para caso aplicado

Con estas modificaciones, las nuevas sumas totales de demanda son 841[kg] para la zona 1 y 802[kg] para la zona 2, lo que sugiere que se podrían realizar todas las visitas en un solo recorrido si el tiempo no fuese un limitante.

Otra propuesta que fue necesaria aplicar para la mejora del servicio y estudio del modelo fue el de las Ventanas de tiempo, las cuales eran inexistentes en la situación inicial.

Luego de la aprobación por parte del dueño de la firma y de los clientes, el inicio de las ventanas de tiempo, su duración y fin se pueden observar en la siguiente tabla:

Zona 1	inicio	tw	fin	Zona 2	inicio	tw	fin
Bodega	450	780	1230	Bodega	450	780	1230
Cliente 2	900	360	1260	Cliente 2	660	360	1020
Cliente 3	1020	240	1260	Cliente 3	1140	120	1260
Cliente 4	660	480	1140	Cliente 4	660	360	1020
Cliente 5	720	300	1020	Cliente 5	1020	180	1200
Cliente 6	600	600	1200	Cliente 6	1020	180	1200
Cliente 7	1020	240	1260	Cliente 7	660	360	1020
Cliente 8	540	540	1080	Cliente 8	960	240	1200
Cliente 9	960	360	1320	Cliente 9	720	360	1080
Cliente 10	840	300	1140	Cliente 10	1020	180	1200
Cliente 11	1020	210	1230	Cliente 11	540	720	1260
Cliente 12	960	360	1320	Cliente 12	660	540	1200
Cliente 13	780	240	1020	Cliente 13	690	270	960
Cliente 14	540	660	1200	Cliente 14	720	660	1380
Cliente 15	900	420	1320	Cliente 15	720	660	1380
Cliente 16	960	300	1260	Cliente 16	540	480	1020
Cliente 17	600	420	1020	Cliente 17	480	540	1020
Cliente 18	540	660	1200	Cliente 18	660	420	1080
Cliente 19	900	300	1200	Cliente 19	960	300	1260
Cliente 20	660	300	960	Cliente 20	1050	150	1200
Cliente 21	1020	300	1320	Cliente 21	600	420	1020
Cliente 22	480	480	960	Cliente 22	960	240	1200
Cliente 23	600	420	1020	Cliente 23	600	420	1020
Cliente 24	600	600	1200	Cliente 24	540	510	1050
Cliente 25	600	360	960	Cliente 25	660	540	1200
Cliente 26	930	300	1230				
Cliente 27	420	600	1020				
Cliente 28	540	540	1080				
Cliente 29	780	420	1200				
Cliente 30	600	480	1080				

Tabla 8: Ventanas de tiempo por zona

7 RESULTADOS

Para resolver el modelo se optó por utilizar dos metodologías diferentes; la primera resuelta en el programa computacional Python, y la segunda en AMPL. Ambos fueron resueltos en un equipo estándar con procesador Intel CORE i5-6200U CPU @ 2.30 [Hz], 2.40 [GHz] y 8.00 GB de memoria RAM instalada. El criterio más importante de comparación será el de costo, el cual será medido en distancia recorrida, es decir, a menor distancia, mayor calidad de la heurística.

El horizonte de programación de las rutas corresponde a la ventana de tiempo entre la apertura y el cierre de la bodega, mientras que el tiempo de las rutas corresponde a la suma del tiempo de servicio más los tiempos de recorrido entre los diferentes nodos.

7.1 Resolución en lenguaje Computacional Python

Para correr el programa se utilizó un sistema operativo de código abierto para computadores distribuido por Linux llamado Ubuntu, el cual sirve para los lenguajes de programación C, C++, C#, Java y Python, mientras que para la escritura de éste se utilizó el software Sublime Text 3, el cual es un sofisticado editor de texto para códigos, escrito en C++ y Python. Para la escritura del programa, además, se utilizó OR-Tools de Google de la que se obtuvo una librería más específica “VRP”, la cual utiliza dos librerías llamadas “pywrapcp” y “routing_enums_pb2”.

El algoritmo programado corresponde, como se mencionó anteriormente, al método Heurístico de Inserción de Solomon del camino más barato, el cual fue medido en distancia. Este método de resolución fue utilizado para realizar una aproximación del gasto que tiene la empresa actualmente y poder realizar una comparación con el método exacto. Es

importante mencionar que, de acuerdo con el dueño de la firma, las rutas actuales de distribución son menos eficientes que las entregadas por este método heurístico. Dicho esto, los resultados arrojados por zona son:

Zona 1: Nodos	30	17	11	5	4	3
Distancia total	278,39	205,37	126,48	112,5	110,98	82,08
Tiempo	5	3	1	1	1	1
Carga total	919	564	382	198	182	122
Rutas	Bodega Cliente 13 Cliente 8 Cliente 17 Cliente 30 Cliente 11 Cliente 29 Cliente 24 Cliente 22 Cliente 9 Bodega Cliente 4 Cliente 18 Cliente 23 Cliente 28 Cliente 6 Cliente 20 Cliente 26 Cliente 19 Cliente 5 Cliente 3 Cliente 2 Bodega Cliente 14 Cliente 25 Cliente 27 Cliente 15 Cliente 16 Cliente 7 Cliente 12 Cliente 21 Cliente 10 Bodega	Bodega Cliente 8 Cliente 6 Cliente 5 Cliente 4 Cliente 28 Cliente 29 Cliente 2 Cliente 11 Cliente 3 Cliente 9 Cliente 22 Bodega Cliente 15 Cliente 12 Cliente 7 Cliente 16 Cliente 10 Bodega	Bodega Cliente 8 Cliente 5 Cliente 4 Cliente 2 Cliente 10 Cliente 12 Cliente 3 Cliente 7 Cliente 22 Cliente 9 Bodega	Bodega Cliente 2 Cliente 4 Cliente 3 Cliente 22 Bodega Bodega	Bodega Cliente 2 Cliente 3 Cliente 22 Bodega	Bodega Cliente 3 Cliente 2 Bodega

Tabla 9: Ruteo Python Zona 1 Caso Base

Zona 2: Nodos	25	9	6	3
Distancia total	401,73	194,19	196,09	171,19
tiempo python	5	5	1	1
Carga total	1085	402	282	116
	Bodega Cliente 23 Cliente 16 Cliente 17 Cliente 11 Cliente 25 Cliente 24 Cliente 4 Cliente 18 Cliente 14 Cliente 21 Cliente 9 Cliente 2 Cliente 13 Cliente 7 Cliente 12 Cliente 6 Cliente 20 Cliente 22 Cliente 8 Bodega Cliente 5 Cliente 19 Cliente 10 Cliente 15 Cliente 3 Bodega	Bodega Cliente 16 Cliente 21 Cliente 2 Cliente 4 Cliente 6 Cliente 12 Cliente 5 Cliente 3 Bodega	Bodega Cliente 2 Cliente 4 Cliente 6 Cliente 5 Cliente 3 Bodega	Bodega Cliente 2 Cliente 3 Bodega

Tabla 10: Ruteo Python Zona 2 Caso Base

7.2 Resolución en lenguaje Computacional AMPL

Para resolver este problema se utilizó el optimizador de Gurobi, el cual es un programa de solución de optimización que de acuerdo a AMPL el extremadamente robusto código de Gurobi garantiza la estabilidad numérica, la exactitud de los resultados y la escalabilidad. El algoritmo programado corresponde al método de tres índices del VRPTW descrito en el punto 5.3.1, y fue utilizado tanto en el caso base, para compararlo con la

aproximación del costo del caso actual, como en el caso propuesto, para finalmente realizar la comparación entre la situación actual y la propuesta. Dicho esto, los resultados por zona para el caso base fueron:

Zona 1: Nodos	30	17	11	5	4	3
Distancia total	191,64	117,82	109,31	112,4	110,88	82,08
Tiempo	115	1310	3	0	0	0
Carga	919	564	382	198	182	122
Rutas	Bodega Cliente 13 Bodega Cliente 15 Cliente 25 Cliente 27 Cliente 7 Cliente 12 Cliente 21 Cliente 10 Cliente 16 Cliente 14 Bodega Cliente 30 Cliente 8 Cliente 17 Cliente 6 Cliente 5 Cliente 4 Cliente 18 Cliente 23 Cliente 28 Cliente 20 Cliente 29 Cliente 2 Cliente 11 Cliente 3 Cliente 26 Cliente 19 Cliente 24 Cliente 22 Cliente 9 Bodega	Bodega Cliente 8 Cliente 28 Cliente 6 Cliente 5 Cliente 4 Cliente 2 Cliente 10 Cliente 12 Cliente 15 Cliente 7 Cliente 16 Cliente 11 Cliente 3 Cliente 29 Cliente 22 Cliente 9 Bodega	Bodega Cliente 9 Cliente 5 Cliente 4 Cliente 2 Cliente 3 Cliente 10 Cliente 7 Cliente 12 Cliente 22 Cliente 8 Bodega	Bodega Cliente 3 Cliente 4 Cliente 2 Cliente 22 Bodega	Bodega Cliente 22 Cliente 2 Cliente 3 Bodega	Bodega Cliente 3 Cliente 2 Bodega

Tabla 11: Ruteo AMPL Zona 1 Caso base

Zona 2: Nodos	25	9	6	3
Distancia total	388,33	193,1	196,09	171,19
tiempo	13430,19	1	1	1
Carga total	1085	402	282	116
Rutas	Bodega Cliente 23 Cliente 16 Cliente 7 Cliente 21 Cliente 9 Cliente 2 Cliente 13 Cliente 18 Cliente 14 Cliente 4 Cliente 24 Cliente 25 Cliente 17 Cliente 11 Cliente 20 Cliente 6 Cliente 19 Cliente 10 Cliente 15 Cliente 3 Bodega Cliente 8 Cliente 22 Cliente 12 Cliente 5 Bodega	Bodega Cliente 16 Cliente 2 Cliente 21 Cliente 4 Cliente 6 Cliente 12 Cliente 5 Cliente 3 Bodega	Bodega Cliente 2 Cliente 4 Cliente 6 Cliente 5 Cliente 3 Bodega	Bodega Cliente 2 Cliente 3 Bodega

Tabla 12: Ruteo AMPL Zona 2 Caso base

Y para el caso propuesto:

Zona 1: Nodos	30	16	11	9
Distancia total	191,64	184,6	125,13	116,51
tiempo	115	330	190	3
Carga	841	603	487	443
Rutas	Bodega Cliente 13 Bodega Cliente 15 Cliente 25 Cliente 27 Cliente 7 Cliente 12 Cliente 21 Cliente 10 Cliente 16 Cliente 14 Bodega Cliente 30 Cliente 8 Cliente 17 Cliente 6 Cliente 5 Cliente 4 Cliente 18 Cliente 23 Cliente 28 Cliente 20 Cliente 29 Cliente 2 Cliente 11 Cliente 3 Cliente 26 Cliente 19 Cliente 24 Cliente 22 Cliente 9 Bodega	Bodega Cliente 8 Cliente 30 Cliente 5 Cliente 4 Cliente 2 Cliente 10 Cliente 15 Cliente 16 Cliente 11 Cliente 3 Cliente 19 Cliente 26 Cliente 7 Cliente 22 Cliente 9 Bodega	Bodega Cliente 2 Cliente 10 Cliente 16 Cliente 11 Cliente 3 Cliente 4 Cliente 19 Cliente 7 Cliente 22 Cliente 9 Bodega	Bodega Cliente 10 Cliente 16 Cliente 3 Cliente 2 Cliente 19 Cliente 7 Cliente 22 Cliente 9 Bodega

Tabla 13: Ruteo AMPL Zona 2 Caso propuesto

Zona 2: Nodos	25	15	11
Distancia total	388,33	208,87	190,16
Tiempo	14925	5	1
Carga total	802	596	490
Rutas	Bodega Cliente 23 Cliente 16 Cliente 7 Cliente 21 Cliente 9 Cliente 2 Cliente 13 Cliente 18 Cliente 14 Cliente 4 Cliente 24 Cliente 25 Cliente 17 Cliente 11 Cliente 20 Cliente 6 Cliente 19 Cliente 10 Cliente 15 Cliente 3 Bodega Cliente 8 Cliente 22 Cliente 12 Cliente 5 Bodega	Bodega Cliente 16 Cliente 15 Cliente 7 Cliente 4 Cliente 21 Cliente 2 Cliente 9 Cliente 13 Cliente 6 Cliente 12 Cliente 22 Cliente 8 Cliente 5 Cliente 3 Bodega	Bodega Cliente 22 Cliente 8 Cliente 2 Cliente 9 Cliente 6 Cliente 21 Cliente 7 Cliente 3 Cliente 16 Cliente 5 Bodega

Tabla 14: Ruteo AMPL Zona 2 Caso propuesto

Se adjunta mapa de la primera visita a todos los clientes para ambos programas en Anexos, punto 11.1.2 y 11.1.3 para los programas Python y AMPL respectivamente.

8 ANÁLISIS DE RESULTADOS

Para el análisis es importante mencionar que la empresa al ver los resultados aseguró que recorre más Km que los que se calcularon con el método heurístico en el modelo programado en Python, el cual como ya se indicó anteriormente, se realizó por dos motivos; debido a la inexistencia de datos por parte ésta y para poder comparar las soluciones de ambos métodos de programación.

A continuación, podemos visualizar tablas resumen para una mejor visualización de los datos correspondientes a un mes de distribución.

Nodos	Python		AMPL		Diferencia	Diferencia Porcentual
	Distancia	Viajes	Distancia	Viajes		
30	278,39	3	191,64	3	86,75	31,2%
17	205,37	2	117,82	1	87,55	42,6%
11	126,48	1	109,31	1	17,17	13,6%
5	112,5	1	112,4	1	0,1	0,1%
4	110,98	1	110,88	1	0,1	0,1%
3	82,08	1	82,08	1	0	0,0%
Total	915,8	9	724,13	8	191,67	20,9%

Tabla 15: Comparación de métodos Zona 1 Caso base

Nodos	Python		AMPL		Diferencia	Diferencia Porcentual
	Distancia	Viajes	Distancia	Viajes		
25	401,73	2	388,33	2	13,4	3,3%
9	194,19	1	193,1	1	1,09	0,6%
6	196,09	1	196,09	1	0	0,0%
3	171,19	1	171,19	1	0	0,0%
Total	963,2	5	948,71	5	14,49	1,5%

Tabla 16: Comparación de métodos Zona 2 Caso base

Como se puede observar en la zona 1 el cambio de un método a otro llega a tener una mejora de un 43%, esto se debe a que se utiliza un viaje más en el método heurístico frente al método exacto, en cambio en todas las otras situaciones se realizan igual cantidad de viajes.

En la zona 2 se puede observar un comportamiento completamente diferente en la resolución de los métodos, siendo la máxima mejora de tan solo un 3,3%. Cabe decir que, en la actualidad, de acuerdo con los datos mencionados por el dueño de la empresa, las visitas a la Zona 2 son de al menos 5 veces, lo que automáticamente sumaría en el menor de los casos 154,8 [km], la cual correspondería a la visita del cliente más cercano de esta zona más la vuelta a la bodega; esto significaría una mejora de un 15,1% en la diferencia porcentual total. Por otro de igual manera las visitas a la Zona 1 son de al menos 2 veces por semana, lo que significaría en el menor de los cambios 80 [km] más de lo calculado por el programa, esto incrementaría la diferencia porcentual total un 6,4%, es decir, a un 27,3%.

A continuación, se presentan las tablas resumen del caso propuesto por zona, para luego compararla con los primeros dos casos estudiados, correspondientes al caso base resuelto con Python y al caso mejorado resuelto con AMPL.

Zona 1			Zona 2:		
AMPL propuesto			AMPL propuesto		
Nodos	Distancia	Viajes	Nodos	Distancia	Viajes
30	191,64	3	25	388,33	2
16	184,6	1	16	208,87	1
11	125,13	1	11	190,16	1
9	116,51	1	-		
Total	617,88	6,00	Total	787,36	4,00

Tabla 17: Resumen resultados caso propuesto por zona

		Python vs AMPL 1		AMPL base vs prop		Python vs AMPL prop	
		Δ Distancia [km]	$\Delta\%$	Δ Distancia [km]	$\Delta\%$	Δ Distancia [km]	$\Delta\%$
Zona 1	Distancia	169,3	15,1%	330,8	34,9%	500,1	44,7%
	Viajes	1	0%	3	38%	4	44%
Zona 2	Distancia	14,5	1,5%	161,4	17,0%	175,8	18,3%
	Viajes	0	0%	1	20%	1	20%

Tabla 18: Cuadro comparativo de resultados

9 CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

El objetivo general de esta tesis de desarrollar mediante un modelo, alternativas de ruteo para la distribución de cervezas artesanales en las ciudades de Valparaíso, Viña del Mar y Santiago que determine una solución óptima de distribución y el cálculo del costo asociado de transporte se logró.

El objetivo específico de desarrollar un algoritmo de resolución para el problema mediante un método heurístico y un método exacto se cumplió, y con esto, se pudo lograr los otros tres objetivos específicos restantes; es decir, se logró aproximar el costo de transporte de la situación inicial de la empresa, se cuantificaron los beneficios económicos del uso de las rutas inicial y propuesta obtenidas mediante la resolución del VRP por el método exacto, los cuales fueron analizados y comparados con la situación inicial para probar el cumplimiento del objetivo general.

Primeramente, como la empresa no trabajaba con ventanas de tiempo, el vehículo de distribución sufría mucho tiempo de ocio durante las entregas de producto, ya que no es recibido oportunamente, lo que tiene una serie de consecuencias negativas en los costos socioeconómicos de la distribución de productos; por un lado sufrir más tiempo de ocio hace que se alargue la cantidad de rutas por mes que se deben realizar, debido a la cantidad de clientes pendientes por no ser atendidos en el momento correspondiente, lo que además tiene como implicancia tener que realizar más salidas del vehículo desde la bodega, lo que inmediatamente tiene una significativa suma de kilómetros extra innecesarios por recorrer, y una disminución en la eficiencia del uso de la carga del vehículo. Por otro lado, llegar inoportunamente significa una menor calidad en el servicio entregado al cliente.

Otro punto importante que tiene consecuencias parecidas a las previamente mencionadas es que en la situación inicial no existe un orden de reparto, por lo que muchos de los clientes son visitados muchas veces con muy poco producto, lo que implica un mayor gasto de bencina, tiempo, desgaste físico del auto, mayor cantidad de horas hombre en el tema de traslado

Considerando ambos métodos utilizados, se puede concluir que el método exacto es la mejor opción para este caso en estudio, dado que el tiempo que requiere el programa AMPL para resolver el problema con las cantidades de clientes utilizadas no es muy grande considerando que los resultados a obtener no cambian en el corto plazo, y pueden ir siendo ajustados de manera paulatina cuando se estime conveniente. En el caso de que se necesitara modificar rutas de forma diaria, sería necesario un estudio comparativo inicial de los métodos, puesto que según la realidad de la situación el tiempo de cálculo puede variar enormemente como se pudo observar entre las diferentes regiones.

Se pudo concluir que las propuestas entregadas a la empresa dan una clara mejoría de la situación actual, sin embargo, considerando que la metodología elegida para este caso es el método exacto, a pesar de que los resultados corresponden a un óptimo, estos podrían mejorar con otras alternativas de propuestas; por ejemplo, se podría ahondar y estudiar otras propuestas de frecuencia de visita para que el vehículo pueda ser utilizado de manera más eficiente, es decir, que transporte mayor carga que la que lleva en las rutas con menos nodos para así reducir aún más la cantidad de viajes. También se podría evaluar una forma de disminuir el tiempo de servicio, para poder visitar una mayor cantidad de clientes por día.

10 BIBLIOGRAFÍA

- Acechi-Aprocor-Vinos de Chile. (2015). *Estudio Nacional de Mercado de Bebidas Alcohólicas Ilegales en Chile 2015*. Obtenido de http://aprocor.cl/wp-content/uploads/2018/06/Estudio_Nacional_Mercado_Bebidas_Alcoholicas_Ilegales_en_Chile_2015.pdf
- Amaya A., J. (2012). *Optimización para estudiantes de Ingeniería. Capítulo 1: Matemáticas para la optimización*.
- Ballou, R. (1991). *Logística empresarial. Control y planificación*. Madrid: Díaz de Santos.
- Ballou, R. H. (2004). *Logística: Administración de la cadena de suministro*. Pearson Educación.
- BBC Mundo. (Junio de 2017). La razón por la que el consumo de cerveza bajó en el mundo. Recuperado el Febrero de 2018, de <https://www.bbc.com/mundo/noticias-40159409>
- Bektas, T. (2006). *The multiple traveling salesman problem: an Overview of formulations and solution procedures*. (Vol. 3). Omega. doi:10.1016/j.omega.2004.10.004
- Benhida, S., & Mir, A. (Julio de 2018). Generating subtour elimination constraints for the Traveling. 08. Marruecos: IOSR Journal of Engineering (IOSRJEN) .
- Berkeley IE&OR. (Mayo de 2017). *Berkeley Industrial Engineering & Operations Research*. Obtenido de <https://ieor.berkeley.edu/news/05-18-2017/mark-velednitsky-finds-short-proof-for-traveling-salesman-problem>
- Castellanos R., A. (2009). *Manual de la Gestión logística del transporte y la distribución de mercancías*. Barranquilla, Colombia: Ediciones Uninorte.
- Desaulniers, G., Desrosiers, J., Erdmann, A., Solomon, M. M., & François, S. (2002). VRP with Pickup and Delivery. En *The Vehicle Routing Problem* (págs. 225-242). doi:10.1137/1.9780898718515.ch9
- Espinosa, E., Sánchez, O., & Orlando, B. (2016). Problema del agente viajero. *Ingeciencia*, 1(2).
- Fernández Díez de los Ríos, J. (2014). *Optimización de la cadena logística*. Madrid, España: CEP S.L.
- Gendreau, M., Vidal, T., Crainic, G., & Prins, C. (2012). *“Heuristics for multi-attribute vehicle routing problems: A survey and synthesis”*. (CIRRAULT, Editor) Obtenido de <http://www.redalyc.org/html/849/84950585004/>

- Golden, B., Assad, A., Levy, L., & Gheysens, F. (1984). The Fleet Size and Mix Vehicle Routing Problem.
- Iturriaga, C. (31 de Julio de 2017). Consumo de cerveza artesanal crece 15% en Chile, acoplándose a tendencia mundial. *ECONOMÍA Y NEGOCIOS*.
- Jünger, M., Reinelt, G., & Rinaldi, G. (1995). *Handbooks in Operations Research and Management Science, Chapter 4: The traveling salesman problem* (Vol. 7).
- Kallehauge, B., Larsen, J., Madsen, O. B., & Solomon, M. M. (2005). VEHICLE ROUTING PROBLEM WITH TIME WINDOWS. En *Column Generation* (págs. 67-70). Springer Science. doi:10.1007/b135457
- Kelly, J. P., & Osman, I. H. (1996). *Meta-Heuristics, Theory & Applications*. Springer, Boston, MA.
- Laporte, G. (1992). The Vehicle Routing Problem: An Overview of exact and approximate algorithms. *European Journal of Operational Research*. doi:10.1016/0377-2217(92)90192-C
- Llopis, J. (s.f). Obtenido de <https://www.matesfacil.com/automatas-lenguajes/Maquina-Turing.html>
- Lopez, M. A. (Agosto de 2017). *America Retail*. Obtenido de <https://www.america-retail.com/estudios-consumidores/estudios-crece-consumo-de-cerveza-artesanal-en-chile/>
- Lozada, A., & Cadena, R. (2012). *Solución del problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW) mediante métodos heurísticos*. Trabajo de grado, Universidad Industrial de Santander, Facultad de ingenierías Fisicomecánicas, Escuela de Estudios Industriales y Empresariales Bucaramanga.
- MINSAL. (Junio de 2016). Chilenos casi triplican el nivel de consumo de alcohol considerado peligroso por la OMS. Ministerios del Interior y Seguridad Pública, Ministerio de Salud, Gobierno de Chile.. Recuperado el 05 de Enero de 2018, de <https://www.minsal.cl/chilenos-casi-triplican-el-nivel-de-consumo-de-alcohol-considerado-peligroso-por-la-oms/>
- Nuño, P. (Abril de 2017). La logística empresarial. Obtenido de <https://www.emprendepyme.net/la-logistica-empresarial.html>
- Olivera, A. (Agosto, 2004). *Heurísticas para Problemas de Ruteo de Vehículos*. (F. d. Instituto de Computación, Ed.)
- Orloff, C. (1976). Route-constrained fleet scheduling. 149-168. *Transportation Science*.

- Orrego Cardozo, J. P., Ospina Toro, D., & Toro Ocampo, E. M. (Septiembre, 2016). *Solución al Problema de Ruteo de Vehículos con Capacidad Limitada (CVRP) usando una técnica metaheurística* (Vol. 21). (S. e. Technica, Ed.) Obtenido de <http://www.redalyc.org/html/849/84950585004/>
- Quinteros, M., Alonso, A., Escudero, L., Monique, G., & Weintraub, A. (2006). Una Aplicación de Programación Estocástica en un Problema de Gestión Forestal. *Revista Ingeniería de Sistemas*.
- Ramos, A., & Cerisola, S. (Febrero de 2016). Optimización estocástica. Madrid.
- Real Academia Española. (2019). Diccionario de la lengua española. Obtenido de <https://dle.rae.es>
- Riff, M. (s.f). Programación lineal entera. Obtenido de <https://www.inf.utfsm.cl/~mcriff/fio/ilp.html>
- SENDA-MINSAL. (2016). *El consumo de alcohol en Chile: Situación Epidemiológica*. Ministerios del Interior y Seguridad Pública, Ministerio de Salud, Gobierno de Chile.
- SENDA-MINSAL. (2016). EL CONSUMO DE ALCOHOL EN CHILE: SITUACIÓN EPIDEMIOLÓGICA. Ministerio de Salud, Chile.
- Toregas, C., & ReVelle, C. (1972). Location under time or distance constraints. *Papers of the Regional Science Association* 28, 133-143.
- Toth, P., & Vigo, D. (2002). An Overview of Vehicle Routing Problems.
- Voß, S., & Woodruff, D. L. (2006). *Introduction to computational optimization models for production planning in a supply chain* (2 ed.). Berlín: Springer.

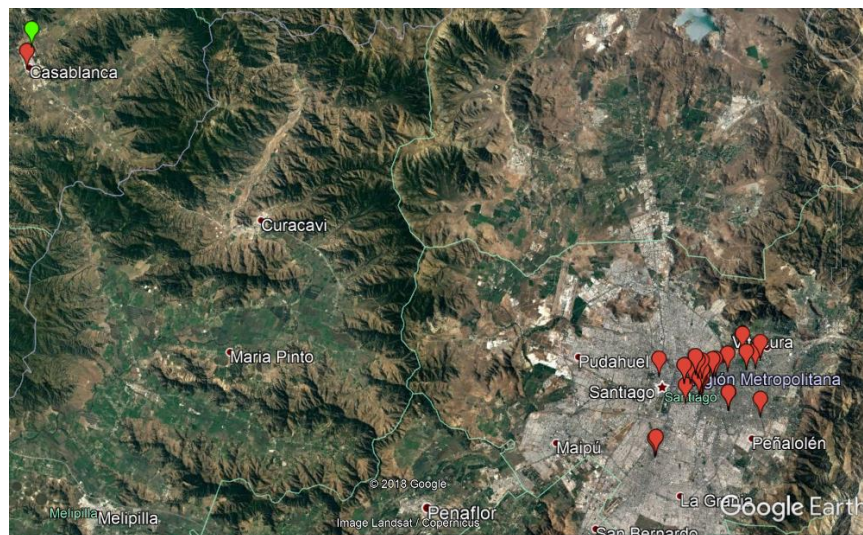
11 ANEXOS

11.1 Mapas

11.1.1 Localización Clientes

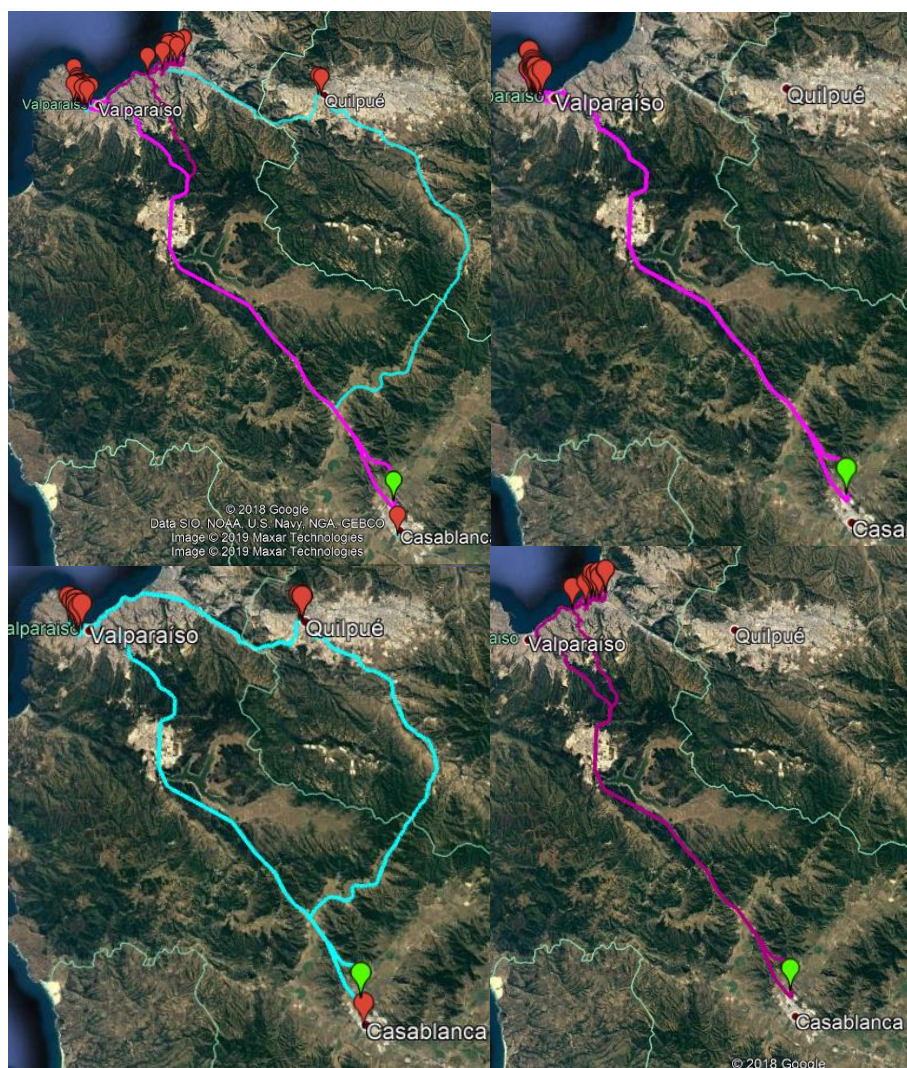


Anexo 1: Ubicación clientes Zona 1

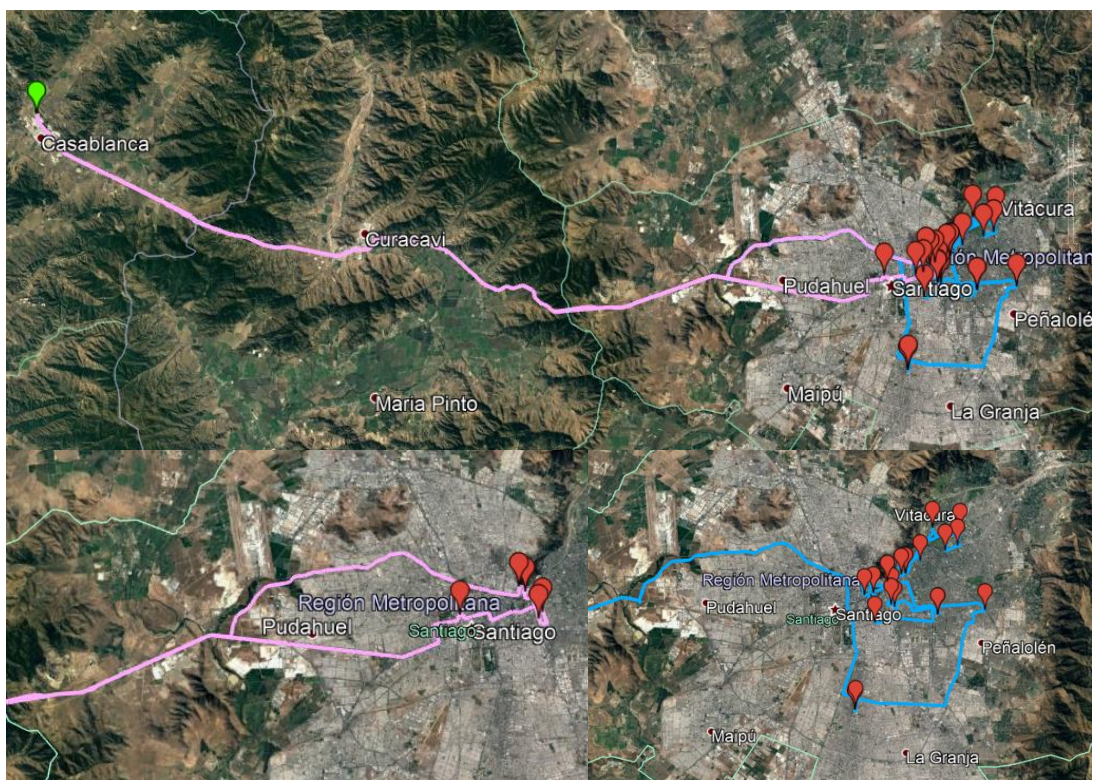


Anexo 2: Ubicación clientes Zona 2

11.1.2 Rutas Python



Anexo 3: Rutas Python caso base Zona 1

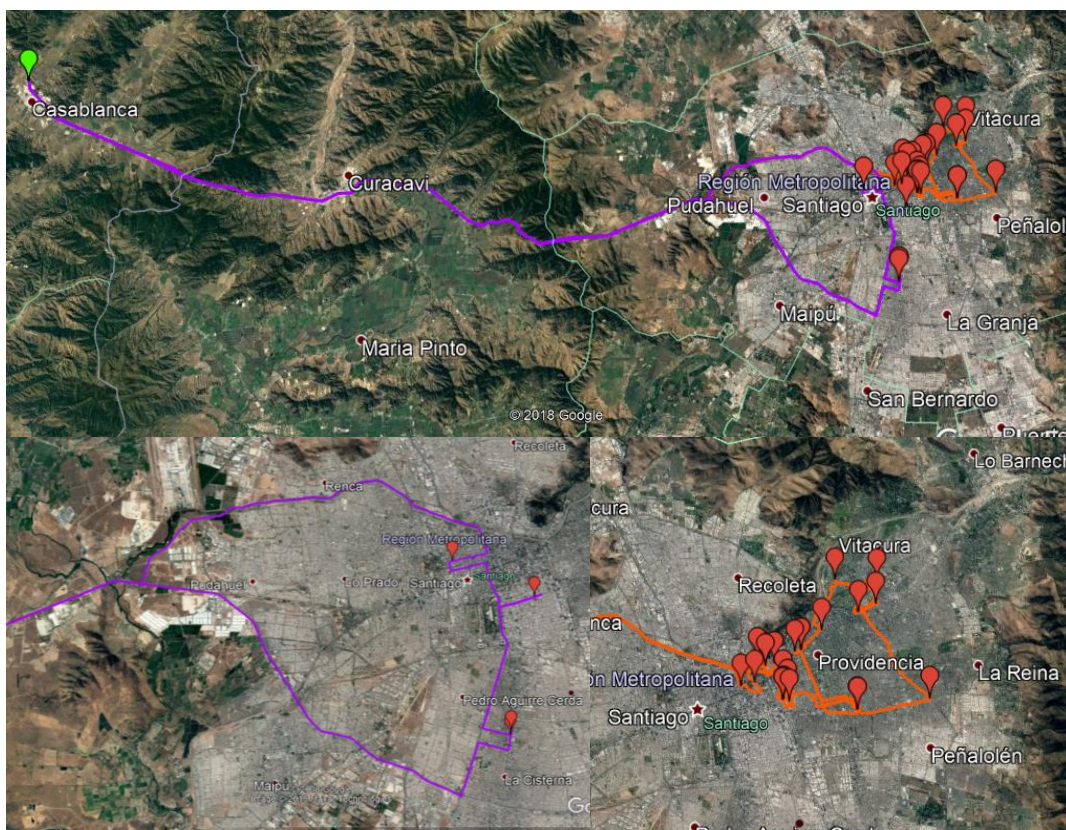


Anexo 4: Rutas Python caso base Zona 2

11.1.3 Rutas AMPL



Anexo 5: AMPL caso base Zona 1 (Nodos: 30)



Anexo 6: AMPL caso base Zona 2 (Nodos: 25)

11.2 Matrices Distancia

	BODEGA	CLIENTE 2	CLIENTE 3	CLIENTE 4	CLIENTE 5	CLIENTE 6	CLIENTE 7	CLIENTE 8	CLIENTE 9	CLIENTE 10	CLIENTE 11	CLIENTE 12	CLIENTE 13	CLIENTE 14	CLIENTE 15
BODEGA	0	40.9	40.4	41.7	41.9	42.2	45.6	40.4	41.9	41.9	41.2	45.1	45.1	42.35	40.2
CLIENTE 2	40.9	0	0.78	1.16	1.37	1.68	9.56	1.36	21.8	8.75	0.7	9.12	42.1	6.5	10.5
CLIENTE 3	40.4	0.78	0	1.14	1.35	1.65	9.24	0.92	21.5	8.43	0.54	8.8	42.3	6.18	10.2
CLIENTE 4	41.7	1.16	1.14	0	0.21	0.51	10.3	2.06	22.6	9.49	1.21	9.85	43.4	7.24	11.2
CLIENTE 5	41.9	1.37	1.35	0.21	0	0.31	10.1	1.84	22.3	9.27	0.99	9.64	43.2	7.03	11
CLIENTE 6	42.2	1.68	1.65	0.51	0.31	0	9.79	1.74	22	8.97	0.69	9.34	42.9	6.72	10.7
CLIENTE 7	45.6	9.56	9.24	10.3	10.1	9.79	0	8.8	12.4	1.08	8.76	0.73	47.4	2.99	1.19
CLIENTE 8	40.4	1.36	0.92	2.06	1.84	1.74	8.8	0	21.5	8.42	1.26	8.78	41.5	6.17	10.2
CLIENTE 9	41.9	21.8	21.5	22.6	22.3	22	12.4	21.5	0	14.8	22	14.2	43.1	16.3	14.4
CLIENTE 10	41.9	8.75	8.43	9.49	9.27	8.97	1.08	8.42	14.8	0	8.2	0.7	46.8	2.41	2.04
CLIENTE 11	41.2	0.7	0.54	1.21	0.99	0.69	8.76	1.26	22	8.2	0	8.62	42.2	6	10
CLIENTE 12	45.1	9.12	8.8	9.85	9.64	9.34	0.73	8.78	14.2	0.7	8.62	0	46.5	3.18	1.38
CLIENTE 13	45.1	42.1	42.3	43.4	43.2	42.9	47.4	41.5	43.1	46.8	42.2	46.5	0	41.1	46.7
CLIENTE 14	42.35	6.5	6.18	7.24	7.03	6.72	2.99	6.17	16.3	2.41	6	3.18	41.1	0	4.83
CLIENTE 15	40.2	10.5	10.2	11.2	11	10.7	1.19	10.2	14.4	2.04	10	1.38	46.7	4.83	0
CLIENTE 16	49.2	7.48	7.16	8.22	8	7.7	1.66	7.15	14.9	1.08	6.98	1.85	45.8	1.59	2.47
CLIENTE 17	41	1.45	1.63	2.65	2.44	2.14	9.48	0.58	30.9	8.91	1.65	9.68	42.4	7.75	10.3
CLIENTE 18	42.6	1.83	1.7	0.57	0.59	1.34	9.86	3.25	23.1	9.29	1.64	10.1	43.8	8.13	10.7
CLIENTE 19	41.6	1.03	1.01	1.18	0.96	0.66	9.18	1.72	22.4	8.61	0.97	9.37	42.9	7.45	9.99
CLIENTE 20	41.8	1.43	0.86	1.08	0.87	0.56	9.44	2.06	22.6	8.87	1.22	9.63	43.2	7.71	10.3
CLIENTE 21	41.6	8.73	8.41	9.47	9.26	8.96	9.28	8.4	15.2	0.27	8.23	0.91	47	3.07	1.55
CLIENTE 22	47.8	21.9	21.5	22.6	22.4	22.1	12.5	21.5	0.98	12.4	21.4	11.8	50	16.2	11.9
CLIENTE 23	42	1.48	1.46	0.33	0.35	1.11	9.63	2.17	22.8	9.06	1.41	9.82	43.3	7.9	10.4
CLIENTE 24	42.2	1.66	1.64	0.5	0.29	1.29	9.81	2.35	23	9.23	1.59	10	43.5	8.08	10.6
CLIENTE 25	41.7	8.87	8.55	9.61	9.39	9.09	9.29	8.54	14.6	0.42	8.37	0.48	47.2	3.21	1.53
CLIENTE 26	41.6	1.09	1.07	1.23	1.02	0.72	9.23	1.78	22.4	8.66	1.01	9.43	43	7.5	10
CLIENTE 27	45.3	11	10.1	11.2	10.9	10.6	1.11	10.1	14.4	1.96	9.91	1.3	46.6	4.75	0.98
CLIENTE 28	45.3	2.12	2.05	1.73	1.55	1.25	10.1	2.17	23.3	9.52	1.87	10.3	43.8	8.36	10.9
CLIENTE 29	41.7	0.87	1.06	1.21	1	0.7	9.21	2.23	22.4	8.64	0.99	9.41	42.9	7.48	10
CLIENTE 30	40	1.07	0.65	2	0.92	1.49	8.2	0.73	21.4	7.63	0.7	8.4	41.4	6.47	9.01

Anexo 7: Matriz Distancia Zona 1 (Parte 1 de 2)

	CLIENTE 16	CLIENTE 17	CLIENTE 18	CLIENTE 19	CLIENTE 20	CLIENTE 21	CLIENTE 22	CLIENTE 23	CLIENTE 24	CLIENTE 25	CLIENTE 26	CLIENTE 27	CLIENTE 28	CLIENTE 29	CLIENTE 30
BODEGA	49.2	41	42.6	41.6	41.8	41.6	47.8	42	42.2	41.7	41.6	45.3	45.3	41.7	40
CLIENTE 2	7.48	1.45	1.83	1.03	1.43	8.73	21.9	1.48	1.66	8.87	1.09	11	2.12	0.87	1.07
CLIENTE 3	7.16	1.63	1.7	1.01	0.86	8.41	21.5	1.46	1.64	8.55	1.07	10.1	2.05	1.06	0.65
CLIENTE 4	8.22	2.65	0.57	1.18	1.08	9.47	22.6	0.33	0.5	9.61	1.23	11.2	1.73	1.21	2
CLIENTE 5	8	2.44	0.59	0.96	0.87	9.26	22.4	0.35	0.29	9.39	1.02	10.9	1.55	1	0.92
CLIENTE 6	7.7	2.14	1.34	0.66	0.56	8.96	22.1	1.11	1.29	9.09	0.72	10.6	1.25	0.7	1.49
CLIENTE 7	1.66	9.48	9.86	9.18	9.44	9.28	12.5	9.63	9.81	9.29	9.23	1.11	10.1	9.21	8.2
CLIENTE 8	7.15	0.58	3.25	1.72	2.06	8.4	21.5	2.17	2.35	8.54	1.78	10.1	2.17	2.23	0.73
CLIENTE 9	14.9	30.9	23.1	22.4	22.6	15.2	0.98	22.8	23	14.6	22.4	14.4	23.3	22.4	21.4
CLIENTE 10	1.08	8.91	9.29	8.61	8.87	0.27	12.4	9.06	9.23	0.42	8.66	1.96	9.52	8.64	7.63
CLIENTE 11	6.98	1.65	1.64	0.97	1.22	8.23	21.4	1.41	1.59	8.37	1.01	9.91	1.87	0.99	0.7
CLIENTE 12	1.85	9.68	10.1	9.37	9.63	0.91	11.8	9.82	10	0.48	9.43	1.3	10.3	9.41	8.4
CLIENTE 13	45.8	42.4	43.8	42.9	43.2	47	50	43.3	43.5	47.2	43	46.6	43.8	42.9	41.4
CLIENTE 14	1.59	7.75	8.13	7.45	7.71	3.07	16.2	7.9	8.08	3.21	7.5	4.75	8.36	7.48	6.47
CLIENTE 15	2.47	10.3	10.7	9.99	10.3	1.55	11.9	10.4	10.6	1.53	10	0.98	10.9	10	9.01
CLIENTE 16	0	8.78	9.16	8.48	8.74	2.23	15.5	8.93	9.1	2.37	8.53	3.91	9.39	8.51	7.5
CLIENTE 17	8.78	0	3.32	2.49	2.49	9.08	22.2	2.94	3.12	9.21	2.54	10.8	3.18	2.32	1.42
CLIENTE 18	9.16	3.32	0	1.3	2.25	9.64	22.8	0.23	0.68	9.78	1.87	11.3	1.94	1.65	2.19
CLIENTE 19	8.48	2.49	1.3	0	1.2	9.59	22.7	0.45	0.63	9.72	0.05	11.3	1.89	1.33	2.14
CLIENTE 20	8.74	2.49	2.25	1.2	0	8.95	22.1	1.14	1.32	9.08	0.75	10.6	1.25	0.73	1.5
CLIENTE 21	2.23	9.08	9.64	9.59	8.95	0	12.6	9.24	9.42	0.59	8.84	1.69	9.7	8.82	7.8
CLIENTE 22	15.5	22.2	22.8	22.7	22.1	12.6	0	22	2.2	12	21.6	11.7	22.5	7.18	20.6
CLIENTE 23	8.93	2.94	0.23	0.45	1.14	9.24	22	0	0.42	9.51	1.14	11.1	1.67	1.12	1.93
CLIENTE 24	9.1	3.12	0.68	0.63	1.32	9.42	2.2	0.42	0	9.1	0.73	10.6	1.26	0.71	1.52
CLIENTE 25	2.37	9.21	9.78	9.72	9.08	0.59	12	9.51	9.1	0	8.85	1.56	9.72	8.84	7.81
CLIENTE 26	8.53	2.54	1.87	0.05	0.75	8.84	21.6	1.14	0.73	8.85	0	11.2	1.83	1.28	2.09
CLIENTE 27	3.91	10.8	11.3	11.3	10.6	1.69	11.7	11.1	10.6	1.56	11.2	0	11	10.1	9.08
CLIENTE 28	9.39	3.18	1.94	1.89	1.25	9.7	22.5	1.67	1.26	9.72	1.83	11	0	1.64	2.31
CLIENTE 29	8.51	2.32	1.65	1.33	0.73	8.82	7.18	1.12	0.71	8.84	1.28	10.1	1.64	0	1.16
CLIENTE 30	7.5	1.42	2.19	2.14	1.5	7.8	20.6	1.93	1.52	7.81	2.09	9.08	2.31	1.16	0

Anexo 7: Matriz Distancia Zona 1 (Parte 2 de 2)

	BODEGA	CLIENTE 2	CLIENTE 3	CLIENTE 4	CLIENTE 5	CLIENTE 6	CLIENTE 7	CLIENTE 8	CLIENTE 9	CLIENTE 10	CLIENTE 11	CLIENTE 12	CLIENTE 13
BODEGA	0	85.5	82.8	87.4	77.4	90	86.9	84.8	86	85.9	90.4	85.2	90.1
CLIENTE 2	85.5	0	2.89	4.99	6.74	4.23	3.46	9.12	0.492	0.902	10	2.47	4.27
CLIENTE 3	82.8	2.89	0	5.77	5.63	7.2	1.19	13	3.25	3.16	8.72	3.61	7.24
CLIENTE 4	87.4	4.99	5.77	0	10	4.37	3.05	17.4	5.03	5.42	3.26	6.7	4.41
CLIENTE 5	77.4	6.74	5.63	10	0	12.8	9.68	10.2	6.35	6.28	13.1	5.49	12.8
CLIENTE 6	90	4.23	7.2	4.37	12.8	0	5.56	20.4	3.55	3.87	6.9	4.95	0.008
CLIENTE 7	86.9	3.46	1.19	3.05	9.68	5.56	0	13.6	3.53	3.83	7.56	3.53	5.95
CLIENTE 8	84.8	9.12	13	17.4	10.2	20.4	13.6	0	10.7	10.1	20.5	8.57	12.4
CLIENTE 9	86	0.492	3.25	5.03	6.35	3.55	3.53	10.7	0	1.38	10.1	3.19	4.28
CLIENTE 10	85.9	0.902	3.16	5.42	6.28	3.87	3.83	10.1	1.38	0	9.67	2.57	4.37
CLIENTE 11	90.4	10	8.72	3.26	13.1	6.9	7.56	20.5	10.1	9.67	0	12.1	6.39
CLIENTE 12	85.2	2.47	3.61	6.7	5.49	4.95	3.53	8.57	3.19	2.57	12.1	0	5.11
CLIENTE 13	90.1	4.27	7.24	4.41	12.8	0.08	5.95	12.4	4.28	4.37	6.39	5.11	0
CLIENTE 14	85.7	18.8	4.11	1.56	8.47	5.25	5.95	15.8	4.04	3.58	6.39	10.9	15.9
CLIENTE 15	87.5	3.05	0.878	3.61	5.84	6.13	0.51	15.8	3.06	2.67	8.44	4.47	6.12
CLIENTE 16	83.1	2.42	1.44	4.28	4.81	5.59	2.04	10.8	2.43	2.05	7.06	3.25	5.59
CLIENTE 17	90	9.62	8.3	3.43	12.7	6.64	7.14	20.1	9.64	9.26	1.56	15.2	6.6
CLIENTE 18	85.9	3.56	4.29	1.74	8.65	4.78	3.13	16	3.02	2.64	4.51	4.98	5
CLIENTE 19	88.1	0.705	2.81	3.91	5.44	4.05	2.33	10.9	0.715	0.809	7.95	3.44	4.32
CLIENTE 20	98.9	7.19	10.5	6.04	17.5	4.24	12	14.9	7.2	7.29	5.94	9.92	4.2
CLIENTE 21	87.6	0.924	2.32	3.42	4.95	4.56	1.84	11.1	0.934	0.99	6.2	3.62	4.83
CLIENTE 22	84.7	9.24	13.1	17.5	10.4	15.1	13.7	1.06	15.2	14.8	21.1	6.96	15.9
CLIENTE 23	82.6	3.75	2.05	5.29	2.83	7.25	3.05	10.1	3.76	3.38	10.8	4.29	7.81
CLIENTE 24	88.5	11.8	10.5	3.06	14.9	7.61	9.34	22.3	11.8	11.5	3.46	17.4	7.46
CLIENTE 25	89.9	9.5	8.18	4.26	12.6	7.48	7.01	19.9	9.51	9.13	2.39	15.1	7.44

Anexo 8: Matriz Distancia Zona 2 (Parte 1 de 2)

	CLIENTE 14	CLIENTE 15	CLIENTE 16	CLIENTE 17	CLIENTE 18	CLIENTE 19	CLIENTE 20	CLIENTE 21	CLIENTE 22	CLIENTE 23	CLIENTE 24	CLIENTE 25
BODEGA	85.7	87.5	83.1	90	85.9	88.1	98.9	87.6	84.7	82.6	88.5	89.9
CLIENTE 2	18.8	3.05	2.42	9.62	3.56	0.705	7.19	0.924	9.24	3.75	11.8	9.5
CLIENTE 3	4.11	0.878	1.44	8.3	4.29	2.81	10.5	2.32	13.1	2.05	10.5	8.18
CLIENTE 4	1.56	3.61	4.28	3.43	1.74	3.91	6.04	3.42	17.5	5.29	3.06	4.26
CLIENTE 5	8.47	5.84	4.81	12.7	8.65	5.44	17.5	4.95	10.4	2.83	14.9	12.6
CLIENTE 6	5.25	6.13	5.59	6.64	4.78	4.05	4.24	4.56	15.1	7.25	7.61	7.48
CLIENTE 7	5.95	0.51	2.04	7.14	3.13	2.33	12	1.84	13.7	3.05	9.34	7.01
CLIENTE 8	15.8	15.8	10.8	20.1	16	10.9	14.9	11.1	1.06	10.1	22.3	19.9
CLIENTE 9	4.04	3.06	2.43	9.64	3.02	0.715	7.2	0.934	15.2	3.76	11.8	9.51
CLIENTE 10	3.58	2.67	2.05	9.26	2.64	0.809	7.29	0.99	14.8	3.38	11.5	9.13
CLIENTE 11	6.39	8.44	7.06	1.56	4.51	7.95	5.94	6.2	21.1	10.8	3.46	2.39
CLIENTE 12	10.9	4.47	3.25	15.2	4.98	3.44	9.92	3.62	6.96	4.29	17.4	15.1
CLIENTE 13	15.9	6.12	5.59	6.6	5	4.32	4.2	4.83	15.9	7.81	7.46	7.44
CLIENTE 14	0	21.9	2.9	7.25	0.579	3.01	7.09	2.04	15.3	4.37	9.44	7.12
CLIENTE 15	21.9	0	1.49	7.66	2.02	2.9	12.5	2.36	13.1	2.5	9.86	7.53
CLIENTE 16	2.9	1.49	0	8.66	2.59	2.43	9.41	1.94	11.7	1.75	10.9	8.54
CLIENTE 17	7.25	7.66	8.66	0	3.61	5.79	6.01	5.3	20.5	9.86	3.52	2.45
CLIENTE 18	0.579	2.02	2.59	3.61	0	2.17	7.31	2.17	15.4	3.94	9.57	7.24
CLIENTE 19	3.01	2.9	2.43	5.79	2.17	0	7.14	1.68	10	3.84	11.9	9.59
CLIENTE 20	7.09	12.5	9.41	6.01	7.31	7.14	0	8.12	14.8	10.7	8.11	7.05
CLIENTE 21	2.04	2.36	1.94	5.3	2.17	1.68	8.12	0	14.8	3.35	9.97	7.65
CLIENTE 22	15.3	13.1	11.7	20.5	15.4	10	14.8	14.8	0	12.9	22.5	20.2
CLIENTE 23	4.37	2.5	1.75	9.86	3.94	3.84	10.7	3.35	12.9	0	11.8	9.51
CLIENTE 24	9.44	9.86	10.9	3.52	9.57	11.9	8.11	9.97	22.5	11.8	0	2.33
CLIENTE 25	7.12	7.53	8.54	2.45	7.24	9.59	7.05	7.65	20.2	9.51	2.33	0

Anexo 8: Matriz Distancia Zona 2 (Parte 2 de 2)

11.3 Matrices Tiempo

BODEGA		CLIENTE 2	CLIENTE 3	CLIENTE 4	CLIENTE 5	CLIENTE 6	CLIENTE 7	CLIENTE 8	CLIENTE 9	CLIENTE 10	CLIENTE 11	CLIENTE 12	CLIENTE 13	CLIENTE 14	CLIENTE 15
BODEGA	0	34	31	34	35	36	37	31	39	37	34	36	4	32	37
CLIENTE 2	34	0	3	4	4	6	20	4	34	17	4	18	37	13	22
CLIENTE 3	31	3	0	4	5	7	18	4	32	17	2	18	37	13	22
CLIENTE 4	34	4	4	0	1	2	21	9	36	19	5	19	41	15	24
CLIENTE 5	35	4	5	1	0	1	20	8	35	18	4	18	40	14	23
CLIENTE 6	36	6	7	2	1	0	19	6	33	17	3	17	39	12	22
CLIENTE 7	37	20	18	21	20	19	0	18	23	4	16	3	43	10	5
CLIENTE 8	31	4	4	9	8	6	18	0	34	17	5	17	35	13	22
CLIENTE 9	39	34	32	36	35	33	23	34	0	21	34	20	43	26	21
CLIENTE 10	37	17	17	19	18	17	4	17	21	0	15	4	41	8	7
CLIENTE 11	34	4	2	5	4	3	16	5	34	15	0	15	37	10	20
CLIENTE 12	36	18	18	19	18	17	3	17	20	4	15	0	39	10	4
CLIENTE 13	4	37	37	41	40	39	43	35	43	41	37	39	0	36	40
CLIENTE 14	32	13	13	15	14	12	10	13	26	8	10	10	36	0	12
CLIENTE 15	37	22	22	24	23	22	5	22	21	7	20	4	40	12	0
CLIENTE 16	34	14	14	15	14	13	7	13	23	5	11	7	38	4	8
CLIENTE 17	34	5	6	10	9	8	21	3	36	19	7	20	37	15	22
CLIENTE 18	34	5	6	2	2	5	19	9	36	17	7	19	37	14	20
CLIENTE 19	34	3	4	4	3	2	16	7	34	14	4	16	37	11	18
CLIENTE 20	34	6	4	5	4	2	17	8	34	15	4	17	38	12	18
CLIENTE 21	36	16	14	18	17	15	4	16	23	2	14	4	41	6	5
CLIENTE 22	39	35	33	37	36	34	24	34	4	23	32	20	41	25	20
CLIENTE 23	35	5	5	1	1	4	18	8	35	16	6	18	39	13	19
CLIENTE 24	36	6	6	2	1	5	19	9	36	17	7	19	40	14	20
CLIENTE 25	37	17	17	19	18	16	4	17	21	4	14	3	41	7	5
CLIENTE 26	34	3	4	5	4	2	17	7	34	15	4	16	37	11	18
CLIENTE 27	37	19	22	24	23	21	4	22	20	7	19	4	40	12	10
CLIENTE 28	34	8	6	6	5	4	18	8	35	16	5	17	38	12	19
CLIENTE 29	34	2	4	5	4	2	16	7	34	15	4	16	37	11	18
CLIENTE 30	30	5	3	7	3	5	15	3	32	13	3	14	34	9	16

Anexo 9: Matriz Tiempo Zona 1 (Parte 1 de 2)

	CLIENTE 16	CLIENTE 17	CLIENTE 18	CLIENTE 19	CLIENTE 20	CLIENTE 21	CLIENTE 22	CLIENTE 23	CLIENTE 24	CLIENTE 25	CLIENTE 26	CLIENTE 27	CLIENTE 28	CLIENTE 29	CLIENTE 30
BODEGA	34	34	34	34	34	36	39	35	36	37	34	37	34	34	30
CLIENTE 2	14	5	5	3	6	16	35	5	6	17	3	19	8	2	5
CLIENTE 3	14	6	6	4	4	14	33	5	6	17	4	22	6	4	3
CLIENTE 4	15	10	2	4	5	18	37	1	2	19	5	24	6	5	7
CLIENTE 5	14	9	2	3	4	17	36	1	1	18	4	23	5	4	3
CLIENTE 6	13	8	5	2	2	15	34	4	5	16	2	21	4	2	5
CLIENTE 7	7	21	19	16	17	4	24	18	19	4	17	4	18	16	15
CLIENTE 8	13	3	9	7	8	16	34	8	9	17	7	22	8	7	3
CLIENTE 9	23	36	36	34	34	23	4	35	36	21	34	20	35	34	32
CLIENTE 10	5	19	17	14	15	2	23	16	17	4	15	7	16	15	13
CLIENTE 11	11	7	7	4	4	14	32	6	7	14	4	19	5	4	3
CLIENTE 12	7	20	19	16	17	4	20	18	19	3	16	4	17	16	14
CLIENTE 13	38	37	37	37	38	41	41	39	40	41	37	40	38	37	34
CLIENTE 14	4	15	14	11	12	6	25	13	14	7	11	12	12	11	9
CLIENTE 15	8	22	20	18	18	5	20	19	20	5	18	10	19	18	16
CLIENTE 16	0	19	18	15	15	8	25	17	18	9	15	14	16	15	13
CLIENTE 17	19	0	10	10	11	19	38	10	11	20	9	25	12	8	6
CLIENTE 18	18	10	0	6	5	18	37	1	2	19	5	24	6	4	8
CLIENTE 19	15	10	6	0	5	18	37	2	2	19	1	24	7	5	8
CLIENTE 20	15	11	5	5	0	15	34	4	5	16	2	21	4	2	5
CLIENTE 21	8	19	18	18	15	0	23	17	18	2	15	6	16	15	13
CLIENTE 22	25	38	37	37	34	23	0	34	35	21	33	21	34	16	31
CLIENTE 23	17	10	1	2	4	17	34	0	2	18	4	23	6	4	7
CLIENTE 24	18	11	2	2	5	18	35	2	0	16	2	21	4	2	5
CLIENTE 25	9	20	19	19	16	2	21	18	16	0	15	5	16	15	13
CLIENTE 26	15	9	5	1	2	15	33	4	2	15	0	24	6	5	8
CLIENTE 27	14	25	24	24	21	6	21	23	21	5	24	0	19	18	16
CLIENTE 28	16	12	6	7	4	16	34	6	4	16	6	19	0	4	7
CLIENTE 29	15	8	4	5	2	15	16	4	2	15	5	18	4	0	5
CLIENTE 30	13	6	8	8	5	13	31	7	5	13	8	16	7	5	0

Anexo 9: Matriz Tiempo Zona 1 (Parte 2 de 2)

	BODEGA	CLIENTE 2	CLIENTE 3	CLIENTE 4	CLIENTE 5	CLIENTE 6	CLIENTE 7	CLIENTE 8	CLIENTE 9	CLIENTE 10	CLIENTE 11	CLIENTE 12	CLIENTE 13
BODEGA	0	63	60	60	59	68	58	60	65	64	60	62	68
CLIENTE 2	63	0	11	13	20	11	11	25	1	2	18	8	11
CLIENTE 3	60	11	0	14	12	21	5	17	12	11	16	13	22
CLIENTE 4	60	13	14	0	20	14	10	16	17	17	8	20	15
CLIENTE 5	59	20	12	20	0	24	16	17	19	18	18	16	25
CLIENTE 6	68	11	21	14	24	0	17	27	10	10	20	14	1
CLIENTE 7	58	11	5	10	16	17	0	19	13	14	12	13	20
CLIENTE 8	60	25	17	16	17	27	19	0	20	20	22	16	29
CLIENTE 9	65	1	12	17	19	10	13	20	0	5	17	10	12
CLIENTE 10	64	2	11	17	18	10	14	20	5	0	17	8	12
CLIENTE 11	60	18	16	8	18	20	12	22	17	17	0	21	17
CLIENTE 12	62	8	13	20	16	14	13	16	10	8	21	0	15
CLIENTE 13	68	11	22	15	25	1	20	29	12	12	17	15	0
CLIENTE 14	56	30	11	6	14	16	20	18	13	13	17	15	22
CLIENTE 15	60	11	4	13	18	19	2	18	12	11	15	16	19
CLIENTE 16	60	8	6	13	16	17	8	20	9	8	19	10	18
CLIENTE 17	59	16	14	9	16	19	11	20	15	15	4	17	19
CLIENTE 18	56	11	11	5	14	14	9	18	10	9	12	14	15
CLIENTE 19	64	2	10	13	20	11	10	21	3	3	18	10	12
CLIENTE 20	69	18	25	15	26	11	20	29	18	18	13	26	11
CLIENTE 21	62	3	8	11	18	13	7	21	3	3	17	10	14
CLIENTE 22	60	24	17	24	16	28	18	3	24	22	24	16	30
CLIENTE 23	57	14	10	19	12	24	12	20	15	13	18	15	26
CLIENTE 24	60	17	14	10	17	21	12	22	17	16	9	19	20
CLIENTE 25	57	16	14	11	16	20	10	20	15	14	6	17	20

Anexo 10: Matriz Tiempo Zona 2 (Parte 1 de 2)

	CLIENTE 14	CLIENTE 15	CLIENTE 16	CLIENTE 17	CLIENTE 18	CLIENTE 19	CLIENTE 20	CLIENTE 21	CLIENTE 22	CLIENTE 23	CLIENTE 24	CLIENTE 25
BODEGA	56	60	60	59	56	64	69	62	60	57	60	57
CLIENTE 2	30	11	8	16	11	2	18	3	24	14	17	16
CLIENTE 3	11	4	6	14	11	10	25	8	17	10	14	14
CLIENTE 4	6	13	13	9	5	13	15	11	24	19	10	11
CLIENTE 5	14	18	16	16	14	20	26	18	16	12	17	16
CLIENTE 6	16	19	17	19	14	11	11	13	28	24	21	20
CLIENTE 7	20	2	8	11	9	10	20	7	18	12	12	10
CLIENTE 8	18	18	20	20	18	21	29	21	3	20	22	20
CLIENTE 9	13	12	9	15	10	3	18	3	24	15	17	15
CLIENTE 10	13	11	8	15	9	3	18	3	22	13	16	14
CLIENTE 11	17	15	19	4	12	18	13	17	24	18	9	6
CLIENTE 12	15	16	10	17	14	10	26	10	16	15	19	17
CLIENTE 13	22	19	18	19	15	12	11	14	30	26	20	20
CLIENTE 14	0	32	9	11	3	10	17	6	22	13	12	11
CLIENTE 15	32	0	7	12	8	11	22	9	17	11	14	12
CLIENTE 16	9	7	0	16	9	9	23	7	21	9	16	14
CLIENTE 17	11	12	16	0	10	17	13	15	26	19	10	6
CLIENTE 18	3	8	9	10	0	7	17	7	22	14	13	11
CLIENTE 19	10	11	9	17	7	0	18	6	26	15	17	15
CLIENTE 20	17	22	23	13	17	18	0	20	28	29	20	17
CLIENTE 21	6	9	7	15	7	6	20	0	22	13	13	12
CLIENTE 22	22	17	21	26	22	26	28	22	0	19	22	20
CLIENTE 23	13	11	9	19	14	15	29	13	19	0	18	15
CLIENTE 24	12	14	16	10	13	17	20	13	22	18	0	7
CLIENTE 25	11	12	14	6	11	15	17	12	20	15	7	0

Anexo 10: Matriz Tiempo Zona 2 (Parte 2 de 2)