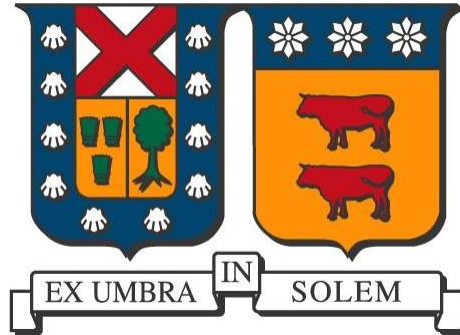


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA METALÚRGICA Y DE MATERIALES



**OPTIMIZACIÓN DE LA LEY DE CORTE: INTEGRANDO LA CAPACIDAD DE
ACOPIO Y FACTORES DE ESCALA EN PRECIO Y COSTOS**

Benjamín Ignacio Morales Díaz

Memoria de Título para optar al título profesional de Ingeniero Civil de Minas

Profesor guía:
Fabián Alejandro Manríquez León

Santiago, Chile

2024

Resumen

La ley de corte es una de las variables decisionales más relevantes en una operación minera, ya que es utilizada en la planificación minera, puesto que permite discriminar entre mineral y estéril. Es debido a esto que se hace uso de la política de ley de corte, que constituye la base para determinar los flujos de cajas y VAN de la inversión minera. Por lo tanto, es relevante evaluar y determinar la política de ley de corte óptima que maximice el VAN.

En este trabajo se implementa el algoritmo de Asad y Topal (2011), el cual es una extensión del algoritmo de Lane el cual incorpora la capacidad de acopio y factores de escala en precios y costos. Esta mejora permite evaluar de manera más precisa las leyes de corte a lo largo del tiempo. Esto no solo optimiza la política de ley de corte, sino que también acerca el modelo a las condiciones reales de una operación minera, logrando un enfoque más robusto y representativo para la planificación estratégica.

Esta extensión del algoritmo de Lane se implementó en Python para 2 casos de estudio, los cuales corresponden a yacimientos de cobre. Para el primer caso de estudio, se obtiene un plan de producción con un VAN de 731 MUSD lo que representa una disminución del 0,69% en comparación con el VAN del plan de producción obtenido con el algoritmo de Lane. Esta disminución se debe principalmente al aumento progresivo de los costos generado por los factores de escala. Aunque la incorporación del acopio ayuda a contrarrestar este efecto negativo, no logra superar el VAN obtenido del algoritmo de Lane. Sin embargo, se generan 56 Mt de material de acopio, lo que tiene un efecto positivo en el VAN al extender la vida útil en 5 años y reducir en un 37% la cantidad de estéril.

Las leyes de corte presentan un comportamiento decreciente compuestos, comienzan en los primeros 2 tercios de la vida útil con leyes de corte constante, y en el último tercio, se presenta un descenso progresivo en las leyes. Durante todo el periodo, La planta es la etapa más relevante, ya que siempre está saturada.

Por último, para el segundo caso de estudio se obtiene un VAN de 94 MUSD, lo que representa una disminución del 1,66 % en comparación con el VAN del plan de producción obtenido con el algoritmo de Lane original. Esta disminución se debe principalmente a la incorporación de los factores de escala. Si bien el uso del acopio ayuda a contrarrestar parcialmente este efecto negativo, tampoco logra superar el VAN obtenido con el algoritmo Lane. En este caso, el acopio genera 13,87 Mt de material acopiado, extendiendo la vida útil de la operación en 1 año y reduciendo la cantidad de material estéril en un 33,6 %. En este escenario, las leyes de corte presentan un comportamiento estrictamente decreciente a lo largo de la operación. Al igual que en el primer caso, la planta opera a su máxima capacidad durante todo el periodo.

Abstract

The cut-off grade is one of the most relevant decision variables in a mining operation, as it is used in mine planning, allowing for the discrimination between ore and waste. For this reason, the cut-off grade policy is utilized as the basis for determining cash flows and the NPV of the mining investment. Therefore, it is relevant to evaluate and determine the optimal cut-off grade policy that maximizes the NPV.

In this work, the extension of the Lane algorithm developed by Asad and Topal (2011) is implemented, which incorporates stockpiling capacity and scaling factors in prices and costs. This improvement allows for a more accurate evaluation of cut-off grades over time. This not only optimizes the cut-off grade policy but also brings the model closer to the real conditions of a mining operation, achieving a more robust and representative approach for strategic planning.

This extension of the Lane algorithm was implemented in Python for 2 case studies, which correspond to copper deposits. For the first case study, a production plan with an NPV of 731 MUSD is obtained, representing a 0.69% decrease compared to the NPV of the production plan obtained with the Lane algorithm. This decrease is mainly due to the progressive increase in costs generated by the scaling factors. Although the incorporation of stockpiling helps to counteract this negative effect, it does not surpass the NPV obtained from the Lane algorithm. However, 56 Mt of stockpiled material is generated, which has a positive effect on the NPV by extending the mine life by 5 years and reducing the amount of waste by 37%.

The cut-off grades exhibit a compound decreasing behavior, beginning in the first two-thirds of the mine life with constant cut-off grades, and in the last third, showing a progressive decrease in cut-off grades. During the entire period, the plant is the most critical stage, as it is always at full capacity.

Finally, for the second case study, an NPV of 94 MUSD is obtained, representing a 1.66% decrease compared to the NPV of the production plan obtained with the original Lane algorithm. This decrease is mainly due to the incorporation of scaling factors. While the use of stockpiling helps to partially counteract this negative effect, it also does not surpass the NPV obtained with the Lane algorithm. In this case, the stockpile generates 13.87 Mt of material, extending the mine life by 1 year and reducing the amount of waste by 33.6%. In this scenario, the cut-off grades exhibit a strictly decreasing behavior throughout the operation. As in the first case, the plant operates at maximum capacity throughout the entire period.

Tabla de contenido

1. Introducción	1
1.1. Relevancia del trabajo	2
1.2. Objetivos	3
1.2.1. Objetivo general.....	3
1.2.2. Objetivos específicos.....	3
1.3. Alcances.....	3
2. Metodología	4
2.1. Implementación del algoritmo de Lane (1964)	4
2.2. Implementación del algoritmo de Asad y Topal (2011)	5
3. Marco teórico.....	6
3.1. Ley de corte.....	6
3.1.1. Ley de corte crítica.....	6
3.1.2. Ley de corte marginal	7
3.1.3. Efecto del precio y costo en la ley de corte	8
3.2. Uso de acopio en minas a cielo abierto	9
3.3. Algoritmo de optimización de leyes de corte.....	11
3.3.1. Algoritmo de Lane (1964)	11
3.3.2. Algoritmo de Asad (1997)	19
3.3.3. Algoritmo de Asad (2007)	23
3.3.4. Algoritmo de Asad y Topal (2011).....	25
3.3.5. Resumen de algoritmos de optimización de ley de corte	27
4. Implementación algoritmo de Lane (1964).....	27
4.1. Curva normalizada tonelaje ley.....	28
4.2. Cálculo de cantidades	30
4.2.1. Tonelajes que extraer, procesar y refinar de la fase.....	30
4.2.2. Tonelaje que extraer, procesar y refinar de la mina	31
4.2.3. Vida útil de la fase	32
4.2.4. Cantidad que extraer, procesar y refinar	33
4.2.5. Vida útil de la mina	34
4.2.6. Beneficio y VAN iterativo	34
4.2.7. VAN del plan minero.....	35
4.3. Procedimiento resumido Algoritmo de Lane (1964)	36
5. Implementación algoritmo de Asad (1997)	38

5.1.	Modificaciones al algoritmo de Lane (1964).....	38
5.1.1.	Criterio de ley de corte.....	38
5.1.2.	Cantidad de mineral acopiado y tonelaje de acopio.	39
5.1.3.	Vida útil del acopio.....	39
5.1.4.	Tiempo total de operación.....	40
5.1.5.	Condición de transición.....	40
5.1.6.	VAN iteración.....	40
5.1.7.	Creación intervalos y asignación tonelaje	40
5.1.8.	Suma de distribuciones tonelaje-ley.....	43
5.1.9.	Curva normalizada acopio	45
5.1.10.	Ley de corte del acopio.....	45
5.1.11.	Determina ley de corte óptima	46
5.1.12.	Tonelaje que procesar y refinar del acopio	47
5.1.13.	Tiempo de acopio	47
5.1.14.	Cantidad por extraer, procesar y refinar del acopio.....	48
5.1.15.	Beneficio y VAN iteración.....	49
5.1.16.	VAN plan de producción	49
5.1.17.	Procedimiento resumido algoritmo de Asad (1997).....	50
6.	Implementación algoritmo de Asad (2007)	52
6.1.	Modificaciones al algoritmo de Lane.....	52
6.1.1.	Parámetros económicos	52
6.1.2.	Ecuaciones básicas	53
6.1.3.	Las leyes de corte económicas.....	53
6.1.4.	Leyes de corte de equilibrio	53
6.1.5.	Ley de corte óptima	53
6.1.6.	Procedimiento.....	53
7.	Implementación algoritmo de Asad y Topal (2011).....	55
7.1.	Procedimiento resumido algoritmo de Asad y Topal (2011).....	55
8.	Caso de Estudio 1	57
8.1.	Descripción del caso de estudio 1	57
8.2.	Validación de algoritmos en caso de estudio 1	59
8.2.1.	Validación: algoritmo de Lane (1964).....	59
8.2.2.	Validación: algoritmo de Asad (2007)	60
8.2.3.	Validación: algoritmo de Asad y Topal (2011).....	60
8.3.	Resultados y análisis caso de estudio 1	62
8.3.1.	Resultados y análisis: algoritmo de Lane (1964).....	63

8.3.2.	Resultados y análisis: algoritmo de Asad (1997).....	66
8.3.3.	Resultados y análisis: algoritmo de Asad (2007).....	70
8.3.4.	Resultados y análisis: algoritmo de Asad y Topal (2011)	74
8.3.5.	Resumen de resultados y análisis caso de estudio 1	77
9.	Caso de estudio 2.....	79
9.1.	Descripción del caso de estudio 2	79
9.2.	Validación algoritmos en caso de estudio 2	81
9.2.1.	Validación: algoritmo de Lane (1964).....	81
9.2.2.	Validación: algoritmo de Asad (1997)	82
9.3.	Resultados y análisis del caso de estudio 2.....	83
9.3.1.	Resultados y análisis: algoritmo de Lane (1964).....	83
9.3.2.	Resultados y análisis: algoritmo de Asad (1997).....	85
9.3.3.	Resultados y análisis: algoritmo de Asad (2007).....	88
9.3.4.	Resultados y análisis: algoritmo de Asad y Topal (2011)	91
9.3.5.	Resumen de resultados y análisis del caso de estudio 2	94
10.	Conclusiones, recomendaciones y trabajo futuro	96
10.1.	Conclusiones.....	96
10.2.	Recomendaciones.....	96
10.3.	Trabajos futuros.....	97
11.	Referencias.....	98
12.	Anexo A	100
12.1.	Construcción curva tonelaje ley a partir de la tabla distribución tonelaje ley	100
12.2.	Ecuaciones por tramo de tonelaje en función de la ley de corte.	104
12.3.	Ecuaciones por tramo de la ley media en función de la ley de corte.	106
12.4.	Ecuaciones básicas.....	107
12.5.	Determinación de las leyes de corte económicas	109
12.5.1.	Ley de corte económica mina	109
12.5.2.	Ley de corte económica planta	110
12.5.3.	Ley de corte económica refinería.....	111
12.6.	Obtención de las leyes de equilibrio	112
12.6.1.	Ley de corte que equilibra la mina y la planta	112
12.6.2.	Ley de corte que equilibra la mina y refinería.....	114
12.6.3.	Ley de corte que equilibra la planta y refinería.....	115
13.	Anexo B	118

13.1.	Ecuaciones básicas:.....	118
13.2.	Determinación de las leyes de corte económicas	120
13.2.1.	Ley de corte económica mina	120
13.2.2.	Ley de corte económica planta	121
13.2.3.	Ley de corte económica refinería.....	122
14.	Anexo C	124
14.1.	Validación – resultados Asad y Topal (2011).....	124
14.1.1.	Resultados algoritmo de Lane (1964)	124
14.1.2.	Resultados algoritmo Asad (2007)	125
14.1.3.	Resultados algoritmo de Asad y Topal (2011).....	126
14.2.	Implementaciones en Python.....	127
14.2.1.	Algoritmo de Lane (1964)	127
14.2.1.	Implementación algoritmo de Asad (1997).....	128
14.2.2.	Implementación Algoritmo de Asad (2007)	130
14.2.3.	Implementación Algoritmo de Asad y Topal (2011).....	130
15.	Anexo D	133
15.1.	Validación – resultados Asad et al. 2016.....	133
15.1.1.	Resultados algoritmo de Lane (1964)	133
15.1.2.	Resultados algoritmo de Asad (1997)	133
15.2.	Implementación Python	133
15.2.1.	Implementación Algoritmo de Asad (1997)	134
15.2.2.	Implementación Algoritmo de Asad (2007)	135
15.2.3.	Implementación Algoritmo de Asad y Topal (2011).....	135

Índice de figuras

Figura 1: Primera parte de la metodología – implementación algoritmo de Lane (1964).	4
Figura 2: Segunda parte de la metodología – implementación algoritmo de Asad y Topal (2011).	5
Figura 3: Representación de la LCC, en relación con el valor de bloque procesado en función de la ley de corte (Jélvez, 2017).	7
Figura 4: Representación de la LCM, en relación con el valor de bloque procesado y valor de bloque enviado a botadero (Jélvez, 2017).	8
Figura 5: Diagrama de flujo del modelo descrito por el algoritmo de Lane (1964)	12
Figura 6: Determinación de la ley de corte de equilibrio mina planta.	17
Figura 7: Determinación de la ley de corte de equilibrio mina refinería.	18
Figura 8: Determinación de la ley de corte de equilibrio planta refinería.	18
Figura 9: Diagrama de flujo del modelo del algoritmo de Asad (1997).	22
Figura 10: Ejemplo de curva normalizada tonelaje-ley.	29
Figura 11: Criterio de ley de corte - algoritmo de Asad (1997).	38
Figura 12: Procedimiento para obtener los intervalos de leyes del mineral acopiado.	42
Figura 13: Procedimiento para determinar los tonelajes de cada intervalo de ley del mineral acopiado.	43
Figura 14: Distribuciones tonelaje-ley para el mineral acopiado y acopio periodo anterior.	43
Figura 15: Ajustes en los intervalos de leyes en las distribuciones tonelaje-ley	44
Figura 16: Procedimiento para calcular el tonelaje en los subintervalos.	44
Figura 17: Resultado final de los ajustes en las distribuciones tonelaje-ley.	45
Figura 18: Distribución tonelaje ley final del acopio.	45
Figura 19: Leyes de corte del acopio	46
Figura 20: Representación de las 3 fases de extracción para el caso de estudio 1.	58
Figura 21: Plan de producción para el caso de estudio 1 obtenido de la implementación del algoritmo de Lane (1964).	64
Figura 22: Plan de producción para el caso de estudio 1 obtenido de la implementación del algoritmo Asad (1997).	67
Figura 23: Comparación leyes de corte algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo de Asad (1997).	68
Figura 24: Plan de producción para el caso de estudio 1 obtenido de la implementación del algoritmo de Asad (2007).	71
Figura 25: Comparación leyes de corte algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo de Asad (2007).	72
Figura 26. Plan de producción para el caso de estudio 1 obtenido de la implementación del algoritmo de Asad y Topal (2011).	75

Figura 27: Comparación leyes de corte algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo de Asad y Topal (2011).	76
Figura 28: Representación de la fase de extracción para el caso de estudio 2.	80
Figura 29: Plan de producción para el caso de estudio 2 obtenido de la implementación del algoritmo de Lane (1964).	84
Figura 30: Plan de producción para el caso de estudio 2 obtenido de la implementación del algoritmo de Asad (1997)	86
Figura 31: Comparación leyes de corte algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo de Asad (1997).	87
Figura 32: Plan de producción para el caso de estudio 2 obtenido de la implementación del algoritmo de Asad (2007).	89
Figura 33: Comparación leyes de corte algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo de Asad (2007) para el caso de estudio 2.....	90
Figura 34: Plan de producción para el caso de estudio 2 obtenido de la implementación del algoritmo de Asad y Topal (2011).....	92
Figura 35: Comparación leyes de corte algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo de Asad y Topal (2011) para el caso de estudio 2.....	93
Figura 36: Curva tonelaje ley	102
Figura 37: Curva normalizada tonelaje ley	104
Figura 38: Diagrama de la representación del cálculo del VAN.....	108
Figura 39: Diagrama de la representación del cálculo del VAN.....	119

Índice de tablas

Tabla 1: Impacto de costos y precio en la ley de corte.....	9
Tabla 2: Ejemplo de una distribución tonelaje-ley para un depósito de cobre hipotético.	14
Tabla 3: Resumen de algoritmos de optimización de leyes de corte.	27
Tabla 4: Representación del supuesto de tonelaje constante en la distribución tonelaje-ley.....	28
Tabla 5: Ejemplo de ecuaciones lineales por tramo de la proporción tonelaje.....	29
Tabla 6: Ejemplo de ecuaciones lineales por tramo de la ley media.	30
Tabla 7: Información base para explicar el cálculo de la distribución tonelaje-ley del mineral acopiado.	41
Tabla 8: Ecuaciones por tramo de la proporción tonelaje de la curva normalizada tonelaje-ley de la fase respectiva al mineral acopiado.....	41
Tabla 9: Parámetros económicos y capacidades operacionales para el caso de estudio 1.....	57
Tabla 10: Distribución tonelaje-ley de un depósito de cobre hipotético, caso de estudio 1.....	58
Tabla 11: Validación algoritmo de Lane (1964) mediante la comparación de resultados Asad & Topal 2011 vs Implementación en Python – caso de estudio 1.....	59
Tabla 12: Validación algoritmo de asad (2007) mediante la comparación de resultados Asad & Topal 2011 vs Implementación en Python.	60
Tabla 13: Validación algoritmo de Asad y Topal (2011) mediante la comparación de resultados Asad & Topal 2011 vs Implementación en Python.....	61
Tabla 14: Resultados de la implementación del algoritmo de Lane (1964) para el caso de estudio 1. 63	
Tabla 15: Resultados de la implementación del algoritmo de Asad (1997) para el caso de estudio 1. 66	
Tabla 16: Comparación resultados algoritmo de Lane (1964) vs Algoritmo de Asad (1997).....	69
Tabla 17: Resultados de la implementación del algoritmo de Asad (2007) para el caso de estudio 1. 70	
Tabla 18: Comparación resultados algoritmo de Lane (1964) vs Algoritmo de Asad (2007).....	73
Tabla 19: Resultados de la implementación del algoritmo de Asad y Topal (2011) para el caso de estudio 1.	74
Tabla 20: Comparación resultados algoritmo de Lane (1964) vs Algoritmo de Asad y Topal (2011)..	77
Tabla 21: Resumen de los resultados de los algoritmos implementados en Python para el caso de estudio 1.	78
Tabla 22: Resumen de las diferencias porcentuales de los algoritmos con respecto a los resultados obtenidos por el algoritmo de Lane para el caso de estudio 1.....	78
Tabla 23: Datos de entrada para el caso de estudio 2.	79
Tabla 24: Distribución tonelaje-ley de un depósito de cobre hipotético, caso de estudio 2.....	80
Tabla 25: Validación algoritmo de Lane (1964) mediante la comparación de resultados Asad et al. (2016) vs Implementación en Python – caso de estudio 2.	81

Tabla 26: Validación algoritmo de Asad (1997) mediante la comparación de resultados Asad et al. (2016) vs Implementación en Python – caso de estudio 2.	82
Tabla 27: Resultados implementación algoritmo de Lane (1964) para el caso de estudio 2.....	83
Tabla 28: Resultados de la implementación del algoritmo de Asad (1997) para el caso de estudio 2.	85
Tabla 29: Comparación resultados algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo de Asad (1997) para el caso de estudio 2.	87
Tabla 30: Resultados de la implementación del Algoritmo de Asad (2007) para el caso de estudio 2.	88
Tabla 31: Comparación resultados algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo Asad (2007) para el caso de estudio 2.	90
Tabla 32: Resultados de la implementación del algoritmo de Asad y Topal (2011) para el caso de estudio 2.	91
Tabla 33: Comparación resultados algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo de Asad y Topal (2011) para el caso de estudio 2.	94
Tabla 34: Resumen de los resultados de los algoritmos implementados en Python para el caso de estudio 2.	94
Tabla 35: Resumen de las diferencias porcentuales de los algoritmos con respecto a los resultados obtenidos por el algoritmo de Lane para el caso de estudio 2.....	95
Tabla 36: Ejemplo distribución tonelaje – Ley.	100
Tabla 37: Resultados de la metodología para determinar la curva tonelaje ley.	101
Tabla 38: Curva tonelaje ley obtenida a partir de la distribución ton - ley	102
Tabla 39: Proporciones tonelajes en la curva tonelaje ley.....	103
Tabla 40: Ecuaciones por tramo de la proporción tonelaje de la curva ton-ley.	105
Tabla 41: Ecuaciones por tramo para la ley media de la curva ton-ley.....	106
Tabla 42: Ratios Qc/M para determinar la ley de corte de equilibrio mina - planta.	113
Tabla 43: Ratios R/Qm para determinar la ley de corte de equilibrio refinería - mina.	114
Tabla 44: Ratios Qr/C para determinar la ley de corte de equilibrio planta - refinería.	116
Tabla 45: Plan de producción óptimo de la operación sin considerar el acopio ni los factores de escala (Asad & Topal, 2011).	124
Tabla 46: Plan de producción óptimo de la operación considerando los factores de escala pero sin el acopio (Asad & Topal, 2011).....	125
Tabla 47: Plan de producción óptimo de la operación considerando el acopio y factores de escala (Asad & Topal, 2011).	126
Tabla 48: Periodos de transición en el plan de producción generado por el algoritmo de Lane (1964) - caso estudio 1.....	127

Tabla 49: Plan de producción con las leyes ponderadas - algoritmo de Lane (1964), caso estudio 1	128
Tabla 50: Distribución tonelaje ley del acopio - algoritmo de Asad (1997) implementado para el caso de estudio 1	129
Tabla 51: Curva tonelaje Ley del acopio - algoritmo de Asad (1997) implementado para el caso de estudio 1	129
Tabla 52: Precios y costo por año – algoritmo de Asad (2007).	130
Tabla 53: Distribución tonelaje ley del acopio - algoritmo de Asad y Topal (2011) implementado para el caso de estudio 1	131
Tabla 54: Curva tonelaje Ley del acopio - algoritmo de Asad y Topal (2011) implementado para el caso de estudio 1	131
Tabla 55: Precios y costo por año – algoritmo de Asad y Topal (2011)	132
Tabla 56: Resultados del algoritmo de Lane (1964) publicados por Asad et al. 2016	133
Tabla 57: Resultados del algoritmo de Asad (1997) publicados por Asad et al. 2016	133
Tabla 58: Distribución tonelaje ley del acopio, algoritmo de Asad (1997) - caso de estudio 2.	134
Tabla 59: Curva tonelaje ley del acopio, algoritmo de Asad (1997) - caso de estudio 2.	134
Tabla 60: Precios y costos por año, algoritmo de Asad (2007) caso de estudio 2	135
Tabla 61: Precios y costos por año, algoritmo de Asad y Topal (2011) caso de estudio 2	135
Tabla 62: Distribución tonelaje ley del acopio, algoritmo de Asad y Topal (2011) - caso de estudio 2.	136
Tabla 63: Curva tonelaje ley del acopio, algoritmo de Asad y Topal (2011) - caso de estudio 2	136

1. Introducción

La ley de corte es el aspecto más significativo a la hora de realizar la planificación minera, ya que proporciona una base para la determinación de la cantidad de mineral y estéril en un periodo determinado (Cetin & Dowd, 2002). Al determinar la secuencia de leyes de corte a lo largo de la vida útil de la mina, junto con la cantidad de material que se extraerá (Q_m), mineral que se procesará (Q_c) y metal que se refinará (Q_r) es razonable vincularlo con el objetivo general de una empresa minera, constituyendo así la base de los flujos de caja y del VAN resultante a lo largo de la vida de la explotación (Asad et al., 2016).

En este sentido, la optimización de leyes de corte en los planes de producción es clave en la planificación de cualquier mina a cielo abierto, ya que permite maximizar el Valor Actual Neto (VAN), el cual es uno de los criterios más importantes a la hora de evaluar la viabilidad de un proyecto minero.

Uno de los primeros en abordar este tema, fue Kenneth Lane en su publicación titulada “*Choosing the optimal cut-toff grade*” en 1964. Para llevarlo a cabo, considero como principales limitantes en el proceso minero, la capacidad máxima de extracción, procesamiento, refinación y el costo de oportunidad del dinero (Lane, 1964). Desde la publicación del artículo original de Lane en 1964, se ha trabajado en el desarrollo de extensiones de su algoritmo de optimización original y en la ampliación más allá de la configuración clásica de una mina de tres etapas que produce un único metal sujeto a restricciones de capacidad en cada etapa (Beck, 2013).

Es por esto, que este trabajo busca implementar un algoritmo de optimización de ley de corte en lenguaje de programación Python, cuyo objetivo es determinar las leyes de corte óptimas del plan minero, las cuales maximizan el VAN de la inversión minera. Aplicado a casos de estudio de minas a cielo abierto y donde los yacimientos son mono metálicos. Para ello, es necesario conocer en detalle los costos operacionales, la distribución de leyes, las restricciones de un depósito, como también el *pit* final definido por fase, y los distintos tipos de materiales involucrados (Nieto & Bascetin, 2006).

Tradicionalmente, para escoger una política óptima de ley de corte, se realiza en base a que cada unidad procesada debe cubrir sus costos marginales, también conocido como ley de corte marginal. Sin embargo, ya que los recursos mineros son agotables, mediante este acercamiento se logra maximizar el flujo de caja del proyecto minero, de acuerdo con la economía clásica. A diferencia del enfoque anterior, Lane busca la maximización del Valor Actual Neto mediante un enfoque dinámico, el cual varía de acuerdo con la distribución de leyes en distintas zonas del depósito, además de razones económicas (Ahmadi & Shahabi, 2018).

En el cálculo del VAN un indicador importante es la tasa de descuento, la cual permite actualizar los flujos futuros trayéndolos al valor presente. Entre más baja sea la tasa de descuento, los flujos futuros aumentan su valor en el presente, aumentando el valor del proyecto minero. En caso contrario, los ingresos futuros tienen un menor peso a la hora de evaluar económicamente un negocio, ya que disminuye su valor presente. En general, los proyectos mineros más rentables y de gran envergadura tienen tasas de descuentos que se sitúan entre el 10% y el 15% (Navia-Vásquez et al., 2017).

1.1. Relevancia del trabajo

Aunque el algoritmo de Lane permite determinar la ley de corte óptima, este no considera el aumento de los parámetros económicos, como el precio del metal y los costes de explotación durante la vida útil de una explotación y, en consecuencia, conducen a valores de la función objetivo poco realistas. Además, el VAN de una explotación minera disminuye debido al agotamiento de las reservas disponibles, lo que provoca una disminución de la ley de corte óptima, es decir, leyes de corte más altas en los primeros años de una explotación y leyes de corte más bajas en los últimos años. Por lo tanto, el material de baja ley extraído en los primeros años puede almacenarse para ser procesado en años posteriores con el fin de compensar el efecto de la escalada de los parámetros económicos sobre el VAN (Asad & Topal, 2011).

Este trabajo aborda dos aspectos claves del modelo de optimización. El primero corresponde a la incorporación de un factor de escalamiento para el precio del metal y para los costos de extracción, procesamiento y refinación. Evitando así utilizar parámetros económicos fijos que no se acercan a la realidad y que terminan afectando al resultado. El segundo aspecto clave es la incorporación de acopios de minerales de baja ley cuya estrategia es recuperar y almacenar el material de baja ley de los primeros años para que en los años posteriores sea procesado, lo que resulta en un aumento del VAN (Asad & Topal, 2011).

La implementación de la extensión del algoritmo de Lane se realizará en primer lugar, en Excel con el objetivo de desarrollar y entender la lógica para luego llevar a lenguaje de programación Python el cual mediante un proceso iterativo, determina el plan minero de una mina a cielo abierto, usando parámetros de entrada, tales como: parámetros económicos – operacionales y curva tonelaje ley del yacimiento. Para validar el correcto funcionamiento del algoritmo implementado se considera dos casos de estudios correspondiente a yacimientos de cobre, en donde ya se han evaluado el impacto de una política de ley corte dinámica que considera el factor de escala en precio y costo, y la incorporación de acopio de minerales.

1.2. Objetivos

1.2.1. Objetivo general

Evaluar el impacto de integrar la capacidad de acopio y factor de escala en precio y costos en el Valor Actual Neto de planes de producción de largo plazo en minas a cielo abierto, mediante un algoritmo que determina la política de ley de corte óptima.

1.2.2. Objetivos específicos

- Implementar mediante Python el algoritmo de optimización de ley de corte que integra la capacidad de acopio y factores de escala en precio y costo.
- Evaluar por separado el efecto que tienen la capacidad de acopio y factor de escala en precio y costos al incorporarlos al modelo de optimización de ley de corte.
- Analizar y cuantificar las diferencias entre un plan minero que considera la capacidad de acopio y factor de escala en precio y costo, frente a uno que no los considera.

1.3. Alcances

- La optimización de la ley de corte considera la maximización del VAN.
- El algoritmo se aplica para minería a cielo abierto y en minas monometálicas con una o más fases de extracción.
- El algoritmo se implementa en lenguaje de programación Python.
- No se considera la incertidumbre geológica, operacional ni de mercado.
- El algoritmo implementado es el mismo del artículo de Asad (2011), por lo que este trabajo no considera la creación del algoritmo, solo la implementación computacional.
- Solo pueden haber 1 o 2 fases en producción por periodo, y la extracción de fases es de forma secuencial, es decir, se agota las reservas de una y luego empieza la extracción de la siguiente fase.

2. Metodología

La metodología se estructura en dos partes. La primera parte corresponde a la implementación del algoritmo de Lane (1964), mientras que la segunda parte considera la implementación del algoritmo de Asad y Topal (2011). Ambas partes se describen a continuación.

2.1. Implementación del algoritmo de Lane (1964)

Se centra en la comprensión del algoritmo de Lane, para luego en la segunda parte, implementar el algoritmo de Asad y Topal (2011), el cual extiende el algoritmo de Lane considerando acopio de mineral y factores de escala en precio y costos.

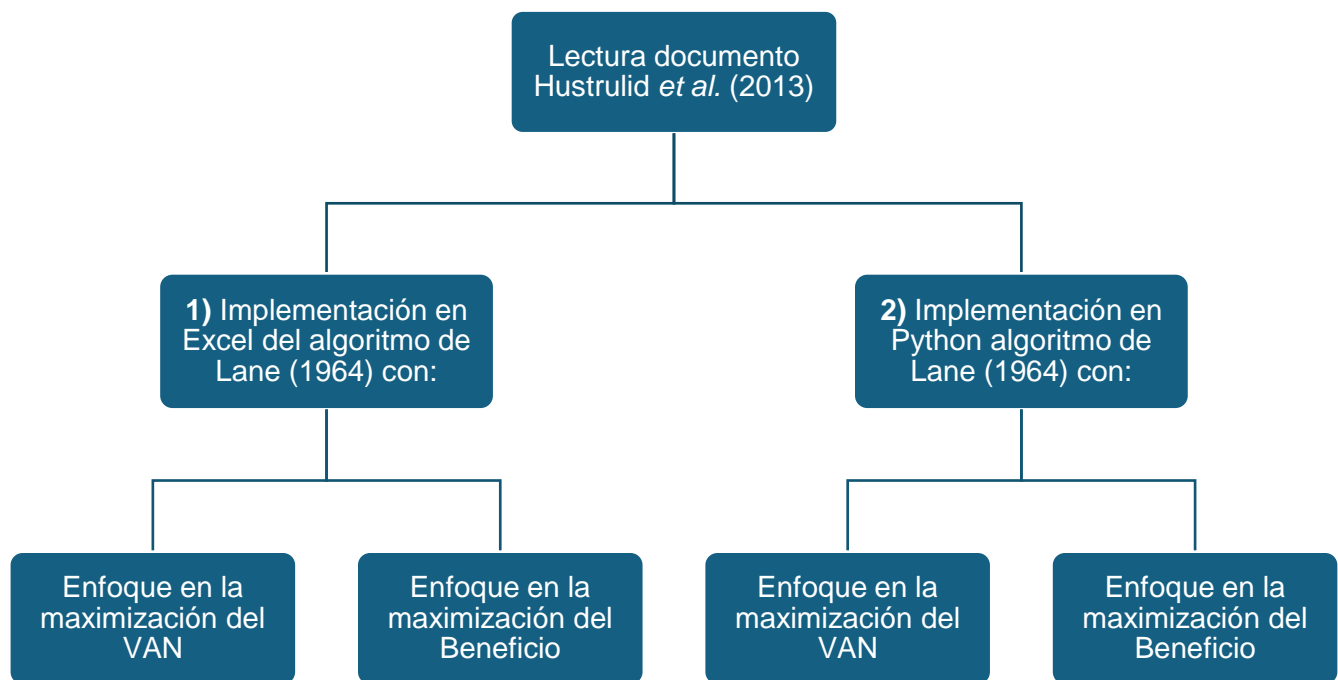


Figura 1: Primera parte de la metodología – implementación algoritmo de Lane (1964).

En la Figura 1 se presentan los pasos a seguir en la primera parte de la metodología. Se comienza con el documento *Open Pit Mine Planning & Design (2013)*, que explica detalladamente el funcionamiento del algoritmo de Lane mediante un ejemplo práctico de un depósito de cobre hipotético con una sola fase de extracción. Este ejemplo se implementa inicialmente en Excel con el objetivo de comprender el algoritmo a profundidad. Una vez validado, se traslada al lenguaje de programación Python para su implementación.

2.2. Implementación del algoritmo de Asad y Topal (2011)

Tiene como objetivo implementar en Python la extensión del algoritmo de Lane con enfoque en la maximización del VAN, incorporando la capacidad de acopio y factores de escala en precio y costos, para luego aplicarlo a 2 casos de estudios y evaluar el efecto que tienen en el VAN de los planes de producción de largo plazo.

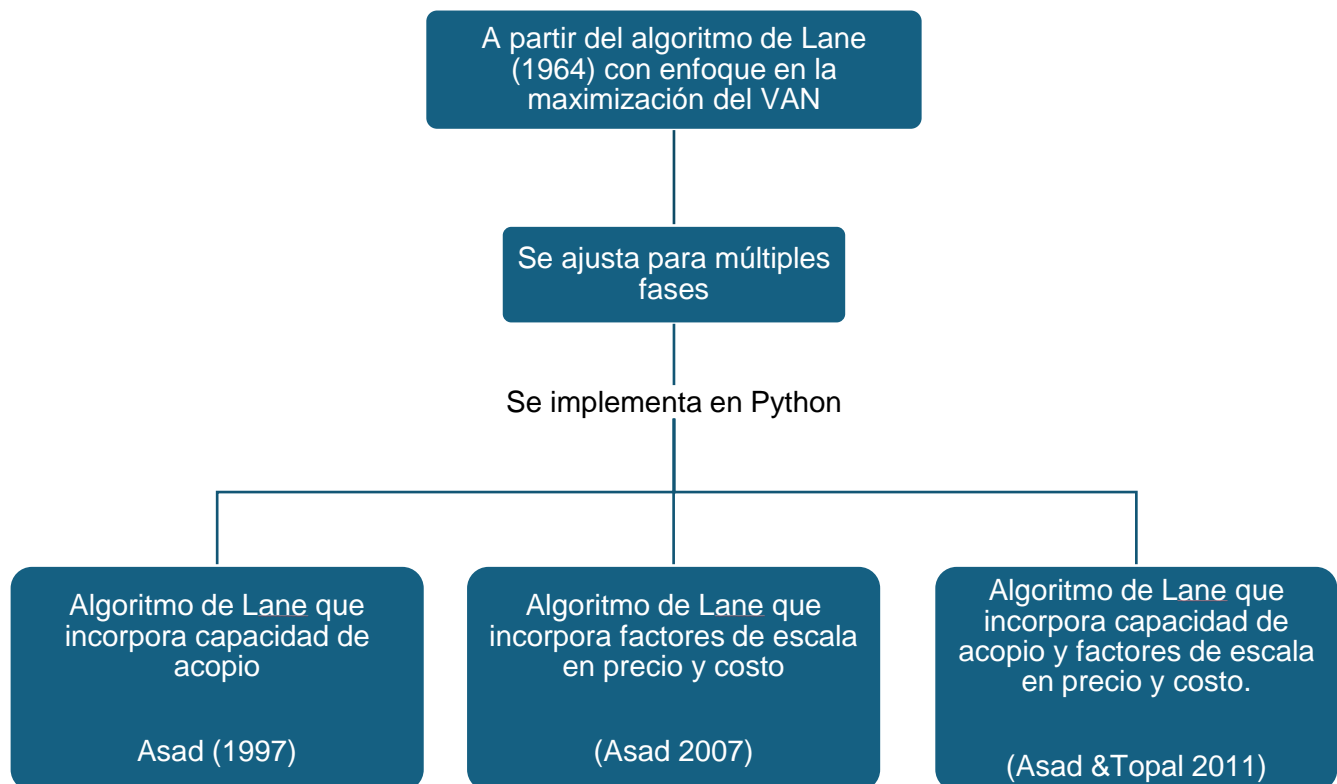


Figura 2: Segunda parte de la metodología – implementación algoritmo de Asad y Topal (2011).

En la Figura 2 se observa la segunda parte de la metodología. En primer lugar, se ajusta para múltiples fases el algoritmo de Lane con enfoque en la maximización del VAN implementado en Python. Para luego implementar los siguiente 3 algoritmos que lo extienden:

- Algoritmo de Asad (1997) el cual incorpora la capacidad de acopio.
- Algoritmo de Asad (2007) el cual incorpora los factores de escala en precio y costos.
- Algoritmo de Asad y Topal (2011) el cual incorpora la capacidad de acopio y factores de escala en precio y costos.

3. Marco teórico

3.1. Ley de corte

La ley de corte es un término que se compone de 2 palabras: “**ley**”, que corresponde al contenido o la concentración del metal de interés presente en un bloque de material, y “**corte**” hace referencia al umbral o limite que determina la separación entre 2 tipos de materiales o destinos. Por lo que, la ley de corte es la mínima concentración del metal que debe tener para ser rentable la extracción, ayuda a discriminar o separar entre lo que es estéril o mineral, es decir, define el destino del material extraído de la mina.

Generalmente se conocen 2 tipos de leyes de corte, la ley de corte crítica y la ley corte marginal las cuales se explican a continuación.

3.1.1. Ley de corte crítica

Jélvez (2017) menciona que la ley de corte crítica se obtiene a partir de la ecuación (1), que representa el valor de un bloque que se extrae, procesa y vende en el mercado.

$$V_{bloque} = ((P - C_{r\&v}) \cdot R \cdot g_b - C_m - C_p) \cdot M \quad (1)$$

Donde: P es el precio del metal, $C_{r\&v}$ es el costo de refinería y venta, R es la recuperación global del metal, g es la ley del bloque de material, C_m es el costo mina, C_p es el costo planta y M es tonelaje del bloque de material.

La ley de corte crítica (LCC) corresponde a la ley en la cual los ingresos son igual a los egresos, es decir, el beneficio es igual a cero. Por lo tanto, se tiene:

$$0 = ((P - C_{r\&v}) \cdot R \cdot LCC - C_m - C_p) \cdot M \quad (2)$$

Despejando la LCC de la ecuación (2) se tiene que:

$$LCC = \frac{(C_m + C_p)}{(P - C_{r\&v}) \cdot R} \quad (3)$$

En la Figura 1 se representa gráficamente la ecuación (1) que corresponde a la recta del valor de bloque procesado en función de la ley de corte y se puede observar que las leyes mayores a la LLC tienen un valor de bloque procesado o beneficio positivo.

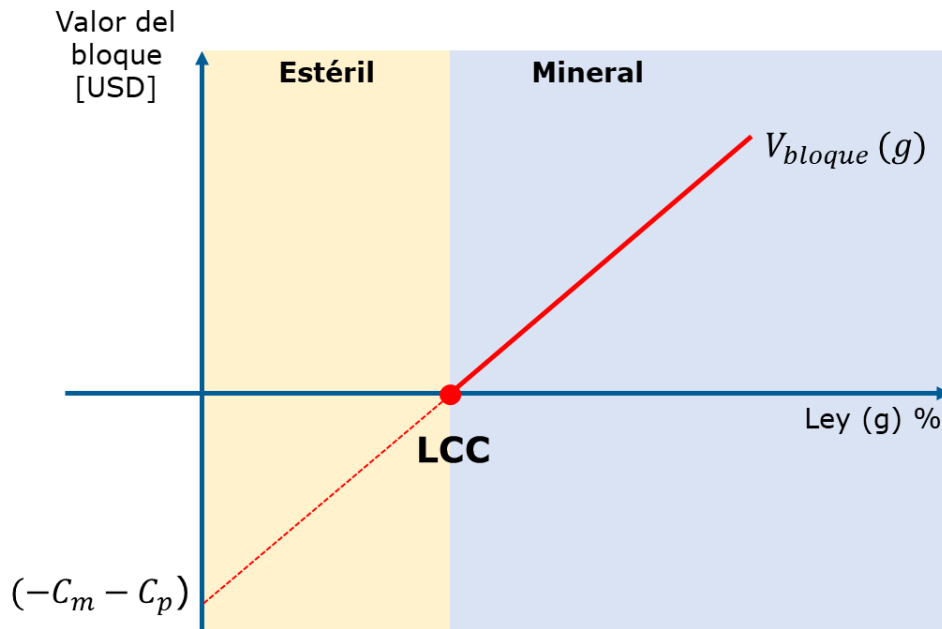


Figura 3: Representación de la LCC, en relación con el valor de bloque procesado en función de la ley de corte (Jélvez, 2017).

3.1.2. Ley de corte marginal

Por otro lado, Jélvez (2017) señala que a partir de la intersección entre la ecuación del valor de bloque procesado y la ecuación del valor de bloque enviado a botadero, se puede determinar la Ley de Corte Marginal (LCM).

La ecuación del valor de bloque enviado a botadero se expresa como:

$$V_{botadero} = -C_m \cdot M \quad (4)$$

Al igualar la ecuación (1) y (4), se tiene:

$$-C_m \cdot T = ((P - C_{r\&v}) \cdot R \cdot LCM - C_m - C_p) \cdot M \quad (5)$$

Despejando LCM, se obtiene

$$LCM = \frac{C_p}{(P - C_{r\&v}) \cdot R} \quad (6)$$

En la Figura 4 se muestra la intersección entre la recta del valor de bloque procesado V_{bloque} (en rojo) y la recta del valor de bloque enviado a botadero $V_{botadero}$ (en verde) la cual determina la ley de corte marginal (LCM). En este caso, la decisión de enviar a botadero o a la planta se basa en comparar el valor de bloque de ambas opciones.

- En la zona de estéril, el valor de enviar el bloque al botadero es mayor que el valor de procesarlo, por lo que la decisión óptima es enviar el material al botadero.
- En la zona de mineral, el valor de procesar el bloque supera el valor del enviarlo a botadero, por lo que la decisión óptima es enviar el material a la planta.

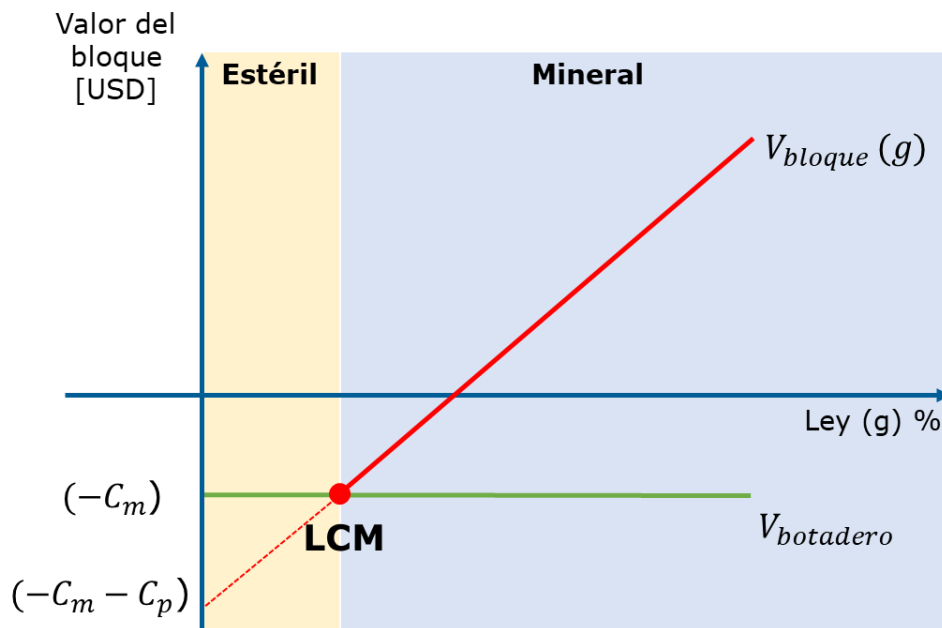


Figura 4: Representación de la LCM, en relación con el valor de bloque procesado y valor de bloque enviado a botadero (Jélvez, 2017).

3.1.3. Efecto del precio y costo en la ley de corte

Como se puede observar de las ecuaciones (3) y (6), la ley de corte está influenciada directamente por los costos y el precio del metal de interés. A continuación, se analiza los efectos en la ley de corte debido a cambios en el precio y los costos.

Cuando el precio se mantiene constante:

- Si los costos aumentan, la ley de corte aumenta.
 - Los mayores costos hacen que solo el mineral de mayor ley sea económicamente rentable.
- Si los costos disminuyen, la ley de corte disminuye.
 - Los menores costos permiten procesar material de menor ley.

Cuando los costos se mantienen constante:

- Si el precio aumenta, la ley de corte disminuye.
 - Un precio más alto hace que más material sea económicamente rentable, incluyendo material de menor ley.
- Si el precio disminuye, ley de corte aumenta.
 - Con precios más bajos, solo el material de alta ley sigue siendo rentable.

En la Tabla 1 se resume los efectos en la ley de corte debido a cambios en los costos y precio.

Tabla 1: Impacto de costos y precio en la ley de corte.

Condición	Cambio	Efecto en la ley de corte	Explicación
Precio constante	Costos aumenta	Ley de corte aumenta	mayores costos exigen procesar solo material de alta ley
	Costos disminuyen	Ley de corte disminuye	menores costos permiten procesar material de baja ley
costos constantes	Precio aumenta	Ley de corte disminuye	Más material es rentable con precios altos
	Precio disminuye	Ley de corte aumenta	Solo material de alta ley es rentable con precios bajos

3.2. Uso de acopio en minas a cielo abierto

Los acopios son una parte integral de la operación en minas a cielo abierto, desempeñando un rol clave en la optimización de los recursos minerales y en la mejora de la eficiencia operativa. Un acopio se define como el almacenamiento temporal de mineral o material estéril extraído de un yacimiento, con el objetivo de ser procesado más tarde o utilizado en diferentes fases de la operación minera. Los acopios no solo facilitan el manejo del mineral, sino que también permiten a las minas adaptarse a cambios en las condiciones operativas y de mercado, ofreciendo flexibilidad en la gestión de los recursos (Chanda, 1990).

Ventajas del uso de acopio:

– Flexibilidad en la planificación

Los acopios permiten una mayor flexibilidad en la gestión de los recursos mineros. En operaciones donde el material extraído incluye una mezcla de minerales de diferentes leyes, el acopio facilita el almacenamiento temporal de materiales con baja ley que no son procesados de inmediato. Esto permite priorizar el tratamiento de materiales de alta ley, lo que optimiza la utilización de la capacidad de la planta y asegura una mayor recuperación económica en las primeras etapas de operación (Chanda, 1990).

Además, los acopios son esenciales en escenarios donde las condiciones geológicas o de mercado cambian. Por ejemplo, en caso de fluctuaciones en los precios de los metales, los materiales almacenados pueden ser revaluados y procesados cuando los precios sean más favorables, maximizando el beneficio económico (Runge, 1998).

– Reducción de riesgos operativos

Otra ventaja significativa del uso de acopios es la mitigación de riesgos operativos. En operaciones a cielo abierto, factores como condiciones climáticas adversas, interrupciones en la maquinaria o problemas logísticos pueden afectar la continuidad del suministro de mineral a la planta. Los acopios actúan como un amortiguador que garantiza un flujo constante de material, reduciendo los riesgos asociados a paradas imprevistas en la producción (Fourie & Fletcher, 2001).

– Optimización del transporte y reducción de costos

El acopio también contribuye a la optimización de las operaciones de transporte. En minas a cielo abierto, el traslado del mineral desde el frente de trabajo hasta la planta puede representar un costo significativo. Al implementar acopios estratégicamente ubicados, es posible reducir las distancias de transporte en ciertas etapas de la operación, disminuyendo los costos asociados al uso de camiones y combustible (Camus, 2002).

– Gestión óptima de la mezcla de mineral.

Desde una perspectiva de largo plazo, el uso de acopios permite una mejor planificación del recurso minero. Esto es especialmente útil en minas con depósitos heterogéneos, donde las leyes de los minerales pueden variar considerablemente en diferentes sectores del yacimiento. Al acopiar material de baja ley, la mina puede diseñar planes de mezcla para mantener una alimentación estable a la planta y cumplir con las especificaciones técnicas requeridas para el procesamiento (Kuchta et al., 2004).

– **Contribución a la sostenibilidad**

En el contexto actual, donde la sostenibilidad es un aspecto clave en la industria minera, los acopios también ofrecen ventajas ambientales. Al minimizar los movimientos innecesarios de material y optimizar el uso de recursos, se reduce la huella de carbono de la operación. Asimismo, el acopio de materiales estériles o de baja ley que no se procesan de inmediato permite evaluar opciones de revalorización o disposición final en etapas posteriores, promoviendo una gestión más eficiente y responsable de los recursos (Laurence, 2011).

En conclusión, el uso de acopios en minas a cielo abierto es una herramienta estratégica que aporta flexibilidad, eficiencia y resiliencia a las operaciones mineras. Estas ventajas se traducen en una mejora significativa de los indicadores económicos y operativos, al tiempo que permiten afrontar los desafíos asociados a la variabilidad de los depósitos y las condiciones del mercado.

3.3. Algoritmo de optimización de leyes de corte

3.3.1. Algoritmo de Lane (1964)

Lane (1964) publicó un algoritmo de optimización de leyes de corte que a través de un proceso iterativo encuentra la ley de corte óptima para cada año con el objetivo de maximizar el VAN del plan de producción de una mina a cielo abierto. Este modelo requiere como datos de entrada los parámetros económicos – operacionales y distribución tonelaje-ley de las fases.

En la Figura 5 se presenta el modelo de Lane el cual consta de tres etapas principales: mina, planta y refinería. La mina es la etapa en donde se extraen el mineral y el estéril, la planta es la etapa donde el mineral se convierte en un concentrado y la refinería es el lugar donde se llevan a cabo los procesos de acabado para producir el producto final (Asad, 1997).

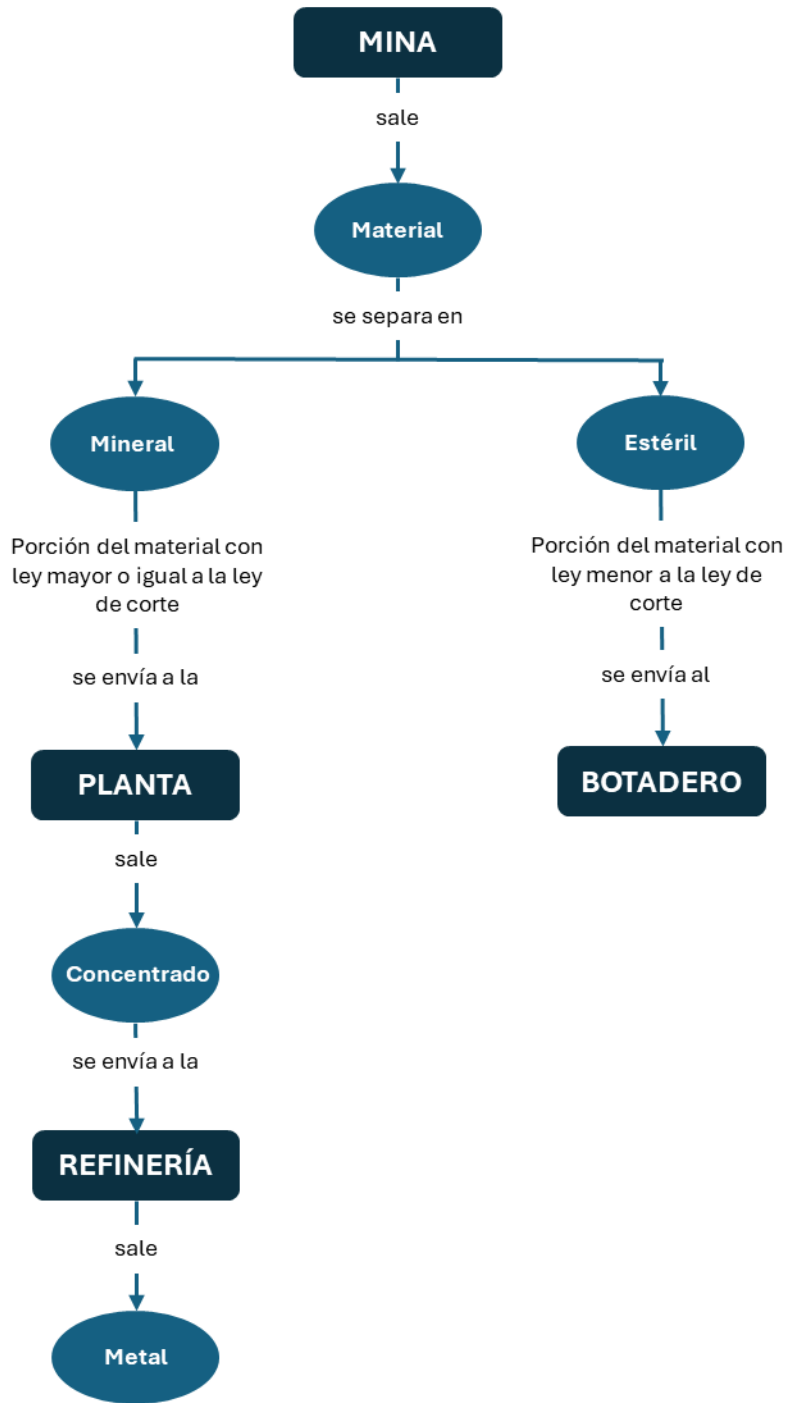


Figura 5: Diagrama de flujo del modelo descrito por el algoritmo de Lane (1964)

a continuación, se presentan los parámetros utilizados en el modelo de Lane (Hustrulid et al., 2013)

Parámetros operacionales:

- ***M***: capacidad máxima de la mina, es decir, es la máxima cantidad de material (mineral y estéril) que la mina puede producir en un determinado tiempo (*t/año*).
- ***C***: capacidad máxima de la planta, es decir, es la máxima cantidad de mineral con la que se puede alimentar a la planta (*t/año*), se asume que no hay restricción en la disponibilidad de mineral que alimenta la planta.
- ***R***: capacidad máxima de producción de la refinería, es decir, es la máxima cantidad de metal producido en un periodo de tiempo. (*t/año*), se asume que no hay restricción en la disponibilidad del concentrado que alimenta a la refinería.
- ***y***: recuperación global del metal de interés.

Parámetros económicos:

- ***m***: es el costo mina expresado en \$/t de material movido o extraído (mineral y estéril), se asume que es el mismo independiente si es mineral o estéril. este costo incluye, la perforación, tronadura, carguío, transporte, etc.
- ***c***: es el costo de planta expresando en \$/t de mineral procesado, el cual incluye chancado, molienda, flotación, lixiviación, etc.
- ***r***: es el costo refinación o venta expresado en \$/t de mineral refinado, el cual incluye todos los costos incurridos en las etapas de producción y venta, como fundición, refinación, embalaje, flete, seguro, etc.
- ***f***: es el costo fijo, Incluye todos los costes, tales como el alquiler, la administración, el mantenimiento de carreteras y edificios, etc., que son independientes de los niveles de producción
- ***s***: es el precio de venta del metal expresando en \$/t de metal refinado.
- ***d***: es la tasa de descuento expresada en %.

Cantidades:

- ***T***: es la duración del periodo de producción que se está considerando.
- ***Q_m***: es la cantidad de material (mineral + estéril) que se extrae de la mina durante el periodo de producción.

- Q_c : es la cantidad de mineral enviado a planta durante el periodo de producción.
- Q_r : es la cantidad de metal (Fino) producido durante el periodo de producción.

Tabla distribución tonelaje-ley:

Tabla 2: Ejemplo de una distribución tonelaje-ley para un depósito de cobre hipotético.

Intervalo	Ley de Cu %	Material [t]
1	0,00 - 0,15	14.400.000
2	0,15 - 0,20	4.600.000
3	0,20 - 0,25	4.400.000
4	0,25 - 0,30	4.300.000
5	0,30 - 0,35	4.200.000
6	0,35 - 0,40	4.100.000
7	0,40 - 0,45	3.900.000
8	0,45 - 0,50	3.800.000
9	0,50 - 0,55	3.700.000
10	0,55 - 0,60	3.600.000
11	0,60 - 0,65	3.400.000
12	0,65 - 0,70	3.300.000
13	0,70 - 1,56	42.300.000
total		100.000.000

En la Tabla 2 se presenta un ejemplo de distribución tonelaje-ley, donde cada intervalo está definido por un tonelaje cuyo contenido de metal valioso se encuentra entre una ley inferior y una ley superior, donde el límite inferior es cerrado y el límite superior es abierto. además, cada fase tiene su propia distribución tonelaje-ley.

La ley puede expresarse en porcentajes %, gramos por tonelada g/t, libras por toneladas lb/t u otra unidad adecuada. Por lo tanto, dependiendo de la unidad utilizada ciertas ecuaciones y cálculos pueden variar, por esto se recomienda realizar un análisis dimensional.

Se asume que la distribución tonelaje-ley de la fase se mantiene siempre constante, Esto significa que, independiente de cuál sea la cantidad de toneladas extraídas, la proporción de tonelaje en cada intervalo de ley permanece constante, esto implica que:

- I. En la distribución tonelaje-ley de la cantidad de material que se extrae Q_m , los tonelajes de cada intervalo están en proporción con los tonelajes correspondientes en la distribución tonelaje-ley de su respectiva fase.

- II. Al calcular las reservas restantes de una fase en un periodo, se asume que la distribución tonelaje-ley conserva la proporción en los tonelajes.

Las ecuaciones básicas

A continuación, se presentan las ecuaciones básicas las cuales se deducen en la sección 12.4 del Anexo A. La ecuación (7) corresponde al beneficio económico obtenido al extraer una cantidad Q_m de material. Por otro lado, la ecuación (8) corresponde al valor presente la cual se deriva a partir de la ecuación del beneficio y del incremento de valor presente obtenido al extraer la siguiente cantidad Q_m de material.

Ecuación del beneficio:

$$P = (s - r)Q_r - cQ_c - mQ_m - fT \quad (7)$$

Ecuación del valor presente:

$$v = (s - r)Q_r - cQ_c - mQ_m - T(f + Vd) \quad (8)$$

En la ecuación (8), v es el incremento del valor actual neto por unidad de recurso utilizado. Dado que los beneficios posteriores se descuentan más que los obtenidos anteriormente, la extracción debe programarse de tal manera que se produzca rápidamente una disminución en el valor presente. La maximización del VAN requiere maximizar el valor de v (Kalitenge, 2021).

Asad (1997) explica los 2 tipos de leyes de cortes que definió Kenneth Lane:

1. **Las leyes de corte económicas** las cuales son 3 y se derivan teniendo en cuenta que cada etapa por sí sola limita la operación minera. Estas leyes de corte dependen directamente del precio y los costos. además de que toman en cuenta el costo de oportunidad del dinero y la restricción de capacidad de su respectiva etapa.
2. **Leyes de corte de equilibrio** las cuales son 3 y se derivan de equilibrar las capacidades de cada par de etapas. Son independientes de los parámetros económicos y dependen de la distribución ton-ley de la fase y de las capacidades de las etapas.

Leyes de corte económicas

Utilizando la ecuación del valor presente y suponiendo que las capacidades de la mina, planta y refinería limitan la operación de forma independiente, se puede encontrar las 3 leyes de corte económicas, las cuales se explican en la sección 12.5 del Anexo A.

Las ecuaciones (9), (10) y (11) representan, respectivamente, las leyes de corte económicas correspondientes a la mina, planta y refinería.

$$g_m = \frac{c}{(s-r)y} \quad (9)$$

$$g_c = \frac{c + \frac{f + Vd}{C}}{(s-r)y} \quad (10)$$

$$g_r = \frac{c}{\left[s - r - \frac{(f + Vd)}{R} \right] y} \quad (11)$$

El valor de V en las ecuaciones (10) y (11) es inicialmente desconocido. Para encontrar las leyes de corte óptimas, se requiere de un proceso iterativo que comienza considerando V igual cero y finaliza cuando la diferencia de 2 valores sucesivos de V es igual a cero o cumple cierta tolerancia (Kalitenge, 2021).

- La ley de corte económica para la mina (g_m) es la misma que la ley de corte marginal (LCM)
- El término de valor presente Vd en las ecuaciones (10) y (11) es el costo de oportunidad. Es un costo de tiempo adicional de clasificar el material como mineral. Dado que el VAN de la operación sigue disminuyendo con el agotamiento de los recursos, las leyes de corte económicas también disminuirán con el tiempo (Kalitenge, 2021).

Leyes de corte de equilibrio

Con el fin de ilustrar cómo se determina cada ley de corte de equilibrio, se presentan ejemplos específicos para cada uno de los casos: mina-planta, mina-refinería y refinería-planta mediante una interpretación gráfica.

Para un análisis detallado y el procedimiento completo, se recomienda consultar la sección 12.6 del Anexo A. En esta sección, se explica cómo construir las tablas que dan lugar a las figuras y se proporcionan ejemplos prácticos para obtener los valores de las 3 leyes de equilibrio.

En la Figura 6 se observa la ley de corte de equilibrio mina – planta (g_{mc}) la cual se define como la ley de corte en la que el ratio Q_c/M es igual a C/M .

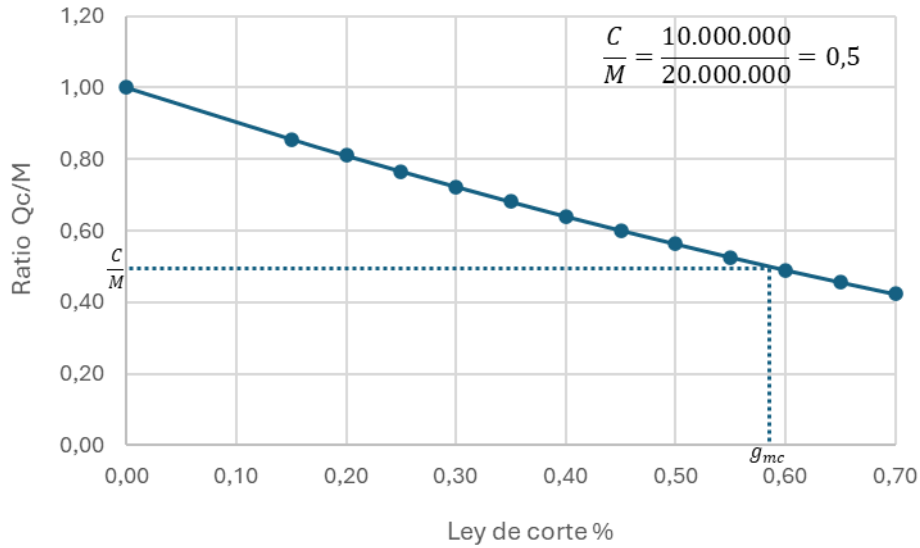


Figura 6: Determinación de la ley de corte de equilibrio mina planta.

Por otro lado, en la Figura 7 se observa la ley de corte de equilibrio mina – refinería (g_{mr}) la cual se define como la ley de corte en la que el ratio R/Q_m es igual a R/M .

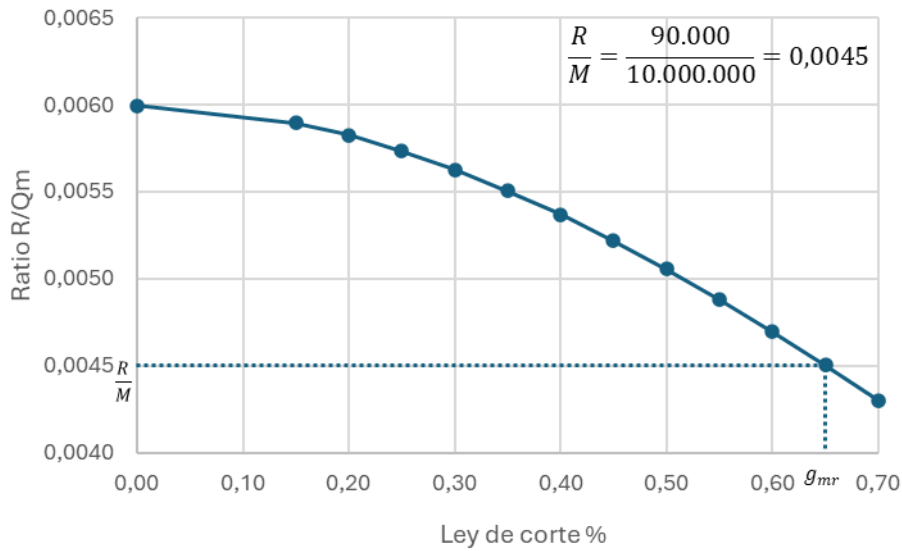


Figura 7: Determinación de la ley de corte de equilibrio mina refinería.

Finalmente, en la Figura 8 se observa la ley de corte de equilibrio planta – refinería (g_{rc}) la cual se define como la ley de corte en la que el ratio Qr/C es igual a R/C .

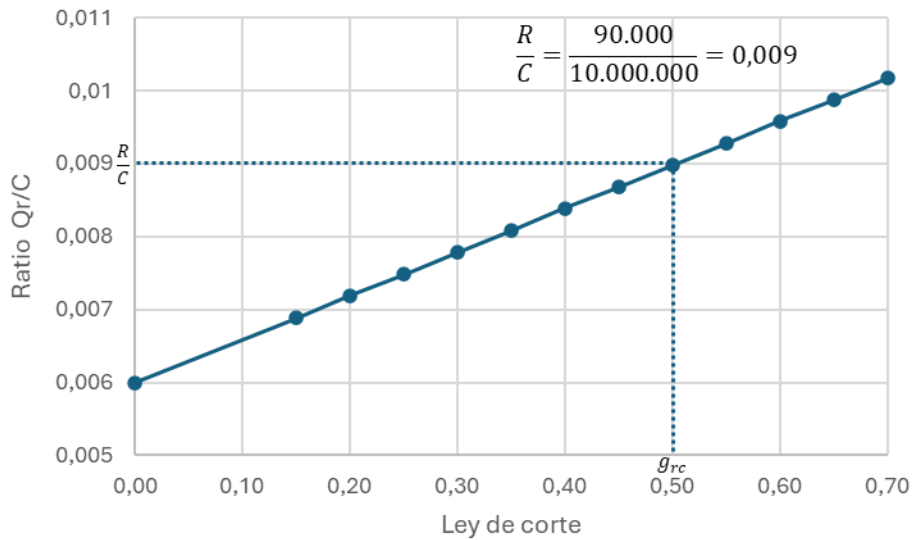


Figura 8: Determinación de la ley de corte de equilibrio planta refinería.

En el caso de que algunos de los valor de C/M , R/M o R/C se encuentre fuera de los límites de los ratios en su respectiva gráfica, la ley de corte de equilibrio respectiva se establecerá como el valor de la ley de corte más cercana.

Por otro lado, si alguno de los valores de C/M , R/M o R/C se encuentre entre 2 valores de ratios en la gráfica, se determina la ley de corte de equilibrio correspondiente utilizando una interpolación lineal, independiente de la forma de la curva de ratios.

Por último, si alguno de los valores de C/M , R/M o R/C coincide exactamente con un valor de ratio en la gráfica, entonces la ley de corte de equilibrio será igual a la ley de corte correspondiente a ese ratio.

Ley de corte óptima

Finalmente, la ley de corte óptima corresponde a una de estas seis leyes de corte, ya sea una ley de corte económica o una ley de corte de equilibrio y para encontrar la ley de corte óptima se aplican lo siguiente:

$$G_{mc} = \begin{cases} g_m, & \text{si } g_{mc} \leq g_m \\ g_c, & \text{si } g_{mc} \geq g_c \\ g_{mc}, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (12)$$

$$G_{mr} = \begin{cases} g_m, & \text{si } g_{mr} \leq g_m \\ g_r, & \text{si } g_{mr} \geq g_r \\ g_{mr}, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (13)$$

$$G_{rc} = \begin{cases} g_r, & \text{si } g_{rc} \leq g_r \\ g_c, & \text{si } g_{rc} \geq g_c \\ g_{rc}, & \text{caso contrario} \end{cases} \quad (14)$$

Finalmente, la ley de corte óptima se obtiene a partir de la siguiente expresión.

$$G = \text{mediana} (G_{mc}, G_{mr}, G_{rc}) \quad (15)$$

3.3.2. Algoritmo de Asad (1997)

Asad (1997) menciona que una política de ley de corte óptima generalmente indica una disminución en las leyes de corte durante la vida de la operación minera, principalmente debido al efecto de la disminución de su valor presente. Debido a esta naturaleza decreciente, las leyes de corte óptimas toman un valor mucho más alto que la ley de corte de equilibrio durante los años iniciales. Una de las implicaciones de este fenómeno es que las leyes que son marginalmente económicas de tratar en los

primeros años no se procesan debido a la presencia de minerales de mayor valor económico, y este material marginal se puede tratar económicamente más tarde.

El material mineralizado con leyes entre las leyes de corte óptima y de equilibrio se denomina material acopiado. Por lo tanto, dependiendo de las instalaciones disponibles, se puede considerar la estrategia de acopios. La idea tiene atractivos evidentes, porque mejora el valor actual neto de la operación.

Sin embargo, la idea tiene algunos inconvenientes. En primer lugar, la logística de crear un acopio separado, o incluso varios acopios si el rango de leyes intermedias es amplio, nunca es sencilla. Esto dependerá del tamaño del sitio minero y de la naturaleza del terreno circundante, pero el espacio siempre es limitado. Esto se debe a la necesidad de áreas para botaderos de estériles, depósitos de relaves, estanques de decantación, acopios de mineral triturado, almacenamiento de residuos, instalaciones de mantenimiento, entre otros. Un requisito adicional para almacenar material, que podría representar un tonelaje sustancial y que debe mantenerse separado, posiblemente durante muchos años, puede implicar rediseñar gran parte de la disposición del sitio y extender las rutas de transporte.

Se incurrirá en varios costos adicionales. Habrá costos asociados con trayectos más largos y costos de remanaje cuando se recuperen los acopios. Esto se debe a que el sistema de transporte en minas a cielo abierto, en operaciones rutinarias, funciona de manera que un camión, después de cargar mineral o estéril desde la frente de extracción, se dirige a la planta en el caso del mineral o al botadero en el caso del estéril. Por lo tanto, la inclusión de una nueva posibilidad, como los acopios para el almacenamiento de mineral, puede aumentar las distancias de transporte. Sin embargo, con el uso de sistemas modernos y computarizados, la asignación de camiones ya no debería ser un problema, ya que esto puede considerarse como la adición de un nuevo botadero al sistema. Además, habrá un costo de capital asociado con la instalación de acopios y cualquier equipo auxiliar necesario. Es importante enfatizar que los requisitos de muestreo serán mayores y más exhaustivos, debido a que las diferencias entre el mineral que se envía a cada punto de descarga son pequeñas. Por lo tanto, se necesita un mejor control del inventario de leyes en comparación con el sistema clásico. Sin embargo, el material proveniente de los barrenos de voladura es el mejor representante de las leyes que se obtendrán de la voladura del banco actual. Esto significa que podemos obtener información muy precisa sobre la distribución de las leyes en el área que será tronada.

Otra consideración importante para tener en cuenta es que el material puede deteriorarse durante la larga exposición al ambiente. Puede ocurrir lixiviación, con la consiguiente pérdida de mineral. La oxidación puede generar dificultades en la planta de tratamiento y causar bajas recuperaciones, lo que será otra posible fuente de costos adicionales. Tales efectos no siempre son fáciles de anticipar, ya

que el comportamiento del material en un entorno particular puede no ser completamente comprendido sin varios años de experiencia.

Descripción del modelo

En la Figura 9 se presenta el modelo del algoritmo de Asad (1997) que considera la opción de acopiar mineral a lo largo de la vida de la mina y luego, el procesamiento de mineral del acopio ocurre una vez que el mineral de mina se agota.

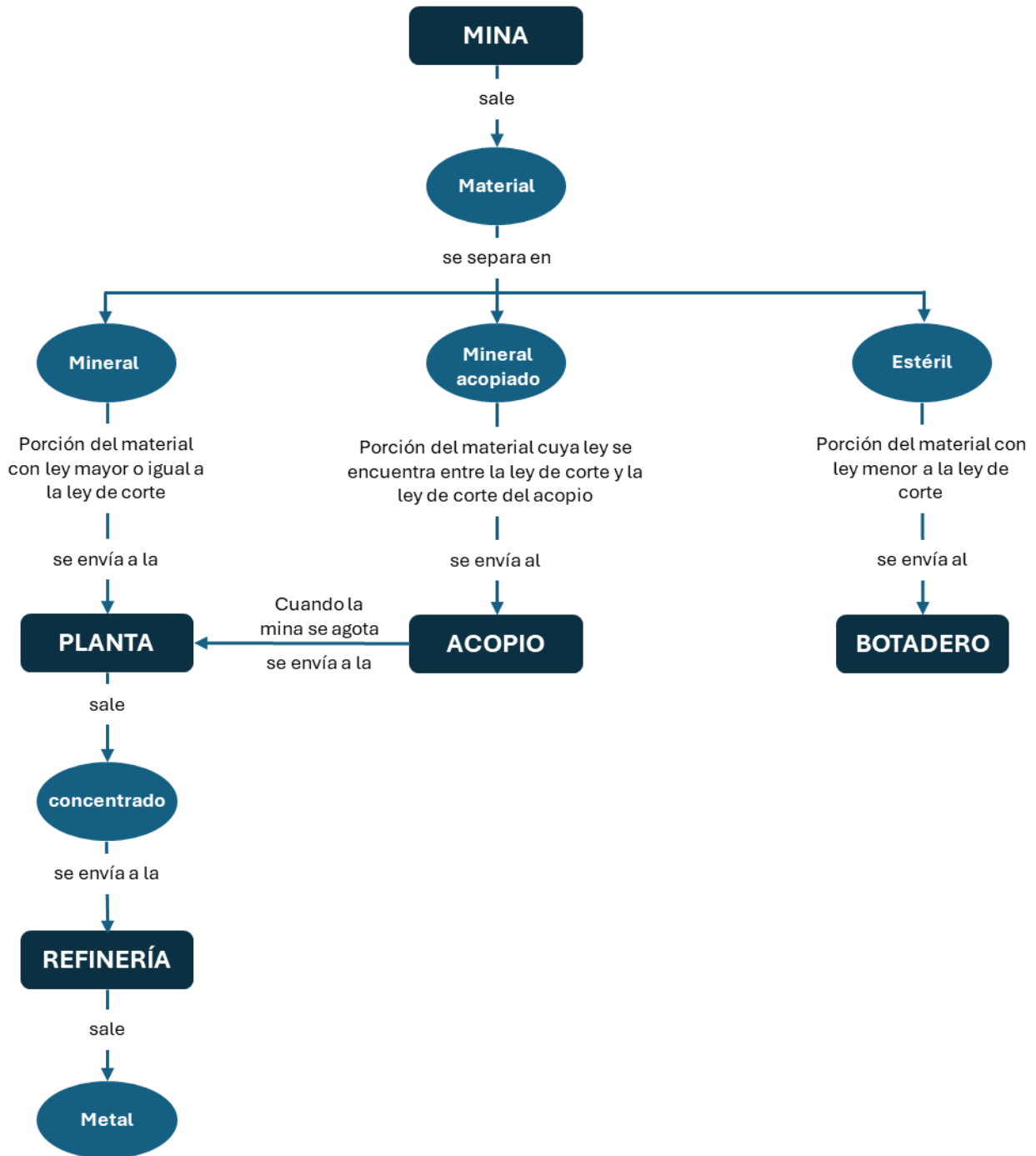


Figura 9: Diagrama de flujo del modelo del algoritmo de Asad (1997).

Descripción del sistema

En el sistema propuesto, el acopio se genera con material que está por debajo de la ley de corte para cada período, pero que está por encima de la ley de corte más baja para todo el plan de producción. El

costo de manejo del acopio es del 45% del costo mina. Este se compone de un 40% correspondiente al manejo de material y un 5% correspondiente a supervisión.

Por lo tanto, los acopios se generan a lo largo de la vida útil de la mina, y cuando las fases de extracción de la mina están completamente agotadas, los acopios se consideran como un nueva fase de extracción. Es decir, calculamos la ley de corte óptima, la cantidad de material que se enviará a la planta y las ganancias que se obtendrán de la misma manera que lo hacemos para las fases de la mina.

3.3.3. Algoritmo de Asad (2007)

El precio del metal y los costos en las etapas de extracción, procesamiento y refinamiento cambian durante la vida útil de la mina, y esto sucede con bastante frecuencia debido a la usualmente larga vida útil de la mayoría de las operaciones mineras a cielo abierto (Asad, 2005). Ignorar el efecto de estos cambios en los parámetros económicos sobre la política de ley de corte óptima conduciría a un análisis de diseño de mina poco realista. Como una extensión de la teoría establecida por Lane (1964) sobre las leyes de corte óptimas, y para facilitar el análisis de diversos escenarios que surgen debido al aumento de precios del metal y costos, es que Asad (2007) presenta un algoritmo de optimización de ley de corte que considera la variación dinámica del precio del metal y la escalada de costos durante la vida útil de la mina.

Metodología

La implementación del algoritmo es posible en situaciones donde se ha desarrollado un modelo de bloques de reservas de mineral y, posteriormente, se han completado los planes mineros de corto y largo plazo, incluyendo el desarrollo de los límites finales del rajo y las fases de extracción (una porción manejable del depósito dentro de los límites finales del rajo que puede ser extraída, procesada y refinada en un número determinado de años o períodos) (Asad, 2005). Además de la distribución tonelaje-ley en cada fase, se asume que se conocen los parámetros como las capacidades de las etapas de extracción, procesamiento y refinación, los costos operativos de estas etapas y el precio actual del metal. Esta suposición es realista en casos donde la operación minera a cielo abierto en cuestión se encuentra en las etapas finales del estudio de factibilidad o en producción (Asad, 2007).

Al considerar factores de escala en precio y costos, se tiene que el precio se ajusta de acuerdo con la ecuación (16) y el costo refinería, mina, planta y fijo se ajustan de acuerdo con las ecuaciones (17), (18), (19) y (20), respectivamente.

$$s_i = s(1 + z_s)^i \quad (16)$$

$$r_i = r(1 + z_r)^i \quad (17)$$

$$m_i = m(1 + z_m)^i \quad (18)$$

$$c_i = c(1 + z_c)^i \quad (19)$$

$$f_i = f(1 + z_f)^i \quad (20)$$

Donde: s_i, r_i, m_i, c_i, f_i son el precio del metal, el costo de refinería, el costo mina, el costo planta y el costo fijo ajustados al año i , respectivamente. Por otro lado, s, r, m, c, f son los valores iniciales para el precio del metal, el costo refinería, el costo mina, el costo planta y el costo fijo, respectivamente. Finalmente, z_s, z_r, z_m, z_c, z_f corresponden al factor de escala correspondiente al precio metal, costo refinería, costo mina, costo planta y costo fijo.

En cuanto al impacto de la escalada o ajuste de los parámetros económicos sobre el VAN podría ser enorme en los casos en que los costos operativos y fijos estén escalando a tasas (factores de escala) más altas. Esto podría cambiar algunas operaciones económicas a cielo abierto a un escenario no económico.

Al incorporar los factores de escala, las ecuaciones del beneficio y valor presente se modifican por las ecuaciones (21) y (22), respectivamente. Las deducciones de ambas ecuaciones se encuentran en Anexo B, sección 13.1.

$$P_i = (s_i - r_i)Q_r - c_iQ_c - m_iQ_m - f_iT \quad (21)$$

$$v_i = (s_i - r_i)Q_r - c_iQ_c - m_iQ_m - (f_i + Vd)T \quad (22)$$

Las tres leyes de corte económicas cambian con la escalada de los parámetros económicos. Sin embargo, las leyes de corte de equilibrio están influenciadas por la distribución tonelaje-ley del depósito, por lo que la escalada de los parámetros económicos no tiene ningún efecto sobre su cálculo (Asad,

2005). Tanto la leyes de corte de equilibrio como la ley de corte óptima se calcula de la misma manera que se menciona al final de la sección 3.3.1.

En las ecuaciones (23), (24) y (25) se presentan las leyes de corte económica para la mina, planta y refinería, respectivamente, considerando la escalada o ajuste de precio y los costos. Las deducciones de estas ecuaciones se encuentran en la sección 13.2 del Anexo B.

$$g_m = \frac{c_i}{(s_i - r_i)y} \quad (23)$$

$$g_c = \frac{c_i + \frac{f_i + Vd}{C}}{(s_i - r_i)y} \quad (24)$$

$$g_r = \frac{c_i}{\left[s_i - r_i - \frac{(f_i + Vd)}{R} \right] y} \quad (25)$$

3.3.4. Algoritmo de Asad y Topal (2011)

El efecto decreciente del VAN permite utilizar leyes de corte más altas en los primeros años de la vida útil de la mina y leyes de corte más bajas en los años posteriores debido al agotamiento del material de alta ley. Por lo tanto, dependiendo de las circunstancias existentes en una operación minera a cielo abierto, los planes de producción también pueden incluir la flexibilidad de generar acopios de mineral de baja ley extraído en los primeros años, para ser procesados más adelante cuando resulte económicamente viable hacerlo. Esto no solo prolonga la vida útil de la operación minera, sino que también aumenta su VAN. (Asad, 2005).

A continuación, se presenta el marco teórico expuesto por Asad & Topal (2011).

Para el cálculo del beneficio se utiliza la ecuación (21). Las leyes de corte económicas se determinan a partir de lo expuesto en la sección 3.3.3 del capítulo 3 y las leyes de equilibrio se determinan a partir de lo expuesto en la sección 3.3.1 del capítulo 3.

Una vez que se determinan las tres leyes de corte económicas límite, es decir, g_m , g_c y g_r y las tres leyes de corte de equilibrio, es decir, g_{mc} , g_{mr} y g_{cr} , se selecciona la ley de corte óptima G entre ellas. Las ecuaciones (23), (24) y (25) de las leyes de corte económicas revelan que, para una operación

minera, la ley de corte óptima nunca puede ser menor que g_m , ya que representa la ley de corte más baja (marginal). Además, la ley de corte óptima nunca puede exceder g_c , ya que esto podría programar parte del mineral valioso como desecho. Por lo tanto, la ley de corte óptima G se encuentra entre g_m y g_c , es decir, $g_m \leq G \leq g_c$. Si \tilde{m} representa el valor mediano, entonces el siguiente criterio dicta la selección de la ley de corte óptima:

$$G = \tilde{m}(\tilde{m}(g_m, g_c, g_{mc}), \tilde{m}(g_m, g_r, g_{mr}), \tilde{m}(g_r, g_c, g_{rc})) \quad (26)$$

El modelo propuesto de optimización de la ley de corte considera no solo el precio dinámico del metal y la escalada de costos, sino que también permite la creación de un acopio de mineral de baja ley durante la vida útil de la mina y su utilización como mineral después del agotamiento del depósito.

El acopio se utiliza después de que la mina se agota. Esto simplifica la toma de decisiones, ya que el acopio actúa como una porción adicional del depósito, donde todo el material disponible es económico. Sin embargo, el material de alta ley en el acopio está programado para ser utilizado antes que el material de baja ley.

Dado que la ley y la cantidad de material acopiado durante un período i también dependen de la determinación de la ley de corte óptima, la solución a este problema puede presentarse en dos pasos secuenciales. El primer paso determina la ley de corte óptima, y el segundo paso define la ley y la cantidad de material en el acopio.

3.3.5. Resumen de algoritmos de optimización de ley de corte

En la Tabla 3 se resumen los algoritmos de optimización de leyes de corte descritos e implementados en este trabajo.

Tabla 3: Resumen de algoritmos de optimización de leyes de corte.

Consideración	Algoritmo de Lane (1964)	Algoritmo de Asad (1997)	Algoritmo de Asad (2007)	Algoritmo de Asad y Topal (2011)
Maximización del VAN	✓	✓	✓	✓
Costo oportunidad del dinero	✓	✓	✓	✓
Distribución tonelaje-ley	✓	✓	✓	✓
Capacidad de mina, planta y refinería	✓	✓	✓	✓
Acopio al final de la vida de la mina	✗	✓	✗	✓
Factores de escala en precio y costos	✗	✗	✓	✓

4. Implementación algoritmo de Lane (1964)

Ley de corte de equilibrio: para encontrar las leyes de corte de equilibrio se utiliza la misma metodología descrita en la sección 12.6 del Anexo A.

Ley de corte económica: para encontrar las leyes de corte económicas para la mina, planta y refinería se utiliza las ecuaciones (9), (10) y (11) respectivamente, mencionadas en la sección 3.3.1 del capítulo 3.

Ley de corte óptima: para encontrar la ley de corte de óptima se utiliza la ecuación (15) mencionadas en la sección 3.3.1 del capítulo 3.

Ecuación del beneficio: el beneficio se calcula a partir de la ecuación (7) presentada en la sección 3.3.1 del capítulo 3.

4.1. Curva normalizada tonelaje ley

En la Tabla 4 se representa el supuesto de que el tonelaje se mantiene constante en cada intervalo en la distribución tonelaje-ley de una fase, independientemente de la cantidad de material extraído o de reservas restantes.

Tabla 4: Representación del supuesto de tonelaje constante en la distribución tonelaje-ley.

Intervalo	Ley de Cu %	Reserva inicial		Cantidad extraída		Reservas restantes	
		Material [t]	Proporción	Material [t]	Proporción	Material [t]	Proporción
1	0,00 - 0,15	14.400.000	14%	2.569.988	14%	11.830.012	14%
2	0,15 - 0,20	4.600.000	5%	820.969	5%	3.779.031	5%
3	0,20 - 0,25	4.400.000	4%	785.274	4%	3.614.726	4%
4	0,25 - 0,30	4.300.000	4%	767.427	4%	3.532.573	4%
5	0,30 - 0,35	4.200.000	4%	749.580	4%	3.450.420	4%
6	0,35 - 0,40	4.100.000	4%	731.733	4%	3.368.267	4%
7	0,4 - 0,45	3.900.000	4%	696.039	4%	3.203.961	4%
8	0,45 - 0,50	3.800.000	4%	678.191	4%	3.121.809	4%
9	0,50 - 0,55	3.700.000	4%	660.344	4%	3.039.656	4%
10	0,55 - 0,60	3.600.000	4%	642.497	4%	2.957.503	4%
11	0,60 - 0,65	3.400.000	3%	606.803	3%	2.793.197	3%
12	0,65 - 0,70	3.300.000	3%	588.956	3%	2.711.044	3%
13	0,70 - 1,56	42.300.000	42%	7.549.341	42%	34.750.659	42%
total		100.000.000	100%	17.847.142	100%	82.152.858	100%

Por lo tanto, en base a este supuesto se normaliza la curva tonelaje-ley expresando el tonelaje en proporciones. Esta normalización es fundamental, ya que permite aplicar la forma de la curva a diferentes cantidades de material. Al utilizar proporciones en lugar de valores absolutos de tonelaje, se asegura que la relación entre tonelaje y ley permanezca constante. Además, cada fase tiene su propia curva normalizada tonelaje-ley como la que se muestra en la Figura 10.

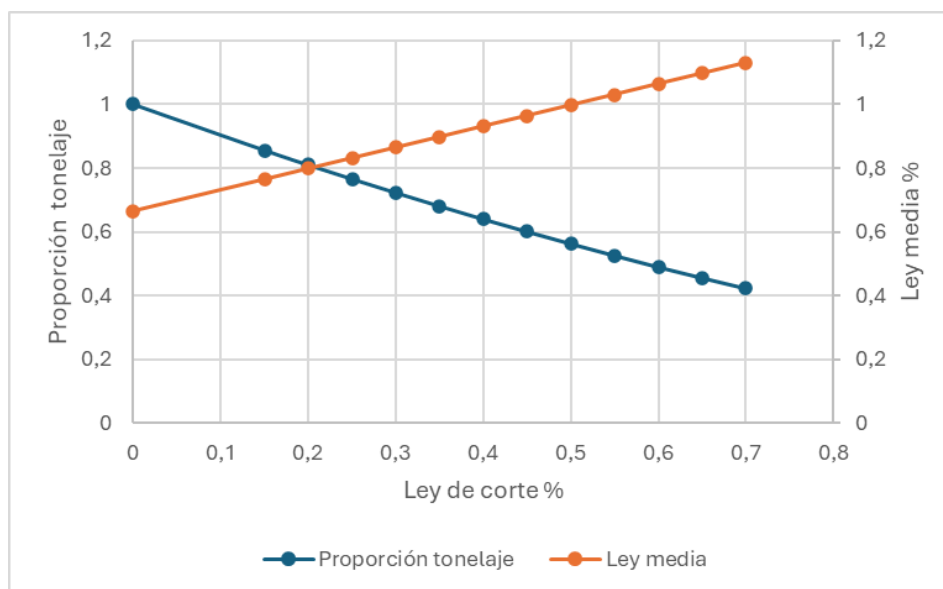


Figura 10: Ejemplo de curva normalizada tonelaje-ley.

Por último, independiente de la forma de las curvas se asume que existe una relación lineal entre cada par de punto, tanto para la proporción tonelaje como para la ley media. Esto significa que, para determinar los valores de la proporción tonelaje y ley media de cualquier ley de corte que se encuentre entre dos puntos de la curva, se pueden definir ecuaciones lineales por tramo.

En la Tabla 5 se presenta los valores de pendiente (m1) y coeficiente de posición (n1) para cada ecuación lineal por tramo de la proporción tonelaje de la curva normalizada tonelaje-ley.

Tabla 5: Ejemplo de ecuaciones lineales por tramo de la proporción tonelaje.

Tramo	Ley de corte i	Proporción tonelaje i	Ley de corte j	Proporción tonelaje j	m1	n1
1	0,00	1,00	0,15	0,86	-0,960	1,000
2	0,15	0,86	0,20	0,81	-0,920	0,994
3	0,20	0,81	0,25	0,77	-0,880	0,986
4	0,25	0,77	0,30	0,72	-0,860	0,981
5	0,30	0,72	0,35	0,68	-0,840	0,975
6	0,35	0,68	0,40	0,64	-0,820	0,968
7	0,40	0,64	0,45	0,60	-0,780	0,952
8	0,45	0,60	0,50	0,56	-0,760	0,943
9	0,50	0,56	0,55	0,53	-0,740	0,933
10	0,55	0,53	0,60	0,49	-0,720	0,922
11	0,60	0,49	0,65	0,46	-0,680	0,898
12	0,65	0,46	0,70	0,42	-0,660	0,885

En la Tabla 6 se presenta los valores de pendiente (m2) y coeficiente de posición (n2) para cada ecuación lineal por tramo de la ley media de la curva normalizada tonelaje-ley.

Tabla 6: Ejemplo de ecuaciones lineales por tramo de la ley media.

tramo	Ley de corte i	Ley media i	Ley de corte j	Ley media j	m2	n2
1	0,00	0,67	0,15	0,77	0,663	0,666
2	0,15	0,77	0,20	0,80	0,670	0,665
3	0,20	0,80	0,25	0,83	0,659	0,667
4	0,25	0,83	0,30	0,86	0,662	0,666
5	0,30	0,86	0,35	0,90	0,666	0,665
6	0,35	0,90	0,40	0,93	0,670	0,664
7	0,40	0,93	0,45	0,96	0,658	0,669
8	0,45	0,96	0,50	1,00	0,661	0,667
9	0,50	1,00	0,55	1,03	0,665	0,665
10	0,55	1,03	0,60	1,06	0,670	0,662
11	0,60	1,06	0,65	1,10	0,655	0,671
12	0,65	1,10	0,70	1,13	0,659	0,669

En la sección 12.1 del Anexo A se incluyen los pasos necesarios para construir la curva normalizada de tonelaje-ley a partir de la tabla de distribución y en el Anexo A, sección 12.2 y 12.3 se encuentran los procedimientos para determinar las ecuaciones que describen la proporción tonelaje y la ley media en función de la ley de corte.

4.2. Cálculo de cantidades

4.2.1. Tonelajes que extraer, procesar y refinar de la fase

Una vez determina la ley de corte óptima (G) en la iteración, se calcula el tonelaje a extraer, procesar y refinar de la fase en producción.

Tonelaje por extraer ($Ton_{m_{fase}}$): se refiere al tonelaje de material de la fase en producción, es decir, las reservas de la fase en ese periodo.

$$Ton_{m_{fase}} = reserva_{fase} \quad (27)$$

Tonelaje por procesar ($Ton_{c_{fase}}$): se refiere al tonelaje de mineral que hay en la fase, es decir, es la parte de las reservas que tiene una ley mayor o igual a la ley de corte y se calcula a partir de la siguiente ecuación:

$$Ton_{c_{fase}} = (m1 \cdot G + n1)Ton_{m_{fase}} \quad (28)$$

Donde:

$m1$: es a la pendiente de la ecuación lineal de la proporción tonelaje correspondiente al tramo en el que se encuentra la ley de corte.

$n1$: es el coeficiente de posición de la ecuación lineal de la proporción tonelaje correspondiente al tramo en la que se encuentra la ley de corte.

Ley media: es el promedio de las leyes del tonelaje de mineral (tonelaje por procesar), se calcula de la siguiente manera:

$$Ley\ media = m2 \cdot G + n2 \quad (29)$$

Donde:

$m2$: es a la pendiente de la ecuación lineal de la ley media correspondiente al tramo en la que se encuentra la ley de corte.

$n2$: es el coeficiente de posición de la ecuación lineal de la ley media correspondiente al tramo en la que se encuentra la ley de corte.

Tonelaje por refinar ($Ton_{r_{fase}}$): es el tonelaje fino del metal de interés y se calcula con la siguiente formula:

$$Ton_{r_{fase}} = Ton_{c_{fase}} \cdot ley\ media \cdot y \quad (30)$$

4.2.2. Tonelaje que extraer, procesar y refinar de la mina

Para calcular el tonelaje total por extraer, procesar y refinar de la mina se realiza considerando solo las fases que aún contienen material. A cada una de estas fases se le aplican las fórmulas mencionadas anteriormente para calcular los tonelaje por extraer, procesar y refinar. Finalmente, estos valores se suman siguiendo las ecuaciones (31), (32) y (33).

$$Total\ Ton_m = \sum_{fase=1}^{fase=n} Ton_{m_{fase}} \quad (31)$$

$$Total\ Ton_c = \sum_{fase=i}^{fase=n} Ton_c_{fase} \quad (32)$$

$$Total\ Ton_r = \sum_{fase=i}^{fase=n} Ton_r_{fase} \quad (33)$$

4.2.3. Vida útil de la fase

La vida útil de una fase (t_{pb}) se obtiene a partir de la ecuación (34) y corresponde al tiempo de la etapa que limita la operación siendo el tiempo máximo entre el tiempo de extracción, procesamiento y refinación.

$$t_{fase} = \max\left(\left(\frac{Ton_m_{fase}}{M}\right), \left(\frac{Ton_c_{fase}}{C}\right), \left(\frac{Ton_r_{fase}}{R}\right)\right) \quad (34)$$

Una vez alcanzada la convergencia del VAN de la iteración, se evalúa la siguiente condición $T_{fase} < 1$ y $T_{mina} > 1$.

Si se cumple la condición anterior, indica que en ese periodo se produce una transición de fase. El valor de $T_{fase} < 1$ indica que la fase se agota antes de finalizar el periodo, lo que deja un tiempo residual de producción. Por otro lado, el valor $T_{mina} > 1$ sugiere que existe una fase adicional que puede entra en producción, aprovechando las capacidades remanentes de la mina, planta y refinería.

Por ende, a partir de las ecuaciones (35), (36) y (37) se calculan las capacidades remanentes considerando las cantidades a extraer Q_m , procesar Q_c y refinar Q_r de la primera fase de la transición, dichas cantidades más adelante se explica cómo obtenerlas.

$$MR = M - Q_m \quad (35)$$

$$CR = C - Q_c \quad (36)$$

$$RR = R - Q_r \quad (37)$$

Además, se calcula el tiempo residual de producción con la ecuación (38), el cual es utilizado para calcular el beneficio de la segunda fase de la transición.

$$TR = 1 - t_{fase} \quad (38)$$

Después, cuando se esté calculado la ley de corte óptima para la segunda fase de la transición, el tiempo de fase se calcula con la ecuación (39).

$$t_{fase} = \max\left(\left(\frac{Ton_{mfase}}{MR}\right), \left(\frac{Ton_{cfase}}{CR}\right), \left(\frac{Ton_{rfase}}{RR}\right)\right) \quad (39)$$

4.2.4. Cantidad que extraer, procesar y refinar

Para determinar la cantidad a extraer Q_m , procesar Q_c y refinar Q_r se utiliza el siguiente criterio

- Si $t_{fase} < 1$, en otras palabras, si el tonelaje a extraer, procesar y refinar de la fase es menor a las capacidades M, C y R. Se determina las cantidades Q_m , Q_c y Q_r a partir de las ecuaciones (40), (41) y (42).

$$Q_m = Ton_{mfase} \quad (40)$$

$$Q_c = Ton_{cfase} \quad (41)$$

$$Q_r = Ton_{rfase} \quad (42)$$

- Si $t_{fase} \geq 1$ Se determina las cantidades Q_m , Q_c y Q_r a partir de las ecuaciones (43), (44) y (45).

$$Q_m = \left(\frac{Ton_{mfase}}{t_{fase}}\right) \quad (43)$$

$$Q_c = \left(\frac{Ton_{cfase}}{t_{fase}}\right) \quad (44)$$

$$Q_r = \left(\frac{Ton_{rfase}}{t_{fase}}\right) \quad (45)$$

Al utilizar el criterio anterior, se asegura que se cumplan las restricciones de capacidades de las etapas mencionadas en las ecuaciones (46), (47) y (48):

$$Q_m \leq M \quad (46)$$

$$Q_c \leq C \quad (47)$$

$$Q_r \leq R \quad (48)$$

4.2.5. Vida útil de la mina

La vida útil de la mina t_{mina} se calcula con la ecuación (49):

$$t_{mina} = \max \left(\left(\frac{Total\ Ton_m}{Q_m} \right), \left(\frac{Total\ Ton_c}{Q_c} \right), \left(\frac{Total\ Ton_r}{Q_r} \right) \right) \quad (49)$$

4.2.6. Beneficio y VAN iterativo

Para el cálculo del beneficio se utiliza la ecuación (50) y el valor de T corresponde al tiempo de producción y depende de los siguientes criterios.

$$P = (s - r)Q_r - cQ_c - mQ_m - fT \quad (50)$$

Donde:

- $T = 1$ si $t_{fase} > 1$
- $T = t_{fase}$ si $t_{fase} < 1$
- $T = TR = 1 - t_{fase\ anterior}$ solo para la segunda fase en producción de un periodo

Hay que recordar que el TR se calcula a partir del t_{fase} de la primera fase de la transición.

Luego, el VAN de la iteración se calcula con la ecuación (51). Este valor de VAN se emplea en el proceso iterativo que busca alcanzar la convergencia del VAN.

$$VAN_{iterativo} = Beneficio \cdot \frac{(1 + d)^{t_{mina}} - 1}{d(1 + d)^{t_{mina}}} \quad (51)$$

El VAN converge si cumple la siguiente condición $|VAN_{iterativo} - v| \leq 500.000$

4.2.7. VAN del plan minero

Una vez definida la política de ley de corte óptima, con las leyes correspondientes y las cantidades a extraer, procesar y refinar, así como el beneficio de cada año, se procede a calcular el VAN para cada periodo del plan minero utilizando la ecuación (52):

$$VAN_{periodo} = \sum_{t=1}^n \frac{beneficio_t}{(1 + d)^t} \quad (52)$$

Posteriormente, se realiza una segunda etapa de la optimización de la ley de corte en la que el valor de v corresponde al VAN del periodo obtenido según la formula anterior.

En resumen, en la primera etapa de la optimización el valor de v al inicio de cada año es desconocido, por lo que se requiere de un proceso iterativo que permita encontrar el valor de v al que converge. Al finalizar la primera etapa, se obtiene un plan de producción detallado con información de cada periodo, incluyendo las leyes de corte óptimas, las cantidades a extraer, procesar y refinar, así como el beneficio por periodo. Con estos beneficios anuales, es posible calcular el VAN de cada periodo. Así, al realizar una segunda etapa optimización de las leyes de corte donde el valor de v ya es conocido y corresponde al VAN obtenido al final de la primera etapa, cuando se calculó el VAN por año del plan de producción de la primera etapa de la optimización.

4.3. Procedimiento resumido Algoritmo de Lane (1964)

1. Calcular la curva tonelaje ley para cada fase.
2. Calcular las ecuaciones por tramo de la proporción tonelaje y ley media.
3. Determinar las leyes de equilibrio para cada fase.
4. Iniciar proceso iterativo para cada año.
5. Dentro de cada año hay un proceso iterativo para encontrar la convergencia de VAN, la primera iteración siempre comienza con $V=0$.
6. Calcular las leyes de corte económicas.
7. Determinar la ley de corte óptima.
8. Calcular el tonelaje a extraer, tonelaje a procesar y su ley media (utilizando las ecuaciones por tramo para el tonelaje y ley media calculadas en el paso 2) y tonelaje a refinar de la fase.
9. Calcular el t_{pit} .
10. Calcular Q_m, Q_c , y Q_r .
11. Calcular beneficio.
12. Calcular VAN iteración.
13. Comparar el VAN del paso 12 con el del paso 5.
 - 13.1. Si el VAN y V no convergen:
 - 13.1.1. Se vuelve al paso 5, pero ahora $V = VAN$.
 - 13.2. Si el VAN y V convergen bajo cierta tolerancia (500.000).
 - 13.2.1. Calcular las reservas restantes.
 - 13.2.2. Si el $t_{pit} < 1$, y queda otra fase, se comienza una iteración para la 2da fase del periodo.
 - 13.2.2.1. Determina las capacidades remanentes de la mina planta y refinería.
 - 13.2.2.2. Determina el tiempo de producción restante.
 - 13.2.2.3. Comenzar con un $V1=0$.
 - 13.2.2.4. Calcular $V=VAN + V1$ (donde VAN es el valor de VAN de la fase anterior).
 - 13.2.2.5. Calcular la ley de corte económica en función de V.
 - 13.2.2.6. Calcular ley de corte óptima.
 - 13.2.2.7. Calcular el tonelaje a extraer, tonelaje a procesar y su ley media (utilizando las ecuaciones por tramo para el tonelaje y ley media calculadas en el paso 2) y tonelaje a refinar de la fase.
 - 13.2.2.8. Calcular el t_{pit} .
 - 13.2.2.9. Calcular Q_m, Q_c , y Q_r .
 - 13.2.2.10. Calcular el beneficio y VAN1.

13.2.2.11. Comparar VAN1 con V1.

13.2.2.11.1. Si VAN1 no converge con V1:

13.2.2.11.1.1. Volver al paso 13.2.2.1 ahora $V1 = VAN1$.

13.2.2.11.2. Si VAN 1 converge con V1:

13.2.2.11.2.1. Calcular reservas restantes de la fase.

13.2.2.11.2.2. Ir al paso 4 e iniciar la iteración de un nuevo año.

13.2.3. Ir al paso 4 e iniciar la iteración de un nuevo año.

14. Si las reservas totales son iguales a cero, terminar el proceso iterativo.

15. Calcular el VAN del plan minero para cada año.

16. Repetir la iteración pero ahora el valor de V es el VAN anual calculado a partir del plan minero del paso 15.

5. Implementación algoritmo de Asad (1997)

Ley de corte de equilibrio: para encontrar las leyes de corte de equilibrio se utiliza la misma metodología descrita en la sección 12.6 del Anexo A.

Ley de corte económica: para encontrar las leyes de corte económicas para la mina, planta y refinería se utiliza las ecuaciones (9), (10) y (11) respectivamente, mencionadas en la sección 3.3.1 del capítulo 3.

Ley de corte óptima: para encontrar la ley de corte de óptima se utiliza la ecuación (15) mencionadas en la sección 3.3.1 del capítulo 3.

Ecuación del beneficio: el beneficio se calcula a partir de la ecuación (7) presentada en la sección 3.3.1 del capítulo 3.

5.1. Modificaciones al algoritmo de Lane (1964)

5.1.1. Criterio de ley de corte

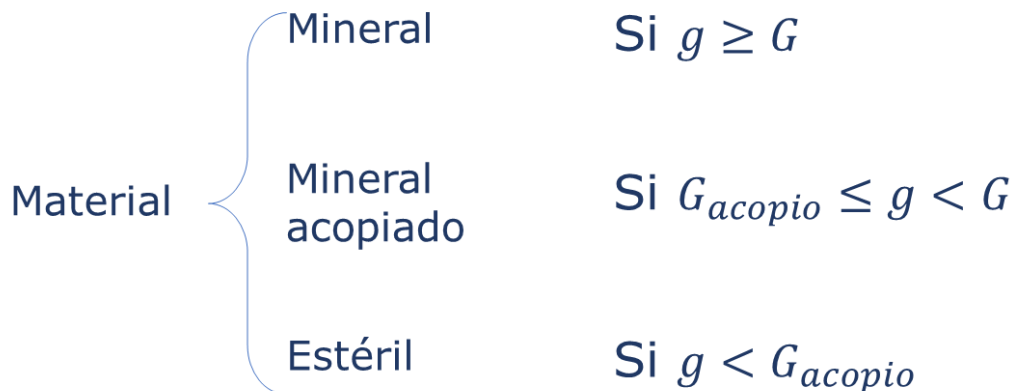


Figura 11: Criterio de ley de corte - algoritmo de Asad (1997).

En la Figura 11 se presenta el criterio de ley de corte donde: g es la ley o concentración del metal, G es la ley de corte óptima del periodo y G_{acopio} es la ley de corte del acopio, es decir, la menor ley aceptada por el acopio y corresponde a la ley de corte más baja obtenida en el plan de producción generado por el algoritmo a implementar pero sin considerar el acopio. A continuación, se explica cómo se determina la ley de corte del acopio G_{acopio} en las diferentes variantes de algoritmo de Lane que incluyen acopio:

- Algoritmo de Asad y Topal (2011):

- G_{acopio} se determina a partir de los resultados de la implementación del algoritmo de Asad (2007)
- Algoritmo de Asad (1997):
 - G_{acopio} se determina a partir de los resultados de la implementación del algoritmo de Lane (1964).

5.1.2. Cantidad de mineral acopiado y tonelaje de acopio.

Junto con determinar las cantidades Q_m , Q_c , Q_r , se determina también la cantidad Q_s de mineral acopiado, el cual corresponde al material cuya ley se encuentra entre la ley de corte del acopio G_{acopio} y la ley de corte óptima G .

Primero, se determina la cantidad de tonelaje cuya ley es mayor o igual a G_{acopio} , utilizando la ecuación (53).

$$\text{tonelaje } (G_{acopio}) = (G_{acopio} \cdot m1 + n1) \cdot Q_m \quad (53)$$

Luego, se calcula el tonelaje del mineral acopiado utilizando la ecuación (54):

$$\text{tonelaje mineral acopiado } Q_s = \text{tonelaje } (G_{acopio}) - Q_c \quad (54)$$

Luego, se calcula el tonelaje de acopio del periodo utilizando la ecuación (55):

$$\text{tonelaje de acopio} = \text{tonelaje mineral acopiado} + \text{tonelaje acopio anterior} \quad (55)$$

5.1.3. Vida útil del acopio

Luego, se calcula la vida útil del acopio (t_{acopio}) utilizando la ecuación (56):

$$\text{Tiempo Acopio} = \frac{\text{tonelaje de acopio}}{Q_c} \quad (56)$$

5.1.4. Tiempo total de operación

El tiempo total de operación (t_{total}) se calcula utilizando la ecuación (57), y se considera como la suma de la vida útil de la mina más la vida útil del acopio.

$$t_{total} = t_{mina} + t_{acopio} \quad (57)$$

5.1.5. Condición de transición

La condición de transición ahora se modifica por $t_{fase} < 1$ y $t_{total} > 1$, ya que considera el tiempo total de operación en vez de tiempo de mina. En el caso de que la mina se agote y aún queda capacidades remanentes entonces el acopio hace uso estas.

5.1.6. VAN iteración

Y para el cálculo del VAN de la iteración ahora se considera el tiempo total de operación (t_{total}), utilizando la ecuación (58):

$$VAN_{iterativo} = Beneficio \cdot \frac{(1 + d)^{t_{total}} - 1}{d(1 + d)^{t_{total}}} \quad (58)$$

5.1.7. Creación intervalos y asignación tonelaje

Si el VAN de la iteración converge, se calcula la distribución tonelaje-ley de mineral acopiado Q_s . Para ello, se sigue el siguiente procedimiento:

1. Creación de los intervalos de leyes
2. Asignación tonelaje a cada intervalo

A continuación, se explica con un ejemplo práctico como se aplica el procedimiento, considerando la información base presentada en la Tabla 7 y Tabla 8:

Tabla 7: Información base para explicar el cálculo de la distribución tonelaje-ley del mineral acopiado.

Capacidad máx. mina (M)	20	Mt/año
Capacidad máx. planta (C)	10	Mt/año
Capacidad máx. refinera (R)	90.000	t/año
Recuperación metalúrgica (Y)	0,9	
Ley de corte óptima (G)	0,47	%
Ley de corte del acopio (G_{acopio})	0,37	%
Cantidad por extraer (Q_m)	17.070.673	t
Cantidad por procesar (Q_c)	10.000.000	t
Cantidad por refinar (Q_r)	8.799.833	t

Tabla 8: Ecuaciones por tramo de la proporción tonelaje de la curva normalizada tonelaje-ley de la fase respectiva al mineral acopiado.

Tramo	Ley de corte i	Proporción tonelaje i	Ley de corte j	Proporción tonelaje j	m1	n1
1	0,00	1,00	0,15	0,86	-0,960	1,000
2	0,15	0,86	0,20	0,81	-0,920	0,994
3	0,20	0,81	0,25	0,77	-0,880	0,986
4	0,25	0,77	0,30	0,72	-0,860	0,981
5	0,30	0,72	0,35	0,68	-0,840	0,975
6	0,35	0,68	0,40	0,64	-0,820	0,968
7	0,40	0,64	0,45	0,60	-0,780	0,952
8	0,45	0,60	0,50	0,56	-0,760	0,943
9	0,50	0,56	0,55	0,53	-0,740	0,933
10	0,55	0,53	0,60	0,49	-0,720	0,922
11	0,60	0,49	0,65	0,46	-0,680	0,898
12	0,65	0,46	0,70	0,42	-0,660	0,885

Definición de intervalos de ley

Las leyes de cobre del mineral acopiado se encuentran entre la ley de corte óptima (G) y ley de corte del acopio (G_{acopio}) y se obtienen a partir de las leyes de la curva normalizada tonelaje-ley de su respectiva fase. En la Figura 12 se muestra el procedimiento para crear los intervalos de leyes de cobre del mineral acopiado.

Leyes de corte de la **curva normalizada tonelaje-ley** de su respectiva **fase**

0,00
0,15
0,20
0,25
0,30
0,35
0,40
0,45
0,50
0,55
0,60
0,65
0,70



Ley de corte acopio
 $G_{acopio} = 0,37$
Ley de corte óptima
 $G = 0,47$



Leyes de corte del mineral acopiado

0,37
0,40
0,45
0,47



Distribución tonelaje-ley del mineral acopiado

Intervalo	Ley de cobre %		Tonelaje
	Límite inferior	Límite superior	
1	0,37	0,40	
2	0,40	0,45	
3	0,45	0,47	

Figura 12: Procedimiento para obtener los intervalos de leyes del mineral acopiado.

Asignación de tonelajes a cada intervalo

Luego de esto se calcula el tonelaje asociado a cada ley de corte del mineral acopiado, usando la ecuación (59).

$$tonelaje = (G \cdot m1 + n1)Q_m \quad (59)$$

Donde: m1 es la pendiente y n1 es el coeficiente de posición de la ecuación por tramo de la proporción tonelaje de la Tabla 8 mostrada anteriormente en los datos. En la Figura 13 se muestra el procedimiento con los tonelajes resultantes en cada intervalo.

Ley de corte	m1	n1	tonelaje
0,37	-0,820	0,968	11.345.169
0,40	-0,780	0,952	10.925.230
0,45	-0,760	0,943	10.259.474
0,47	-0,760	0,943	10.000.000



intervalo	Ley de cobre %		tonelaje
	Límite inferior	Límite superior	
1	0,37	0,40	11.345.169 - 10.925.230 = 419.939
2	0,40	0,45	10.925.230 - 10.259.474 = 665.756
3	0,45	0,47	10.259.474 - 10.000.000 = 259.474



Distribución tonelaje – ley mineral acopiado

intervalo	Ley de cobre %		tonelaje
	Límite inferior	Límite superior	
1	0,37	0,40	419.939
2	0,40	0,45	665.756
3	0,45	0,47	259.474

Figura 13: Procedimiento para determinar los tonelajes de cada intervalo de ley del mineral acopiado.

5.1.8. Suma de distribuciones tonelaje-ley

Después de calcular la distribución tonelaje-ley del mineral acopiado, esta se suma con la distribución tonelaje-ley del acopio para obtener la distribución tonelaje-ley final del acopio.

En la Figura 14 se muestra las respectivas distribuciones tonelaje-ley que se sumarán.

Distribución ton – ley mineral acopiado

intervalo	Ley de cobre %		tonelaje
	Límite inferior	Límite superior	
1	0,37	0,40	419.939
2	0,40	0,45	665.756
3	0,45	0,47	259.474

Distribución ton-ley acopio

intervalo	Ley de cobre %		tonelaje
	Límite inferior	Límite superior	
1	0,37	0,42	150.000
2	0,42	0,45	400.000
3	0,45	0,5	170.000

Figura 14: Distribuciones tonelaje-ley para el mineral acopiado y acopio periodo anterior.

Para realizar la suma, se verifica que todos los intervalos coincidan en sus límites inferior y superior. En caso de que no coincidan, se deben ajustar dividiendo los intervalos de manera que los límites de las leyes coincidan, como se muestra en la Figura 15.

Distribución ton – ley mineral acopiado

intervalo	Ley de cobre %		tonelaje
	Límite inferior	Límite superior	
1	0,37	0,40	419.939
2,1	0,40	0,42	
2,2	0,42	0,45	
3	0,45	0,47	259.474

Distribución ton-ley acopio

intervalo	Ley de cobre %		tonelaje
	Límite inferior	Límite superior	
1,1	0,37	0,40	
1,2	0,40	0,42	
2	0,42	0,45	400.000
3,1	0,45	0,47	
3,2	0,47	0,5	

Figura 15: Ajustes en los intervalos de leyes en las distribuciones tonelaje-ley

Una vez ajustados los intervalos, el tonelaje correspondiente a cada intervalo dividido se determina aplicando el procedimiento mostrado en la Figura 16 el cual corresponde a una interpolación lineal aplicada al intervalo 2,1-2,2 de la distribución ton-ley del mineral acopiado. Este mismo procedimiento se aplica a los intervalos 1,1-1,2 y 3,1-3,2 de la distribución ton-ley del acopio

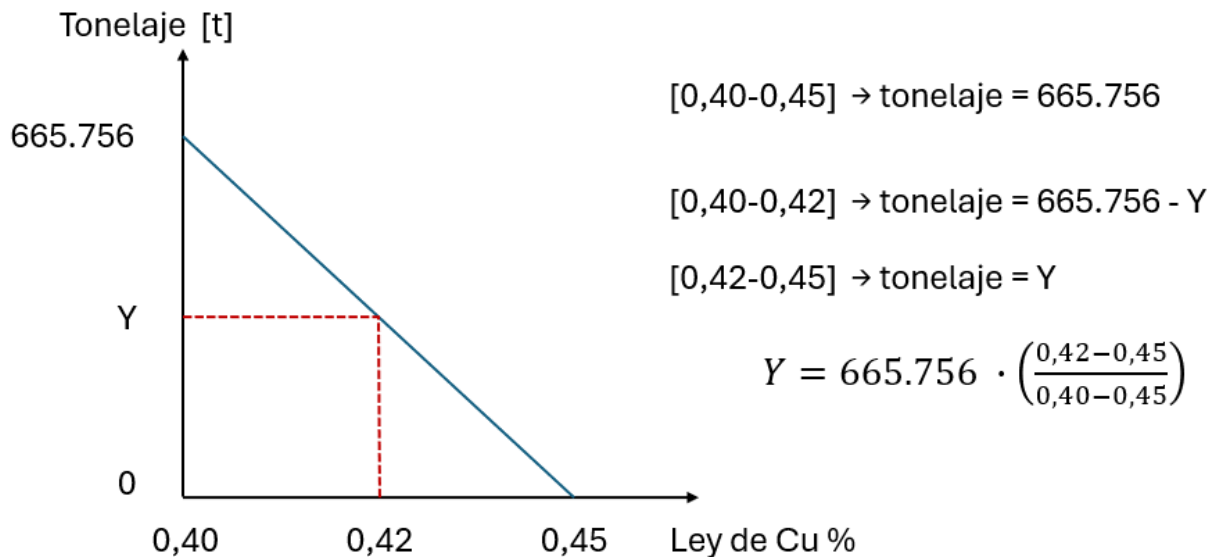


Figura 16: Procedimiento para calcular el tonelaje en los subintervalos

En la Figura 17 se presentan los tonelajes resultantes para cada intervalo ajustado.

Distribución ton – ley mineral acopiado

intervalo	Ley de cobre %		tonelaje
	Límite inferior	Límite superior	
1	0,37	0,40	419.939
2,1	0,40	0,42	266.302
2,2	0,42	0,45	399.454
3	0,45	0,47	259.474

Distribución ton-ley acopio

intervalo	Ley de cobre %		tonelaje
	Límite inferior	Límite superior	
1,1	0,37	0,40	90.000
1,2	0,40	0,42	60.000
2	0,42	0,45	400.000
3,1	0,45	0,47	68.000
3,2	0,47	0,5	102.000

Figura 17: Resultado final de los ajustes en las distribuciones tonelaje-ley.

Finalmente, se suman los tonelajes de los intervalos que tienen los mismos límites de leyes para obtener la distribución tonelaje-ley final del acopio que se muestra en la Figura 18.

Distribución ton-ley Acopio final

intervalo	Ley de cobre %		tonelaje
	Límite inferior	Límite superior	
1,1	0,37	0,40	509.939
1,2	0,40	0,42	326.302
2	0,42	0,45	799.454
3,1	0,45	0,47	327.474
3,2	0,47	0,5	102.000

Figura 18: Distribución tonelaje ley final del acopio

5.1.9. Curva normalizada acopio

Una vez agotada la mina, se calcula la curva normalizada tonelaje-ley del acopio y las tablas de las ecuaciones por tramo de la proporción tonelaje y ley media, utilizando la misma metodología mencionada en el Anexo A.

5.1.10. Ley de corte del acopio

Después de finalizar la extracción de material de la mina, el acopio entra en producción como una fase adicional, extrayendo las altas leyes primero. Sin embargo, este supuesto presenta una limitación importante, ya que en la realidad el acopio no permite distinguir entre material de altas y bajas leyes de manera precisa. En condiciones reales, el acopio debería modelarse como una mezcla perfecta de leyes, donde el material se extrae con una ley promedio basada en la proporción de leyes presentes

en el acopio. Este aspecto podría influir en los resultados del modelo, ya que un acopio perfectamente mezclado podría reducir la flexibilidad en la planificación estratégica y afectar el VAN estimado.

Como la etapa de la mina ya no se considera, el número de leyes de corte del acopio se reduce a solo 3 como se muestra en la Figura 19. Para calcular las leyes de corte económica para la planta y refinería, se emplean las ecuaciones (10) y (11), respectivamente. Por otro lado, la ley de corte de equilibrio planta-refinería se determina utilizando el procedimiento descrito en el Anexo A, sección 12.6.3.

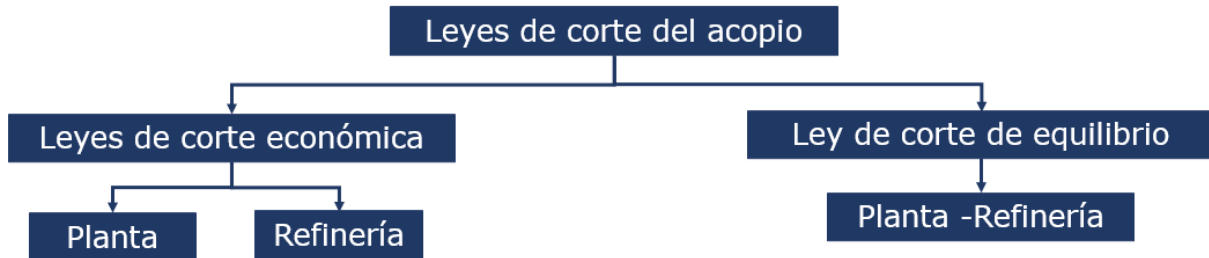


Figura 19: Leyes de corte del acopio

5.1.11. Determina ley de corte óptima

La ley de corte óptima del acopio G se calcula utilizando la ecuación (60).

$$G = \begin{cases} g_r, & \text{si } g_{rc} \leq g_r \\ g_c, & \text{si } g_{rc} \geq g_c \\ g_{rc}, & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (60)$$

donde g_r es a la ley de corte económica de la refinería, g_c es la ley de corte económica de la planta y la g_{rc} es la ley de corte de equilibrio planta-refinería.

Por último, el valor de G tiene que cumplir la siguiente condición $G \geq G_{min}$, ya que no puede haber una ley de corte que se encuentre fuera de los límites de los rangos de leyes que tiene el acopio. En caso de no cumplir la condición anterior, el valor de G se redefine como G_{min} para garantizar que permanezca dentro del rango de leyes que tiene el acopio.

5.1.12. Tonelaje que procesar y refinar del acopio

Una vez determina la ley de corte (G) en la iteración, se calcula el tonelaje a procesar y refinar del acopio

Tonelaje por procesar ($Ton_{c_{fase}}$): se refiere al tonelaje de mineral que hay en el acopio, es decir, es la parte de las reservas cuya ley es mayor o igual a la ley de corte y se calcula a partir de la ecuación (61):

$$Ton_{c_{acopio}} = (m1 \cdot G + n1)Ton_{m_{acopio}} \quad (61)$$

Donde:

$m1$: es a la pendiente de la ecuación lineal del tonelaje correspondiente al tramo en la que se encuentra la ley de corte.

$n1$: es el coeficiente de posición de la ecuación lineal del tonelaje correspondiente al tramo en la que se encuentra la ley de corte.

Ley media: es el promedio de las leyes del tonelaje de mineral (tonelaje por procesar), se calcula a partir de la ecuación (62):

$$Ley\ media = m2 \cdot G + n2 \quad (62)$$

Donde:

$m2$: es a la pendiente de la ecuación lineal de la ley media correspondiente al tramo en la que se encuentra la ley de corte.

$n2$: es el coeficiente de posición de la ecuación lineal de la ley media correspondiente al tramo en la que se encuentra la ley de corte.

Tonelaje por refinar: es el tonelaje fino del metal de interés y se calcula utilizando la ecuación (63):

$$Ton_{r_{fase}} = Ton_{c_{fase}} \cdot ley\ media \cdot y \quad (63)$$

5.1.13. Tiempo de acopio

La vida útil del acopio ($t_{acopio2}$) se calcula usando la ecuación (64) y corresponde al tiempo de la etapa que limita la operación siendo el tiempo máximo entre el tiempo de procesamiento y refinación.

$$t_{acopio2} = \max\left(\left(\frac{Ton_{cfase}}{C}\right), \left(\frac{Ton_{rfase}}{R}\right)\right) \quad (64)$$

5.1.14. Cantidad por extraer, procesar y refinar del acopio

Para determinar la cantidad a extraer del acopio Q_m , procesar Q_c y refinar Q_r se utiliza el siguiente criterio.

- Si $t_{acopio2} < 1$, en otras palabras, si el tonelaje a procesar y refinar del acopio es menor a las capacidades C y R, las cantidades Q_m , Q_c y Q_r se determinan con las ecuaciones (88), (89) y (90).

$$Q_m = Q_c \quad (65)$$

$$Q_c = Ton_{cacopio} \quad (66)$$

$$Q_r = Ton_{racopio} \quad (67)$$

- Si $t_{acopio2} \geq 1$, las cantidades Q_m , Q_c y Q_r se determinan con las ecuaciones (91), (92) y (93).

$$Q_m = Q_c \quad (68)$$

$$Q_c = \left(\frac{Ton_{cacopio}}{t_{acopio2}}\right) \quad (69)$$

$$Q_r = \left(\frac{Ton_{racopio}}{t_{acopio2}}\right) \quad (70)$$

Al utilizar el criterio anterior, se asegura que se cumplan las restricciones de capacidades de la planta y refinería:

$$Q_c \leq C \quad (71)$$

$$Q_r \leq R \quad (72)$$

5.1.15. Beneficio y VAN iteración

Para calcular el beneficio se utiliza la ecuación (73)

$$P = (s - r)Q_r - cQ_c - (\lambda \cdot m)Q_s - fT \quad (73)$$

Donde: $(\lambda \cdot m)$ es el costo de remanejo del acopio y el λ es un porcentaje del costo mina, en este caso λ corresponde a un 45%

Y el VAN de la iteración se calcula utilizando la ecuación (74).

$$VAN_{iterativo} = Beneficio \cdot \frac{(1 + d)^{t_{acopio2}} - 1}{d(1 + d)^{t_{acopio2}}} \quad (74)$$

5.1.16. VAN plan de producción

Y una vez agotado el acopio se procede a calcular el van del plan de producción para cada año cuyos valores se utilizan en una segunda etapa de la iteración.

Una vez definida la política de ley de corte óptima, con las leyes correspondientes y las cantidades a extraer, procesar y refinar, así como el beneficio de cada año, se procede a calcular el VAN para cada periodo del plan de producción utilizando la ecuación (75):

$$VAN_{periodo} = \sum_{t=1}^n \frac{beneficio_t}{(1 + d)^t} \quad (75)$$

Posteriormente, se realiza una segunda etapa de la optimización de la ley de corte en la que el valor de v corresponde al VAN del periodo obtenido según la ecuación (75).

En resumen, en la primera etapa de la optimización el valor de v al inicio de cada año es desconocido, por lo que se requiere de un proceso iterativo que permita encontrar el valor de v al que converge. Al finalizar la primera etapa, se obtiene un plan de producción detallado con información de cada periodo, incluyendo las leyes de corte óptimas, las cantidades a extraer, procesar y refinar, así como el beneficio por periodo. Con estos beneficios anuales, es posible calcular el VAN de cada periodo. Así, al realizar una segunda etapa optimización de las leyes de corte, el valor de v ya es conocido y corresponde al VAN obtenido al final de la primera etapa, cuando se calculó el VAN por año.

5.1.17. Procedimiento resumido algoritmo de Asad (1997)

1. Calcular la curva normalizada tonelaje-ley para cada fase.
2. Calcular las ecuaciones por tramo de la proporción tonelaje y ley media.
3. Determinar las leyes de equilibrio para cada fase.
4. Iniciar proceso iterativo para cada año.
5. Iniciar proceso iterativo para encontrar la convergencia de VAN dentro de cada año. (la primera iteración siempre comienza con $V=0$).
6. Calcular las leyes de corte económicas.
7. Determinar la ley de corte óptima
8. Calcular el tonelaje a extraer, tonelaje a procesar y su ley media (utilizando las ecuaciones por tramo para el tonelaje y ley media calculadas en el paso 2) y tonelaje a refinar de la fase
9. Si la ley de corte $>$ ley del acopio, calcular tonelaje de acopio Q_s preliminar de la iteración.
10. Calcular los tiempos.
11. Calcular $Q_m, Q_c,$ y Q_r .
12. Calcular beneficio y VAN iteración.
13. Comparar el VAN iteración del paso 12 con el del paso 5
 - 13.1. Si el VAN iteración y V no convergen:
 - 13.1.1. Volver al paso 5, pero ahora $V = \text{VAN iteración}$.
 - 13.2. Si el VAN iteración y V convergen bajo cierta tolerancia (500.000).
 - 13.2.1. Calcular la distribución ton-ley del mineral de ley intermedia Q_s
 - 13.2.2. Calcular la distribución ton-ley del acopio final.
 - 13.2.3. Calcular las reservas restantes
 - 13.2.4. Si el $t_{pit} < 1$, y queda otra fase, Iniciar una iteración para la 2da fase del periodo.
 - 13.2.4.1. Determinar la capacidades remanentes de la mina planta y refinería.
 - 13.2.4.2. Determinar el tiempo de producción restante
 - 13.2.4.3. Comenzar la iteración con un $V_1=0$
 - 13.2.4.4. Calcular $V=\text{VAN iteración} + V_1$ (donde VAN es el valor de VAN de la fase anterior)
 - 13.2.4.5. Calcular la ley de corte económica en función de V
 - 13.2.4.6. Calcular ley de corte óptima
 - 13.2.4.7. Calcular el tonelaje a extraer, tonelaje a procesar y su ley media (utilizando las ecuaciones por tramo para el tonelaje y ley media calculadas en el paso 2) y tonelaje a refinar de la fase

- 13.2.4.8. Si la ley de corte $>$ ley del acopio, calcular tonelaje de acopio Q_s preliminar de la iteración.
- 13.2.4.9. Calcular los tiempos.
- 13.2.4.10. Calcular Q_m, Q_c , y Q_r
- 13.2.4.11. Calcular el beneficio y VAN1
- 13.2.4.12. Comparar VAN1 con V1
 - 13.2.4.12.1. Si VAN1 no converge con V1:
 - 13.2.4.12.1.1. Vuelve al paso 13.2.2.1 ahora $V1 = VAN1$
 - 13.2.4.12.2. Si VAN 1 converge con V1:
 - 13.2.4.12.2.1. Calcular reservas restantes de la fase.
 - 13.2.4.12.2.2. Ir al paso 4 y iniciar la iteración de un nuevo año
- 13.2.5. Ir al paso 4 y iniciar la iteración de un nuevo año
14. Si las reservas totales son iguales a cero, terminar el proceso iterativo
15. Calcular curva tonelaje ley del acopio.
16. Calcular las ecuaciones por tramo proporción tonelaje y ley media del acopio.
17. Calcular la ley de equilibrio del acopio.
18. Iniciar la iteración para encontrar las leyes de corte óptimas del acopio.
 - 18.1. Calcular G del acopio
 - 18.2. Calcular el tiempo acopio
 - 18.3. Calcular las cantidades Q_m Q_c y Q_r
 - 18.4. Calcular beneficio y VAN iteración.
19. Si las reservas totales son cero, terminar el proceso iterativo.
20. Calcular el VAN del plan de producción para cada año.
21. Repetir la iteración pero ahora el valor de V es el VAN anual calculado a partir del plan de producción del paso 15.

6. Implementación algoritmo de Asad (2007)

6.1. Modificaciones al algoritmo de Lane

6.1.1. Parámetros económicos

En cada periodo se ajustarán el precio y los costos de acuerdo con el siguiente criterio:

- Si el año $i = 1$, el precio se calcula usando la ecuación (76) y el costo mina, planta, refinería y fijo se calcula usando la ecuación (77), (78), (79) y (80), respectivamente.

$$s_i = s \quad (76)$$

$$m_i = m \quad (77)$$

$$c_i = c \quad (78)$$

$$r_i = r \quad (79)$$

$$f_i = f \quad (80)$$

- Si el año $i > 1$, El precio se calcula usando la ecuación (104) y el costo mina, planta, refinería y fijo se calcula usando la ecuación (105), (106), (107) y (108), respectivamente.

$$s_i = s(1 + z_s)^i \quad (81)$$

$$m_i = m(1 + z_m)^i \quad (82)$$

$$c_i = c(1 + z_c)^i \quad (83)$$

$$r_i = r(1 + z_r)^i \quad (84)$$

$$f_i = f(1 + z_f)^i \quad (85)$$

6.1.2. Ecuaciones básicas

Para calcular el beneficio se utiliza la ecuación (21) presentada en la sección 3.3.3 del capítulo 3.

6.1.3. Las leyes de corte económicas

Para calcular la leyes de corte económicas para mina, planta y refinería se utilizan las ecuaciones (23), (24) y (25) mencionadas en la sección 3.3.3 del capítulo 3.

6.1.4. Leyes de corte de equilibrio

Para calcular las leyes de corte de equilibrio se utiliza la misma metodología presentada en la sección 12.6 del Anexo A.

6.1.5. Ley de corte óptima

Para encontrar la ley de corte de óptima se utiliza la ecuación (15) mencionadas en la sección 3.3.1 del capítulo 3.

6.1.6. Procedimiento

1. Calcular la curva tonelaje ley para cada fase
2. Calcular las ecuaciones por tramo de la proporción tonelaje y ley media.
3. Determinar las leyes de equilibrio para cada fase.
4. Iniciar proceso iterativo para cada año.
5. Ajustar precio y costos
6. Dentro de cada año hay un proceso iterativo para encontrar la convergencia de VAN, la primera iteración siempre comienza con $V=0$.
7. Calcular las leyes de corte económicas.
8. Determinar la ley de corte óptima.
9. Calcular el tonelaje a extraer, tonelaje a procesar y su ley media (utilizando las ecuaciones por tramo para el tonelaje y ley media calculadas en el paso 2) y tonelaje a refinar de la fase.
10. Calcular el t_{pit} .
11. Calcular Q_m, Q_c , y Q_r .
12. Calcular beneficio.
13. Calcular VAN iteración.
14. Comparar el VAN del paso 12 con el del paso 5.

- 14.1. Si el VAN y V no convergen:
 - 14.1.1. Se vuelve al paso 5, pero ahora $V = VAN$.
- 14.2. Si el VAN y V convergen bajo cierta tolerancia (500.000).
 - 14.2.1. Calcular las reservas restantes.
 - 14.2.2. Si el $t_{pit} < 1$, y queda otra fase, iniciar una iteración para la 2da fase del periodo.
 - 14.2.2.1. Determina las capacidades remanentes de la mina planta y refinería.
 - 14.2.2.2. Determina el tiempo de producción restante.
 - 14.2.2.3. Iniciar con un $V1=0$.
 - 14.2.2.4. Calcular $V=VAN + V1$ (donde VAN es el valor de VAN de la fase anterior).
 - 14.2.2.5. Calcular la ley de corte económica en función de V.
 - 14.2.2.6. Calcular ley de corte óptima.
 - 14.2.2.7. Calcular el tonelaje a extraer, tonelaje a procesar y su ley media (utilizando las ecuaciones por tramo para el tonelaje y ley media calculadas en el paso 2) y tonelaje a refinar de la fase.
 - 14.2.2.8. Calcular el t_{pit} .
 - 14.2.2.9. Calcular Q_m, Q_c , y Q_r .
 - 14.2.2.10. Calcular el beneficio y VAN1.
 - 14.2.2.11. Comparar VAN1 con V1.
 - 14.2.2.11.1. Si VAN1 no converge con V1:
 - 14.2.2.11.1.1. Volver al paso 13.2.2.1 ahora $V1 = VAN1$.
 - 14.2.2.11.2. Si VAN 1 converge con V1:
 - 14.2.2.11.2.1. Calcular reservas restantes de la fase.
 - 14.2.2.11.2.2. Ir al paso 4 y comenzar la iteración de un nuevo año.
 - 14.2.3. Ir al paso 4, comenzar la iteración de un nuevo año.
15. Si las reservas totales son iguales a cero, terminar el proceso iterativo.
16. Calcular el VAN del plan minero para cada año.
17. Repetir la iteración pero ahora el valor de V es el VAN anual calculado a partir del plan minero del paso 15.

7. Implementación algoritmo de Asad y Topal (2011)

Para implementar este algoritmo, se utiliza lo mencionado en el capítulo 5 (acopio) y el capítulo 6 (factores de escala), ambos integrados.

7.1. Procedimiento resumido algoritmo de Asad y Topal (2011)

1. Calcular la curva normalizada tonelaje-ley para cada fase.
2. Calcular las ecuaciones por tramo de la proporción tonelaje y ley media.
3. Determinar las leyes de equilibrio para cada fase.
4. Iniciar proceso iterativo para cada año.
5. Ajustar precio y costos.
6. Iniciar proceso iterativo para encontrar la convergencia de VAN dentro de cada año. (la primera iteración siempre comienza con $V=0$).
7. Calcular las leyes de corte económicas.
8. Determinar la ley de corte óptima
9. Calcular el tonelaje a extraer, tonelaje a procesar y su ley media (utilizando las ecuaciones por tramo para el tonelaje y ley media calculadas en el paso 2) y tonelaje a refinar de la fase
10. Si la ley de corte $>$ ley del acopio, calcular tonelaje de acopio Q_s preliminar de la iteración.
11. Calcular los tiempos.
12. Calcular $Q_m, Q_c,$ y Q_r .
13. Calcular beneficio y VAN iteración.
14. Comparar el VAN iteración del paso 12 con el del paso 5
 - 14.1. Si el VAN iteración y V no convergen:
 - 14.1.1. Volver al paso 5, pero ahora $V = \text{VAN iteración}$.
 - 14.2. Si el VAN iteración y V convergen bajo cierta tolerancia (500.000).
 - 14.2.1. Calcular la distribución ton-ley del mineral de ley intermedia Q_s
 - 14.2.2. Calcular la distribución ton-ley del acopio final.
 - 14.2.3. Calcular las reservas restantes
 - 14.2.4. Si el $t_{pit} < 1$, y queda otra fase, iniciar una iteración para la 2da fase del periodo.
 - 14.2.4.1. Determinar la capacidades remanentes de la mina planta y refinería.
 - 14.2.4.2. Determinar el tiempo de producción restante
 - 14.2.4.3. Iniciar la iteración con un $V1=0$
 - 14.2.4.4. Calcular $V=\text{VAN iteración} + V1$ (donde VAN es el valor de VAN de la fase anterior)
 - 14.2.4.5. Calcular la ley de corte económica en función de V

- 14.2.4.6. Calcular ley de corte óptima
- 14.2.4.7. Calcular el tonelaje a extraer, tonelaje a procesar y su ley media (utilizando las ecuaciones por tramo para el tonelaje y ley media calculadas en el paso 2) y tonelaje a refinar de la fase
- 14.2.4.8. Si la ley de corte > ley del acopio, calcular tonelaje de acopio Q_s preliminar de la iteración.
- 14.2.4.9. Calcular los tiempos.
- 14.2.4.10. Calcular $Q_m, Q_c,$ y Q_r
- 14.2.4.11. Calcular el beneficio y VAN1
- 14.2.4.12. Comparar VAN1 con V1
 - 14.2.4.12.1. Si VAN1 no converge con V1:
 - 14.2.4.12.1.1. Vuelve al paso 13.2.2.1 ahora V1 = VAN1
 - 14.2.4.12.2. Si VAN 1 converge con V1:
 - 14.2.4.12.2.1. Calcular reservas restantes de la fase.
 - 14.2.4.12.2.2. Se va al paso 4 e iniciar la iteración de un nuevo año
- 14.2.5. Se va al paso 4, iniciar la iteración de un nuevo año
- 15. Si las reservas totales son iguales a cero, terminar el proceso iterativo
- 16. Calcular curva tonelaje ley del acopio.
- 17. Calcular las ecuaciones por tramo proporción tonelaje y ley media del acopio.
- 18. Calcular la ley de equilibrio del acopio.
- 19. Iniciar la iteración para encontrar las leyes de corte óptimas del acopio.
 - 19.1. Calcular G del acopio
 - 19.2. Calcular el tiempo acopio
 - 19.3. Calcular las cantidades $Q_m Q_c$ y Q_r
 - 19.4. Calcular beneficio y VAN iteración.
- 20. Si las reservas totales son cero, Termina el proceso iterativo.
- 21. Calcular el VAN del plan de producción para cada año.
- 22. Repetir la iteración pero ahora el valor de V es el VAN anual calculado a partir del plan de producción del paso 15.

8. Caso de Estudio 1

8.1. Descripción del caso de estudio 1

Para el caso de estudio 1, se utilizaron los datos de entrada obtenidos de la publicación de Asad & Topal (2011), los cuales incluyen los parámetros económicos junto con sus factores de escala, los parámetros operacionales, además de la distribución tonelaje-ley de un depósito de cobre hipotético con 3 fases de extracción.

En la Tabla 9 se presentan los parámetros operacionales, como las capacidades máximas para la mina, planta, refinería y la recuperación metalúrgica. Asimismo, se incluyen los parámetros económicos, entre ellos la tasa de descuento, el precio del metal y los distintos costos incurridos, junto con sus respectivos factores de escala para el precio y los costos.

Tabla 9: Parámetros económicos y capacidades operacionales para el caso de estudio 1.

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidad
Capacidad mina	M	20	[Mt/año]
Capacidad planta	C	10	[Mt/año]
Capacidad refinería	R	90.000	[t/año]
Precio del cobre	s	2.100	[USD/t]
Costo mina	m	1,05	[USD/t]
Costo planta	c	2,66	[USD/t]
Costo refinería	r	100	[USD/t]
Costo fijo	f	4.000.000	[USD/t]
Factor de escala del precio del cobre		0,80	[%/año]
Factor de escala del costo mina		2,50	[%/año]
Factor de escala del costo planta		3,00	[%/año]
Factor de escala del costo refinería		2,50	[%/año]
Factor de escala del costo fijo		2,50	[%/año]
Recuperación metalúrgica	y	90	%
Tasa de descuento	d	15	%

En la Tabla 10 se presentan la distribución tonelaje-ley para cada fase de extracción, donde cada fase cuenta con 100 Mt de material. En total, se deben extraer 300 Mt de material de la mina.

Tabla 10: Distribución tonelaje-ley de un depósito de cobre hipotético, caso de estudio 1.

Intervalo	Ley de Cu %	Tonelaje		
		Fase 1	Fase 2	Fase 3
1	0,00 - 0,15	14.400.000	15.900.000	17.900.000
2	0,15 - 0,20	4.600.000	5.100.000	5.500.000
3	0,20 - 0,25	4.400.000	4.900.000	5.400.000
4	0,25 - 0,30	4.300.000	4.700.000	5.300.000
5	0,30 - 0,35	4.200.000	4.500.000	4.900.000
6	0,35 - 0,40	4.100.000	4.400.000	4.700.000
7	0,40 - 0,45	3.900.000	4.300.000	4.600.000
8	0,45 - 0,50	3.800.000	4.100.000	4.500.000
9	0,50 - 0,55	3.700.000	3.900.000	4.200.000
10	0,55 - 0,60	3.600.000	3.800.000	3.900.000
11	0,60 - 0,65	3.400.000	3.600.000	3.800.000
12	0,65 - 0,70	3.300.000	3.500.000	3.700.000
13	0,70 -	42.300.000	37.300.000	31.600.000
Ley superior Intervalo N°13		1,56	1,44	1,30

En la Figura 20 se representa un esquema de las 3 fases.

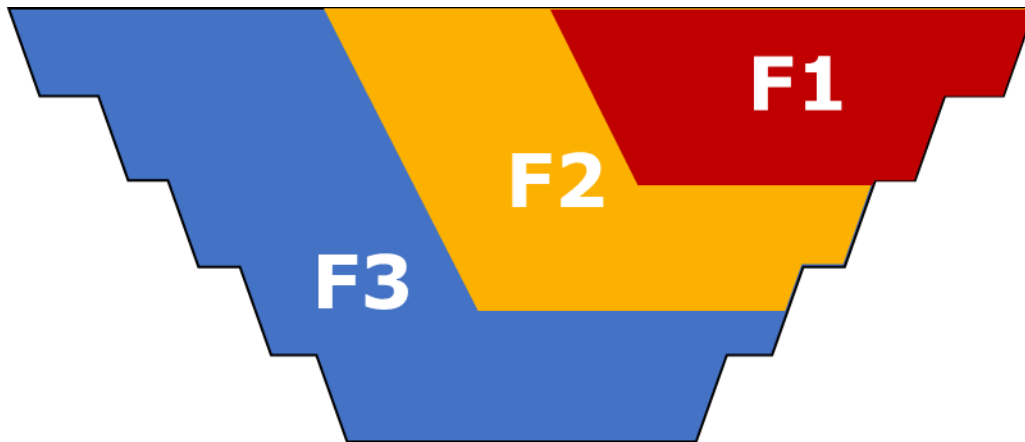


Figura 20: Representación de las 3 fases de extracción para el caso de estudio 1.

8.2. Validación de algoritmos en caso de estudio 1

En este apartado, se valida la implementación de los algoritmos en Python a través de la comparación con los resultados publicados en el caso de estudio presentados por Asad y Topal (2011). El artículo de referencia muestra los resultados obtenidos para el caso de estudio 1 utilizando los algoritmo de Lane (1964), algoritmo de Asad (2007) y Asad y Topal (2011).

A continuación, se presentan los análisis comparativos de los resultados para cada algoritmo con el objetivo de evaluar la precisión y confiabilidad de la implementación en Python.

8.2.1. Validación: algoritmo de Lane (1964)

En la Tabla 11 se presenta la comparación entre los resultados publicados por Asad & Topal (2011) y la implementación del algoritmo de Lane en Python lo que demuestra una alta consistencia entre ambos, ya que presentan diferencias porcentuales mínimas. Por ejemplo:

- Tanto el beneficio como el tiempo total de operación no se observan diferencias significativas (0,000%) por lo que coinciden completamente.
- El VAN presenta una diferencia de 0,011%, lo que respalda la fidelidad de la implementación
- El mineral desde la mina a planta presenta la diferencia más alta de (0,061%), pero aun así es despreciable.

Las diferencias observadas se pueden atribuir a la cantidad de decimales utilizados en los cálculos o redondeos.

Tabla 11: Validación algoritmo de Lane (1964) mediante la comparación de resultados Asad & Topal 2011 vs Implementación en Python – caso de estudio 1.

Resultados Algoritmo de Lane (1964)	Asad y Topal (2011)	Implementación en Python	Diferencia porcentual
VAN [MUSD]	735,770	735,850	0,011%
Beneficio [MUSD]	1.877,390	1.877,390	0,000%
Material [Mt]	300,010	300,000	-0,003%
Mineral desde mina a planta [Mt]	166,880	166,778	-0,061%
Metal fino producido [Mt]	1,352	1,351	-0,014%
Tiempo total de operación [año]	17	17	0,000%

Según los resultados de Asad y Topal (2011) la cantidad total de material extraído de la mina corresponde a 300,010 Mt. Sin embargo, las reservas totales de la mina son 300,00 Mt.

Esta diferencia de 10.000 t indica una inconsistencia en los datos reportados, ya que el tonelaje total de material extraído de la mina debe coincidir con el tonelaje total de las reservas de la mina.

Los resultados de algoritmo de Lane (1964) publicados por Asad y Topal (2011) se encuentran en el Anexo C, sección 14.1.1.

8.2.2. Validación: algoritmo de Asad (2007)

En la Tabla 12 se presenta los resultados, lo que confirma la precisión de la implementación en Python, mostrando que estas mínimas diferencias sugieren que la implementación en Python del algoritmo de Asad (2007) es consistente con el modelo utilizado por Asad y Topal (2011). Por otro lado, estas diferencias se pueden atribuir a la cantidad de decimales utilizados en los cálculos o redondeos.

Tabla 12: Validación algoritmo de asad (2007) mediante la comparación de resultados Asad & Topal 2011 vs Implementación en Python.

Resultados Algoritmo Asad (2007)	Asad y Topal (2011)	Implementación en Python	Diferencia porcentual
VAN [MUSD]	723,350	723,431	0,011%
Beneficio [MUSD]	1.805,670	1.805,842	0,010%
Materia [Mt]	300,000	300,000	0,000%
Mineral desde mina a planta [Mt]	164,280	164,221	-0,036%
Metal fino producido [Mt]	1,344	1,344	-0,005%
Tiempo total de operación [año]	17	17	0,000%

Los resultados de algoritmo de Asad (2007) publicados por Asad y Topal (2011) se encuentran en el Anexo C, sección 14.1.2.

8.2.3. Validación: algoritmo de Asad y Topal (2011)

En la Tabla 13 se presentan los resultados de la validación del algoritmo de Asad y Topal (2011). Se observa que las diferencias porcentuales son mínimas, lo que sugiere que la implementación en Python es muy precisa. Estas pequeñas diferencias pueden atribuirse a la cantidad de decimales utilizados en los cálculos o redondeos.

En el caso del mineral desde acopio a planta se observa una diferencia de 1,665%. Esta diferencia puede atribuirse a que la implementación en Python utiliza una metodología distinta para el acopio cuando entra en producción en comparación con lo que realizaron Asad y Topal (2011).

- La implementación en Python utiliza curvas normalizadas tonelaje-ley para el acopio cuando entra en producción, lo que supone que la distribución tonelaje-ley del acopio no cambia.
- En cambio, Asad y Topal (2011) utilizan curvas tonelaje-ley distintas para el acopio cuando está en producción, ya que la distribución tonelaje-ley va cambiando año a año.

Para corregir esto se recomienda a futuro que el algoritmo de Asad y Topal (2011) implementado en Python calcule las curvas tonelaje-ley del acopio para cada año en específico.

Tabla 13: Validación algoritmo de Asad y Topal (2011) mediante la comparación de resultados Asad & Topal 2011 vs Implementación en Python.

Resultados Algoritmo Asad y Topal (2011)	Asad y Topal (2011)	Implementación en Python	Diferencia porcentual
VAN [MUSD]	730,420	730,771	0,048%
Beneficio [MUSD]	1.900,194	1.901,371	0,062%
Material [Mt]	300,000	300,000	0,000%
Mineral desde mina a planta [Mt]	161,374	160,461	-0,566%
Mineral desde acopio a planta [Mt]	54,806	55,719	1,665%
Mineral total enviado a planta [Mt]	216,180	216,180	0,000%
Metal fino producido [Mt]	1,526	1,526	0,052%
Tiempo total de operación [año]	22	22	0,000%

Los resultados publicados por Asad y Topal (2011), incluidos en la sección 14.1.3 del Anexo C presentan algunas discrepancias relacionadas con el manejo del acopio y la cantidad de material extraído.

En primer lugar, la suma de las cantidades de mineral acopiado (Q_s), es decir, la cantidad de total de mineral enviado a acopio, asciende a 92,2 Mt. Sin embargo, este valor excede las 54 Mt totales procesadas desde el acopio al finalizar la extracción de material de la mina. Esta diferencia sugiere una inconsistencia, ya que el tonelaje total enviado a acopio debe coincidir con el tonelaje total procesado desde el acopio.

En segundo lugar, se reporta que, en el año 17, se extraen 2.098.433 toneladas de material Q_m desde la fase 3. Sin embargo, los valores reportados para la cantidad de mineral Q_c (1.242.287 toneladas) y mineral acopiado Q_s (1.373.839 toneladas) presentan una inconsistencia, ya que la suma de ambos supera la cantidad total extraída de la mina. Esto contradice la ecuación (86):

$$Q_m = Q_c + Q_s + Q_w \quad (86)$$

Donde Q_m representa la cantidad de material extraído, Q_c es el tonelaje de mineral, Q_s es el tonelaje de mineral acopiado y Q_w es el tonelaje de estéril.

8.3. Resultados y análisis caso de estudio 1

En esta sección se presentan los resultados y análisis de la implementa en Python de los siguientes algoritmos de optimización de leyes de corte para el caso de estudio 1:

- Algoritmo de Lane (1964)
- Algoritmo de Asad (1997) – capacidad de acopio.
- Algoritmo de Asad (2007) – factores de escala en precio y costos.
- Algoritmo de Asad y Topal (2011) – capacidad de acopio y factores de escala en precio y costos.

además, para los últimos 3 algoritmos, se realiza una comparación y análisis de los resultados de la implementación con respecto a los resultados del algoritmo de Lane (1964), con el fin de evaluar el impacto de las mejoras introducidas en cada modelo.

8.3.1. Resultados y análisis: algoritmo de Lane (1964)

Tabla 14: Resultados de la implementación del algoritmo de Lane (1964) para el caso de estudio 1.

Año	Fase	Ley de corte %	Ley media %	Material [t]	Mineral [t]	Cobre Fino [t]	Beneficio anual [USD]	VAN acumulado [USD]
1	1	0,50	1,00	17.847.221	10.000.000	90.000	130.660.418	735.849.726
2	1	0,50	1,00	17.847.221	10.000.000	90.000	130.660.418	715.566.766
3	1	0,50	1,00	17.847.221	10.000.000	90.000	130.660.418	692.241.363
4	1	0,50	1,00	17.847.221	10.000.000	90.000	130.660.418	665.417.149
5	1	0,50	1,00	17.847.221	10.000.000	90.000	130.660.418	634.569.303
6	1	0,50	1,00	10.763.897	6.031.133	54.280	78.803.041	599.094.280
6	2	0,53	0,95	7.937.733	3.968.867	34.066	47.653.619	599.094.280
7	2	0,53	0,95	20.000.000	10.000.000	85.834	120.068.583	562.501.762
8	2	0,53	0,95	20.000.000	10.000.000	85.834	120.068.583	526.808.443
9	2	0,53	0,95	20.000.000	10.000.000	85.834	120.068.583	485.761.127
10	2	0,53	0,95	20.000.000	10.000.000	85.834	120.068.583	438.556.713
11	2	0,49	0,93	12.062.267	6.379.681	53.360	74.533.047	384.271.637
11	3	0,47	0,85	7.240.639	3.620.319	27.556	36.431.243	384.271.637
12	3	0,45	0,83	19.223.440	10.000.000	74.747	98.708.422	330.948.093
13	3	0,41	0,80	17.943.586	10.000.000	72.328	95.214.255	281.881.885
14	3	0,36	0,78	16.716.828	10.000.000	69.751	91.350.103	228.949.913
15	3	0,32	0,74	15.531.673	10.000.000	66.970	87.032.022	171.942.296
16	3	0,26	0,71	14.361.453	10.000.000	63.891	82.103.213	110.701.618
17	3	0,21	0,67	8.982.381	6.777.811	41.078	51.984.195	45.203.648

En la Tabla 14 se puede observar que, la ley de corte más baja es 0,21%, la cual corresponde a la fase 3 y se encuentra en el periodo 17. Por otro lado, la ley de corte más alta es 0,53% correspondiente a la fase 2 y se repite en los periodos 7, 8, 9 y 10.

En los primeros 5 años se obtienen los beneficios más altos, con un valor de 130,66 MUSD, y el VAN del plan de producción corresponde a los 735,84 MUSD.

Además, se puede determinar si la ley de corte (G) corresponde a una ley de corte económica o a una ley de corte de equilibrio. Por ejemplo, durante los primeros 5 años, la planta y la refinería operan a su máxima capacidad. Por tanto, la ley de corte 0,5% corresponde a la ley de corte de equilibrio planta refinería (g_{cr}). En los periodos 7, 8, 9 y 10, tanto la mina y la planta operan a su máxima capacidad. En consecuencia, la ley de corte 0,53% corresponde a la ley de equilibrio mina planta (g_{mc}). Finalmente,

en los años 11 al 16 en los que solo la planta opera a su máxima capacidad, la ley de corte corresponde a la ley de corte económica de la planta (g_c).

En el periodo 6, se identifica una transición de fases en la que, dentro del mismo año, se termina la extracción de material de la fase 1 y, una vez agotada, se inicia la extracción de la fase 2. De manera similar, en el periodo 11 ocurre una transición entre las fases 2 y 3.

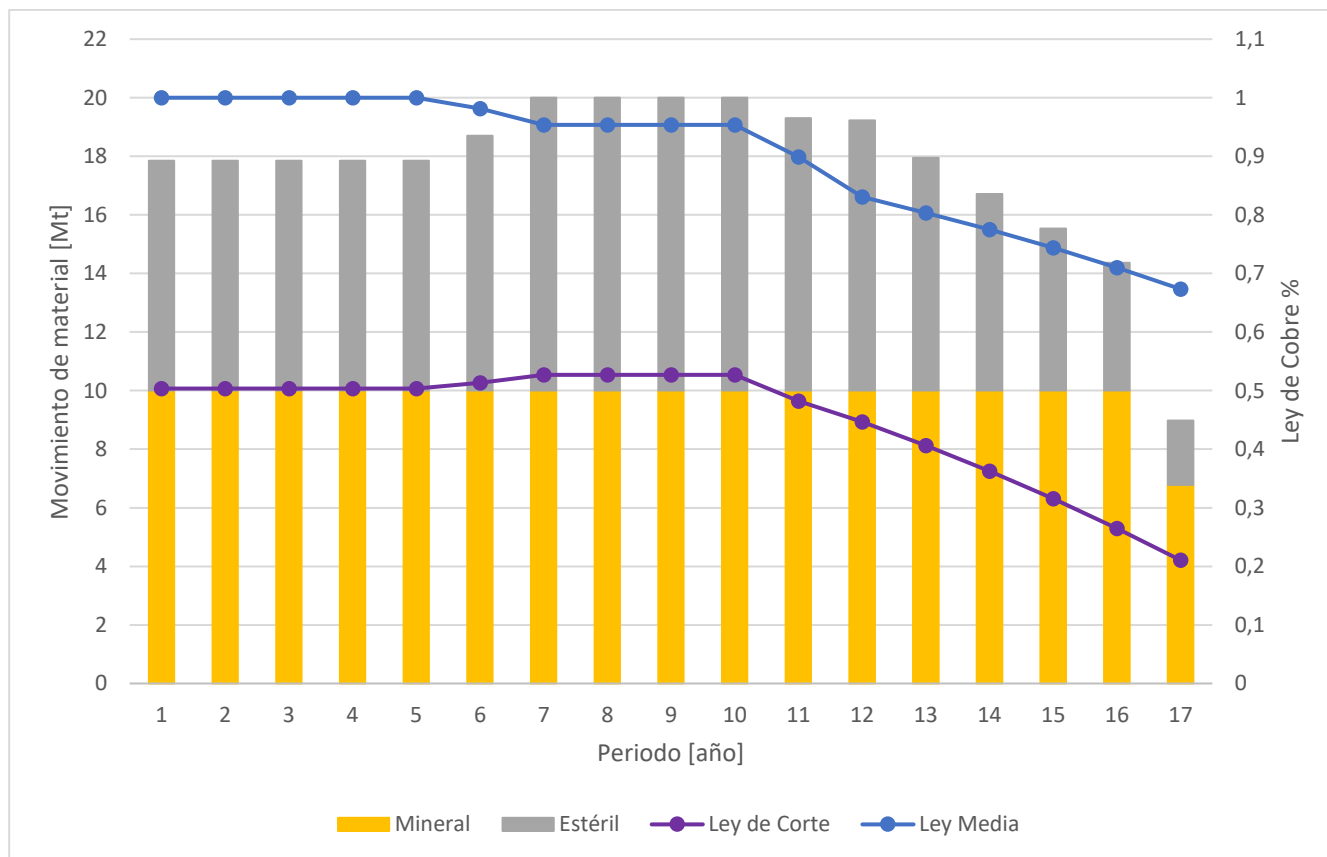


Figura 21: Plan de producción para el caso de estudio 1 obtenido de la implementación del algoritmo de Lane (1964).

En la Figura 21 se observa que la cantidad de mineral que es enviado a la planta se mantiene constante en 10 Mt durante todos los periodos, excepto en el periodo 17. Por otro lado, se puede apreciar que la cantidad de estéril extraído por año varía entre las 2 Mt a 10 Mt, siendo el periodo 17 en el que se extrae la menor cantidad de estéril, mientras que en los periodos 7, 8, 9 y 10 se extrae la mayor cantidad de estéril. Por último, se puede concluir que la cantidad de estéril siempre es menor o igual a la cantidad de mineral, resultando en una relación estéril/mineral por año menor o igual a 1.

La ley de corte presenta un comportamiento decreciente compuesto, caracterizado por dos patrones principales: periodos de constancia seguidos por un descenso en los últimos años. Durante los años

1 al 5 y 7 al 10, la ley de corte se mantiene constante en 0,5% y 0,53% respectivamente, reflejando una estrategia operativa enfocada en aprovechar al máximo las capacidades de 2 etapas en conjunto.

En contraste, en los últimos años de la operación minera, la ley de corte sigue un patrón decreciente debido al agotamiento de las reservas de la mina.

En los períodos de transición, específicamente en los años 6 y 11, tanto la ley de corte como la ley media corresponden a un valor ponderado entre las leyes de las fases involucradas en la transición. Los detalles sobre el cálculo de estos valores, incluidos los procedimientos para obtener las leyes ponderadas, se explican en la sección 14.2.1 del Anexo C.

8.3.2. Resultados y análisis: algoritmo de Asad (1997)

Tabla 15: Resultados de la implementación del algoritmo de Asad (1997) para el caso de estudio 1.

año	Fase	Ley de Corte %	Ley Media %	Material [t]	Mineral [t]	Mineral acopiado [t]	Estéril [t]	Cobre fino [t]	Beneficio anual [USD]	VAN acumulado [USD]
1	1	0,50363	1,00000	17.847.221	10.000.000	4.299.193	3.548.027	90.000	130.660.418	748.981.396
2	1	0,50363	1,00000	17.847.221	10.000.000	4.299.193	3.548.027	90.000	130.660.418	730.668.187
3	1	0,50363	1,00000	17.847.221	10.000.000	4.299.193	3.548.027	90.000	130.660.418	709.607.996
4	1	0,50363	1,00000	17.847.221	10.000.000	4.299.193	3.548.027	90.000	130.660.418	685.388.777
5	1	0,50363	1,00000	17.847.221	10.000.000	4.299.193	3.548.027	90.000	130.660.418	657.536.676
6	1	0,50363	1,00000	10.763.897	6.031.133	2.592.901	2.139.863	54.280	78.803.041	625.506.759
6	2	0,52692	0,95371	7.937.733	3.968.867	2.224.153	1.744.714	34.066	47.653.619	625.506.759
7	2	0,52692	0,95371	20.000.000	10.000.000	5.604.000	4.396.000	85.834	120.068.583	592.876.112
8	2	0,52692	0,95371	20.000.000	10.000.000	5.604.000	4.396.000	85.834	120.068.583	561.738.946
9	2	0,52692	0,95371	20.000.000	10.000.000	5.604.000	4.396.000	85.834	120.068.583	525.931.205
10	2	0,52692	0,95371	20.000.000	10.000.000	5.604.000	4.396.000	85.834	120.068.583	484.752.303
11	2	0,52692	0,95371	12.062.267	6.031.133	3.379.847	2.651.286	51.768	72.414.964	437.396.565
11	3	0,46889	0,84572	7.937.733	3.968.867	2.025.710	1.943.157	30.209	39.938.670	437.396.565
12	3	0,46889	0,84572	20.000.000	10.000.000	5.104.000	4.896.000	76.115	100.629.912	390.652.416
13	3	0,46729	0,84463	19.942.635	10.000.000	5.060.678	4.881.957	76.017	100.493.880	348.620.367
14	3	0,42803	0,81819	18.614.491	10.000.000	4.057.663	4.556.827	73.637	97.128.876	300.419.542
15	3	0,38287	0,78831	17.268.162	10.000.000	3.040.916	4.227.246	70.948	93.163.677	248.353.597
16	3	0,33094	0,75428	15.906.483	10.000.000	2.012.576	3.893.907	67.886	88.469.247	192.442.961
17	3	0,27932	0,71982	330.496	225.040	24.550	80.905	1.458	1.880.170	132.840.158
17	0	0,27932	0,38518	9.774.960	9.774.960	0	0	33.886	33.241.277	132.840.158
18	0	0,26772	0,37869	10.000.000	10.000.000	0	0	34.082	32.839.369	117.644.735
19	0	0,25514	0,37166	10.000.000	10.000.000	0	0	33.450	31.574.088	102.452.076
20	0	0,24153	0,36408	10.000.000	10.000.000	0	0	32.767	30.209.369	86.245.799
21	0	0,22681	0,35590	10.000.000	10.000.000	0	0	32.031	28.737.780	68.973.299
22	0	0,21098	0,34710	10.000.000	10.000.000	0	0	31.239	27.153.783	50.581.514
23	0	0,21000	0,34656	10.000.000	10.000.000	0	0	31.191	27.056.254	31.014.957
24	0	0,21000	0,34656	3.660.000	3.660.000	0	0	11.416	9.902.589	8.610.947

En la Tabla 15 se puede apreciar que ley de corte más baja es 0,21% y corresponde a los periodos 23 y 24 en donde se extrae la fase 0, es decir, cuando se extrae el material que está en el acopio para ser enviado a la planta.

El acopio recibe mineral durante los primeros 17 periodos. La ley de corte del acopio es 0,21% y corresponde la ley de corte más baja del plan producción obtenido de la implementación del algoritmo de Lane (1964).

La extracción de material de la mina finaliza en el periodo 17 y, en ese mismo periodo, se empieza a extraer y procesar el material que está en el acopio, el cual se agota en el periodo 24. Es importante destacar que la cantidad de material extraído del acopio es igual a la cantidad de mineral enviado a la planta, ya que solo se extrae del acopio la cantidad necesaria para alimentar a la planta.

Desde el año 1 al 5, se observa que la planta y refinería operan a su máxima capacidad. Luego, desde el año 7 hasta el 10, la mina y refinería limitan la operación en conjunto. Por último, la planta opera a su máxima capacidad a partir del año 11 en adelante.

Los beneficios más altos se perciben en los primeros 5 periodos, con un valor de 130,66 MUSD y el VAN del plan de producción es de 748,94 MUSD.

En el periodo 6, se identifica una transición de fases en la que, dentro del mismo año, se termina la extracción de material de la fase 1 y se inicia la extracción de la fase 2. De manera similar, en el periodo 11 ocurre una transición entre las fases 2 y 3. Finalmente, en periodo 17 se da una transición entre la fase 3 y la fase 0 (material acopiado).

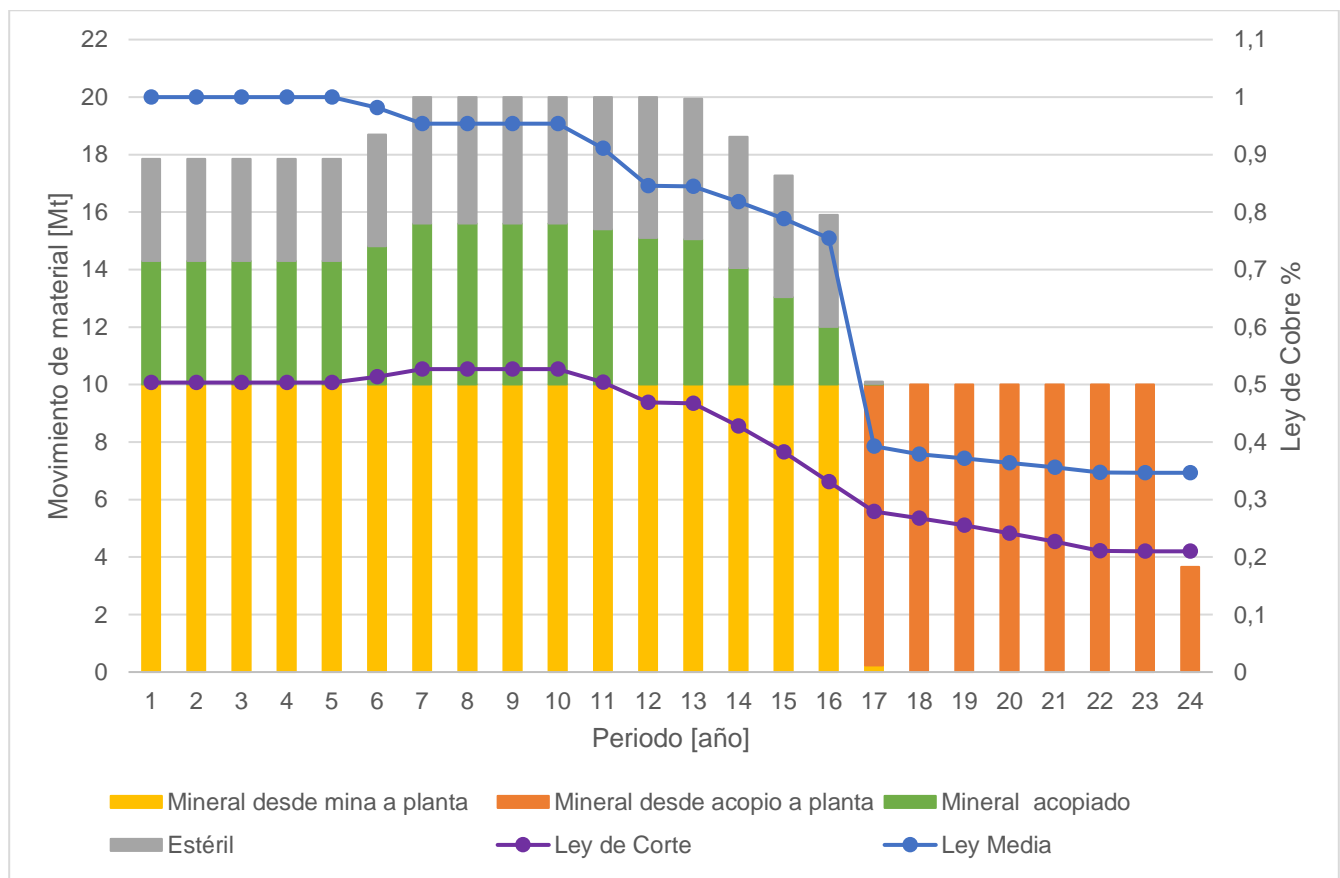


Figura 22: Plan de producción para el caso de estudio 1 obtenido de la implementación del algoritmo Asad (1997).

En la Figura 22 se observa que la cantidad de mineral enviado a planta por año se mantiene constante en 10 Mt, excepto en el periodo 24. La cantidad de mineral acopiado por año varía entre 0,04 Mt a 5,6 Mt, siendo el periodo 17 en el que se envía la menor cantidad, mientras que en los periodos del 7 al 10 se envía la mayor cantidad. El movimiento de estéril por año varía entre 0,1 Mt a 4,9 Mt, siendo el periodo 17 en el que se extrae la menor cantidad de estéril, mientras que en los periodos 12 y 13 se extrae la mayor cantidad. De lo anterior se concluye que la relación estéril/mineral por año es menor que 1.

Durante los primeros 5 periodos, la ley de corte se mantiene constante. Después, en el periodo 6, la ley de corte presenta un aumento, alcanzando el valor más alto en el periodo 7. Luego de esto, se mantiene constante hasta el año 10. Por último, desde el periodo 11 hasta el 22 se ve marcado por un comportamiento decreciente, y en los últimos 2 años se extrae con una ley de corte constante la cual corresponde a ley mínima del acopio.

La ley media presenta una gran disminución entre los periodos 16 y 17. Esto se debe al agotamiento del mineral de la fase 3, lo que da lugar al procesamiento de material que se encuentra en el acopio. Este cambio provoca la disminución en la ley media del mineral enviado a planta, reflejando la transición hacia el procesamiento de mineral con menor calidad de ley.

Ley de corte y ley media en los periodos de transición corresponde a ley ponderada.

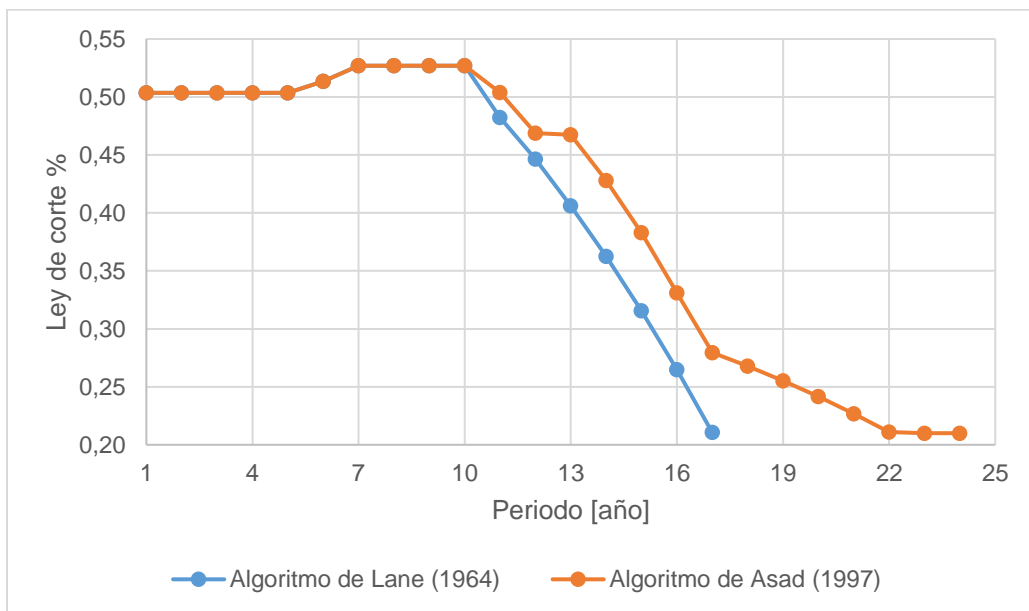


Figura 23: Comparación leyes de corte algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo de Asad (1997).

Como se observa en la Figura 23 al incorporar la capacidad de acopio se genera cambios en la leyes de corte. Por ejemplo:

- Entre los periodos 11 y 17 genera un aumento en la ley de corte en comparación con el algoritmo de Lane.
- Entre los periodos 18 y 24 aparecen las leyes de corte correspondientes al acopio.

Tabla 16: Comparación resultados algoritmo de Lane (1964) vs Algoritmo de Asad (1997).

Resultados implementación en Python	Algoritmo de Lane (1964)	Algoritmo de Asad (1997)	Diferencia porcentual
VAN [MUSD]	735,85	748,98	1,78%
Beneficio [MUSD]	1.877,39	2.074,87	11%
Mineral desde mina a planta [Mt]	166,78	160,23	-4%
Mineral desde acopio a planta [Mt]	0,00	73,43	-
Mineral total enviado a planta [Mt]	166,78	233,66	40%
Metal fino producido [Mt]	1,35	1,57	16%
Estéril [Mt]	133,22	66,34	-50%
Tiempo total de operación [año]	17	24	41%

A partir de los resultados presentados en la Tabla 16, se observar que la capacidad de acopio genera una aumento del 1,8% del VAN en el plan de producción, en comparación con lo obtenido con el algoritmo de Lane, además se generan 73 Mt adicionales de material acopiado, lo que permite extender la vida útil en 7 años aumentando en un 40% la cantidad total de mineral procesado.

8.3.3. Resultados y análisis: algoritmo de Asad (2007)

Tabla 17: Resultados de la implementación del algoritmo de Asad (2007) para el caso de estudio 1.

Año	Fase	Ley de corte %	Ley media %	Material [t]	Mineral [t]	Cobre Fino [t]	Beneficio anual [USD]	VAN acumulado [USD]
1	1	0,50	1,00	17.847.221	10.000.000	90.000	130.660.418	723.431.047
2	1	0,50	1,00	17.847.221	10.000.000	90.000	130.469.758	701.285.286
3	1	0,50	1,00	17.847.221	10.000.000	90.000	130.325.789	676.008.320
4	1	0,50	1,00	17.847.221	10.000.000	90.000	130.147.870	647.083.780
5	1	0,50	1,00	17.847.221	10.000.000	90.000	129.934.818	613.998.477
6	1	0,50	1,00	10.763.897	6.031.133	54.280	78.215.002	576.163.430
6	2	0,53	0,95	7.937.733	3.968.867	34.066	46.979.766	576.163.430
7	2	0,53	0,95	20.000.000	10.000.000	85.834	117.956.851	537.393.177
8	2	0,53	0,95	20.000.000	10.000.000	85.834	117.502.141	500.045.303
9	2	0,53	0,95	20.000.000	10.000.000	85.834	117.005.236	457.549.957
10	2	0,53	0,95	20.000.000	10.000.000	85.834	116.464.726	409.177.215
11	2	0,49	0,93	12.062.267	6.389.711	53.405	71.917.600	354.089.071
11	3	0,47	0,85	7.220.578	3.610.289	27.480	34.252.287	354.089.071
12	3	0,45	0,83	19.401.957	10.000.000	75.063	92.651.674	301.032.545
13	3	0,42	0,81	18.330.816	10.000.000	73.095	89.066.776	253.535.753
14	3	0,38	0,79	17.303.135	10.000.000	71.021	85.151.941	202.499.339
15	3	0,35	0,76	16.316.962	10.000.000	68.840	80.898.534	147.722.300
16	3	0,31	0,74	15.352.747	10.000.000	66.517	76.251.748	88.982.111
17	3	0,27	0,71	6.073.804	4.220.521	27.001	29.989.332	26.077.680

En la Tabla 17 se observa que ley de corte más baja es la ley 0,27% la cual corresponde a la fase 3 y se encuentra en el periodo 17. Por otro lado, la ley de corte más alta es la ley 0,53% que corresponde a la fase 2 y se repite en los periodos 7, 8, 9 y 10.

En el primer año se obtiene el beneficio más alto con un valor de 130,66 MUSD y el VAN del plan producción corresponde a los 723,43 MUSD.

En los primero 6 años se extrae la fase 1, donde la ley de corte óptima se mantiene constante en 0,50%. Durante este tiempo, tanto la planta como la refinería operan a su máxima capacidad, por lo que se deduce que la ley de corte oóptima corresponde a la ley de corte de equilibrio planta-refinería (g_{rc}).

Posteriormente, se extrae la fase 2 desde el periodo 6 al 11, cuya ley de corte es constante en 0.53% desde el año 6 hasta el 10, observándose que la mina y la planta limitan la operación en conjunto. Sin embargo, la ley de corte disminuye a 0,49% en el año 11.

Finalmente, se extrae la fase 3 desde el periodo 11 al 17, en el cual la planta opera a su máxima capacidad.

En el periodo 6, se identifica una transición de fases en la que, dentro del mismo año, se termina la extracción de material de la fase 1 y, una vez agotada, se inicia la extracción de la fase 2. De manera similar, en el periodo 11 ocurre una transición entre las fases 2 y 3.

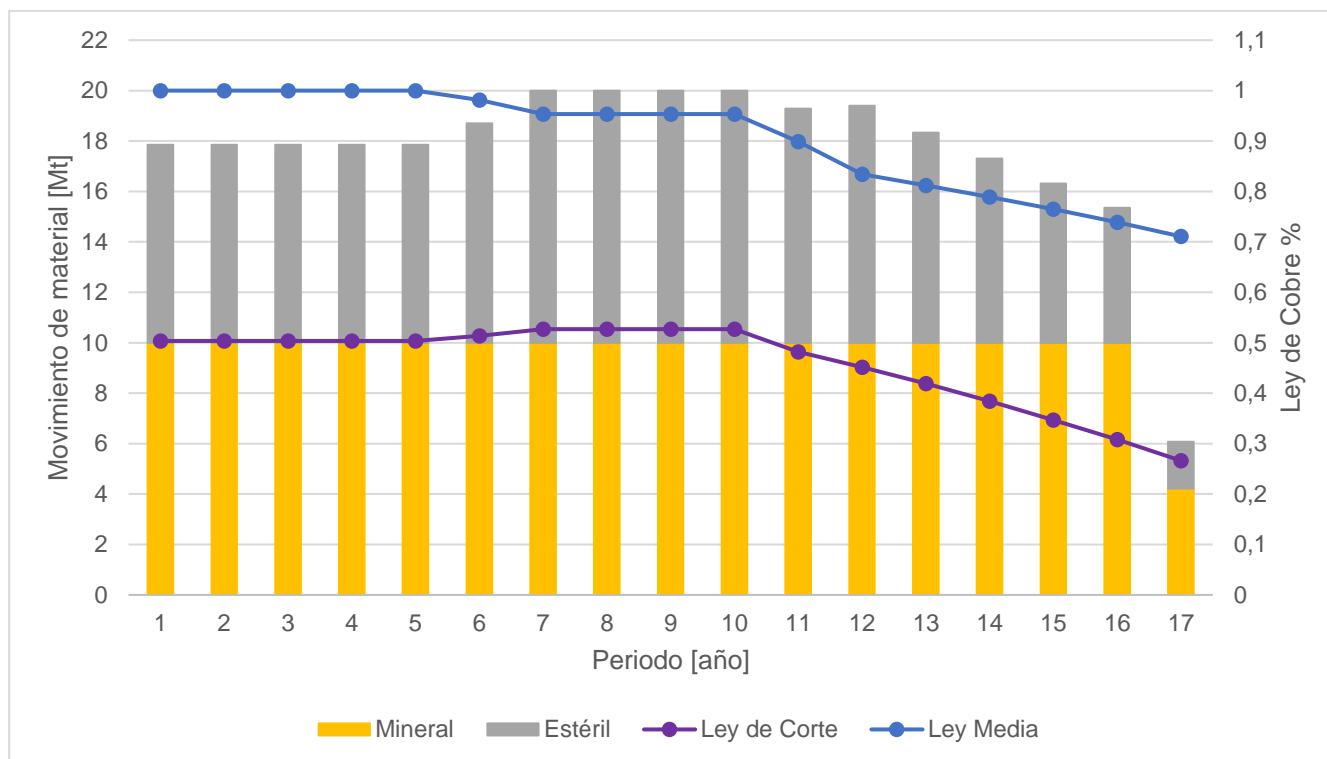


Figura 24: Plan de producción para el caso de estudio 1 obtenido de la implementación del algoritmo de Asad (2007).

En la Figura 24 se observa que la cantidad de mineral que es enviado a planta se mantiene constante en 10 Mt durante todos los periodos, excepto en el periodo 17. Por otro lado, se aprecia que la cantidad de estéril extraído por año varía entre las 2 Mt a 10 Mt, siendo el periodo 17 en el que se extrae la menor cantidad de estéril, mientras que en los periodos 7, 8, 9 y 10 se extrae la mayor cantidad de estéril. En conclusión, la cantidad de estéril siempre es menor o igual a la cantidad de mineral, resultando en una relación estéril/mineral menor o igual a 1.

La ley de corte muestra un comportamiento decreciente compuesto, con dos patrones principales: períodos de estabilidad seguidos por una disminución en los últimos años de operación. En los años 1 al 5 y 7 al 10, la ley de corte se mantiene constante en 0,5% y 0,53%, respectivamente, lo que refleja una estrategia orientada a maximizar la capacidad de dos etapas al mismo tiempo. Sin embargo, en

los últimos 7 años de la operación minera, la ley de corte experimenta un descenso progresivo debido al agotamiento de las reservas de la mina.

En los períodos de transición, específicamente en los años 6 y 11, tanto la ley de corte como la ley media corresponden a un valor ponderado entre las leyes de las fases involucradas en la transición.

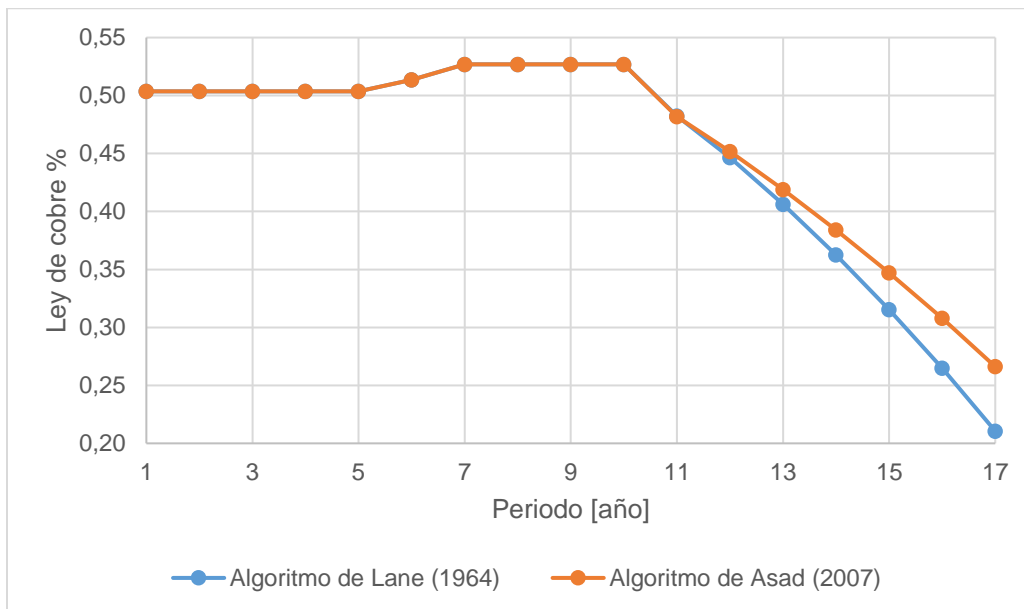


Figura 25: Comparación leyes de corte algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo de Asad (2007).

Como se muestra en la Figura 25, se puede observar que, al incorporar los factores de escala en precio y costos, se genera un aumento en la ley de corte a partir del período 12. Esto ocurre porque las leyes de corte corresponden a una ley de corte económica, la cual depende de los parámetros económicos los cuales aumentan cada año de acuerdo con un factor de escala. Los valores del precio y los costos correspondientes a cada año se presentan en el Anexo C, sección 14.2.2. En cambio, en los primeros 11 períodos no se ven cambios en la ley de corte, ya que predominan las leyes de corte de equilibrio las cuales sólo dependen de la distribución tonelaje-ley de la fase y de la capacidad de las etapas.

Tabla 18: Comparación resultados algoritmo de Lane (1964) vs Algoritmo de Asad (2007).

Resultados implementación en Python	Algoritmo de Lane (1964)	Algoritmo de Asad (2007)	Diferencia porcentual
VAN [MUSD]	735,85	723,43	-1,69%
Beneficio [MUSD]	1.877,39	1.805,84	-3,81%
Mineral enviado a planta [Mt]	166,78	164,22	-1,53%
Metal fino producido [Mt]	1,35	1,34	-0,54%
Estéril [Mt]	133,22	135,78	1,92%
Tiempo total de operación [año]	17	17	0,00%

A partir de los resultados presentados en la Tabla 18, se observa que al incorporar los factores de escala en precio y costos genera una disminución del 1,7% del VAN en el plan de producción, en comparación con lo obtenido con el algoritmo de Lane. Esta disminución se debe al aumento en los costos, lo que impacta de forma negativa en el VAN. Además, se reduce en 2Mt la cantidad de mineral enviado a planta, lo cual genera un aumento de estéril en 2 Mt. Por último, no se presentan cambios en el tiempo total de operación.

8.3.4. Resultados y análisis: algoritmo de Asad y Topal (2011)

Tabla 19: Resultados de la implementación del algoritmo de Asad y Topal (2011) para el caso de estudio 1.

Año	Fase	Ley de Corte %	Ley Media %	Material [t]	Mineral [t]	Mineral acopiado [t]	Estéril [t]	Cobre fino [t]	Beneficio anual [USD]	VAN acumulado [USD]
1	1	0,50	1,00000	17.847.221	10.000.000	3.363.999	4.483.222	90.000	130.660.418	730.771.336
2	1	0,50	1,00000	17.847.221	10.000.000	3.363.999	4.483.222	90.000	130.469.758	709.726.618
3	1	0,50	1,00000	17.847.221	10.000.000	3.363.999	4.483.222	90.000	130.325.789	685.715.852
4	1	0,50	1,00000	17.847.221	10.000.000	3.363.999	4.483.222	90.000	130.147.870	658.247.442
5	1	0,50	1,00000	17.847.221	10.000.000	3.363.999	4.483.222	90.000	129.934.818	626.836.688
6	1	0,50	1,00000	10.763.897	6.031.133	2.028.873	2.703.891	54.280	78.215.002	590.927.373
6	2	0,53	0,95371	7.937.733	3.968.867	1.763.764	2.205.102	34.066	46.979.766	590.927.373
7	2	0,53	0,95371	20.000.000	10.000.000	4.444.000	5.556.000	85.834	117.956.851	554.371.712
8	2	0,53	0,95371	20.000.000	10.000.000	4.444.000	5.556.000	85.834	117.502.141	519.570.617
9	2	0,53	0,95371	20.000.000	10.000.000	4.444.000	5.556.000	85.834	117.005.236	480.004.069
10	2	0,53	0,95371	20.000.000	10.000.000	4.444.000	5.556.000	85.834	116.464.726	434.999.443
11	2	0,52	0,94840	12.062.267	6.106.340	2.605.029	3.350.898	52.121	70.335.818	383.784.634
11	3	0,47	0,84572	7.787.320	3.893.660	1.485.821	2.407.839	29.637	36.940.745	383.784.634
12	3	0,47	0,84572	20.000.000	10.000.000	3.816.000	6.184.000	76.115	94.095.610	334.075.765
13	3	0,46	0,83633	19.516.604	10.000.000	3.482.070	6.034.534	75.270	92.116.443	290.091.520
14	3	0,42	0,81435	18.432.834	10.000.000	2.733.401	5.699.432	73.292	88.486.816	241.488.804
15	3	0,39	0,78989	17.336.302	10.000.000	1.975.918	5.360.385	71.090	84.348.322	189.225.309
16	3	0,34	0,76261	16.227.063	10.000.000	1.209.655	5.017.408	68.635	79.626.029	133.260.783
17	3	0,30	0,73406	699.877	461.105	22.370	216.402	3.046	3.435.606	73.623.872
17	0	0,30	0,39638	9.538.895	9.538.895	0	0	34.029	22.047.116	73.623.872
18	0	0,30	0,39391	10.000.000	10.000.000	0	0	35.452	21.507.927	59.184.731
19	0	0,29	0,39145	10.000.000	10.000.000	0	0	35.231	19.854.488	46.554.513
20	0	0,29	0,38903	10.000.000	10.000.000	0	0	35.013	18.152.891	33.683.202
21	0	0,28	0,38664	10.000.000	10.000.000	0	0	34.797	16.401.594	20.582.791
22	0	0,27	0,37915	6.180.000	6.180.000	0	0	21.088	8.358.909	7.268.616

En la Tabla 19 se puede apreciar que ley de corte más baja es 0,27% y corresponde al periodo 22 en donde se extrae la fase 0, es decir, cuando se envía a la planta el material que está en el acopio.

El acopio recibe mineral durante los primeros 17 periodos generando 55,7 Mt de material acopiado. La ley de corte del acopio es 0,27% y corresponde la ley de corte más baja del plan producción obtenido de la implementación del algoritmo de Asad (2007).

La extracción de material de la mina finaliza en el periodo 17 y, en ese mismo periodo, se empieza a extraer y procesar el material que está en el acopio, el cual se agota en el periodo 22. Es importante

destacar que la cantidad de material extraído del acopio es igual a la cantidad de mineral enviado a la planta, ya que solo se extrae del acopio la cantidad necesaria para alimentar a la planta.

Desde el año 1 al 5, se observa que la planta y refinería operan a su máxima capacidad. Luego, desde el año 7 hasta el 10, la mina y refinería limitan la operación en conjunto. Por último, la planta opera a su máxima capacidad a partir del año 11 en adelante.

El beneficio más alto se recibe en el año 1, con un valor de 130,66 MUSD y el VAN del plan de producción es de 730,77 MUSD.

En el periodo 6, se identifica una transición de fases en la que, dentro del mismo año, se termina la extracción de material de la fase 1 y se inicia la extracción de la fase 2. De manera similar, en el periodo 11 ocurre una transición entre las fases 2 y 3. Finalmente, en periodo 17 se da una transición entre la fase 3 y la fase 0 (material acopiado).

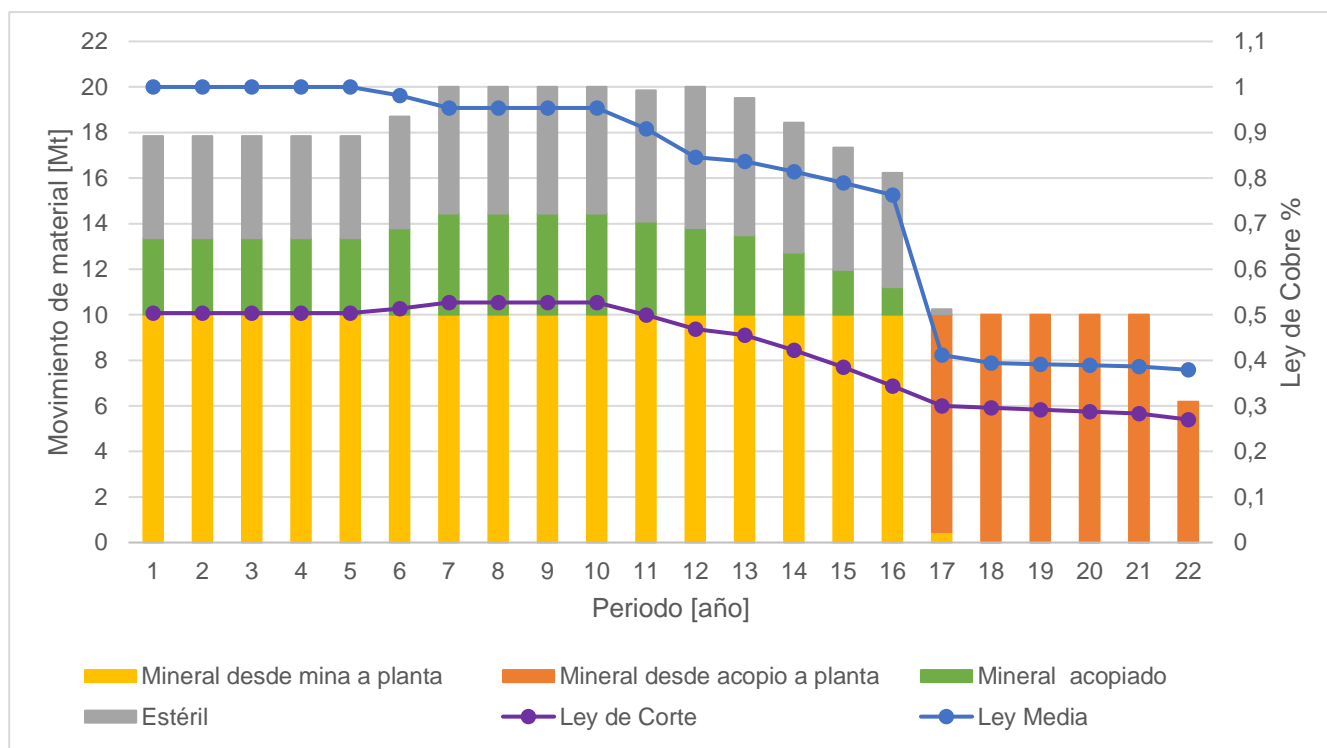


Figura 26. Plan de producción para el caso de estudio 1 obtenido de la implementación del algoritmo de Asad y Topal (2011).

En la Figura 26 se observa que la cantidad de mineral enviado a planta por año se mantiene constante en 10 Mt, excepto en el periodo 22. La cantidad de mineral acopiado por año varía entre 0,04 Mt a 4,4 Mt, siendo el periodo 17 en el que se envía la menor cantidad, mientras que en los periodos del 7 al 10 se envía la mayor cantidad. El movimiento de estéril por año varía entre 0,4 Mt a 6,2 Mt, siendo

el periodo 17 en el que se extrae la menor cantidad de estéril, mientras que en el periodo 12 se extrae la mayor cantidad. De lo anterior se concluye que la relación estéril/mineral por año es menor que 1.

Durante los primeros 5 periodos, la ley de corte se mantiene constante. Después, en el periodo 6, la ley de corte presenta un aumento, alcanzando el valor más alto en el periodo 7. Luego de esto, se mantiene constante hasta el año 10. Por último, desde el periodo 11 hasta el 22 se ve marcado por un comportamiento decreciente.

La ley media presenta una gran disminución entre los periodos 16 y 17, debido a que se agota el mineral correspondiente a la fase 3, dando lugar al procesamiento de mineral del acopio, el cual presenta un rango de leyes más bajas.

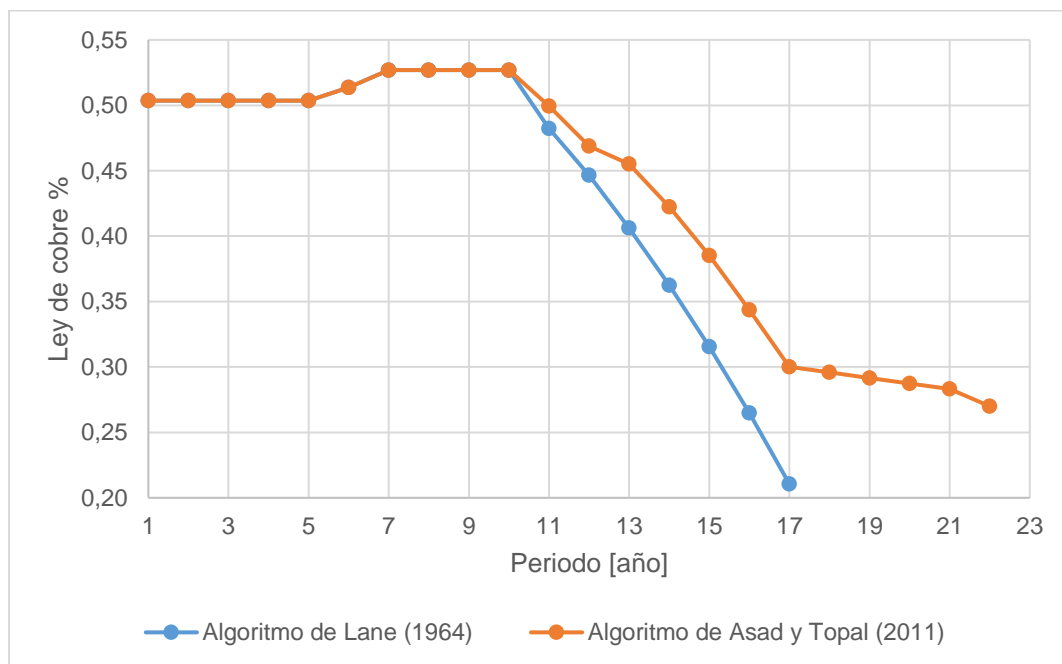


Figura 27: Comparación leyes de corte algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo de Asad y Topal (2011).

Como se observa en la Figura 27 al incorporar tanto la capacidad de acopio como los factores de escala genera cambios en las leyes de corte. Por ejemplo:

- Entre los periodos 11 y 17 genera un aumento en la ley de corte en comparación con el algoritmo de Lane.
- Entre los periodos 18 y 22 aparecen las leyes de corte correspondientes al acopio.

Tabla 20: Comparación resultados algoritmo de Lane (1964) vs Algoritmo de Asad y Topal (2011).

Resultados implementación en Python	Algoritmo de Lane (1964)	Algoritmo de Asad y Topal (2011)	Diferencia porcentual
VAN [MUSD]	735,85	730,77	-0,69%
Beneficio [MUSD]	1.877,39	1.901,37	1%
Mineral desde mina a planta [Mt]	166,78	160,46	-4%
Mineral desde acopio a planta [Mt]	0,00	55,72	-
Mineral total enviado a planta [Mt]	166,78	216,18	30%
Metal fino producido [Mt]	1,35	1,53	13%
Estéril [Mt]	133,22	83,82	-37%
Tiempo total de operación [año]	17	22	29%

A partir de los resultados presentados en la Tabla 20, se observa que la incorporación de un acopio y factores de escala genera una disminución del 0,69% del VAN en el plan de producción, en comparación con lo obtenido con el algoritmo de Lane, además se generan 56 Mt adicionales de material acopiado, lo que permite extender la vida útil en 5 años aumentando en 30% la cantidad total de mineral procesado.

8.3.5. Resumen de resultados y análisis caso de estudio 1

En la Tabla 21 se presenta el resumen de los resultados de cada uno de los algoritmos implementados en Python para el caso de estudio 1. Como se puede observar el algoritmo de Asad y Topal (2011) genera una disminución de 17 Mt de material de acopio y una disminución de 2 años en la vida útil en comparación con el algoritmo de Asad (1997).

Al incorporar tanto el acopio y los factores de escala genera un aumento de 8 MUSD en el VAN en comparación con el VAN obtenido con el algoritmo que solo incorpora los factores de escala. Por lo que incorporar la capacidad de acopio logra contrarrestar la disminución del VAN generada por los factores de escala, pero no lo suficiente como para superar el VAN generado por el algoritmo de Lane.

Por último, a medida que aumenta el valor del factor de escala, mayor es la disminución en VAN que se puede generar, lo que afecta directamente la rentabilidad del negocio minero.

Tabla 21: Resumen de los resultados de los algoritmos implementados en Python para el caso de estudio 1.

Resumen resultados implementación en Python	Algoritmo de Lane (1964)	Algoritmo de Asad (1997)	Algoritmo de Asad (2007)	Algoritmo de Asad y Topal (2011)
VAN [MUSD]	735,85	748,98	723,43	730,77
Beneficio [MUSD]	1.877,39	2.074,87	1.805,84	1.901,37
Mineral desde mina a planta [Mt]	166,78	160,23	164,22	160,46
Mineral desde acopio a planta [Mt]	0,00	73,43	0,00	55,72
Mineral total enviado a planta [Mt]	166,78	233,66	164,22	216,18
Metal fino producido [Mt]	1,35	1,57	1,34	1,53
Estéril [Mt]	133,22	66,34	135,78	83,82
Tiempo total de operación [año]	17	24	17	22

En la Tabla 22 se presentan un resumen de las diferencias relativas de los distintos algoritmos que extienden el modelo de optimización de ley de corte desarrollado por Lane.

Tabla 22: Resumen de las diferencias porcentuales de los algoritmos con respecto a los resultados obtenidos por el algoritmo de Lane para el caso de estudio 1.

Diferencias porcentuales	Algoritmo de Asad (1997)	Algoritmo de Asad (2007)	Algoritmo de Asad y Topal (2011)
VAN [MUSD]	1,78%	-1,69%	-0,69%
Beneficio [MUSD]	10,52%	-3,81%	1,28%
Mineral desde mina a planta [Mt]	-3,93%	-1,53%	-3,79%
Mineral desde acopio a planta [Mt]	-	-	-
Mineral total enviado a planta [Mt]	40,10%	-1,53%	29,62%
Metal fino producido [Mt]	16,16%	-0,54%	12,96%
Estéril [Mt]	-50,20%	1,92%	-37,08%
Tiempo total de operación [año]	41,18%	0,00%	29,41%

De los resultados anteriores se desprenden las siguientes conclusiones:

- Incluir el acopia ayuda a contrarrestar la disminución en el VAN generada por la incorporación de los factor de escala en costos.
- Los factores de escala tienen un mayor peso a la hora de obtener el VAN.
- Dependiendo de los factores de escala en precio y costos utilizadas se puede obtener VAN mayores o menores.

9. Caso de estudio 2

9.1. Descripción del caso de estudio 2

Para el caso de estudio 2, se utilizaron los datos de entrada obtenidos de la publicación de Asad et al. (2016), los cuales incluyen los parámetros económicos y operacionales, además de la distribución tonelaje-ley de un depósito de cobre hipotético con 1 sola fases de extracción. Sin embargo, los factores de escala para el precio y los costos fueron tomados de la publicación de Asad & Topal (2011).

En la Tabla 23 se presentan los parámetros operacionales como las capacidades máximas para la mina, planta, refinería y la recuperación metalúrgica. Asimismo, se incluyen los parámetros económicos, entre ellos la tasa de descuento, el precio del metal y los distintos costos incurridos, junto con sus respectivos factores de escala para el precio y los costos.

Tabla 23: Datos de entrada para el caso de estudio 2.

Dato de entrada	Símbolo	Valor	Unidad
Parámetros económicos			
Precio del cobre	s	550	[USD/t]
Costo mina	m	0,50	[USD/t]
Costo planta	c	0,60	[USD/t]
Costo refinería	r	50	[USD/t]
Costo fijo	f	4	[MUSD/t]
Tasa de descuento	d	15	%
Factores de escala			
precio del cobre		0,80	[%/año]
costo mina		2,50	[%/año]
costo planta		3,00	[%/año]
costo refinería		2,50	[%/año]
costo Fijo		2,50	[%/año]
Parámetros operacionales			
Capacidad mina	M	20	[Mt/año]
Capacidad planta	C	10	[Mt/año]
Capacidad refinería	R	90.000	[t/año]
Recuperación metalúrgica	y	90	%

En la Tabla 24 se presentan la distribución tonelaje-ley para el depósito de cobre del caso de estudio 2, el cual cuenta con una sola fase de extracción con un total de 100 Mt.

Tabla 24: Distribución tonelaje-ley de un depósito de cobre hipotético, caso de estudio 2.

Intervalo	Ley de Cu %	Material [t]
1	0,00 - 0,15	14.400.000
2	0,15 - 0,20	4.600.000
3	0,20 - 0,25	4.400.000
4	0,25 - 0,30	4.300.000
5	0,30 - 0,35	4.200.000
6	0,35 - 0,40	4.100.000
7	0,40 - 0,45	3.900.000
8	0,45 - 0,50	3.800.000
9	0,50 - 0,55	3.700.000
10	0,55 - 0,60	3.600.000
11	0,60 - 0,65	3.400.000
12	0,65 - 0,70	3.300.000
13	0,70 - 1,56	42.300.000

En la Figura 28 se representa un esquema de la fase del caso de estudio 2.

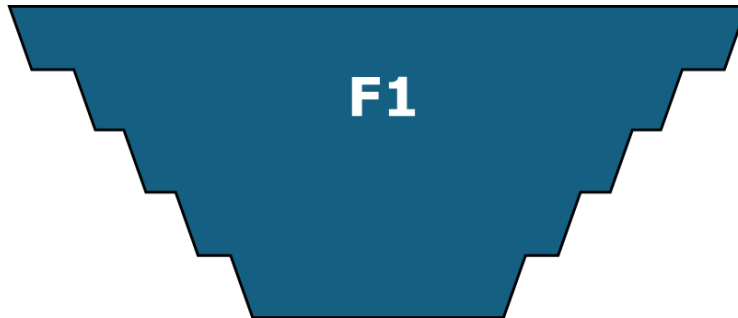


Figura 28: Representación de la fase de extracción para el caso de estudio 2.

9.2. Validación algoritmos en caso de estudio 2

En este apartado, se valida la implementación de los algoritmos en Python a través de la comparación con los resultados publicados en el caso de estudio presentados por Asad *et al.* (2016). El artículo de referencia muestra los resultados obtenidos para el caso de estudio 2 utilizando tanto el algoritmo de Lane (1964) como el algoritmo de Asad (1997).

A continuación, se presentan los análisis comparativos de los resultados para ambos algoritmos con el objetivo de evaluar la precisión y confiabilidad de la implementación en Python.

9.2.1. Validación: algoritmo de Lane (1964)

En la Tabla 25 se presenta la comparación entre los resultados publicados por Asad *et al.* (2016) y la implementación del algoritmo de Lane en Python lo que demuestra una alta consistencia entre ambos, ya que presentan diferencias porcentuales mínimas en todos los parámetros evaluados lo cual es un indicativo de que el algoritmo de Lane (1964) fue implementado de manera adecuada y confiable. Por ejemplo:

- En el tiempo total de operación no se observan diferencias significativas (0,000%) por lo que coinciden completamente.
- El VAN y el beneficio presentan diferencias porcentuales mínimas de 0,012% y 0,056% respectivamente, lo que respalda la fidelidad de la implementación
- La cantidad de estéril presenta la diferencia más alta de (-0,289%), pero aun así es despreciable.

Las diferencias observadas se pueden atribuir a la cantidad de decimales utilizados en los cálculos o redondeos.

Tabla 25: Validación algoritmo de Lane (1964) mediante la comparación de resultados Asad *et al.* (2016) vs Implementación en Python – caso de estudio 2.

Resultados algoritmo de Lane (1964)	Asad <i>et al.</i> (2016)	Implementación en Python	Diferencia porcentual
VAN [MUSD]	95,77	95,78	0,012%
Beneficio [MUSD]	151,75	151,84	0,056%
Material [Mt]	100,00	100,00	-0,005%
Mineral desde mina a planta [Mt]	62,30	62,41	0,167%
Estéril [Mt]	37,70	37,59	-0,289%
Metal fino producido [Mt]	0,53	0,53	0,072%
Tiempo total de operación [año]	7	7	0,000%

9.2.2. Validación: algoritmo de Asad (1997)

En la Tabla 26 se presentan los resultados de la validación del algoritmo de Asad (1997). Se observa que las diferencias porcentuales son mínimas. Sin embargo, hay 2 parámetros con grandes diferencias porcentuales:

En primer lugar, el tiempo total de operación tiene una diferencia de -11,11% y esto se debe a que los resultados de publicados por Asad *et al.* (2016) se observa que el acopio cuando entra en producción lo hace al siguiente año al que se agota el mineral de la mina por lo que no utiliza las capacidades remanentes de la mina, planta y refinería, es decir, no hay una fase de transición entre la fase de la mina y el acopio.

En segundo lugar, el mineral desde acopio a planta tiene una diferencia de 2,21%. Esta diferencia puede atribuirse a que la implementación en Python utiliza una metodología distinta para el acopio cuando entra en producción en comparación con lo que realizó Asad (1997).

- La implementación en Python utiliza curvas normalizadas tonelaje-ley para el acopio cuando entra en producción, lo que supone que la distribución tonelaje-ley del acopio no cambia.
- En cambio, Asad (1997) utilizan curvas tonelaje-ley distintas para el acopio cuando está en producción, ya que la distribución tonelaje-ley va cambiando año a año.

Para corregir esto se recomienda a futuro que el algoritmo de Asad (1997) implementado en Python calcule las curvas tonelaje-ley del acopio para cada año en específico.

Tabla 26: Validación algoritmo de Asad (1997) mediante la comparación de resultados Asad *et al.* (2016) vs Implementación en Python – caso de estudio 2.

Resultados algoritmo de Asad (1997)	Asad et al. (2016)	Implementación en Python	Diferencia porcentual
VAN [MUSD]	97,40	97,65	0,25%
Beneficio [MUSD]	156,70	156,59	-0,07%
Material [Mt]	100,00	100,00	0,00%
Mineral desde mina a planta [Mt]	61,70	61,52	-0,28%
Mineral desde acopio a planta [Mt]	15,82	16,17	2,21%
Mineral total enviado a planta [Mt]	77,52	77,69	0,23%
Metal fino producido [Mt]	0,5755	0,5759	0,05%
Tiempo total de operación [año]	9	8	-11,11%

9.3. Resultados y análisis del caso de estudio 2

En esta sección se presentan los resultados y análisis de la implementa en Python de los siguientes algoritmos de optimización de leyes de corte para el caso de estudio 2:

- Algoritmo de Lane (1964)
- Algoritmo de Asad (1997) – capacidad de acopio.
- Algoritmo de Asad (2007) – factores de escala en precio y costos.
- Algoritmo de Asad y Topal (2011) – capacidad de acopio y factores de escala en precio y costos.

además, para los últimos 3 algoritmos, se realiza una comparación y análisis de los resultados de la implementación con respecto a los resultados obtenidos por el algoritmo de Lane (1964), con el fin de evaluar el impacto de las mejoras introducidas en cada modelo.

9.3.1. Resultados y análisis: algoritmo de Lane (1964)

Tabla 27: Resultados implementación algoritmo de Lane (1964) para el caso de estudio 2.

Año	Fase	Ley de Corte %	Ley Media %	Material [t]	Mineral [t]	Estéril [t]	Cobre fino [t]	Beneficio anual [USD]	VAN acumulado [USD]
1	1	0,5036	1,0000	17.847.221	10.000.000	7.847.221	90.000	26.076.390	95.777.486
2	1	0,5025	0,9992	17.819.715	10.000.000	7.819.715	89.930	26.055.176	84.067.719
3	1	0,4579	0,9698	16.807.167	10.000.000	6.807.167	87.280	25.236.213	70.622.701
4	1	0,4093	0,9378	15.804.605	10.000.000	5.804.605	84.402	24.298.494	55.979.893
5	1	0,3566	0,9025	14.801.267	10.000.000	4.801.267	81.229	23.214.084	40.078.383
6	1	0,2994	0,8644	13.820.756	10.000.000	3.820.756	77.799	21.989.048	22.876.056
7	1	0,2376	0,8236	3.099.268	2.407.880	691.388	17.847	4.966.179	4.318.417

En la Tabla 27 se presenta el plan de producción del caso de estudio 2 junto con la información referente a cada año de operación donde se detalla la ley de corte, ley media, cantidad de material extraído de la mina, cantidad de mineral procesado, cantidad de cobre fino, así como su beneficio y VAN. Además, se puede observar que la ley de corte más alta (0,5036%) se encuentra en el año 1. Por otro lado, la ley de corte más baja (0,2376%) se encuentra en el año 7.

También se puede observar que la planta opera a su máxima capacidad durante casi toda la vida útil de la mina a excepción del último año y solo en el primer año la planta y la refinería en conjunto limitan la operación, es decir, ambas están operando a su máxima capacidad.

Otro efecto que se puede apreciar es que tanto la ley media, material y cobre fino presentan un comportamiento decreciente.

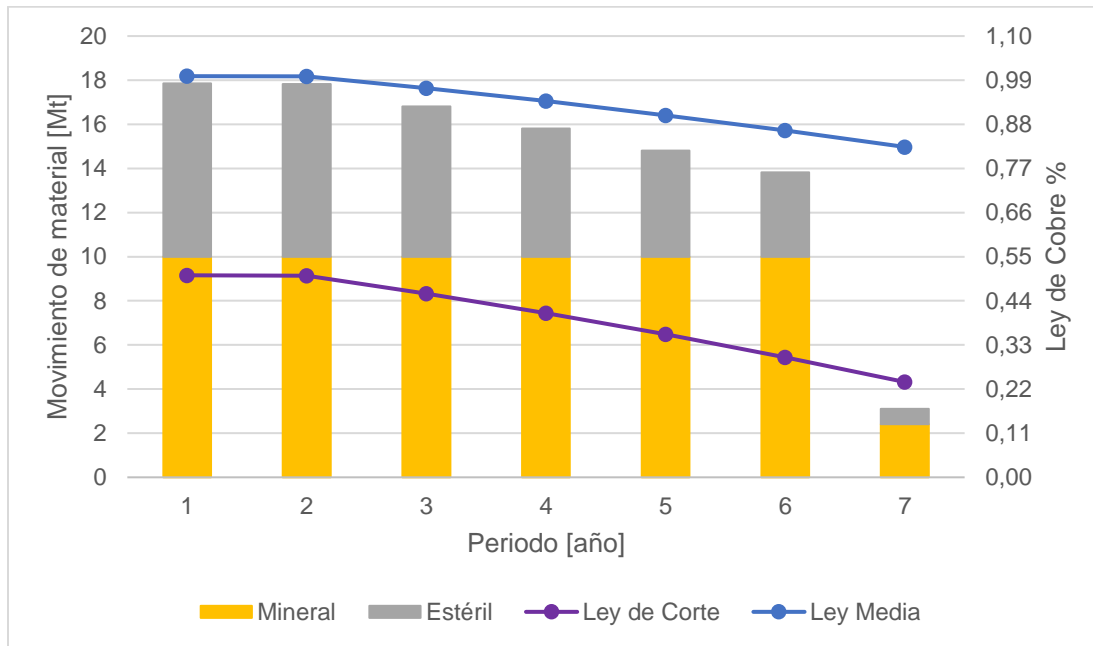


Figura 29: Plan de producción para el caso de estudio 2 obtenido de la implementación del algoritmo de Lane (1964).

En la Figura 29 se puede apreciar el efecto decreciente en las leyes de corte. La primera ley de corte es 0.5036% y corresponde a la ley de corte que balancea las capacidades de la planta y refinería (g_{rc}). Y para los años posteriores la ley de corte corresponde a la ley de corte económica de la planta (g_c), que depende del precio, costos, capacidad de la planta y el v que es obtenido por un proceso de iteración. Se puede observar una relación directa de la ley de corte con la cantidad de estéril, ya que a medida que va decreciendo la ley de corte también va disminuyendo la cantidad de estéril.

9.3.2. Resultados y análisis: algoritmo de Asad (1997)

Tabla 28: Resultados de la implementación del algoritmo de Asad (1997) para el caso de estudio 2.

Año	Fase	Ley de Corte %	Ley Media %	Material [t]	Mineral [t]	Mineral acopiado [t]	Estéril [t]	Cobre fino [t]	Beneficio anual [USD]	VAN acumulado [USD]
1	1	0,5036	1,0000	17.847.221	10.000.000	3.865.720	3.981.501	90.000	26.076.390	97.646.412
2	1	0,5036	1,0000	17.847.221	10.000.000	3.865.720	3.981.501	90.000	26.076.390	86.216.984
3	1	0,4744	0,9807	17.169.209	10.000.000	3.338.964	3.830.244	88.261	25.546.109	73.073.142
4	1	0,4253	0,9483	16.122.776	10.000.000	2.525.978	3.596.798	85.349	24.613.099	58.488.004
5	1	0,3707	0,9120	15.059.237	10.000.000	1.699.702	3.359.535	82.081	23.510.821	42.648.105
6	1	0,3101	0,8716	13.995.313	10.000.000	873.126	3.122.186	78.442	22.223.141	25.534.500
7	1	0,2366	0,8229	1.959.025	1.523.695	0	435.329	11.285	3.139.228	7.141.534
7	0	0,2376	0,3466	8.476.305	8.476.305	0	0	26.438	2.835.648	7.141.534
8	0	0,2376	0,3466	7.692.906	7.692.906	0	0	23.995	2.573.571	2.237.888

En la Tabla 28 se presenta el plan de producción del caso de estudio 2 obtenido a partir de la implementación del algoritmo de Asad (1997). Se puede observar que el acopio recibe mineral durante los primeros 7 años logrando almacenar 16,17 Mt que entran en producción una vez que se agota el mineral de la mina lo que aumenta la vida útil en un año.

También se puede observar que la planta opera a su máxima capacidad durante casi toda la vida útil de la mina a excepción del último año y solo en el año 1 y 2 la planta y la refinería se mantiene saturadas.

El VAN del plan de producción con acopio tiene un valor de 97,65 MUSD y los beneficios más altos se obtienen en los dos primeros años con un valor de 26 MUSD.

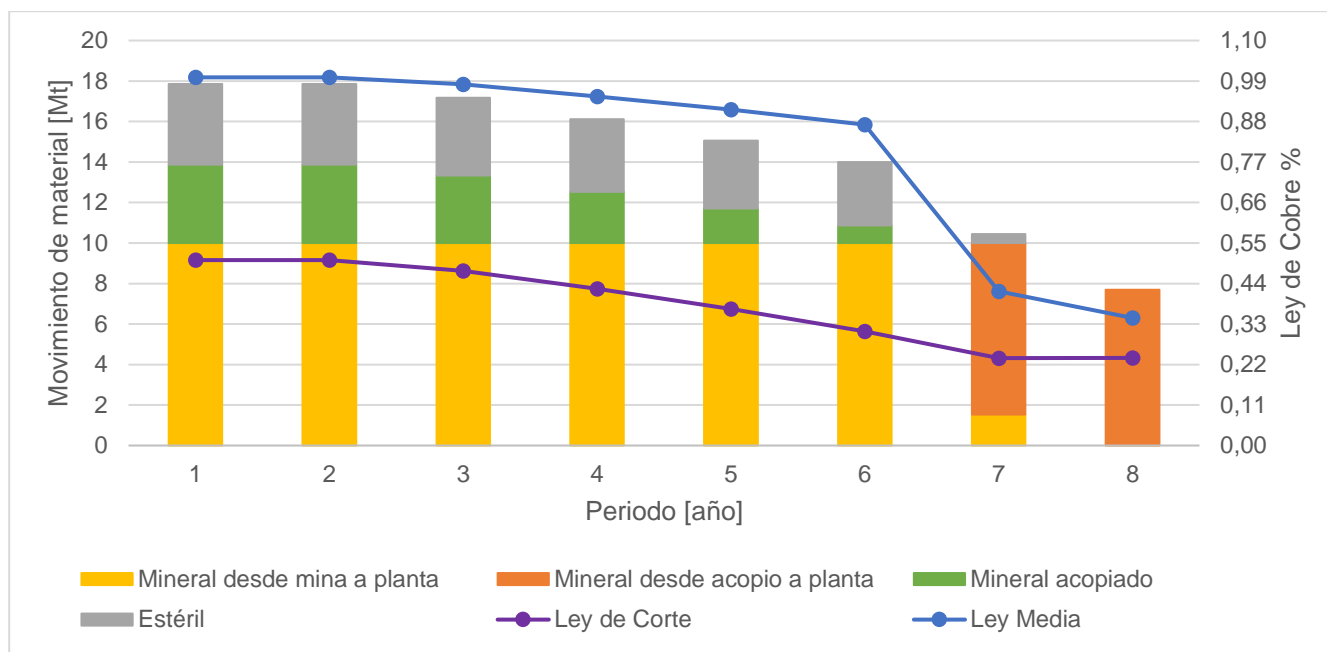


Figura 30: Plan de producción para el caso de estudio 2 obtenido de la implementación del algoritmo de Asad (1997)

En la Figura 30 se puede apreciar el efecto decreciente en la ley de corte, además se puede observar la gran disminución de la ley media en el año 7 en el momento en el que entra en producción el material del acopio el cual tiene una menor calidad de ley.

Entre los periodos 1 y 6 se puede observar un efecto decreciente en las cantidades de estéril y mineral acopiado

En el año 7 se presenta una transición de fase en la que, dentro del mismo año, se termina la extracción de la fase 1 y se inicia la extracción de material acopiado para ser procesado, el cual es considerado como un remanejo del material el cual tiene un costo del 45% del costo mina.

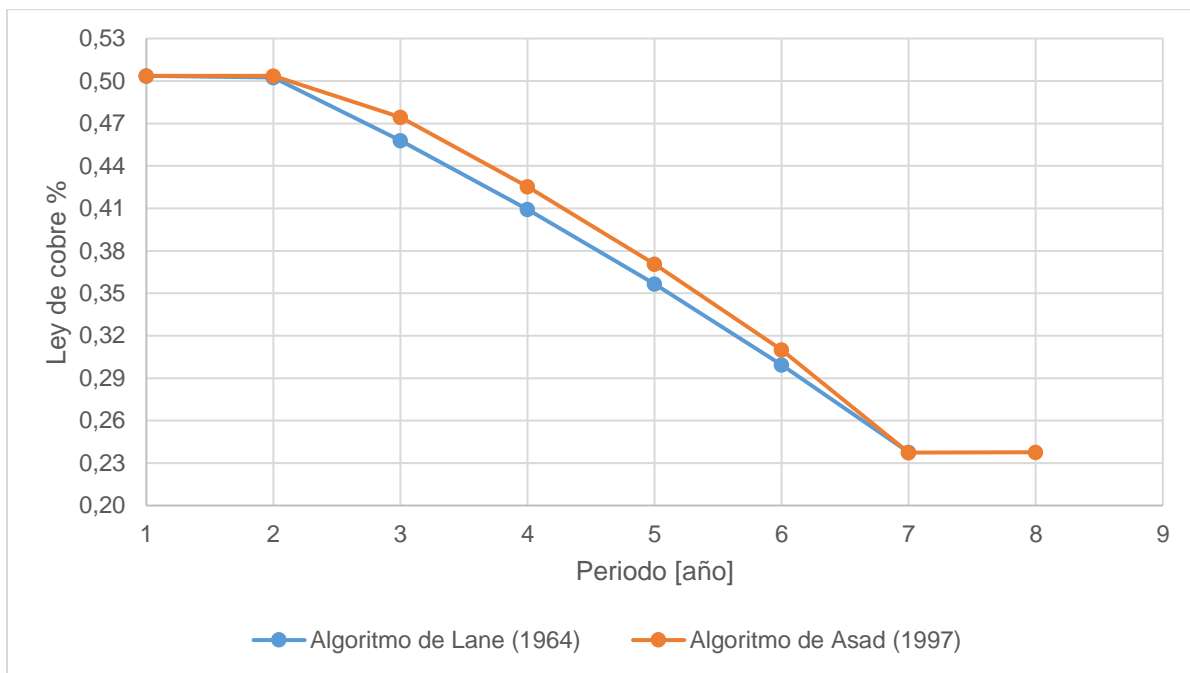


Figura 31: Comparación leyes de corte algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo de Asad (1997).

Como se observa en la Figura 31 al incorporar la capacidad de acopio se genera un leve aumento de la ley de corte entre los años 3 y 6 debido al material adicional procesado lo que aumenta la vida útil de la mina impacto en el cálculo del VAN iterativo el cual determina la ley de corte económica.

Tabla 29: Comparación resultados algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo de Asad (1997) para el caso de estudio 2.

Resultados implementación en Python	Algoritmo de Lane (1964)	Algoritmo de Asad (1997)	Diferencia porcentual
VAN [MUSD]	96	98	1,95%
Beneficio [MUSD]	152	157	3,13%
Mineral desde mina a planta [Mt]	62,4	61,5	-1,42%
Mineral desde acopio a planta [Mt]	0	16	-
Mineral total enviado a planta [Mt]	62,4	77,7	24,49%
Metal fino producido [Mt]	0,53	0,58	8,96%
Estéril [Mt]	38	22	-40,66%
Tiempo total de operación [año]	7	8	14,29%

A partir de los resultados presentados en la Tabla 29 se observa que el VAN aumenta un 1,95% debido al aumento de la vida útil de la operación producto del procesamiento de mineral adicional proveniente del material acopiado.

9.3.3. Resultados y análisis: algoritmo de Asad (2007)

Tabla 30: Resultados de la implementación del Algoritmo de Asad (2007) para el caso de estudio 2.

Año	Fase	Ley de Corte %	Ley Media %	Material [t]	Mineral [t]	Estéril [t]	Cobre fino [t]	Beneficio anual [USD]	VAN acumulado [USD]
1	1	0,5036	1,0000	17.847.221	10.000.000	7.847.221	90.000	26.076.390	93.110.175
2	1	0,4986	0,9966	17.727.503	10.000.000	7.727.503	89.697	25.533.507	81.000.312
3	1	0,4581	0,9699	16.810.939	10.000.000	6.810.939	87.290	24.555.206	67.616.851
4	1	0,4149	0,9415	15.914.753	10.000.000	5.914.753	84.734	23.484.653	53.204.173
5	1	0,3690	0,9109	15.028.709	10.000.000	5.028.709	81.982	22.301.774	37.700.147
6	1	0,3202	0,8783	14.162.942	10.000.000	4.162.942	79.045	21.004.884	21.053.394
7	1	0,2682	0,8438	2.507.934	1.881.770	626.164	14.291	3.687.498	3.206.520

En la Tabla 30 se observa que la ley de corte más alta (0,5036%) se encuentra en el año 1. Por otro lado, la ley de corte más baja (0,2682%) se encuentra en el año 7.

También se puede observar que la planta opera a su máxima capacidad durante casi toda la vida útil de la mina a excepción del último año y solo en el primer año la planta y la refinería en conjunto limitan la operación.

El VAN del plan de producción con factores de escala en precio y costos tiene un valor de 93,11 MUSD y el beneficio más alto se obtiene en el primer año con un valor de 26 MUSD.

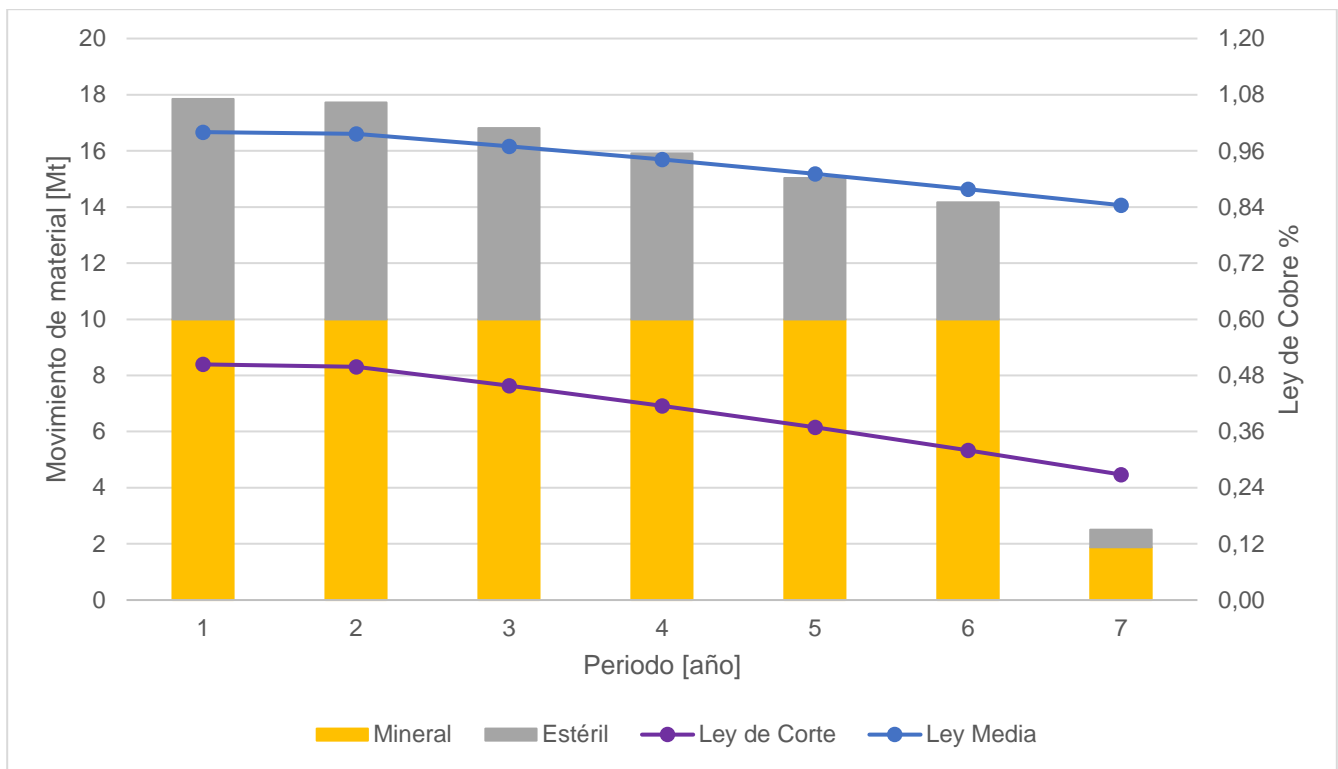


Figura 32: Plan de producción para el caso de estudio 2 obtenido de la implementación del algoritmo de Asad (2007).

En la Figura 32 se puede apreciar que la cantidad de estéril va disminuyendo debido a que la ley de corte presenta un comportamiento decreciente. De lo anterior, se puede concluir que la relación estéril mineral va disminuyendo con el paso de los años y siempre es menor que 1.

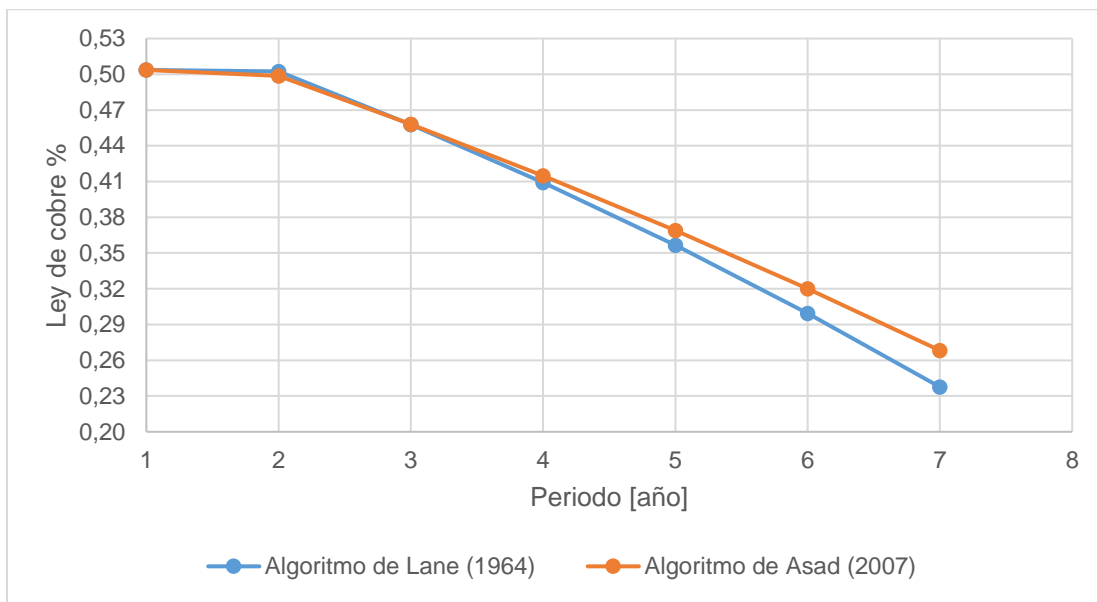


Figura 33: Comparación leyes de corte algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo de Asad (2007) para el caso de estudio 2.

Como se muestra en la Figura 33 se puede observar que la ley de corte que tiene en cuenta los factores de escala, a partir del periodo 4, estas van aumentando cada vez más a medida que avanza los años en comparación con las leyes de corte del algoritmo de Lane y esto se debe a que los costos van aumentando cada año. En consecuencia, mientras más alto los costos, más alta la ley de corte económica en comparación con Lane. En el Anexo D, sección 15.2.2 se presenta una tabla con los costos y precio por año donde puede observar el comportamiento creciente de los parámetros económicos.

Tabla 31: Comparación resultados algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo Asad (2007) para el caso de estudio 2.

Resultados implementación en Python	Algoritmo de Lane (1964)	Algoritmo de Asad (2007)	Diferencia porcentual
VAN [MUSD]	95,78	93,11	-2,78%
Beneficio [MUSD]	151,84	146,64	-3,42%
Mineral enviado a planta [Mt]	62,41	61,88	-0,84%
Metal fino producido [Mt]	0,53	0,53	-0,27%
Estéril [Mt]	37,59	38,12	1,40%
Tiempo total de operación [año]	7,00	7,00	0,00%

A partir de los resultados presentados en la Tabla 31 se observa que al aumentar los costos implica que la ley de corte es más alta en comparación con Lane. Por lo tanto, disminuye los beneficios y el VAN del plan de producción.

9.3.4. Resultados y análisis: algoritmo de Asad y Topal (2011)

Tabla 32: Resultados de la implementación del algoritmo de Asad y Topal (2011) para el caso de estudio 2.

Año	Fase	Ley de Corte %	Ley Media %	Material [t]	Mineral [t]	Mineral acopiado [t]	Estéril [t]	Cobre fino [t]	Beneficio anual [USD]	VAN acumulado [USD]
1	1	0,5036	1,0000	17.847.221	10.000.000	3.391.626	4.455.594	90.000	26.076.390	94.189.158
2	1	0,5036	1,0000	17.847.221	10.000.000	3.391.626	4.455.594	90.000	25.624.087	82.241.142
3	1	0,4706	0,9781	17.082.914	10.000.000	2.818.131	4.264.784	88.031	24.786.344	68.953.226
4	1	0,4269	0,9493	16.153.804	10.000.000	2.120.974	4.032.829	85.439	23.714.379	54.509.866
5	1	0,3793	0,9178	15.220.994	10.000.000	1.421.043	3.799.952	82.600	22.511.960	38.971.967
6	1	0,3277	0,8833	14.290.662	10.000.000	722.970	3.567.692	79.495	21.164.468	22.305.802
7	1	0,2662	0,8425	1.557.184	1.171.135	0	386.049	8.880	2.289.662	4.487.205
7	0	0,2682	0,3635	8.828.865	8.828.865	0	0	28.886	2.007.536	4.487.205
8	0	0,2682	0,3635	5.037.505	5.037.505	0	0	16.482	992.552	863.088

En la Tabla 32 se presenta el plan de producción del caso de estudio 2 considerando tanto la opción de acopio como los factores de escala. La fase 0 corresponde al acopio cuando entra en producción y se puede observar que el acopio recibe mineral durante siete años logrando almacenar 13,87 Mt lo que aumenta la vida útil en 1 año.

También se puede observar que la planta opera a su máxima capacidad durante casi toda la vida útil de la mina a excepción del último año y solo en el año 1 y 2 la planta y la refinería se mantienen saturadas.

En cuanto a los beneficios estos presentan un comportamiento decreciente, debido a que se privilegian las leyes más altas con el objetivo de recuperar la inversión inicial en los primeros años.

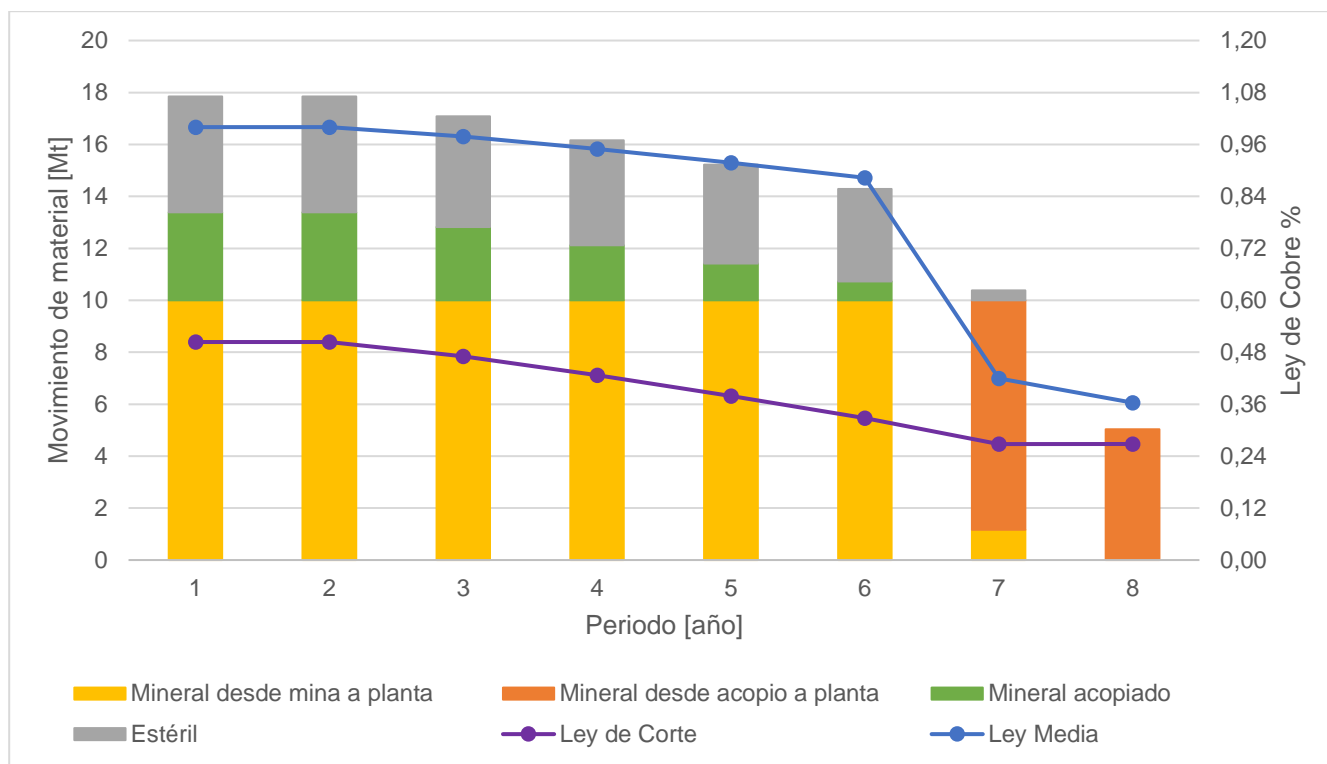


Figura 34: Plan de producción para el caso de estudio 2 obtenido de la implementación del algoritmo de Asad y Topal (2011).

En la Figura 34 se observa un comportamiento decreciente en la cantidad de mineral acopiado y estéril debido al efecto decreciente de la ley de corte. Por otro lado, la cantidad de mineral que alimenta la planta se mantiene constante en 10 Mt logrando saturar la planta durante los primeros siete años.

Se presenta una disminución marcada en el año 7 en la ley media producto de que comienza el procesamiento del material de acopio el cual tiene una menor calidad de ley.

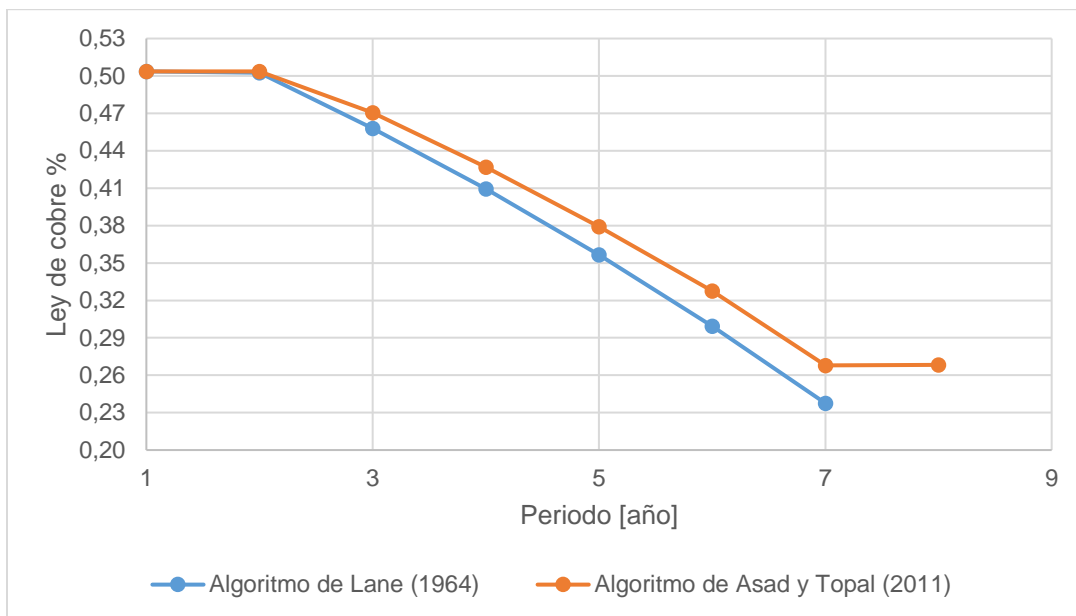


Figura 35: Comparación leyes de corte algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo de Asad y Topal (2011) para el caso de estudio 2.

En la Figura 35 se observa que entre los años 3 y 7 la ley de corte aumenta en comparación con las leyes de corte determinadas por el algoritmo de Lane, producto de efecto combinado de incorporar la capacidad de acopio y los factores de escala:

- La ley de corte económica aumenta debido al efecto creciente en los costos generados por los factores de escala.
- La ley de corte económica aumenta debido al incremento del valor de v , resultado de la extensión de la vida útil de la mina la cual se debe por el procesamiento de material adicional proveniente del acopio.

Tabla 33: Comparación resultados algoritmo de Lane (1964) vs algoritmo de Asad y Topal (2011) para el caso de estudio 2.

Resultados implementación en Python	Algoritmo de Lane (1964)	Algoritmo de Asad y Topal (2011)	Diferencia porcentual
VAN [MUSD]	95,78	94,19	-1,66%
Beneficio [MUSD]	151,84	149,17	-1,76%
Mineral desde mina a planta [Mt]	62,41	61,17	-1,98%
Mineral desde acopio a planta [Mt]	0,00	13,87	-
Mineral total enviado a planta [Mt]	62,41	75,04	20,24%
Metal fino producido [Mt]	0,53	0,57	7,82%
Estéril [Mt]	37,59	24,96	-33,60%
Tiempo total de operación [año]	7,00	8,00	14,29%

A partir de los resultados presentados en la Tabla 33, se observa una disminución del 1,66% en VAN del plan de producción. Esta disminución se debe principalmente al aumento progresivo de los costos. Aunque la incorporación del acopio ayuda a contrarrestar este efecto negativo, no logra superar el VAN obtenido del algoritmo de Lane.

Se generan 13,87 Mt de material de acopio, lo que permite extender la vida útil en 1 año. Este aumento en la vida útil no solo tiene un efecto positivo en el VAN, sino que también contribuye a reducir la cantidad de estéril en un 33,60% en comparación con Lane.

9.3.5. Resumen de resultados y análisis del caso de estudio 2

Tabla 34: Resumen de los resultados de los algoritmos implementados en Python para el caso de estudio 2.

Resumen resultados implementación en Python	Algoritmo de Lane (1964)	Algoritmo de Asad (1997)	Algoritmo de Asad (2007)	Algoritmo de Asad y Topal (2011)
VAN [MUSD]	95,78	97,65	93,11	94,19
Beneficio [MUSD]	151,84	156,59	146,64	149,17
Mineral desde mina a planta [Mt]	62,41	61,52	61,88	61,17
Mineral desde acopio a planta [Mt]	0,00	16,17	0,00	13,87
Mineral total enviado a planta [Mt]	62,41	77,69	61,88	75,04
Metal fino producido [Mt]	0,53	0,58	0,53	0,57
Estéril [Mt]	37,59	22,31	38,12	24,96
Tiempo total de operación [año]	7,00	8,00	7,00	8,00

Tabla 35: Resumen de las diferencias porcentuales de los algoritmos con respecto a los resultados obtenidos por el algoritmo de Lane para el caso de estudio 2.

Diferencias porcentuales	Algoritmo de Asad (1997)	Algoritmo de Asad (2007)	Algoritmo de Asad y Topal (2011)
VAN [MUSD]	1,95%	-2,78%	-1,66%
Beneficio [MUSD]	3,13%	-3,42%	-1,76%
Mineral desde mina a planta [Mt]	-1,42%	-0,84%	-1,98%
Mineral desde acopio a planta [Mt]	-	-	-
Mineral total enviado a planta [Mt]	24,49%	-0,84%	20,24%
Metal fino producido [Mt]	8,96%	-0,27%	7,82%
Estéril [Mt]	-40,66%	1,40%	-33,60%
Tiempo total de operación [año]	14,29%	0,00%	14,29%

De la Tabla 34 y Tabla 35 que compara los resultados de los 4 algoritmos implementados se puede concluir lo siguiente:

- Los factores de escala tienen un efecto negativo en el VAN, debido al aumento progresivo en los costos lo que disminuye los beneficios.
- El acopio tiene un efecto positivo en el VAN, debido al procesamiento de material de acopio que permite extender la vida útil y reducir la cantidad de estéril.
- El acopio logra contrarrestar el efecto negativo del VAN generado por los factores. Sin embargo, no es lo suficiente para superar el VAN obtenido del algoritmo de Lane.

10. Conclusiones, recomendaciones y trabajo futuro

10.1. Conclusiones

La incorporación de los factores de escala en precio y costo permite evaluar de mejor manera la leyes de corte a lo largo del tiempo. Sin embargo, esto genera un efecto negativo en el VAN debido al aumento progresivo de los costos. Este impacto se ve parcialmente contrarrestado al incorporar un acopio, el cual contribuye a aumentar de la vida útil de la operación y reducir la cantidad de estéril gracias al procesamiento de mineral adicional que esta acopiado. En conjunto, tanto el acopio como los factores de escala permiten una gestión más eficiente de los recursos, optimizando tanto la rentabilidad como la sostenibilidad a largo plazo de la operación minera.

Además se observa cuando el tiempo de vida útil es corto, cercano a los 7 u 8 años, las leyes de corte presentan un comportamiento estrictamente decreciente. En cambio, cuando la vida útil es mayor, entre los 17 a 24 años, las leyes de corte presentan un comportamiento decreciente compuesto: inician con valores constantes y, en los últimos años, adoptan un patrón decreciente más marcado.

10.2. Recomendaciones

Se recomienda los siguientes puntos:

- Utilizar el tiempo de producción al calcular del VAN de la iteración solo para la fase del último año de producción.
- Modificar el criterio de ajustes de precio y costos para los factores de escala para que tengan un aumento progresivo lineal desde un inicio.
- Incorporar el costo de remanejo en el cálculo de la ley de corte económica para la planta y refinería al momento de determinar las leyes de corte del acopio cuando entra en producción.
- Considerar curvas tonelaje ley distintas para cada año cuando el acopio entra en producción, es decir, actualizar la curva tonelaje ley cada año, ya que cuando se extrae material del acopio solo se extrae una porción del rango de leyes del acopio. Esto implica que no se mantiene la proporcionalidad en los tonelajes en la distribución tonelaje ley, a diferencia de lo que ocurre con las fases, donde la proporcionalidad si se conserva.
- Incorporar en el código una restricción de capacidad del acopio.
- Actualizar el bloque de código que determina el rango de leyes del mineral de ley intermedia, para que dependa de la fase correspondiente para el caso en el cual existan fases con distintos rangos de leyes.

- Modificar el código para que en un mismo año se puedan extraer más de 2 fases, es decir, periodos de transición con más de 2 fases.
- Considerar un *ramp up* para el primer año.
- Agregar un criterio de término de la iteración cuando el beneficio de un periodo es negativo.

10.3. Trabajos futuros

Como posibles trabajos futuros se visualizan los siguientes puntos:

- Incorporar la incertidumbre geológica, económica y operacional.
- Considerar acopios de alta y baja ley.
- Considerar acopios de corto plazo y largo plazo.
- Considerar una mezcla perfecta en el acopio.

11.Referencias

- Ahmadi, M. R., & Shahabi, R. S. (2018). Cutoff grade optimization in open pit mines using genetic algorithm. *Resources Policy*, 55, 184–191. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2017.11.016>
- Asad. (1997). *Multi mineral cutoff grade optimization with option to stockpile*. Colorado School of Mines.
- Asad. (2005). Cutoff grade optimization algorithm for open pit mining operations with consideration of dynamic metal price and cost escalation during mine life. *Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry - Proc. of the 32nd Int. Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Mineral Industry, APCOM 2005*, 273–277. <https://doi.org/10.1201/9781439833407.pt5>
- Asad. (2007). Optimum cut-off grade policy for open pit mining operations through net present value algorithm considering metal price and cost escalation. *Engineering Computations (Swansea, Wales)*, 24(7), 723–736. <https://doi.org/10.1108/02644400710817961>
- Asad, Qureshi, & Jang. (2016). A review of cut-off grade policy models for open pit mining operations. *Resources Policy*, 49, 142–152. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2016.05.005>
- Asad, & Topal. (2011). Net present value maximization model for optimum cut-off grade policy of open pit mining operations. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 111(11).
- Beck, D. (2013). *Determination of optimal mining cut-off grades: mathematical formulation and solution algorithm: (case study: hinoba copper mine in the Philippines)*. <https://doi.org/10.13140/RG.2.2.35292.80007>
- Camus, J. P. (2002). *Management of mineral resources: Creating value in the mining business*. SME.
- Cetin, E., & Dowd, P. (2002). The use of genetic algorithms for multiple cut-off grade optimization. *Proceedings of the 30 Th International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Minerals Industries*, 769–780. <https://www.researchgate.net/publication/234005791>
- Chanda, M. (1990). Optimization in open-pit mining. *International Journal of Mining Engineering*, 8(1), 1–14.
- Fourie, A., & Fletcher, J. (2001). *Sustainable mining practices: A global perspective*. Balkema.
- Hustrulid, W., Kuchta, M., & Martin, R. (2013). *Open pit mine planning & design 1* (3 rd. edition).

- Jélvez, E. (2017). *Metodología multietapa para la planificación de la producción de largo plazo en minas a rajo abierto bajo incertidumbre geológica*. [Tesis de doctorado, Universidad de Chile].
- Kalitenge, D. (2021). *Cut-off Grade Optimization in Open-pit Mines Considering Two Processing Streams and Rehabilitation Cost*. University of Alberta.
- Kuchta, M., Newman, A., & Topal, E. (2004). Implementing a production schedule at LKAB's Kiruna mine. *Interfaces*, 34(2), 124–134.
- Lane, K. F. (1964). Choosing the optimum cut-off grade. In *Colorado School of Mines Quarterly* (Vol. 59).
- Laurence, D. (2011). Establishing a sustainable mining operation: An overview. *Journal of Cleaner Production*, 19(2–3), 278–284.
- Navia-Vásquez, C., Monsalve-Hinostroza, M. C., & Franco-Sepúlveda, G. (2017). NPV analysis as a function of the discount rate and cost of rehandling implementing SIMSCHED DBS to open pit mining. *Boletín de Ciencias de La Tierra*, 41, 81–86. <https://doi.org/10.15446/rbct.n41.59742>
- Nieto, A. T., & Bascetin, A. (2006). *Mining cutoff grade optimization software to optimize NPV*. <https://www.researchgate.net/publication/260417732>
- Runge, I. C. (1998). *Mining economics and strategy*. SME.

12.Anexo A

Algoritmo de Lane (1964)

12.1. Construcción curva tonelaje ley a partir de la tabla distribución tonelaje ley

Tabla 36: Ejemplo distribución tonelaje – Ley.

Intervalo	Ley de corte %		Tonelaje [t]
	Límite inferior	Límite superior	
1	0,00	0,15	14.400.000
2	0,15	0,20	4.600.000
3	0,20	0,25	4.400.000
4	0,25	0,30	4.300.000
5	0,30	0,35	4.200.000
6	0,35	0,40	4.100.000
7	0,40	0,45	3.900.000
8	0,45	0,50	3.800.000
9	0,50	0,55	3.700.000
10	0,55	0,60	3.600.000
11	0,60	0,65	3.400.000
12	0,65	0,70	3.300.000
13	0,70	1,56	42.300.000

Se siguen los siguientes pasos para construir la curva tonelaje ley a partir de la Tabla 11.

1. Calcular la **Ley promedio** de las leyes de cada intervalo:

$$ley\ promedio\ intervalo\ \% = \frac{ley\ inferior\ \% + ley\ superior\ \%}{2} \quad (87)$$

2. Calcular el **Tonelaje fino** de cada intervalo:

$$tonelaje\ fino\ (ton) = (ley\ promedio\ \%/100) \cdot tonelaje(ton) \quad (88)$$

3. Calcular el **Tonelaje fino superior acumulado** para cada intervalo, es decir, sumar los tonelajes finos que corresponden a leyes mayores o iguales a la ley de corte del intervalo actual.
4. Calcular el **Tonelaje superior acumulado** para cada intervalo, es decir, sumar los tonelajes que correspondan a leyes mayores o iguales a la ley de corte del intervalo actual.

5. Calcular la **Ley media** de cada intervalo:

$$Ley\ media\% = \frac{\text{tonelaje fino acumulado (ton)}}{\text{tonelaje acumulado (ton)}} \cdot 100 \quad (89)$$

En la siguiente tabla se muestran los resultados.

Tabla 37: Resultados de la metodología para determinar la curva tonelaje ley.

Intervalo	Ley de corte %		Tonelaje [t]	Ley promedio %	Tonelaje fino [t]	Tonelaje fino acumulado [t]	Tonelaje acumulado [t]	Ley media %
	Límite inferior	Límite superior						
1	0,00	0,15	14.400.000	0,075	10.800	665.865	100.000.000	0,6659
2	0,15	0,20	4.600.000	0,175	8.050	655.065	85.600.000	0,7653
3	0,20	0,25	4.400.000	0,225	9.900	647.015	81.000.000	0,7988
4	0,25	0,30	4.300.000	0,275	11.825	637.115	76.600.000	0,8317
5	0,30	0,35	4.200.000	0,325	13.650	625.290	72.300.000	0,8649
6	0,35	0,40	4.100.000	0,375	15.375	611.640	68.100.000	0,8981
7	0,40	0,45	3.900.000	0,425	16.575	596.265	64.000.000	0,9317
8	0,45	0,50	3.800.000	0,475	18.050	579.690	60.100.000	0,9645
9	0,50	0,55	3.700.000	0,525	19.425	561.640	56.300.000	0,9976
10	0,55	0,60	3.600.000	0,575	20.700	542.215	52.600.000	1,0308
11	0,60	0,65	3.400.000	0,625	21.250	521.515	49.000.000	1,0643
12	0,65	0,70	3.300.000	0,675	22.275	500.265	45.600.000	1,0971
13	0,70	1,56	42.300.000	1,130	477.990	477.990	42.300.000	1,1300

Con la información obtenida en la tabla anterior se elabora la tabla de la curva tonelaje-ley. Primero se agrega una columna correspondiente a la ley de corte la cual corresponde a la ley inferior de cada intervalo, y las otras 2 columnas restantes corresponden al tonelaje (es decir, el tonelaje acumulado) y la ley media.

Tabla 38: Curva tonelaje ley obtenida a partir de la distribución ton - ley

ley de corte %	Tonelaje [t]	Ley media %
0,00	100.000.000	0,6659
0,15	85.600.000	0,7653
0,20	81.000.000	0,7988
0,25	76.600.000	0,8317
0,30	72.300.000	0,8649
0,35	68.100.000	0,8981
0,40	64.000.000	0,9317
0,45	60.100.000	0,9645
0,50	56.300.000	0,9976
0,55	52.600.000	1,0308
0,60	49.000.000	1,0643
0,65	45.600.000	1,0971
0,70	42.300.000	1,1300

A continuación se muestra la gráfica de la curva tonelaje ley de la fase:

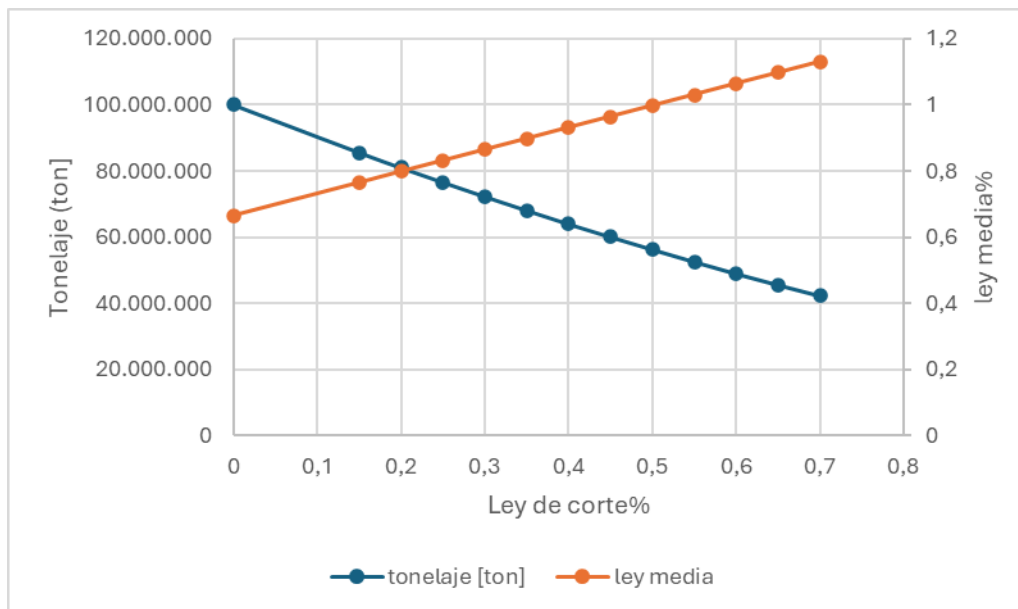


Figura 36: Curva tonelaje ley

Dado el supuesto de que la forma de la distribución tonelaje-ley se mantiene constante en el tiempo, independientemente de cuál sea la cantidad de reservas restantes o de material que se extraiga. Es

que se expresen el tonelaje en proporciones, logrando "normalizar" la curva respecto al tonelaje total. Esto permite obtener una tabla de la curva normalizada de tonelaje-ley, haciendo que la forma de esta distribución sea aplicable a diferentes cantidades de material. En otras palabras, al usar proporciones en lugar de valores absolutos de tonelaje, podemos representar la distribución de ley para cualquier cantidad de reservas, manteniendo la misma relación entre tonelaje y ley, siempre que el material corresponda a la misma fase.

Tabla 39: Proporciones tonelajes en la curva tonelaje ley.

Ley de corte %	Tonelaje [t]	Proporción tonelaje	Ley media %
0,00	100.000.000	1,00	0,6659
0,15	85.600.000	0,86	0,7653
0,20	81.000.000	0,81	0,7988
0,25	76.600.000	0,77	0,8317
0,30	72.300.000	0,72	0,8649
0,35	68.100.000	0,68	0,8981
0,40	64.000.000	0,64	0,9317
0,45	60.100.000	0,60	0,9645
0,50	56.300.000	0,56	0,9976
0,55	52.600.000	0,53	1,0308
0,60	49.000.000	0,49	1,0643
0,65	45.600.000	0,46	1,0971
0,70	42.300.000	0,42	1,1300

Por último, al graficar las 3 columnas: ley de corte, proporción tonelaje y ley media se obtiene la curva tonelaje ley:

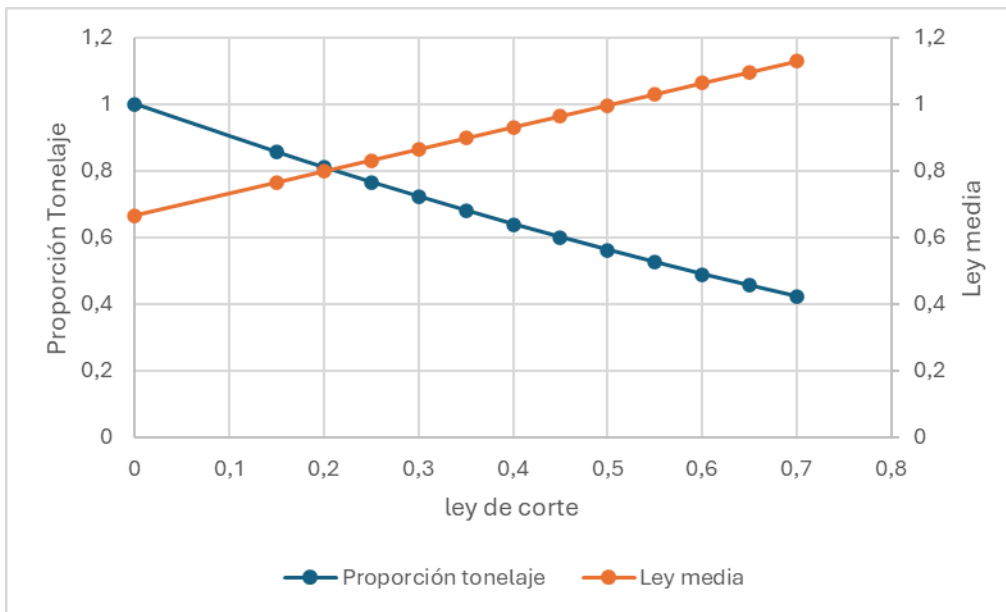


Figura 37: Curva normalizada tonelaje ley

Cabe destacar que esta curva tonelaje ley sirve para:

- Calcular el tonelaje total de mineral que hay en la reserva y su respectiva ley media.
- Calcular la cantidad de mineral a procesar y su respectiva ley media que sale de la cantidad de material extraído.

12.2. Ecuaciones por tramo de tonelaje en función de la ley de corte.

Para encontrar las ecuaciones por tramo del tonelaje acumulado en función de la ley de corte se utiliza la ecuación de la recta entre 2 puntos (tonelaje, ley de corte), calculando la pendiente y coeficiente de posición entre los 2 puntos, en la siguiente tabla se muestra los resultados:

Tabla 40: Ecuaciones por tramo de la proporción tonelaje de la curva ton-ley.

Tramo	Ley corte i	Tonelaje i	Ley de corte j	Tonelaje j	m1	n1
1	0,00	1,00	0,15	0,86	-0,960	1,000
2	0,15	0,86	0,20	0,81	-0,920	0,994
3	0,20	0,81	0,25	0,77	-0,880	0,986
4	0,25	0,77	0,30	0,72	-0,860	0,981
5	0,30	0,72	0,35	0,68	-0,840	0,975
6	0,35	0,68	0,40	0,64	-0,820	0,968
7	0,40	0,64	0,45	0,60	-0,780	0,952
8	0,45	0,60	0,50	0,56	-0,760	0,943
9	0,50	0,56	0,55	0,53	-0,740	0,933
10	0,55	0,53	0,60	0,49	-0,720	0,922
11	0,60	0,49	0,65	0,46	-0,680	0,898
12	0,65	0,46	0,70	0,42	-0,660	0,885

Donde:

$$m1 = \frac{(\text{tonelaje } 2 - \text{tonelaje } 1)}{(\text{ley de corte } 2 - \text{ley de corte } 1)} \quad (90)$$

$$n1 = \text{tonelaje } 1 - (m1 \cdot \text{ley de corte } 1) \quad (91)$$

Por lo tanto, para encontrar el tonelaje total de mineral que hay en la reserva de un periodo determinado se tiene que:

$$\text{tonelaje a procesar} = [(m1 \cdot \text{ley de corte}) + n1] \cdot \text{tonelaje a extraer} \quad (92)$$

Y para encontrar la cantidad a procesar que sale de la cantidad de material extraído de la mina se tiene que:

$$Q_c = [(m1 \cdot \text{ley de corte}) + n1] \cdot Q_m \quad (93)$$

Lo mismo se repite pero para la ley media que a continuación se detalla.

12.3. Ecuaciones por tramo de la ley media en función de la ley de corte.

Para encontrar las ecuaciones por tramo de la ley media en función de la ley de corte se utiliza la ecuación de la recta entre 2 puntos (ley media, ley de corte), calculando la pendiente y coeficiente de posición entre los 2 puntos, en la siguiente tabla se muestra los resultados:

Tabla 41: Ecuaciones por tramo para la ley media de la curva ton-ley.

Tramo	Ley de corte i	Ley media i	Ley de corte j	Ley media j	m2	n2
1	0,00	0,67	0,15	0,77	0,663	0,666
2	0,15	0,77	0,20	0,80	0,670	0,665
3	0,20	0,80	0,25	0,83	0,659	0,667
4	0,25	0,83	0,30	0,86	0,662	0,666
5	0,30	0,86	0,35	0,90	0,666	0,665
6	0,35	0,90	0,40	0,93	0,670	0,664
7	0,40	0,93	0,45	0,96	0,658	0,669
8	0,45	0,96	0,50	1,00	0,661	0,667
9	0,50	1,00	0,55	1,03	0,665	0,665
10	0,55	1,03	0,60	1,06	0,670	0,662
11	0,60	1,06	0,65	1,10	0,655	0,671
12	0,65	1,10	0,70	1,13	0,659	0,669

Donde:

$$m2 = \frac{(\text{tonelaje } 2 - \text{tonelaje } 1)}{(\text{ley de corte } 2 - \text{ley de corte } 1)} \quad (94)$$

$$n2 = \text{ley media } 1 - (m2 \cdot \text{ley de corte } 1) \quad (95)$$

Por lo tanto, para encontrar la ley media del tonelaje total de mineral que hay en la reserva de un periodo determinado se tiene que:

$$\text{Ley media del tonelaje total mineral} = (m2 \cdot \text{ley de corte}) \quad (96)$$

Y para encontrar la cantidad a procesar que sale de la cantidad de material extraído de la mina se tiene que:

$$\text{ley media del } Q_c = (m2 \cdot \text{ley de corte}) \quad (97)$$

12.4. Ecuaciones básicas

Costos totales T_c son

$$T_c = mQ_m + cQ_c + rQ_r + fT \quad (98)$$

El ingreso R es

$$R = sQ_r \quad (99)$$

El beneficio P viene dado por:

$$P = R - T_c = sQ_r - (mQ_m + cQ_c + rQ_r + fT) \quad (100)$$

Combinado términos:

$$P = (s - r)Q_r - cQ_c - mQ_m - fT \quad (101)$$

Esta es la expresión básica para el beneficio

.....

Optimización del valor presente neto (VAN)

El valor presente de todos los beneficios restantes es V el cual está compuesto de 2 partes. La primera, PV_p , es del beneficio P realizado al tiempo T al extraer la cantidad Q_m . El segundo, PV_w , es obtenido de los beneficios realizado al extraer el material restante después del tiempo T . Los beneficios son indicados como P_1 en el tiempo T_1 , P_2 en el tiempo T_2 , etc. El valor de todos estos beneficios restantes después del $t = T$ son expresado al tiempo T como W .

Los valores W y P son descontados o llevados al tiempo $t = 0$ y vienen dado por la siguiente expresión

$$PV_w(t = 0) = \frac{W}{(1 + d)^T} \quad (102)$$

$$PV_p(t = 0) = \frac{P}{(1 + d)^T} \quad (103)$$

Donde d es la tasa de descuento

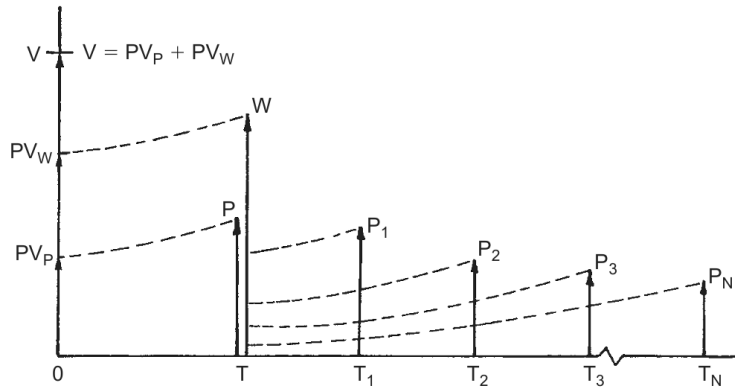


Figura 38: Diagrama de la representación del cálculo del VAN

El valor presente al tiempo $t = 0$ es por tanto.

$$V = \frac{W}{(1+d)^T} + \frac{P}{(1+d)^T} \quad (104)$$

El valor presente al tiempo $t = T$ de las reservas restante es W , la diferencia v entre el valor presente de las reservas restantes al tiempo $t = 0$ y $t = T$ es

$$v = V - W \quad (105)$$

La ecuación (104) puede ser reescrita como

$$W + P = V(1+d)^T \quad (106)$$

Aplicando una expansión binomial del termino $(1+d)^T$ se encuentra

$$(1+d)^T = 1 + Td + T \frac{(T-1)d^2}{2!} + \frac{T(T-1)(T-2)d^3}{3!} + \dots \quad (107)$$

Para d pequeños

$$(1+d)^T \approx 1 + Td \quad (108)$$

Combinando la ecuación (106) y (108) resulta en

$$W + P = V(1 + Td) = V + VTd \quad (109)$$

O también

$$P - VTd = V - W \quad (110)$$

Combinado la ecuación (105) y (110) se obtiene

$$P - VTd = v \quad (111)$$

El beneficio obtenido a través de la extracción de Q_m en un tiempo T fue descrito anteriormente como

$$P = (s - r)Q_r - cQ_c - mQ_m - fT \quad (112)$$

Combinando la ecuación (111) y (112)

$$v + VTd = (s - r)Q_r - cQ_c - mQ_m - fT \quad (113)$$

Juntando términos

$$v = (s - r)Q_r - cQ_c - mQ_m - T(f + Vd) \quad (114)$$

Ahora se trataría de programar la extracción de tal forma que la disminución del valor presente neto restante se produjera lo más rápido posible. Esto es porque los últimos beneficios son descontados más que los beneficios iniciales. Examinando la última ecuación, esto significa que v debe ser maximizado.

Al derivar v con respecto a la ley después igualando la derivada a cero, se puede resolver adecuadamente la ley de corte sujeta tanto para restricciones en mina, planta y refinería.

12.5. Determinación de las leyes de corte económicas

Determinación de las leyes de corte económicas – una operación restringe la capacidad total.

12.5.1. Ley de corte económica mina

Cálculo de la ley de corte económica asumiendo que la tasa de extracción es la restricción gobernante.

El tiempo viene dado por:

$$T_m = \frac{Q_m}{M} \quad (115)$$

Sustituyendo el tiempo en la ecuación del valor presente, se tiene que:

$$v_m = (s - r)Q_r - cQ_c - mQ_m - \frac{Q_m}{M}(f + Vd) \quad (116)$$

$$v_m = (s - r)Q_r - cQ_c - \left[m + \frac{f + Vd}{M} \right] Q_m \quad (117)$$

Al derivar con respecto a la ley g da:

$$\frac{d(v_m)}{dg} = (s - r)\frac{d(Q_r)}{dg} - c\frac{d(Q_c)}{dg} - \left[m + \frac{f + Vd}{M} \right] \frac{d(Q_m)}{dg} \quad (118)$$

Sin embargo, la cantidad Q_m no depende de la ley, por lo tanto:

$$\frac{d(Q_m)}{dg} = 0 \quad (119)$$

Entonces:

$$\frac{d(v_m)}{dg} = (s - r) \frac{d(Q_r)}{dg} - c \frac{d(Q_c)}{dg} \quad (120)$$

La relación entre las cantidades Q_r y Q_c es:

$$Q_r = Q_c \bar{g}_c y \quad (121)$$

Donde \bar{g}_c es la ley media del mineral enviado a la planta, mientras que y es la recuperación del mineral, se tiene que:

$$\frac{d(Q_r)}{dg} = \bar{g}_c y \frac{d(Q_c)}{dg} \quad (122)$$

Sustituyendo la ecuación (122) en (120)

$$\frac{d(v_m)}{dg} = (s - r) \bar{g}_c y \frac{d(Q_c)}{dg} - c \frac{d(Q_c)}{dg} \quad (123)$$

$$\frac{d(v_m)}{dg} = [(s - r) \bar{g}_c y - c] \frac{d(Q_c)}{dg} \quad (124)$$

La ley media \bar{g}_c es definida como *the mining cut-off (breakeven) grade* g_m cuando

$$\frac{d(v_m)}{dg} = 0 \quad (125)$$

Igualando a cero la ecuación (124) y resolviendo para $\bar{g}_c = g_m$ se encuentra que:

$$g_m = \frac{c}{(s - r)y} \quad (126)$$

12.5.2. Ley de corte económica planta

Cálculo de la ley de corte económica asumiendo que la tasa de procesamiento es la restricción gobernante.

Si la tasa de concentración es el factor limitante, entonces el tiempo T es controlado por el concentrador

$$T = \frac{Q_c}{C} \quad (127)$$

Donde Q_c es el número total de toneladas, las cuales son enviadas al concentrador, y C es la capacidad en *ton/year*

Sustituyendo el tiempo en la ecuación del valor presente, se tiene que:

$$v_c = (s - r)Q_r - cQ_c - mQ_m - \frac{Q_c}{C}(f + Vd) \quad (128)$$

$$v_c = (s - r)Q_r - \left[c + \frac{f + Vd}{C} \right] Q_c - mQ_m \quad (129)$$

La ley de corte solo afecta a Q_r y Q_c , ya que la cantidad extraída Q_m es fija, por consiguiente:

$$mQ_m = const \quad (130)$$

La relación entre las cantidades Q_r y Q_c es:

$$Q_r = Q_c \bar{g}_c y \quad (131)$$

Encontrando que:

$$v_c = (s - r)Q_c \bar{g}_c y - \left[c + \frac{f + Vd}{C} \right] Q_c - mQ_m \quad (132)$$

$$v_c = \left[(s - r) \bar{g}_c y - c - \frac{f + Vd}{C} \right] Q_c - mQ_m \quad (133)$$

Hacer v_c lo la más grande posible:

$$(s - r) \bar{g}_c y - c - \frac{f + Vd}{C} \quad (134)$$

Debería ser lo más grande cuando *breakeven* es cero, entonces:

$$g_c = \frac{c + \frac{f + Vd}{C}}{(s - r)y} \quad (135)$$

12.5.3. Ley de corte económica refinería

Cálculo de la ley de corte económica asumiendo que la tasa de refinación es la restricción gobernante.

Si la salida de la refinería es factor limitante entonces el tiempo T es controlado por la refinería.

$$T = \frac{Q_r}{R} \quad (136)$$

Donde Q_r es la salida de la refinería y R es capacidad por año

Sustituyendo en la ecuación (114)

$$v_r = (s - r)Q_r - cQ_c - mQ_m - \frac{Q_r}{R}(f + Vd) \quad (137)$$

$$v_r = \left[s - r - \frac{(f + Vd)}{R} \right] Q_r - cQ_c - mQ_m \quad (138)$$

La relación entre las cantidades Q_r y Q_c es:

$$Q_r = Q_c \bar{g}_r y \quad (139)$$

Queda:

$$v_r = \left[s - r - \frac{(f + Vd)}{R} \right] Q_c \bar{g}_r y - cQ_c - mQ_m \quad (140)$$

La cantidad de material extraído es fijo, entonces:

$$mQ_m = const \quad (141)$$

Maximizando la expresión se encuentra que:

$$cQ_c = \left[s - r - \frac{(f + Vd)}{R} \right] Q_c \bar{g}_r y \quad (142)$$

Resolviendo:

$$g_r = \frac{c}{\left[s - r - \frac{(f + Vd)}{R} \right] y} \quad (143)$$

12.6. Obtención de las leyes de equilibrio

Para encontrar las leyes de corte de equilibrio se hace necesario utilizar la curva tonelaje ley, la cual tiene el tonelaje en proporción.

12.6.1. Ley de corte que equilibra la mina y la planta

Para encontrar la ley de corte que equilibra la mina y la planta, en primer lugar se calcula el ratio C/M :

$$\frac{C}{M} = \frac{10.000.000}{20.000.000} = 0,5$$

En segundo lugar se calcula la tabla de ratios de Q_c/Q_m para cada ley de corte, considerando que la cantidad Q_m es siempre igual a la capacidad máxima de la mina (M), y luego se determina Q_c a partir de la ecuación (122) y finalmente se calcula el ratio Q_c/Q_m

$$Q_c = \text{fraccion ton acum} \cdot Q_m \quad (144)$$

Tabla 42: Ratios Q_c/M para determinar la ley de corte de equilibrio mina - planta.

Ley de corte %	Proporción ton. acum.	Ley media %	Q_m [t]	Q_c [t]	Q_c/Q_m
0,00	1,00	0,6659	20.000.000	20.000.000	1,00
0,15	0,86	0,7653	20.000.000	17.120.000	0,86
0,20	0,81	0,7988	20.000.000	16.200.000	0,81
0,25	0,77	0,8317	20.000.000	15.320.000	0,77
0,30	0,72	0,8649	20.000.000	14.460.000	0,72
0,35	0,68	0,8981	20.000.000	13.620.000	0,68
0,40	0,64	0,9317	20.000.000	12.800.000	0,64
0,45	0,60	0,9645	20.000.000	12.020.000	0,60
0,50	0,56	0,9976	20.000.000	11.260.000	0,56
0,55	0,53	1,0308	20.000.000	10.520.000	0,53
0,60	0,49	1,0643	20.000.000	9.800.000	0,49
0,65	0,46	1,0971	20.000.000	9.120.000	0,46
0,70	0,42	1,1300	20.000.000	8.460.000	0,42

Por último se busca el valor C/M 0,5 en la tabla, existiendo 3 posibilidades:

1. El valor C/M coincide con un valor de la columna Q_c/Q_m
2. El valor C/M se encuentra entre 2 valores de la columna Q_c/Q_m
3. El valor C/M se encuentra fuera de los límites, por ejemplo es mayor que 1 o menor que 0,42

En este caso $\frac{C}{M} = 0,5$ se encuentra entre 0,53 y 0,49. Así que al aplicar una interpolación lineal se obtiene que:

0,55	0,53
g_{mc}	0,50
0,60	0,49

$$g_{mc} = \frac{(0,6 - 0,55)(0,5 - 0,53)}{0,49 - 0,5} + 0,55 = 0,58611$$

12.6.2. Ley de corte que equilibra la mina y refinería

Para encontrar la ley de corte que equilibra la mina y la refinería, en primer lugar se calcula el ratio R/M :

$$\frac{R}{M} = \frac{90.000}{20.000.000} = 0,0045$$

En segundo lugar se calcula la tabla de ratios de Q_r/Q_m para cada ley de corte, considerando que la cantidad Q_r es siempre igual a la capacidad máxima de la refinería (R), y luego se determina Q_c al aplicar la ecuación (123), luego de esto se calcula Q_m con la ecuación (124) y finalmente se calcula el ratio Q_r/Q_m

$$Q_c = \frac{Q_r}{ley\ media \cdot recuperación} \quad (145)$$

y

$$Q_m = \frac{Q_c}{fraccion\ ton\ acum} \quad (146)$$

Tabla 43: Ratios R/Q_m para determinar la ley de corte de equilibrio refinería - mina.

Ley de corte %	Proporción ton. acum.	Ley media %	Q_r [t]	Q_c [t]	Q_m [t]	Q_r/Q_m
0,00	1,00	0,6659	90.000	15.018.059	15.018.059	0,005993
0,15	0,86	0,7653	90.000	13.067.406	15.265.661	0,005896
0,20	0,81	0,7988	90.000	12.519.030	15.455.592	0,005823
0,25	0,77	0,8317	90.000	12.022.947	15.695.754	0,005734
0,30	0,72	0,8649	90.000	11.562.635	15.992.579	0,005628
0,35	0,68	0,8981	90.000	11.134.000	16.349.487	0,005505
0,40	0,64	0,9317	90.000	10.733.483	16.771.067	0,005366
0,45	0,60	0,9645	90.000	10.367.610	17.250.599	0,005217
0,50	0,56	0,9976	90.000	10.024.215	17.805.000	0,005055
0,55	0,53	1,0308	90.000	9.700.949	18.442.869	0,004880
0,60	0,49	1,0643	90.000	9.395.703	19.174.904	0,004694
0,65	0,46	1,0971	90.000	9.115.169	19.989.406	0,004502
0,70	0,42	1,1300	90.000	8.849.558	20.920.940	0,004302

Por último se busca el valor R/M en la tabla, existiendo 3 posibilidades:

1. El valor R/M coincide con un valor de la columna Q_c/Q_m

2. El valor R/M se encuentra entre 2 valores de la columna Q_c/Q_m
3. El valor R/M se encuentra fuera de los límites, por ejemplo es mayor que 0,005993 o menor que 0,004302

En este caso $\frac{R}{M} = 0,0045$ se encuentra entre 0,004502 y 0,004302. Así que al aplicar una interpolación lineal se obtiene que:

0,65	0,004502
g_{mr}	0,0045
0,7	0,004302

$$g_{mr} = \frac{(0,7 - 0,65)(0,0045 - 0,004502)}{0,004302 - 0,004502} + 0,65 = 0,6505$$

12.6.3. Ley de corte que equilibra la planta y refinería

Para encontrar la ley de corte que equilibra la planta y la refinería, en primer lugar se calcula el ratio R/C :

$$\frac{R}{C} = \frac{90.000}{10.000.000} = 0,0090$$

En segundo lugar se calcula la tabla de ratios de Q_r/Q_c para cada ley de corte, considerando que la cantidad Q_c es siempre igual a la capacidad máxima de la planta (C), y luego se determina Q_r al aplicar la ecuación (125) y finalmente se calcula el ratio Q_r/Q_m

$$Q_r = \text{Ley media} \cdot \text{recuperación} \cdot Q_c \quad (147)$$

Tabla 44: Ratios Q_r/C para determinar la ley de corte de equilibrio planta - refinera.

Ley de corte %	Proporción ton. acum.	Ley media %	Q_c [t]	Q_r [t]	Q_r/Q_c
0,00	1,00	0,6659	10.000.000	59.928	0,005993
0,15	0,86	0,7653	10.000.000	68.874	0,006887
0,20	0,81	0,7988	10.000.000	71.891	0,007189
0,25	0,77	0,8317	10.000.000	74.857	0,007486
0,30	0,72	0,8649	10.000.000	77.837	0,007784
0,35	0,68	0,8981	10.000.000	80.833	0,008083
0,40	0,64	0,9317	10.000.000	83.850	0,008385
0,45	0,60	0,9645	10.000.000	86.809	0,008681
0,50	0,56	0,9976	10.000.000	89.783	0,008978
0,55	0,53	1,0308	10.000.000	92.774	0,009277
0,60	0,49	1,0643	10.000.000	95.788	0,009579
0,65	0,46	1,0971	10.000.000	98.737	0,009874
0,70	0,42	1,1300	10.000.000	101.700	0,01017

Por último se busca el valor R/C en la tabla, existiendo 3 posibilidades:

1. El valor R/C coincide con un valor de la columna Q_r/Q_c
2. El valor R/C se encuentra entre 2 valores de la columna Q_r/Q_c
3. El valor R/C se encuentra fuera de los límites. Por ejemplo, es mayor que 0,01017 o menor que 0,005993

En este caso $\frac{R}{C} = 0,0090$ se encuentra entre 0,008978 y 0,009277. Así que al aplicar una interpolación lineal se obtiene que:

0,50	0,008978
g_{mr}	0,0090
0,55	0,009277

$$g_{rc} = \frac{(0,55 - 0,50)(0,0090 - 0,008978)}{0,009277 - 0,008978} + 0,50 = 0,50368$$

Los cálculos consideran todos los decimales. Otro punto importante que aclarar en el caso de que el valor de C/M, R/C o R/M se encuentra fuera de los límites, el valor de g corresponde a la ley de corte

más cercana. Por ejemplo: en el caso de que R/C fuera 0,0039, el valor es menor a 0,005993. Por tanto, el valor de g más cercano es cero. En conclusión, $g_{rc} = 0$

13. Anexo B

Algoritmo de Asad (2007)

13.1. Ecuaciones básicas:

Costos totales T_{c_i} son

$$T_{c_i} = m_i Q_m + c_i Q_c + r_i Q_r + f_i T \quad (148)$$

El ingreso R_i es

$$R_i = s_i Q_r \quad (149)$$

El beneficio P viene dado por:

$$P_i = R_i - T_i = s_i Q_r - (m_i Q_m + c_i Q_c + r_i Q_r + f_i T) \quad (150)$$

Combinado términos:

$$P_i = (s_i - r_i) Q_r - c_i Q_c - m_i Q_m - f_i T \quad (151)$$

Esta es la expresión básica para el beneficio

.....

Optimización del valor presente neto (VAN)

El valor presente de todos los beneficios restantes es V el cual está compuesto de 2 partes. La primera, PV_p , es del beneficio P realizado al tiempo T al extraer la cantidad Q_m . El segundo, PV_w , es obtenido de los beneficios realizado al extraer el material restante después del tiempo T . Los beneficios son indicados como P_1 en el tiempo T_1 , P_2 en el tiempo T_2 , etc. El valor de todos estos beneficios restantes después del $t = T$ son expresados al tiempo T como W .

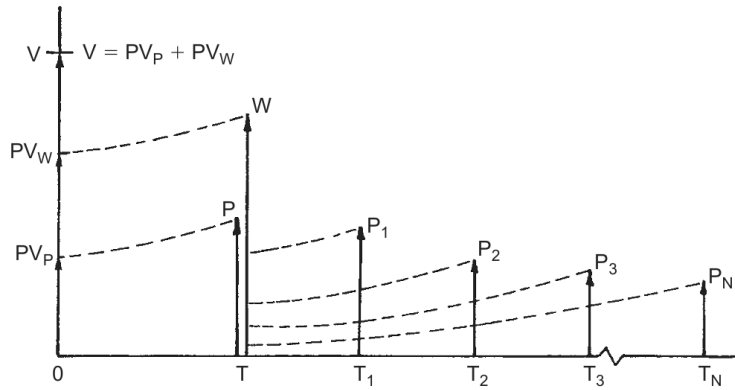


Figura 39: Diagrama de la representación del cálculo del VAN

Los valores W y P son descontados o llevados al tiempo $t = 0$ y vienen dado por la siguiente expresión:

$$PV_w(t = 0) = \frac{W}{(1 + d)^T} \quad (152)$$

$$PV_p(t = 0) = \frac{P_i}{(1 + d)^T} \quad (153)$$

Donde d es la tasa de descuento.

El valor presente al tiempo $t = 0$ es por tanto.

$$V = \frac{W}{(1 + d)^T} + \frac{P_i}{(1 + d)^T} \quad (154)$$

El valor presente al tiempo $t = T$ de las reservas restante es W , la diferencia v entre el valor presente de las reservas restantes al tiempo $t = 0$ y $t = T$ es

$$v = V - W \quad (155)$$

La ecuación (154) puede ser reescrita como:

$$W + P_i = V(1 + d)^T \quad (156)$$

Aplicando una expansión binomial del termino $(1 + d)^T$ se encuentra

$$(1 + d)^T = 1 + Td + T \frac{(T - 1)d^2}{2!} + \frac{T(T - 1)(T - 2)d^3}{3!} + \dots \quad (157)$$

Para d pequeños

$$(1 + d)^T \approx 1 + Td \quad (158)$$

Combinando la última ecuación (156) y (158) resulta en

$$W + P_i = V(1 + Td) = V + VTd \quad (159)$$

O también:

$$P_i - VTd = V - W \quad (160)$$

Combinado la ecuación (155) y (160) se obtiene:

$$P_i - VTd = v \quad (161)$$

El beneficio obtenido a través de la extracción de Q_m en un tiempo T fue descrito anteriormente como:

$$P_i = (s_i - r_i)Q_r - c_iQ_c - m_iQ_m - f_iT \quad (162)$$

Combinando las (161) y (162):

$$v + VTd = (s_i - r_i)Q_r - c_iQ_c - m_iQ_m - f_iT \quad (163)$$

Juntando términos:

$$v = (s_i - r_i)Q_r - c_iQ_c - m_iQ_m - T(f_i + Vd) \quad (164)$$

Ahora se trataría de programar la extracción de tal forma que la disminución del valor presente neto restante se produjera lo más rápido posible. Esto es porque los últimos beneficios son descontados más que los beneficios iniciales. Examinando la última ecuación, esto significa que v debe ser maximizado.

Al derivar v con respecto a la ley después igualando la derivada a cero, se puede resolver adecuadamente la ley de corte sujeta tanto para restricciones en mina, planta y refinería.

13.2. Determinación de las leyes de corte económicas

13.2.1. Ley de corte económica mina

El tiempo viene dado por:

$$T_m = \frac{Q_m}{M} \quad (165)$$

Sustituyendo el tiempo en la ecuación del valor presente, se tiene que:

$$v_m = (s_i - r_i)Q_r - c_iQ_c - m_iQ_m - \frac{Q_m}{M}(f_i + Vd) \quad (166)$$

$$v_m = (s_i - r_i)Q_r - c_iQ_c - \left[m_i + \frac{f_i + Vd}{M} \right] Q_m \quad (167)$$

Al derivar con respecto a la ley g da:

$$\frac{d(v_m)}{dg} = (s_i - r_i) \frac{d(Q_r)}{dg} - c_i \frac{d(Q_c)}{dg} - \left[m_i + \frac{f_i + Vd}{M} \right] \frac{d(Q_m)}{dg} \quad (168)$$

Sin embargo la cantidad Q_m no depende de la ley, por lo tanto:

$$\frac{d(Q_m)}{dg} = 0 \quad (169)$$

Entonces:

$$\frac{d(v_m)}{dg} = (s_i - r_i) \frac{d(Q_r)}{dg} - c_i \frac{d(Q_c)}{dg} \quad (170)$$

La relación entre las cantidades Q_r y Q_c es:

$$Q_r = Q_c \bar{g}_c y \quad (171)$$

Donde \bar{g}_c es la ley media del mineral enviado a la planta, mientras que y es la recuperación del mineral, se tiene que:

$$\frac{d(Q_r)}{dg} = \bar{g}_c y \frac{d(Q_c)}{dg} \quad (172)$$

Sustituyendo la ecuación (172) en (170)

$$\frac{d(v_m)}{dg} = (s_i - r_i) \bar{g}_c y \frac{d(Q_c)}{dg} - c_i \frac{d(Q_c)}{dg} \quad (173)$$

$$\frac{d(v_m)}{dg} = [(s_i - r_i) \bar{g}_c y - c_i] \frac{d(Q_c)}{dg} \quad (174)$$

La ley media \bar{g}_c es definida como *the mining cutoff (breakeven) grade* g_m cuando

$$\frac{d(v_m)}{dg} = 0 \quad (175)$$

Igualando a cero la ecuación (174) y resolviendo para $\bar{g}_c = g_m$ se encuentra que:

$$g_m = \frac{c_i}{(s_i - r_i)y} \quad (176)$$

13.2.2. Ley de corte económica planta

Si la tasa de concentración es el factor limitante, entonces el tiempo T es controlado por el concentrador

$$T = \frac{Q_c}{C} \quad (177)$$

Donde Q_c es el número total de toneladas, las cuales son enviadas al concentrador, y C es la capacidad en *ton/year*

Sustituyendo el tiempo en la ecuación del valor presente, se tiene que:

$$v_c = (s_i - r_i)Q_r - c_i Q_c - m_i Q_m - \frac{Q_c}{C} (f_i + Vd) \quad (178)$$

$$v_c = (s_i - r_i)Q_r - \left[c_i + \frac{f_i + Vd}{C} \right] Q_c - m_i Q_m \quad (179)$$

La ley de corte solo afecta a Q_r y Q_c , ya que la cantidad extraída Q_m es fija, por consiguiente:

$$m_i Q_m = const \quad (180)$$

La relación entre las cantidades Q_r y Q_c es:

$$Q_r = Q_c \bar{g}_c y \quad (181)$$

Encontrando que:

$$v_c = (s_i - r_i)Q_c \bar{g}_c y - \left[c_i + \frac{f_i + Vd}{C} \right] Q_c - m_i Q_m \quad (182)$$

$$v_c = \left[(s_i - r_i) \bar{g}_c y - c_i - \frac{f_i + Vd}{C} \right] Q_c - m_i Q_m \quad (183)$$

Hacer v_c lo la más grande posible:

$$(s_i - r_i) \bar{g}_c y - c_i - \frac{f_i + Vd}{C} \quad (184)$$

Debería ser lo más grande cuando breakeven es cero, entonces:

$$g_c = \frac{c_i + \frac{f_i + Vd}{C}}{(s_i - r_i)y} \quad (185)$$

13.2.3. Ley de corte económica refinería

Si la salida de la refinería es factor limitante entonces el tiempo T es controlado por la refinería.

$$T = \frac{Q_r}{R} \quad (186)$$

Donde Q_r es la salida de la refinería y R es capacidad por año

Sustituyendo en la ecuación de v :

$$v_r = (s_i - r_i)Q_r - c_i Q_c - m_i Q_m - \frac{Q_r}{R} (f_i + Vd) \quad (187)$$

$$v_r = \left[s_i - r_i - \frac{(f_i + Vd)}{R} \right] Q_r - c_i Q_c - m_i Q_m \quad (188)$$

La relación entre las cantidades Q_r y Q_c es:

$$Q_r = Q_c \bar{g}_r y \quad (189)$$

Queda:

$$v_r = \left[s_i - r_i - \frac{(f_i + Vd)}{R} \right] Q_c \bar{g}_r y - c_i Q_c - m_i Q_m \quad (190)$$

La cantidad de material extraído es fijo, entonces:

$$m_i Q_m = const \quad (191)$$

Maximizando la expresión se encuentra que:

$$c_i Q_c = \left[s_i - r_i - \frac{(f_i + Vd)}{R} \right] Q_c \bar{g}_r y \quad (192)$$

Resolviendo:

$$g_r = \frac{c_i}{\left[s_i - r_i - \frac{(f_i + Vd)}{R} \right] y} \quad (193)$$

14.Anexo C

Caso de estudio 1

Validación mediante comparación con los resultados Asad & Topal 2011

14.1. Validación – resultados Asad y Topal (2011)

14.1.1. Resultados algoritmo de Lane (1964)

Tabla 45: Plan de producción óptimo de la operación sin considerar el acopio ni los factores de escala (Asad & Topal, 2011).

Year	Pushback	Cut-off Grade (%)	Average Grade (%)	Qm (tons)	Qc (tons)	Qr (tons)	Profit (\$ million)
1	1	0,5	1	17.850.000	10.000.000	90.000	130,65
2	1	0,5	1	17.850.000	10.000.000	90.000	130,65
3	1	0,5	1	17.850.000	10.000.000	90.000	130,65
4	1	0,5	1	17.850.000	10.000.000	90.000	130,65
5	1	0,5	1	17.850.000	10.000.000	90.000	130,65
6	1	0,5	1	10.760.000	6.030.000	54.280	78,8
6	2	0,53	0,95	7.940.000	3.970.000	34.060	47,64
7	2	0,53	0,95	20.000.000	10.000.000	85.820	120,04
8	2	0,53	0,95	20.000.000	10.000.000	85.820	120,04
9	2	0,53	0,95	20.000.000	10.000.000	85.820	120,04
10	2	0,53	0,95	20.000.000	10.000.000	85.820	120,04
11	2	0,49	0,93	12.060.000	6.380.000	53.350	74,52
11	3	0,47	0,85	7.240.000	3.620.000	27.550	36,42
12	3	0,45	0,83	19.190.000	10.000.000	74.690	98,63
13	3	0,41	0,8	17.920.000	10.000.000	72.270	95,12
14	3	0,36	0,77	16.690.000	10.000.000	69.690	91,25
15	3	0,31	0,74	15.510.000	10.000.000	66.900	86,92
16	3	0,26	0,71	14.340.000	10.000.000	63.820	81,98
17	3	0,21	0,67	9.110.000	6.880.000	41.660	52,7
NPV = \$735.77 million				300.010.000	166.880.000	1.351.550	1.877

14.1.2. Resultados algoritmo Asad (2007)

Tabla 46: Plan de producción óptimo de la operación considerando los factores de escala pero sin el acopio (Asad & Topal, 2011).

Year	Pushback	Cut-off Grade (%)	Average Grade (%)	Qm (tons)	Qc (tons)	Qr (tons)	Profit (\$ million)
1	1	0,5	1	17.850.000	10.000.000	90.000	130,65
2	1	0,5	1	17.850.000	10.000.000	90.000	130,46
3	1	0,5	1	17.850.000	10.000.000	90.000	130,32
4	1	0,5	1	17.850.000	10.000.000	90.000	130,14
5	1	0,5	1	17.850.000	10.000.000	90.000	129,93
6	1	0,5	1	10.760.000	6.030.000	54.280	78,21
6	2	0,53	0,95	7.940.000	3.970.000	34.060	46,97
7	2	0,53	0,95	20.000.000	10.000.000	85.820	117,93
8	2	0,53	0,95	20.000.000	10.000.000	85.820	117,47
9	2	0,53	0,95	20.000.000	10.000.000	85.820	116,97
10	2	0,53	0,95	20.000.000	10.000.000	85.820	116,43
11	2	0,49	0,92	12.060.000	6.390.000	53.390	71,89
11	3	0,47	0,85	7.220.000	3.610.000	27.490	34,26
12	3	0,45	0,83	19.380.000	10.000.000	75.030	92,6
13	3	0,42	0,81	18.310.000	10.000.000	73.040	88,98
14	3	0,38	0,79	17.290.000	10.000.000	70.970	85,07
15	3	0,35	0,76	16.300.000	10.000.000	68.800	80,84
16	3	0,31	0,74	15.340.000	10.000.000	66.480	76,18
17	3	0,27	0,71	6.150.000	4.280.000	27.350	30,37
NPV = \$723.35 Million				300.000.000	164.280.000	1.344.170	1.806

14.1.3. Resultados algoritmo de Asad y Topal (2011)

Tabla 47: Plan de producción óptimo de la operación considerando el acopio y factores de escala (Asad & Topal, 2011).

Year	Pushback	Available material (tons)		γ (%)	Available material (tons) @ γ			Material handled (tons)				Cash Flow (\$)	NPV (\$) @ 15%
		Pushback	Pit		Ore	Waste/stockpile	γ ^{-} (%)	Qm	Qs	Qc	Qr		
1	1	100.000.000	300.000.000	0,5	56.031.133	43.968.867	0,99996	17.847.221	3.363.999	10.000.000	89.996	130.653.218	730.419.555
2	1	82.152.779	282.152.779	0,5	46.031.133	36.121.646	0,99996	17.847.221	3.363.999	10.000.000	89.996	130.462.455	709.329.270
3	1	64.305.559	264.305.559	0,5	36.031.133	28.274.425	0,99996	17.847.221	3.363.999	10.000.000	89.996	130.318.433	685.266.205
4	1	46.458.338	246.458.338	0,5	26.031.133	20.427.205	0,99996	17.847.221	3.363.999	10.000.000	89.996	130.140.463	657.737.703
5	1	28.611.117	228.611.117	0,5	16.031.133	12.579.984	0,99996	17.847.221	3.363.999	10.000.000	89.996	129.927.358	626.257.896
6	1	10.763.897	210.763.897	0,5	6.031.133	4.732.763	0,99996	10.763.897	2.028.873	6.031.133	54.278	78.224.913	590.269.222
6	2	100.000.000	200.000.000	0,53	50.000.000	50.000.000	0,95355	7.937.733	3.792.637	3.968.867	34.061	46.953.073	590.269.222
7	2	92.062.267	192.062.267	0,53	46.031.133	46.031.133	0,95355	20.000.000	6.207.764	10.000.000	85.820	117.925.765	553.631.620
8	2	72.062.267	172.062.267	0,53	36.031.133	36.031.133	0,95355	20.000.000	8.888.000	10.000.000	85.820	117.470.837	518.750.598
9	2	52.062.267	152.062.267	0,53	26.031.133	26.031.133	0,95355	20.000.000	8.888.000	10.000.000	85.820	116.973.712	479.092.351
10	2	32.062.267	132.062.267	0,53	16.031.133	16.031.133	0,95355	20.000.000	8.888.000	10.000.000	85.820	116.432.981	433.982.492
11	2	12.062.267	112.062.267	0,53	6.218.075	5.844.192	0,94043	12.062.267	6.937.294	6.218.075	52.629	70.972.442	382.646.884
11	3	100.000.000	100.000.000	0,47	50.000.000	50.000.000	0,84553	7.563.850	3.936.477	3.781.925	28.780	35.857.079	382.646.884
12	3	92.436.150	92.436.150	0,47	46.218.075	46.218.075	0,84553	20.000.000	5.259.183	10.000.000	76.098	94.058.057	333.214.397
13	3	72.436.150	72.436.150	0,44	38.036.117	34.400.032	0,82686	19.044.044	6.971.626	10.000.000	74.417	90.932.173	289.138.499
14	3	53.392.106	53.392.106	0,41	29.589.377	23.802.728	0,80579	18.044.349	5.620.662	10.000.000	72.521	87.362.426	241.577.101
15	3	35.347.756	35.347.756	0,38	20.689.726	14.658.030	0,78382	17.084.690	4.267.141	10.000.000	70.544	83.517.002	190.451.240
16	3	18.263.066	18.263.066	0,34	11.298.163	6.964.903	0,76092	16.164.633	2.968.633	10.000.000	68.483	79.383.037	135.501.924
17	3	2.098.433	2.098.433	0,3	1.373.839	724.594	0,73679	2.098.433	1.242.287	1.373.839	9.110	10.275.206	76.444.176
17	Stockpile	54.806.161	54.806.161	0,3	47.296.823	7.509.339	0,39422	8.626.161		8.626.161	30.606	19.576.283	76.444.176
18	Stockpile	46.180.000	46.180.000	0,29	41.071.325	5.108.675	0,39137	10.000.000		10.000.000	35.223	20.990.103	58.059.313
19	Stockpile	36.180.000	36.180.000	0,29	32.946.890	3.233.110	0,38919	10.000.000		10.000.000	35.027	19.390.025	45.778.108
20	Stockpile	26.180.000	26.180.000	0,28	24.339.885	1.840.115	0,38734	10.000.000		10.000.000	34.861	17.803.735	33.254.798
21	Stockpile	16.180.000	16.180.000	0,28	15.293.718	886.282	0,38592	10.000.000		10.000.000	34.733	16.253.390	20.439.284
22	Stockpile	6.180.000	6.180.000	0,27	6.180.000		0,379	6.180.000		6.180.000	21.080	8.339.554	7.251.786

14.2. Implementaciones en Python

14.2.1. Algoritmo de Lane (1964)

Periodos de transición del plan de producción:

Tabla 48: Periodos de transición en el plan de producción generado por el algoritmo de Lane (1964) - caso estudio 1.

Año	Fase	Ley de Corte %	Ley Media %	Material [t]	Mineral [t]
6	1	0,50	1,00	10.763.897	6.031.133
6	2	0,53	0,95	7.937.733	3.968.867
11	2	0,49	0,93	12.062.267	6.379.681
11	3	0,47	0,85	7.240.639	3.620.319

Formula cálculo Ley de corte ponderada:

$$\text{ley de corte ponderada} = \frac{(\text{ley de corte}_i \cdot \text{material}_i) \cdot (\text{ley corte}_j \cdot \text{material}_j)}{(\text{material}_i + \text{material}_j)} \quad (194)$$

Ejemplo:

$$\text{ley de corte ponderada} = \frac{(0,50 \cdot 10.763.897) \cdot (0,53 \cdot 7.937.733)}{(10.763.897 + 7.937.733)} \quad (195)$$

Y para la Ley media ponderada:

$$\text{ley de corte ponderada} = \frac{(\text{ley de corte}_i \cdot \text{mineral}_i) \cdot (\text{ley corte}_j \cdot \text{mineral}_j)}{(\text{mineral}_i + \text{mineral}_j)} \quad (196)$$

Ejemplo:

$$\text{ley de corte ponderada} = \frac{(0,50 \cdot 6.031.133) \cdot (0,53 \cdot 3.968.867)}{(6.031.133 + 3.968.867)} \quad (197)$$

A continuación se presenta los resultados:

Resultados del plan de producción con las leyes ponderadas:

Tabla 49: Plan de producción con las leyes ponderadas - algoritmo de Lane (1964), caso estudio 1

año	Ley de Corte %	Ley Media %	Mineral [t]	Estéril [t]
1	0,503633	1	10,00	7,85
2	0,503633	1	10,00	7,85
3	0,503633	1	10,00	7,85
4	0,503633	1	10,00	7,85
5	0,503633	1	10,00	7,85
6	0,513518	0,98162984	10,00	8,70
7	0,526923	0,95371435	10,00	10,00
8	0,526923	0,95371435	10,00	10,00
9	0,526923	0,95371435	10,00	10,00
10	0,526923	0,95371435	10,00	10,00
11	0,482313	0,89906856	10,00	9,30
12	0,446524	0,83051685	10,00	9,22
13	0,406193	0,803639	10,00	7,94
14	0,362554	0,7750154	10,00	6,72
15	0,315464	0,74411266	10,00	5,53
16	0,264803	0,70990411	10,00	4,36
17	0,210586	0,67340483	6,78	2,20

14.2.1. Implementación algoritmo de Asad (1997)

Tabla distribución tonelaje ley acopio algoritmo con acopio:

Tabla 50: Distribución tonelaje ley del acopio - algoritmo de Asad (1997) implementado para el caso de estudio 1.

Intervalo	Ley de cu %		Tonelaje [t]
	Ley inf.	Ley sup.	
1	0,21	0,25	11.760.000
2	0,25	0,2793228	8.386.325
3	0,279323	0,3	5.906.431
4	0,3	0,3309444	8.406.856
5	0,330944	0,35	4.879.904
6	0,35	0,3828719	8.176.462
7	0,382872	0,4	3.982.375
8	0,4	0,4280262	6.310.810
9	0,428026	0,45	4.571.645
10	0,45	0,4672908	3.477.056
11	0,467291	0,4688889	292.672
12	0,468889	0,5	4.915.556
13	0,5	0,5036333	552.267
14	0,503633	0,5269231	1.816.600

Tabla 51: Curva tonelaje Ley del acopio - algoritmo de Asad (1997) implementado para el caso de estudio 1.

Ley de corte %	Tonelaje [t]	Proporción tonelaje	Ley media %
0,2100	73.434.960	1,0000	0,3466
0,2500	61.674.960	0,8399	0,3688
0,2793	53.288.635	0,7257	0,3852
0,3000	47.382.203	0,6452	0,3971
0,3309	38.975.347	0,5307	0,4147
0,3500	34.095.443	0,4643	0,4253
0,3829	25.918.981	0,3530	0,4439
0,4000	21.936.606	0,2987	0,4534
0,4280	15.625.796	0,2128	0,4693
0,4500	11.054.151	0,1505	0,4818
0,4673	7.577.094	0,1032	0,4925
0,4689	7.284.422	0,0992	0,4935
0,5000	2.368.867	0,0323	0,5121
0,5036	1.816.600	0,0247	0,5153

14.2.2. Implementación Algoritmo de Asad (2007)

Tabla de costos y precio ajustados por año:

Tabla 52: Precios y costo por año – algoritmo de Asad (2007).

año	Precio Cobre [USD]	Costo Mina [USD]	Costo Planta [USD]	Costo refinería [USD]	Costo Fijo [MUSD]
1	2.100,0	1,05	2,66	100,00	4.000.000,0
2	2.133,7	1,10	2,82	105,06	4.202.500,0
3	2.150,8	1,13	2,91	107,69	4.307.562,5
4	2.168,0	1,16	2,99	110,38	4.415.251,6
5	2.185,4	1,19	3,08	113,14	4.525.632,9
6	2.202,8	1,22	3,18	115,97	4.638.773,7
7	2.220,5	1,25	3,27	118,87	4.754.743,0
8	2.238,2	1,28	3,37	121,84	4.873.611,6
9	2.256,1	1,31	3,47	124,89	4.995.451,9
10	2.274,2	1,34	3,57	128,01	5.120.338,2
11	2.292,4	1,38	3,68	131,21	5.248.346,6
12	2.310,7	1,41	3,79	134,49	5.379.555,3
13	2.329,2	1,45	3,91	137,85	5.514.044,2
14	2.347,8	1,48	4,02	141,30	5.651.895,3
15	2.366,6	1,52	4,14	144,83	5.793.192,7
16	2.385,5	1,56	4,27	148,45	5.938.022,5
17	2.404,6	1,60	4,40	152,16	6.086.473,0

14.2.3. Implementación Algoritmo de Asad y Topal (2011)

Tabla distribución tonelaje-ley acopio algoritmo con acopio y factores:

Tabla 53: Distribución tonelaje ley del acopio - algoritmo de Asad y Topal (2011) implementado para el caso de estudio 1.

Intervalo	Ley de cu %		Tonelaje [t]
	Ley inf.	Ley sup.	
1	0,2700	0,3000	8.580.000,00
2	0,3000	0,3002	45.264,79
3	0,3002	0,3436	11.789.004,65
4	0,3436	0,3500	1.630.059,45
5	0,3500	0,3853	8.755.872,73
6	0,3853	0,4000	3.408.899,19
7	0,4000	0,4223	4.999.465,10
8	0,4223	0,4500	5.754.200,69
9	0,4500	0,4551	1.028.669,16
10	0,4551	0,4689	2.518.243,98
11	0,4689	0,5000	4.915.555,56
12	0,5000	0,5036	552.266,59
13	0,5036	0,5189	1.193.115,09
14	0,5189	0,5269	548.278,53

Tabla 54: Curva tonelaje Ley del acopio - algoritmo de Asad y Topal (2011) implementado para el caso de estudio 1.

Ley de corte %	Tonelaje [t]	Proporción tonelaje	Ley media %
0,2700	55.718.895	1,0000	0,3791
0,3000	47.138.895	0,8460	0,3963
0,3002	47.093.631	0,8452	0,3964
0,3436	35.304.626	0,6336	0,4213
0,3500	33.674.567	0,6044	0,4249
0,3853	24.918.694	0,4472	0,4450
0,4000	21.509.795	0,3860	0,4532
0,4223	16.510.330	0,2963	0,4660
0,4500	10.756.129	0,1930	0,4820
0,4551	9.727.460	0,1746	0,4851
0,4689	7.209.216	0,1294	0,4931
0,5000	2.293.660	0,0412	0,5118
0,5036	1.741.394	0,0313	0,5149
0,5189	548.279	0,0098	0,5229

Tabla de costos ajustados por año algoritmo con acopio y factores:

Tabla 55: Precios y costo por año – algoritmo de Asad y Topal (2011).

año	Precio Cobre [USD]	Costo Mina [USD]	Costo Planta [USD]	Costo refinería [USD]	Costo Fijo [MUSD]
1	2100,00	1,05	2,66	100,00	4.000.000,0
2	2133,73	1,10	2,82	105,06	4.202.500,0
3	2150,80	1,13	2,91	107,69	4.307.562,5
4	2168,01	1,16	2,99	110,38	4.415.251,6
5	2185,35	1,19	3,08	113,14	4.525.632,9
6	2202,84	1,22	3,18	115,97	4.638.773,7
7	2220,46	1,25	3,27	118,87	4.754.743,0
8	2238,22	1,28	3,37	121,84	4.873.611,6
9	2256,13	1,31	3,47	124,89	4.995.451,9
10	2274,18	1,34	3,57	128,01	5.120.338,2
11	2292,37	1,38	3,68	131,21	5.248.346,6
12	2310,71	1,41	3,79	134,49	5.379.555,3
13	2329,20	1,45	3,91	137,85	5.514.044,2
14	2347,83	1,48	4,02	141,30	5.651.895,3
15	2366,61	1,52	4,14	144,83	5.793.192,7
16	2385,55	1,56	4,27	148,45	5.938.022,5
17	2404,63	1,60	4,40	152,16	6.086.473,0

15.Anexo D

Caso de estudio 2

15.1. Validación – resultados Asad et al. 2016

15.1.1. Resultados algoritmo de Lane (1964)

Tabla 56: Resultados del algoritmo de Lane (1964) publicados por Asad et al. 2016

Year	Cut-off Grade, γ (%)	Average Grade, \bar{g} (%)	Qm (tonnes)	Qc (tonnes)	Qr (tonnes)	CF (\$)	NPV (\$)
1	0,5036	0,9999	17.847.221	10.000.000	89.997	26.074.739	95.765.702
2	0,5034	0,9998	17.847.221	10.000.000	89.985	26.071.221	84.055.818
3	0,459	0,9705	16.831.262	10.000.000	87.339	25.254.067	70.592.970
4	0,4106	0,9389	15.829.898	10.000.000	84.471	24.320.538	55.927.848
5	0,3581	0,9035	14.828.295	10.000.000	81.314	23.242.717	39.996.487
6	0,3011	0,8655	13.848.932	10.000.000	77.902	22.026.447	22.753.244
7	0,2396	0,8248	2.971.851	2.303.661	17.101	4.760.751	4.139.784

15.1.2. Resultados algoritmo de Asad (1997)

Tabla 57: Resultados del algoritmo de Asad (1997) publicados por Asad et al. 2016

Year	Material Source	Cut-off Grade, γ (%)	Average Grade, \bar{g} (%)	Qm (tonnes)	Qc (tonnes)	Qr (tonnes)	CF (\$)	NPV (\$)
1	Mine	0,5036	0,8100	17.847.221	10.000.000	89.997	26.074.739	97.399.414
2	Mine	0,5036	0,8100	17.847.221	10.000.000	89.997	26.074.739	85.934.586
3	Mine	0,4670	0,7903	17.004.459	10.000.000	87.809	25.402.434	72.750.035
4	Mine	0,4198	0,7651	16.010.921	10.000.000	85.010	24.499.351	58.260.107
5	Mine	0,3686	0,7375	15.020.620	10.000.000	81.944	23.461.819	42.499.772
6	Mine	0,3132	0,7076	14.046.817	10.000.000	78.620	22.286.569	25.412.919
7	Mine	0,2535	0,6756	2.222.742	1.695.897	12.730	3.557.755	6.938.289
8	Stockpile	0,2396	0,2813	10.000.000	10.000.000	31.252	3.375.911	4.421.277
9	Stockpile	0,2396	0,2813	5.820.183	5.820.183	18.189	1.964.842	1.708.558

15.2. Implementación Python

15.2.1. Implementación Algoritmo de Asad (1997)

Tabla distribución tonelaje ley acopio algoritmo con acopio:

Tabla 58: Distribución tonelaje ley del acopio, algoritmo de Asad (1997) - caso de estudio 2.

Intervalo	Ley de cu %		Tonelaje [t]
	Ley inf.	Ley sup.	
1	0,2376	0,2500	1.069.823
2	0,2500	0,3000	4.215.762
3	0,3000	0,3101	830.904
4	0,3101	0,3500	2.817.625
5	0,3500	0,3707	1.425.056
6	0,3707	0,4000	1.658.728
7	0,4000	0,4253	1.363.131
8	0,4253	0,4500	1.017.128
9	0,4500	0,4744	981.254
10	0,4744	0,5000	693.829
11	0,5000	0,5036	95.970
	total		16.169.210

Tabla 59: Curva tonelaje ley del acopio, algoritmo de Asad (1997) - caso de estudio 2.

Ley de corte %	Tonelaje [t]	Proporción tonelaje	Ley media %
0,2376	16.169.210	1,000	0,34656
0,2500	15.099.387	0,934	0,35385
0,3000	10.883.625	0,673	0,38439
0,3101	10.052.722	0,622	0,39094
0,3500	7.235.096	0,447	0,41466
0,3707	5.810.040	0,359	0,42798
0,4000	4.151.312	0,257	0,44502
0,4253	2.788.182	0,172	0,46084
0,4500	1.771.054	0,110	0,47415
0,4744	789.800	0,049	0,48899
0,5000	95.970	0,006	0,50182

15.2.2. Implementación Algoritmo de Asad (2007)

Tabla de costos y precio ajustados por año:

Tabla 60: Precios y costos por año, algoritmo de Asad (2007) caso de estudio 2

año	Precio Cobre [USD]	Costo Mina [USD]	Costo Planta [USD]	Costo refinería [USD]	Costo Fijo [MUSD]
1	550,0	0,50	0,60	50,00	4.000.000
2	558,8	0,53	0,64	52,53	4.202.500
3	563,3	0,54	0,66	53,84	4.307.562
4	567,8	0,55	0,68	55,19	4.415.252
5	572,4	0,57	0,70	56,57	4.525.633
6	576,9	0,58	0,72	57,98	4.638.774
7	581,5	0,59	0,74	59,43	4.754.743

15.2.3. Implementación Algoritmo de Asad y Topal (2011)

Tabla de costos y precio ajustados por año:

Tabla 61: Precios y costos por año, algoritmo de Asad y Topal (2011) caso de estudio 2

año	Precio Cobre [USD]	Costo Mina [USD]	Costo Planta [USD]	Costo refinería [USD]	Costo Fijo [MUSD]
1	550,00	0,50	0,60	50,00	4.000.000,0
2	558,84	0,53	0,64	52,53	4.202.500,0
3	563,31	0,54	0,66	53,84	4.307.562,5
4	567,81	0,55	0,68	55,19	4.415.251,6
5	572,35	0,57	0,70	56,57	4.525.632,9
6	576,93	0,58	0,72	57,98	4.638.773,7
7	581,55	0,59	0,74	59,43	4.754.743,0
8	586,20	0,61	0,76	60,92	4.873.611,6

Tabla distribución tonelaje ley acopio algoritmo con acopio:

Tabla 62: Distribución tonelaje ley del acopio, algoritmo de Asad y Topal (2011) - caso de estudio 2.

Intervalo	Ley de cu %		Tonelaje [t]
	Ley inf.	Ley sup.	
1	0,268	0,300	2.692.214
2	0,300	0,328	2.288.044
3	0,328	0,350	1.578.495
4	0,350	0,379	2.020.720
5	0,379	0,400	1.170.954
6	0,400	0,427	1.444.160
7	0,427	0,450	952.591
8	0,450	0,471	824.371
9	0,471	0,500	798.849
10	0,500	0,504	95.970

Tabla 63: Curva tonelaje ley del acopio, algoritmo de Asad y Topal (2011) - caso de estudio 2.

Ley de corte %	Tonelaje [t]	Proporción tonelaje	Ley media %
0,268	13.866.370	1,000	0,364
0,300	11.174.156	0,806	0,383
0,328	8.886.112	0,641	0,400
0,350	7.307.617	0,527	0,414
0,379	5.286.896	0,381	0,432
0,400	4.115.942	0,297	0,445
0,427	2.671.782	0,193	0,461
0,450	1.719.191	0,124	0,474
0,471	894.820	0,065	0,487
0,500	95.970	0,007	0,502