

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

**ESTABILIDAD DE CUERDA EN PELOTONES DE
VEHÍCULOS UTILIZANDO CONTROL
PROPORCIONAL-INTEGRATIVO**

Tesis de Grado presentada por

Antonia Elisa Murillo García

como requisito parcial para optar al título de

Ingeniero Civil Electrónico

y al grado de

Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica

Profesor Guía

Dr. Francisco Vargas Parra

Valparaíso, 2022.

TÍTULO DE LA TESIS:

**ESTABILIDAD DE CUERDA EN PELOTONES DE VEHÍCULOS
UTILIZANDO CONTROL PROPORCIONAL-INTEGRATIVO**

AUTOR:

Antonia Elisa Murillo García

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniero Civil Electrónico y el grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María.

Dr. Francisco J. Vargas

Dr. Andrés A. Peters

Dr. Alejandro J. Rojas

Dr. Héctor M. Ramírez

Valparaíso, Agosto de 2022.

A mi familia

AGRADECIMIENTOS

Escribir esta tesis fue posible gracias al apoyo de muchas personas. A cada una de ellas les estoy sinceramente agradecida.

Particularmente, quisiera agradecer a Juan Carlos Agüero y a María José Escobar por inspirarme con su excelente docencia. A Elizabeth Muga, por su gran ayuda y amabilidad al atender todas mis consultas relativas al posgrado. Expreso especialmente mi gratitud a Juan Yuz por su importante apoyo con mi beca de magíster, y a Andrés Peters por su colaboración constante en nuestro tema de investigación. Fundamentalmente, le agradezco a mi profesor guía Francisco Vargas por su gran cercanía y paciencia, además de su dirección técnica, durante nuestra colaboración estos últimos años.

Le agradezco a Javier Ortiz, Eduardo Elgueta, Francisca Garrido, Javier Torres y Guillermo Becerra por ser parte de mis más geniales recuerdos de la universidad. Y a Francisca Vargas, Sol Ugarte, Gabriela Soto y Marcela Rojas, por su lealtad a prueba de tiempo y distancia.

Finalmente, le agradezco a mi familia. A Rodrigo González, mi *huachi*, por siempre creer en mí y por enseñarme a través de su ejemplo a ser una mejor persona. A mis gatos Ronson y Wilson por su cariño reconfortante, a mi genial hermana Manuela por su apoyo sincero e invaluable en momentos difíciles y a mis padres Marta y Gustavo por su soporte y amor eterno e incondicional.

CONTENIDO

AGRADECIMIENTOS	I
ÍNDICE DE FIGURAS	V
RESUMEN	VII
ABSTRACT	IX
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Definición del problema	5
1.2. Principales contribuciones	7
1.2.1. Productividad asociada	7
1.3. Organización del documento	7
2. PRELIMINARES	9
2.1. Conceptos fundamentales	9
2.1.1. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo	10
2.1.2. Función de transferencia	10
2.1.3. Respuesta en frecuencia	12
2.1.4. Magnitud del sistema	12
2.1.5. Norma infinito	12
2.1.6. Lazos de control	13
2.2. Estabilidad interna	14
2.2.1. Criterios de estabilidad	15
2.3. Política de espaciado	15
2.4. Estabilidad de cuerda	16
2.5. Requerimientos y resultados de pelotones	17
2.6. Conclusiones del capítulo	18
3. ANÁLISIS EN TIEMPO CONTINUO	21
3.1. Descripción de la configuración	21
3.1.1. Política de espaciado	23
3.1.2. Estabilidad de cuerda	24
3.2. Análisis de estabilidad interna	24
3.3. Análisis de magnitud	25
3.4. Análisis de estabilidad de cuerda	28

3.4.1. Discusión	31
3.4.2. Ejemplo de simulación	33
3.5. Conclusión del capítulo	35
4. ANÁLISIS EN TIEMPO DISCRETO	37
4.1. Descripción de la configuración	37
4.1.1. Política de espaciado	39
4.1.2. Estabilidad de cuerda	41
4.2. Análisis de estabilidad interna	41
4.3. Análisis de magnitud	42
4.4. Análisis de estabilidad de cuerda	45
4.4.1. Discusión	48
4.4.2. Ejemplo de simulación	51
4.5. Conclusión del capítulo	53
APÉNDICE	55
Apéndice	55
4.A. Identidades matemáticas útiles	55
4.A.1. Módulo de un polinomio de tercer orden	55
4.A.2. Identidades trigonométricas	55
4.A.3. No-negatividad de polinomios de segundo orden	56
5. CONCLUSIONES	59
5.1. Trabajo a futuro	60
REFERENCIAS	61

Índice de figuras

1.1. Un conjunto de vehículos autónomos formando un pelotón. Extraída de [41].	2
1.2. Pelotón de vehículos autónomos.	6
1.3. Esquema de control del vehículo i -ésimo de un pelotón.	6
2.1. Lazo de control de un grado de libertad.	13
2.2. Posiciones y errores de seguimiento de un pelotón estable en cuerda (fila superior) y uno inestable en cuerda (fila inferior).	17
3.1. Esquema de control de un vehículo.	23
3.2. Lazo de control equivalente.	23
3.3. Dos rotaciones de la región de estabilidad interna en el espacio de parámetros de diseño del pelotón.	26
3.4. Dos rotaciones de la región de ganancia de lazo menor o igual a uno en el espacio de parámetros de diseño del pelotón.	28
3.5. Dos rotaciones de la región de estabilidad de cuerda en el espacio de parámetros de diseño del pelotón.	31
3.6. Vistas laterales de la región tridimensional. En rojo: se indican las curvas analíticas que delimitan las zonas de estabilidad de cuerda. En línea segmentada: se especifican los límites de visualización de las zonas de estabilidad de cuerda, provenientes del rango finito de valores que se han graficado.	31
3.7. Dos rotaciones de la región de estabilidad de cuerda en el espacio de parámetros de diseño. En naranja se señala la región donde los controladores son de fase mínima, mientras que en azul se muestra la región donde los controladores son de fase no mínima. En línea segmentada se indica el corte de la región por el plano $k_p = 0$.	33
3.8. Comportamiento de un pelotón de $N = 15$ vehículos para distintos valores de los parámetros de diseño.	34
4.1. Lazo de control de un vehículo.	38
4.2. Lazo de control equivalente.	40
4.3. Dos rotaciones de la región que admite estabilidad interna.	43
4.4. Región de estabilidad de cuerda, caso de tiempo discreto.	49
4.5. Vistas laterales de la región de estabilidad de cuerda.	49

- 4.6. Región de estabilidad de cuerda, caso de tiempo discreto. La región naranja está asociada a controladores de fase mínima, mientras que la región azul representa controladores de fase no-mínima. 51
- 4.7. Vistas laterales de la región de estabilidad de cuerda. 51
- 4.8. Comportamiento de un pelotón de $N = 15$ vehículos para distintos valores de los parámetros de diseño. 53

RESUMEN

La incursión de las tecnologías actuales en sistemas de transporte inteligente promete reinventar la forma de transporte hacia sofisticadas estrategias colaborativas mucho más eficientes y seguras. En particular, una alternativa sobresaliente para mejorar la eficiencia de transporte en carreteras es la implementación de esquemas de pelotón de vehículos (*platooning*). Un pelotón de vehículos consiste en un conjunto de vehículos autónomos (o agentes) que coordinadamente se desplazan en una misma dirección a una velocidad cruceo, en una formación donde cada vehículo mantiene una distancia determinada respecto a su predecesor directo.

Dentro de los desafíos asociados a este esquema se encuentra el control de velocidad y posición de cada vehículo, tomando en consideración mediciones del estado de otros agentes en el pelotón. En particular, una propiedad de interés es la estabilidad de cuerda de un pelotón, la cual garantiza que los errores de seguimiento de los agentes, ya sean debidos a las condiciones iniciales o a perturbaciones incidentes, no se amplifiquen al transmitirse hacia atrás en la cadena. Si esta propiedad no se cumple entonces existirá una degradación en el desempeño de control de los últimos vehículos de la cadena, lo que aumenta la probabilidad de colisiones e impide la escalabilidad segura del esquema.

El objetivo de este trabajo de tesis consiste en estudiar la propiedad de estabilidad de cuerda de pelotones homogéneos compuestos por vehículos modelados por integradores simple, con política de espaciado dependiente de la velocidad y seguimiento del predecesor directo, cuando el control local de los vehículos se realiza mediante controladores proporcional-integrativo (PI). Para ello, se explora mediante métodos numéricos y teóricos las condiciones en los parámetros de diseño del pelotón, estos son, las constantes del controlador y la política de espaciado, que permitan obtener un pelotón estable en cuerda. Esta tesis presenta las expresiones analíticas necesarias y suficientes para garantizar la estabilidad de cuerda de pelotones en dominios de tiempo continuo y tiempo discreto.

Los resultados teóricos para ambos marcos de trabajo son corroborados a través de simulaciones y casos de estudio. Más precisamente, se determinan compromisos entre las variables de diseño del controlador y la política de espaciado para asegurar estabilidad de cuerda, y las implicancias de estos resultados son analizadas para ambos casos.

ABSTRACT

The incursion of current technologies in intelligent transportation systems promises to reinvent the form of transportation towards sophisticated collaborative strategies that are much more efficient and safer. In this regard, an outstanding alternative to improve highway transport efficiency is the implementation of vehicle *platooning* schemes. A platoon of vehicles consists of a set of autonomous vehicles (or agents) that coordinately move in the same direction at cruising speed, in a formation where each vehicle maintains a certain distance with respect to its direct predecessor.

One of the challenges associated with this scheme relates to the control of the speed and position of each vehicle while considering measurements of the status of other agents in the platoon. A property of interest is the string stability of a platoon, which ensures that agent tracking errors due to initial conditions or incident disturbances are not amplified as they are transmitted backwards in the chain. If this property is not fulfilled then the control performance of the last vehicles in the chain deteriorates significantly, which increases the probability of collisions and prevents the safe scalability of the scheme.

The goal of this thesis is to study the string stability property of homogeneous platoons composed of vehicles modeled by simple integrators, with speed-dependent spacing policy and direct predecessor tracking, when the vehicles are controlled locally using proportional-integral (PI) controllers. To this end, the conditions in the platoon design parameters (i.e., the controller constants and the spacing policy) that allow string-stable platoon configurations are explored through numerical and theoretical methods. This thesis presents the necessary and sufficient analytical expressions to guarantee the string stability of platoons in continuous-time and discrete-time domains.

The theoretical results for both frameworks are corroborated through simulations and case studies. More precisely, trade-offs between the controller design variables and the spacing policy are determined to ensure string stability, and the implications of these results are analyzed for both cases.

INTRODUCCIÓN

La industria del transporte tanto de carga como de pasajeros juega un papel fundamental en el desarrollo de las sociedades. Ciertamente, las tecnologías relacionadas han evolucionado considerablemente desde el descubrimiento de la rueda hace siglos, hasta la edad contemporánea, en donde el transporte puede ser no solo terrestre, si no que también marítimo y aéreo. La industria actual descansa en tecnologías que se han perfeccionado con los años, permitiendo mejoras significativas en confiabilidad y seguridad en las últimas décadas. Para el caso de transporte terrestre, la economía moderna y la mejora en los procesos productivos han permitido que mayor porcentaje de la población tenga acceso a poseer un vehículo particular [43]. Si bien por un lado esto es un avance, por otro lado supone también un problema, ya que en las ciudades es más frecuente encontrar alta circulación vehicular, provocando congestión, ruido, mayor emisión de gases contaminantes y consumo de combustibles fósiles [9]. Además, actualmente los vehículos son manejados por personas, las que por supuesto son susceptibles de cometer errores en la conducción y causar accidentes de diversa consideración. Como la población mundial es creciente, la demanda de transporte terrestre también lo es, lo que supone un desafío importante para afrontar los problemas de la industria automotriz en los próximos años.

Una buena noticia es que en forma paralela han habido grandes avances tecnológicos en diversas áreas en las últimas décadas. Por ejemplo, hoy en día existen sistemas de comunicación inalámbrica que permiten transmitir datos a muy alta velocidad de manera confiable [6]. También existen sistemas computacionales de mayor capacidad y menor tamaño y menor costo comparado a hace un par de décadas atrás [22]. Actualmente existen sistemas de visión por computador que se pueden implementar en tiempo real, además de diversos tipos de sensores que permiten tener una percepción del entorno [4]. También hay grandes avances en electromovilidad y el desarrollo de baterías eléctricas de mayor autonomía y portabilidad [5], y en los sistemas de control automático y algoritmos de inteligencia artificial. Es natural entonces que la industria del transporte incorpore parte de estas tecnologías para afrontar los desafíos del futuro.

De hecho, ya han habido avances importantes. En las últimas décadas han surgido tópicos de estudio y desarrollo como lo son los Sistemas Avanzados de Asistencia al Conductor (ADAS) [24], Sistemas de Transporte Inteligente (ITS) [28], Sistemas de Carreteras Automatizadas (AHS) [15], Control Crucero Adaptativo Colaborativo (CACC) [42], entre otros. Todos ellos tienen en común la incorporación de tecnologías modernas ya sea para asistir la conducción humana, para navegación autónoma de vehículos, o también para navegación autónoma y coordinada de vehículos. Con el uso de estas tecnologías se espera una mejora en la eficiencia en el traslado de pasajeros y de carga, además de mayor seguridad.

Dentro de esta clase de sistemas, una prometedora alternativa para mejorar la eficiencia



Figura 1.1. Un conjunto de vehículos autónomos formando un pelotón. Extraída de [41].

de transporte en carreteras es la implementación de esquemas de pelotón de vehículos, denominados en inglés *platooning* [17]. Esta configuración consiste en un conjunto de vehículos autónomos (o agentes) que coordinadamente se desplazan en una misma dirección, en una formación donde cada vehículo mantiene una distancia determinada respecto a su predecesor directo. Últimamente, el pelotón es guiado por el primer vehículo, el cual es comúnmente denominado *líder*. Los beneficios de la aplicación de pelotones en autopistas incluyen ahorro significativo de combustible y un uso espacialmente más eficiente de la carretera. Éstos han sido documentados consistentemente en la literatura, principalmente en esquemas experimentales de transporte de carga [20], [39]. El mecanismo principal que contribuye a estas mejoras es la aplicación de control automático para la reducción de espaciado inter-vehicular durante el traslado. Este control consigue incrementar la capacidad de la autopista al ahorrar espacio en la vía a través de la coordinación de los vehículos, a la vez de suavizar los transientes dinámicos de flujo vehicular y reducir significativamente el roce aerodinámico producido en la conducción a alta velocidad [39], [1].

El objetivo de control en esquemas de pelotones consiste en que los vehículos se trasladen de manera segura en la carretera, manteniendo una distancia inter-vehicular igual a una referencia deseada. En la práctica, este control es un problema bi-dimensional que comprende el control lateral y el control longitudinal de la posición de cada agente. El control lateral se encarga de manipular la dirección del vehículo para mantenerlo dentro de los márgenes de la pista, y para que éste cambie pistas cuando sea necesario. Por otro lado, el control longitudinal automatiza la aceleración y frenado del agente para mantener el distanciamiento deseado respecto a su predecesor, y para ejecutar maniobras de división y unión del pelotón que permitan la incorporación y salidas de vehículos de la cadena [30]. Estos mecanismos de control se implementan a través de computadores y sensores incorporados en cada vehículo, ocupándose típicamente para el control longitudinal sensores de radar y/o lidar para medir la rapidez del vehículo predecesor directo y la separación respecto a éste. Dichos sensores combinados con visión monocular se ocupan para realizar el control lateral, en el cual cada vehículo mide la alineación que éste tiene con respecto a la pista y/o al vehículo predecesor. En aproximaciones más recientes [17], los vehículos también comparten una red de comunicación que permite que cada vehículo tenga acceso a la información de vehículos distintos a sus vecinos inmediatos, lo que facilita la implementación de estrategias de control cooperativas más sofisticadas. Este trabajo está enfocado en el problema de control longitudinal, a pesar que es relevante considerar en el futuro el efecto que el control lateral pueda tener en el desempeño del pelotón de vehículos.

Para estudiar un pelotón resulta necesario definir un marco de trabajo que consiste en cuatro componentes relevantes. En primer lugar, se debe determinar el modelo matemático

de los vehículos individuales [19]. Una simplificación frecuente en el análisis de pelotones consiste en suponer que el modelo dinámico de los vehículos es idéntico para todos los agentes del pelotón. En este caso, el pelotón se denomina *homogéneo* [18], [26]. De lo contrario, se dice que el pelotón es *heterogéneo* [23], [12]. Por otro lado, las dinámicas de un vehículo, compuesto por el motor, sistema de frenado, roce aerodinámico, etc., son inherentemente no lineales. Si bien existen estudios en pelotones que directamente utilizan modelos no lineales para fines de control [29], frecuentemente por simplicidad se utiliza la aproximación de la dinámica a través de modelos lineales. Así, los modelos más comúnmente utilizados son modelos integrativos de hasta tercer orden [19], [3]. El caso más sencillo es el modelo de integrador simple, donde la rapidez del vehículo corresponde a la actuación de control y la posición es la salida.

En segundo lugar, se requiere definir cómo los vehículos intercambian información relevante para el control de la navegación. Formalmente, este concepto se denomina *topología de flujo de información* del pelotón [45], [44]. En una carretera, desde el punto de vista de la conducción humana, resulta natural usar principalmente la información visual de la posición del vehículo que se encuentra directamente delante para controlar la posición del vehículo propio. Esta estrategia corresponde a lo que formalmente se denomina topología de seguimiento de predecesor, en la cual se utiliza exclusivamente información del vehículo predecesor directo, ya sea de posición, velocidad u otra, para el control individual de la posición de cada agente. En esquemas de pelotones esta es una de las topologías más estudiadas e implementadas, inicialmente porque la tecnología de radar fue la primera en posibilitar la asistencia automática en la conducción, y posteriormente por ser una alternativa efectiva y rentable a la utilización de redes de comunicación inter-vehicular [44]. Sin embargo, la implementación de redes de comunicación entre los vehículos también posibilita otras opciones de topologías interesantes. Estas incluyen: topologías de líder-predecesor [26], donde el vehículo líder comparte su posición a todos los vehículos seguidores, los cuales a su vez también conocen la posición de su predecesor directo, topologías bidireccionales, donde cada vehículo tiene acceso a información de su predecesor y seguidor directos, topologías anticipatorias a r vehículos (en inglés: *r-lookahead*) [27], donde cada vehículo tiene acceso a información concerniente a los r predecesores más cercanos, entre otras [44]. De esta manera, la tecnología embebida en los vehículos autónomos condiciona la información que estos pueden adquirir sobre el resto de los agentes en el pelotón, y en consecuencia, las topologías de flujo de información factibles de implementar. A su vez, dado que cada tipo de topología de flujo de información restringe la información disponible para el control de cada vehículo, ésta tendrá un impacto fundamental en la complejidad de la estrategia de coordinación del pelotón, y en sus limitaciones de desempeño [44], [14].

La tercera componente relevante de definir en un pelotón es su *política de espaciado*. La política de espaciado es la caracterización de la referencia de distancia inter-vehicular que se desea que los vehículos mantengan durante el traslado. Lo más sencillo para el análisis de la dinámica de pelotones es considerar que esta distancia es un valor constante [21], [35]. Sin embargo, desde el punto de vista práctico esto no es seguro, pues dicha distancia puede no ser lo suficientemente grande para permitir que un vehículo en movimiento frene a tiempo si el predecesor disminuye su velocidad bruscamente por algún motivo. Además, al implementar una política de espaciado constante se ha demostrado que no es factible tener un desempeño adecuado del pelotón cuando éste se compone de muchos vehículos [34]. Por ello, una estrategia razonable es considerar que el espacio entre vehículos no sea necesariamente constante, sino que dependa de la velocidad, de manera que la distancia inter-vehicular aumente a mayores velocidades de navegación. Este tipo de política de espaciado, denominada

dependiente de la velocidad, permite restaurar un desempeño seguro en pelotones numerosos [18], [40]. Su implementación se hace a través de una constante denominada *time headway*, la que define la dependencia entre el espacio mantenido entre los vehículos y la velocidad de navegación [36]. Al ser la constante *time headway* un valor ajustable en la referencia de control, ésta es un parámetro de diseño del pelotón.

Por último, es necesario determinar el sistema de control longitudinal del pelotón, el cual se encarga de satisfacer el objetivo de coordinación global del sistema, i.e., lograr los espaciamientos inter-vehiculares deseados. Por motivos de escalabilidad, en pelotones se utilizan estrategias de control distribuidas, donde los vehículos son autónomos y el control se implementa a través de un lazo de control local embebido en cada uno de los agentes. Los controladores más comúnmente usados son lineales, debido a que éstos permiten análisis teórico exhaustivo del desempeño del pelotón, y son simples de implementar en hardware. Idealmente, todo diseño de controlador distribuido para pelotones debe ser capaz de resolver dos problemas de control fundamentales: un problema de seguimiento de referencia, y un problema de escalabilidad [36], [11]. El problema de seguimiento concierne al lazo de control embebido en los vehículos individuales, y consiste en asegurar la capacidad de éstos de converger a la referencia de distancia inter-vehicular determinada para la navegación. Esto incluye necesariamente diseñar los lazos de control para que sean internamente estables. Sin embargo, un pelotón compuesto por vehículos individualmente estables podría, debido a la interconexión del sistema, amplificar una perturbación incidente en alguno de sus agentes a medida que ésta se propaga hacia los vehículos posteriores, y con ello potencialmente provocar colisiones y/o accidentes. Debido a esto, al diseñar un pelotón también es necesario resolver el problema de escalabilidad, el cual consiste en crear un diseño del controlador de los vehículos que soporte la adición de nuevos agentes al pelotón conservando la seguridad del sistema completo al desplazarse. Esto implica garantizar que los errores de seguimiento de los agentes, ya sean debidos a las condiciones iniciales o a perturbaciones incidentes, no se amplifiquen al transmitirse hacia atrás en la cadena.

Formalmente en el contexto de sistemas interconectados, esta última propiedad de no-amplificación del error se denomina *estabilidad de cuerda*. La estabilidad de cuerda acota la magnitud de las señales que viajan a lo largo del pelotón, la que se aplica a la secuencia de errores de seguimiento presentes en los lazos de control de cada uno de los vehículos. Dependiendo de la configuración particular del pelotón en estudio, existen diferentes definiciones de estabilidad de cuerda, y con ello, distintos métodos de análisis (por ejemplo, existen definiciones de estabilidad de cuerdas aptas para pelotones de vehículos no lineales, pelotones sujetos a pérdida de datos en la comunicación, etc.) [36]. En esquemas de pelotones lineales homogéneos, la propagación de los errores entre agentes consecutivos es modelada por funciones de transferencia idénticas. Debido a esto, la estabilidad de cuerda se define en términos de la norma infinito de una de estas transferencias, ya que dicho valor determina la ganancia máxima de la propagación del error a lo largo del pelotón. Luego, la norma infinito de la transferencia entre errores de seguimiento consecutivos debe ser menor o igual a uno para asegurar que no ocurrirán amplificaciones de los errores de control a través del pelotón y garantizar su estabilidad de cuerda [11].

Diseñar controladores que consigan estabilidad de cuerda, esto es, que consigan simultáneamente estabilidad interna de los agentes y ganancia de propagación de los errores menor o igual a uno es, en general, un problema complejo. En primer lugar, existen estructuras de pelotones que son fundamentalmente incompatibles con la propiedad de estabilidad de cuerda. Un ejemplo de esto ocurre en pelotones con topología de seguimiento de predecesor, donde se ha demostrado que para cualquier controlador lineal no es posible

conseguir estabilidad de cuerda cuando se implementa una política de espaciado constante [34], [10], [40]. Superar esta limitación requiere cambiar la naturaleza misma de la configuración, lo que significa en este caso cambiar la topología de flujo de información (por ejemplo, a una topología líder-predecesor), o cambiar la política de espaciado a una dependiente de la velocidad [34], [37], [18]. Por otro lado, caracterizar analíticamente los controladores que satisfacen estabilidad de cuerda no es sencillo porque significa obtener una condición sobre la norma infinito de un sistema, lo cual no es directo de resolver a diferencia de otros tipos de normas, por ejemplo, norma 2 [46]. Para evitar esta dificultad, puede diseñarse un controlador que satisfaga estabilidad de cuerda a través de algoritmos numéricos. Sin embargo, esta aproximación no entrega mayor comprensión sobre los compromisos subyacentes entre el valor de los parámetros de diseño del pelotón y la estabilidad de cuerda del mismo. En esquemas con espaciado dependiente de la velocidad con time headway constante, una estrategia para simplificar el análisis teórico de pelotones consiste en restringir la estructura del controlador a familias particulares que permiten desacoplar el efecto de la constante de time headway en la expresión de la transferencia de la propagación de los errores. Así, utilizando esta técnica, se ha demostrado en [18] y [40] respectivamente para esquemas de tiempo continuo y tiempo discreto que, en pelotones compuestos por vehículos modelados por integradores dobles, existe un valor mínimo de esta constante por sobre la cual todo diseño de pelotón es estable en cuerda. Sin embargo, se mantienen inciertas las relaciones analíticas explícitas que modelan el impacto cuantitativo del resto de las variables de diseño del pelotón, i.e. los parámetros del controlador, en el desempeño del sistema.

El presente trabajo de tesis entrega una solución analítica explícita al problema de diseño de pelotones estables en cuerda cuando se considera una política de espaciado dependiente de la velocidad con time headway constante. Se considera un esquema conformado por vehículos modelados por integradores simples, y se realiza el análisis para las versiones de esta configuración en tiempo continuo y tiempo discreto. Para afrontar la mayor complejidad de este análisis explícito, se consideran controladores de estructura proporcional-integral. Este tipo de controlador se escoge porque aún conteniendo pocos parámetros de diseño, incluye acción integral y pertenece a la familia de controladores PID, la cual es la más utilizada en aplicaciones industriales, incluyendo maniobras de control longitudinal de pelotones [38], [7]. Como resultado de esta tesis, se obtienen las condiciones analíticas necesarias y suficientes sobre los parámetros de diseño del pelotón, estos son, la constante time headway y ganancias del controlador, para obtener diseños estables en cuerda.

1.1. Definición del problema

A continuación se describe resumidamente el modelo de pelotón de vehículos que se estudia en esta tesis y se enuncia el problema a resolver.

Observación 1. *En esta tesis se analizan dos configuraciones de pelotón de vehículos: una de tiempo continuo y otra de tiempo discreto. El problema en estudio es, en naturaleza, el mismo para ambos marcos de trabajo. Con el objetivo de enfatizar los aspectos comunes de las dos descripciones, en esta sección las variables se denotan sin especificar el dominio temporal.*

Se considera el modelo dinámico longitudinal de un pelotón como un sistema lineal e invariante en el tiempo, de tiempo continuo o tiempo discreto, compuesto por $N \in \mathbb{N}$ vehículos que se desplazan coordinadamente a través de una trayectoria unidimensional. Esto se muestra en la Figura 1.2, donde y_i representa la posición del vehículo i -ésimo y

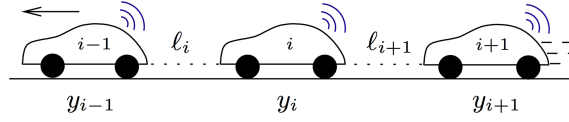


Figura 1.2. Pelotón de vehículos autónomos.

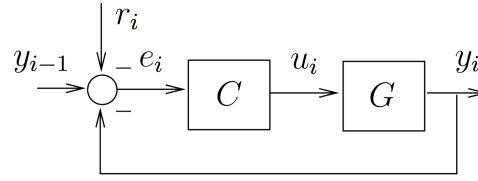


Figura 1.3. Esquema de control del vehículo i -ésimo de un pelotón.

$\ell_i = y_{i-1} - y_i$ la distancia respecto a su predecesor. En esta configuración, el objetivo de control es mantener la distancia inter-vehículo ℓ_i lo más cercana posible a una señal de referencia r_i para todo vehículo i . Para lograr este fin, suponemos una topología de seguimiento de predecesor, donde cada vehículo conoce el valor de su velocidad (o su cambio de posición en el caso de tiempo discreto) v_i , su propia posición, y la posición de su predecesor directo. También, cada vehículo cuenta con un controlador local que usa esta información para manipular el vehículo de forma automática. El correspondiente error de seguimiento del vehículo i es definido como

$$e_i = \ell_i - r_i.$$

El lazo de control de cada vehículo se puede representar como el esquema de la Figura 1.3, donde G representa el modelo dinámico de cada agente, C es su respectivo controlador y u_i corresponde a la actuación. Asumiremos que el pelotón es homogéneo, por lo que todos los agentes tienen el mismo modelo de planta G y el mismo controlador C .

Respecto al modelo dinámico de cada vehículo, en la presente tesis consideraremos que G corresponde al modelo de un integrador simple. Luego, la actuación u_i representa la rapidez del i -ésimo vehículo. Por otra parte, nuestro interés está en estudiar el efecto del uso de controladores proporcional-integrativo (PI) en el pelotón. Por lo tanto, C corresponde a un controlador PI, caracterizado por los parámetros k_p y k_i asociados a sus ganancias en las componentes proporcional e integrativa respectivamente.

Finalmente, se considera para el pelotón una política de espaciamiento dependiente de la velocidad, donde la referencia de control tiene la forma

$$r_i = \varepsilon_i + hv_i.$$

Aquí, $\varepsilon_i \geq 0$ es un valor constante que representa la distancia inter-vehículo mínima que se desea mantener en la formación, y $h > 0$ es la constante de time headway, la cual pondera la importancia de la rapidez del agente en la política de espaciado. Tanto ε_i y h son parámetros de diseño del pelotón, sin embargo, el valor de ε es irrelevante para el análisis que se hace en esta tesis, por lo que sin pérdida de generalidad se considera en adelante que $\varepsilon_i = 0$.

Considerando el modelo de pelotón recién descrito, el problema de interés para la presente tesis es el siguiente:

Problema 1. *Obtener las condiciones necesarias y suficientes sobre la constante time headway h y las ganancias del controlador k_p y k_i que aseguren la estabilidad de cuerda del pelotón.*

1.2. Principales contribuciones

Las principales contribuciones de esta tesis son las siguientes:

- Se obtienen condiciones necesarias y suficientes para garantizar estabilidad de cuerda en configuraciones de pelotón de vehículos de tiempo continuo y de tiempo discreto. Cada pelotón se considera conformado por vehículos modelados por integradores simples y controlados localmente por un controlador proporcional-integral. Las condiciones obtenidas son expresiones analíticas sobre los parámetros de diseño del controlador y de la política de espaciado, lo que permite hacer análisis y determinar compromisos entre estas variables de diseño.
- El análisis anterior se hace sin considerar que las dinámicas del controlador cancelen a las dinámicas de la política de espaciado, siendo esta última una estrategia usada para simplificar el estudio de configuraciones de control cooperativo de vehículos con esta política de espaciado [18], [40].
- Se representan estos compromisos gráficamente, comprobándose así los resultados teóricos con simulaciones tomando en consideración ambas restricciones (estabilidad asintótica y estabilidad de cuerda).

1.2.1. Productividad asociada

- Como productividad asociada, se publica el artículo de conferencia:
Antonia Murillo, Francisco Vargas, Andrés Peters and Alejandro Rojas, “String stability of a PI-controlled vehicular platoon”, 2021 IEEE CHILEAN Conference on Electrical, Electronics Engineering, Information and Communication Technologies (CHILECON), 2021.
- La siguiente contribución no corresponde directamente a algún contenido teórico de esta tesis, pero es relevante en el presente contexto:
Antonia Murillo, Francisco Vargas and Andrés Peters “Effects of speed saturation in a predecessor-following vehicle platoon”, 2019 IEEE CHILEAN Conference on Electrical, Electronics Engineering, Information and Communication Technologies (CHILECON), 2019.

1.3. Organización del documento

A continuación se describen los temas a abordar en los siguientes capítulos de esta tesis.

En el Capítulo 2 se describen conceptos técnicos, teoremas y algunas identidades matemáticas necesarias para el análisis que se realiza en el resto del trabajo y para la interpretación de los resultados asociados.

En el Capítulo 3 se detalla el modelo de pelotón de tiempo continuo. Luego se presenta separadamente el análisis de estabilidad interna y el análisis de ganancia en magnitud de

los lazos de control local de los vehículos. Se incorporan ambos resultados para derivar las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de cuerda del pelotón. Finalmente se discuten los resultados obtenidos.

En el Capítulo 4 se enuncia el modelo de pelotón de vehículos de tiempo discreto. Luego se presenta separadamente el análisis de estabilidad interna y el análisis de ganancia de magnitud de los lazos de control local. Se incorporan ambos resultados para derivar las condiciones necesarias y suficientes para la estabilidad de cuerda del pelotón. Finalmente se discuten los resultados obtenidos.

Por último, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones generales de esta tesis y se sugieren opciones de trabajo futuro.

PRELIMINARES

En este capítulo se revisan algunos conceptos fundamentales que serán utilizados a lo largo de esta tesis. Más precisamente, el capítulo introduce conceptos básicos, para luego definir estabilidad interna y política de espaciado. Finalmente, se define formalmente el concepto de estabilidad de cuerda y se enuncian algunos requerimientos de interés en los lazos de control.

Observación 2. *En este capítulo se presentan definiciones válidas para marcos teóricos de tiempo continuo y tiempo discreto. Para el resto de la exposición se denota t a la variable de tiempo continua, donde $t \in \mathbb{R}_0^+$, y k a la variable de tiempo discreta, donde $k \in \mathbb{N}_0$. Algunos conceptos fundamentales se presentan únicamente en tiempo continuo, entendiéndose que el símil de tiempo discreto es directo.*

2.1. Conceptos fundamentales

A continuación se definen algunos conceptos elementales:

- **Señal:** Se denomina señal a una medición u observación que contiene información de interés. Matemáticamente, ésta se representa como una función de una o más variables independientes. Por ejemplo, la función $u : t \rightarrow u(t)$ usualmente denota la señal de entrada a un sistema.
- **Sistema:** En el marco conceptual que describe esta tesis, se define un sistema como un proceso por el cual una señal de entrada (u) se transforma en una salida (comúnmente denotada y).
- **Estado:** Se denomina estado a una señal o conjunto de señales internas u ocultas de un sistema. Normalmente se refiere al estado con la señal x . La señal x evaluada en un instante inicial t_0 se denomina la *condición inicial* de un sistema. Por simplicidad, también se referirá a este valor a través de la abreviación x_0 , donde $x_0 = x(t_0)$.

Una forma de representar un sistema es a través de la notación

$$y(t) = \mathbf{T}\langle x, u \rangle \quad \forall t \geq t_0,$$

donde \mathbf{T} es la transformación que describe la dependencia entre la condición inicial $x(t_0)$ y entrada $u(t)$, y la salida $y(t)$. En general, un sistema puede tener múltiples entradas y salidas asociadas, como también varios estados. Sin embargo lo largo de esta tesis se consideran sistemas de entradas y salidas escalares, comúnmente denominados sistemas SISO (por sus siglas en inglés, *single-input single-output*).

2.1.1. Sistemas lineales e invariantes en el tiempo

Un sistema se dice lineal [25] si la salida producto de la combinación lineal de entradas y condiciones iniciales es la combinación lineal de los efectos individuales. Matemáticamente, esto significa que el sistema satisface

$$\mathbf{T}\langle\alpha_1x_1 + \alpha_2x_2, \beta_1u_1 + \beta_2u_2\rangle = \alpha_1\mathbf{T}\langle x_1, 0\rangle + \alpha_2\mathbf{T}\langle x_2, 0\rangle + \beta_1\mathbf{T}\langle 0, u_1\rangle + \beta_2\mathbf{T}\langle 0, u_2\rangle$$

para cualquier valor de las constantes $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R}$, cualquier par de condiciones iniciales x_1 y x_2 , y cualquier par de entradas u_1 y u_2 .

Por otra parte, un sistema se dice invariante en el tiempo si la respuesta del sistema a una entrada y condiciones iniciales particulares es la misma independientemente del instante en que ésta se aplique. Matemáticamente, esto significa que el sistema cumple

$$\mathbf{T}\langle x(0) = x_0, u(t)\rangle = y(t) \Rightarrow \mathbf{T}\langle x(\tau) = x_0, u(t - \tau)\rangle = y(t - \tau), \quad \forall \tau > 0.$$

Una de las ventajas de los sistemas lineales e invariantes en el tiempo es que éstos pueden ser descritos por completo a través de su respuesta a un impulso en la entrada. Este impulso se define como un Delta de Dirac en el caso de tiempo continuo, y como un Delta de Kronecker en el caso de tiempo discreto. De esta manera, si u es una excitación causal arbitraria, la respuesta y del sistema con condiciones iniciales iguales a cero está dada por la convolución de la señal de entrada con la respuesta a impulso del sistema g . Esto equivale a

$$y(t) = \int_0^t u(\tau)g(t - \tau)d\tau \quad \forall t \geq 0 \quad (2.1.1)$$

en el caso de tiempo continuo, mientras que en el caso de tiempo discreto

$$y(k) = \sum_{\ell=0}^k u(\ell)g(k - \ell) \quad \forall k \geq 0. \quad (2.1.2)$$

Observación 3. *En esta tesis se trabajará exclusivamente con sistemas lineales e invariantes en el tiempo.*

2.1.2. Función de transferencia

Las transformadas de Laplace y Zeta constituyen herramientas esenciales para el análisis y síntesis de sistemas lineales e invariantes en el tiempo de tiempo continuo y tiempo discreto respectivamente.

Considere aplicar la transformada de Laplace a ambos lados de (2.1.1), o bien transformada Zeta en (2.1.2), con la cual la convolución temporal del estímulo con la respuesta a impulso se vuelve un producto de las respectivas transformadas en el dominio de la frecuencia. Luego, un sistema lineal e invariante en el tiempo también se puede representar a cabalidad a través de la transformada de su respuesta a impulso con condiciones iniciales iguales a cero. En otras palabras, se tiene

$$Y(s) = G(s)U(s) \quad (2.1.3)$$

en el caso de tiempo continuo, y en el caso de tiempo discreto

$$Y(z) = G(z)U(z), \quad (2.1.4)$$

donde las mayúsculas denotan las transformadas de Laplace o Zeta de las señales correspondientes. En estas ecuaciones, G representa la transformada de la respuesta a impulso del sistema con condiciones iguales a cero. Esta función se denomina función de transferencia [25]. Por lo tanto, se define la función de transferencia de un sistema de tiempo continuo como la transformada de Laplace de su respuesta a impulso de Dirac con condiciones iniciales iguales a cero, y de la misma forma, la función de transferencia de un sistema de tiempo discreto se define como la transformada Zeta de su respuesta a impulso de Kronecker con condiciones iniciales iguales a cero.

Sistemas integrativos

Dentro de las funciones de transferencia se trabajará especialmente con funciones de transferencia de sistemas integrativos. Los sistemas integrativos tienen la forma

$$G(s) = \frac{1}{s^n}$$

en tiempo continuo, y

$$G(z) = \frac{1}{(z-1)^n}$$

en tiempo discreto, donde $n \in \mathbb{N}$. Esta clase de sistemas lleva el nombre de integrativos (o sumadores, en el caso de tiempo discreto) porque integran (o suman) la señal de entrada al sistema hasta el instante de tiempo actual.

Observación 4. *Note que la cantidad de ceros en el origen en $G(z)$ determina el retardo puro de la planta. Por ejemplo, si $G(z)$ tiene n polos en el origen, entonces la salida del sistema tiene $n - r$ retardos de tiempo.*

A continuación la idea de integración se explicita a través de dos ejemplos. Considere el sistema lineal de tiempo continuo que integra la señal de entrada hasta el tiempo t , i.e.,

$$y(t) = \int_0^t u(\tau) d\tau.$$

La función de transferencia de este sistema se obtiene fácilmente al aplicar la transformada de Laplace a ambos lados de la ecuación anterior. De esta manera, resulta inmediato que

$$G(s) = \frac{1}{s}.$$

Por otro lado, considere el sistema de tiempo discreto que suma la señal de entrada hasta el instante de tiempo actual, i.e.,

$$y(k) = \sum_{\ell=0}^k u(\ell).$$

La función de transferencia del sistema se obtiene al aplicar transformada Zeta a ambos lados de la ecuación anterior. De aquí resulta directo que

$$G(z) = \frac{z}{z-1}.$$

2.1.3. Respuesta en frecuencia

A partir de la función de transferencia de un sistema estable (lo que es definida en detalle en la siguiente sección) es posible calcular directamente su respuesta estacionaria a una entrada sinusoidal cualquiera. La función de variable compleja que modela la ganancia en amplitud y fase del sistema se denomina respuesta en frecuencia [33]. Para sistemas asintóticamente estables, la respuesta en frecuencia equivale a la función de transferencia evaluada en el eje imaginario en el caso de tiempo continuo, esto es,

$$G(j\omega) = G(s)|_{s=j\omega},$$

y en la circunferencia unitaria en el caso de tiempo discreto, i.e.,

$$G(e^{j\omega}) = G(z)|_{z=e^{j\omega}}.$$

A través de $G(j\omega)$ y $G(e^{j\omega})$, puede calcularse la ganancia que tendrá la salida del sistema dada una entrada sinusoidal a determinada frecuencia a través del cálculo de la magnitud $|G(j\omega)|$ para tiempo continuo y $|G(e^{j\omega})|$ para tiempo discreto. De forma similar, puede calcularse el desfase que tendrá la salida respecto a la entrada sinusoidal a determinada frecuencia a través del cálculo de la fase $\angle G(j\omega)$ para tiempo continuo y $\angle G(e^{j\omega})$ para tiempo discreto. Así, se puede hacer un perfil de la respuesta del sistema en función de la frecuencia, lo que nos entrega el llamado *diagrama de Bode*.

2.1.4. Magnitud del sistema

La magnitud del sistema se calcula como

$$|G(j\omega)| = G(j\omega) * G(-j\omega)$$

para sistemas de tiempo continuo, y como

$$|G(e^{j\omega})| = G(e^{j\omega}) * G(e^{-j\omega})$$

para sistemas de tiempo discreto.

En el contexto de respuesta en frecuencia se requiere que el sistema sea estable para calcular la respuesta estacionaria en base a la magnitud y fase del sistema. Sin embargo, la expresión matemática para la magnitud también permite calcularla cuando el sistema es inestable, aunque su interpretación debe ser distinta, pues la respuesta estacionaria no existe en ese caso. Para ilustrar esto considere el sistema estable $G_1(j\omega) = 1/(j\omega + 1)$ y el sistema inestable $G_2(j\omega) = -1/(j\omega - 1)$. Es claro que

$$|G_1(j\omega)| = G_1(j\omega) * G_1(-j\omega) = G_1(j\omega) * G_2(j\omega) = G_2(-j\omega) * G_2(j\omega) = |G_2(j\omega)|,$$

lo que muestra que se puede relacionar la magnitud de un sistema estable con la de uno inestable. En definitiva, el que se pueda calcular la magnitud del sistema no implica que el sistema sea estable.

2.1.5. Norma infinito

Para ciertos resultados obtenidos en esta tesis se requiere estudiar la norma infinito de sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Si G es una función de transferencia estable, se define la norma infinito de G [8] como:

$$\|G(s)\|_\infty \triangleq \sup_{\omega \in \mathbb{R}} |G(j\omega)|,$$

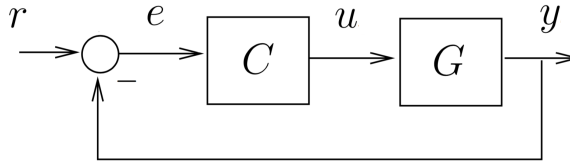


Figura 2.1. Lazo de control de un grado de libertad.

si G es un sistema de tiempo continuo, y como

$$\|G(z)\|_{\infty} \triangleq \sup_{\omega \in [0, 2\pi]} |G(e^{j\omega})|.$$

si es de tiempo discreto.

Gráficamente, la norma infinito de G corresponde al valor máximo o *peak* en la gráfica de Bode de magnitud del sistema.

2.1.6. Lazos de control

Considere un sistema (o planta) cuya salida se quisiera hacer lo más cercana posible a una señal de referencia determinada. Los controladores son sistemas que permiten lograr este objetivo al aplicar una entrada (o actuación) apropiada a la planta de manera automatizada. Típicamente, este proceso se realiza en *lazo cerrado*, lo que significa que se re-alimenta información de la salida de la planta y la referencia hacia el controlador, de manera en que la actuación que éste produce depende de dicha información. En esta tesis se consideran lazos de control donde los modelos de controlador y planta son sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Un lazo de control estándar de estas características se ve como el de la Figura 2.1, donde G corresponde al modelo de la planta que se desea controlar y C al modelo del controlador. Respecto a las señales del lazo, y representa la salida de la planta, r a la referencia de control, e al error de seguimiento, calculado como la diferencia entre la señal de salida y la referencia, y u la actuación a la planta.

Las dinámicas de un lazo de control se encuentran dominadas por sus funciones de sensibilidad, las cuales describen todas las funciones de transferencia posibles entre las señales del lazo. Para el lazo de la Figura 2.1, considere definir las transferencias

$$S = \frac{1}{1 + CG} \quad \text{y} \quad T = \frac{CG}{1 + CG}.$$

Luego, las cuatro funciones de sensibilidad vienen dadas por S (describe el efecto de y sobre e), T (describe el efecto de r sobre y), GS (describe el efecto de u sobre y), y CS (describe el efecto de e sobre u).

Existen algunas características preferibles de tener en el modelo de un controlador. Por ejemplo, resulta deseable que un controlador sea de fase mínima (i.e., que todos sus ceros se encuentran dentro de la región de estabilidad) ya que de otro modo la respuesta escalón del lazo cerrado presentará undershoot [13]. Por otra parte, frecuentemente en aplicaciones industriales se requiere situar al proceso en un punto de operación fijo, por lo que la señal de referencia es un valor constante. Luego, una propiedad importante en lazos de control consiste en garantizar error de seguimiento igual a cero en estado estacionario para este tipo de referencias. Ésto se consigue cuando el producto GC posee integración simple. Asimismo, si se quiere garantizar error de seguimiento cero en estado estacionario para referencias rampa, se debe diseñar C tal que el producto GC posea integración doble [13].

Control proporcional-integrativo

En la presente tesis interesa estudiar un tipo particular de controladores denominados controladores proporcional-integrativo (PI). Esta clase de controladores lleva su nombre porque aplican una actuación a la planta basada en términos proporcionales al error de seguimiento y proporcionales a la integral de dicho error. Los controladores PI pertenecen a la familia de controladores PID (proporcional-integral-derivativo), los cuales son una clase de controladores particularmente versátil, usados con efectividad universalmente en aplicaciones industriales de todo tipo (por ejemplo, en el control de velocidad crucero de vehículos, regulación de velocidad rotación de bombas industriales, control de velocidad de correas transportadoras en aplicaciones misceláneas, entre muchas otras) [2].

La estructura de controladores proporcional-integrativo que se considera para esta tesis será

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s},$$

cuando se trabaje en un marco de tiempo continuo, y

$$C(z) = k_p + k_i \frac{z}{z-1},$$

cuando se trabaje en un marco de tiempo discreto. En ambos casos se considera que $k_p, k_i \in \mathbb{R} - \{0\}$.

2.2. Estabilidad interna

Un sistema lineal e invariante en el tiempo se dice internamente estable si para toda señal de entrada al sistema que es acotada se tiene una correspondiente salida acotada, para toda condición inicial acotada. Matemáticamente, esto significa que todos los modos naturales del sistema decaen asintóticamente a cero. En el dominio de la frecuencia, esto ocurre cuando todos los polos del sistema tienen parte real negativa, si éste es de tiempo continuo, o si el módulo de todos sus polos es menor a uno, si éste es de tiempo discreto. En consecuencia, en análisis de sistemas lineales se denomina *región de estabilidad* al semi-plano izquierdo abierto del plano complejo para sistemas de tiempo continuo, y al círculo unitario abierto para sistemas de tiempo discreto.

De manera similar, se considera que un lazo de control es internamente estable si y sólo si para toda entrada acotada al lazo y toda condición inicial acotada, toda señal que existe dentro del mismo permanece acotada [13]. Matemáticamente, esto ocurre cuando todas las funciones de sensibilidad del lazo cerrado son internamente estables.

A modo de ejemplo, considere el lazo cerrado de la Figura 1.3, y suponga que el controlador C y el modelo de la planta G tienen la estructura

$$G = \frac{B}{A} \quad \text{y} \quad C = \frac{P}{L}.$$

El lazo de control será internamente estable si y sólo si las raíces de su polinomio característico

$$A_{cl} = AL + BP$$

se encuentran dentro de la región de estabilidad. Observe que, si no existen cancelaciones entre ceros del controlador y polos de la planta, el polinomio característico del lazo cerrado equivale al polinomio denominador de la sensibilidad T .

2.2.1. Criterios de estabilidad

Afortunadamente, existen algoritmos que permiten calcular explícitamente condiciones sobre las cuales los parámetros del polinomio de lazo cerrado consiguen raíces dentro de la región de estabilidad sin la necesidad de calcular las raíces explícitamente.

Criterio de estabilidad de Routh-Hurwitz

Para lazos de control de tiempo continuo, uno de estos algoritmos se denomina Criterio de Routh-Hurwitz. Un tratamiento acabado del Criterio de Routh-Hurwitz para el análisis de polinomios de orden general puede encontrarse en [32], [33]. En esta tesis se utiliza solamente el resultado del criterio para polinomios de segundo orden, el cual se enuncia en el lema a continuación.

Lema 1. *El polinomio de coeficientes reales $P(s) = s^2 + p_1s + p_0$ tiene sus dos raíces en el semi-plano izquierdo abierto si y sólo si sus coeficientes satisfacen*

$$p_1 > 0 \quad y \quad p_0 > 0.$$

Criterio de estabilidad de Jury

Por otro lado, para analizar lazos de control de tiempo discreto se tiene el Criterio de estabilidad de Jury. La versión general del algoritmo de Jury puede revisarse en [16], [33]. En esta tesis se utiliza el resultado del algoritmo de Jury para polinomios de tercer orden, el cual se enuncia en el siguiente lema.

Lema 2. *Considere el polinomio de coeficientes reales $P(z) = p_3z^3 + p_2z^2 + p_1z + p_0$, con $p_3 > 0$. Todas sus raíces se encuentran dentro del círculo unitario abierto si y sólo si se satisfacen las siguientes condiciones simultáneamente:*

$$(i) \quad |p_0| < 1$$

$$(ii) \quad p_0^2 - p_3^2 < p_0p_2 - p_1p_3$$

$$(iii a) \quad p_0 + p_1 + p_2 + p_3 > 0$$

$$(iii b) \quad p_0 - p_1 + p_2 - p_3 < 0.$$

2.3. Política de espaciado

Lo más sencillo para el análisis de la dinámica de pelotones es considerar que el espacio deseado entre vehículos es un valor constante. Sin embargo, desde el punto de vista práctico esto no es seguro, pues dicha distancia puede no ser lo suficientemente grande para permitir que un vehículo en movimiento frene a tiempo si el predecesor disminuye su velocidad bruscamente por algún motivo. Por ello, una estrategia razonable es considerar que el espacio entre cada vehículo y su predecesor no sea necesariamente constante, sino que dependa de su velocidad de navegación (ver, por ejemplo, [36]).

Considere el esquema de la Figura 1.3, el cual representa el lazo de control local de los vehículos de un pelotón como el estudiado en esta tesis. Una señal de referencia que implementa el tipo de espaciado anterior tiene la forma

$$r_i = \varepsilon_i + hv_i,$$

donde ε_i es una constante que representa el espacio mínimo requerido entre vehículos, v_i es la rapidez del i -ésimo agente (o una señal representativa de esta cantidad, como la diferencia de la posición entre muestras, si se trabaja dentro de un marco de tiempo discreto) y $h \geq 0$ es una constante que pondera la importancia de la velocidad del agente en la política de espaciado.

Observación 5. *La constante h se denomina constante de time headway, y representa un intervalo de tiempo entre dos vehículos consecutivos. Para $h = 0$, se tiene una política de espaciado constante en la cual se busca que los vehículos mantengan una distancia de ε_i entre sí, siempre que sea posible. Si $h > 0$, la separación de referencia entre vehículos aumenta proporcionalmente respecto a la velocidad instantánea del agente en lo que se conoce como una política de espaciado dependiente de la velocidad [36].*

2.4. Estabilidad de cuerda

En un pelotón, la posición de cada vehículo tiene un error de seguimiento e_i que, a través de la interconexión del pelotón, depende del error de los vehículos que se encuentran por delante. Por lo tanto, el diseño del controlador en los agentes debe ser tal que considere no solo el comportamiento del error de cada vehículo en el tiempo, sino que también la propagación de dicho error hacia los vehículos posteriores. En este sentido, por evidentes motivos de seguridad, resulta fundamental garantizar que los errores de seguimiento no se amplifiquen al propagarse desde un vehículo a sus seguidores. Si dicha amplificación no ocurre, diremos que el pelotón es *estable en cuerda*, en caso contrario, diremos que el pelotón es *inestable en cuerda*. Para ilustrar este concepto, Figura 2.2 muestra una comparación de desempeño entre un pelotón estable en cuerda (fila superior), y uno inestable en cuerda (fila inferior). En ambos casos, el pelotón se compone de $N = 10$ vehículos, y el vehículo líder parte desde el reposo y comienza a navegar a una rapidez constante. Las tendencias asociadas al primer vehículo (o líder) se muestran en color azul, mientras que hacia los últimos vehículos éstas se muestra en un espectro hacia el rojo. De las gráficas del error de seguimiento del caso estable puede verse como el *peak* del error propagado decae a medida que éste se avanza hacia los agentes posteriores. Este comportamiento se preserva a medida que más vehículos se agregan al pelotón. Por otra parte, el caso inestable en cuerda muestra la amplificación de las señales de error cuando se propagan hacia el último agente. Esta tendencia conlleva una degradación del desempeño de control que sería acentuada al agregarse más agentes al pelotón, la cual eventualmente provocaría colisiones entre vehículos.

Observación 6. *Es importante notar que cuando se analiza la estabilidad de cuerda, la importancia se asigna al comportamiento transiente de las señales y su propagación hacia los demás vehículos, en lugar de enfocarse en el estado estacionario. De hecho, los controladores en ambos pelotones en la Figura 2.2 están diseñados para lograr estabilidad interna, considerando error en estado estacionario nulo para todos los vehículos, sin embargo la estabilidad de cuerda se consigue sólo en uno de los dos casos.*

La estabilidad de cuerda admite distintas definiciones según el marco de trabajo en el que se encuentra el pelotón, como por ejemplo, pelotones modelados como sistemas no-lineales, pelotones descritos en el tiempo, descritos en frecuencia, etc. [11]. En una configuración lineal como la que se trabaja en esta tesis, es posible demostrar que la transferencia entre dos errores consecutivos viene dada por la transferencia T asociada al lazo de control local de los vehículos. Esto permite definir la estabilidad de cuerda como sigue (ver por ejemplo [18]):

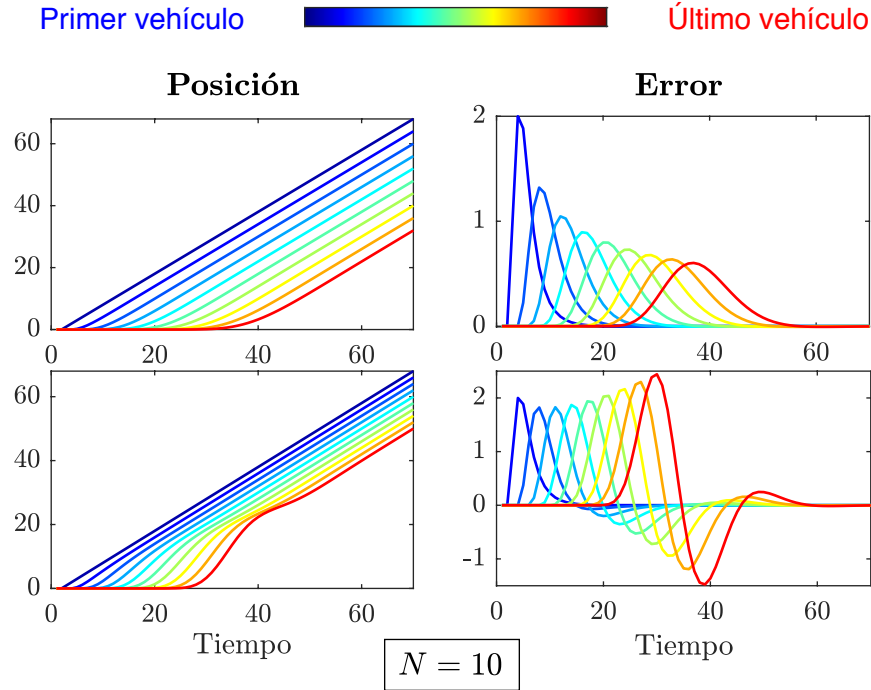


Figura 2.2. Posiciones y errores de seguimiento de un pelotón estable en cuerda (fila superior) y uno inestable en cuerda (fila inferior).

Definición 1. Se dice que un pelotón homogéneo es estable en cuerda [11] si la función de transferencia de los errores entre agentes consecutivos, es decir, la transferencia T tal que $E_i = TE_{i-1}$, satisface $\|T\|_\infty \leq 1$. De lo contrario, diremos que el pelotón es inestable en cuerda.

Note que bajo esta definición, para que un pelotón sea estable en cuerda se requiere que los lazos de control de los vehículos individuales sean internamente estables. Sin embargo, esta implicancia no es válida al revés.

2.5. Requerimientos y resultados de pelotones

Una parte significativa del consumo energético de vehículos motorizados depende de la potencia requerida para cambiar su estado de movimiento. Todo vehículo posee inercia, y con ello, una resistencia a cambios en su velocidad o dirección. Debido a esto, la conducción a rapidez constante permite aumentar la eficiencia energética de la navegación [31]. En pelotones de vehículos, la referencia de movimiento está dictada por el vehículo líder el cual, por los motivos anteriores, típicamente buscará llevar una velocidad crucero constante. Esto define para los vehículos seguidores en el pelotón trayectorias de posición de tipo rampa para la cual el lazo de control de cada uno de los vehículos deberá seguir. Por lo tanto, el seguimiento en estado estacionario del lazo de control de los vehículos con referencias de tipo rampa resulta particularmente importante.

Debido a lo anterior, un requerimiento común en este tipo de esquemas es la incorporación de integración doble en el producto planta-controlador (lo que se realiza añadiendo polos integradores en el controlador). Esto permite que el lazo de control consiga seguimiento perfecto en estado estacionario a referencias del lazo de tipo rampa. La demostración de este requerimiento se basa en el uso del Teorema del Valor Final de Laplace, en tiempo continuo, y de Zeta en tiempo discreto [33].

Por motivos de simplicidad, a continuación se ejemplificará este resultado considerando el lazo de control de la Figura 2.1. Si el producto GC posee doble integración, entonces el Teorema del Valor Final de Laplace establece que para tiempo continuo, el error en estado estacionario satisface:

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} e(t) &= \lim_{s \rightarrow 0} sE(s) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s (R(s)S(s)) \\ &= \lim_{s \rightarrow 0} s \left(\frac{1}{s^2} \cdot \frac{s^2}{s^2 + \tilde{C}(s)\tilde{G}(s)} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde se ha definido la parametrización $C(s)G(s) = s^2\tilde{C}(s)\tilde{G}(s)$, con $\lim_{s \rightarrow 0} \tilde{C}(s)\tilde{G}(s) \neq 0$. Por otro lado, para lazos de control de tiempo discreto se tiene similarmente con el Teorema del Valor Final de Zeta:

$$\begin{aligned} \lim_{k \rightarrow \infty} e(k) &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1)E(z) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) (R(z)S(z)) \\ &= \lim_{z \rightarrow 1} (z-1) \left(\frac{1}{(z-1)^2} \cdot \frac{(z-1)^2}{(z-1)^2 + \tilde{C}(z)\tilde{G}(z)} \right) \\ &= 0, \end{aligned}$$

donde $\tilde{C}(z)\tilde{G}(z) = (z-1)^2C(z)G(z)$, con $\lim_{z \rightarrow 1} \tilde{C}(z)\tilde{G}(z) \neq 0$.

Observación 7. *Un resultado importante en la literatura de pelotones que implementan una política de espaciado dependiente de la velocidad es que si G y C son ambos modelados por sistemas lineales invariantes en el tiempo, se ha demostrado en [18], [40] que es posible calcular el valor mínimo de h que garantiza estabilidad de cuerda cuando el producto GC posee doble integración, lo cual es común en este tipo de aplicaciones. Por otra parte, un pelotón que implementa una política de espaciado constante y que incluye doble integración en el producto GC es incompatible con la propiedad de estabilidad de cuerda para cualquier controlador lineal que se utilice en sus agentes [34], [40].*

2.6. Conclusiones del capítulo

En este capítulo se presentaron algunas definiciones básicas de sistemas lineales e invariantes en el tiempo. Luego, se revisaron conceptos esenciales de control realimentado, incluyendo control de tipo proporcional-integrativo y estabilidad interna de un lazo de control. Respecto a este último punto, se hizo referencia a algunos algoritmos que permiten simplificar el análisis de esta propiedad en un lazo cerrado. Finalmente, se definieron dos conceptos esenciales para la comprensión de los resultados de esta tesis, siendo éstos la

política de espaciado de un pelotón y la propiedad de estabilidad de cuerda, y se presentaron algunos requerimientos y resultados relevantes relativos a pelotones.

Los contenidos revisados en este capítulo definen los conceptos básicos necesarios para la comprensión del desarrollo presentado en los Capítulos 3 y 4.

ANÁLISIS EN TIEMPO CONTINUO

En el capítulo de preliminares se estudió la importancia de la propiedad de estabilidad de cuerda en la seguridad y desempeño de pelotones. En el presente capítulo se estudia la compatibilidad de esta propiedad con una configuración particular de pelotones de tiempo continuo, en la cual el control se realiza distribuidamente mediante controladores de tipo proporcional-integrativo y se aplica una política de espaciado dependiente de la velocidad. Particularmente, interesa caracterizar los diseños de la política de espaciado y las sintonías del controlador que permiten obtener estabilidad de cuerda en el pelotón. Así, en la primera sección se describe el modelo matemático considerado para el pelotón y se precisa la definición de estabilidad de cuerda y la política de espaciado que se considera en este marco de trabajo. En las secciones segunda y tercera se desarrollan respectivamente el análisis de estabilidad interna y la ganancia de los lazos de control embebidos en los vehículos del pelotón, siendo ambas propiedades fundamentales para obtener estabilidad de cuerda en el pelotón. En la cuarta sección, los resultados anteriores se combinan para deducir la región de diseños de pelotones estables en cuerda. También se discuten algunas implicancias de estos resultados, incluyendo los compromisos de diseño asociados a los pelotones estable en cuerda y la potencial aplicabilidad de algunos de éstos. Finalmente, en la quinta sección se resumen las conclusiones del capítulo.

3.1. Descripción de la configuración

A continuación se describe el modelo de pelotón de vehículos de tiempo continuo a estudiar en este capítulo, y se presentan las definiciones específicas consideradas para la política de espaciado y estabilidad de cuerda.

Se considera un pelotón como un sistema lineal de tiempo continuo, compuesto por $N \in \mathbb{N}$ vehículos que se desplazan coordinadamente a través de una trayectoria unidimensional. En este esquema, el flujo de información se rige por una topología de seguimiento de predecesor, en la cual el i -ésimo vehículo, $1 \leq i \leq N$, tiene acceso a su propia posición $y_i(t)$, su rapidez instantánea $v_i(t)$, y a la posición de su predecesor directo $y_{i-1}(t)$, pudiendo haber obtenido esta información a través del uso de sensores y/o una red de comunicación inter-vehicular sin pérdidas. Consecuentemente, el i -ésimo vehículo conoce el valor de la distancia respecto a su predecesor directo, $\ell_i(t) \triangleq y_{i-1}(t) - y_i(t)$.

El objetivo de control de la formación es mantener la distancia inter-vehicular $\ell_i(t)$ lo más cercana posible a una señal de referencia $r_i(t)$, para todo vehículo i . Para lograr este

fin, cada vehículo cuenta con un controlador local que usa la información disponible en cada vehículo para manipularlo de forma automática. El correspondiente error de seguimiento del vehículo i es definido como

$$e_i(t) = \ell_i(t) - r_i(t).$$

Por lo tanto, el lazo de control de cada vehículo se puede representar como el esquema de la Figura 3.1, donde $G(s)$ representa el modelo dinámico de cada agente, $C(s)$ es su respectivo controlador y $u_i(t)$ corresponde a la actuación. Además, el pelotón se supone *homogéneo*, por lo que todos los agentes tienen el mismo modelo de planta $G(s)$ y el mismo controlador $C(s)$.

Respecto al modelo dinámico del vehículo, en el contexto del estudio de pelotones abundan en la literatura trabajos donde cada vehículo es modelado por un integrador simple o doble [11] ya que esto logra capturar las características esenciales de los agentes con respecto al objetivo de control de formación. En estos casos, la actuación $u_i(t)$ representa la velocidad o aceleración del vehículo respectivamente. En el presente trabajo, se considera que los modelos de los vehículos son integradores simples. Esto significa que en tiempo continuo, $G(s)$ tiene la forma

$$G(s) = \frac{1}{s}. \quad (3.1.1)$$

Por otro lado, interesa en estudiar el efecto del uso de controladores proporcional-integrativo (PI) en el pelotón. Luego se considera para $C(s)$ con la estructura

$$C(s) = k_p + \frac{k_i}{s}, \quad (3.1.2)$$

donde $k_p, k_i \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Observación 8. *Un modelo ligeramente más general de la planta viene dado por $G(s) = g_c/s$, donde $g_c \neq 0$ es una ganancia arbitraria. Sin embargo, para el propósito de este trabajo siempre se puede suponer, sin pérdida de generalidad, que $g_c = 1$, ya que de lo contrario los parámetros k_p y k_i se pueden escalar de forma proporcional para absorber el efecto de g_c .*

Dada la descripción anterior, puede verse que el i -ésimo vehículo tiene como señales de entrada al lazo cerrado la posición del vehículo predecesor y la señal de referencia, mientras que la salida es su propia posición. Se denomina $T(s)$ la función de sensibilidad que modela la transferencia entre dichas entradas con la salida del lazo. Note que, al considerar dos agentes consecutivos, $T(s)$ también modela la propagación del error de control del agente i -ésimo hacia el error de su seguidor inmediato, de índice $i+1$. Es claro que un requerimiento para el diseño del controlador $C(s)$ es que $T(s)$ debe ser estable internamente.

Debido a que el pelotón es homogéneo, las relaciones anteriores son idénticas para todos los vehículos en el pelotón. Entonces, producto que en la formación los lazos de control de todos los vehículos se encuentran conectados en cascada, $T(s)$ modela, además del efecto del error de seguimiento de un vehículo a su seguidor inmediato, la propagación de dicho error hacia todos los vehículos seguidores en la cadena. De esta manera, el efecto del error de control del vehículo i -ésimo sobre el error del vehículo j -ésimo, con $j \geq i$, está caracterizado por la relación

$$E_j(s) = T(s)^{j-i} E_i(s). \quad (3.1.3)$$

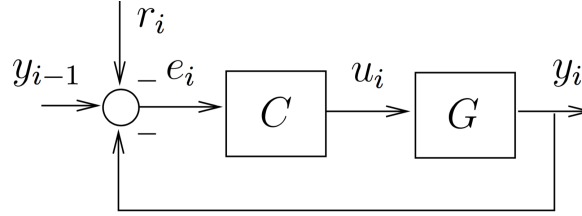


Figura 3.1. Esquema de control de un vehículo.

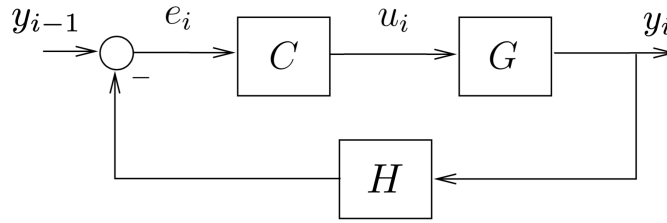


Figura 3.2. Lazo de control equivalente.

3.1.1. Política de espaciado

Por motivos de seguridad se considera una referencia de distancia inter-vehículo tal que se incremente el espacio entre vehículos conforme aumenta la velocidad de navegación de los agentes. Una señal de referencia $r_i(t)$ que implementa esta idea es

$$r_i(t) = \varepsilon_i + hv_i(t), \quad (3.1.4)$$

donde ε_i es un valor constante que representa el espaciado mínimo deseado entre el vehículo i -ésimo y su predecesor $h > 0$ es una constante denominada time headway, la cual pondera la importancia de dicha rapidez en la política de espaciado. Observe que el valor que toma la constante time headway guarda directa relación con las distancias que los vehículos mantienen entre sí en estado estacionario. Tanto h como ε_i son parámetros de diseño del pelotón. A medida que aumenta la rapidez $v_i(t)$ en esta expresión, claramente aumenta también la distancia de referencia $r_i(t)$.

Por simplicidad, y sin pérdida de generalidad en los resultados posteriores, para el resto de la exposición se considera que ε_i es igual a cero para todo vehículo en el pelotón. Además, en un marco de trabajo de tiempo continuo se tiene que $v_i(t) = dy_i(t)/dt$. Por lo tanto, si se define

$$H(s) \triangleq sh + 1, \quad (3.1.5)$$

se puede re-escribir el esquema de control de la Figura 3.1 en términos de las posiciones del vehículo i -ésimo y de su predecesor. Este lazo de control equivalente se muestra en la Figura 3.2. Correspondientemente, la sensibilidad $T(s)$ tiene la forma

$$T(s) = \frac{C(s)G(s)}{1 + C(s)G(s)H(s)}, \quad (3.1.6)$$

la cual escrita en términos de los parámetros del pelotón es

$$T(s) = \frac{sk_p + k_i}{(k_p h + 1)s^2 + (k_i h + k_p)s + k_i}. \quad (3.1.7)$$

Observación 9. *El término $H(s)$ en (3.1.5) es impropio, y por lo tanto, el lazo de la Figura 3.2 no es implementable directamente en la realidad. Sin embargo, este esquema no es más que una forma equivalente de representar al de la Figura 3.1, el cual permite definir y analizar funciones relevantes, como la transferencia con política de espaciado $T(s)$. En este marco de trabajo se ha supuesto que cada vehículo es capaz de medir su propia velocidad $v_i(t)$, lo que hace que en la práctica el lazo de la Figura 3.1 con $r_i(t)$ dado en (3.1.4) sea perfectamente implementable.*

3.1.2. Estabilidad de cuerda

A través de la ecuación (3.1.3) resulta explícito que la ganancia de la propagación de los errores de seguimiento entre vehículos del pelotón está modelada por la sensibilidad $T(s)$. Por lo tanto, asegurar que no ocurra amplificación de estos errores a lo largo de la cadena de agentes implica imponer que la magnitud de la respuesta en frecuencia de $T(s)$ no supere la unidad para ninguna frecuencia. Este requerimiento junto a la estabilidad interna de $T(s)$ determinan la estabilidad de cuerda del pelotón. En consecuencia, para la configuración lineal presentada en este capítulo se considera la definición de estabilidad de cuerda que se enuncia a continuación (ver por ejemplo [18]):

Definición 2. *Se dirá que un pelotón homogéneo es estable en cuerda si la función de transferencia (de los errores) entre agentes consecutivos, es decir, la transferencia $T(s)$ tal que $E_i(s) = T(s)E_{i-1}(s)$, satisface $\|T(s)\|_\infty \leq 1$. De lo contrario, diremos que el pelotón es inestable en cuerda.*

Note que dada esta definición, estabilidad de cuerda requiere estabilidad interna, pero no al revés.

En este capítulo, el interés está en estudiar la propiedad de estabilidad de cuerda del pelotón de vehículos de tiempo continuo recién definido. Para ello, en las secciones restantes se descompone el análisis de la estabilidad de cuerda en la caracterización de los parámetros del controlador k_p y k_i , y de la política de espaciado h que aseguran, por una parte, que los lazos de control de los vehículos individuales son internamente estables, y por la otra, que el error de seguimiento de los agentes no aumente cuando esta señal se propaga hacia los vehículos seguidores. La intersección de ambas regiones de diseño caracterizará al conjunto de pelotones¹ que son compatibles con estabilidad de cuerda.

3.2. Análisis de estabilidad interna

Resulta primordial para la viabilidad del control de posición de cada vehículo garantizar la estabilidad interna del lazo cerrado asociado. Por lo tanto, en esta sección se caracterizan las condiciones necesarias y suficientes sobre los parámetros de diseño del pelotón para los cuales se obtiene estabilidad interna. Éstas se detallan en el siguiente lema.

¹En el marco de trabajo presentado el control (y por tanto la dinámica) del pelotón está determinada por sus parámetros de diseño k_p , k_i y h . Dentro de este contexto, se denomina pelotón, más allá que al sistema físico compuesto por vehículos, a la caracterización particular del control asociado a través de los valores que asumen k_p , k_i y h .

Lema 3. *El pelotón de vehículos descrito en la sección anterior será internamente estable si y sólo si los parámetros k_p , k_i y h satisfacen*

$$\frac{k_p + hk_i}{k_ph + 1} > 0, \quad y \quad \frac{k_i}{k_ph + 1} > 0 \quad \text{si } k_ph \neq -1,$$

$$\frac{k_i h}{k_i h^2 - 1} > 0 \quad \text{si } k_ph = -1.$$

Demostración. De acuerdo a (3.1.7), la transferencia del lazo de la Figura 3.2 viene dada por:

$$T(s) = \frac{sk_p + k_i}{(k_ph + 1)s^2 + (k_i h + k_p)s + k_i}. \quad (3.2.1)$$

Si $k_ph \neq -1$, entonces esta transferencia se puede escribir como

$$T(s) = \frac{\frac{k_p}{k_ph + 1}s + \frac{k_i}{k_ph + 1}}{s^2 + \frac{k_i h + k_p}{k_ph + 1}s + \frac{k_i}{k_ph + 1}}. \quad (3.2.2)$$

Entonces, el criterio de estabilidad de Routh (ver Capítulo 2 Sección 2.2.1) implica que se conseguirá estabilidad interna si y sólo si los términos

$$\frac{k_i h + k_p}{k_ph + 1} > 0 \quad y \quad \frac{k_i}{k_ph + 1} > 0.$$

Por otro lado, si $k_ph = -1$, entonces la transferencia de lazo (3.2.1) se transforma en un sistema de primer orden. Al evaluar $k_p = -1/h$ en el sistema resultante se tiene

$$T(s) = \frac{k_i - \frac{s}{h}}{(k_i h - \frac{1}{h})s + k_i} = \frac{k_i h - s}{(k_i h^2 - 1)s + k_i h}.$$

Luego, se tendrá estabilidad interna para este caso si y sólo si

$$\frac{k_i h}{k_i h^2 - 1} > 0,$$

lo que completa la demostración. ■

Del resultado del lema se observa que, a medida que h tiende a infinito, las condiciones anteriores para $k_ph \neq -1$ se reducen a requerir que k_p y k_i tengan mismo signo. Por otro lado para valores de h pequeños, estas condiciones tienden a requerir que las ganancias del controlador sean positivas. Este comportamiento en la estabilidad interna se observa en la Figura 3.3, donde se ha graficado en azul la región de estabilidad interna en el espacio de parámetros k_p , k_i y h para un rango que permite apreciar la curvatura de la región en torno al origen. Aquí, las tendencias anteriores se traducen en que la región tiende a los cuadrantes 1 y 3 del plano k_p , k_i a medida que h crece, mientras que para h cercanos a cero la región en el cuadrante 3 tiende a desaparecer ya que la condición $(k_p + hk_i)/(k_ph + 1) > 0$ fuerza progresivamente el requerimiento $k_p > 0$ para h tendiendo a cero.

3.3. Análisis de magnitud

El lema que se presenta a continuación caracteriza las condiciones necesarias y suficientes sobre los parámetros de diseño del pelotón que permiten obtener la magnitud de la transferencia en lazo cerrado de los vehículos menor o igual a uno. Observe que este resultado no

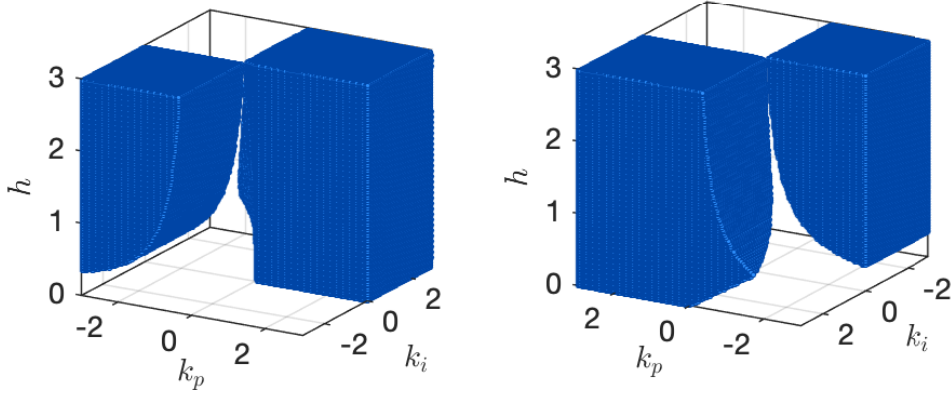


Figura 3.3. Dos rotaciones de la región de estabilidad interna en el espacio de parámetros de diseño del pelotón.

supone estabilidad del lazo cerrado, por lo que el cumplimiento de estas condiciones puede definir lazos de control tanto estables como inestables.

Lema 4. *Considere el pelotón de vehículos descrito en la sección anterior. La transferencia del lazo de control de los vehículos individuales satisface $|T(j\omega)| \leq 1$ para todo $\omega \in \mathbb{R}$ si y sólo si las constantes de diseño del pelotón satisfacen la siguiente condición:*

$$\begin{aligned} \frac{k_i}{k_p h + 1} \left(\frac{h(2k_p + k_i h)}{k_p h + 1} - 2 \right) &\geq 0 \quad \text{si } k_p h \neq -1, \\ k_i^2 h^2 &\geq 2k_i \quad \text{si } k_p h = -1. \end{aligned}$$

Demostración. Se considera primeramente el caso en que $k_p h \neq -1$. Definiendo

$$\tilde{k}_p = \frac{k_p}{k_p h + 1} \quad \text{y} \quad \tilde{k}_i = \frac{k_i}{k_p h + 1},$$

entonces de (3.2.2) se tiene:

$$T(s) = \frac{\tilde{k}_p s + \tilde{k}_i}{s^2 + (\tilde{k}_i h + \tilde{k}_p) s + \tilde{k}_i}. \quad (3.3.1)$$

Se demostrará lo pedido a través del análisis de su negación lógica. En términos de la respuesta en frecuencia de $T(s)$, esto equivale a que $\max_{\omega \in \mathbb{R}} |T(j\omega)| > 1$, lo cual ocurrirá si y sólo si existe $\omega_0 \in \mathbb{R}^+$ tal que $\frac{1}{|T(j\omega_0)|^2} < 1$. Como $|T(j\omega)|$ satisface²

$$|T(j\omega)|^2 = \frac{\tilde{k}_i^2 + \omega^2 \tilde{k}_p^2}{\tilde{k}_i^2 + \omega^2 \tilde{k}_p^2 + \omega^2 (\omega^2 + 2\tilde{k}_i \tilde{k}_p h + \tilde{k}_i^2 h^2 - 2\tilde{k}_i)},$$

²Recordar que el diagrama de Bode de magnitud es simétrico con respecto a la frecuencia ω , por lo que no hay pérdida de generalidad si se consideran frecuencias mayores o iguales que cero.

entonces la proposición anterior es equivalente a

$$\begin{aligned} \exists \omega_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \frac{\omega_0^2(\omega_0^2 + 2\tilde{k}_i\tilde{k}_p h + \tilde{k}_i^2 h^2 - 2\tilde{k}_i)}{\tilde{k}_i^2 + \omega_0^2 \tilde{k}_p^2} < 0 \\ \Leftrightarrow \exists \omega_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \omega_0^2 + 2\tilde{k}_i\tilde{k}_p h + \tilde{k}_i^2 h^2 - 2\tilde{k}_i < 0. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Dado que ω_0^2 es un valor positivo, esta desigualdad implica que debe ocurrir

$$2\tilde{k}_i\tilde{k}_p h + \tilde{k}_i^2 h^2 - 2\tilde{k}_i < 0. \quad (3.3.3)$$

Ahora bien, se desea probar la doble implicancia entre (3.3.2) y (3.3.3). Para la implicancia reversa, supóngase que (3.3.3) se satisfice. Entonces, siempre existirá $\omega_0^2 > 0$ tal que $\omega_0^2 + 2\tilde{k}_i\tilde{k}_p h + \tilde{k}_i^2 h^2 - 2\tilde{k}_i < 0$ (por ejemplo, tomando $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{2}(2\tilde{k}_i - 2\tilde{k}_i\tilde{k}_p h - \tilde{k}_i^2 h^2)}$).

Por lo tanto, para el caso $k_p h \neq -1$ se acaba de demostrar

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}^+} |T(j\omega)| > 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\tilde{k}_i\tilde{k}_p h + \tilde{k}_i^2 h^2 - 2\tilde{k}_i < 0.$$

luego la condición para obtener $\max_{\omega \in \mathbb{R}^+} |T(j\omega)| \leq 1$ corresponde a la negación de esta proposición, i.e.,

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}^+} |T(j\omega)| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad 2\tilde{k}_i\tilde{k}_p h + \tilde{k}_i^2 h^2 - 2\tilde{k}_i \geq 0.$$

Este resultado se escribe en el enunciado del teorema en términos de las variables originales. Por otra parte, para analizar el caso en que $k_p h = -1$ se puede evaluar $k_p = -\frac{1}{h}$ en la transferencia de lazo y obtener

$$T(s) = \frac{k_i - \frac{s}{h}}{(k_i h - \frac{1}{h})s + k_i} = \frac{k_i h - s}{(k_i h^2 - 1)s + k_i h},$$

lo que conduce a

$$|T(j\omega)| = \frac{k_i^2 h^2 + \omega^2}{k_i^2 h^2 + \omega^2 + \omega^2(k_i^2 h^4 - 2k_i h^2)}.$$

Luego, bajo el mismo razonamiento que el ocupado para el caso anterior, se tiene que para $k_p h = -1$:

$$\begin{aligned} \max_{\omega \in \mathbb{R}^+} |T(j\omega)| > 1 &\Leftrightarrow \exists \omega_0 \in \mathbb{R}^+ \text{ tal que } \omega_0^2(k_i^2 h^4 - 2k_i h^2) < 0 \\ &\Leftrightarrow k_i^2 h^2 < 2k_i \quad (h > 0). \end{aligned} \quad (3.3.4)$$

Luego, la negación de esta proposición entrega directamente la equivalencia

$$\max_{\omega \in \mathbb{R}^+} |T(j\omega)| \leq 1 \quad \Leftrightarrow \quad k_i^2 h^2 \geq 2k_i$$

para este caso. ■

Es posible demostrar que los sólidos definidos por las desigualdades del Lema 4 para los casos de $k_p h + 1$ igual a uno y distinto a menos uno corresponden en realidad a un mismo volumen, descrito por la unión de las regiones $k_i h^2 \geq 2$ y $k_i < 0$. Sin embargo, se expresa el resultado de este lema separando por casos ya que esta descripción será útil en el análisis que se hace en la próxima sección. Las regiones del espacio de los parámetros de diseño del pelotón donde se tiene magnitud de la transferencia en lazo cerrado menor o igual a uno se muestran en la Figura 3.4, donde se evidencian con claridad las superficies límite $k_i h^2 = 2$ y $k_i = 0$.

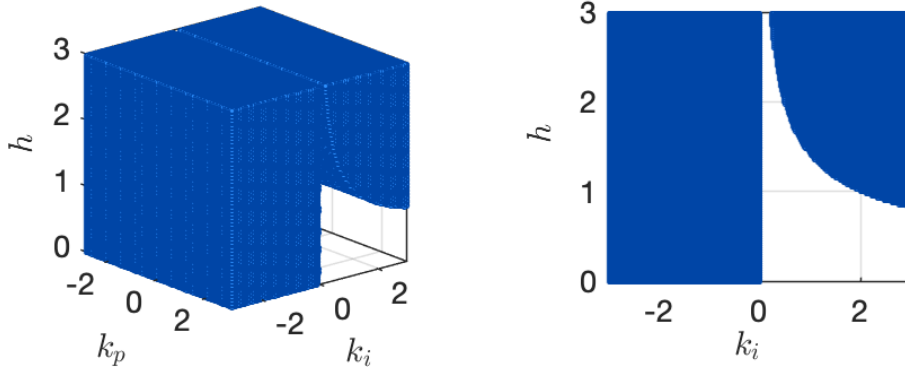


Figura 3.4. Dos rotaciones de la región de ganancia de lazo menor o igual a uno en el espacio de parámetros de diseño del pelotón.

3.4. Análisis de estabilidad de cuerda

El teorema que se enuncia a continuación es el principal resultado de este capítulo, y caracteriza la zona de estabilidad de cuerda del pelotón en términos de las constantes de diseño del lazo, k_p , k_i y h .

Teorema 1. *Considere el pelotón de vehículos descrito en la sección anterior. El pelotón será estable en cuerda de acuerdo a la Definición 2 si y sólo si las constantes de diseño de los lazos individuales se encuentran en una de las zonas siguientes*

<u>Zona 1</u>	<u>Zona 2</u>
$k_p \geq -1/h$	$k_p \leq -1/h$
$k_i \geq 2/h^2$	$k_i < 0$.

Demostración. El pelotón será estable en cuerda de acuerdo a la Definición 2 si y sólo si $\|T(s)\|_\infty \leq 1$. Debido a que $T(s)$ es un sistema lineal, esta condición equivale a requerir $\max_{\omega \in \mathbb{R}^+} |T(j\omega)| \leq 1$ provisto que $T(s)$ es un sistema estable. Luego, la zona en el espacio de parámetros k_p , k_i y h que contiene los diseños de pelotón compatibles con estabilidad de cuerda corresponde a la intersección de las regiones donde se obtiene estabilidad interna de los lazos de control con aquella donde la ganancia de éstos es menor o igual a uno. Cada una de estas regiones fueron caracterizadas como inequaciones respectivamente en los lemas 3 y 4. A continuación se especifica este proceso de intersección para obtener la región de estabilidad de cuerda del pelotón.

Se analizará separadamente para los casos $k_p h \neq -1$ y $k_p h = -1$, comenzando por el caso $k_p h \neq -1$. Considerando las regiones de estabilidad interna y de ganancia de lazo de control menor o igual a uno, se tiene que la región de estabilidad de cuerda corresponde a

la intersección de los volúmenes definidos por

$$2\frac{k_p}{k_ph+1}h + \frac{k_i}{k_ph+1}h^2 \geq 2, \quad (\text{de magnitud del lazo cerrado}) \quad (3.4.1)$$

$$\frac{k_i}{k_ph+1} > 0, \quad (\text{de estabilidad interna}) \quad (3.4.2)$$

$$\frac{k_p}{k_ph+1} + h\frac{k_i}{k_ph+1} > 0. \quad (\text{de estabilidad interna}) \quad (3.4.3)$$

Aquí, la desigualdad (3.4.1) se ha simplificado ligeramente con respecto a la expresión del lema 4 para el caso $k_ph \neq 1$ haciendo uso de (3.4.2). A continuación, se procede analizando el conjunto (3.4.1) - (3.4.3) por casos según el signo del denominador $k_ph + 1$.

Si $k_ph + 1 > 0$, entonces al multiplicar ambos lados de las desigualdades (3.4.1) - (3.4.3) por $k_ph + 1$ se tiene

$$k_i h^2 \geq 2, \quad (3.4.4)$$

$$k_i > 0, \quad (3.4.5)$$

$$k_p + hk_i > 0. \quad (3.4.6)$$

De aquí, se desprende que (3.4.4) implica $k_i > 0$, por lo que (3.4.5) es redundante en el sistema. También, al multiplicar (3.4.6) por h se tiene $k_ph + h^2 k_i > 0$, lo cual siempre ocurre en este caso ya que $k_ph > -1$ y $k_i h^2 \geq 2$.

Por otra parte, si $k_ph + 1 < 0$ entonces al amplificar el conjunto (3.4.1) - (3.4.3) por $k_ph + 1$ se tiene

$$k_i h^2 \leq 2 \quad (3.4.7)$$

$$k_i < 0 \quad (3.4.8)$$

$$k_p + hk_i < 0. \quad (3.4.9)$$

Se observa que (3.4.8) implica (3.4.7), por lo que (3.4.7) es una condición redundante en este sistema. Por otro lado, al multiplicar (3.4.9) por h a ambos lados de la desigualdad se obtiene $k_ph + k_i h^2 < 0$, lo cual es siempre una proposición verdadera ya que en este caso $k_ph < -1$ y el producto $k_i h^2$ es negativo.

Las reducciones recién hechas para los casos $k_ph + 1$ negativo y positivo describen dos zonas en el espacio de parámetros k_p , k_i y h representativas de los diseños de pelotones estables en cuerda. Éstas son:

<u>Zona 1</u>	<u>Zona 2</u>	
$k_ph > -1$	$k_ph < -1$	(3.4.10)
$k_i h^2 \geq 2$	$k_i < 0$.	

Finalmente, se evalúa el caso de reducción de orden $k_ph = -1$. Para conseguir estabilidad de cuerda en este caso se deben cumplir simultáneamente las condiciones

$$k_i^2 h^2 \geq 2k_i, \quad (\text{de magnitud del lazo cerrado}) \quad (3.4.11)$$

$$\frac{k_i h}{k_i h^2 - 1} > 0. \quad (\text{de estabilidad interna}) \quad (3.4.12)$$

Se procede analizando por casos para k_i . Si $k_i > 0$, entonces las desigualdades anteriores equivalen a requerir simultáneamente $k_i h^2 \geq 2$ para la condición de magnitud del lazo cerrado, y $k_i h^2 > 1$ para la de estabilidad interna. La intersección de ambas desigualdades entrega la condición $k_i h^2 \geq 2$ para obtener estabilidad de cuerda. Por otro lado, si $k_i < 0$ entonces se tendrá estabilidad de cuerda si y sólo si simultáneamente se satisfacen $k_i h^2 \leq 2$ para la condición de ganancia de lazo, y $k_i h^2 < 1$ para la condición de estabilidad interna. Se observa que para ambas desigualdades esto siempre ocurre ya que en este caso el producto $k_i h^2$ es negativo.

El análisis recién hecho indica que se tendrá estabilidad de cuerda en el pelotón si y sólo si $k_p h = -1$ y $k_i h^2 \geq 2$, o bien si $k_p h = -1$ y $k_i < 0$. La incorporación de estos casos en las zonas de estabilidad de cuerda definidas en (3.4.10) indica que existe igualdad en las zonas 1 y 2 para la condición asociada a $k_p h = -1$. Por lo tanto, la región de estabilidad de cuerda del pelotón queda definida para todos los casos como

<u>Zona 1</u>	<u>Zona 2</u>
$k_p h \geq -1$	$k_p h \leq -1$
$k_i h^2 \geq 2$	$k_i < 0$.

■

El Teorema 1 presenta condiciones sobre los parámetros de diseño del lazo de control de tal forma de garantizar estabilidad de cuerda. Por la forma de presentar el resultado en Teorema 1, es simple diseñar controladores PI que garanticen estabilidad de cuerda, dado un valor de h determinado. Ahora bien, dado un controlador ya especificado, es útil saber cómo diseñar la política de espaciado para garantizar estabilidad de cuerda. El siguiente corolario especifica esas condiciones sobre h .

Corolario 1. *Considere un controlador PI con la estructura presentada en (3.1.2).*

1. Si $k_i > 0$ y $k_p > 0$, entonces el pelotón es estable en cuerda si y sólo si $h \geq \sqrt{\frac{2}{k_i}}$.
2. Si $k_i < 0$ y $k_p < 0$, entonces el pelotón es estable en cuerda si y sólo si $h \geq -\frac{1}{k_p}$.
3. Si $k_i > 0$ y $k_p < 0$, y $\sqrt{\frac{2}{k_i}} \leq -\frac{1}{k_p}$, entonces el pelotón es estable en cuerda si y sólo si $\sqrt{\frac{2}{k_i}} \leq h \leq -\frac{1}{k_p}$.
4. En otro caso, el pelotón es inestable en cuerda.

Demostración. El resultado viene directo de despejar h en las zonas definidas en el Teorema 1. A continuación se desarrolla el detalle:

En la Zona 1 se debe cumplir simultáneamente $k_p h \geq -1$ y $h \geq \sqrt{\frac{2}{k_i}}$ para obtener estabilidad de cuerda. Considerando que en esta zona se tiene $k_i > 0$, se analiza por casos para k_p . Si $k_p > 0$, entonces el requerimiento anterior equivale a $h \geq \sqrt{\frac{2}{k_i}}$. Por otro lado, si $k_p < 0$ entonces éste equivale a $\sqrt{\frac{2}{k_i}} \leq h \leq -\frac{1}{k_p}$. Por otra parte, en la Zona 2 se debe cumplir simultáneamente $k_i < 0$ y $k_p h \leq -1$ para obtener estabilidad de cuerda. Se evalúa por casos para k_p . Si $k_p > 0$ entonces estas desigualdades equivalen a $k_i < 0$ y $h \leq -\frac{1}{k_p}$ lo cual no es posible ya que h es un valor positivo. Por otro lado, si $k_p < 0$ entonces se necesita tener $h \geq -\frac{1}{k_p}$ y $k_i < 0$ para lograr estabilidad de cuerda. ■

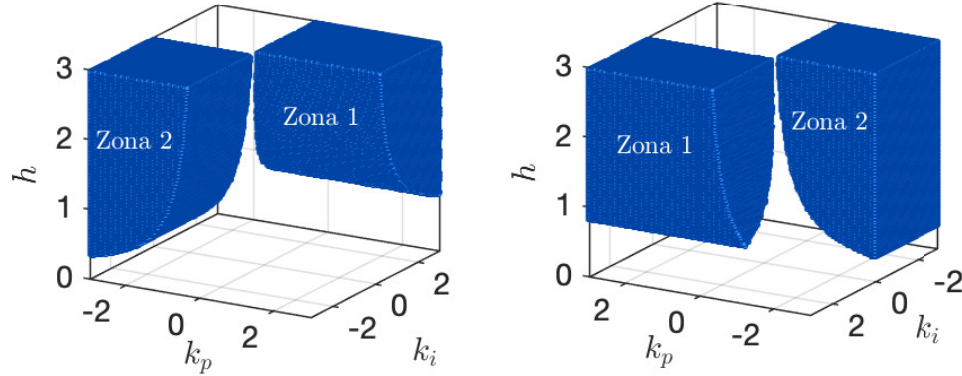


Figura 3.5. Dos rotaciones de la región de estabilidad de cuerda en el espacio de parámetros de diseño del pelotón.

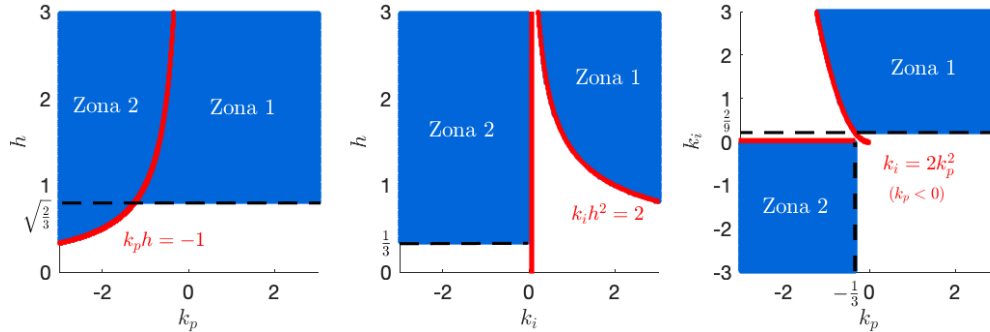


Figura 3.6. Vistas laterales de la región tridimensional. En rojo: se indican las curvas analíticas que delimitan las zonas de estabilidad de cuerda. En línea segmentada: se especifican los límites de visualización de las zonas de estabilidad de cuerda, provenientes del rango finito de valores que se han graficado.

3.4.1. Discusión

Las zonas del Teorema 1 definen regiones sólidas en el espacio de parámetros k_p , k_i y h , para las cuales el pelotón es estable en cuerda. Cada punto de estas regiones representa un diseño particular del control del pelotón que lo hace compatible con esta propiedad. En la Figura 3.5 se muestra una gráfica de dicho sólido para un rango de valores acotado, definido por $|k_p| < 3$, $|k_i| < 3$ y $h < 3$, junto a dos de sus rotaciones. Se escoge este rango ya que permite apreciar la curvatura de la región en torno al origen. Para destacar las restricciones activas en cada una de las superficies, en la Figura 3.6 se muestran vistas laterales de la gráfica tridimensional anterior, donde estas superficies límite se indican como contornos remarcados en color rojo. Con apoyo de estas figuras, a continuación se discuten algunas implicancias interesantes del Teorema 1.

Parámetros de controlador fijo y h variable:

El Teorema 1 indica que, dado un controlador ya especificado, no siempre es posible diseñar una política de espaciado que defina un pelotón estable en cuerda. La capacidad del pelotón de conservar esta propiedad dependerá de la sintonía particular del controlador que se haya escogido. Esto resulta más directo de evidenciar a través del Corolario 1 donde, por ejemplo, un controlador de parámetros $k_p > 0$ y $k_i < 0$ simplemente no admite estabilidad de cuerda, independientemente del diseño de la política de espaciado. En el resto de los casos, la existencia de un valor de h que sea compatible con esta propiedad dependerá del tipo de controlador que se haya especificado. Si el controlador es de fase mínima, i.e., si k_p y k_i tienen mismo signo, entonces siempre podrá escogerse una política de espaciado inter-vehicular tal que el pelotón adquiera estabilidad de cuerda. Más específicamente, para este tipo de controladores existe un valor de h mínimo, asociado a un espaciamiento inter-vehicular mínimo de estado estacionario, por sobre el cual el pelotón siempre mantiene esta propiedad. Sin embargo, desde un punto de vista práctico debe considerarse que un diseño de h alto traerá consigo una degradación de la eficiencia de transporte, ya que los vehículos intentarán mantener un mayor espaciamiento en el traslado, y con ello, una menor cantidad de agentes podrá movilizarse a través de una misma carretera durante un intervalo de tiempo definido. Por otro lado, si el controlador es de fase no mínima y $k_p < 0$ y $k_i > 0$, entonces la existencia de una política de espaciado que permita estabilidad de cuerda dependerá del valor de la magnitud relativa de las ganancias del controlador, de manera en que si $-\frac{1}{k_p} \geq \sqrt{\frac{2}{k_i}}$ entonces existirá un rango *acotado* de valores de h que permite estabilidad de cuerda en el pelotón, mientras que si $-\frac{1}{k_p} < \sqrt{\frac{2}{k_i}}$ entonces el controlador será directamente incompatible con estabilidad de cuerda. Las características recién mencionadas pueden apreciarse gráficamente en la Figura 3.7, donde se muestran las zonas de estabilidad de cuerda, ahora indicándose en color naranja las regiones donde los controladores asociados son de fase mínima y en color azul donde éstos son de fase no mínima.

Política de espaciado fija y controlador variable:

De las expresiones entregadas por el Teorema 1 resulta directo ver que para un valor de h determinado siempre es posible diseñar un controlador PI que garantice la estabilidad de cuerda del pelotón. Por lo tanto, si se quisiera mejorar la eficiencia de transporte a través de un menor valor de h (y con ello, un menor espaciado inter-vehicular de referencia), entonces será posible re-diseñar un controlador PI tal que el pelotón satisfaga estabilidad de cuerda. No obstante, es importante observar que la existencia teórica de valores de k_p y k_i que garantizan estabilidad de cuerda no necesariamente se traduce en lazos de control que sean factibles de implementar en la práctica, ya que éstos podrían tener anchos de banda demasiado altos, o señales de control de gran amplitud que sean imposibles de aplicar por propiedades físicas del sistema (por ejemplo, saturación de los actuadores, inercia del vehículo, etc.).

Resulta interesante observar que el análisis de los dos párrafos anteriores muestra diferencias importantes con respecto a resultados existentes en la literatura que demuestran el requerimiento de una política de espaciado mínima para evitar la inestabilidad de cuerda en pelotones con integración doble en el lazo abierto y con seguimiento del predecesor directo [18], [40]. En dichos trabajos se caracteriza el valor de h mínimo por debajo del cual se tiene inestabilidad de cuerda para todo controlador lineal perteneciente a una familia

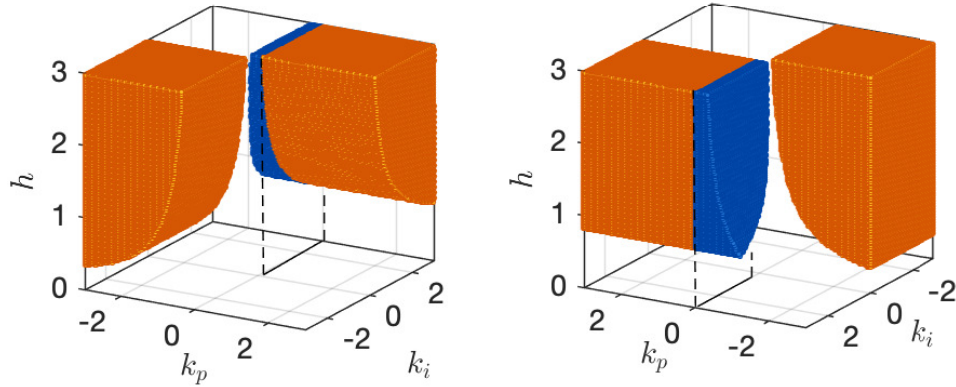


Figura 3.7. Dos rotaciones de la región de estabilidad de cuerda en el espacio de parámetros de diseño. En naranja se señala la región donde los controladores son de fase mínima, mientras que en azul se muestra la región donde los controladores son de fase no mínima. En línea segmentada se indica el corte de la región por el plano $k_p = 0$.

de controladores que cancela las dinámicas introducidas por la política de espaciado. Esta estructura de controlador fuerza un vínculo entre el valor de h y el diseño de los parámetros del controlador. En comparación, en el esquema estudiado se han considerado controladores que, si bien pertenece a la familia de controladores PI, admiten un diseño completamente independiente al de la política de espaciado. Dentro de esta estructura se ha demostrado que si se permite elección libre de las ganancias del controlador y de la política de espaciado, entonces no existe un valor de h mínimo para garantizar la estabilidad de cuerda del pelotón, pudiendo teóricamente escogerse cualquier valor de h que desee implementarse y diseñar consecuentemente un controlador (por ejemplo, de fase mínima) que garantice esta propiedad. Ahora bien, como se mencionó en el párrafo anterior, la posibilidad teórica de diseñar una política de espaciado arbitrariamente estrecha no implica que en la práctica este diseño sea posible de implementar, ya que esto implicaría ganancias del controlador de magnitud arbitrariamente alta, y con ello velocidades de navegación arbitrariamente altas, lo cual es impedido por limitaciones físicas del sistema como la potencia máxima de operación del motor, las limitaciones del sistema de frenado, la inercia del vehículo, etc.

3.4.2. Ejemplo de simulación

Para consolidar el análisis anterior se ilustran los efectos del compromiso de desempeño entre las variables de diseño a través de un ejemplo de simulación. En la Figura 3.8 se muestra el comportamiento temporal de un pelotón de $N = 15$ vehículos para distintos controladores y políticas de espaciado. Se consideran tres experimentos, en los cuales el vehículo líder inicia su movimiento desde reposo para seguir una trayectoria recta a una rapidez constante de 25[m/s] o 90 [km/hr]. A continuación, se simulan las dinámicas de los vehículos seguidores para evaluar el desempeño de control. Para el primer pelotón (primera fila), el controlador embebido en los agentes se ha sintonizado en los valores $k_p = 10$, $k_i = 25$ y se diseña el control para mantener un espaciado de 10[m] en estado estacionario, lo que define un pelotón estable en cuerda de acuerdo al Teorema 1. Supóngase ahora que heurísticamente

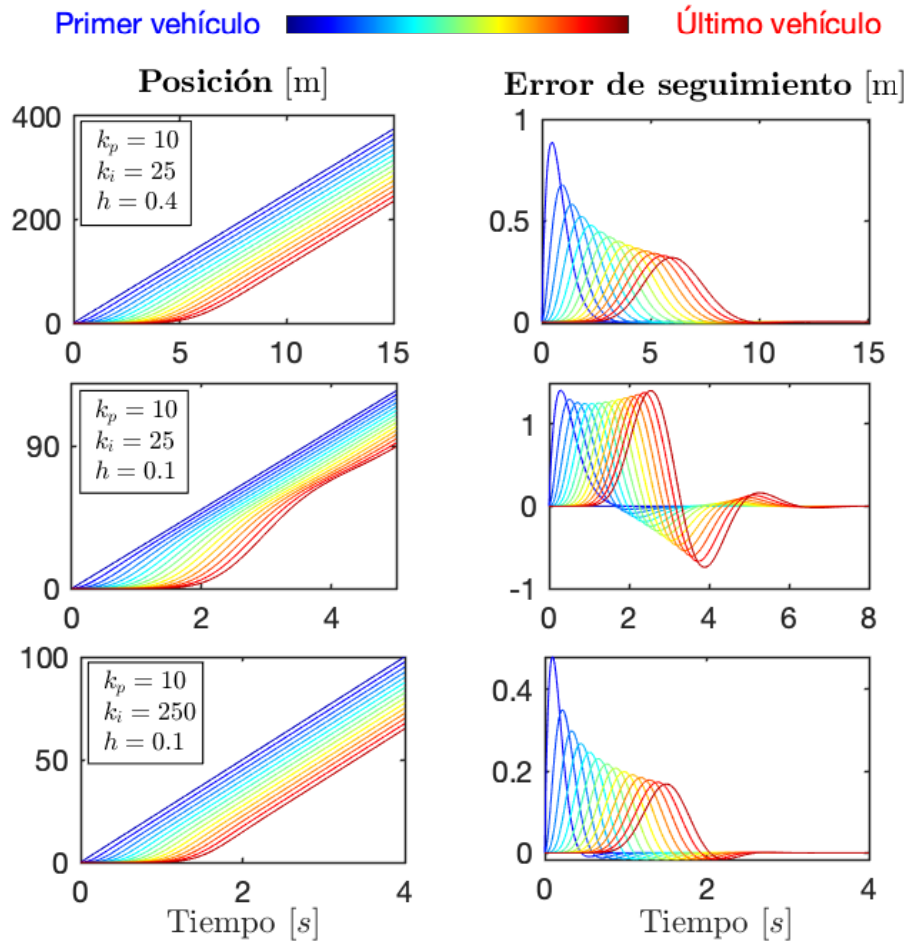


Figura 3.8. Comportamiento de un pelotón de $N = 15$ vehículos para distintos valores de los parámetros de diseño.

se desea reducir el espaciado inter-vehicular estacionario para que éste sea igual a 2,5[m] (segunda fila), manteniendo el mismo controlador, lo que en un contexto práctico permitiría aumentar la eficiencia del traslado (*throughput*). Una reducción arbitraria del parámetro h puede comprometer críticamente la seguridad del traslado al ocasionar amplificaciones del error de seguimiento, lo cual se manifiesta como oscilaciones crecientes de la posición de los agentes. En efecto, de acuerdo al teorema enunciado, los valores anteriores definen un pelotón inestable en cuerda. En consecuencia, basándose en el resultado presentado es posible re-sintonizar el controlador apropiadamente para restablecer la estabilidad de cuerda del pelotón manteniendo el espaciado reducido (tercera fila). Luego, la caracterización de la región de estabilidad de cuerdas del pelotón permite diseñar un controlador y una política de espaciado que garantice el requerimiento fundamental de estabilidad de cuerda en este tipo de esquemas.

3.5. Conclusión del capítulo

En este capítulo se estudió una configuración particular de pelotón homogéneo de tiempo continuo donde los vehículos son modelados como integradores simples, el control de la formación se realiza distribuidamente a través de controladores de tipo proporcional-integrativo, y se implementa una política de espaciado dependiente de la velocidad. El control de este esquema queda caracterizado por las ganancias del controlador y la constante de time headway asociada a la política de espaciado. Se realiza un análisis de los lazos de control locales de los vehículos, determinándose las condiciones necesarias y suficientes sobre los parámetros de diseño del pelotón que permiten obtener su estabilidad interna y ganancia de lazo menor o igual a uno. Estos resultados intermedios se intersectan para obtener el resultado principal del capítulo, que son las condiciones necesarias y suficientes sobre las ganancias del controlador y la constante de time headway para lograr estabilidad de cuerda en el pelotón. Finalmente, se discuten estos resultados y se presenta un ejemplo de simulación temporal del pelotón para distintos diseños de su control.

ANÁLISIS EN TIEMPO DISCRETO

En el presente capítulo se considera nuevamente un pelotón de vehículos y se estudia la propiedad de estabilidad de cuerda, sin embargo, en este caso el análisis se hace en el dominio de tiempo discreto en vez de tiempo continuo. Esto es motivado por el hecho que en la aplicación práctica es natural que los controladores diseñados se implementen de forma digital, por lo que es importante caracterizar los parámetros compatibles con estabilidad de cuerda en este dominio. Al igual que en el capítulo anterior, el pelotón implementa una política de espaciado dependiente de la velocidad, y los vehículos son modelados homogéneamente como integradores simples controlados localmente por controladores de tipo proporcional-integrativo.

El objetivo del capítulo es caracterizar las condiciones necesarias y suficientes sobre los parámetros de diseño del pelotón, siendo éstos las ganancias del controlador y la constante time headway, para obtener estabilidad de cuerda. El proceso de análisis para encontrar dichas condiciones se desarrolla como sigue: en la primera sección se describe el modelo matemático del pelotón y se precisan las definiciones de la política de espaciado y estabilidad de cuerda consideradas para tiempo discreto. En la segunda sección, este modelo se analiza para caracterizar los valores de los parámetros de diseño que permiten obtener estabilidad interna en el lazo cerrado de los vehículos individuales. De manera independiente a este resultado, en la tercera sección se caracterizan los valores los parámetros de diseño que garantizan la atenuación de los errores de seguimiento de los agentes cuando éstas señales se propagan a los vehículos seguidores. En la cuarta sección, los resultados de las dos secciones anteriores se combinan para caracterizar los diseños de pelotones compatibles con estabilidad de cuerda. Las implicancias de este resultado final se discute con apoyo de simulaciones del comportamiento temporal del pelotón. Finalmente, en la quinta sección se presentan las conclusiones del capítulo.

4.1. Descripción de la configuración

En este capítulo se considera un pelotón de vehículos como un sistema lineal de tiempo discreto, compuesto por $N \in \mathbb{N}$ vehículos que se trasladan por una carretera recta unidimensional, en una formación donde cada vehículo sigue a su predecesor directo manteniendo respecto a éste una distancia determinada. En esta disposición, se denomina $y_i(k)$ a la posición del i -ésimo vehículo en la cadena, donde $1 \leq i \leq N$, y $\ell_i(k) = y_{i-1}(k) - y_i(k)$ es la distancia entre dicho vehículo y su predecesor. El índice $k \in \mathbb{N}_0$ denota el avance del tiempo

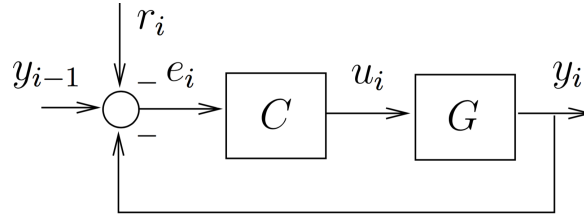


Figura 4.1. Lazo de control de un vehículo.

discreto. Ciertamente, el índice temporal k supone que existe un muestreo cada Δ segundos de las correspondientes señales de tiempo continuo provenientes del sistema subyacente. Por lo tanto, el intervalo de muestreo Δ queda implícito en la notación de este capítulo, entendiéndose que el dato en el instante k de una señal determinada corresponde a la muestra en el instante $k\Delta$.

El objetivo de control del pelotón consiste en que cada vehículo mantenga durante su traslado una distancia respecto a su predecesor igual a una referencia de control $r_i(k)$ determinada. Para lograr este fin, cada vehículo tiene disponible en cada instante de tiempo el valor de las mediciones de posición actual de su predecesor directo, su propia posición actual, y su propia posición en el instante de tiempo anterior. Estos datos son utilizados por un controlador embebido en el i -ésimo vehículo para computar, en cada instante temporal, el error de seguimiento $e_i(k) = l_i(k) - r_i(k)$, y con este valor calcular la actuación $u_i(k)$ aplicada a la planta.

Por lo tanto, considerando las señales anteriores el lazo de control de cada vehículo se puede representar como el esquema de la Figura 4.1, donde $G(z)$ y $C(z)$ corresponden respectivamente a los modelos de la planta y el controlador local. El pelotón se supone homogéneo, por lo que este lazo de control es idéntico para todos los vehículos del pelotón. Respecto a los modelos dinámicos particulares, se considera que la planta corresponde al modelo de un integrador simple con retardo de una muestra, es decir,

$$G(z) = \frac{1}{z-1}.$$

Luego, la señal de actuación u_i de cada vehículo representa la rapidez de cada agente. Por otro lado, el controlador se define de tipo proporcional-integrativo, con la estructura

$$C(z) = k_p + k_i \frac{z}{z-1}, \quad (4.1.1)$$

donde $k_p, k_i \in \mathbb{R} - \{0\}$.

Observación 10. En esta configuración la ganancia unitaria considerada para la planta no representa una pérdida de generalidad en el esquema, ya que para ganancias de planta distintas a la unidad éstas corresponderán a un escalamiento proporcional en las ganancias del controlador.

Observación 11. En algunos casos es útil considerar controladores de la forma $k_p + \frac{k_i}{z-1}$, es decir, tal que el término integral es estrictamente propio. El incluir o no retardo en el integrador del controlador no cambia la naturaleza del control con el que se está trabajando.

En efecto, considere la estructura de controlador cuya integración incluye un retardo de una muestra, i.e.,

$$\tilde{C}(z) = k_p + \frac{k_i}{z-1}.$$

Al ocupar las ganancias $\tilde{k}_p = k_p - k_i$ y $\tilde{k}_i = k_i$ en (4.1.1) se tiene

$$\begin{aligned} C(z) &= \tilde{k}_p + \tilde{k}_i \frac{z}{z-1} \\ &= \frac{(\tilde{k}_p + \tilde{k}_i)z - \tilde{k}_p}{z-1} \\ &= \frac{k_p z + k_i - k_p}{z-1} \\ &= \tilde{C}(z), \end{aligned}$$

por lo que ambas estructuras pertenecen a la misma familia de controladores.

De la Figura 4.1 resulta directo ver que el lazo de control del vehículo i -ésimo tiene como señales de entrada la posición del vehículo predecesor, de índice $i-1$, y la referencia de distancia, y como señal de salida la posición del propio vehículo i . Se denomina $T(z)$ a la función de sensibilidad que describe el efecto de dichas entradas sobre esta salida. Por otro lado, al considerar la interconexión de los lazos de control de dos vehículos consecutivos, resulta directo demostrar que $T(z)$ también caracteriza el efecto dinámico del error de seguimiento del vehículo i sobre el error de seguimiento del vehículo que le sigue, de índice $i+1$. Por lo tanto, si se quisiera encontrar el efecto de la propagación del error de seguimiento del lazo de control de cierto vehículo en el pelotón sobre el error de seguimiento del lazo cerrado de cualquier otro vehículo más atrás en la cadena, se puede aplicar sucesivamente este argumento para encontrar dicho efecto. De esta manera, el efecto del error de control del vehículo i -ésimo sobre el error del vehículo j -ésimo, con $j \geq i$, está caracterizado por la relación

$$E_j(z) = T(z)^{j-i} E_i(z), \quad (4.1.2)$$

de donde es explícito que $T(z)$ modela la propagación a lo largo del pelotón de los errores de seguimiento de cada vehículo.

4.1.1. Política de espaciado

Bajo los mismos criterios de seguridad que los explicados para el pelotón de tiempo continuo, se considera para el pelotón de tiempo discreto recién descrito una política de espaciado dependiente de la velocidad. Se recuerda que en este tipo de formación, la referencia de distancia que cada vehículo mantiene respecto a su predecesor es una cantidad variable que depende de la rapidez instantánea del mismo agente, por lo que colectivamente en el pelotón, a mayor rapidez de navegación se tendrán mayores distanciamientos inter-vehiculares. En tiempo discreto, esta idea se traduce en que la referencia de distancia inter-vehicular para el agente i -ésimo incorpora la información de cambio de posición de dicho agente en una muestra. Se considerará la implementación de esta idea a través de la estructura

$$r_i(k) = \varepsilon_i + h(y_i(k) - y_i(k-1)), \quad (4.1.3)$$

donde ε_i es un valor constante no negativo que representa el espaciado mínimo que se desea que cada agente mantenga respecto a su predecesor directo durante el traslado, y $h > 0$ es la

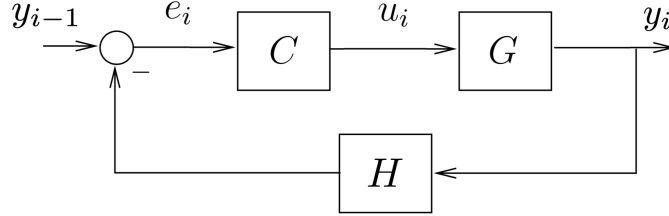


Figura 4.2. Lazo de control equivalente.

constante de time headway, la cual que pondera la importancia de la rapidez instantánea de cada agente en la política de espaciado. Tanto ε_i y h son parámetros de diseño del pelotón.

Observación 12. En la definición de $r_i(k)$ en (4.1.3) no se especifica el valor de Δ , a pesar que este es importante para calcular la rapidez en tiempo discreto. Una definición más adecuada sería

$$r_i(k) = \varepsilon_i + h \frac{(y_i(k) - y_i(k-1))}{\Delta},$$

sin embargo, sin pérdida de generalidad podemos omitir el valor de Δ pues éste puede ser incluido en el valor de h , lo que nos llevaría nuevamente a una referencia de la forma en (4.1.3).

Para el análisis de propagación de los errores el valor de ε_i resulta irrelevante. Luego, por simplicidad se supondrá para las secciones análisis de este capítulo que $\varepsilon_i = 0$ para todo vehículo en el pelotón. Por lo tanto, considerando la referencia definida en (4.1.3), la cual depende linealmente de las señales existentes en el lazo de control, se puede representar el lazo de control de la Figura 4.1 como el esquema que se muestra en la Figura 4.2, donde

$$H(z) = (1 + h) - hz^{-1}$$

es un bloque lineal auxiliar que permite hacer esta representación.

Observación 13. Es importante destacar que en el análisis en tiempo continuo el bloque H correspondiente es impropio. Sin embargo, en dicho setup se considera que la velocidad se puede medir directamente con un instrumento, por lo que la política de espaciado que en la realidad se usa no incluye un derivador directamente en su implementación. En tiempo discreto en cambio, se considera que la velocidad se calcula en base a la diferencia $y_i(k) - y_i(k-1)$, lo que implica que el bloque H es una función de transferencia propia, y que por lo tanto puede implementarse en un lazo real.

Al hacer esta re-interpretación del lazo de control, resulta directo demostrar que la función de sensibilidad $T(z)$ asociada es

$$T(z) = \frac{C(z)G(z)}{1 + C(z)G(z)H(z)}, \quad (4.1.4)$$

la cual escrita en términos de los parámetros de diseño del pelotón (k_p, k_i, h) está dada por

$$T(z) = \frac{z((k_p + k_i)z - k_p)}{z^3 + ((k_p + k_i)(1 + h) - 2)z^2 + (1 - k_p(1 + h) - h(k_p + k_i))z + k_p h}. \quad (4.1.5)$$

4.1.2. Estabilidad de cuerda

Debido a la interconexión de los vehículos en el pelotón existirá propagación de los errores de seguimiento de los agentes a través del pelotón. La esencia de la propiedad de estabilidad de cuerda aplicada a esquemas de tiempo discreto se mantiene respecto a la de tiempo continuo, donde esta propiedad implica que los errores de seguimiento de los agentes de un pelotón nunca se amplifican al propagarse hacia los vehículos seguidores de la cadena, independientemente de qué tan numerosa ésta sea. En consecuencia, la definición de estabilidad de cuerda que se considera para este capítulo se mantiene idéntica respecto a la definición de tiempo continuo, con la única diferencia siendo el dominio de las señales y sistemas involucrados. Luego, se define la estabilidad de cuerda de un pelotón homogéneo como sigue:

Definición 3. *Un pelotón homogéneo se dice ser estable en cuerda si la función de transferencia (de los errores) entre agentes consecutivos, es decir, la transferencia $T(z)$ tal que $E_i(z) = T(z)E_{i-1}(z)$, satisface $\|T(z)\|_\infty \leq 1$. De lo contrario, el pelotón se dice ser inestable en cuerda.*

Note que bajo esta definición, para que un pelotón sea estable en cuerda se requiere que los lazos de control de los vehículos que lo componen sean internamente estables. Por otra parte, debido que todos los sistemas involucrados son lineales e invariantes en el tiempo, la condición sobre la norma infinito de $T(z)$ para obtener estabilidad de cuerda equivale a exigir que el diseño del pelotón satisfaga $|T(e^{j\omega})| \leq 1$ para todo $\omega \in [0, 2\pi]$, provisto que $T(z)$ es estable.

El interés del presente capítulo está en estudiar la propiedad de estabilidad de cuerda del pelotón de vehículos de tiempo discreto recién definido. En particular, el objetivo es caracterizar las condiciones necesarias y suficientes que deben satisfacer los parámetros del controlador k_p y k_i y la constante de time headway h para garantizar que el pelotón sea estable en cuerda. Las secciones restantes del capítulo se dedican a detallar este análisis donde, bajo el mismo método ocupado en el capítulo anterior, se aborda la obtención de las condiciones para estabilidad de cuerda intersectando las condiciones necesarias y suficientes para obtener, por una parte, estabilidad interna en los lazos de control presentes en los vehículos, y por la otra, ganancia en magnitud de dichos lazos cerrados menor o igual a uno.

4.2. Análisis de estabilidad interna

El primer objetivo de control es que el lazo de control de cada vehículo sea internamente estable. Las condiciones sobre los parámetros de diseño del pelotón para los cuales se garantiza esta propiedad se detallan en el siguiente lema.

Lema 5. *El pelotón de vehículos descrito en la sección anterior será internamente estable si y solo si los parámetros k_p , k_i y h simultáneamente satisfacen:*

$$|k_p h| < 1, \quad (4.2.1)$$

$$hk_i + k_p + hk_i k_p + h^2 k_i k_p + hk_p^2 > 0, \quad (4.2.2)$$

$$k_i > 0, \quad (4.2.3)$$

$$(1 + 2h)(k_i + 2k_p) - 4 < 0. \quad (4.2.4)$$

Demostración. Para obtener la región de parámetros de diseño que garantizan estabilidad interna, se buscan las condiciones necesarias y suficientes sobre k_p , k_i y h tales que las raíces del polinomio del lazo cerrado de cada uno de los vehículos se encuentren dentro del círculo unitario del plano complejo.

De la transferencia del lazo de control de cada vehículo obtenida en (4.1.5), resulta directo que el polinomio de lazo cerrado está dado por:

$$z^3 + [(k_p + k_i)(1 + h) - 2]z^2 + [1 - k_p(1 + h) - h(k_p + k_i)]z + k_p h.$$

De aquí, aplicando el Lema 2 (ver Capítulo 2 Sección 2.2.1), el cual especifica el Criterio de Jury para un polinomio de orden 3, y tras un proceso de manipulación algebraica de las ecuaciones resultantes se obtienen las condiciones de estabilidad interna (4.2.1) - (4.2.4). ■

Observación 14. *Como caso particular del lema anterior, resulta interesante notar que si se considera $k_p > 0$, entonces las condiciones analíticas para diseñar un pelotón internamente estable se reducen a*

$$0 < k_p < 2, \quad 0 < k_i < 4 - 2k_p, \quad 0 < h < \frac{4 - k_i - 2k_p}{2k_i + 4k_p}.$$

Gráficamente, dos rotaciones de la región determinada por las condiciones del Lema 5 se muestran en la Figura 4.3. Esta figura muestra, en el espacio de los parámetros de diseño k_p , k_i y h , todo el rango de valores de k_p y k_i donde existen diseños de control internamente estables, mientras que los valores de h fueron limitados hasta $h = 10$ para poder apreciar la curvatura de la región. De la gráfica se observa que para obtener estabilidad interna de los lazos son admisibles diseños de controladores con valores tanto positivos como negativos para la ganancia proporcional k_p , pero sólo valores positivos para la ganancia integrativa k_i . Por otro lado, valores más altos de k_p conllevan una región más restrictiva para el diseño de k_i y h , los cuales en ese caso deberán ser cercanos a cero y positivos para conservar la estabilidad interna del lazo.

4.3. Análisis de magnitud

A continuación se enuncia el resultado principal de esta sección, el cual consiste en un teorema que caracteriza las condiciones necesarias y suficientes sobre los parámetros de diseño del pelotón que garantizan que la magnitud de la transferencia en lazo cerrado de los vehículos individuales sea menor o igual a uno. Observe que este resultado se ha derivado sin requerir que dichos lazos sean internamente estables, por lo que el cumplimiento de estas condiciones puede definir lazos de control tanto estables como inestables.

Observación 15. *En la demostración del siguiente teorema se hace uso de varias identidades matemáticas listadas en el apéndice como proposiciones. Estas proposiciones se han separado del desarrollo principal para simplificar la exposición.*

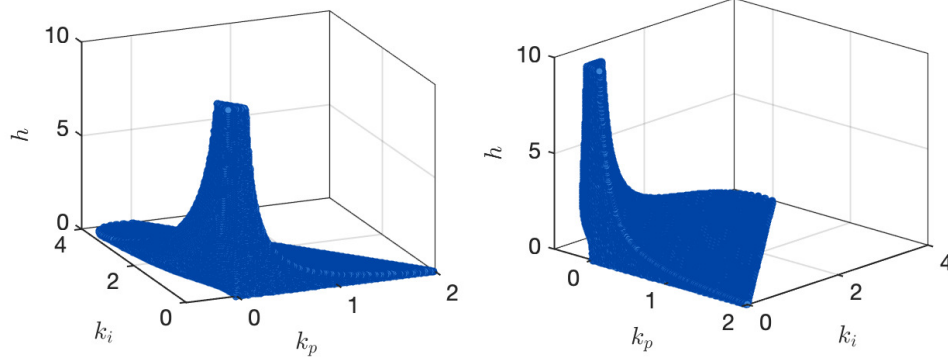


Figura 4.3. Dos rotaciones de la región que admite estabilidad interna.

Teorema 2. Considere el pelotón de vehículos descrito en la sección anterior. Defina:

$$\begin{aligned}\alpha &= ((k_i + 2k_p)(1 + h) - 2)((k_i + 2k_p)h - 2), \\ \beta &= 2 - 2k_i - 2hk_i + hk_i^2 + h^2k_i^2 - 2k_p + 4hk_p + 2hk_ik_p + 2h^2k_ik_p + 2hk_p^2 + 2h^2k_p^2, \\ \gamma &= k_i(hk_i(1 + h) - 2).\end{aligned}$$

La transferencia del lazo de control de los vehículos individuales satisface $|T(e^{j\omega})| \leq 1$ para todo $\omega \in [0, 2\pi]$ si y sólo si las constantes de diseño de los lazos individuales cumplen simultáneamente las condiciones siguientes:

$$\begin{aligned}\alpha &\geq 0, \\ \beta &\geq -\sqrt{\alpha\gamma}, \\ \gamma &\geq 0.\end{aligned}$$

Demostración. Se definen los polinomios de numerador y denominador de $T(z)$ en (4.1.5) como $N(z)$ y $D(z)$, respectivamente. Luego, la condición sobre la ganancia de $T(z)$ equivale a imponer para todo $\omega \in [0, 2\pi]$:

$$\begin{aligned}|T(e^{j\omega})|^2 &\leq 1, \\ \Leftrightarrow \frac{|N(e^{j\omega})|^2}{|D(e^{j\omega})|^2} &\leq 1 \\ \Leftrightarrow |D(e^{j\omega})|^2 - |N(e^{j\omega})|^2 &\geq 0.\end{aligned}\tag{4.3.1}$$

Al expresar esta condición en términos de los parámetros de diseño del pelotón, se tiene para $|N(e^{j\omega})|^2$:

$$\begin{aligned}|N(e^{j\omega})|^2 &= |N(e^{j\omega})e^{-j\omega}|^2 \\ &= ((k_p + k_i)\cos(\omega) - k_p)^2 + (k_p + k_i)^2\sin^2(\omega) \\ &= (k_p + k_i)^2 - 2(k_p + k_i)k_p\cos(\omega) + k_p^2.\end{aligned}$$

Por otro lado, para el cálculo de $|D(e^{j\omega})|^2$ se aplica la Proposición 1 (ver Apéndice 4.A) al polinomio $D(e^{j\omega}) = z^3 + ((k_p + k_i)(1 + h) - 2)z^2 + (1 - k_p(1 + h) - h(k_p + k_i))z + k_p h$, de donde se obtiene:

$$\begin{aligned} |D(e^{j\omega})|^2 = & 6 - 4k_i - 6hk_i + k_i^2 + 2hk_i^2 + 2h^2k_i^2 - 6k_p - 8hk_p + 2k_ik_p + 6hk_ik_p + 6h^2k_ik_p \\ & + 2k_p^2 + 6hk_p^2 + 6h^2k_p^2 + 2(-4 + 2k_i + 4hk_i - hk_i^2 - h^2k_i^2 + 4k_p + 7hk_p - k_ik_p \\ & - 4hk_ik_p - 4h^2k_ik_p - k_p^2 - 4hk_p^2 - 4h^2k_p^2) \cos(\omega) + 2(1 - hk_i - k_p - 4hk_p + hk_ik_p \\ & + h^2k_ik_p + hk_p^2 + h^2k_p^2) \cos(2\omega) + 2hk_p \cos(3\omega). \end{aligned}$$

Por lo tanto, la condición (4.3.1) de atenuación del error a lo largo del pelotón puede escribirse como la suma de cosenos

$$|D(e^{j\omega})|^2 - |N(e^{j\omega})|^2 = a_0 + a_1 \cos(\omega) + a_2 \cos(2\omega) + a_3 \cos(3\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in [0, 2\pi],$$

donde

$$\begin{aligned} a_0 = & 2(3 - 2k_i - 3hk_i + hk_i^2 + h^2k_i^2 - 3k_p - 4hk_p + 3hk_ik_p + 3h^2k_ik_p + 3hk_p^2 + 3h^2k_p^2), \\ a_1 = & 2(-4 + 2k_i + 4hk_i - hk_i^2 - h^2k_i^2 + 4k_p + 7hk_p - 4hk_ik_p - 4h^2k_ik_p - 4hk_p^2 - 4h^2k_p^2), \\ a_2 = & 2(1 - hk_i - k_p - 4hk_p + hk_ik_p + h^2k_ik_p + hk_p^2 + h^2k_p^2), \\ a_3 = & 2hk_p. \end{aligned}$$

A continuación, al aplicar la Proposición 2(c) (ver Apéndice 4.A) se obtiene la misma condición en términos de potencias de cosenos, esto es,

$$|D(e^{j\omega})|^2 - |N(e^{j\omega})|^2 = \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \cos(\omega) + \tilde{a}_2 \cos^2(\omega) + \tilde{a}_3 \cos^3(\omega) \geq 0 \quad \forall \omega \in [0, 2\pi],$$

donde

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 = & 2(2 - 2k_i - 2hk_i + hk_i^2 + h^2k_i^2 - 2k_p + 2hk_ik_p + 2h^2k_ik_p + 2hk_p^2 + 2h^2k_p^2), \\ \tilde{a}_1 = & 2(-4 + 2k_i + 4hk_i - hk_i^2 - h^2k_i^2 + 4k_p + 4hk_p - 4hk_ik_p - 4h^2k_ik_p - 4hk_p^2 - 4h^2k_p^2), \\ \tilde{a}_2 = & 4(1 - hk_i - k_p - 4hk_p + hk_ik_p + h^2k_ik_p + hk_p^2 + h^2k_p^2), \\ \tilde{a}_3 = & 8hk_p. \end{aligned}$$

Luego, se aplica el cambio de variable $\cos(\omega) = \frac{1-z}{z+1}$ con $z = \tan^2(\omega/2)$, $\omega \in [0, 2\pi]$.

Dado que $\text{Rec } z = \mathbb{R}_0^+$, se tiene equivalentemente

$$\begin{aligned} \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 \frac{1-z}{z+1} + \tilde{a}_2 \left(\frac{1-z}{z+1} \right)^2 + \tilde{a}_3 \left(\frac{1-z}{z+1} \right)^3 & \geq 0 \quad \forall z \geq 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\tilde{a}_0(z+1)^3 + \tilde{a}_1(1-z)(z+1)^2 + \tilde{a}_2(1-z)^2(z+1) + \tilde{a}_3(1-z)^3}{(z+1)^3} & \geq 0 \quad \forall z \geq 0 \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow (\tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 - \tilde{a}_3)z^3 + (3\tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 + 3\tilde{a}_3)z^2 + (3\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 - 3\tilde{a}_3)z + (\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \tilde{a}_3) \geq 0 \quad \forall z \geq 0.$$

Por lo tanto, la condición para garantizar atenuación del error de seguimiento a lo largo del pelotón se reduce a encontrar los diseños en h , k_p y k_i apropiados tales que el polinomio

$P(z) : p_3 z^3 + p_2 z^2 + p_1 z + p_0$, con:

$$\begin{aligned}
p_3 &= \tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 - \tilde{a}_3 \\
&= 4((k_i + 2k_p)(1 + h) - 2)((k_i + 2k_p)h - 2), \\
p_2 &= 3\tilde{a}_0 - \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 + 3\tilde{a}_3 \\
&= 8(2 - 2k_i - 2hk_i + hk_i^2 + h^2k_i^2 - 2k_p + 4hk_p + 2hk_ik_p + 2h^2k_ik_p + 2hk_p^2 + 2h^2k_p^2), \\
p_1 &= 3\tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 - \tilde{a}_2 - 3\tilde{a}_3 \\
&= 4k_i(hk_i(1 + h) - 2), \\
p_0 &= \tilde{a}_0 + \tilde{a}_1 + \tilde{a}_2 + \tilde{a}_3 \\
&= 0,
\end{aligned}$$

sea no-negativo para todo $z \geq 0$. Ahora bien, al ser $p_0 = 0$, se tiene que $P(z)$ puede escribirse como $z(p_3 z^2 + p_2 z + p_1)$. Luego, la condición $P(z) \geq 0$ para todo $z \geq 0$ ocurre si y sólo si $p_3 z^2 + p_2 z + p_1 \geq 0$ para todo $z \geq 0$. Entonces, para encontrar las condiciones necesarias y suficientes sobre los parámetros de diseño que permiten satisfacer esta última desigualdad puede aplicarse la Proposición 3 del Apéndice 4.A, con lo que se obtienen las condiciones sobre los coeficientes:

$$\begin{aligned}
p_3 &\geq 0, \\
p_2 &\geq -\sqrt{4p_3 p_1}, \\
p_1 &\geq 0.
\end{aligned}$$

Así, tras simplificar ligeramente las desigualdades anteriores, se obtiene el conjunto reducido de condiciones:

$$\begin{aligned}
\alpha &\geq 0, \\
\beta &\geq -\sqrt{\alpha\gamma}, \\
\gamma &\geq 0,
\end{aligned}$$

donde

$$\begin{aligned}
\alpha &= ((k_i + 2k_p)(1 + h) - 2)((k_i + 2k_p)h - 2), \\
\beta &= 2 - 2k_i - 2hk_i + hk_i^2 + h^2k_i^2 - 2k_p + 4hk_p + 2hk_ik_p + 2h^2k_ik_p + 2hk_p^2 + 2h^2k_p^2, \\
\gamma &= k_i(hk_i(1 + h) - 2).
\end{aligned}$$

■

4.4. Análisis de estabilidad de cuerda

Habiendo caracterizado por separado las condiciones analíticas sobre los parámetros de diseño del pelotón que permiten obtener estabilidad interna y magnitud menor o igual a uno en los lazos de control de los agentes, éstas se intersectan y reducen para hallar las condiciones que garantizan la estabilidad de cuerda del pelotón. El conjunto de restricciones resultante corresponde al aporte principal de este capítulo a la tesis, el cual se formula como el teorema a continuación.

Teorema 3. *Considere el pelotón de vehículos descrito en la sección anterior, y los valores de α , β y γ definidos en el Teorema 2. El pelotón será estable en cuerda de acuerdo a la Definición 3 si y sólo si las constantes de diseño de los lazos individuales satisfacen simultáneamente las condiciones siguientes:*

$$(k_i + 2k_p)(1 + h) \leq 2, \quad (4.4.1)$$

$$\beta \geq -\sqrt{\alpha\gamma}, \quad (4.4.2)$$

$$hk_i(1 + h) \geq 2, \quad (4.4.3)$$

$$|k_ph| < 1, \quad (4.4.4)$$

$$hk_i + k_p + hk_pk_i + h^2k_pk_i + hk_p^2 > 0. \quad (4.4.5)$$

Demostración. El pelotón será estable en cuerda de acuerdo a la Definición 3 si y sólo si $T(z)$ en (4.1.5) satisface $\|T(z)\|_\infty \leq 1$. Como $T(z)$ es un sistema lineal e invariante en el tiempo, esta condición equivale a requerir $|T(e^{j\omega})| \leq 1$ para todo $\omega \in [0, 2\pi]$, provisto que $T(z)$ es un sistema estable. Las condiciones necesarias y suficientes sobre los parámetros de diseño del pelotón que permiten obtener por separado cada una de estas dos últimas propiedades fueron encontradas respectivamente en las Secciones 4.3 y 4.2. Por lo tanto, se intersectan ambos conjuntos de restricciones obteniéndose la caracterización de los parámetros de diseño k_p , k_i y h que definen pelotones compatibles con estabilidad de cuerda.

Considerando los resultados de las Secciones 4.2 y 4.3, todos los posibles valores parámetros k_p , k_i y h que definen pelotones estabilidad de cuerda satisfacen simultáneamente las condiciones

$$\alpha \geq 0, \quad (4.4.6)$$

$$\beta \geq -\sqrt{\alpha\gamma}, \quad (4.4.7)$$

$$\gamma \geq 0, \quad (4.4.8)$$

$$|k_ph| < 1, \quad (4.4.9)$$

$$hk_i + k_p + hk_pk_p + h^2k_ik_p + hk_p^2 > 0, \quad (4.4.10)$$

$$k_i > 0, \quad (4.4.11)$$

$$(1 + 2h)(k_i + 2k_p) - 4 < 0, \quad (4.4.12)$$

donde

$$\alpha = ((k_i + 2k_p)(1 + h) - 2)((k_i + 2k_p)h - 2),$$

$$\beta = 2 - 2k_i - 2hk_i + hk_i^2 + h^2k_i^2 - 2k_p + 4hk_p + 2hk_ik_p + 2h^2k_ik_p + 2hk_p^2 + 2h^2k_p^2,$$

$$\gamma = k_i(hk_i(1 + h) - 2).$$

En este conjunto pueden simplificarse algunas de las condiciones. En primer lugar, puede verse que la expresión de α asociada a (4.4.6) corresponde al producto de los términos $(k_i + 2k_p)(1 + h) - 2$ y $(k_i + 2k_p)h - 2$, mientras que la expresión de lado izquierdo de (4.4.12) corresponde a la suma de los mismos términos. Como se tiene en (4.4.6) que el producto de ambos términos debe ser no-negativo, y en (4.4.12) que su suma debe ser negativa, entonces ambas condiciones equivalen a establecer

$$(k_i + 2k_p)(1 + h) - 2 \leq 0, \quad (4.4.13)$$

$$(k_i + 2k_p)h - 2 \leq 0, \quad (4.4.14)$$

notando que la igualdad nunca ocurrirá para ambas restricciones simultáneamente ya que $k_p, k_i \neq 0$. Ahora bien, de estas dos nuevas condiciones se observa que $(k_i + 2k_p)h - 2 \leq 0$ es redundante con respecto a $(k_i + 2k_p)(1+h) - 2 \leq 0$, ya que si $k_i + 2k_p \geq 0$ entonces la segunda condición es más restrictiva que la primera, mientras que si $k_i + 2k_p < 0$ entonces ninguna condición impone restricciones al conjunto solución. Debido a lo anterior, se concluye que las ecuaciones (4.4.6) y (4.4.12) pueden ser reemplazadas por la condición (4.4.13). Por otro lado, se observa que la imposición simultánea de las restricciones (4.4.8) y (4.4.11) equivale a establecer

$$hk_i(1+h) - 2 \geq 0. \quad (4.4.15)$$

Por lo tanto, el conjunto de condiciones (4.4.6) a (4.4.12) puede reescribirse equivalentemente como la intersección de las condiciones (4.4.13), (4.4.7), (4.4.9), (4.4.10), y (4.4.15), es decir, las desigualdades que se indican en el enunciado. ■

El Teorema 3 presenta condiciones analíticas sobre los parámetros de diseño del pelotón que permiten garantizar su estabilidad de cuerda. Una implicancia interesante de este resultado consiste en que existe un valor mínimo de la constante de time headway (asociada al espaciamiento inter-vehicular en estado estacionario) por debajo del cual el pelotón será inestable en cuerda independientemente del diseño de controlador. Esta consecuencia se establece en el corolario a continuación.

Corolario 2. *El pelotón descrito en la sección anterior es inestable en cuerda si $h < 1$.*

Demostración. Se busca incompatibilidad en al menos una de las condiciones del Teorema 3 al imponer $h < 1$. Se analiza considerando casos para k_p , comenzando por $k_p > 0$. En este caso, las desigualdades (4.4.1), (4.4.3) y (4.4.4) se reducen a

$$k_i + 2k_p \leq \frac{2}{1+h} \quad (4.4.16)$$

$$k_i \geq \frac{2}{h(1+h)} \quad (4.4.17)$$

$$0 < k_p < \frac{1}{h}.$$

Reemplazando (4.4.17) en (4.4.16) se tiene que para estabilidad de cuerda debe cumplirse necesariamente que

$$\begin{aligned} \frac{2}{h(1+h)} + 2k_p &\leq \frac{2}{1+h} \\ \Leftrightarrow k_p &\leq \frac{1}{1+h} - \frac{1}{h(1+h)} = \frac{h-1}{h(h+1)}. \end{aligned}$$

De esta última condición es claro que $h < 1$ entra en contradicción con $k_p > 0$, demostrándose lo pedido para este caso.

Por otro lado se considera el caso $k_p < 0$. Incorporando esta restricción en las ecuaciones (4.4.1), (4.4.3), y (4.4.4), éstas pueden reescribirse respectivamente como

$$k_i + 2k_p \leq \frac{2}{1+h}, \quad (4.4.18)$$

$$k_i \geq \frac{2}{h(1+h)}, \quad (4.4.19)$$

$$-\frac{1}{h} < k_p < 0. \quad (4.4.20)$$

Luego, de existir una región compatible con estabilidad de cuerda para $h < 1$, ésta correspondería a la intersección de dicha condición con las desigualdades (4.4.2), (4.4.5), y el conjunto (4.4.18)-(4.4.20) recién presentado. Ahora bien, ocupando el comando `Reduce` de Mathematica es posible obtener una expresión simplificada de la intersección de $h < 1$ con las condiciones (4.4.2), (4.4.19) y (4.4.20). Ésta viene dada por a unión de las regiones p y q definidas por

$$p \triangleq \left(k_p \leq -1 \text{ y } k_i + 4k_p > 0 \text{ y } \frac{2}{2k_p + k_i} \leq h < -\frac{1}{k_p} \right), \quad (4.4.21)$$

$$q \triangleq \left(-1 < k_p < 0 \text{ y } k_i + 2k_p > 2 \text{ y } \frac{2}{2k_p + k_i} \leq h < 1 \right). \quad (4.4.22)$$

A continuación se analiza la compatibilidad de la condición p en (4.4.21) con la condición (4.4.18). De p se tiene $k_i + 4k_p > 0$. Como $k_p < 0$ entonces también ocurre $k_i + 2k_p > 0$. Luego, de la última condición en p se tiene que

$$\frac{2}{h} \leq k_i + 2k_p.$$

Sin embargo, de (4.4.18) se tiene $k_i + 2k_p \leq 2/(1+h)$, por lo que ambas condiciones implican

$$\frac{2}{h} \leq \frac{2}{1+h},$$

lo cual es imposible de obtener con $h > 0$.

Por otra parte, se analiza la compatibilidad de q en (4.4.22) con la condición (4.4.18). Dado que $k_i + 2k_p > 2$, se debe cumplir

$$2 < k_i + 2k_p \leq \frac{2}{1+h},$$

lo cual implica que $1 < 1/(1+h)$, es decir, $-1 < h < 0$. Este resultado entra en contradicción con $h > 0$.

Como ambas condiciones p y q en (4.4.21) y (4.4.22) son incompatibles con (4.4.20), se concluye que $h < 1$ no admite solución de las condiciones para estabilidad de cuerda para $k_p < 0$. Con esto concluye la demostración. ■

4.4.1. Discusión

La Figura 4.4 muestra una representación gráfica de la región en el espacio de los parámetros de diseño del pelotón que es compatible con estabilidad de cuerda, la cual fue caracterizada analíticamente como resultado del Teorema 3. Asimismo, la Figura 4.5 muestra las vistas laterales de este sólido. Con apoyo de estas gráficas, a continuación se presentan algunas implicancias del Teorema 3 y se discuten algunas observaciones de estas figuras.

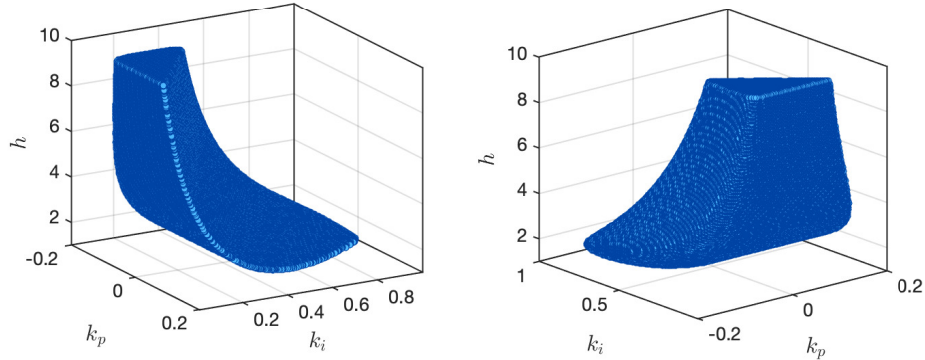


Figura 4.4. Región de estabilidad de cuerda, caso de tiempo discreto.

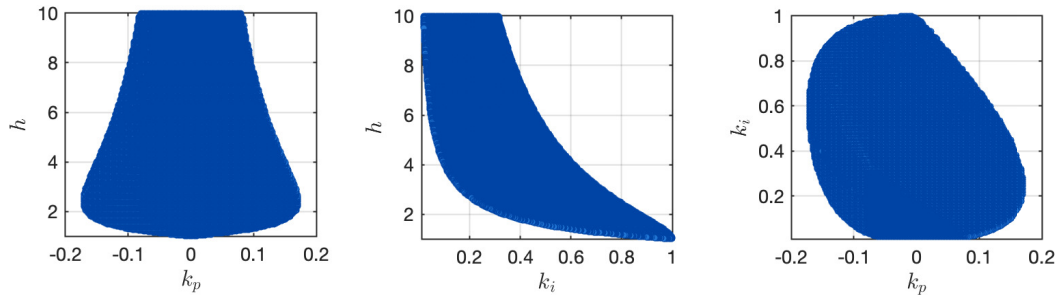


Figura 4.5. Vistas laterales de la región de estabilidad de cuerda.

Parámetros de controlador fijo y h variable:

Del Teorema 3 resulta directo ver que, dado un diseño de controlador determinado, no siempre será posible diseñar una política de espaciado que garantice la estabilidad de cuerda del pelotón (por ejemplo, basta fijar $k_i < 0$ y k_p grande para encontrar un conflicto entre (4.4.1) y (4.4.3)). Ahora bien, si la tendencia gráfica de las Figuras. 4.4 y 4.5 se conserva a medida que h crece, entonces ésta sugiere que para cada diseño de controlador cuyas ganancias k_p y k_i se encuentren dentro de la región indicada en la tercera columna de la Figura 4.5, existe un rango *acotado* de valores de h para el cual el pelotón conserva esta propiedad. En los puntos afuera de esta región, el pelotón será inestable en cuerda independientemente a la política de espaciado que se escoja. De esta manera, a diferencia de la estabilidad de cuerda en tiempo continuo, para un controlador fijo existe no sólo un valor de h mínimo para conservar la estabilidad de cuerda, sino también un h máximo sobre el cual el pelotón pierde esta propiedad. Esta pérdida de estabilidad de cuerda corresponde a la pérdida de la estabilidad interna del lazo de control y no a la adquisición de una ganancia de lazo superior a uno. De hecho, aquello puede comprobarse en las ecuaciones del Teorema 3, donde para valores de h suficientemente altos, las primeras tres desigualdades, asociadas a la garantía de una ganancia de lazo menor o igual a 1, siempre se satisfacen. En cambio, de la condición (4.4.9) proveniente del criterio de Jury resulta directo observar que, dado un controlador particular diseñado, la estabilidad interna del lazo de control de los vehículos se

pierde cuando h iguala o supera $1/|k_p|$.

Política de espaciado fija y controlador variable:

El Corolario 2 establece que si $0 < h < 1$ (es decir, si $h < \Delta$, si se estuviera considerando implícitamente el periodo de muestreo Δ en el valor de h como se explica en la Observación 12), entonces no se podrá tener estabilidad de cuerda en el pelotón independientemente del diseño del controlador. Luego, a diferencia de la región de estabilidad de cuerda de tiempo continuo, en tiempo discreto existe un valor de h mínimo global bajo el cual no existe controlador PI que consiga esta propiedad. Por otro lado, para un valor de h arbitrariamente alto se requiere un análisis teórico más acabado de las condiciones de estabilidad de cuerda para establecer si siempre será posible diseñar un correspondiente controlador que garantice esta propiedad. La tendencia gráfica sugiere que para valores de h cada vez más altos, las ganancias del controlador deberán tender a cero para conservar la estabilidad de cuerda del esquema. Este efecto puede comprobarse analíticamente en las condiciones del Teorema 3, donde (4.4.4) implica que k_p debe volverse pequeño en magnitud a medida que h crece para conservar esta propiedad, lo cual fuerza a k_i a tener magnitud pequeña a través de las condiciones (4.4.1) y (4.4.3).

Una observación interesante que se desprende de la Figura 4.5 es que el punto mínimo en h para lograr estabilidad de cuerda se encuentra ubicado en las coordenadas $k_p = 0$, $k_i = 1$, $h = 1$. En dicho punto, las restricciones (4.4.1), (4.4.2) y (4.4.3) se vuelven activas, mientras que las condiciones (4.4.4) y (4.4.5), provenientes de las restricciones de estabilidad interna, permiten holgura. Desde aquí, si se considera que el controlador es fijo, entonces al aumentar el valor de h en una cantidad ínfima $\delta > 0$ se infringen las condiciones (4.4.1) mas no (4.4.2) ni (4.4.3).

Controladores de fase mínima:

Analíticamente, la condición para obtener un cero de fase mínima en el controlador es $|k_p| < |k_p + k_i|$, lo que equivale a $k_i + 2k_p > 0$ al restringir la solución al conjunto $k_i > 0$, lo que siempre es válido en la región de estabilidad de cuerda. En las Figuras 4.6 y 4.7 se muestra la región de estabilidad de cuerda en el espacio de parámetros de diseño del pelotón distinguiéndose en color naranja el conjunto de diseños asociados a controladores de fase mínima, mientras que en color azul se indican los diseños de controladores de fase no mínima. Como se puede apreciar, la mayor parte de los diseños de pelotones estables en cuerda se consiguen utilizando controladores de fase mínima. Más aún, si la tendencia gráfica se proyecta para valores de h arbitrariamente altos, entonces ésta sugiere que dado un valor de h determinado siempre podría diseñarse un correspondiente controlador de fase mínima (con ganancias k_p , k_i pequeñas) que estabilice en cuerda al pelotón ya que las vecindades del origen en el plano k_p, k_i siempre contendrían puntos asociados a diseños de controladores de fase mínima (por ejemplo, al considerar $k_p > 0$).

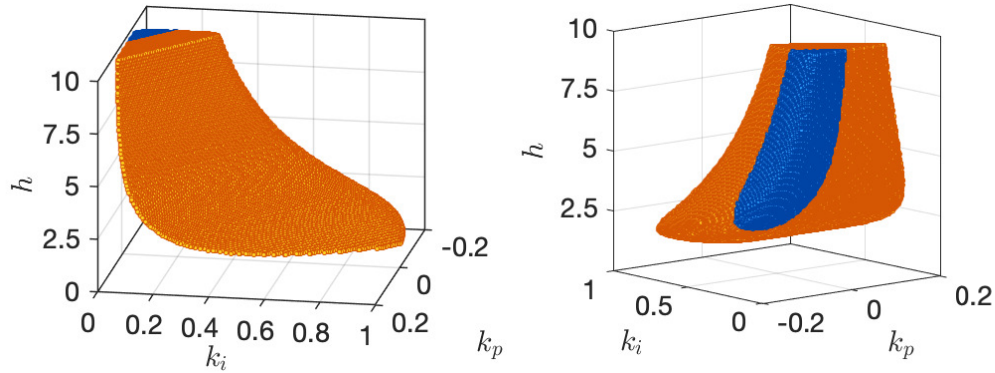


Figura 4.6. Región de estabilidad de cuerda, caso de tiempo discreto. La región naranja está asociada a controladores de fase mínima, mientras que la región azul representa controladores de fase no-mínima.

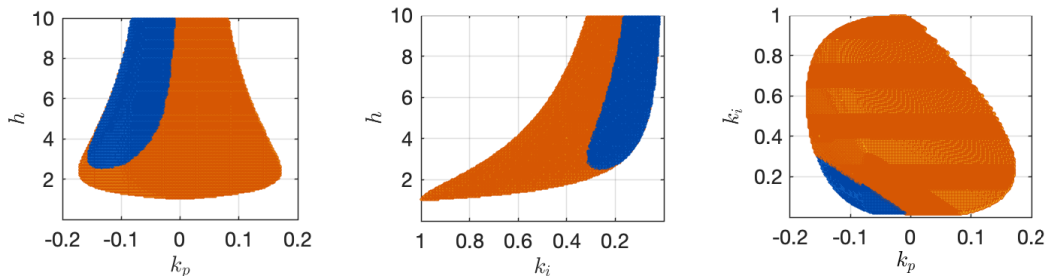


Figura 4.7. Vistas laterales de la región de estabilidad de cuerda.

4.4.2. Ejemplo de simulación

Como ilustración de la aplicación de los resultados anteriores, en la Figura 4.8 se compara el desempeño del pelotón presentado en este capítulo para tres distintos experimentos, donde en cada uno se fija una sintonía particular de las ganancias del controlador y de la constante de time headway. En todos los casos, el pelotón se compone de $N = 15$ vehículos los cuales se encuentran en reposo cuando el líder inicia el movimiento, desplazándose en una trayectoria recta con rapidez constante de $1[\text{m/muestra}]$. Se grafican los valores de posición y error de seguimiento en cada muestra para cada uno de los vehículos del pelotón, donde en azul se muestran las tendencias asociadas al vehículo líder, y hacia el rojo las de los últimos vehículos en la cadena. Para el primer experimento (primera fila) se ha sintonizado el controlador de los agentes en los valores $k_p = 0,05$, $k_i = 0,1$ y $h = 5$, lo cual, de acuerdo al Teorema 3, determina un pelotón estable en cuerda. El comportamiento esperable para un pelotón compatible con esta propiedad se observa con claridad en las gráficas de error de seguimiento de la formación, donde a medida que el error de seguimiento del segundo agente se propaga hacia los últimos vehículos existe clara atenuación de la magnitud de dichos errores producto de la estabilidad de cuerda del sistema. Ahora bien, suponga que se quisiera reducir el roce aerodinámico durante el traslado a través de un menor espaciado inter-vehicular. Si simplemente se re-sintoniza h a un valor menor sin alterar las ganancias del controlador el

pelotón resultante puede volverse inestable en cuerda. De hecho, esto es lo que ocurre en el segundo experimento (segunda fila), donde se ha reducido el valor de time headway a $h = 3$ manteniendo constantes los parámetros del controlador. En este caso se observa en la gráfica de error de seguimiento del pelotón que existe amplificación en la propagación del error de control del segundo vehículo hacia los últimos agentes. Este comportamiento resulta inseguro ya que dicha amplificación podría superar la distancia efectiva que cierto vehículo tiene con respecto a sus vecinos inmediatos y por lo tanto producir una colisión. Aquella situación se vuelve evidente en la gráfica de posición, donde una amplificación de las tendencias en torno a cuando se tiene máxima magnitud del error en los últimos vehículos muestra una peligrosa disminución de las distancias inter-vehiculares de los tres últimos agentes. En contraste, la misma reducción de time headway puede conseguirse de manera segura al re-sintonizar las ganancias del controlador en base al resultado presentado con el fin de conservar la estabilidad de cuerda del sistema. Éste es el caso del último experimento (tercera fila), en el cual el pelotón exhibe nuevamente atenuación de los errores de seguimiento cuando éstos se propagan hacia los vehículos seguidores. Por lo tanto, la caracterización de la región de estabilidad de cuerda permite re-sintonizar el controlador y ajustar la política de espaciado de manera apropiada para conservar esta propiedad en el pelotón y así evitar transientes dinámicos inseguros.

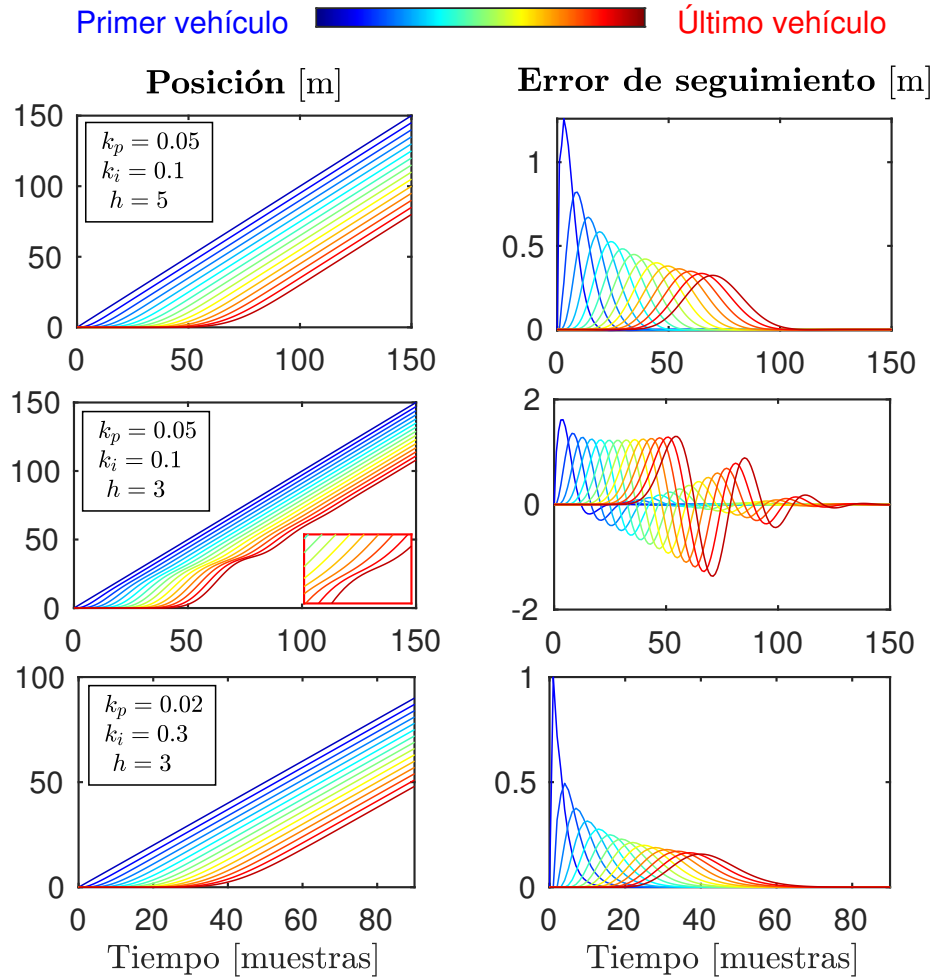


Figura 4.8. Comportamiento de un pelotón de $N = 15$ vehículos para distintos valores de los parámetros de diseño.

4.5. Conclusión del capítulo

En este capítulo se estudió una configuración particular de pelotón homogéneo de tiempo discreto donde los vehículos son modelados como integradores simples, el control de la formación se realiza distribuidamente a través de controladores de tipo proporcional-integrativo, y se implementa una política de espaciado dependiente de la velocidad. El control de este esquema queda caracterizado por las ganancias del controlador y la constante de time headway asociada a la política de espaciado. Se realiza un análisis de los lazos de control locales de los vehículos, determinándose las condiciones necesarias y suficientes sobre los parámetros de diseño del pelotón que permiten obtener estabilidad interna y ganancia de los lazos de control menor o igual a uno. Estos resultados intermedios se intersectan para obtener el resultado principal del capítulo, que son las condiciones necesarias y suficientes sobre las ganancias del controlador y la constante de time headway para lograr estabilidad

de cuerda en el pelotón. Finalmente, se discuten estos resultados y se presenta un ejemplo de simulación temporal del pelotón para distintos diseños de su control.

APÉNDICE

4.A. Identidades matemáticas útiles

A continuación se presentan y demuestran algunas identidades matemáticas que útiles para el desarrollo de las demostraciones del capítulo anterior.

4.A.1. Módulo de un polinomio de tercer orden

A continuación, se presenta una proposición para calcular el módulo al cuadrado de un polinomio de tercer orden de variable compleja.

Proposición 1. *Sea el polinomio*

$$A(z) = z^3 + a_2z^2 + a_1z + a_0.$$

Al evaluar en $z = e^{j\omega}$, su módulo al cuadrado está dado por

$$|A(e^{j\omega})|^2 = 1 + a_2^2 + a_1^2 + a_0^2 + 2(a_2 + a_2a_1 + a_1a_0) \cos(\omega) + 2(a_1 + a_2a_0) \cos(2\omega) + 2a_0 \cos(3\omega)$$

Demostración.

$$\begin{aligned} |A(e^{j\omega})|^2 &= A(e^{j\omega})A(e^{-j\omega}) \\ &= (e^{3j\omega} + a_2e^{2j\omega} + a_1e^{j\omega} + a_0)(e^{-3j\omega} + a_2e^{-2j\omega} + a_1e^{-j\omega} + a_0) \\ &= 1 + a_2e^{j\omega} + a_1e^{2j\omega} + a_0e^{3j\omega} + a_2e^{-j\omega} + a_2^2 + a_2a_1e^{j\omega} + a_2a_0e^{2j\omega} + a_1e^{-2j\omega} \\ &\quad + a_2a_1e^{-j\omega} + a_1^2 + a_1a_0e^{j\omega} + a_0e^{-3j\omega} + a_2a_0e^{-2j\omega} + a_1a_0e^{-j\omega} + a_0^2 \\ &= 1 + a_2^2 + a_1^2 + a_0^2 + (a_2 + a_2a_1 + a_1a_0)(e^{j\omega} + e^{-j\omega}) \\ &\quad + (a_1 + a_2a_0)(e^{2j\omega} + e^{-2j\omega}) + a_0(e^{3j\omega} + e^{-3j\omega}) \\ &= 1 + a_2^2 + a_1^2 + a_0^2 + 2(a_2 + a_2a_1 + a_1a_0) \cos(\omega) + 2(a_1 + a_2a_0) \cos(2\omega) + 2a_0 \cos(3\omega). \end{aligned}$$

■

4.A.2. Identidades trigonométricas

Se presentan las siguientes identidades trigonométricas, las cuales resultan convenientes de aplicar en el desarrollo del Teorema 2.

Proposición 2. *Las siguientes igualdades se satisfacen:*

$$(a) \cos(2\omega) = 2 \cos^2(\omega) - 1$$

$$(b) \cos(3\omega) = 4 \cos^3(\omega) - 3 \cos(\omega)$$

$$(c) a + b \cos(\omega) + c \cos(2\omega) + d \cos(3\omega) = a - c + (b - 3d) \cos(\omega) + 2c \cos^2(\omega) + 4d \cos^3(\omega)$$

Demostración.

(a)

$$\begin{aligned} \cos(2\omega) &= \cos^2(\omega) - \sin^2(\omega) \\ &= \cos^2(\omega) - (1 - \cos^2(\omega)) \\ &= 2 \cos^2(\omega) - 1. \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \cos(3\omega) &= \cos(2\omega) \cos(\omega) - \sin(2\omega) \sin(\omega) \\ &\stackrel{(a)}{=} (2 \cos^2(\omega) - 1) \cos(\omega) - 2 \sin^2(\omega) \cos(\omega) \\ &= 2 \cos^3(\omega) - \cos(\omega) - 2 \cos(\omega)(1 - \cos^2(\omega)) \\ &= 4 \cos^3(\omega) - 3 \cos(\omega). \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} a + b \cos(\omega) + c \cos(2\omega) + d \cos(3\omega) &\stackrel{(a),(b)}{=} a + b \cos(\omega) + c(2 \cos^2(\omega) - 1) + d(4 \cos^3(\omega) - 3 \cos(\omega)) \\ &= a - c + (b - 3d) \cos(\omega) + 2c \cos^2(\omega) + 4d \cos^3(\omega). \end{aligned}$$

■

4.A.3. No-negatividad de polinomios de segundo orden

La proposición que se presenta a continuación establece las condiciones necesarias y suficientes sobre los parámetros de un polinomio de segundo orden para garantizar su no-negatividad en el intervalo no-negativo de su variable. Ésta identidad resulta útil en la demostración del Teorema 2

Proposición 3. *El polinomio $P(x) = \alpha x^2 + \beta x + \gamma$ es no-negativo para todo $x \geq 0$ si y sólo si las siguientes condiciones se satisfacen simultáneamente:*

$$\alpha \geq 0, \quad -\sqrt{4\alpha\gamma} \leq \beta, \quad \gamma \geq 0.$$

Demostración. En primer lugar, notamos que al evaluar $x = 0$ en $P(x)$, se tiene directamente la condición necesaria $\gamma \geq 0 \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$, es decir, para $\gamma < 0$ no existen $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ que entreguen solución a la condición $P(x) \geq 0 \forall x \geq 0$. Por otra parte, observamos que $\alpha < 0$ no entrega solución a la condición $\forall \beta, \gamma \in \mathbb{R}$ ya que en este caso siempre existirá x suficientemente alto que entregará $P(x) < 0$ independiente de los valores de β y γ . Entonces consideramos el caso favorable $\gamma \geq 0$ y evaluamos los casos restantes para α . Si $\alpha = 0$, se tiene que $P(x)$ representa la recta $\beta x + \gamma$ con $\gamma \geq 0$. Evidentemente, para este caso $\beta \geq 0$ garantiza $P(x) \geq 0$ pues se trata de una suma de constantes positivas. Por el contrario,

si $\beta < 0$ entonces la pendiente de la recta es negativa y con ello se tiene $P(x) < 0$ para x suficientemente alto. Por otra parte, consideramos $\alpha > 0$ (y $\gamma \geq 0$). Si $\beta \geq 0$ entonces $P(x)$ consiste en la suma de constantes no-negativas, por lo que $P(x) \geq 0 \forall x \geq 0$. Por el contrario, si $\beta < 0$, notamos que el mínimo $P(x_0)$ de la parábola $P(x)$ se produce en $x_0 > 0$, ya que $x_0 = -\frac{\beta}{2\alpha} < 0$. Notando también que $P(x_0) = \gamma - \frac{\beta^2}{4\alpha}$, dividimos el caso $\beta < 0$ en dos alternativas, donde $P(x) \geq 0 \forall x \geq 0$ ocurrirá dependiendo de si existen o no dos interceptos de $P(x)$ con el eje real. De esta manera, si $\beta^2 > 4\alpha\gamma$ entonces $P(x_0) < 0$, con lo que se descarta este caso. Por el contrario, si $\beta^2 \leq 4\alpha\gamma$ (o equivalentemente, $-\sqrt{4\alpha\gamma} \leq \beta < 0$) entonces $P(x_0) \geq 0$ y con ello $P(x) \geq 0 \forall x \geq 0$.

Del análisis anterior, concluimos que el conjunto de casos en que $P(x) \geq 0 \forall x \geq 0$ es:

$$\begin{aligned} & (\gamma \geq 0) \cap \left((\alpha > 0 \cap (\beta \geq 0 \cup -\sqrt{4\alpha\gamma} \leq \beta < 0)) \cup (\alpha = 0 \cap \beta \geq 0) \right) \\ \Leftrightarrow & (\gamma \geq 0 \cap \alpha \geq 0 \cap \beta \geq 0) \cup (\gamma \geq 0 \cap \alpha \geq 0 \cap -\sqrt{4\alpha\gamma} \leq \beta < 0) \\ \Leftrightarrow & (\gamma \geq 0 \cap \alpha \geq 0 \cap -\sqrt{4\alpha\gamma} \leq \beta). \end{aligned}$$

■

CONCLUSIONES

En el presente trabajo de tesis se estudió el diseño de sistema de control longitudinal de un pelotón de vehículos de tal forma de asegurar la propiedad de estabilidad de cuerda. Dicho estudio se desarrolló considerando dos marcos de trabajo: el pelotón es modelado en el dominio de tiempo discreto o de tiempo continuo. En ambos casos se consideró una configuración de pelotones homogéneos con topología de seguimiento de predecesor en la cual el control se realiza distribuídamente mediante controladores de tipo proporcional-integrativo, los vehículos se modelan como integradores simples, y se implementa una política de espaciado dependiente de la velocidad.

Dada la configuración anterior, se caracterizaron las condiciones analíticas necesarias y suficientes sobre los parámetros de diseño del pelotón que permiten obtener estabilidad de cuerda. Estos parámetros de diseño corresponden a la constante de time headway h , y las ganancias proporcional k_p e integrativa k_i del controlador. Para ello, el método de análisis adoptado consistió en descomponer el análisis de la estabilidad de cuerda en la caracterización de los parámetros que aseguran, por una parte, que los lazos de control de los vehículos individuales sean internamente estables, y por la otra, que garantizan que el error de seguimiento de los agentes no aumente a lo largo de la cadena. Luego, las restricciones resultantes fueron intersectadas para obtener el conjunto de condiciones que definen pelotones estables en cuerda.

A través del método anteriormente descrito se obtuvieron las condiciones analíticas tanto para el modelo de tiempo continuo como para el de tiempo discreto. Éstas condiciones corresponden a un conjunto de desigualdades que fueron representadas gráficamente como regiones sólidas en el espacio de parámetros de diseño del pelotón que representan pelotones estables en cuerda. En dichas regiones además se distingue el caso de controladores de fase mínima respecto de controladores de fase no mínima. De los resultados teóricos se pueden deducir algunas propiedades y limitaciones de diseño del controlador y de la política de espaciado. En particular, en el marco de trabajo de tiempo continuo se tiene que para un valor de h arbitrariamente pequeño siempre existe matemáticamente un controlador que estabilice en cuerda el pelotón. Sin embargo, estos valores generarían velocidades y aceleraciones arbitrariamente grandes, lo que en la práctica no podría implementarse. Si se considera que el controlador ya está diseñado, entonces para controladores de fase mínima es posible asegurar estabilidad de cuerda para todo valor de h mayor a cierto valor de h mínimo. Por el contrario si el controlador es de fase no mínima, entonces dependerá de las ganancias del controlador si será posible garantizar estabilidad de cuerda para alguna política de espaciado, en cuyo caso habrá un intervalo acotado de valores de h para los cuales el pelotón es estable en cuerda. Por otra parte, si se fija el valor de h y se desea diseñar las ganancias del controlador, entonces dichas ganancias pueden estar limitadas por

el valor de h fijado. Por otro lado, en el marco de trabajo de tiempo discreto presentado fue posible concluir que no existe controlador PI que consiga estabilidad de cuerda si h es menor que uno. Similarmente, se concluye también que si se fija el controlador, el valor de h queda también limitado por estos valores y si, por el contrario, se fija el valor de h , entonces el valor de los parámetros del controlador queda limitado por el valor h .

5.1. Trabajo a futuro

A continuación se señalan posibles extensiones y direcciones de investigación que emanan del trabajo realizado.

- Modelamiento de sistemas: Realizar un trabajo análogo al desarrollado en esta tesis, pero modelando la dinámica de los vehículos de forma diferente a través de integradores dobles por ejemplo, o agregando un polo simple al integrador. Esta extensión necesariamente produce funciones de transferencia equivalentes de orden mayor, lo cual complica los cálculos de estabilidad interna y ganancia de lazo.
- Uso de las ecuaciones para propósitos de optimización: Sintetizar un diseño de controlador óptimo bajo alguna métrica útil sujeto a que éste garantice la estabilidad de cuerda del esquema. Por ejemplo, se propone encontrar el controlador proporcional-integrativo que asegure menor sensibilidad a perturbaciones y que garantice estabilidad de cuerda.
- Uso de controladores proporcional-integrativo-derivativo (PID): Incorporar la componente derivativa en el modelo del controlador al hacer el análisis de la estabilidad de cuerda del pelotón. De esta forma, se puede cuantificar la posible ganancia en desempeño (i.e., la posibilidad de escoger valores de h más pequeños que consigan estabilidad de cuerda y que satisfagan requisitos de control como ancho de banda máximo) al incorporar un bloque derivativo en el controlador.

REFERENCIAS

- [1] A Al Alam, A. Gattami, and K. H. Johansson. An experimental study on the fuel reduction potential of heavy duty vehicle platooning. In *13th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems*, pages 306–311, 2010.
- [2] K. J. Åström and T. Hägglund. *Advanced PID Control*, volume 461. ISA-The Instrumentation, Systems, and Automation Society Research Triangle Park, 2006.
- [3] Y. Bian, Y. Zheng, W. Ren, S. E. Li, J. Wang, and K. Li. Reducing time headway for platooning of connected vehicles via V2V communication. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 102:87–105, 2019.
- [4] C. Cadena, L. Carlone, H. Carrillo, Y. Latif, D. Scaramuzza, J. Neira, I. Reid, and J. J. Leonard. Past, present, and future of simultaneous localization and mapping: Toward the robust-perception age. *IEEE Transactions on Robotics*, 32(6):1309–1332, 2016.
- [5] Z. P. Cano, D. Banham, S. Ye, A. Hintennach, J. Lu, M. Fowler, and Z. Chen. Batteries and fuel cells for emerging electric vehicle markets. *Nature Energy*, 3(4):279–289, 2018.
- [6] M. Z. Chowdhury, M. Shahjalal, S. Ahmed, and Y. M. Jang. 6g wireless communication systems: Applications, requirements, technologies, challenges, and research directions. *IEEE Open Journal of the Communications Society*, 1:957–975, 2020.
- [7] S. Dasgupta, V. Raghuraman, A. Choudhury, T. N. Teja, and J. Dauwels. Merging and splitting maneuver of platoons by means of a novel PID controller. In *2017 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*, pages 1–8, 2017.
- [8] J. C. Doyle, B. A. Francis, and A. R. Tannenbaum. *Feedback control theory*. Courier Corporation, 2013.
- [9] A. Faiz, C. S. Weaver, and M. P. Walsh. *Air pollution from motor vehicles: standards and technologies for controlling emissions*. World Bank Publications, 1996.
- [10] A. Farnam and A. Sarlette. About strong string stability of a vehicle chain with time-headway control. In *2018 IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 5077–5083, 2018.
- [11] S. Feng, Y. Zhang, S. E. Li, Z. Cao, H. X. Liu, and L. Li. String stability for vehicular platoon control: Definitions and analysis methods. *Annual Reviews in Control*, 2019.

- [12] F. Gao, S. E. Li, Y. Zheng, and D. Kum. Robust control of heterogeneous vehicular platoon with uncertain dynamics and communication delay. *IET Intelligent Transport Systems*, 10(7):503–513, 2016.
- [13] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, and M. E. Salgado. *Control System Design*, volume 240. Prentice-Hall, 2001.
- [14] H. Hao, P. Barooah, and P. G. Mehta. Stability margin scaling laws for distributed formation control as a function of network structure. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(4):923–929, 2011.
- [15] Petros Ioannou. *Automated highway systems*. Springer Science & Business Media, 1997.
- [16] E. I. Jury. A simplified stability criterion for linear discrete systems. *Proceedings of the IRE*, 50(6):1493–1500, 1962.
- [17] P. Kavathekar and Y. Chen. Vehicle platooning: A brief survey and categorization. In *International Design Engineering Technical Conferences and Computers and Information in Engineering Conference*, volume 54808, pages 829–845, 2011.
- [18] S. Klinge and R. H. Middleton. Time headway requirements for string stability of homogeneous linear unidirectionally connected systems. In *Proceedings of the 48th IEEE Conference on Decision and Control (CDC) held jointly with 2009 28th Chinese Control Conference*, pages 1992–1997, 2009.
- [19] S. E. Li, Y. Zheng, K. Li, and J. Wang. An overview of vehicular platoon control under the four-component framework. In *2015 IEEE Intelligent Vehicles Symposium (IV)*, pages 286–291, 2015.
- [20] K.-Y. Liang, J. Mårtensson, and K. H. Johansson. Heavy-duty vehicle platoon formation for fuel efficiency. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 17(4):1051–1061, 2015.
- [21] X. Liu, A. Goldsmith, S. S. Mahal, and J. K. Hedrick. Effects of communication delay on string stability in vehicle platoons. In *2001 IEEE Intelligent Transportation Systems. Proceedings (Cat. No. 01TH8585)*, pages 625–630, 2001.
- [22] C. A. Mack. Fifty years of Moore’s law. *IEEE Transactions on Semiconductor Manufacturing*, 24(2):202–207, 2011.
- [23] G. J. L. Naus, R. P. A. Vugts, J. Ploeg, M. J. G. van De Molengraft, and M. Steinbuch. String-stable CACC design and experimental validation: A frequency-domain approach. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 59(9):4268–4279, 2010.
- [24] Ryosuke Okuda, Yuki Kajiwara, and Kazuaki Terashima. A survey of technical trend of adas and autonomous driving. In *Technical Papers of 2014 International Symposium on VLSI Design, Automation and Test*, pages 1–4. IEEE, 2014.
- [25] A. V. Oppenheim and A. S. Willsky. *Signals & systems*. Pearson Educación, 1997.
- [26] A. A. Peters, R. H. Middleton, and O. Mason. Leader tracking in homogeneous vehicle platoons with broadcast delays. *Automatica*, 50(1):64–74, 2014.

- [27] A. A. Peters and A. J. Rojas. Constant time-headway spacing policy with limited communication range for discrete time platoon systems. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):15198–15203, 2020.
- [28] Kashif Naseer Qureshi and Abdul Hanan Abdullah. A survey on intelligent transportation systems. *Middle-East Journal of Scientific Research*, 15(5):629–642, 2013.
- [29] R. Rajamani. *Vehicle Dynamics and Control*. Springer, 2011.
- [30] R. Rajamani, H.-S. Tan, B. K. Law, and W.-B. Zhang. Demonstration of integrated longitudinal and lateral control for the operation of automated vehicles in platoons. *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 8(4):695–708, 2000.
- [31] Marc Ross. Fuel efficiency and the physics of automobiles. *Contemporary Physics*, 38(6):381–394, 1997.
- [32] E. J. Routh. *A Treatise on the Stability of a Given State of Motion: Particularly Steady Motion*. Macmillan and Company, 1877.
- [33] M. E. Salgado, J. I. Yuz, and R. A. Rojas. *Análisis de Sistemas Lineales*. Pearson Educación, 2005.
- [34] P. Seiler, A. Pant, and K. Hedrick. Disturbance propagation in vehicle strings. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 49(10):1835–1842, 2004.
- [35] S. Sheikholeslam and C. A. Desoer. Longitudinal control of a platoon of vehicles with no communication of lead vehicle information: A system level study. *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, 42(4):546–554, 1993.
- [36] S. Stüdli, M. M. Seron, and R. H. Middleton. From vehicular platoons to general networked systems: String stability and related concepts. *Annual Reviews in Control*, 44:157–172, 2017.
- [37] D. Swaroop, J. K. Hedrick, C. Chien, and P. Ioannou. A comparison of spacing and headway control laws for automatically controlled vehicles. *Vehicle System Dynamics*, 23(1):597–625, 1994.
- [38] T. Söderström. *Discrete-time Stochastic Systems: Estimation and Control*. Advanced Textbooks in Control and Signal Processing. Springer-Verlag, 2002.
- [39] S. Tsugawa, S. Jeschke, and S. E. Shladover. A review of truck platooning projects for energy savings. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, 1(1):68–77, 2016.
- [40] F. J. Vargas, A. I. Maass, and A. A. Peters. String stability for predecessor following platooning over lossy communication channels. In *23rd International Symposium on Mathematical Theory of Networks and Systems (MNTS), Hong Kong*, pages 834–837, 2018.
- [41] Volpe National Transportation Systems Center. How an Automated Car Platoon Works. <https://www.volpe.dot.gov/news/how-automated-car-platoon-works>. Recuperado: 2022-06-17.

-
- [42] Ziran Wang, Guoyuan Wu, and Matthew J Barth. A review on cooperative adaptive cruise control (cacc) systems: Architectures, controls, and applications. In *2018 21st International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, pages 2884–2891. IEEE, 2018.
- [43] H. Yang, G. Zhai, X. Liu, L. Yang, Y. Liu, and Q. Yuan. Determinants of city-level private car ownership: effect of vehicle regulation policies and the relative price. *Transport Policy*, 115:40–48, 2022.
- [44] Y. Zheng, S. E. Li, J. Wang, D. Cao, and K. Li. Stability and scalability of homogeneous vehicular platoon: Study on the influence of information flow topologies. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 17(1):14–26, 2015.
- [45] Y. Zheng, S. E. Li, J. Wang, and K. Li. Influence of information flow topology on closed-loop stability of vehicle platoon with rigid formation. In *17th International IEEE Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, pages 2094–2100, 2014.
- [46] K. Zhou, J. C. Doyle, and K. Glover. *Robust and Optimal Control*. Prentice-Hall, 1999.