

# Análisis de soluciones exactas en relatividad general

Universidad técnica Federico Santa María



**Autor:**

Enzo Vallejos Tamborino

**Profesor guía:**

Oscar Castillo-Felisola

15 de abril de 2025

# Índice general

|                                                                      |           |
|----------------------------------------------------------------------|-----------|
| <b>Introducción</b>                                                  | <b>2</b>  |
| <b>1. Gravedad Newtoniana y relatividad</b>                          | <b>3</b>  |
| 1.1. Adaptación de la gravedad Newtoniana a la relatividad . . . . . | 3         |
| 1.2. Teoría de campo escalar de la gravedad . . . . .                | 5         |
| <b>2. Relatividad general</b>                                        | <b>7</b>  |
| 2.1. Nociones preliminares . . . . .                                 | 7         |
| 2.2. Ecuación de campo de Einstein . . . . .                         | 18        |
| 2.3. Teoría linealizada de la gravedad . . . . .                     | 21        |
| <b>3. Soluciones esféricas de las ecuaciones de Einstein</b>         | <b>27</b> |
| 3.1. La métrica de Schwarzschild . . . . .                           | 27        |
| 3.2. Interior estelar . . . . .                                      | 34        |
| 3.3. Colapso estelar . . . . .                                       | 45        |
| <b>4. Conclusiones</b>                                               | <b>55</b> |

# Introducción

La teoría de relatividad general de Einstein es un modelo exitoso para unificar la relatividad especial con la gravedad. Esta sirve para explicar observaciones realizadas, como la precesión de Mercurio o la dependencia temporal de la gravedad, que la mecánica Newtoniana no lograba explicar.

Esta teoría presenta distintas formas de conceptualizarse y cada una de ellas de forma distinta. Un planteamiento usual es realizado a través del símil entre el electromagnetismo y una teoría de campo para la gravedad, relacionando la primera para postular a la otra. A pesar de esto, éste enfoque deja varias expresiones matemáticas incompletas o sin justificar, como la deducción completa de la expresión del tensor de Einstein o la relación entre curvatura y gravedad y como es que esta asociación aparece indirectamente desde la teoría Newtoniana. Adicionalmente, el alcance de este planteamiento es generalmente limitado a las soluciones de vacío y específicamente a la solución de Schwarzschild.

Es por ello que en este trabajo se busca explorar la relatividad general postulada desde otro enfoque relacionado con la teoría Newtoniana y como desde esta surgen las relaciones que fundarán la base de la teoría relativista y la conexión entre curvatura y gravedad. Además, son revisadas ciertas soluciones no abarcadas en otros planteamientos y es utilizado el conocimiento desarrollado desde este enfoque para explorar soluciones en presencia de materia como el interior estelar.

Varios de estos desarrollos han sido resoluciones y derivaciones propuestas por K. Thorne y R. Blandford en su libro "Modern and Classical Physics: optics, fluids, plasmas, elasticity, relativity and statistical physics" [1] a partir de los cuales se ha desarrollado este documento utilizando complementos de otros documentos para su resolución.

# Capítulo 1

## Gravedad Newtoniana y relatividad

### 1.1. Adaptación de la gravedad Newtoniana a la relatividad

El desarrollo de la relatividad general se sienta sobre la teoría Newtoniana de la gravedad. La relatividad especial es incompatible con la gravitación Newtoniana, dado que esta asume la existencia de un potencial universal, independiente del sistema de referencia y del tiempo [1].

La ecuación que describe la relación entre distribución de materia y el campo gravitacional que ésta produce es:

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = 4\pi G\rho. \quad (1.1)$$

Esta es una ecuación de campo para  $\Phi$ , donde  $G$  corresponde a la constante gravitacional universal y  $\rho$  la densidad de masa. Esta ecuación no depende del tiempo y predice interacciones gravitatorias instantáneas. Para adaptar esta teoría Newtoniana, a la relatividad, se debe incluir una parte temporal a la ecuación (1.1), tal que describa la evolución temporal del campo  $\Phi$ . Una forma de realizar esto, es llevando (1.1) a una ecuación de onda, análogo a como ocurre en el electromagnetismo para una distribución de carga o corriente. Así, la ecuación (1.1) se transforma en:

$$\left( -\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \Phi = 4\pi G\rho. \quad (1.2)$$

Esta ecuación no es suficiente, para describir por sí sola, una teoría relativista de la gravedad. Falta información sobre la evolución dinámica de la densidad de masa  $\rho$ . Una ecuación que modela la evolución de una densidad, es la ecuación de continuidad, la cual se deriva de la mecánica del continuo, definida por:

$$\frac{d\rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \vec{u}) = 0. \quad (1.3)$$

En esta expresión,  $\rho$  representa una densidad y  $\vec{u}$  una velocidad de flujo de masa que entra en un elemento de volumen. La relación dada por (1.3) implica que la variación temporal de la densidad, conlleva una salida o entrada de ésta, lo que se relaciona con un momento o energía. Esto conlleva que, al considerar la evolución temporal de una densidad  $\rho$ , se deben considerar tanto los flujos de momento y las distribuciones de energía del sistema. La densidad  $\rho$  en la ecuación (1.1), se debe reemplazar por un elemento que resuma los efectos del momento y la energía, además de la distribución de materia, en uno solo. El único candidato que cumple con esta definición, es el tensor energía-momento.

Este tensor se define como:

$$T^{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} T^{00} & T^{01} & T^{02} & T^{03} \\ T^{10} & T^{11} & T^{12} & T^{13} \\ T^{20} & T^{21} & T^{22} & T^{23} \\ T^{30} & T^{31} & T^{32} & T^{33} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

Cada elemento denota una componente distinta del tensor. Este no es una matriz, sin embargo, resulta útil representarlo como tal. La componente  $T^{00}$  representa una densidad de energía o masa. Las componentes  $T^{i0}$ , para  $i$ , variando entre 1 y 3, representan una densidad de momento, mientras que los elementos  $T^{0i}$  representan un flujo de energía. Para los  $T^{ij}$ , con  $i$  y  $j$  igual a 1, 2 o 3, representan flujos de momento paralelos o perpendiculares a una superficie de  $x^i$  o  $x^j$  constante, que se traducen en tensiones cortantes para partes del tensor con  $i \neq j$ . Para  $i = j$ , representan una presión. Este tensor es simétrico, por lo que el valor de una componente  $T^{\alpha\beta}$  será igual a  $T^{\beta\alpha}$  [2].

Todos los elementos utilizan índices para enumerarse, y usualmente, se utiliza la convención de Einstein; dados dos índices iguales, estos implican una suma de elementos sobre estos.

Un último elemento a definir en esta notación, es el tensor métrico, el cual, en una variedad, da la noción de un producto vectorial, y otras operaciones vectoriales que contengan la información de la forma del espacio trabajado. Desde la relatividad especial, se establece el tensor métrico de Minkowski, el cual describe un espacio-tiempo plano, cuyo producto vectorial posee una parte temporal negativa. Una métrica como tal, se puede representar convencionalmente como una matriz,

$$\eta_{\alpha\beta} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (1.5)$$

donde los subíndices de  $\eta$  indicarían una fila y columna respectiva. Esta representación no implica que el tensor métrico sea una matriz, dado a que opera de forma distinta a una. Sumar sobre sus índices posibilita definir operadores diferenciales usuales.

Utilizar esta notación, simplifica la notación de las derivadas parciales, con un subíndice, según,

$$\partial_\alpha = \frac{\partial}{\partial x^\alpha}, \quad (1.6)$$

donde  $x^\alpha$  denota una coordenada específica del espacio de trabajo. En el caso del espacio-tiempo de Minkowski, con 4 dimensiones, se definen las coordenadas  $t$ ,  $x$ ,  $y$  y  $z$ , como  $x^0$ ,  $x^1$ ,  $x^2$  y  $x^3$ , respectivamente. Así, en esta notación, la ecuación (1.2), se reescribiría como,

$$\eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \Phi = 4\pi G \rho, \quad (1.7)$$

donde  $\eta^{\alpha\beta}$ , corresponde a la métrica inversa de Minkowski.

Una propiedad importante del tensor métrico, es que permite “bajar” o “subir” índices de elementos, tal que

$$p^\alpha g_{\alpha\beta} = p_\beta, \quad (1.8)$$

de tal forma que, con ello, es posible reducir índices al sumar sobre un mismo par de estos, lo que define trazas de tensores. La traza del tensor energía-momento, correspondería a la reducción

$$\text{tr}(\mathbf{T}) = T^\mu{}_\mu = g_{\mu\alpha} T^{\mu\alpha}, \quad (1.9)$$

lo que representaría una generalización de las componentes de este tensor.

Con todo lo anterior definido, la ecuación propuesta para una teoría relativista de la gravedad es:

$$g^{\alpha\beta} \partial_\alpha \partial_\beta \Phi = -4\pi G T_\mu{}^\mu \quad (1.10)$$

Esta ecuación se ha generalizado para utilizar un tensor métrico  $g^{\alpha\beta}$  generalizado a cualquier espacio, además de utilizar la traza del tensor energía-momento para resumir las contribuciones dinámicas de la materia. Esta expresión forma una teoría escalar de la gravedad.

## 1.2. Teoría de campo escalar de la gravedad

Al proponer un modelo de campo escalar de la gravedad, cuya ecuación sea similar a (1.1) o (1.10), ocurren incongruencias en la descripción del movimiento de los cuerpos. Dada una partícula de masa  $m_i$ , definida como masa inercial, dentro de un potencial gravitatorio  $\Phi$ , su ecuación de movimiento, dada por la mecánica Newtoniana, será:

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = -m_g \partial_\alpha \Phi, \quad (1.11)$$

donde  $\tau$  corresponde al tiempo propio de la partícula,  $m_g$  a su masa gravitacional y  $p_\alpha$ , a su 4-momento. Los subíndices de las masas  $m_i$  y  $m_g$  no corresponden a la notación de Einstein, y están ahí para diferenciar entre masa inercial y gravitacional. Al realizar una aproximación a baja velocidad, tal que el factor  $\gamma$  se acerca a 1, el 4-momento se reduce a,

$$p^\alpha = (m_i c \gamma, m_i \vec{u} \gamma) \approx (m_i c, m_i \vec{u}), \quad (1.12)$$

donde  $\vec{u}$  es la 3-velocidad espacial de la partícula. Consecuentemente, la ecuación de movimiento es dada por:

$$m_i \frac{du_\alpha}{d\tau} = -m_g \partial_\alpha \Phi \quad (1.13)$$

La 4-velocidad, denotada por  $u_\alpha$ , es el cambio de la posición  $x_\alpha$  con respecto al tiempo propio, y en esta aproximación,  $m_i$  se admitirá igual a  $m_g$ . Experimentalmente, se ha medido que la razón entre estas masas está dada por un factor universal que se aproxima a 1. Dado a que cada una es indistinguible, y no existe evidencia aún para asumir que son distintas, es que se justifica que  $m_i = m_g$ . La ecuación de movimiento queda finalmente como:

$$\frac{d^2 x_\alpha}{d\tau^2} = -\partial_\alpha \Phi, \quad (1.14)$$

la cual es la ecuación Newtoniana del movimiento de una partícula en un campo gravitacional. Sin embargo, al considerar la componente temporal en esta ecuación, tenemos que

$$\frac{d}{d\tau}(m_i c) = 0 = -m_g \partial_0 \Phi, \quad (1.15)$$

que implicaría que el potencial no posee una dependencia del tiempo. Esto entra en conflicto con la teoría escalar de la gravedad, dado que esta debe ser dinámica e incluir una dependencia temporal, por lo que, a excepción del caso del límite no relativista, esta derivada debe ser no nula, obligando a que:

$$\frac{d}{d\tau}(m_i c) \neq 0, \quad (1.16)$$

donde  $c$  corresponde a la velocidad de la luz, la cual es constante, por lo que para que esta expresión sea no nula, debe implicar que la masa inercial debe depender del tiempo y cambiar en función de esta variable, hecho que, experimentalmente, no se ha observado. Otro conflicto heredado de esta condición, es que la masa gravitacional e inercial tenderán a divergir en valor en casos relativistas, efecto que tampoco se ha medido en la experimentación.

Una forma de tratar de resolver este conflicto, es modificando la ecuación de movimiento (1.11), a la ecuación [1]:

$$\frac{dp_\alpha}{d\tau} = -(g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta) m \partial_\beta \Phi. \quad (1.17)$$

Esta ecuación, corrige el conflicto de la parte temporal, quedando, tal que:

$$\frac{d}{d\tau}(m) = -m(g^{0\beta} + u^0 u^\beta) \partial_\beta \Phi. \quad (1.18)$$

Esta ecuación se encuentra postulada en unidades naturales, donde  $G = c = \hbar = k_B = 1$ , con el fin de simplificar el desarrollo. Al ser esta una adaptación relativista de la ecuación (1.11), admite un sistema de

referencia Lorentziano, cuyo tensor métrico es aquel de Minkowski  $\eta_{\alpha\beta}$ . En la aproximación a baja velocidad, se pueden considerar las componentes de la 4-velocidad lo suficientemente pequeñas como para que estas se aproximen a 0, excepto la componente temporal, que será 1 en estas unidades naturales. Así:

$$u^\alpha = (1, 0, 0, 0), \quad (1.19)$$

el producto entre dos componentes distintas a la temporal de la 4-velocidad, serán nulos. La única componente no nula de esta multiplicación, es la temporal, retornando la ecuación de movimiento (1.14). Al analizar la componente temporal de esta ecuación, que anteriormente generaba conflictos, se tiene,

$$\frac{d}{d\tau}(m) = -m(-1 + 1)\partial_0\Phi = 0, \quad (1.20)$$

lo que soluciona el problema de la masa.

Sin embargo, ambas ecuaciones propuestas, fallan al considerar una partícula de masa nula, como ocurre con los fotones. Se requiere introducir una variable,  $\zeta$ , para analizar su movimiento bajo un potencial gravitatorio, tal que:

$$\zeta = \frac{\tau}{m}. \quad (1.21)$$

Diferenciando con respecto al tiempo propio  $\tau$ , la expresión del movimiento de tal partícula será:

$$\frac{du_\alpha}{d\zeta} = m F(\Phi), \quad (1.22)$$

donde  $F(\Phi)$ , denota alguna función del potencial, como algunas de las expresiones anteriores. Cuando la masa de la partícula es 0, se obtiene que el movimiento de esta no es modificado de ninguna forma por el potencial  $\Phi$ , tanto en (1.11), como en (1.17). Esto implica que su trayectoria no sería afectada por la acción de un campo gravitatorio, su ausencia de masa lo impide. Einstein consideró que la luz debía ser afectada por la gravedad; además de la evidencia experimental de hoy en día, la luz debe ser afectada por la gravedad. Una teoría de campo escalar de la gravedad, aunque útil en un caso límite relativista, es insuficiente [1].

## Capítulo 2

# Relatividad general

### 2.1. Nociones preliminares

La primera noción de relación entre curvatura y gravitación surge al considerar el principio de equivalencia de Einstein. Él consideró, que al tener varios sistemas de referencia Lorentzianos (o planos) en caída libre, sin fuerzas, ni torques netos, que actúen sobre estos sistemas y tal que estos puedan ser infinitamente compactados y pequeños, para descartar efectos de inhomogeneidades de la gravedad, entonces, las leyes de la física, no correlacionadas con la gravedad, deben ser descritas de la misma forma en cada uno de ellos. Este es el principio de relatividad [1].

Es posible añadir condiciones considerando los efectos de la gravedad. Al poner estos sistemas de referencia en caída libre, a una distancia considerable de la tierra, estos observarán como empiezan a acelerar con respecto a otros sistemas que también vayan en caída, debido a la desviación del movimiento provocado por la gravedad. Esto implica que un sistema Lorentziano global, no puede existir en presencia de gravedad. Su existencia implicaría que todo este sistema se mueve de forma constante, y ninguna de sus partes podría acelerar con respecto a otra. Unir a todos estos sistemas Lorentzianos para formar un sistema de referencia global absoluto, es imposible en presencia de gravedad. Einstein pensó que esto, implicaba que existía una curvatura que previene que tal unión sea posible en torno a una fuente de gravedad [1]. Es por ende que se asocia curvatura con gravedad.

A continuación, se muestran ejemplos de lo descrito anteriormente. Considérese la superficie de una esfera de radio  $R$ . La métrica de tal espacio es dada por:

$$ds^2 = R^2 d\theta^2 + R^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (2.1)$$

la cual, al realizar la transformación de coordenadas:

$$\phi = \frac{x}{R}, \quad \theta = \frac{\pi}{2} - \frac{y}{R}, \quad (2.2)$$

modifica a la métrica, resultando en:

$$ds^2 = dy^2 + \cos^2\left(\frac{y}{R}\right) dx^2, \quad (2.3)$$

donde se han aplicado propiedades trigonométricas. Al expandir en una serie de potencias la función coseno, la expresión (2.3), queda como:

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + \mathcal{O}\left(\frac{y^2}{R^2}\right) dx^2. \quad (2.4)$$

Este resultado implica que la superficie de una esfera en torno al ecuador, ( $y \approx 0$ ), es plana. Sin embargo, al haber desviaciones en la dirección  $y$ , la curvatura se hace notable y es imposible converger un sistema de referencia plano al resto del espacio.

Un ejemplo más avanzado utiliza la métrica de Friedmann–Robertson–Walker, la que modela un universo en expansión, cuya expresión es dada por [1]:

$$ds^2 = a^2(\eta)[-d\eta^2 + d\chi^2 + \chi^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)]. \quad (2.5)$$

Para  $\chi$  aproximándose a 0, se puede realizar el cambio de coordenadas:

$$t = \int_0^\eta a d\eta + \frac{1}{2}\chi^2 \frac{da}{d\eta}, \quad x = a\chi \sin(\theta) \cos(\phi), \quad y = a\chi \sin(\theta) \sin(\phi), \quad z = a\chi \cos(\theta). \quad (2.6)$$

De donde surgen las relaciones:

$$x^2 + y^2 + z^2 = a^2\chi^2, \quad (2.7)$$

$$x^2 + y^2 = a^2\chi^2 \sin^2(\theta), \quad (2.8)$$

$$\chi = \frac{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}{a}, \quad (2.9)$$

$$\phi = \arctan\left(\frac{y}{x}\right), \quad (2.10)$$

$$\theta = \arctan\left(\sqrt{\frac{x^2 + y^2}{z^2}}\right). \quad (2.11)$$

Al hacer las diferenciaciones, se obtiene:

$$d\chi = \frac{x}{a^2\chi}dx + \frac{y}{a^2\chi}dy + \frac{z}{a^2\chi}dz - \frac{\chi}{a} \frac{da}{dt} dt, \quad (2.12)$$

$$d\theta = \frac{xz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}}dx + \frac{yz}{(x^2 + y^2 + z^2)\sqrt{x^2 + y^2}}dy - \frac{\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2 + z^2}dz, \quad (2.13)$$

$$d\phi = -\frac{y}{x^2 + y^2}dx + \frac{x}{x^2 + y^2}dy, \quad (2.14)$$

$$dt = \left[ a + \frac{\chi^2}{2} \frac{d^2a}{d\eta^2} \right] d\eta + \chi \frac{da}{d\eta} d\chi. \quad (2.15)$$

Calculando el cuadrado de estos diferenciales y reemplazando en la métrica de la ecuación (2.5), se obtiene la expresión:

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 + \left[ \chi \dot{a}^2 dt^2 - 2\frac{x}{a}\dot{a} dx dt - 2\frac{z}{a}\dot{a} dz dt - 2\frac{y}{a}\dot{a} dy dt \right]. \quad (2.16)$$

Esto da a entender que la métrica en torno a  $\chi \approx 0$  es relativamente plana, pero para desviaciones de esta variable, deja de serlo impidiendo la existencia de un sistema Lorentziano global.

Lo anterior implica que es necesario describir el movimiento de partículas en espacios con curvatura. La expresión que determina tal trayectoria, es la ecuación geodésica:

$$\frac{du^\alpha}{d\tau} + \Gamma^\alpha_{\mu\nu} u^\mu u^\nu = 0, \quad (2.17)$$

donde  $u^\alpha$  es la 4-velocidad y  $\Gamma^\alpha_{\mu\nu}$ , los símbolos de Christoffel. La ecuación geodésica representa el camino más corto entre dos puntos, considerando la curvatura del espacio.

Los símbolos de Christoffel se definen en base a la derivada covariante, permitiendo que la diferenciación de un vector transforme como un tensor. Para relatividad general, se utiliza la conexión de Levi-Civita, la cual es

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2}g^{\alpha\rho}(\partial_\mu g_{\rho\nu} + \partial_\nu g_{\mu\rho} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2.18)$$

Esta conexión permite que los símbolos posean simetría en sus índices inferiores, con lo cual  $\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{\nu\mu}$ , se cumple. Esta conexión impone condiciones adicionales sobre la métrica, como que su derivada covariante es nula. Es de esta forma que (2.18) surge.

Aunque la expresión (2.17) se deduce de la minimización de la distancia entre 2 puntos, es posible deducirla desde la ecuación de las curvas auto-paralelas,

$$u^\mu \nabla_\mu u^\alpha = 0. \quad (2.19)$$

Esta expresión indica que a lo largo de la trayectoria de la partícula, su 4-velocidad no cambiará y será transportada paralelamente a esta curva [2]. Su derivada direccional, en la dirección de la curva, es nula. En el espacio-tiempo consistente de 4 dimensiones (3 espaciales y 1 temporal), la ecuación de curvas auto-paralelas coincide con la expresión geodésica (2.17). Describir a las geodésicas según (2.19), sin embargo, resulta más útil ya que permite describir directamente cantidades conservadas mediante una modificación.

Consideremos una métrica que no depende de una variable  $A$ , es decir, que la derivada parcial de cualquier componente de la métrica respecto de  $A$  es nula,

$$\partial_A g_{\mu\nu} = 0. \quad (2.20)$$

Esta relación define una cantidad conservada al modificar (2.19). Esta expresión se multiplica por un elemento de la métrica,  $g_{\beta\gamma}$ :

$$u^\alpha (\nabla_\alpha u^\beta) g_{\beta\gamma} = 0. \quad (2.21)$$

Al ser la derivada covariante de la métrica nula, se junta con la regla del producto de Leibniz permitiendo que (2.21), se reduzca a,

$$u^\alpha \nabla_\alpha (g_{\beta\gamma} u^\beta) = u^\alpha (\nabla_\alpha u_\beta) = 0, \quad (2.22)$$

lo que se traduce en la ecuación geodésica covariante:

$$\frac{du_\beta}{d\tau} - \Gamma^\lambda_{\beta\alpha} u_\lambda u^\alpha = 0. \quad (2.23)$$

La 4-velocidad en la dirección de  $A$ , será:

$$\frac{du_A}{d\tau} - \Gamma^\lambda_{A\alpha} u_\lambda u^\alpha = 0. \quad (2.24)$$

Según la conexión de Levi-Civita, los símbolos quedan como

$$\Gamma^\lambda_{A\alpha} = \frac{1}{2} g^{\lambda\rho} (\partial_A g_{\rho\alpha} + \partial_\alpha g_{A\rho} - \partial_\rho g_{A\alpha}). \quad (2.25)$$

La derivada de la métrica respecto de la variable  $A$  es nula por la definición inicial y el resto de términos se cancelan entre sí dentro de las sumas de los índices  $\alpha$  y  $\rho$  por la simetría del tensor métrico. La ecuación (2.24) se reduce a:

$$\frac{du_A}{d\tau} = 0, \quad (2.26)$$

implicando una cantidad conservada en la dirección  $A$ .

La imposibilidad de compatibilizar sistemas de referencia planos en presencia de gravedad, es causada por la aceleración relativa que estos experimentan con respecto a otros; al proponer que la curvatura es la causa que impide tal convergencia, entonces, la aceleración relativa debe ser proporcional a esta. La medida que cuantifica la aceleración que dos partículas miden respecto de sí dentro de un campo gravitatorio, es la ecuación de fuerzas de marea. Por ende, esta debe ser la que determinará la relación entre curvatura y gravedad.

En una teoría Newtoniana, la ecuación de marea es dada por [1]:

$$\frac{d^2 \xi^j}{dt^2} = - \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} \xi^k. \quad (2.27)$$

En esta ecuación,  $\xi^j$  denota el vector separación entre dos partículas dentro de un potencial gravitatorio  $\Phi$ . Este vector no considera componentes temporales en la teoría Newtoniana, por lo que en (2.27) los índices se suman sobre componentes espaciales. Las derivadas de  $\Phi$  con respecto a diferentes coordenadas de índices distintos, se pueden describir como un tensor de rango dos, lo que define al tensor de marea.

En el caso relativista, dadas dos geodésicas definidas por un parámetro  $\lambda$ , cuyo valor denota una geodésica específica, donde sobre cada una se puede definir un 4-momento  $p^\alpha$  tangente, el vector separación entre estas, se define como la diferencia entre ambas; dado a que estas pueden ser clasificadas con el parámetro continuo  $\lambda$ , la separación entre geodésicas infinitesimalmente colindantes será dada por la diferenciación en este parámetro,  $\vec{\xi} = \partial/\partial\lambda$ . La aceleración relativa inducida por la gravedad, es dada por [1]:

$$p^\gamma \nabla_\gamma (p^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha). \quad (2.28)$$

A manera de simplificar la notación, la proyección de la derivada covariante sobre un 4-vector, se denota como:

$$\nabla_{\vec{p}} \vec{p} = p^\alpha \nabla_\alpha p^\beta. \quad (2.29)$$

Estos vectores no denotan algún 3-vector como previamente. Estos vectores denotarán un 4-vector. Continuar con el desarrollo, requiere utilizar el conmutador de los campos vectoriales  $\vec{p}$  y  $\vec{\xi}$ :

$$[\vec{p}, \vec{\xi}] = \nabla_{\vec{p}} \vec{\xi} - \nabla_{\vec{\xi}} \vec{p}. \quad (2.30)$$

Este conmutador resulta nulo, dado a la forma en que se define  $\vec{\xi}$ , y la propiedad de conmutación de la derivada con  $\vec{p}$ , definido como el cambio con respecto al tiempo propio [3]. Por ende, el desarrollo de (2.28), se reduce a:

$$\nabla_{\vec{p}} \nabla_{\vec{p}} \vec{\xi} = (\nabla_{\vec{p}} \nabla_{\vec{\xi}} - \nabla_{\vec{\xi}} \nabla_{\vec{p}}) \vec{p}. \quad (2.31)$$

Desarrollar esta expresión utilizando la propiedad de conmutación (2.30), retorna:

$$\nabla_{\vec{p}} \nabla_{\vec{p}} \vec{\xi} = (\nabla_\delta \nabla_\gamma p^\alpha - \nabla_\gamma \nabla_\delta p^\alpha) \xi^\gamma p^\delta. \quad (2.32)$$

La primera parte, del lado derecho de la ecuación anterior, es similar a un conmutador de derivadas covariantes, aplicadas como operador diferencial, sobre  $p^\alpha$ . Realizar el desarrollo de esta parte, retorna que, independiente de la elección del campo  $\vec{p}$ , o incluso, si este es una combinación lineal de campos escalares y vectoriales, tal que:

$$p^\alpha = aA^\alpha + bB^\alpha, \quad (2.33)$$

el operador conmutador, no dependerá de este. La derivada covariante opera sobre este campo vectorial según la propiedad de linealidad que esta posee, aplicando la regla del producto de Leibniz. Esto separa la expresión en 2 partes para  $aA^\alpha$  y  $bB^\alpha$ , retornando para cada una:

$$\nabla_\delta \nabla_\gamma (aA^\alpha) = \partial_\delta \partial_\gamma (a) A^\alpha + a(\nabla_\delta \nabla_\gamma A^\alpha). \quad (2.34)$$

La segunda doble derivada retorna este mismo resultado, pero con los índices cambiados. Restando ambas, resulta en:

$$\nabla_\delta \nabla_\gamma (aA^\alpha) - \nabla_\gamma \nabla_\delta (aA^\alpha) = a(\nabla_\delta \nabla_\gamma A^\alpha - \nabla_\gamma \nabla_\delta A^\alpha). \quad (2.35)$$

Lo mismo ocurre para  $bB^\alpha$ . El resto de la expresión se desarrolla para un campo vectorial  $A^\alpha$ , de lo que se obtiene:

$$\nabla_\delta \nabla_\gamma A^\alpha - \nabla_\gamma \nabla_\delta A^\alpha = (\partial_\delta \Gamma^\alpha_{\gamma\lambda}) A^\lambda - (\partial_\gamma \Gamma^\alpha_{\delta\lambda}) A^\lambda + \Gamma^\alpha_{\delta\sigma} \Gamma^\sigma_{\gamma\lambda} A^\lambda - \Gamma^\alpha_{\sigma\lambda} \Gamma^\sigma_{\gamma\delta} A^\lambda. \quad (2.36)$$

Esto implica que la doble derivada conmutada de un campo  $A^\alpha$ , no depende de este en si, ya que solamente queda multiplicando la expresión; el resto de derivadas aplican sobre los símbolos. Consecuentemente, el mismo resultado aplica para  $B^\alpha$ :

$$\nabla_\delta \nabla_\gamma (aA^\alpha + bB^\alpha) - \nabla_\gamma \nabla_\delta (aA^\alpha + bB^\alpha) = R^\alpha_{\lambda\delta\gamma} (aA^\lambda + bB^\lambda). \quad (2.37)$$

Como esta conmutación de derivadas no depende de los campos vectoriales en si, entonces, la información de la diferencia de estas derivadas se resume en un tensor de rango cuatro conocido como tensor de Riemann, definido por [3],

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\delta\sigma} \Gamma^\sigma{}_{\gamma\beta}. \quad (2.38)$$

Este tensor reduce la expresión (2.32) a:

$$\nabla_\delta \nabla_\gamma p^\alpha - \nabla_\gamma \nabla_\delta p^\alpha = -R^\alpha{}_{\lambda\gamma\delta} p^\lambda. \quad (2.39)$$

En geometría diferencial el tensor de Riemann corresponde a una medida de curvatura. Haciendo uso de este, la desviación geodésica será dada por:

$$\nabla_{\vec{p}} \nabla_{\vec{p}} \vec{\xi} = R^\alpha{}_{\beta\delta\gamma} p^\beta p^\delta \xi^\gamma. \quad (2.40)$$

Este tensor posee simetrías y propiedades en sus índices. Una de ellas implica que [1]:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = -R^\alpha{}_{\beta\delta\gamma}. \quad (2.41)$$

Entre otras simetrías que serán mencionadas posteriormente. Utilizando esta propiedad, la ecuación de desviación se reescribe preferentemente como:

$$p^\gamma \nabla_\gamma (p^\beta \nabla_\beta \xi^\alpha) = -R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} p^\beta \xi^\gamma p^\delta, \quad (2.42)$$

forma que se asemeja a la ecuación de fuerzas de marea Newtoniana [1][3]. Si se considera el caso a bajas velocidades, tal que el único elemento no nulo de la 4-velocidad sea la componente temporal y el resto sean lo suficientemente pequeñas comparadas a  $c$  para poder considerarlas como nulas y en un límite no relativista donde la curvatura es lo suficientemente despreciable como para que la derivada temporal de los símbolos de subíndice 0 sean nulos, entonces, la ecuación (2.42) se ve reducida a:

$$\frac{d^2 \xi^j}{dt^2} = -R^j{}_{0k0} \xi^k. \quad (2.43)$$

Las aproximaciones anteriores posibilitan además que  $t = \tau$ . Comparar esta expresión con (2.27) establece la relación directa entre curvatura y el campo gravitatorio al ver que el tensor de marea es equivalente al tensor de Riemann de índices temporales, 0,

$$R^j{}_{0k0} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k}. \quad (2.44)$$

Esta relación implica que los índices  $j$  y  $k$  son netamente espaciales, dado a que así se da en el caso Newtoniano. Esto además demuestra que la curvatura es la causa de la gravedad.

Aunque la gravedad se deba describir con la curvatura, el planteamiento Newtoniano describe muy bien el caso no relativista al utilizar la ecuación de marea. Como ejemplo, puede considerarse la aproximación de las fuerzas de marea sobre la superficie de la tierra. Dado un sistema de referencia ubicado en el centro de la tierra, la cual se aproxima como una esfera perfecta, las aceleraciones que un cuerpo sufre medidas en este sistema serán dadas por la gravedad más la aceleración generada por el efecto de las fuerzas de marea del sol y la luna dados por un tensor de marea  $\mathcal{E}^j{}_k$ , el cual será constante. La aceleración neta en el sistema definido será entonces:

$$a^j = g^j + \frac{d^2 \xi^j}{dt^2}, \quad (2.45)$$

donde  $g^j$  es la aceleración por gravedad y el segundo término es la contribución de marea. Utilizando la expresión (2.27), la ecuación anterior se reescribe como,

$$a^j = g^j + \mathcal{E}^j{}_k \xi^k. \quad (2.46)$$

La aceleración por la gravedad terrestre es dada por el potencial Newtoniano,

$$g^j = -\frac{GM}{r^2} n^j, \quad (2.47)$$

donde  $n^j$  representa el vector unitario correspondiente a esta fuerza, que en este caso será radial.

La separación que las fuerzas de mareas generan entre dos cuerpos es cuantificada por el vector  $\xi^k$ . Al considerar el sistema de referencia en el centro de la tierra como el primer cuerpo desde el cual se mide tal desviación, este vector  $\xi^j$  será dado por la posición descrita del segundo cuerpo en este sistema,  $r n^k$ . La aceleración neta será,

$$a^j = -\frac{GM}{r^2} n^j + \mathcal{E}^j_k r n^k. \quad (2.48)$$

Este también permite establecer un potencial utilizando el teorema fundamental de las integrales de línea. Sea  $a^j$  dado por el gradiente de un potencial,

$$a_j = -\partial_j \Phi,$$

entonces, al aplicar una integral de línea a través de un camino  $\vec{dl}$ ,

$$\int a_j dl^j = - \int (\partial_j \Phi) dl^j = -\Phi(r) + \Phi(r_0). \quad (2.49)$$

Integrando sobre  $a^j$ , retorna:

$$\int a^j dl_j = \int \left( -\frac{GM}{r^2} n^j + \mathcal{E}^j_k n^k r \right) n_j dx^j = \frac{GM}{r} + \frac{1}{2} \mathcal{E}^j_k n^k n_j r^2, \quad (2.50)$$

desde lo cual el potencial gravitatorio queda como:

$$\Phi(r) = -\frac{GM}{r} - \frac{1}{2} \mathcal{E}^j_k n^k n_j r^2 - \Phi(r_0). \quad (2.51)$$

Definir este potencial permite estudiar la hidrostática de un planeta y los efectos de las fuerzas de marea sobre este, conservando líneas de equipotencial dada la relación exclusivamente radial que posee este campo [1].

Aunque el tensor de Riemann cuantifique la curvatura, esta no es la única forma de expresarla. Existen tensores adicionales para describirla, entre ellos son necesarios algunos para progresar a las ecuaciones de Einstein. Dado a que el tensor de Riemann posee cuatro índices y en la relatividad general se trabaja en un espacio de cuatro dimensiones, para cada índice habrán cuatro componentes distintas resultando en 256 componentes independientes para el tensor en relatividad general. Definir las simetrías de los índices reduce la cantidad de componentes independientes del tensor. Estas simetrías son dadas por,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\alpha\beta\delta\gamma}, R_{\alpha\beta\gamma\delta} = -R_{\beta\alpha\gamma\delta}, R_{\alpha\beta\gamma\delta} = R_{\gamma\delta\alpha\beta}, R_{\alpha\beta\gamma\delta} + R_{\alpha\delta\beta\gamma} + R_{\alpha\gamma\delta\beta} = 0. \quad (2.52)$$

Estas reducen las componentes independientes del tensor de Riemann a solo 20. Estas pueden ser distribuidas en dos tensores de curvatura; el tensor de Ricci y el tensor de Weyl [1]. El primero corresponde a una contracción del primer y tercer índice del tensor de Riemann:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad (2.53)$$

donde se suma sobre  $\lambda$ . La simetría de índices asegura que al menos 10 componentes independientes del tensor de Riemann estarán contenidas en las componentes del este tensor.

Por otro lado, el tensor de Weyl es una reducción del Riemann tal que este posee una traza nula. La traza de algún tensor es dada por la contracción de dos de sus índices cualesquiera entre sí. De esta forma se definió al tensor de Ricci. Sin embargo, para otros índices contraídos para el tensor de Riemann, habrán

componentes no nulas. El tensor de Weyl asegura que cualquier contracción de sus índices será nulo. Este es dado por:

$$C^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} = R^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma} - 2(g^\mu{}_\rho R^\nu{}_\sigma - g^\mu{}_\sigma R^\nu{}_\rho - g^\nu{}_\rho R^\mu{}_\sigma + g^\nu{}_\sigma R^\mu{}_\rho) + \frac{1}{3}(g^\mu{}_\rho g^\nu{}_\sigma - g^\mu{}_\sigma g^\nu{}_\rho - g^\nu{}_\rho g^\mu{}_\sigma + g^\nu{}_\sigma g^\mu{}_\rho). \quad (2.54)$$

Cualquier contracción en sus índices anulará a este tensor. Por las simetrías antes mencionadas, el resto de las 10 componentes independientes del tensor de Riemann se encuentran dentro de  $C^{\mu\nu}{}_{\rho\sigma}$  [1].

Un tercer elemento de interés corresponde al escalar de curvatura o de Ricci, el cual se define como la contracción de los índices del tensor de Ricci,

$$R = R^\alpha{}_\alpha. \quad (2.55)$$

A modo de ejemplo demostrativo, considérese la superficie de una esfera de radio  $R$ , donde se establece la métrica,

$$g_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} R^2 & 0 \\ 0 & R^2 \sin^2(\theta) \end{pmatrix}, \quad (2.56)$$

sobre su superficie. Aunque este se represente como una matriz, este no lo es.

Esto es equivalente a establecer un sistema coordenado sobre una esfera tal que cada punto sobre ella puede ser descrito con un ángulo azimutal y polar. Como la métrica para esta es diagonal, la métrica inversa se obtiene como los recíprocos de los elementos de  $g_{\mu\nu}$ ,

$$g^{\mu\nu} = \begin{pmatrix} \frac{1}{R^2} & 0 \\ 0 & \frac{1}{R^2 \sin^2(\theta)} \end{pmatrix}. \quad (2.57)$$

De esta forma se cumple la identidad:

$$g^{\alpha\beta} g_{\beta\gamma} = \delta^\alpha{}_\gamma, \quad (2.58)$$

donde  $\delta^\alpha{}_\gamma$  es una delta de Kronecker.

Este sistema posee los vectores unitarios angulares  $\vec{e}_\theta$  y  $\vec{e}_\phi$  y utilizando la conexión de Levi-Civita, los símbolos de Christoffel serán:

$$\Gamma^\theta{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\theta\rho} (\partial_\alpha g_{\rho\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\rho} - \partial_\rho g_{\alpha\beta}), \quad (2.59)$$

y:

$$\Gamma^\phi{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\phi\rho} (\partial_\alpha g_{\rho\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\rho} - \partial_\rho g_{\alpha\beta}). \quad (2.60)$$

Dado a que el tensor métrico es diagonal, siempre será no nulo en los elementos con mismo índice  $g_{\alpha\beta} \neq 0$ , para  $\alpha = \beta$ , implicando que  $g_{\alpha\beta} = 0$  y  $g^{\alpha\beta} = 0$  para todo  $\alpha \neq \beta$ , simplificando la expresión de los símbolos a:

$$\Gamma^\theta{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_\alpha g_{\theta\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\theta} - \partial_\theta g_{\alpha\beta}), \quad (2.61)$$

y:

$$\Gamma^\phi{}_{\alpha\beta} = \frac{1}{2} g^{\phi\phi} (\partial_\alpha g_{\phi\beta} + \partial_\beta g_{\alpha\phi} - \partial_\phi g_{\alpha\beta}). \quad (2.62)$$

Las sumas implicadas sobre  $\rho$  no iguales al índice superior del símbolo son anuladas respectivamente al ser nulos los elementos de métrica inversa de índices desiguales.

Para los elementos del tensor métrico restantes, se evalúan los símbolos sobre todos los subíndices retor- nando,

$$\Gamma^\theta{}_{\theta\theta} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_\theta g_{\theta\theta} + \partial_\theta g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\theta}) = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_\theta (R^2) = 0, \quad (2.63)$$

$$\Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_\phi g_{\theta\phi} + \partial_\phi g_{\phi\theta} - \partial_\theta g_{\phi\phi}) = -\frac{1}{2} g^{\theta\theta} \partial_\theta (R^2 \sin^2(\theta)) = -\sin(\theta) \cos(\theta), \quad (2.64)$$

$$\Gamma^\theta{}_{\theta\phi} = \frac{1}{2} g^{\theta\theta} (\partial_\theta g_{\theta\phi} + \partial_\phi g_{\theta\theta} - \partial_\theta g_{\theta\phi}) = 0. \quad (2.65)$$

El último símbolo se anula debido a que ningún elemento depende de la variable  $\phi$  y el resto de elementos de la métrica son nulos. La conexión de Levi-Civita permite la simetría de los índices inferiores tal que  $\Gamma^\mu_{\alpha\beta} = \Gamma^\mu_{\beta\alpha}$ , propiedad que determina el símbolo faltante. Para los elementos de índice superior  $\phi$ , se tienen,

$$\Gamma^\phi_{\theta\theta} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(\partial_\theta g_{\phi\theta} + \partial_\theta g_{\theta\phi} - \partial_\phi g_{\phi\phi}) = 0, \quad (2.66)$$

$$\Gamma^\phi_{\phi\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(\partial_\phi g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\phi\phi} - \partial_\phi g_{\phi\phi}) = 0, \quad (2.67)$$

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \frac{1}{2}g^{\phi\phi}(\partial_\theta g_{\phi\phi} + \partial_\phi g_{\theta\phi} - \partial_\phi g_{\theta\phi}) = \frac{1}{2} \frac{1}{R^2 \sin^2(\theta)} \partial_\theta (R^2 \sin^2(\theta)) = \cot(\theta). \quad (2.68)$$

La simetría de índices inferiores determina la componente faltante. Con estos símbolos es posible calcular las componentes del tensor de Riemann. Estas se determinan con el uso de las simetrías de los índices de este. Para:

$$R_{\theta\theta\theta\theta}, \quad (2.69)$$

y:

$$R_{\phi\phi\phi\phi}, \quad (2.70)$$

serán nulas, al verificarse que todos sus elementos se cancelan entre sí. Las siguientes componentes corresponden a aquellas dadas por 3 índices iguales entre sí,

$$R^\alpha_{\beta\beta\beta} = \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\beta\beta} - \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\beta\beta} + \Gamma^\alpha_{\beta\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\beta} - \Gamma^\alpha_{\beta\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\beta} = 0. \quad (2.71)$$

Aplicando las simetrías, se determinan que también serán nulos los elementos:

$$R_{\alpha\beta\alpha\alpha}, R_{\alpha\alpha\beta\alpha}, R_{\alpha\alpha\alpha\beta}. \quad (2.72)$$

Para elementos de 2 índices iguales entre sí, se tiene:

$$R^\alpha_{\alpha\beta\beta} = \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\alpha\beta} - \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} + \Gamma^\alpha_{\beta\sigma} \Gamma^\sigma_{\alpha\beta} - \Gamma^\alpha_{\beta\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\alpha} = 0. \quad (2.73)$$

Estas no son todas las componentes del tensor con 2 índices iguales entre sí, dado a que no considera otras conmutaciones de índices posibles. Evaluando,

$$R^\alpha_{\beta\alpha\beta} = \partial_\alpha \Gamma^\alpha_{\beta\beta} - \partial_\beta \Gamma^\alpha_{\beta\alpha} + \Gamma^\alpha_{\alpha\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\beta} - \Gamma^\alpha_{\beta\sigma} \Gamma^\sigma_{\beta\alpha}. \quad (2.74)$$

Reemplazando con los únicos índices posibles  $\theta$  y  $\phi$ , se tiene:

$$R^\theta_{\phi\theta\phi} = \partial_\theta \Gamma^\theta_{\phi\phi} - \partial_\phi \Gamma^\theta_{\theta\phi} + \Gamma^\theta_{\theta\sigma} \Gamma^\sigma_{\phi\phi} - \Gamma^\theta_{\phi\sigma} \Gamma^\sigma_{\theta\phi}. \quad (2.75)$$

Las derivadas en  $\phi$  se anulan dado a que ningún elemento depende de esta variable. La derivada en  $\theta$ , sin embargo, es no nula. La suma sobre el índice  $\sigma$ , retorna elementos no nulos para  $\Gamma^\theta_{\phi\sigma} \Gamma^\sigma_{\theta\phi}$ . El elemento restante es nulo al sumar sobre  $\sigma$ , dado a que ningún símbolo posee índices inferiores  $\phi\phi$  no nulos, excepto para aquel con índice superior  $\theta$ . Sin embargo, para  $\sigma = \theta$ ,  $\Gamma^\theta_{\theta\theta}$  es nulo, anulando el resto. Consecuentemente este elemento del tensor de Riemann será,

$$R^\theta_{\phi\theta\phi} = \partial_\theta (-\sin(\theta) \cos(\theta)) + \Gamma^\theta_{\phi\phi} \Gamma^\phi_{\theta\phi} = -\cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) + \sin(\theta) \cos(\theta) \frac{\cos(\theta)}{\sin(\theta)} = \sin^2(\theta). \quad (2.76)$$

Desde lo cual el resto de componentes se determinan con las simetrías en sus índices. Estas son,

$$R^\theta_{\phi\phi\theta} = -g^{\theta\theta} g_{\theta\theta} R^\theta_{\phi\theta\phi} = -\sin^2(\theta), \quad (2.77)$$

$$R^\phi_{\theta\theta\phi} = -g^{\phi\phi} g_{\theta\theta} R^\theta_{\phi\theta\phi} = -1, \quad (2.78)$$

$$R^\phi_{\theta\phi\theta} = -g^{\phi\phi} g_{\phi\phi} R^\phi_{\theta\theta\phi} = 1. \quad (2.79)$$

Determinando las componentes del Riemann. Las componentes del tensor de Ricci ya están determinadas directamente en aquellas componentes anteriores cuyos índices primero y tercero estén contraídos, obteniendo:

$$R_{\theta\theta} = R^\theta_{\theta\theta\theta} + R^\phi_{\theta\phi\theta} = 1, \quad (2.80)$$

y:

$$R_{\phi\phi} = R^\theta_{\phi\theta\phi} + R^\phi_{\phi\phi\phi} = \sin^2(\theta). \quad (2.81)$$

Estos resultados confirman que sobre la superficie de una esfera hay curvatura como se veía en la métrica trabajada en (2.3). La descripción de la curvatura se puede simplificar al proponer sistemas coordenados tales que exista alguna transformación entre la base originalmente propuesta y una nueva que simplifique las expresiones de los tensores de curvatura. Utilizando la información obtenida de los tensores de curvatura para obtener un sistema plano o similar, una transformación de coordenadas sugerida es,

$$\vec{e}_{\hat{\theta}} = \frac{1}{R}\vec{e}_\theta, \quad \vec{e}_{\hat{\phi}} = \frac{1}{R\sin(\theta)}\vec{e}_\phi. \quad (2.82)$$

En notación de índices, quedaría tal que,

$$e_{\hat{\alpha}} = T^\beta_{\hat{\alpha}} e_\beta, \quad (2.83)$$

donde  $T^\alpha_{\hat{\beta}}$  es una transformación de coordenadas. Según (2.82), para cada vector unitario se asocian las transformaciones,

$$T^\theta_{\hat{\theta}} = \frac{1}{R}, \quad T^\phi_{\hat{\phi}} = \frac{1}{R\sin(\theta)}, \quad (2.84)$$

respectivamente. Aplicar esta transformación  $T^\alpha_{\hat{\beta}}$  sobre cada uno de los índices de alguno de los tensores anteriores, transforma a este al nuevo sistema de coordenadas. Para el tensor métrico en esta nueva base,

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = T^\mu_{\hat{\mu}} T^\nu_{\hat{\nu}} g_{\mu\nu}, \quad (2.85)$$

desde lo cual, transformando cada elemento resulta en:

$$g_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T^\theta_{\hat{\theta}} T^\theta_{\hat{\theta}} g_{\theta\theta} = 1, \quad (2.86)$$

y:

$$g_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = T^\phi_{\hat{\phi}} T^\phi_{\hat{\phi}} g_{\phi\phi} = 1. \quad (2.87)$$

Únicamente los elementos no nulos de la métrica se transforman, dado a que el resto de elementos conservaran su nulidad. La métrica transformada es representativa de un espacio plano:

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.88)$$

Transformando el tensor de Riemann, en esta base será:

$$R_{\hat{\alpha}\hat{\beta}\hat{\gamma}\hat{\delta}} = T^\alpha_{\hat{\alpha}} T^\beta_{\hat{\beta}} T^\gamma_{\hat{\gamma}} T^\delta_{\hat{\delta}} R_{\alpha\beta\gamma\delta}. \quad (2.89)$$

Solamente es necesaria una componente transformada para determinar el resto de elementos no nulos aplicando las simetrías. Transformando se obtiene:

$$R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = T^\theta_{\hat{\theta}} T^\phi_{\hat{\phi}} T^\theta_{\hat{\theta}} T^\phi_{\hat{\phi}} R_{\theta\phi\theta\phi} = \left(\frac{1}{R}\right)^2 \left(\frac{1}{R\sin(\theta)}\right)^2 g_{\theta\theta} R^\theta_{\phi\theta\phi} = \frac{1}{R^2}. \quad (2.90)$$

El resto de elementos quedan como:

$$R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\phi}\hat{\theta}} = -R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = -\frac{1}{R^2}, \quad (2.91)$$

$$R_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\theta}\hat{\phi}} = -R_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}} = -\frac{1}{R^2}, \quad (2.92)$$

$$R_{\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}} = R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = \frac{1}{R^2}. \quad (2.93)$$

A pesar de que la métrica en este sistema es plana, todavía existe curvatura descrita por el tensor de Riemann. Transformando las componentes del tensor de Ricci retorna:

$$R_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T^{\theta}_{\hat{\theta}} T^{\theta}_{\hat{\theta}} R_{\theta\theta} = \frac{1}{R^2}, \quad (2.94)$$

y:

$$R_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = T^{\phi}_{\hat{\phi}} T^{\phi}_{\hat{\phi}} R_{\phi\phi} = \frac{1}{R^2}. \quad (2.95)$$

A diferencia del sistema original, la curvatura en este sistema es constante para cualquier punto de la esfera y no depende de  $\theta$ .

Los resultados anteriores establecen la base para las geodésicas sobre una esfera. Dadas dos partículas sobre la esfera anterior, la primera situada sobre el ecuador y la segunda con una desviación  $\Delta\theta$  desde este y cada una de las cuales se mueve a través de geodésicas paralelas en  $\phi$  separadas inicialmente por un vector  $\vec{\xi} = \Delta\theta \hat{\theta}$ , entonces el movimiento de ambas se puede describir con la geodésica de una y la desviación geodésica de la segunda. Para la partícula ecuatorial, su posición solamente varía en la dirección  $\phi$  por lo que su única ecuación geodésica será dada por,

$$\frac{d^2 x^{\phi}}{d\tau^2} + \Gamma^{\phi}_{\mu\nu} \frac{dx^{\mu}}{d\tau} \frac{dx^{\nu}}{d\tau} = 0. \quad (2.96)$$

Los únicos símbolos no nulos de índice superior  $\phi$  son  $\Gamma^{\phi}_{\theta\phi}$  y  $\Gamma^{\phi}_{\phi\theta}$ . Estos son iguales entre sí, por lo que la ecuación geodésica se ve reducida a:

$$\frac{d^2 x^{\phi}}{d\tau^2} + 2\Gamma^{\phi}_{\theta\phi} \frac{dx^{\theta}}{d\tau} \frac{dx^{\phi}}{d\tau} = 0. \quad (2.97)$$

Dado a que la posición de esta partícula se mantiene constante en el ecuador, la velocidad en  $\theta$  es nula, reduciendo (2.97) a,

$$\frac{d^2 x^{\phi}}{d\tau^2} = 0. \quad (2.98)$$

El ángulo  $\phi$  en función del parámetro  $\tau$  será:

$$\phi(\tau) = u^{\phi}\tau + \phi_0, \quad (2.99)$$

donde  $u^{\phi}$  es la velocidad angular y  $\phi_0$  algún ángulo inicial. La distancia recorrida sobre la esfera en un intervalo del parámetro  $\tau$  será:

$$\Delta s = R(\phi(\tau_1) - \phi(\tau_0)) = R\Delta\phi \quad (2.100)$$

La distancia es dada por la longitud de arco de esfera recorrido por la partícula; dado a que  $\Delta\phi$  es el ángulo abarcado entre dos puntos posicionales de esta, la multiplicación por el radio  $R$  de la esfera retorna el arco recorrido. De esta forma, la distancia recorrida sobre la esfera entre dos valores del parámetro  $\tau$ , será la diferencia entre el ángulo final e inicial multiplicada por el radio  $R$ .

La ecuación de desviación geodésica según (2.42), es:

$$\nabla_{\vec{u}} \nabla_{\vec{u}} \vec{\xi} = -R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} u^{\beta} u^{\delta} \xi^{\gamma}, \quad (2.101)$$

donde se han utilizado las velocidades en vez del momento. La doble derivada covariante sobre  $\vec{\xi}$ , se reduce a:

$$u^{\gamma} (\nabla_{\gamma} (u_{\beta} \nabla_{\beta} \xi^{\alpha})) = u^{\gamma} ((\nabla_{\gamma} u^{\beta}) (\nabla_{\beta} \xi^{\alpha}) + u^{\beta} \nabla_{\gamma} \nabla_{\beta} \xi^{\alpha}). \quad (2.102)$$

El término  $\nabla_{\gamma} u^{\beta}$  proyectada sobre la velocidad  $u^{\gamma}$  se anula dado a que se obtiene la ecuación geodésica. La ecuación de desviación se ve reducida a,

$$u^{\gamma} u^{\beta} \nabla_{\gamma} \nabla_{\beta} \xi^{\alpha} = -R^{\alpha}_{\beta\gamma\delta} u^{\beta} \xi^{\gamma} u^{\delta}. \quad (2.103)$$

Como la trayectoria de la partícula ecuatorial ya está determinada, servirá de referencia para la desviación de la segunda. Su velocidad:

$$\vec{u} = (0, u^\phi). \quad (2.104)$$

Se exigirá que su módulo esté normalizado, para lo cual,

$$u^\mu u_\mu = 1, \quad (2.105)$$

se debe cumplir. Desarrollando con el tensor métrico, queda:

$$u^\mu g_{\mu\nu} u^\nu = 1. \quad (2.106)$$

La métrica es diagonal, reduciendo la expresión a:

$$u^\theta u^\theta g_{\theta\theta} + u^\phi u^\phi g_{\phi\phi} = 0 + (u^\phi)^2 R^2 \sin^2(\theta) = 1. \quad (2.107)$$

Así, la velocidad de la partícula ecuatorial será:

$$u^\phi = \frac{1}{R}. \quad (2.108)$$

La función seno para la partícula en el ecuador será 1 dado a que  $\theta = \frac{\pi}{2}$ , cantidad que se mantiene constante a lo largo de su movimiento. El único elemento no nulo de la velocidad de esta partícula es aquel de índice  $\phi$ , por lo cual los únicos elementos no nulos al lado izquierdo de la ecuación (2.103) serán:

$$u^\phi u^\phi \nabla_\phi (\nabla_\phi \xi^\alpha) = -R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} u^\beta \xi^\gamma u^\delta. \quad (2.109)$$

Para el lado derecho de la expresión anterior se debe sumar sobre todos los índices correspondientes. Para la componente  $\theta$  del vector desviación  $\vec{\xi}$ , (2.109) se reduce a:

$$\frac{1}{R^2} \nabla_\phi (\nabla_\phi \xi^\theta) = -R^\theta{}_{\phi\theta\phi} u^\phi \xi^\theta u^\phi - R^\theta{}_{\phi\phi\theta} u^\phi \xi^\phi u^\theta. \quad (2.110)$$

El desarrollo de la derivada covariante se ve simplificado al notar que todos los símbolos para esta geodésica ecuatorial son nulos:

$$\Gamma^\theta{}_{\phi\phi} = -\sin(\pi/2) \cos(\pi/2) = 0, \quad (2.111)$$

$$\Gamma^\phi{}_{\theta\phi} = \Gamma^\phi{}_{\phi\theta} = \cot(\pi/2) = 0. \quad (2.112)$$

Con ello, estas quedan como simples derivadas parciales en la variable  $\phi$ . La desviación en  $\theta$  es dada por,

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \xi^\theta}{\partial \phi^2} = -\sin^2(\pi/2) \frac{1}{R^2} \xi^\theta. \quad (2.113)$$

Simplificando, queda,

$$\frac{\partial^2 \xi^\theta}{\partial \phi^2} + \xi^\theta = 0. \quad (2.114)$$

El procedimiento para la componente  $\phi$  de  $\vec{\xi}$  es casi el mismo. La desviación se reduce a:

$$\frac{1}{R^2} \frac{\partial^2 \xi^\phi}{\partial \phi^2} = -R^\phi{}_{\theta\phi\theta} u^\theta \xi^\phi u^\theta - R^\phi{}_{\theta\theta\phi} u^\theta \xi^\theta u^\phi. \quad (2.115)$$

Dado a que  $u^\theta$  es nulo, la ecuación se simplifica a:

$$\frac{\partial^2 \xi^\phi}{\partial \phi^2} = 0. \quad (2.116)$$

Estableciendo la condición inicial de la desviación:

$$\vec{\xi} = (\Delta\theta, 0), \quad \dot{\vec{\xi}} = (0, 0). \quad (2.117)$$

Las soluciones a la desviación en función de  $\phi$ , son:

$$\vec{\xi} = (\Delta\theta \sin(\phi), 0). \quad (2.118)$$

Este resultado indica que sobre la geodésica ecuatorial, la segunda partícula seguirá una trayectoria a la misma velocidad en  $\phi$  que la primera variando entre  $-\Delta\theta$  y  $\Delta\theta$ , semejante a una circunferencia trazada sobre la esfera con una desviación de un ángulo  $\Delta\theta$  por sobre el plano ecuatorial.

Hasta ahora, todo lo descrito es esencial para progresar hacia la teoría gravitacional de Einstein. Sin embargo, existen ciertas limitaciones que lo descrito hasta ahora no pueden asegurar completamente.

El principio de equivalencia de Einstein garantiza que dada una ley no gravitacional descrita localmente en un sistema Lorentziano, se cumplirá globalmente de la misma forma que lo hace en tal sistema. Esto implica que se debe distinguir entre local y global dado a que el principio de equivalencia solamente aplica en el origen local del sistema Lorentziano. Si una ley que no puede ser descrita únicamente dentro de tal marco y requiere de una no-localidad, ésta corre riesgo de fallar [1].

Un ejemplo exponente de lo anterior es la ley de conservación del 4-momento a través del tensor energía-momento. Localmente este tensor  $\mathbf{T}$  cumple con que  $\vec{\nabla} \cdot \mathbf{T} = 0$ . De manera global, sin embargo, la conservación de esta cantidad implica por el teorema de la divergencia que:

$$\int_{\partial V} T^{\alpha\beta} d\Sigma_\beta = 0. \quad (2.119)$$

Este teorema, en un espacio de mayor dimensión, implica que al integrar sobre una 3-superficie  $\partial V$ , el flujo tensorial  $T^{\alpha\beta}$  devuelve un campo vectorial. Matemáticamente, el error se produce al quedar un índice  $\alpha$  libre tras la integración. Debido a ello se deben transportar las contribuciones respectivas a través de varios espacios tangentes a un espacio tangente donde por conveniencia serán añadidos. Esto implica que el resultado de la integral dependerá del camino de transporte seleccionado. No existe forma de convenir un camino específico o fijo dado a que la mayoría dará un resultado diferente implicando la no conservación del 4-momento de forma global [1].

Existen algunas formas de generalizar las leyes locales a un formato global como lo es el acople de curvatura. Estas ideas son más complejas y requieren un análisis más minucioso como para ser expresadas y desarrolladas aquí. Excluyendo estas leyes y estas particularidades, lo descrito ya es suficiente como para plantear una teoría relativista de la gravedad.

## 2.2. Ecuación de campo de Einstein

La relación que establece y determina la curvatura provocada por la presencia de densidad de materia o energía es la ecuación de campo de Einstein. Esta relación entre curvatura y la presencia de materia o energía ya se daba en la ecuación de campo Newtoniana,

$$\nabla^2 \Phi = 4\pi G \rho. \quad (2.120)$$

Se relaciona el origen del campo  $\Phi$  con la presencia de materia  $\rho$ . Esta ecuación se puede describir con el tensor de marea  $\mathcal{E}^j_k$ . Al contraer sus índices, se obtiene el operador Laplaciano con lo cual queda:

$$\mathcal{E}^j_j = 4\pi G \rho. \quad (2.121)$$

Un intento por plantear tal relación, es considerar la aproximación a baja velocidad, donde es posible considerar:

$$R^j_{0j0} = R_{00} = \mathcal{E}^j_j. \quad (2.122)$$

De tal forma que, la ecuación propuesta es:

$$R_{\alpha\beta} = 4\pi G T_{\alpha\beta}. \quad (2.123)$$

Sin embargo, esta expresión todavía es insuficiente. Durante 1913 y 1915, Einstein tanteó con las posibles ecuaciones de campo para describir a la gravedad. El problema de plantear esta ecuación reside en la conservación local del tensor energía-momento que exige que su divergencia sea nula. Por ende, se debe plantear un tensor  $G_{\alpha\beta}$  que localmente cumpla que  $\nabla \cdot G_{\alpha\beta} = 0$  y que a su vez sea proporcional al tensor energía-momento [1].

Para plantear tal tensor se utiliza al tensor de Ricci como base dado a que en (2.123) este aparece de forma natural al compararlo con el tensor de marea. Una forma en que la divergencia del tensor de Ricci sea nula es a través del escalar de curvatura  $R$  y la métrica. De esta forma, se plantea el tensor:

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R. \quad (2.124)$$

Este es el tensor de curvatura de Einstein y cumple con la nulidad de la divergencia. Así, la ecuación de campo de Einstein tendrá la forma,

$$G_{\alpha\beta} = R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g_{\alpha\beta}R = k T_{\alpha\beta}, \quad (2.125)$$

donde  $k$  es una constante a determinar. Esta última se determina mediante la aproximación Newtoniana. La expresión (2.125) es multiplicada por  $g^{\alpha\beta}$  tal que sus índices se contraen,

$$g^{\alpha\beta}R_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\alpha\beta}R = k g^{\alpha\beta}T_{\alpha\beta}. \quad (2.126)$$

Al sumar sobre el índice  $\alpha$ , el escalar de curvatura queda como:

$$R = -k T_{\alpha}^{\alpha}. \quad (2.127)$$

Reemplazando esta expresión en (2.125), queda:

$$R_{\mu\nu} + \frac{k}{2}g_{\mu\nu}T_{\alpha}^{\alpha} = k T_{\mu\nu}, \quad (2.128)$$

desde la cual despejando la componente del tensor de Ricci se obtiene:

$$R_{\mu\nu} = k \left( T_{\mu\nu} - \frac{1}{2}g^{\alpha\beta}g_{\mu\nu}T_{\alpha\beta} \right). \quad (2.129)$$

Esta expresión se asemeja a la aproximación Newtoniana (2.123) ya que iguala el tensor de Ricci a una densidad representada por el tensor de energía-momento multiplicada por una constante. Considerando tal caso en un sistema Lorentziano con una métrica de Minkowski, las únicas componentes relevantes son las de índices 0. Aplicando esta condición, la expresión anterior se reduce a:

$$R_{00} = k \left( T_{00} - \frac{1}{2}\eta^{00}\eta_{00}T_{00} \right). \quad (2.130)$$

Los elementos métricos se reducen a 1 y el elemento  $T_{00}$  del tensor energía-momento, corresponde a la densidad de masa  $\rho$ , reduciendo todo a,

$$R_{00} = \frac{1}{2}k\rho, \quad (2.131)$$

la cual corresponde a la ecuación Newtoniana (2.120). Consecuentemente la constante  $k$  será:

$$k = 8\pi G. \quad (2.132)$$

Algunas propiedades importantes heredadas de la condición de nulidad de la divergencia de los tensores de curvatura, es la identidad de Bianchi para el tensor de Riemann, la cual establece que:

$$\nabla_\epsilon R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + \nabla_\gamma R^\alpha{}_{\beta\delta\epsilon} + \nabla_\delta R^\alpha{}_{\beta\epsilon\gamma} = 0. \quad (2.133)$$

Para demostrar esta identidad, se desarrolla la derivada covariante de cada tensor de Riemann, retornando:

$$\nabla_\epsilon R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\epsilon R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\lambda} R^\lambda{}_{\beta\gamma\delta} - \Gamma^\lambda{}_{\epsilon\beta} R^\alpha{}_{\lambda\gamma\delta} - \Gamma^\lambda{}_{\epsilon\gamma} R^\alpha{}_{\beta\lambda\delta} - \Gamma^\lambda{}_{\epsilon\delta} R^\alpha{}_{\beta\gamma\lambda} \quad (2.134)$$

$$\nabla_\gamma R^\alpha{}_{\beta\delta\epsilon} = \partial_\gamma R^\alpha{}_{\beta\delta\epsilon} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\lambda} R^\lambda{}_{\beta\delta\epsilon} - \Gamma^\lambda{}_{\gamma\beta} R^\alpha{}_{\lambda\delta\epsilon} - \Gamma^\lambda{}_{\gamma\delta} R^\alpha{}_{\beta\lambda\epsilon} - \Gamma^\lambda{}_{\gamma\epsilon} R^\alpha{}_{\beta\delta\lambda} \quad (2.135)$$

$$\nabla_\delta R^\alpha{}_{\beta\epsilon\gamma} = \partial_\delta R^\alpha{}_{\beta\epsilon\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\delta\lambda} R^\lambda{}_{\beta\epsilon\gamma} - \Gamma^\lambda{}_{\delta\beta} R^\alpha{}_{\lambda\epsilon\gamma} - \Gamma^\lambda{}_{\delta\epsilon} R^\alpha{}_{\beta\lambda\gamma} - \Gamma^\lambda{}_{\delta\gamma} R^\alpha{}_{\beta\epsilon\lambda} \quad (2.136)$$

Aplicando las simetrías de los índices del tensor y sumando algunos elementos entre sí, la suma de estos tres queda como:

$$\begin{aligned} \nabla_\epsilon R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + \nabla_\gamma R^\alpha{}_{\beta\delta\epsilon} + \nabla_\delta R^\alpha{}_{\beta\epsilon\gamma} &= \partial_\epsilon R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\lambda} R^\lambda{}_{\beta\gamma\delta} - \Gamma^\lambda{}_{\epsilon\beta} R^\alpha{}_{\lambda\gamma\delta} - \Gamma^\lambda{}_{\epsilon\gamma} R^\alpha{}_{\beta\lambda\delta} - \Gamma^\lambda{}_{\epsilon\delta} R^\alpha{}_{\beta\gamma\lambda} + \dots \\ &\dots + \partial_\gamma R^\alpha{}_{\beta\delta\epsilon} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\lambda} R^\lambda{}_{\beta\delta\epsilon} - \Gamma^\lambda{}_{\gamma\beta} R^\alpha{}_{\lambda\delta\epsilon} + \partial_\delta R^\alpha{}_{\beta\epsilon\gamma} + \Gamma^\alpha{}_{\delta\lambda} R^\lambda{}_{\beta\epsilon\gamma} - \Gamma^\lambda{}_{\delta\beta} R^\alpha{}_{\lambda\epsilon\gamma} - \Gamma^\lambda{}_{\delta\gamma} R^\alpha{}_{\beta\epsilon\lambda}. \end{aligned}$$

Desarrollando los tensores de Riemann que están dentro de las derivadas parciales y cancelando los términos posibles entre sí, se obtiene,

$$\begin{aligned} \nabla_\epsilon R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + \nabla_\gamma R^\alpha{}_{\beta\delta\epsilon} + \nabla_\delta R^\alpha{}_{\beta\epsilon\gamma} &= (\partial_\epsilon \Gamma^\alpha{}_{\gamma\mu}) \Gamma^\mu{}_{\beta\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\mu} (\partial_\epsilon \Gamma^\mu{}_{\beta\delta}) - (\partial_\epsilon \Gamma^\alpha{}_{\delta\mu}) \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} - \dots \\ &\dots - \Gamma^\alpha{}_{\delta\mu} (\partial_\epsilon \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}) + (\partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\mu}) \Gamma^\mu{}_{\beta\epsilon} + \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\mu} (\partial_\delta \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}) - (\partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\gamma\mu}) \Gamma^\mu{}_{\beta\epsilon} - \Gamma^\alpha{}_{\gamma\mu} (\partial_\delta \Gamma^\mu{}_{\beta\epsilon}) + \dots \\ &\dots + (\partial_\gamma \Gamma^\alpha{}_{\delta\mu}) \Gamma^\mu{}_{\beta\epsilon} + \Gamma^\alpha{}_{\delta\mu} (\partial_\gamma \Gamma^\mu{}_{\beta\epsilon}) - (\partial_\gamma \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\mu}) \Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\mu} (\partial_\gamma \Gamma^\mu{}_{\beta\delta}) + \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\lambda} R^\lambda{}_{\beta\gamma\delta} - \dots \\ &\dots - \Gamma^\lambda{}_{\epsilon\beta} R^\alpha{}_{\lambda\gamma\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\lambda} R^\lambda{}_{\beta\delta\epsilon} - \Gamma^\lambda{}_{\gamma\beta} R^\alpha{}_{\lambda\delta\epsilon} + \Gamma^\alpha{}_{\delta\lambda} R^\lambda{}_{\beta\epsilon\gamma} - \Gamma^\lambda{}_{\delta\beta} R^\alpha{}_{\lambda\epsilon\gamma}. \end{aligned}$$

Finalmente, se desarrollan los tensores de Riemann multiplicados por los símbolos de Christoffel retornando:

$$\begin{aligned} \nabla_\epsilon R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} + \nabla_\gamma R^\alpha{}_{\beta\delta\epsilon} + \nabla_\delta R^\alpha{}_{\beta\epsilon\gamma} &= (\partial_\epsilon \Gamma^\alpha{}_{\gamma\mu}) \Gamma^\mu{}_{\beta\delta} + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\mu} (\partial_\epsilon \Gamma^\mu{}_{\beta\delta}) - (\partial_\epsilon \Gamma^\alpha{}_{\delta\mu}) \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} - \dots \\ &\dots - \Gamma^\alpha{}_{\delta\mu} (\partial_\epsilon \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}) + (\partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\mu}) \Gamma^\mu{}_{\beta\epsilon} + \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\mu} (\partial_\delta \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma}) - (\partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\gamma\mu}) \Gamma^\mu{}_{\beta\epsilon} - \Gamma^\alpha{}_{\gamma\mu} (\partial_\delta \Gamma^\mu{}_{\beta\epsilon}) + \dots \\ &\dots + (\partial_\gamma \Gamma^\alpha{}_{\delta\mu}) \Gamma^\mu{}_{\beta\epsilon} + \Gamma^\alpha{}_{\delta\mu} (\partial_\gamma \Gamma^\mu{}_{\beta\epsilon}) - (\partial_\gamma \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\mu}) \Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\mu} (\partial_\gamma \Gamma^\mu{}_{\beta\delta}) + \dots \\ &\dots + \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\lambda} (\partial_\gamma \Gamma^\lambda{}_{\beta\delta}) - \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\lambda} (\partial_\delta \Gamma^\lambda{}_{\beta\gamma}) + \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\gamma\mu} \Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\delta\mu} \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} - \dots \\ &\dots - \Gamma^\lambda{}_{\epsilon\beta} (\partial_\gamma \Gamma^\alpha{}_{\lambda\delta}) + \Gamma^\lambda{}_{\epsilon\beta} (\partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\lambda\gamma}) - \Gamma^\lambda{}_{\epsilon\beta} \Gamma^\alpha{}_{\gamma\mu} \Gamma^\mu{}_{\lambda\delta} + \Gamma^\lambda{}_{\epsilon\beta} \Gamma^\alpha{}_{\delta\mu} \Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma} + \dots \\ &\dots + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\lambda} (\partial_\delta \Gamma^\lambda{}_{\beta\epsilon}) - \Gamma^\alpha{}_{\gamma\lambda} (\partial_\epsilon \Gamma^\lambda{}_{\beta\delta}) + \Gamma^\alpha{}_{\gamma\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\delta\mu} \Gamma^\mu{}_{\beta\epsilon} - \Gamma^\alpha{}_{\gamma\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\epsilon\mu} \Gamma^\mu{}_{\beta\delta} - \dots \\ &\dots - \Gamma^\lambda{}_{\gamma\beta} (\partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\lambda\epsilon}) + \Gamma^\lambda{}_{\gamma\beta} (\partial_\epsilon \Gamma^\alpha{}_{\lambda\delta}) - \Gamma^\lambda{}_{\gamma\beta} \Gamma^\alpha{}_{\delta\mu} \Gamma^\mu{}_{\lambda\epsilon} + \Gamma^\lambda{}_{\gamma\beta} \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\mu} \Gamma^\mu{}_{\lambda\delta} + \dots \\ &\dots + \Gamma^\alpha{}_{\delta\lambda} (\partial_\epsilon \Gamma^\lambda{}_{\beta\gamma}) - \Gamma^\alpha{}_{\delta\lambda} (\partial_\gamma \Gamma^\lambda{}_{\beta\epsilon}) + \Gamma^\alpha{}_{\delta\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\epsilon\mu} \Gamma^\mu{}_{\beta\gamma} - \Gamma^\alpha{}_{\delta\lambda} \Gamma^\lambda{}_{\gamma\mu} \Gamma^\mu{}_{\beta\epsilon} - \dots \\ &\dots - \Gamma^\lambda{}_{\delta\beta} (\partial_\epsilon \Gamma^\alpha{}_{\lambda\gamma}) + \Gamma^\lambda{}_{\delta\beta} (\partial_\gamma \Gamma^\alpha{}_{\lambda\epsilon}) - \Gamma^\lambda{}_{\delta\beta} \Gamma^\alpha{}_{\epsilon\mu} \Gamma^\mu{}_{\lambda\gamma} + \Gamma^\lambda{}_{\delta\beta} \Gamma^\alpha{}_{\gamma\mu} \Gamma^\mu{}_{\lambda\epsilon} = 0. \end{aligned}$$

Todos los elementos se cancelan entre sí.

Desde esta identidad es posible obtener el tensor de Einstein  $G_{\alpha\beta}$  al contraer los índices del primer tensor para obtener al tensor de Ricci, quedando,

$$\nabla_\epsilon R^\lambda{}_{\beta\lambda\delta} + \nabla_\lambda R^\lambda{}_{\beta\delta\epsilon} + \nabla_\delta R^\lambda{}_{\beta\epsilon\lambda} = 0. \quad (2.137)$$

Utilizando la simetría de índices, el último término se simplifica a:

$$\nabla_\epsilon R^\lambda{}_{\beta\lambda\delta} + \nabla_\lambda R^\lambda{}_{\beta\delta\epsilon} - \nabla_\delta R^\lambda{}_{\beta\lambda\epsilon} = 0. \quad (2.138)$$

Multiplicar esta expresión por el tensor métrico  $g^{\delta\beta}$  para obtener el escalar de curvatura, aprovechando la propiedad  $\nabla_\mu g_{\alpha\beta} = 0$ , retorna:

$$\nabla_\epsilon R + \nabla_\lambda (g^{\beta\delta} R^\lambda{}_{\beta\delta\epsilon}) - \nabla_\delta R^\delta{}_\epsilon = 0. \quad (2.139)$$

Para el segundo término, se utiliza la simetría de los primeros dos índices del tensor,

$$\nabla_\lambda(-g^{\beta\delta}g^{\lambda\gamma}R_{\beta\gamma\delta\epsilon}) = \nabla_\lambda(-g^{\lambda\gamma}R^\delta_{\gamma\delta\epsilon}) = -\nabla_\lambda R^\lambda_{\epsilon}. \quad (2.140)$$

Reemplazando esto en la expresión anterior, queda:

$$\nabla_\epsilon R - \nabla_\lambda R^\lambda_{\epsilon} - \nabla_\delta R^\delta_{\epsilon} = 0. \quad (2.141)$$

La suma tanto en  $\lambda$  como en  $\delta$  son equivalentes para los últimos dos términos, por lo que estos son iguales. La expresión finalmente retorna:

$$\nabla_\epsilon R - 2\nabla_\alpha R^\alpha_{\epsilon} = 0. \quad (2.142)$$

Dividiendo por 2 y utilizando propiedades del tensor métrico, reduce la expresión a:

$$\frac{1}{2}\nabla^\beta(g_{\epsilon\beta}R) - \nabla^\beta(g_{\beta\alpha}R^\alpha_{\epsilon}) = \nabla^\beta\left(\frac{1}{2}g_{\epsilon\beta}R - R_{\beta\epsilon}\right) = 0, \quad (2.143)$$

de donde la última expresión, se extrae que:

$$\nabla_\beta\left(R^{\beta\epsilon} - \frac{1}{2}g^{\beta\epsilon}R\right) = 0. \quad (2.144)$$

Demostrando que la divergencia del tensor de Einstein es nula y su obtención.

## 2.3. Teoría linealizada de la gravedad

Un campo general relativista es llamado débil si existe un sistema casi Lorentziano global tal que la métrica sea dada por una perturbación de la métrica de Minkowski,

$$g_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}, \quad (2.145)$$

donde  $\eta_{\alpha\beta}$  es la métrica de Minkowski y  $h_{\alpha\beta}$  alguna perturbación tal que  $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ , se cumple. En este sentido el límite Newtoniano puede ser descrito con un campo débil si se cumplen 3 condiciones [1].

La primera condición exige que los movimientos de las fuentes de gravedad deben ser lo suficientemente lentos como para que  $|\partial_t h_{\alpha\beta}| \ll |\partial_i h_{\alpha\beta}|$  se cumpla. Los índices  $j$  o  $k$  denotan una suma sobre índices espaciales. Las fuentes de gravedad también deberán cumplir que sus movimientos sean lentos como para que  $|T^{j0}| \ll T^{00}$  se cumpla. Y como última condición se exige que los movimientos de los cuerpos sean a bajas velocidades tales que  $|u^j| \ll u^0$  se cumpla [1].

Las consecuencias de estas condiciones implican que las componentes de tensiones del tensor energía-momento serán lo suficientemente pequeñas permitiendo que  $|T^{jk}| \ll T^{00}$  se cumpla. La condición de la velocidad conlleva a que:

$$\frac{|u^j|}{u^0} \ll 1. \quad (2.146)$$

A su vez, la invarianza del módulo de la 4-velocidad implica que:

$$-(u^0)^2 + (u^j)^2 = (u^0)^2 \left(-1 + \frac{(u^j)^2}{(u^0)^2}\right) = -1. \quad (2.147)$$

Aplicando la expresión (2.146), se obtiene que:

$$-(u^0)^2 \approx -1. \quad (2.148)$$

Este resultado se reduce a que,

$$u^0 = \frac{dt}{d\tau} \approx 1, \quad (2.149)$$

se cumpla, recuperando la universalidad del tiempo Newtoniano.

La ecuación geodésica también recibe modificaciones. Esta viene dada por (2.19), desde la cual:

$$u^\alpha (\partial_\alpha u^\beta + \Gamma^\beta_{\alpha\lambda} u^\lambda) = 0. \quad (2.150)$$

La suma sobre el índice  $\alpha$  del primer elemento se divide en parte una temporal y espacial,

$$(u^0 \partial_0 + u^j \partial_j)(u^\beta) + u^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\lambda} u^\lambda = 0. \quad (2.151)$$

La universalidad del tiempo permite reescribir lo último como un operador diferencial, tal que,

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}\right)(u^\beta) + u^\alpha \Gamma^\beta_{\alpha\lambda} u^\lambda = 0. \quad (2.152)$$

Para los símbolos de Christoffel según la conexión de Levi-Civita también se ven reducidos con las condiciones de aproximación, a:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\rho} (\partial_\mu h_{\rho\nu} + \partial_\nu h_{\mu\rho} - \partial_\rho h_{\mu\nu}). \quad (2.153)$$

La métrica inversa se aproxima a la inversa de Minkowski dadas las condiciones establecidas. Las componentes de los símbolos de Christoffel están multiplicadas por los elementos de la 4-velocidad las cuales al cumplir que  $|u^j| \ll 1$  y estar multiplicadas entre sí, serán lo suficientemente pequeñas como para despreciarlas. Separando en componentes temporales y espaciales, los elementos de los símbolos retornan:

$$\Gamma^\alpha_{\mu\nu} = \Gamma^\alpha_{00} (u^0)^2 + 2\Gamma^\alpha_{0j} u^0 u^j + \Gamma^\alpha_{jk} u^j u^k. \quad (2.154)$$

El penúltimo y último término se anulan, dado a que están multiplicados con algún símbolo con elementos  $|h_{\alpha\beta}| \ll 1$ . Queda como no nulo solamente el primer elemento cuyo símbolo queda como:

$$\Gamma^\alpha_{00} = \frac{1}{2} \eta^{\alpha\rho} (\partial_0 h_{\rho 0} + \partial_0 h_{0\rho} - \partial_\rho h_{00}). \quad (2.155)$$

Las derivadas temporales de  $h_{\alpha\beta}$  son despreciables según las condiciones establecidas y consecuentemente los símbolos se reducen a:

$$\Gamma^\alpha_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\rho} \partial_\rho h_{00} \quad (2.156)$$

Aprovechando la propiedad de la diagonalidad de la métrica inversa, todo se reduce a:

$$\Gamma^\alpha_{00} = -\frac{1}{2} \eta^{\alpha\alpha} \partial_\alpha h_{00}. \quad (2.157)$$

En este límite de campo débil no es necesario considerar la ecuación geodésica temporal dado a que esta es aproximada por (2.149). Dado a que ya se conoce y es suficiente con esta aproximación, solamente son de interés las componentes espaciales de la 4-velocidad. La ecuación de movimiento será:

$$\frac{du^j}{dt} \approx \frac{1}{2} \frac{\partial h_{00}}{\partial x^j}, \quad (2.158)$$

donde se ha hecho:

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \vec{v} \cdot \vec{\nabla}. \quad (2.159)$$

La expresión (2.158) es similar a la ecuación de movimiento Newtoniana (1.14), con lo cual es posible relacionar  $h_{00}$  con  $\Phi$  tal que:

$$h_{00} = -2\Phi. \quad (2.160)$$

Por ende, la métrica en esta aproximación Newtoniana será:

$$ds^2 = -(1 + 2\Phi)dt^2 + (\delta_{jk} + h_{jk})dx^j dx^k + 2h_{0j} dt dx^j. \quad (2.161)$$

El tensor de Riemann también se ve simplificado en este límite de campo débil. En base a las condiciones establecidas, se ve reducido a,

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \partial_\gamma \Gamma^\alpha{}_{\beta\delta} - \partial_\delta \Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta}. \quad (2.162)$$

Los términos de los símbolos multiplicándose entre si se desprecian al ser las derivadas de  $h_{\alpha\beta}$  al cuadrado[4]. Desarrollando cada símbolo se tiene,

$$\Gamma^\alpha{}_{\beta\delta} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\alpha}(\partial_\beta h_{\alpha\delta} + \partial_\delta h_{\beta\alpha} - \partial_\alpha h_{\beta\delta}), \quad (2.163)$$

$$\Gamma^\alpha{}_{\gamma\beta} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\alpha}(\partial_\gamma h_{\alpha\beta} + \partial_\beta h_{\gamma\alpha} - \partial_\alpha h_{\gamma\beta}). \quad (2.164)$$

Se han aplicado las propiedades de los índices del tensor métrico inverso, dejando todo en función de un mismo índice  $\alpha$ , el cual es fijo en este caso. Reemplazando en el tensor de Riemann, queda:

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\alpha}(\partial_\gamma \partial_\beta h_{\alpha\delta} + \partial_\gamma \partial_\delta h_{\beta\alpha} - \partial_\gamma \partial_\alpha h_{\beta\delta} - \partial_\delta \partial_\gamma h_{\alpha\beta} - \partial_\delta \partial_\beta h_{\gamma\alpha} + \partial_\delta \partial_\alpha h_{\gamma\beta}), \quad (2.165)$$

desde la cual, el segundo y cuarto términos se cancelan entre sí dejando,

$$R^\alpha{}_{\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}\eta^{\alpha\alpha}(\partial_\gamma \partial_\beta h_{\alpha\delta} - \partial_\gamma \partial_\alpha h_{\beta\delta} - \partial_\delta \partial_\beta h_{\gamma\alpha} + \partial_\delta \partial_\alpha h_{\gamma\beta}), \quad (2.166)$$

o equivalentemente,

$$R_{\alpha\beta\gamma\delta} = \frac{1}{2}(\partial_\gamma \partial_\beta h_{\alpha\delta} - \partial_\gamma \partial_\alpha h_{\beta\delta} - \partial_\delta \partial_\beta h_{\gamma\alpha} + \partial_\delta \partial_\alpha h_{\gamma\beta}). \quad (2.167)$$

Utilizando esta expresión anterior es posible determinar el tensor de marea según la aproximación Newtoniana dada por (2.44). Realizando la contracción temporal retorna:

$$R_{0\beta 0\delta} = \frac{1}{2}(\partial_0 \partial_\beta h_{0\delta} + \partial_\delta \partial_0 h_{0\beta} - \partial_0 \partial_0 h_{\beta\delta} - \partial_\delta \partial_\beta h_{00}). \quad (2.168)$$

Los primeros 3 términos se pueden despreciar dado a que contienen la derivada temporal de  $h_{\alpha\beta}$ . De la misma forma, al sumar sobre los índices  $\beta$  y  $\delta$  se anularán los términos temporales, dejando componentes espaciales, reduciendo el tensor de Riemann a:

$$R_{0j0k} = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial x^j} \left( \frac{\partial h_{00}}{\partial x^k} \right). \quad (2.169)$$

Según la relación (2.160), esta ecuación queda como:

$$R_{0j0k} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^j \partial x^k} = \mathcal{E}_{jk}, \quad (2.170)$$

recuperando la ecuación de fuerzas de marea Newtoniana.

Esta es la teoría linealizada de la gravedad; al realizar una perturbación de una métrica Minkowskiana de orden lineal, permite describir la gravedad Newtoniana de forma aproximadamente relativista. Existen diversos sistemas universales que pueden modelarse utilizando esta teoría dotados de un campo débil.

Es posible tomar este modelo de campo débil e ir removiendo condiciones para modelar situaciones más reales, como haces de partículas relativistas o campos electromagnéticos. Al ser esta formulada como una perturbación lineal sobre un sistema global Lorentziano, conforma una alternativa a una teoría de campo en un espacio-tiempo plano [1].

Al levantar las condiciones de bajas velocidades sin alterar las perturbaciones débiles de  $h_{\alpha\beta}$ , el tensor de Riemann seguirá siendo dado por (2.166). La contracción para el tensor de Ricci, devuelve:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda{}_{\mu\lambda\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda \partial_\mu h^\lambda{}_\nu + \partial_\nu \partial_\lambda h^\lambda{}_\mu - \partial^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h^\lambda{}_\lambda). \quad (2.171)$$

A partir de este resultado, el escalar de curvatura es,

$$R = \frac{1}{2}(\partial_\lambda \partial_\mu h^{\lambda\mu} + \partial_\lambda \partial_\mu h^{\lambda\mu} - \partial^\lambda \partial_\lambda h^\mu{}_\mu - \partial^\mu \partial_\mu h^\lambda{}_\lambda) = \partial_\lambda \partial_\mu h^{\lambda\mu} - \partial^\lambda \partial_\lambda h, \quad (2.172)$$

donde  $h = h^\lambda{}_\lambda$ . Consecuentemente el tensor de Einstein es dado por:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}(\partial_\lambda \partial_\mu h^\lambda{}_\nu + \partial_\nu \partial_\lambda h^\lambda{}_\mu - \partial^\lambda \partial_\lambda h_{\mu\nu} - \partial_\mu \partial_\nu h - \eta_{\mu\nu}(\partial_\lambda \partial_\mu h^{\lambda\mu} - \partial^\lambda \partial_\lambda h)). \quad (2.173)$$

Esta expresión da paso a las ecuaciones de Einstein para un campo débil. Este tensor se puede simplificar realizando el cambio de variable[1][4]:

$$\bar{h}_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}h. \quad (2.174)$$

Contraer este tensor retorna:

$$\bar{h} = \bar{h}_{\alpha\beta}\eta^{\alpha\beta} = h - \frac{4}{2}h = -h. \quad (2.175)$$

Despejando  $h_{\alpha\beta}$  queda,

$$h_{\alpha\beta} = \bar{h}_{\alpha\beta} - \frac{1}{2}\eta_{\alpha\beta}\bar{h}, \quad (2.176)$$

y reemplazando esta en la expresión del tensor de Einstein, da:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} \left( \partial_\nu \partial^\lambda \bar{h}_{\mu\alpha} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\lambda} \partial_\nu \partial^\lambda \bar{h} + \partial_\mu \partial^\lambda \bar{h}_{\nu\lambda} - \frac{1}{2}\eta_{\nu\lambda} \partial_\mu \partial^\lambda \bar{h} - \partial^\lambda \partial_\lambda \bar{h}_{\mu\nu} + \dots \right. \\ \left. \dots + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda \bar{h} + \partial_\mu \partial_\nu \bar{h} - \eta_{\mu\nu} \partial^\lambda \partial^\beta \bar{h}_{\lambda\beta} + \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial_\beta \bar{h} - \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda \bar{h} \right).$$

Esta expresión se reduce cancelando términos entre sí, resultando en,

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial^\lambda \bar{h}_{\mu\lambda} + \partial_\mu \partial^\lambda \bar{h}_{\nu\lambda} - \partial_\lambda \partial^\lambda \bar{h}_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\lambda \partial^\beta \bar{h}_{\lambda\beta}), \quad (2.177)$$

simplificando la ecuación de Einstein para la aproximación de campo débil.

Desde (2.177) se realiza la transformación de coordenadas a un sistema  $x'^\alpha$ , tal que[1][4],

$$x'^\alpha = x^\alpha + \xi^\alpha, \quad (2.178)$$

con  $\xi^\alpha$ , un desplazamiento vectorial infinitesimal. Dada una relación de transformación entre sistemas de coordenadas, el elemento de transformación  $T^{\mu'}{}_\nu$  es dado por [2]:

$$T^\mu{}_\beta = \frac{\partial x'^\mu}{\partial x^\beta}. \quad (2.179)$$

Por ende, la expresión (2.178) tiene como transformación:

$$\frac{\partial x'^\alpha}{\partial x^\beta} = \delta^\alpha{}_\beta + \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x^\beta}. \quad (2.180)$$

Igualmente, la transformación inversa es dada por:

$$x^\alpha = x'^\alpha - \xi^\alpha, \quad (2.181)$$

y:

$$\frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\beta} = \delta^\alpha{}_\beta - \frac{\partial \xi^\alpha}{\partial x'^\beta}. \quad (2.182)$$

Transformando la métrica  $g_{\alpha\beta}$ , retorna:

$$g'_{\alpha\beta} = (\delta^\alpha_\alpha - \partial_\alpha \xi^\alpha) (\delta^\beta_\beta - \partial_\beta \xi^\beta) (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}) = (\delta^\alpha_\alpha \delta^\beta_\beta - \delta^\beta_\beta \partial_\alpha \xi^\alpha - \delta^\alpha_\alpha \partial_\beta \xi^\beta) (\eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta}). \quad (2.183)$$

Dado a que  $\xi^\alpha$ , es un desplazamiento vectorial infinitesimal, cumplirá que  $|\partial_\mu \xi^\alpha| \ll 1$ , por lo que términos de orden cuadrático de estos términos se desprecian. Igualmente al multiplicarse estos términos con  $h_{\alpha\beta}$ , también serán despreciables. El desarrollo retorna,

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha. \quad (2.184)$$

La métrica  $g'_{\alpha\beta}$  al ser equivalente a  $g_{\alpha\beta}$  transformada, se puede expresar como la métrica de Minkowski más alguna perturbación  $h'_{\alpha\beta}$ , tal que:

$$g'_{\alpha\beta} = \eta_{\alpha\beta} + h'_{\alpha\beta}. \quad (2.185)$$

Esta expresión junto con (2.184), implican que la transformación de la perturbación es:

$$h'_{\alpha\beta} = h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha. \quad (2.186)$$

Esta transformación en la teoría linealizada de la gravedad es el equivalente a una transformación de Gauge[4]. Ésta no afecta al tensor de Riemann resultante pero sí a las perturbaciones  $h_{\alpha\beta}$  y a  $\bar{h}_{\alpha\beta}$  [1]. Para  $\bar{h}'_{\alpha\beta}$ , se tiene:

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = h'_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h' = h_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} (h - \eta^{\alpha\beta} \partial_\alpha \xi_\beta - \eta^{\alpha\beta} \partial_\beta \xi_\alpha), \quad (2.187)$$

que se ve reducida a:

$$\bar{h}'_{\alpha\beta} = \left( h_{\alpha\beta} - \frac{1}{2} \eta_{\alpha\beta} h \right) + (\partial_\lambda \xi^\lambda - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha) = \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial_\alpha \xi_\beta - \partial_\beta \xi_\alpha + \eta_{\alpha\beta} \partial_\lambda \xi^\lambda. \quad (2.188)$$

Reemplazando en (2.177), queda:

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial^\lambda (\bar{h}'_{\mu\lambda} + \partial_\mu \xi_\lambda + \partial_\lambda \xi_\mu - \eta_{\mu\lambda} \partial_\alpha \xi^\alpha) + \partial_\mu \partial^\lambda (\bar{h}'_{\nu\lambda} + \partial_\nu \xi_\lambda + \partial_\lambda \xi_\nu - \eta_{\nu\lambda} \partial_\alpha \xi^\alpha) - \dots \\ & \dots - \partial_\lambda \partial^\lambda (\bar{h}'_{\mu\nu} + \partial_\mu \xi_\nu + \partial_\nu \xi_\mu - \eta_{\mu\nu} \partial_\alpha \xi^\alpha) - \eta_{\mu\nu} \partial^\lambda \partial^\beta (\bar{h}'_{\lambda\beta} + \partial_\lambda \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\lambda - \eta_{\lambda\beta} \partial_\alpha \xi^\alpha)), \end{aligned}$$

o expresado de otra forma,

$$\begin{aligned} G_{\mu\nu} = & \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial^\lambda \bar{h}'_{\mu\lambda} + \partial_\mu \partial^\lambda \bar{h}'_{\nu\lambda} - \partial_\lambda \partial^\lambda \bar{h}'_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\lambda \partial^\beta \bar{h}'_{\lambda\beta} + 2\partial_\mu \partial_\nu (\partial_\alpha \xi^\alpha) - 2\partial_\mu \partial_\nu (\partial_\alpha \xi^\alpha) + \dots \\ & \dots + \eta_{\mu\nu} \partial_\lambda \partial^\lambda (\partial_\alpha \xi^\alpha) - \eta_{\mu\nu} \partial^\lambda \partial^\beta (\partial_\lambda \xi_\beta + \partial_\beta \xi_\lambda - \eta_{\lambda\beta} \partial_\alpha \xi^\alpha)), \end{aligned}$$

de los cuales, hay términos que se cancelan o se añaden entre sí. Esto finalmente reduce el tensor de Einstein a:

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2} (\partial_\nu \partial^\lambda \bar{h}'_{\mu\lambda} + \partial_\mu \partial^\lambda \bar{h}'_{\nu\lambda} - \partial_\lambda \partial^\lambda \bar{h}'_{\mu\nu} - \eta_{\mu\nu} \partial^\lambda \partial^\beta \bar{h}'_{\lambda\beta}). \quad (2.189)$$

Esta transformación de Gauge modifica al tensor de Einstein quedando igual que (2.177) pero en términos de  $\bar{h}'_{\alpha\beta}$ . Sin embargo, es posible exigir a esta transformación que cumpla que [4]:

$$\partial^\beta \bar{h}'_{\alpha\beta} = 0, \quad (2.190)$$

desde lo cual, desarrollando con (2.188) se obtiene:

$$\partial^\beta \bar{h}'_{\alpha\beta} = \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial^\beta \partial_\alpha \xi_\beta - \partial^\beta \partial_\beta \xi_\alpha + \partial_\alpha \partial_\lambda \xi^\lambda = \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta} - \partial^\beta \partial_\beta \xi_\alpha = 0, \quad (2.191)$$

reducción dada al sumar sobre los índices  $\beta$  y  $\lambda$ . Esto se traduce en una condición de Gauge más específica,

$$\partial^\lambda \partial_\lambda \xi_\alpha = \partial^\beta \bar{h}_{\alpha\beta}. \quad (2.192)$$

Al cumplirse esta condición en la forma (2.190), la ecuación (2.189) se reduce simplemente a,

$$-\frac{1}{2}\partial_\lambda\partial^\lambda\bar{h}'_{\mu\nu} = 8\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.193)$$

o bien, reemplazando las derivadas como un operador D'alembertiano,

$$\square\bar{h}'_{\mu\nu} = -16\pi T_{\mu\nu}, \quad (2.194)$$

quedando similar a una ecuación de onda.

La condición (2.190) es el Gauge de Lorenz gravitacional y por analogía con la teoría electromagnética, se sabe que la solución de (2.194) será [1]:

$$\bar{h}'_{\mu\nu}(t, \mathbf{x}) = \int \frac{4T_{\mu\nu}(t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|, \mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV_{x'}, \quad (2.195)$$

con  $t' = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$  equivalente al tiempo retardado del electromagnetismo. Este análisis demuestra que las variaciones dinámicas de la energía o el momento deben generar ondas gravitacionales que se propagan desde la fuente que las generó y a la velocidad de la luz.

## Capítulo 3

# Soluciones esféricas de las ecuaciones de Einstein

### 3.1. La métrica de Schwarzschild

Tiempo después de que Einstein publicase su ecuación de campo, la primera solución fue encontrada por Karl Schwarzschild. Esta adopta una simetría esférica con un tensor energía-momento nulo desde los cuales la métrica adopta la forma [1]:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (3.1)$$

donde  $M$  es una constante de integración. Esta métrica representa la curvatura producida en el vacío por una masa  $M$ , que también puede representar el exterior de una estrella estática o bien, un agujero negro.

Esta métrica se deduce al proponer un intervalo  $ds^2$  esférico cuya parte radial y temporal estén mediadas por funciones de  $r$ , tal que,

$$ds^2 = -A(r) dt^2 + B(r) dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2, \quad (3.2)$$

desde la cual es posible determinar los símbolos asociados a esta y consecuentemente determinar el tensor de Einstein correspondiente, con la cual una serie de ecuaciones diferenciales derivadas desde la ecuación de Einstein retornarán las funciones  $A(r)$  y  $B(r)$  reduciendo la métrica a (3.1).

Los símbolos se pueden determinar con el método geodésico. Dada una métrica  $g_{\mu\nu}$ , el Lagrangiano de alguna partícula dentro bajo esta será dado por:

$$\mathcal{L} = g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu, \quad (3.3)$$

desde el cual, el Lagrangiano será,

$$\mathcal{L} = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 + \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2(\theta) \dot{\phi}^2. \quad (3.4)$$

Las ecuaciones de Euler–Lagrange retornan:

$$\ddot{t} + \frac{2M}{r^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \dot{r}\dot{t} = 0, \quad (3.5)$$

$$\ddot{r} + \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{t}^2 - \frac{M}{r^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} \dot{r}^2 - r \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{\theta}^2 - r \sin^2(\theta) \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \dot{\phi}^2 = 0, \quad (3.6)$$

$$\ddot{\theta} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\theta} - \sin(\theta) \cos(\theta) \dot{\phi}^2 = 0, \quad (3.7)$$

$$\ddot{\phi} + \frac{2}{r} \dot{r}\dot{\phi} + 2 \cot(\theta) \dot{\theta}\dot{\phi} = 0. \quad (3.8)$$

Estas son ecuaciones geodésicas y consecuentemente deberán contener la información de los símbolos multiplicados por dos componentes de la 4-velocidad desde donde se extraen sus componentes, quedando estos como,

$$\Gamma^t_{rt} = \Gamma^t_{tr} = \frac{M}{r^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (3.9)$$

$$\Gamma^r_{tt} = \frac{M}{r^2} \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (3.10)$$

$$\Gamma^r_{rr} = -\frac{M}{r^2} \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)}, \quad (3.11)$$

$$\Gamma^r_{\theta\theta} = -r \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (3.12)$$

$$\Gamma^r_{\phi\phi} = -r \sin^2(\theta) \left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (3.13)$$

$$\Gamma^\theta_{r\theta} = \Gamma^\theta_{\theta r} = \frac{1}{r}, \quad (3.14)$$

$$\Gamma^\theta_{\phi\phi} = -\sin(\theta) \cos(\theta), \quad (3.15)$$

$$\Gamma^\phi_{r\phi} = \Gamma^\phi_{\phi r} = \frac{1}{r} \quad (3.16)$$

$$\Gamma^\phi_{\theta\phi} = \Gamma^\phi_{\phi\theta} = \cot(\theta). \quad (3.17)$$

Estos resultados se comprueban con el uso complementario del software “Maxima”. Este es capaz de realizar operaciones tensoriales en espacios curvos. Definiendo la métrica (3.1) dentro del programa y calculando los símbolos, retornó los mismos resultados que (3.9).

La figura 3.1 muestra estos resultados en “Máxima”. Las primeras líneas muestran la métrica introducida, el resto de líneas muestran los símbolos de Christoffel calculados, denotados por las siglas “mcs”. Los números 1, 2, 3 y 4 que acompañan a estos corresponden a los índices  $t$ ,  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  respectivamente. En la notación del programa el tercer número indica el índice superior del símbolo, mientras que los dos primeros denotan sus índices inferiores.

Considerando la métrica (3.1) también es posible establecer un sistema de coordenadas ortonormal dado por los vectores unitarios:

$$e_{\hat{t}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2M/r}} e_t, \quad e^{\hat{t}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2M/r}} e^t, \quad (3.18)$$

$$e_{\hat{r}} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} e_r, \quad e^{\hat{r}} = \sqrt{1 - \frac{2M}{r}} e^r, \quad (3.19)$$

$$e_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r} e_\theta, \quad e^{\hat{\theta}} = \frac{1}{r} e^\theta, \quad (3.20)$$

$$e_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r \sin(\theta)} e_\phi, \quad e^{\hat{\phi}} = \frac{1}{r \sin(\theta)} e^\phi. \quad (3.21)$$

```

(%i16) lg
;
[ 2 M      0      0      0      0 ]
[ - - 1      0      0      0      0 ]
[ r      1      2 M      0      0 ]
[ 0      1 - - 2 M      0      0 ]
[ 0      0      2      0      0 ]
[ 0      0      0      2      2 ]
[ 0      0      0      r sin(theta) ]
(%i17) christof(mcs);
mcs
1, 1, 2 = (M r - 2 M^2) / r^3
(%i18)
mcs
1, 2, 1 = M / (r^2 - 2 M r)
(%i19)
mcs
2, 2, 2 = - M / (2 r^2 - 2 M r)
(%i20)
mcs
2, 3, 3 = 1 / r
(%i21)
mcs
2, 4, 4 = 1 / r
(%i22)
mcs
3, 3, 2 = 2 M - r
(%i23)
mcs
3, 4, 4 = cos(theta) / sin(theta)
(%i24)
mcs
4, 4, 2 = (2 M - r) sin(theta)
(%i25)
mcs
4, 4, 3 = - cos(theta) sin(theta)
(%i25) done
(%i26)

```

Figura 3.1: Métrica y resultados de los símbolos de Christoffel calculados en “Máxima”.

Cambiar el índice a una forma covariante o contravariante invierte al factor de transformación entre coordenadas al despejar un vector unitario con respecto al otro. Esto implica que las transformaciones de un sistema a otro cumplen que:

$$T^{\hat{\alpha}}_{\beta} = \frac{1}{T_{\hat{\alpha}}^{\beta}}. \quad (3.22)$$

Utilizando estas transformaciones, la métrica de este nuevo espacio será:

$$g_{\hat{\mu}\hat{\nu}} = T^{\alpha}_{\hat{\mu}} T^{\beta}_{\hat{\nu}} g_{\alpha\beta}. \quad (3.23)$$

Estas transformaciones comparten la propiedad diagonal de la métrica; sus únicos elementos no nulos serán aquellos de índices iguales entre sí. Consecuentemente la nueva métrica es:

$$g_{\hat{t}\hat{t}} = (T^t_{\hat{t}})^2 g_{tt} = \frac{-1}{(1 - 2M/r)} \left(1 - \frac{2M}{r}\right) = -1, \quad (3.24)$$

$$g_{\hat{r}\hat{r}} = (T^r_{\hat{r}})^2 g_{rr} = \left(1 - \frac{2M}{r}\right) \frac{1}{1 - 2M/r} = 1, \quad (3.25)$$

$$g_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = (T^{\theta}_{\hat{\theta}})^2 g_{\theta\theta} = \frac{1}{r^2} r^2 = 1, \quad (3.26)$$

$$g_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = (T^{\phi}_{\hat{\phi}})^2 g_{\phi\phi} = \frac{1}{r^2 \sin^2(\theta)} r^2 \sin^2(\theta) = 1. \quad (3.27)$$

Esta métrica es igual a la de Minkowski, al igual que su inversa. El producto entre los vectores unitarios será dado por,

$$e^{\hat{\alpha}} e_{\hat{\beta}} = e_{\hat{\gamma}} e_{\hat{\delta}} \eta^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} = T^{\delta}_{\hat{\gamma}} T^{\sigma}_{\hat{\delta}} e_{\delta} e_{\sigma} \eta^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}}. \quad (3.28)$$

La multiplicación tensorial de los vectores unitarios  $e_{\delta}$  y  $e_{\sigma}$  conforman el tensor métrico[2]. La operación finalmente retorna:

$$e^{\hat{\alpha}} e_{\hat{\beta}} = T^{\delta}_{\hat{\gamma}} T^{\sigma}_{\hat{\delta}} g_{\delta\sigma} \eta^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} = \eta_{\hat{\gamma}\hat{\delta}} \eta^{\hat{\alpha}\hat{\gamma}} = \delta^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}}, \quad (3.29)$$

demostrando que los vectores de este sistema son ortonormales. Estas transformaciones también permiten convertir los símbolos de Christoffel y el tensor de Riemann. Cabe notar que los símbolos no transforman como un tensor dado a que no lo son. Estos transforman, según[2],

$$\Gamma^{\hat{\alpha}}_{\hat{\beta}\hat{\gamma}} = \frac{\partial x^{\hat{\alpha}}}{\partial x^{\delta}} \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\hat{\beta}}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\hat{\gamma}}} \Gamma^{\delta}_{\mu\nu} - \frac{\partial x^{\mu}}{\partial x^{\hat{\beta}}} \frac{\partial x^{\nu}}{\partial x^{\hat{\gamma}}} \frac{\partial^2 x^{\hat{\alpha}}}{\partial x^{\mu} \partial x^{\nu}}. \quad (3.30)$$

Las derivadas se pueden igualar a los elementos de transformación  $T^{\hat{\alpha}}_{\beta}$  y  $T^{\beta}_{\hat{\alpha}}$  según corresponda. Utilizando "Maxima" para realizar estas transformaciones, se obtienen:

$$\Gamma^{\hat{t}}_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{M\sqrt{1-2M/r}}{r^2-2Mr} = \frac{M}{r^2\sqrt{1-2M/r}}, \quad (3.31)$$

$$\Gamma^{\hat{r}}_{\hat{t}\hat{t}} = \frac{Mr-2M^2}{(1-2M/r)^{3/2}r^3} = \frac{M}{r^2\sqrt{1-2M/r}}, \quad (3.32)$$

$$\Gamma^{\hat{r}}_{\hat{r}\hat{r}} = \frac{M}{r^2\sqrt{1-2M/r}} - \frac{M\sqrt{1-2M/r}}{r^2-2Mr} = 0, \quad (3.33)$$

$$\Gamma^{\hat{r}}_{\hat{\theta}\hat{\theta}} = -\frac{r-2M}{r^2\sqrt{1-2M/r}} = -\frac{\sqrt{1-2M/r}}{r}, \quad (3.34)$$

$$\Gamma^{\hat{r}}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = \frac{2M-r}{r^2\sqrt{1-2M/r}} = -\frac{\sqrt{1-2M/r}}{r}, \quad (3.35)$$

$$\Gamma^{\hat{\theta}}_{\hat{r}\hat{\theta}} = \frac{\sqrt{1-2M/r}}{r}, \quad (3.36)$$

$$\Gamma^{\hat{\theta}}_{\hat{\phi}\hat{\phi}} = -\frac{\cot(\theta)}{r}, \quad (3.37)$$

$$\Gamma^{\hat{\phi}}_{\hat{r}\hat{\phi}} = \frac{\sqrt{1-2M/r}}{r}, \quad (3.38)$$

$$\Gamma^{\hat{\phi}}_{\hat{\theta}\hat{\phi}} = \frac{\cot(\theta)}{r}. \quad (3.39)$$

La figura 3.2 muestra los resultados entregados dentro del programa. Algunos de estos han sido simplificados. Utilizando el mismo programa se determinan las componentes del tensor de Riemann:

$$R_{t\hat{r}t\hat{r}} = -\frac{2M}{r^3}, \quad (3.40)$$

$$R_{t\hat{\theta}t\hat{\theta}} = \frac{Mr-2M^2}{r^2}, \quad (3.41)$$

$$R_{r\hat{\theta}r\hat{\theta}} = -\frac{M}{r-2M}, \quad (3.42)$$

$$R_{t\hat{\phi}t\hat{\phi}} = \frac{(Mr-2M^2)\sin^2(\theta)}{r^2}, \quad (3.43)$$

$$R_{r\hat{\phi}r\hat{\phi}} = -\frac{M\sin^2(\theta)}{r-2M}, \quad (3.44)$$

$$R_{\theta\hat{\phi}\theta\hat{\phi}} = 2Mr\sin^2(\theta). \quad (3.45)$$

|                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                  |                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                                       |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|
| <pre>(%i33) mcs[1,2,1]*Tdr*Tdt*Tit;       2 M       M sqrt(1 - ---)       r (%o33) -----       2       r - 2 M r (%i34) mcs[1,1,2]*Tir*Tdt*Tdt;       2       M r - 2 M       r (%o34) -----       2 M 3/2 3       (1 - ---) r       r (%i35) mcs[2,2,2]*Tir*Tdr*Tdr-1*Tdr*Tdr*diff(Tir,r);       2 M       M sqrt(1 - ---)       r (%o35) -----       M       2 M 2 2       sqrt(1 - ---) r r - 2 M r       r (%i36) ratsimp(%);       0 (%o36) -----       2 M - r       r (%i37) mcs[3,3,2]*Tdth*Tdth*Tir;       2 M - r       r (%o37) -----       2 M 2       sqrt(1 - ---) r       r</pre> | <pre>(%i39) mcs[4,4,2]*Tdph*Tdph*Tir;       2 M - r       r (%o39) -----       2 M 2       sqrt(1 - ---) r       r (%i46) mcs[2,3,3]*Tdr*Tdth*Tith;       2 M       sqrt(1 - ---)       r (%o46) -----       r       r (%i47) mcs[3,4,3];       0 (%o47) -----       0 (%i48) mcs[4,4,3]*Tdph*Tdph*Tith;       cos(theta)       r sin(theta) (%o48) -----       r sin(theta)       r (%i49) mcs[2,4,4]*Tdr*Tdph*Tiph;       2 M       sqrt(1 - ---)       r (%o49) -----       r       r (%i50) mcs[3,4,4]*Tdph*Tdth*Tiph;       cos(theta)       r sin(theta) (%o50) -----       r sin(theta)       r (%i51)  </pre> |
|--------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|

Figura 3.2: Símbolos de Christoffel transformados a la nueva base en “Maxima”.

Las componentes transformadas según esta nueva base serán (utilizando “Maxima”),

$$R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = -\frac{2M}{r^3}, \quad (3.46)$$

$$R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = \frac{Mr - 2M^2}{(1 - 2M/r)r^4} = \frac{M}{r^3}, \quad (3.47)$$

$$R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = -\frac{M(1 - 2M/r)}{r^2(r - 2M)} = -\frac{M}{r^3}, \quad (3.48)$$

$$R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = \frac{M}{r^3}, \quad (3.49)$$

$$R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = -\frac{M}{r^3}, \quad (3.50)$$

$$R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = \frac{2M}{r^3}. \quad (3.51)$$

La forma de la métrica (3.1) describe simetrías implícitas dentro de sí. Si se dejan tanto  $t$  como  $r$  constantes, la métrica se reduce a:

$$ds^2 = r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2(\theta) d\phi^2. \quad (3.52)$$

Esta corresponde a la superficie de una esfera y da a entender que la métrica de Schwarzschild posee una simetría esférica. Debido a que (3.52) representa una superficie, implica que a  $r$  y  $t$  constantes cualquier circunferencia descrita sobre esta será de  $2\pi r$  y poseerá un área de  $4\pi r^2$ . Esta descripción da a entender que la coordenada  $r$  es radial de manera que pueden ser entendidas a través de una circunferencia o una superficie. Sin embargo, no es posible asegurar que  $r$  sea la distancia propia efectiva entre el origen y la esfera descrita, dado a que el espacio está curvado en esta dirección [1].

Otra notoriedad de esta métrica ocurre a grandes distancias de  $r$ . Cuando esta tiende a valores mucho mayores que  $M$ , esta se aproxima a:

$$ds^2 \approx -dt^2 + dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (3.53)$$

Esta se aproxima a un espacio tipo Minkowski. Esto implica que la métrica es asintóticamente plana y más aún, que las coordenadas se vuelven Lorentzianas pudiendo establecer un sistema de referencia Lorentziano aquí. Estas indicaciones también llevan a entender que esta métrica es generada por un cuerpo en un universo aislado.

Es posible considerar una aproximación en serie de Taylor para un radio lo suficientemente grande como para que la gravedad sea débil y a su vez que no conforme un espacio-tiempo Lorentziano plano, en torno a la variable  $x = M/r$  para la parte radial de la métrica (3.1) y a primer orden. Realizando tal aproximación:

$$f(x) = \frac{1}{1-2x} \approx 1 + 2x, \quad (3.54)$$

desde lo cual la métrica se reduce a:

$$ds^2 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (3.55)$$

Esta posee una forma similar a la métrica de la teoría linealizada de la gravedad (2.161), desde la cual se puede establecer que:

$$\Phi = -\frac{M}{r}. \quad (3.56)$$

Esta expresión corresponde al potencial gravitatorio Newtoniano. Esto también conlleva a interpretar que  $M$  corresponde a la masa del cuerpo que genera esta curvatura [1].

Existen otras similitudes con la teoría Newtoniana. Desde esta se establecía que el período orbital de un cuerpo será [1],

$$T = 2\pi \left(\frac{r^3}{M}\right)^{1/2}, \quad (3.57)$$

en línea con los postulados de Kepler. De manera equivalente, es posible considerar una geodésica que sea equivalente a una órbita perfectamente circular. Una órbita de este tipo poseerá un radio  $r$  y un ángulo  $\theta$  constantes. Por simplicidad, ésta se describe en el plano ecuatorial a  $\theta = \pi/2$ . Las únicas componentes variables serán  $t$  y  $\phi$ , devolviendo las ecuaciones geodésicas:

$$\frac{dt}{d\tau} = 0, \quad (3.58)$$

$$\frac{d\phi}{d\tau} = 0. \quad (3.59)$$

Sin embargo, al revisar la ecuación geodésica radial se obtiene:

$$\frac{du^r}{d\tau} + \Gamma^r_{tt} (u^t)^2 + \Gamma^r_{\phi\phi} (u^\phi)^2 = 0, \quad (3.60)$$

donde es posible anular la derivada de la velocidad radial, reduciendo todo a:

$$\left(\frac{d\phi/d\tau}{dt/d\tau}\right)^2 = -\frac{\Gamma^r_{tt}}{\Gamma^r_{\phi\phi}}. \quad (3.61)$$

Reemplazando los símbolos determinados, la expresión anterior se reduce a:

$$\frac{d\phi}{d\tau} \frac{d\tau}{dt} = \frac{d\phi}{dt} = \sqrt{\frac{M}{r^3 \sin^2(\pi/2)}} = \sqrt{\frac{M}{r^3}}. \quad (3.62)$$

La cantidad de tiempo  $t$  necesario para que se cumpla una vuelta en esta órbita es dada por la integración,

$$\int_0^{2\pi} d\phi = \sqrt{\frac{M}{r^3}} \int_0^T dt, \quad (3.63)$$

desde la cual, el período de tiempo resulta en:

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{M}}, \quad (3.64)$$

igual al período orbital Newtoniano (3.57). Este resultado aplica de forma independiente a la intensidad del campo siendo este indistinguible entre la teoría relativista y Newtoniana.

Al progresar a un radio de menor tamaño donde la curvatura se vuelve más intensa y especialmente en torno a  $r \sim M$  empiezan a ocurrir ciertas notoriedades con la métrica (3.1). En cuanto se cruza desde  $r > 2M$  a  $r < 2M$ , los signos de la variable  $t$  y  $r$  se invierten en la métrica y las geodésicas tipo tiempo se vuelven tipo espacial. Esta inversión del signo presenta un problema en la interpretación conceptual de esta región. Más aún, existe una discrepancia matemática para  $r = 2M$ , conocido como radio de Schwarzschild o radio gravitacional y este representa un horizonte de eventos.

A pesar de que existe una simetría esférica para la métrica de Schwarzschild, este no siempre será el caso general y a veces se requerirán de distintas geometrías para describir otros tipos de soluciones a la ecuación de Einstein. Existen métricas que requieren de otras geometrías para su descripción, como lo es la métrica de Bertotti-Robinson consistente en un universo dotado con un campo magnético uniforme. Esta es,

$$ds^2 = Q^2(-dt^2 + \sin^2(t)dz^2 + d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (3.65)$$

Es fácil ver que la coordenada temporal es dada por  $t$  dado a que esta posee un signo negativo dentro de la métrica como se da en otros casos como (3.1) o (1.5), mientras que el resto de coordenadas serán espaciales. Si obligamos a que  $t$  y  $z$  sean constantes, el universo poseerá una simetría esférica pero si  $t$  y  $\theta$  ó  $t$  y  $\phi$  son constantes, el universo poseerá una simetría cilíndrica manteniendo el cuidado de que el valor de  $t$  permita esto. Otra diferencia significativa con las métricas ya mencionadas y con respecto a (3.65), es que esta tiende a no ser plana para ciertos valores de  $t$  y tampoco es asintóticamente plana dado a que esta siempre estará escalada por un factor  $Q^2$  para cualquier coordenada.

Consideremos que tanto  $z$  como  $\theta$  y  $\phi$  son constantes y la evolución de  $t$  sea dada por:

$$t = \frac{\tau}{Q}. \quad (3.66)$$

La ecuación geodésica de  $t$  es:

$$\frac{du^t}{d\tau} + \Gamma^t_{tt} (u^t)^2 = 0. \quad (3.67)$$

La velocidad  $u^t$  derivada desde (3.66) será  $1/Q$  y por ende su aceleración será nula, reduciendo la ecuación geodésica a:

$$\frac{1}{Q^2} \Gamma^t_{tt} = 0. \quad (3.68)$$

Esta expresa que la geodésica en  $t$  solamente es dada por (3.66) y desde la cual la 4-velocidad es dada por:

$$u^\alpha = \left( \frac{1}{Q}, 0, 0, 0 \right). \quad (3.69)$$

Esto condiciona a que, independiente de que este universo sea periódicamente curvo en función de  $t$ , la geodésica de  $t$  sea constante y sea tipo tiempo:

$$u^t u_t = (u^t)^2 g_{tt} = -\frac{1}{Q^2} Q^2 = -1. \quad (3.70)$$

Para observadores estáticos espacialmente, la geometría del universo no cambia más allá que lo descrito por la métrica. Según el resultado (2.26) la principal simetría que es posible describir para esta métrica es en la dirección de  $\phi$  por la independencia que (3.65) posee de esta variable. La geometría está condicionada para que un observador estático vea un campo eléctrico nulo y un campo magnético uniforme en la dirección  $z$ .

### 3.2. Interior estelar

Antes de proceder a determinar el comportamiento de la gravedad en presencia de materia, es necesario revisar teoremas importantes de la relatividad general. El primero es el teorema de Birkhoff, el cual asegura que la solución de Schwarzschild es la única solución con simetría esférica para la ecuación de Einstein en el vacío [1]. En términos técnicos, dado un sistema coordenado  $x'^\mu$  con una métrica  $g'_{\alpha\beta}$  dotado con una simetría esférica que no coincida con la métrica de Schwarzschild y que conformen una solución de vacío de la ecuación de Einstein, este asegura que existe una transformación de coordenadas desde  $x'^\mu$  a  $x^\nu$ , cuya métrica transformada sea aquella de Schwarzschild (3.1).

Lo anterior es aplicable a una estrella perfectamente esférica y aislada o alejada lo suficientemente de otras distribuciones de masa para poder despreciar sus efectos de alteraciones a su gravedad. Dado a que una estrella es una distribución de masa esférica, la simetría de la curvatura que provoca también lo será. Desde el teorema de Birkhoff se deduce que como la métrica que representa la gravedad afuera de la estrella (en el vacío) posee una simetría esférica heredada de aquella de la distribución de masa, entonces la solución de vacío por la curvatura generada en el exterior de una estrella será dada por la métrica de Schwarzschild. Si esta estrella posee una superficie dada por  $4\pi R^2$  y una circunferencia ecuatorial  $2\pi R$ , la superficie de ésta se ubicará en  $r = R$ .

Las partículas sobre la superficie de la estrella estarán modeladas por la métrica de Schwarzschild bajo geodésicas temporales y estáticas espacialmente en  $r = R$  con ángulos  $\theta$  y  $\phi$  fijos; su único movimiento será en la dirección temporal  $t$ . La geodésica de estas partículas es:

$$\frac{du^t}{d\tau} = 0, \quad (3.71)$$

y consecuentemente el módulo de la 4-velocidad:

$$u^\mu u_\mu = u^t u_t = - \left(1 - \frac{2M}{R}\right) (u^t)^2. \quad (3.72)$$

Para asegurar que esta geodésica sea tipo tiempo, el radio  $R$  de la superficie debe ser mayor a  $2M$  para mantener a  $g_{tt}$  negativo. Esto adicionalmente condiciona a que la mínima circunferencia posible para una estrella sea dada por  $4\pi M$ .

El sol satisface esta condición por un gran margen con un radio  $R \approx 7 \times 10^5 [km]$  y un radio de Schwarzschild  $R_s = 2,953 [km]$ [1].

Un ejemplo más ilustrativo del teorema de Birkhoff se presenta a continuación. Consideremos la métrica,

$$ds^2 = - \left( \frac{1 - M/(2\bar{r})}{1 + M/(2\bar{r})} \right)^2 dt^2 + \left( 1 + \frac{M}{2\bar{r}} \right)^4 [d\bar{r}^2 + \bar{r}^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2)], \quad (3.73)$$

correspondiente a una solución de vacío de la ecuación de Einstein. Esta solución posee una simetría esférica visible a través de los diferenciales y en consecuencia el teorema de Birkhoff asegura que existe una transformación desde esta métrica a (3.1). La transformación sugerida de forma natural por la comparación del elemento  $g_{\theta\theta}$  entre (3.73) y la métrica de Schwarzschild es:

$$r^2 = \bar{r}^2 \left( 1 + \frac{M}{2\bar{r}} \right)^4, \quad (3.74)$$

o de manera simplificada,

$$r = \bar{r} \left( 1 + \frac{M}{2\bar{r}} \right)^2. \quad (3.75)$$

Desde esta se establecen las relaciones,

$$\frac{r}{\bar{r}} = \left( 1 + \frac{M}{2\bar{r}} \right)^2, \quad (3.76)$$

$$r = \frac{(2\bar{r} + M)^2}{4\bar{r}}, \quad (3.77)$$

que serán utilizadas.

El elemento  $g_{tt}$  de (3.73) transforma como:

$$-\left(\frac{1 - M/(2\bar{r})}{1 + M/(2\bar{r})}\right)^2 = -\frac{\bar{r}}{r} \frac{(2\bar{r} - M)^2}{4\bar{r}^2}, \quad (3.78)$$

donde se ha utilizado la primera propiedad de (3.76). A continuación se desarrolla el polinomio resultante del cuadrado y se divide por el factor correspondiente:

$$-\left(\frac{1 - M/(2\bar{r})}{1 + M/(2\bar{r})}\right)^2 = -\left(\frac{\bar{r}}{r} + \frac{M^2}{4\bar{r}r} - \frac{M}{r}\right). \quad (3.79)$$

Este resultado se comienza a parecer al término temporal de la métrica de Schwarzschild. Desarrollando más aún,

$$-\left(\frac{1 - M/(2\bar{r})}{1 + M/(2\bar{r})}\right)^2 = -\left(\frac{4\bar{r}^2 + M^2}{4\bar{r}r} - \frac{M}{r}\right), \quad (3.80)$$

desde donde se completa el cuadrado del numerador, retornando:

$$-\left(\frac{1 - M/(2\bar{r})}{1 + M/(2\bar{r})}\right)^2 = -\left(\frac{(2\bar{r} + M)^2 - 4M\bar{r}}{4\bar{r}r} - \frac{M}{r}\right) = -\left(\frac{(2\bar{r} + M)^2}{4\bar{r}r} - \frac{M}{r} - \frac{M}{r}\right). \quad (3.81)$$

La segunda identidad de (3.76) indica que el término sobrante es igual a 1, reduciendo todo a:

$$-\left(\frac{1 - M/(2\bar{r})}{1 + M/(2\bar{r})}\right)^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right), \quad (3.82)$$

igual al elemento  $g_{tt}$  de la métrica (3.1).

La transformación del elemento  $g_{rr}$  debe considerar la transformación del elemento de línea  $d\bar{r}^2$ . Este se determina en base a la derivada de la transformación (3.75),

$$\frac{dr}{d\bar{r}} = \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^2 - \frac{M}{\bar{r}} \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right) = \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right) \left(1 - \frac{M}{2\bar{r}}\right), \quad (3.83)$$

desde la cual aplicando el teorema de la derivada de la función inversa, el elemento de línea transformado queda como:

$$g_{\bar{r}\bar{r}} d\bar{r}^2 = \left(1 + \frac{M}{2\bar{r}}\right)^4 \frac{1}{(1 + M/2\bar{r})^2 (1 - M/2\bar{r})^2} dr^2 = \frac{(1 + M/(2\bar{r}))^2}{(1 - M/(2\bar{r}))^2} dr^2. \quad (3.84)$$

Este resultado es el mismo que (3.82) pero invertido y con una diferencia de signo, con lo que el resultado de la transformación es,

$$g_{rr} d\bar{r}^2 = \frac{1}{\left(1 - \frac{2M}{r}\right)} dr^2, \quad (3.85)$$

igual al elemento radial de la métrica de Schwarzschild. Las transformaciones de los elementos  $g_{\theta\theta}$  y  $g_{\phi\phi}$  ya están dados por (3.75) y consecuentemente transforman al elemento de línea de Schwarzschild.

Una particularidad de utilizar la métrica (3.1) en el vacío para el exterior de una estrella, es que modificará acordeamente la medición del tiempo. Esto a su vez debe modificar la frecuencia de los fotones emitidos en la superficie acorde a como se vayan moviendo. Consideremos un átomo en la superficie de la estrella que emite un fotón a una frecuencia  $\nu_{\text{em}}$  en este sistema de referencia. Como este es un sistema localmente Lorentziano, puede ser representado con los vectores ortonormales unitarios definidos en (3.18). Como este sistema es localmente Lorentziano, admite que al emitirse el fotón, de manera instantánea su 4-momento sea dado por aquel que sería descrito en un espacio de Minkowski. La componente temporal corresponde a la energía del fotón que desde la mecánica cuántica es:

$$E = h\nu, \quad (3.86)$$

donde  $\nu$  es la frecuencia y  $h$  la constante de Planck. Equivalentemente, en unidades naturales,

$$E = 2\pi \nu. \quad (3.87)$$

El 4-momento del fotón será dado por:

$$p^\mu = (E/c, \vec{p}) = (2\pi \nu_{\text{em}}, \vec{p}). \quad (3.88)$$

De la misma forma cuando el fotón llega al infinito donde la métrica es plana, se recupera el 4-momento Lorentziano pero esta vez su componente temporal representa la energía medida según la frecuencia medida en el infinito,

$$E_\infty = h\nu_\infty = 2\pi \nu_\infty. \quad (3.89)$$

Ambas componentes temporales del 4-momento no dependen del tiempo  $t$ , ni tampoco lo hace la componente temporal de la métrica. Acorde con el resultado (2.26), esto implica que la componente temporal del 4-momento será una cantidad conservada a lo largo del movimiento del fotón. Al conservarse esta cantidad, las componentes temporales de los 4-momentos deben ser iguales entre sí. El valor  $E_{\text{em}}$  al inicio del movimiento se debe transformar desde el sistema Lorentziano local al sistema de coordenadas dado por la métrica de Schwarzschild, retornando:

$$p^t = T^t_{\hat{t}} p^{\hat{t}} = 2\pi \nu_{\text{em}} \sqrt{1 - 2M/R} = 2\pi \nu_\infty, \quad (3.90)$$

donde  $R$  es el radio desde donde se emite. Expresando esto acorde con la longitud de onda, se obtiene:

$$\frac{\lambda_{\text{em}}}{\lambda_\infty} = \sqrt{1 - 2M/R}, \quad (3.91)$$

o bien, expresando en función de la diferencia de longitudes de onda resulta en,

$$\frac{\lambda_\infty - \lambda_{\text{em}}}{\lambda_{\text{em}}} = \frac{1}{\sqrt{1 - 2GM/(rc^2)}} - 1, \quad (3.92)$$

recuperando las constantes respectivas. Esto implica que la gravedad genera un corrimiento de la frecuencia o longitudes de onda electromagnéticas emitidas.

Para la tierra, el factor de corrimiento calculado aproximadamente es,

$$\frac{\lambda_\infty}{\lambda_{\text{em}}} \approx 1 + 6,9536 \times 10^{-10}, \quad (3.93)$$

implicando que no es tan notable y casi despreciable. Para el sol, el factor calculado es:

$$\frac{\lambda_\infty}{\lambda_{\text{em}}} \approx 1 + 2,1225 \times 10^{-6}, \quad (3.94)$$

que tampoco es tan significativo como para poder medirlo. Un caso hipotético sugerido es la luz emitida por una estrella de neutrones con un radio de  $10[km]$  y una masa 1,4 veces aquella del sol. Tal estrella poseería un coeficiente de corrimiento:

$$\frac{\lambda_\infty}{\lambda_{\text{em}}} \approx 1 + 0,84, \quad (3.95)$$

mucho más notable.

Continuando con el interior estelar, para determinar la curvatura en esta región, es necesario modificar la forma de la métrica (3.1). Esta nueva métrica poseerá una simetría esférica e introducirá las variables  $\bar{t}$  y  $r$ , retornando:

$$ds^2 = g_{\bar{t}\bar{t}} d\bar{t}^2 + 2g_{\bar{t}r} d\bar{t}dr + g_{rr} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (3.96)$$

Esta métrica conserva la simetría esférica pero añade nuevos términos cruzados para la variable temporal y  $r$ , haciendo de esta un caso más general. Es posible recuperar la forma de la métrica de Schwarzschild realizando la transformación de coordenadas:

$$\bar{t} = t - \int \left( \frac{g_{\bar{t}r}}{g_{\bar{t}\bar{t}}} \right) dr, \quad (3.97)$$

desde la cual el diferencial  $d\bar{t}$  será:

$$d\bar{t} = dt - \frac{g_{\bar{t}r}}{g_{\bar{t}\bar{t}}} dr. \quad (3.98)$$

Reemplazando en la métrica propuesta (3.96), se obtiene:

$$ds^2 = g_{\bar{t}\bar{t}} \left( dt^2 + \left( \frac{g_{\bar{t}r}}{g_{\bar{t}\bar{t}}} \right)^2 dr^2 - 2 \frac{g_{\bar{t}r}}{g_{\bar{t}\bar{t}}} dt dr \right) + 2g_{\bar{t}r} \left( dt - \frac{g_{\bar{t}r}}{g_{\bar{t}\bar{t}}} dr \right) dr + \dots$$

$$\dots + g_{rr} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2),$$

que simplificando, se reduce a,

$$ds^2 = g_{\bar{t}\bar{t}} dt^2 + \left( g_{rr} - \frac{(g_{\bar{t}r})^2}{g_{\bar{t}\bar{t}}} \right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2), \quad (3.99)$$

que posee una forma equivalente a (3.1). Por conveniencia esta métrica se reescribe en función de exponenciales, reduciéndola a:

$$ds^2 = -e^{2\Phi} dt^2 + e^{2\Lambda} dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (3.100)$$

Estos nuevos coeficientes se eligen debido a que su expansión en serie de potencia retorna una métrica similar a (2.161) [1].

El último factor necesario es el tensor energía-momento asociado a una estrella. Esta se aproxima muy bien como un fluido, por lo que se utiliza el tensor de energía-momento de un fluido perfecto dado por [1]:

$$T^{\mu\nu} = \frac{1}{c^2}(\rho + P)u^\mu u^\nu + P g^{\mu\nu}. \quad (3.101)$$

Se asumirá que cada punto dentro del fluido está espacialmente estático, por lo que la única componente no nula de la 4-velocidad es la temporal.

La invarianza del módulo de la 4-velocidad retorna:

$$u^\mu u_\mu = -e^{2\Phi} (u^t)^2 = -1, \quad (3.102)$$

de lo cual se concluye que:

$$u^t = e^{-\Phi}. \quad (3.103)$$

El fluido debe acelerar con respecto a observadores inerciales, debido a que se mantiene estático en presencia de curvatura. Esta aceleración no es en las direcciones angulares  $\theta$  y  $\phi$ , y tampoco puede ser temporal por la ortonormalidad de la 4-velocidad con la 4-aceleración [1][2].

Desde la ecuación geodésica del término radial, se obtiene que:

$$a^r = \frac{du^r}{d\tau} + \Gamma^r_{tt} u^t u^t = \Gamma^r_{tt} (u^t)^2. \quad (3.104)$$

Calculando el símbolo con la conexión de Levi-Civita, queda,

$$\Gamma^r_{tt} = -\frac{1}{2} g^{rr} \partial_r g_{tt} = -e^{-2\Lambda} e^{2\Phi} \partial_r \Phi, \quad (3.105)$$

que multiplicando por la componente temporal de la 4-velocidad al cuadrado retorna:

$$a^r = -e^{-2\Lambda} \partial_r \Phi. \quad (3.106)$$

La métrica propuesta también permite establecer el sistema de vectores ortonormales:

$$e_{\hat{t}} = \exp(-\Phi) e_t, \quad (3.107)$$

$$e_{\hat{r}} = \exp(-\Lambda) e_r, \quad (3.108)$$

$$e_{\hat{\theta}} = \frac{1}{r} e_\theta, \quad (3.109)$$

$$e_{\hat{\phi}} = \frac{1}{r \sin(\theta)} e_\phi, \quad (3.110)$$

desde los cuales es posible describir el espacio tangente de cada evento del espacio-tiempo en base a estos [1]. Es posible especializar estos vectores y establecer una métrica modificada que se asemeje a aquella dada por un observador no inercial acelerado pero esto escapa de lo que aquí se puede describir. Este sistema de referencia es llamado sistema local en reposo del fluido [1]. Considerando una partícula de este fluido en este sistema de referencia ortonormal que lo observa en reposo, las componentes del tensor energía-momento nulas serán:

$$T^{\hat{t}\hat{t}} = \rho, \quad T^{\hat{r}\hat{r}} = T^{\hat{\theta}\hat{\theta}} = T^{\hat{\phi}\hat{\phi}} = P. \quad (3.111)$$

Aplicar las transformaciones de coordenadas inversas a este sistema local del fluido, retorna las componentes del tensor energía-momento en el sistema original,

$$T^{tt} = e^{-2\Phi} \rho, \quad (3.112)$$

$$T^{rr} = e^{-2\Lambda} P, \quad (3.113)$$

$$T^{\theta\theta} = \frac{P}{r^2}, \quad (3.114)$$

$$T^{\phi\phi} = \frac{P}{r^2 \sin^2(\theta)}. \quad (3.115)$$

Esto deja entrever que la ecuación de Einstein es más simple al proponerse en el sistema de coordenadas ortonormales [1].

Antes de resolver la ecuación de Einstein, es necesario imponer la conservación del tensor energía-momento de manera local tal que  $\nabla \cdot \mathbf{T} = 0$ . Esta condición se puede imponer directamente utilizando esta igualdad con las componentes (3.112), sin embargo, el problema se volvería bastante complejo por la cantidad de componentes de la derivada covariante y por las diferentes componentes que dependen de distintas variables en el tensor energía-momento en esta base. Es mejor realizar un análisis con el sistema coordinado ortonormal donde las componentes del tensor son dadas por (3.111).

La proyección de la divergencia del tensor energía-momento sobre la 4-velocidad del elemento de fluido retorna la ley de conservación de energía vista por el fluido. Considerando que el tensor es dado por (3.101), la divergencia proyectada sobre la 4-velocidad:

$$u_\alpha \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = u_\alpha \nabla_\beta [(\rho + P)u^\alpha u^\beta + P g^{\alpha\beta}] = 0. \quad (3.116)$$

Desarrollando esta expresión, se obtiene:

$$u_\alpha \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = u_\alpha [u^\alpha u^\beta \partial_\beta (\rho + P) + (\rho + P)u^\beta \nabla_\beta u^\alpha + (\rho + P)u^\alpha \nabla_\beta u^\beta + g^{\alpha\beta} \partial_\beta P]. \quad (3.117)$$

El tercer término se relaciona con el volumen, donde sabe que [1],

$$\nabla_\beta u^\beta = \frac{1}{V} \frac{dV}{d\tau}, \quad (3.118)$$

se cumple. Esta expresión se deriva de la ley de conservación de masa en reposo[1]. Con ello, la expresión (3.117) se torna,

$$u_\alpha \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = u_\alpha \left[ u^\alpha u^\beta \partial_\beta (\rho + P) + (\rho + P)a^\alpha + (\rho + P)u^\alpha \left( \frac{1}{V} \frac{dV}{d\tau} \right) + g^{\alpha\beta} \partial_\beta P \right], \quad (3.119)$$

donde  $a^\alpha$  denota la 4-aceleración. Realizando la multiplicación por la componente de la 4-velocidad  $u_\alpha$ , reduce la expresión a:

$$u_\alpha \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = -u^\beta \partial_\beta (\rho + P) - (\rho + P) \left( \frac{1}{V} \frac{dV}{d\tau} \right) + u^\beta \partial_\beta P = -u^\beta \partial_\beta \rho - (\rho + P) \left( \frac{1}{V} \frac{dV}{d\tau} \right). \quad (3.120)$$

La 4-aceleración se anula debido a que es ortogonal a la 4-velocidad. Esta última expresión se reduce aún más aplicando la regla de la cadena de manera inversa para  $u^\beta$  y la derivada parcial en este índice, tal que,

$$\frac{dx^\beta}{d\tau} \frac{\partial \rho}{\partial x^\beta} = \frac{d\rho}{d\tau}, \quad (3.121)$$

con lo cual (3.120) se simplifica a:

$$u_\alpha \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = -\frac{d\rho}{d\tau} - (\rho + P) \left( \frac{1}{V} \frac{dV}{d\tau} \right) = 0. \quad (3.122)$$

Realizando una manipulación algebraica se obtiene la ley de conservación de la energía para el elemento de fluido,

$$\frac{d(\rho V)}{d\tau} = -P \frac{dV}{d\tau}. \quad (3.123)$$

Por otro lado, la parte espacial de la divergencia del tensor puede ser escrita a través de la proyección de esta con el uso de un proyector  $P^{\alpha\beta} = g^{\alpha\beta} + u^\alpha u^\beta$ . Este proyecta la divergencia a una 3-superficie de simultaneidad del elemento de fluido[1]. Esto significa que se proyecta la divergencia sobre las componentes espaciales ortogonales a la componente temporal de la 4-velocidad del elemento de fluido. Realizando tal proyección, entrega:

$$P_{\mu\alpha} \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = (g_{\mu\alpha} + u_\mu u_\alpha) [u^\alpha u^\beta \partial_\beta (\rho + P) + (\rho + P) a^\alpha + (\rho + P) u^\alpha \nabla_\beta u^\beta + g^{\alpha\beta} \partial_\beta P], \quad (3.124)$$

que desarrollando el producto extiende la expresión a,

$$\begin{aligned} P_{\mu\alpha} \nabla_\beta T^{\alpha\beta} &= u_\mu u^\beta \partial_\beta (\rho + P) - u_\mu u^\beta \partial_\beta (\rho + P) + a_\mu (\rho + P) + \dots \\ &\dots + u_\mu (\rho + P) \nabla_\beta u^\beta - u_\mu (\rho + P) \nabla_\beta u^\beta + \delta_\mu^\beta \partial_\beta P + u_\mu u^\beta \partial_\beta P. \end{aligned}$$

Varios términos se anulan entre sí, retornando finalmente:

$$P_{\mu\alpha} \nabla_\beta T^{\alpha\beta} = a_\mu (\rho + P) + \delta_\mu^\beta \partial_\beta P + u_\mu u^\beta \partial_\beta P = 0. \quad (3.125)$$

Expresado en una forma simplificada, esta ecuación queda como,

$$a_\mu (\rho + P) = -P_{\mu}^\beta \partial_\beta P. \quad (3.126)$$

Si consideramos el caso Newtoniano para esta ecuación donde la 4-aceleración es dada por la aceleración de gravedad, se recupera la ecuación de presión hidrostática,

$$\nabla P = (\rho + P) \vec{g}, \quad (3.127)$$

a excepción de la presencia de una presión  $P$  adicional en el lado derecho de la ecuación. A pesar de este término, esta presión en los océanos de la tierra son del orden de  $P \lesssim 10^{-12} [g/cm^3][1]$  por lo que son despreciables.

Considerando el sistema de referencia inercial del fluido estelar, la aceleración será dada por (3.106). Dada la simetría de la estrella, su presión solamente variará radialmente por lo que la ecuación (3.126) será netamente de componentes radiales, retornando:

$$-g_{rr} a^r (\rho + P) = (\delta_\mu^r + u_\mu u^r) \partial_r P. \quad (3.128)$$

La 4-velocidad solamente tiene una componente temporal, anulando el segundo término del lado derecho de la ecuación. Reemplazando con los términos de la 4-aceleración, se obtiene:

$$-e^{2\Lambda} e^{-2\Lambda} \partial_r \Phi (\rho + P) = \partial_r P, \quad (3.129)$$

de lo cual finalmente se reduce a:

$$-(\rho + P) \frac{d\Phi}{dr} = \frac{dP}{dr}, \quad (3.130)$$

siendo esta una ecuación de balance de fuerzas hidrostáticas para la estrella.

Las componentes del tensor de Einstein requieren de un desarrollo largo y extenso por lo que solamente se presentarán sus resultados relevantes. Estas componentes se reducen en los cuatro elementos no nulos  $G^{\hat{t}\hat{t}}$ ,

$G^{\hat{r}\hat{r}}$  y  $G^{\hat{\theta}\hat{\theta}} = G^{\hat{\phi}\hat{\phi}}$ . Esta última igualdad reduce la cantidad de ecuaciones a tres. La divergencia del tensor de Einstein suprime una ecuación adicional al ser esta igual a la ecuación de equilibrio hidrostático (3.130). Las ecuaciones dadas por el tensor de Einstein relevantes serán entonces,

$$G^{\hat{t}\hat{t}} = \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} (r (1 - e^{-2\Lambda})) = 8\pi\rho, \quad (3.131)$$

$$G^{\hat{r}\hat{r}} = -\frac{1}{r^2} (1 - e^{-2\Lambda}) + \frac{2}{r} e^{-2\Lambda} \frac{d\Phi}{dr} = 8\pi P. \quad (3.132)$$

Estas ecuaciones se han comprobado a través del programa “Maxima”. Por simplicidad, se renombra parte de la expresión tal que,

$$e^{2\Lambda} = \frac{1}{1 - 2m/r}. \quad (3.133)$$

Esta expresión se deduce de integrar la primera ecuación de Einstein,

$$r (1 - e^{-2\Lambda}) = 2 \int 4\pi r^2 \rho \, dr. \quad (3.134)$$

Esta integral se asemeja a integrar la densidad  $\rho$  sobre un elemento de volumen esférico dado a que hay presente un factor  $4\pi$  igual a un ángulo sólido para una densidad radial sin variaciones en  $\theta$  y  $\phi$  como se espera en una simetría esférica ideal. Es por ende que esta integral equivale a una función de masa de fluido encerrado en un radio  $r$ , de donde surge la relación,

$$m(r) = 4\pi \int_0^r \rho r'^2 \, dr', \quad (3.135)$$

o equivalentemente,

$$\frac{dm}{dr} = 4\pi\rho r^2. \quad (3.136)$$

Reemplazando en la ecuación (3.134), queda:

$$r (1 - e^{-2\Lambda}) = 2m, \quad (3.137)$$

de la cual despejando  $e^{2\Lambda}$  se obtiene (3.133).

Para la ecuación radial no es necesario integrar, tras una manipulación algebraica y reemplazando con la ecuación (3.133), esta se reduce a:

$$\frac{d\Phi}{dr} = \frac{4\pi r^3 P + m}{r(r - 2m)}. \quad (3.138)$$

Uniendo esta última con la ecuación de balance hidrostático (3.130), se obtiene:

$$\frac{dP}{dr} = -\frac{(\rho + P)(m + 4\pi r^3 P)}{r(r - 2m)}. \quad (3.139)$$

Esta es la ecuación de Tolman–Oppenheimer–Volkoff.

Las ecuaciones (3.136), (3.138) y (3.139) conforman ecuaciones de estado relativistas para la estructura estelar y juntas permiten determinar  $P$ ,  $\Phi$ ,  $\rho$  y  $m$ . Es posible establecer condiciones iniciales para estas exigiendo que a  $r = 0$  la masa  $m$  de la estrella sea nula, que la presión en la superficie de la estrella sea nula y que el coeficiente de la métrica  $e^{2\Lambda}$  sea continuo en la superficie de la estrella  $r = R$ , tal que,

$$m(r) = \int_0^r 4\pi r'^2 \rho \, dr', \quad (3.140)$$

$$1 - \frac{2m}{R} = 1 - \frac{2M}{R}, \quad (3.141)$$

se cumplan. Estas proponen un modelo estelar relativista donde se especifica una ecuación de estado para el material estelar  $P = P(\rho)$  y una densidad y presión centrales  $\rho_c$  y  $P_c$  desde las cuales se integra la ecuación de masa imponiendo las condiciones ya establecidas y desde ello se determina el potencial  $\Phi$ .

La solución más básica de interior estelar conocida es la solución de Schwarzschild que considera una densidad  $\rho$  uniforme y constante. La masa de la estrella será:

$$M = \frac{4\pi}{3} \rho R^3. \quad (3.142)$$

Desde estas cantidades, la función de masa, la presión y el potencial gravitatorio  $\Phi$  serán dados por [1]:

$$m = \frac{4\pi}{3} \rho r^3, \quad (3.143)$$

$$P = \rho \left[ \frac{(1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2} - (1 - 2M/R)^{1/2}}{3(1 - 2M/R)^{1/2} - (1 - 2Mr^2/R^3)^{1/2}} \right], \quad (3.144)$$

$$e^\Phi = \frac{3}{2} \left( 1 - \frac{2M}{R} \right)^{1/2} - \frac{1}{2} \left( 1 - \frac{2Mr^2}{R^3} \right)^{1/2}. \quad (3.145)$$

Un resultado relevante de estas ecuaciones, es que mientras más se acerque el valor de la masa  $m$  a  $r/2$  dentro de un radio  $r$ , el potencial gravitacional comienza a aumentar y a divergir. La atracción gravitatoria será consecuentemente divergente y grande, y la presión aumentará de la misma forma para contrarrestar este efecto, forzando a que tienda a cero más rápidamente en función del radio. Esto previene de que el radio de una estrella sea menor a  $2M$ .

Sin embargo, se ha comprobado que existe un límite de masa para las estrellas y no es posible generar una presión infinitamente grande como para sobrevenir esta implosión gravitacional. Esta característica dada por la relatividad asegura que si una estrella adquiere una gran presión central, se volverá inestable y no podrá sustentarse de manera estática ante la curvatura y la gravedad [1].

Un último tema relevante a revisar en esta sección se centra en el uso de una técnica que permite visualizar la curvatura del espacio-tiempo. Esta técnica es llamada “embedding” y consiste en “incrustar” parte del espacio-tiempo curvo o parte de este en un espacio plano de mayor dimensionalidad[1]. Matemáticamente, al tener un manifold  $n$ -dimensional dado por una métrica con  $n(n-1)/2$  elementos independientes (dada la simetría de este tensor) incrustado en un manifold de dimensión  $N$ , será expresado con  $N - n$  coordenadas [1]. Esto a su vez conlleva que la dimensión del manifold donde esto se realice sea mayor a la cantidad de elementos del tensor métrico. Esto tampoco asegura que se conserve la forma del manifold  $n$ -dimensional y tal vez se requiera de un manifold de una dimensión mucho mayor para poder conservar la topología global[1].

El análisis anterior conlleva que para un manifold de cuatro dimensiones como el espacio-tiempo, requerirá de un manifold de diez dimensiones a comparación de tres dimensiones como idealmente se desea para una representación gráfica. Si consideramos reduciendo la cantidad de elementos del tensor métrico a tres, la dimensión mínima para la representación será  $N = 6$ . Las matemáticas obligan a reducir a un mínimo de dos elementos métricos para reducir la dimensión de la representación a tres. Esto es realizable imponiendo condiciones.

Consideremos una estrella estática en una coordenada  $t$  constante y en su plano ecuatorial  $\theta = \pi/2$ , tal que su métrica se reduce a:

$$ds^2 = \frac{1}{1 - 2m/r} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (3.146)$$

donde  $m$  es dada por (3.135). Como buscamos construir una 2-superficie en un 3-espacio euclídeo, conviene introducir un sistema coordenado cilíndrico cuya métrica sea dada por,

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\theta^2 + dz^2. \quad (3.147)$$

Dado a que la métrica que se desea incrustar es axialmente simétrica, podemos proponer una función  $z = z(r)$ , tal que la métrica anterior se pueda resumir como,

$$ds^2 = \left[ 1 + \left( \frac{dz}{dr} \right)^2 \right] dr^2 + r^2 d\theta^2. \quad (3.148)$$

Esta métrica comparada con (3.146) permite establecer una ecuación diferencial para  $z(r)$ ,

$$1 + \left(\frac{dz}{dr}\right)^2 = \frac{1}{1 - 2m/r}. \quad (3.149)$$

Despejando esta ecuación, se obtiene:

$$\frac{dz}{dr} = \sqrt{\frac{1}{1 - 2m/r} - 1}. \quad (3.150)$$

Forzando a que  $z = 0$  en el centro de la estrella, la integración de esta ecuación es,

$$z(r) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{r'/(2m) - 1}}. \quad (3.151)$$

Dependiendo del radio a integrar, el comportamiento de  $m(r)$  será distinto. Muy cerca del centro de la estrella, esta será aproximadamente dada por,

$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_c, \quad (3.152)$$

donde  $\rho_c$  es la densidad central de la estrella. Mientras que afuera, está dominada por la métrica de Schwarzschild.

Integrando ambas posibles soluciones, la función  $z(r)$  será:

$$z(r) = \sqrt{(2\pi/3)\rho_c} r^2, \quad r \sim 0 \quad (3.153)$$

$$z(r) = \sqrt{8M(r - 2M)}, \quad r > R. \quad (3.154)$$

Utilizando estas ecuaciones se realiza el diagrama con un código en “Python”. La figura 3.3 muestra el dia-

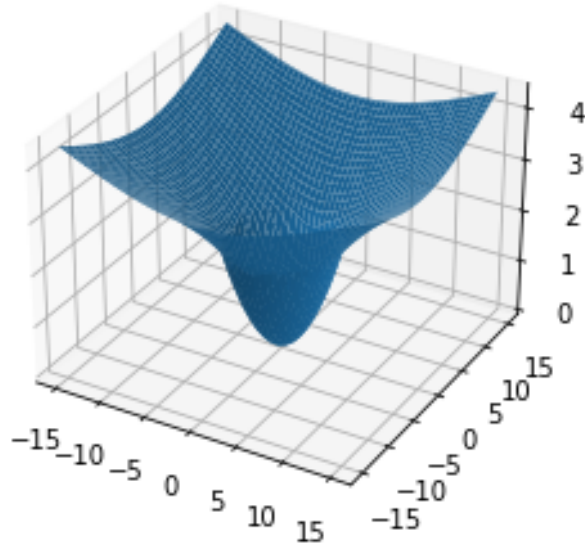


Figura 3.3: Diagrama de “embedding” aproximado para una estrella. Esta se ha ajustado con parámetros ideales.

grama de “embedding” realizado a través de tal código. Esta es una representación pictórica de la curvatura

radial generada por una estrella. Esta describe visualmente como la circunferencia asociada a cada radio comienza a crecer de manera distinta a lo esperado por la geometría usual.

Consideremos un caso general como una estrella de densidad uniforme, tal que la función de masa de la estrella sea dada por:

$$m(r) = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho, \quad (3.155)$$

para cualquier punto en el interior de la estrella. Para el interior de la estrella, la función de “embedding” vendrá dada por la integral:

$$z(r) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{\frac{r'}{8\pi\rho r'^3} - 1}}. \quad (3.156)$$

Simplificando y realizando manipulaciones algebraicas, se tiene,

$$z(r) = \sqrt{8\pi\rho} \int_0^r \frac{r'}{\sqrt{3 - 8\pi\rho r'^2}} dr', \quad (3.157)$$

y esta se resuelve realizando la sustitución  $u = 3 - 8\pi\rho r'^2$ , obteniendo,

$$z(r) = -\frac{\sqrt{8\pi\rho}}{16\pi\rho} \int_3^{3-8\pi\rho r^2} \frac{r'}{\sqrt{u}} \frac{du}{r'} = -\frac{1}{\sqrt{8\pi\rho}} \sqrt{u} \Big|_3^{3-8\pi\rho r^2} = \frac{1}{\sqrt{8\pi\rho}} \left( \sqrt{3} - \sqrt{3 - 8\pi\rho r^2} \right). \quad (3.158)$$

Realizando una manipulación algebraica, esta última expresión se reduce a:

$$z(r) = \frac{1}{\sqrt{2\left(\frac{4\pi}{3}\right)\rho}} - \sqrt{\frac{1}{2\left(\frac{4\pi}{3}\right)\rho} - r^2}. \quad (3.159)$$

Como la densidad es constante, es posible ver desde (3.155), que se establece la relación,

$$M = \frac{4\pi}{3}\rho R^3, \quad (3.160)$$

donde reemplazando en la expresión (3.159), se obtiene:

$$z(r) = \frac{\sqrt{R^3}}{\sqrt{2M}} - \sqrt{\frac{R^3}{2M} - r^2}, \quad (3.161)$$

que factorizando se obtiene,

$$z(r) = \sqrt{\frac{R^3}{2M}} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2Mr^2}{R^3}} \right]. \quad (3.162)$$

Esto es equivalente a una semiesfera.

Para el exterior estelar, se integra desde el núcleo de esta hasta el punto externo. La integral será:

$$z'(r) = \int_0^r \frac{dr'}{\sqrt{r'/(2m(r)) - 1}} = \int_0^R \frac{dr'}{\sqrt{r'/(2m(r)) - 1}} + \int_R^r \frac{dr'}{\sqrt{r'/(2M) - 1}}. \quad (3.163)$$

Notar que  $z'(r)$  denota la función de “embedding” en el exterior estelar y no una derivada. La primera integral es equivalente a (3.162) evaluada en  $R$ , la segunda se resuelve con la sustitución  $u = r'/(2M) - 1$ , reduciéndose a:

$$z'(r) = z(R) + 2M \int_{R/(2M)-1}^{r/(2M)-1} \frac{du}{\sqrt{u}} = z(R) + 4M \sqrt{u} \Big|_{R/(2M)-1}^{r/(2M)-1}. \quad (3.164)$$

Finalmente la función de “embedding” será:

$$z'(r) = \sqrt{\frac{R^3}{2M}} \left[ 1 - \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \right] + 2\sqrt{2M} \left[ \sqrt{r - 2M} - \sqrt{R - 2M} \right], \quad (3.165)$$

la que corresponde a una superficie de revolución de un paraboloides acostado. Utilizando una modificación del código de “python” usado para generar la figura 3.3, se realiza el diagrama respectivo para esta estrella de densidad uniforme con las funciones aquí determinadas. La figura 3.4 muestra tal diagrama. Es posible

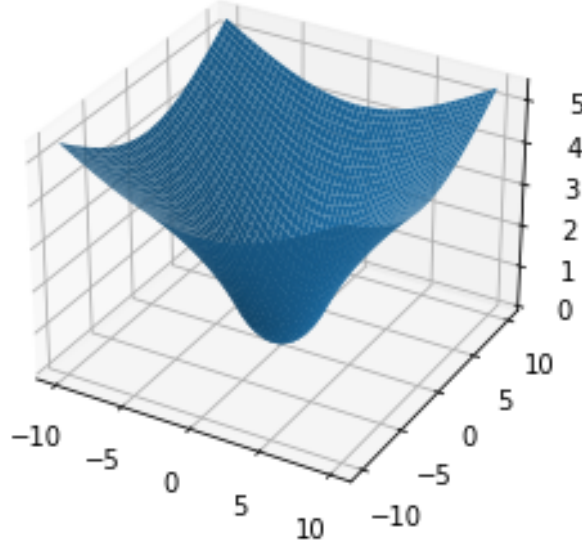


Figura 3.4: Diagrama de “embedding” para una estrella de densidad uniforme. Los parámetros se han ajustado a un caso ideal.

comprobar que al realizar las derivadas de ambas funciones en el punto  $r = R$ ,

$$\left. \frac{dz(r)}{dr} \right|_{r=R} = \left( \sqrt{\frac{R^3}{2M}} \frac{1}{\sqrt{1 - 2Mr^2/R^3}} \frac{4M}{R^3} r \right) \Big|_{r=R} = \frac{2\sqrt{2M}}{\sqrt{R(1 - 2M/R)}}, \quad (3.166)$$

y,

$$\left. \frac{dz(r)}{dr} \right|_{r=R} = 2\sqrt{2M} \frac{1}{\sqrt{r - 2M}} \Big|_{r=R} = \frac{2\sqrt{2M}}{\sqrt{R(1 - 2M/R)}}, \quad (3.167)$$

son funciones continuas, por lo que estas son suaves y no habrá discontinuidades al progresar entre dentro y fuera de la estrella como se puede ver en la figura 3.4.

La representación gráfica de esta función también permite ver como es que se diferencia el crecimiento del radio dado por una circunferencia en un punto dado a comparación de la coordenada radial medida desde el centro de la estrella. Este último es medido según la integración del intervalo,

$$\int_0^l dl' = \int_0^R \frac{1}{\sqrt{1 - 2m(r)/r}} dr. \quad (3.168)$$

Reemplazando con (3.155), retorna:

$$l = \int_0^R \frac{dr}{\sqrt{1 - (8\pi\rho/3)r^2}}, \quad (3.169)$$

la cual aplicando el cambio de variable  $u = \sqrt{8\pi\rho/3}r$ , corresponde a la antiderivada de la función arcoseno,

$$l = \frac{1}{\sqrt{8\pi\rho/3}} \int_0^{\sqrt{8\pi\rho/3}R} \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} = \frac{1}{\sqrt{8\pi\rho/3}} \arcsin(u) \Big|_0^{\sqrt{8\pi\rho/3}R}, \quad (3.170)$$

dando finalmente que la distancia medida será:

$$l = \frac{\arcsin(\sqrt{\frac{2M}{R}})}{\sqrt{2M/R^3}}. \quad (3.171)$$

Esto demuestra que el radio de una circunferencia sobre un punto dentro de la estrella no es el mismo que medido desde su centro hasta esta y el diagrama 3.4 da una idea visual de esta variación de la distancia radial a pesar de que funcionalmente difieran.

### 3.3. Colapso estelar

La primera noción de colapso estelar fue desarrollada por R. Oppenheimer y G. Volkoff al ver que existe un límite de masa para las estrellas. Aquellas que fuesen más masivas deberían implotar a un radio menor a  $R = 2M$  [1]. Durante la implosión, toda región externa a la estrella poseerá una simetría esférica y por teorema de Birkhoff deberá reducirse al espacio-tiempo de Schwarzschild. Esto impide que en esta implosión ideal se generen ondas gravitacionales dado a que estas romperían tal simetría.

La forma más simple de modelar este colapso es asumiendo que la presión interna total de la estrella se vuelve nula. Los átomos de su superficie poseen una masa finita y al no haber ninguna fuerza adicional que prevenga que esta se contraiga, entonces esta colapsará siguiendo una curva geodésica temporal. Para mantener la simetría esférica, esta no tendrá movimientos en las coordenadas  $\theta$  y  $\phi$ . Que la geodésica sea temporal implica que se mantiene dentro del cono de luz. Para la geometría de Schwarzschild estos conos son dados por el intervalo  $ds^2$  para la luz el cual es siempre nulo,

$$ds^2 = 0 = - \left(1 - \frac{2M}{r}\right) dt^2 + \frac{1}{1 - 2M/r} dr^2, \quad (3.172)$$

desde donde desarrollando algebraicamente se obtiene,

$$\frac{dt}{dr} = \frac{1}{1 - \frac{2M}{r}}. \quad (3.173)$$

Esta expresión indica como cambia la pendiente del cono de luz para cada radio distinto. Este resultado representa un problema dado a que mientras más se aproxime alguna geodésica al radio gravitacional  $r = 2M$ , la pendiente tenderá a infinito, lo que es equivalente a que estos conos se achaten hasta hacerse infinitamente delgados. Esto a su vez implica para la geodésica de la superficie estelar, nunca llegará a tal radio. Como esta geodésica es temporal, siempre deberá mantenerse dentro del cono de luz y al achatare infinitamente en este radio implicaría que no podría estar dentro. Esto es resultado de una mala elección de coordenadas para la métrica de Schwarzschild.

Aunque se requiera una cantidad infinita de tiempo  $t$  para que la superficie estelar cruce  $r = 2M$ , requerirá un tiempo propio finito para que esto ocurra para algún observador sobre esta superficie. Lo que sucede instantáneamente después de cruzar tal radio vendrá determinado por la ecuación de fuerzas de marea. Esta ecuación evaluada en el sistema de referencia localmente Lorentziano sobre la superficie determinará entre dos posibles casos. En el primero, la superficie y el observador son destruidos por las fuerzas de marea mientras que en el segundo, el observador y la superficie continúan cayendo sin mayor modificación dentro del radio gravitacional. Considerando la ecuación de marea (2.42) para un observador localmente Lorentziano, los símbolos de Christoffel serán nulos en el origen y despreciables a medida que se desvíen de este. Por ende, esta ecuación se reduce a:

$$\frac{d^2 \xi^{\bar{j}}}{d\tau^2} = -R^{\bar{j}}_{\bar{0}\bar{k}\bar{0}} \xi^{\bar{k}}. \quad (3.174)$$

Aquí se asume que la desviación entre dos elementos o partículas separadas por  $\xi^{\bar{j}}$  es tal que las componentes espaciales de la 4-velocidad descrita con respecto a este sistema se pueden despreciar, y la componente temporal se aproxima a uno. Las barras sobre los índices indican que estas son las coordenadas del sistema Lorentziano local. Es posible ver que si las componentes del tensor de Riemann divergen a medida que esta superficie estelar se acerca al radio gravitacional, entonces las fuerzas de marea serán infinitas y consecuentemente destruirán a esta y a cualquier observador sobre esta. Es necesario calcular las componentes de este tensor en este sistema.

La forma de obtener las componentes del tensor de Riemann de la forma más simple, es a través de un sistema de referencia propio estático a valores  $r$ ,  $\theta$  y  $\phi$  constantes en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Consecuentemente, este sistema será localmente plano al igual que el sistema Lorentziano situado sobre la superficie colapsando, implicando que estos sistemas estarán relacionados entre sí por una transformación de Lorentz,

$$L^{\hat{t}}_{\hat{t}} = L^{\hat{r}}_{\bar{r}} = \gamma, \quad L^{\hat{t}}_{\bar{r}} = L^{\hat{r}}_{\hat{t}} = -\beta\gamma, \quad L^{\hat{\theta}}_{\hat{\theta}} = L^{\hat{\phi}}_{\bar{\phi}} = 1, \quad (3.175)$$

donde los índices  $\hat{\alpha}$  corresponden a las coordenadas del sistema propio en reposo, y aquellos índices  $\bar{\beta}$  corresponden a las coordenadas de la superficie estelar. Tanto el factor  $\gamma$  y  $\beta$  utilizan la velocidad de colapso de la superficie vista desde el sistema estático. Las componentes del tensor de Riemann en el sistema estático son dadas por (3.46). Su transformación será dada por:

$$R_{\bar{\alpha}\bar{\beta}\bar{\gamma}\bar{\delta}} = L^{\hat{\mu}}_{\bar{\alpha}} L^{\hat{\nu}}_{\bar{\beta}} L^{\hat{\lambda}}_{\bar{\gamma}} L^{\hat{\sigma}}_{\bar{\delta}} R_{\hat{\mu}\hat{\nu}\hat{\lambda}\hat{\sigma}}. \quad (3.176)$$

Transformando con las componentes dadas en (3.175), se obtienen que las componentes del tensor de Riemann en el sistema en caída serán:

$$R_{\hat{t}\hat{r}\hat{t}\hat{r}} = -R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = -\frac{2M}{R^3}, \quad R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = -R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = -R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = \frac{M}{R^3}. \quad (3.177)$$

Este resultado implica que permanecerán perfectamente finitas a lo largo del movimiento a través del radio de Schwarzschild y correspondientemente habrá una tendencia a que la superficie como también algún observador, no sean destruidos al cruzar. Una observación relevante de estos resultados de las componentes del tensor de Riemann reside en que estas son exactamente iguales a las componentes de este mismo medidas por el observador estático. Esta es una característica exclusiva de la geometría del espacio-tiempo de Schwarzschild[1].

A pesar de los resultados anteriores, todavía no existe una forma clara de establecer que ocurre en las cercanías del radio gravitacional  $r = 2M$  y esto es consecuencia de una mala elección de un sistema coordenado para la métrica de Schwarzschild. Para poder establecer más a fondo lo que ocurre cerca de este radio, se requieren nuevas coordenadas que no posean esta singularidad matemática en  $r = 2M$ . El primer sistema coordenado encontrado que resuelve este problema son las coordenadas de Eddington-Finkelstein. Estas proponen la transformación entre coordenadas[1],

$$\tilde{t} = t + 2M \ln(|r/(2M) - 1|). \quad (3.178)$$

Esta deja sin cambiar las coordenadas radiales y angulares, la única modificación es temporal. Diferenciando en función de  $t$  y  $r$ , se obtiene:

$$\frac{d\tilde{t}}{dt} = 1, \quad (3.179)$$

y,

$$\frac{d\tilde{t}}{dr} = \frac{1}{r/(2M) - 1}. \quad (3.180)$$

El diferencial en esta variable será:

$$d\tilde{t} = dt + \frac{1}{r/(2M) - 1} dr, \quad (3.181)$$

desde lo cual, despejando el diferencial de la coordenada temporal de Schwarzschild se obtiene,

$$dt^2 = d\tilde{t}^2 + \frac{1}{(r/(2M) - 1)^2} dr^2 - \frac{2}{r/(2M) - 1} dr d\tilde{t}. \quad (3.182)$$

Reemplazando esta expresión en la métrica (3.1), se tiene:

$$\begin{aligned} ds^2 = & -\frac{(r-2M)}{r} d\tilde{t}^2 + \frac{2(r-2M)}{r} \frac{2M}{(r-2M)} dr d\tilde{t} + \dots \\ & \dots + \left[ -\frac{(r-2M)}{r} \frac{4M^2}{(r-2M)^2} + \frac{r}{(r-2M)} \right] dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \end{aligned}$$

Desarrollando, se obtiene finalmente:

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t}^2 + \frac{4M}{r} dr d\tilde{t} + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2(\theta)d\phi^2). \quad (3.183)$$

Esta métrica no presenta discontinuidades en  $r = 2M$ .

Consideremos un rayo de luz cuyo intervalo es siempre nulo viajando de forma radial y sin ningún movimiento angular, se tendrá que,

$$0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) d\tilde{t}^2 + \frac{4M}{r} dr d\tilde{t} + \left(1 + \frac{2M}{r}\right) dr^2, \quad (3.184)$$

donde dividiendo toda la ecuación por  $dr^2$ , se reduce a:

$$0 = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right) \left(\frac{d\tilde{t}}{dr}\right)^2 + \frac{4M}{r} \frac{d\tilde{t}}{dr} + \left(1 + \frac{2M}{r}\right). \quad (3.185)$$

Esta corresponde a una ecuación cuadrática para la derivada de  $\tilde{t}$  en la variable radial. Sus dos posibles soluciones son:

$$\frac{d\tilde{t}}{dr} = \frac{-2M/r \pm 1}{(2M/r - 1)}. \quad (3.186)$$

Las dos posibles soluciones se dividen dependiendo si el rayo “entra” o “sale” de forma radial. Estas soluciones son:

$$\frac{d\tilde{t}}{dr} = -1, \quad (3.187)$$

y,

$$\frac{d\tilde{t}}{dr} = \frac{1 + 2M/r}{1 - 2M/r}. \quad (3.188)$$

La pendiente negativa de (3.187) se inclina de tal forma que el rayo se ve orientado hacia  $r \rightarrow 0$ , mientras que la pendiente (3.188) posee una pendiente positiva indicando una orientación hacia  $r \rightarrow +\infty$ . Las curvas dadas por estas ecuaciones conforman los bordes de los conos de luz posibles para este espacio-tiempo. La pendiente del rayo de luz entrante no presenta singularidades matemáticas en  $r = 2M$ , mientras que la pendiente para un rayo saliente se indetermina, lo que es equivalente a que una vez cruzado el horizonte, los rayos no pueden salir.

Volviendo al caso de la superficie estelar, esta se puede modelar como una geodésica netamente radial sin componentes angulares. La geodésica temporal será:

$$\frac{du^t}{d\tau} + 2\Gamma_{rt}^t u^r u^t = 0, \quad (3.189)$$

la cual se integra realizando el despeje,

$$\frac{du^t}{u^t} = -2\Gamma_{rt}^t \frac{dr}{d\tau} d\tau = -2\Gamma_{rt}^t dr. \quad (3.190)$$

Reemplazando el valor del símbolo, se tiene:

$$\ln \left( \frac{u^t(r)}{u^t(R)} \right) = -2M \int_R^r \frac{dr}{r(r-2M)}, \quad (3.191)$$

que integrando por fracciones parciales, se obtiene:

$$\ln \left( \frac{u^t(r)}{u^t(R)} \right) = \ln \left( \frac{r(R-2M)}{R(r-2M)} \right). \quad (3.192)$$

Reduciendo y despejando,

$$u^t(r) = u^t(R) \frac{r(R-2M)}{R(r-2M)}, \quad (3.193)$$

donde  $u^t(R)$  es la velocidad temporal inicial. La superficie estelar comienza a colapsar desde un reposo por lo que la velocidad inicial radial es nula. Utilizando esta información y junto con la invarianza del módulo de la 4-velocidad, se tiene:

$$(u^t(R))^2 g_{tt} = -1, \quad (3.194)$$

que se simplifica a:

$$u^t(R) = \frac{1}{\sqrt{1-2M/R}}. \quad (3.195)$$

Substituyendo en (3.193) retorna la velocidad temporal,

$$u^t(r) = \frac{\sqrt{1-2M/R}}{(1-2M/r)}. \quad (3.196)$$

Para la velocidad radial se utiliza la invarianza del módulo de la 4-velocidad en un radio  $r$ :

$$-1 = g_{rr} (u^r)^2 + g_{tt} (u^t)^2, \quad (3.197)$$

de la cual despejando y reemplazando con las cantidades necesarias queda:

$$u^r(r) = \sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}. \quad (3.198)$$

A comparación con la ecuación de movimiento Newtoniana para el potencial gravitatorio, se tiene:

$$\frac{d^2 r}{d\tau^2} = -\frac{2M}{r^2}. \quad (3.199)$$

Multiplicando todo por  $dr/d\tau$  y utilizando la regla de la cadena inversa, se tiene:

$$\frac{dr}{d\tau} \frac{d^2 r}{d\tau} = \frac{1}{2} \frac{d}{d\tau} \left[ \left( \frac{dr}{d\tau} \right)^2 \right] = -\frac{2M}{r} \frac{dr}{d\tau}, \quad (3.200)$$

donde se integra sobre  $d\tau$  en ambos lados, reduciendo todo a:

$$(u^r)^2 \Big|_{u^r(R)}^{u^r(r)} = -2M \int_R^r \frac{dr}{r^2} = 2M \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{R} \right). \quad (3.201)$$

Despejando la velocidad radial  $u^r$ , queda finalmente,

$$u^r(r) = \sqrt{\left[ u^r(R) - \frac{2M}{R} \right] + \frac{2M}{r}}. \quad (3.202)$$

Comparando esta ecuación con (3.198) resultan tener una forma exacta entre ambas. Esta coincidencia hace difícil distinguir entre el movimiento relativista y el Newtoniano.

La expresión (3.198) es integrable tal que,

$$\int_R^{2M} \frac{dr}{\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}} = \int_{\Delta\tau}^0 d\tau. \quad (3.203)$$

Esta se resuelve realizando la substitución  $u = \sqrt{2M/r - 2M/R}$ , dejándola como:

$$-\Delta\tau = -4M \int_0^{\sqrt{1-2M/R}} \frac{du}{(u^2 + 1)^2}. \quad (3.204)$$

Esta última se resuelve por substitución trigonométrica, retornando:

$$\Delta\tau = \sqrt{\frac{R^3}{2M}} \left[ \arctan(u) \Big|_0^{\sqrt{1-2M/R}} + \frac{1}{2} \frac{u}{(u^2 + 2M/R)} \Big|_0^{\sqrt{1-2M/R}} \right], \quad (3.205)$$

que resolviendo retorna:

$$\Delta\tau = \sqrt{\frac{R^3}{2M}} \left[ \arctan \left( \sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \right) + \frac{\sqrt{1 - 2M/R}}{2} \right]. \quad (3.206)$$

Este será el tiempo propio que un observador cayendo junto con la superficie estelar mide partiendo desde  $R$  hasta llegar a  $r = 2M$ . Este tiempo es finito para este observador.

Por parte de la velocidad temporal, esta se integra en función del radio  $r$  abusando de las expresiones matemáticas, tal que:

$$\frac{u^t}{u^r} = \frac{dt}{dr} = \frac{\sqrt{1 - 2M/R} (1 - 2M/R)}{(1 - 2M/r) \sqrt{2M/r + K}}, \quad (3.207)$$

donde  $K$  se hace igual a,

$$K = -\frac{2M}{R}, \quad (3.208)$$

por simplicidad. Al integrar esta ecuación, se tiene:

$$\Delta t = (1 - 2M/R)^{3/2} \int_R^{2M} \frac{dr}{(1 - 2M/r) \sqrt{K + 2M/r}}. \quad (3.209)$$

Realizando la substitución  $u = 1 - 2M/r$ , deja esta integral expresada como:

$$I = \frac{1}{2M} \int_{1-2M/R}^0 \frac{du}{(1+u)^2 u \sqrt{u + (1+K)}}. \quad (3.210)$$

Esta integral es impropia. Se puede comparar con la integral,

$$I = \int_a^0 \frac{dx}{x(x+1)^p}, \quad (3.211)$$

donde para  $p \geq 1$  será divergente. Para demostrar que (3.210) diverge, se deberá cumplir que:

$$\frac{1}{(1+u)^2 u \sqrt{u + (K+1)}} > \frac{1}{u(u+1)^p}, \quad (3.212)$$

por teorema de convergencia o no convergencia. Desarrollando de forma algebraica, retorna:

$$(u+1)^{(2p-4)} - u - K - 1 > 0. \quad (3.213)$$

Si se desarrolla el polinomio de  $(u+1)^{(2p-4)}$  con el binomio de Newton, se tendrá:

$$\sum_{k=0}^{(2p-4)} \binom{(2p-4)}{k} u^k - u - 1 - K > 0, \quad (3.214)$$

donde al tomar los dos primeros términos de la suma se obtiene:

$$\sum_{k=2}^{(2p-4)} \binom{(2p-4)}{k} u^k + 1 + (2p-4)u - u - 1 - K > 0. \quad (3.215)$$

Simplificando todos los términos y reemplazando la variable  $K$ , se obtiene:

$$\sum_{k=2}^{(2p-4)} \binom{(2p-4)}{k} u^k + (2p-5)u + \frac{2M}{R} > 0. \quad (3.216)$$

Esta expresión permite elegir algún  $p$  que siempre cumpla lo anterior asegurando que el valor sea siempre positivo, cumpliendo así con la desigualdad. Esto último demuestra que la integral temporal diverge e implica que la cantidad de coordenada  $t$  medida en el espacio-tiempo de Schwarzschild debe ser infinita para observar que algún objeto llegue a  $r = 2M$ .

Este último problema se resuelve con el uso de las coordenadas de Eddington-Finkelstein. La métrica (3.183) no posee ningún elemento dependiente de  $\tilde{t}$  y en consecuencia, utilizando el resultado (2.42) se tendrá que,

$$\frac{du_{\tilde{t}}}{d\tau} = 0, \quad (3.217)$$

implicando que es una cantidad conservada. Consecuentemente, esta será igual a una constante,

$$u_{\tilde{t}} = g_{\tilde{t}\tilde{t}}u^{\tilde{t}} + g_{\tilde{t}r}u^r = -\left(1 - \frac{2M}{r}\right)u^{\tilde{t}} + \frac{2M}{r}u^r = \text{const.} \quad (3.218)$$

Como la velocidad radial inicial es nula, se utiliza la información del módulo invariante de la 4-velocidad,

$$-1 = g_{\tilde{t}\tilde{t}}(u^{\tilde{t}})^2 + 2g_{\tilde{t}r}u^{\tilde{t}}u^r + g_{rr}(u^r)^2 = -\left(1 - \frac{2M}{R}\right)(u^{\tilde{t}})^2, \quad (3.219)$$

dando esta expresión el valor de  $u^{\tilde{t}}(R)$ , quedando:

$$u^{\tilde{t}}(R) = \frac{1}{\sqrt{1 - 2M/R}}, \quad (3.220)$$

y desde esta, la cantidad conservada es:

$$C = -\frac{(1 - 2M/R)}{\sqrt{1 - 2M/R}}. \quad (3.221)$$

Con esta, la ecuación (3.218) conforma una relación entre  $u^{\tilde{t}}$  y  $u^r$ , retornando:

$$u^{\tilde{t}} = u^r \frac{2M}{(r - 2M)} + \frac{\sqrt{1 - 2M/R}}{(1 - 2M/r)}. \quad (3.222)$$

Reemplazando esta expresión en la expresión del módulo invariante, se tiene:

$$(u^r)^2 \left[ 1 + \frac{2M}{r} + \frac{8M^2}{r(r-2M)} - \frac{4M^2}{r(r-2M)} \right] + u^r \left[ \frac{4M\sqrt{1-2M/R}}{(r-2M)} - \frac{4M\sqrt{1-2M/R}}{(r-2M)} \right] + \dots$$

$$\dots + \left[ 1 - \frac{1-2M/R}{1-2M/r} \right] = 0,$$

donde realizando reducciones algebraicas, se simplifica a:

$$(u^r)^2 \left[ \frac{r}{(r-2M)} \right] + 1 - \frac{(1-2M/R)}{(1-2M/r)} = 0. \quad (3.223)$$

Esta ecuación cuadrática se resuelve directamente, retornando:

$$u^r = -\sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}. \quad (3.224)$$

El signo se deja negativo dado a que esta expresión debe describir una caída. Desde este resultado, y con el uso de la ecuación (3.222) se determina consecuentemente la velocidad temporal,

$$u^{\tilde{t}} = \frac{\sqrt{1-2M/R}}{(1-2M/r)} - \frac{2M}{(r-2M)} \sqrt{\frac{2M}{r} - \frac{2M}{R}}. \quad (3.225)$$

Al igual que se realizó con la componente temporal de la 4-velocidad en las coordenadas de Schwarzschild, se puede integrar la coordenada temporal con respecto al radio aplicando la misma lógica, obteniendo:

$$\frac{d\tilde{t}}{dr} = \frac{u^{\tilde{t}}}{u^r} = \frac{-\frac{\sqrt{1-2M/R}}{1-2M/r} + \frac{2M}{(r-2M)} \sqrt{2M/r - 2M/R}}{\sqrt{2M/r - 2M/R}}. \quad (3.226)$$

Integrar en  $r$  retorna una integral impropia,

$$\Delta\tilde{t} = \int_R^{2M} \frac{-\frac{\sqrt{1-2M/R}}{1-2M/r} + \frac{2M}{(r-2M)} \sqrt{2M/r - 2M/R}}{\sqrt{2M/r - 2M/R}} dr, \quad (3.227)$$

la cual, factorizando por  $\sqrt{1/r}$  en el denominador y trabajando la expresión de forma algebraica se reduce a:

$$\Delta\tilde{t} = \int_R^{2M} \frac{\left( 2M\sqrt{2M - \frac{2M}{R}r} - r^{3/2}\sqrt{1 - \frac{2M}{R}} \right)}{(r-2M)\sqrt{2M - \frac{2M}{R}r}} dr. \quad (3.228)$$

Realizando el cambio de variable  $u = 2M - (2M/R)r$ , la integral se reduce a:

$$\Delta\tilde{t} = \frac{R}{2M} \int_{2M-4M^2/R}^0 \frac{2M\sqrt{u} - (R/(2M))^3 \sqrt{1-2M/R} u \sqrt{u} (2M/u - 1)^{3/2}}{(R-2M - R/(2M)u)\sqrt{u}} du, \quad (3.229)$$

que simplificando aún más, retorna:

$$\Delta\tilde{t} = \frac{R}{2M} \int_{2M-4M^2/R}^0 \frac{2M - (R/(2M))^3 \sqrt{1-2M/R} u (2M/u - 1)^{3/2}}{(R-2M - R/(2M)u)} du. \quad (3.230)$$

Esta integral puede compararse con la integral,

$$\int_a^0 \frac{dx}{\sqrt{x}}, \quad (3.231)$$

la cual es convergente. Si esta integral resulta ser mayor que la integral temporal (3.230), entonces se demostrará que converge a un valor finito por teoremas de convergencia. Realizando la comparación se tiene:

$$\frac{2M - (R/(2M))^3 \sqrt{1 - 2M/R} u (2M/u - 1)^{3/2}}{(R - 2M - R/(2M)u)} < \frac{1}{\sqrt{u}}, \quad (3.232)$$

la cual multiplicando por los denominadores a ambos lados y elevando al cuadrado múltiples veces para eliminar las raíces, queda:

$$\left( 4M^2 u + \frac{R}{2M} \left( 1 - \frac{2M}{R} \right) (2M - u)^3 - \left( \frac{R}{2M} u + 2M - R \right)^2 \right)^2 - 4Mu(2M - u) \left( 1 - \frac{2M}{R} \right) \left( \frac{R}{2M} \right)^3 > 0. \quad (3.233)$$

El polinomio elevado al cuadrado siempre será positivo, por lo que el único elemento que puede afectar esta desigualdad es el polinomio cuadrático que se encuentra restando la expresión. Así, la inequidad se puede reducir a:

$$-u(2M - u) > 0. \quad (3.234)$$

Los puntos críticos de esta desigualdad se encuentran en  $u = 2M$  y  $u = 0$ . Dentro del intervalo  $[0, 2M]$ , esta función será positiva cumpliendo con la condición de integración, dado a que el intervalo de integración se encuentra dentro de este último según el cambio de variable realizado. Esto demuestra a su vez que (3.230) es una integral convergente y tiene un valor finito. Los detalles de su integración, sin embargo, son demasiado complejos como para realizarse aquí y tener un resultado analítico, por lo que con demostrar que su valor es finito basta para saber que es posible integrar esta función, ya sea analítica o numéricamente.

Como última instancia se ha hecho un diagrama de conos de luz para las coordenadas de Eddington–Finkelstein con el software “python” e integrando las ecuaciones (3.187) y (3.188) para visualizar mejor el cambio que estas coordenadas representan. La figura 3.5 muestra tal diagrama. Las líneas azules corresponden

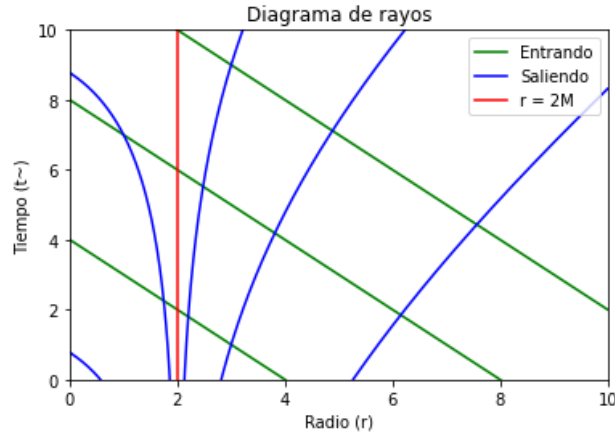


Figura 3.5: Diagrama de rayos de luz en las coordenadas de Eddington–Finkelstein.

a rayos de luz saliendo radialmente, mientras que los verdes corresponden a rayos entrantes. Los rayos salientes cambian de dirección en  $r = 2M$  indicado por la línea roja, dado a que no poseen suficiente velocidad como para salir. Las intersecciones entre las líneas salientes y entrantes a la derecha de  $r = 2M$  muestran que el cono de luz está orientado hacia la singularidad, al igual que adentro. Las líneas azules, forman asíntotas en torno a  $r = 2M$ , lo que representa que a la luz le costará cada vez más salir mientras más se acerque a la singularidad.

Una vez cruzado  $r = 2M$ , existe otra discontinuidad en  $r = 0$ . Esta no es evitable a través de un cambio de coordenadas, por lo que siempre será una indeterminación real. En este punto, cuando  $r$  tiende a 0, la

componente radial de la 4-velocidad tiende a infinito, mientras que su componente temporal tiende a cero, al realizar los límites de (3.198) y (3.196).

Existe una particularidad al cruzar  $r = 2M$ . El signo de la métrica de Schwarzschild cambia para la variable  $t$  y  $r$ , quedando:

$$ds^2 = -\frac{dr^2}{2M/r - 1} + (2M/r - 1)dt^2. \quad (3.235)$$

A pesar de esto, las curvas que los rayos de luz acotan siguen siendo dadas por (3.173). Una consecuencia de esto es que las geodésicas seguirán siendo tipo temporales. Dado a este cambio de signo, sin embargo, las coordenadas de un sistema Lorentziano local medida por un observador en caída cambiarán. Estas sufrirán una pequeña modificación en la cual un cambio de signo en (3.18), permite redefinir a los vectores base:

$$e_{\hat{t}} = -\sqrt{2M/r - 1} e_r, \quad e_{\hat{r}} = \frac{1}{\sqrt{\frac{2M}{r} - 1}} e_t. \quad (3.236)$$

Como la métrica para  $r < 2M$  cambia los signos de la coordenada  $t$  y  $r$  entre sí, se hará que la coordenada radial sea la temporal y viceversa. Así, las coordenadas (3.236) harán esto último para tener un mejor entendimiento del problema. Las coordenadas angulares no sufrirán modificación alguna dado a que el movimiento será principalmente radial (en caso de requerir movimientos angulares, sus transformaciones serán dadas por aquellas transformaciones angulares de (3.18)). Los nuevos factores de transformación serán:

$$T^t_{\hat{r}} = \frac{1}{\sqrt{2M/r - 1}}, \quad T^r_{\hat{t}} = -\sqrt{2M/r - 1}. \quad (3.237)$$

Transformando los elementos de la métrica, se obtiene:

$$g_{\hat{t}\hat{t}} = (T^r_{\hat{t}})^2 g_{rr} = -(2M/r - 1) \frac{1}{2M/r - 1} = -1, \quad (3.238)$$

$$g_{\hat{r}\hat{r}} = (T^t_{\hat{r}})^2 g_{tt} = \frac{1}{2M/r - 1} (2M/r - 1) = 1, \quad (3.239)$$

convirtiendo esto a una métrica plana y a su vez transformando la coordenada radial en una temporal y viceversa. Con uso del software “Maxima” se realizan las operaciones de transformación de los elementos del tensor de Riemann, retornando:

$$R_{\hat{r}\hat{t}\hat{r}\hat{t}} = -R_{\hat{\theta}\hat{\phi}\hat{\theta}\hat{\phi}} = -\frac{2M}{r^3}, \quad R_{\hat{t}\hat{\theta}\hat{t}\hat{\theta}} = -R_{\hat{r}\hat{\theta}\hat{r}\hat{\theta}} = -R_{\hat{r}\hat{\phi}\hat{r}\hat{\phi}} = R_{\hat{t}\hat{\phi}\hat{t}\hat{\phi}} = \frac{M}{r^3}. \quad (3.240)$$

Al evaluar las fuerzas de marea en este sistema de referencia, es fácil ver que mientras más cerca se esté de  $r = 0$ , más grandes serán las fuerzas de marea hasta llegar a destruir lo que hay dentro. La ecuación de fuerzas de marea para este observador Lorentziano sobre la superficie en  $r < 2M$ , será dada por:

$$\frac{d^2 \xi^{\hat{j}}}{d\tau^2} = -R^{\hat{j}}_{\hat{0}\hat{k}\hat{0}} \xi^{\hat{k}}, \quad (3.241)$$

desde las cuales, las desviaciones geodésicas serán,

$$\frac{d^2 \xi^{\hat{r}}}{d\tau^2} = \frac{2M}{r^3} \xi^{\hat{r}}, \quad (3.242)$$

$$\frac{d^2 \xi^{\hat{\theta}}}{d\tau^2} = -\frac{M}{r^3} \xi^{\hat{\theta}}, \quad (3.243)$$

$$\frac{d^2 \xi^{\hat{\phi}}}{d\tau^2} = -\frac{M}{r^3} \xi^{\hat{\phi}}. \quad (3.244)$$

Interpretando a estas ecuaciones como si fuesen ecuaciones de aceleración para un cuerpo observado desde este sistema, estas actuarían deformando a este donde en la dirección radial, la fuerza es de tracción o de estiramiento por el signo del lado derecho de la ecuación. Para las ecuaciones angulares, sin embargo, este signo es negativo e indica una compresión o bien, que el cuerpo se aprieta de manera tangente a una superficie esférica para el radio  $r$  dado.

Consideremos como ejemplo práctico un observador de prueba con una masa de  $20[Kg]$  en sus extremos, separadas por una distancia de  $\xi^r = 2[m]$  dentro del agujero negro de la galaxia súper gigante elíptica M87, cuya masa es de  $7 \times 10^9$  masas solares<sup>[1]</sup> (aproximadamente  $1,39188 \times 10^{40}[Kg]$ ). La aceleración de marea será, aproximadamente dada por:

$$a = \frac{2GM}{r^3} \xi^r \approx \frac{3,715 \times 10^{30}}{r^3}. \quad (3.245)$$

Considerando que la máxima cantidad de aceleración que un humano puede soportar son aproximadamente  $9g$ , se utilizará esta aceleración de referencia para ver cual es el máximo radio que se alcanza a llegar antes de que las fuerzas de marea sean letales para el observador. Resolviendo se obtiene que, aproximadamente, el radio donde esto ocurre es,

$$R_d \approx 3,5 \times 10^6 [km]. \quad (3.246)$$

Es posible comprobar que este radio es menor a  $2M$  para este cuerpo (el radio gravitacional para este es de aproximadamente  $20,6 \times 10^9[km]$ ). El tiempo que le toma a tal observador en caer a este radio desde  $r = 2M$  se puede determinar con una modificación del resultado de la integral del tiempo propio (3.205). Se modifican sus índices retornando:

$$\Delta\tau = \sqrt{\frac{(2M)^3}{2M}} \left[ \arctan(u) \Big|_0^{\sqrt{2M/R_d-1}} + \frac{1}{2} \frac{u}{(u^2+1)} \Big|_0^{\sqrt{2M/R_d-1}} \right]. \quad (3.247)$$

En esta modificación se asume que el observador parte del reposo en  $R = 2M$  y desde ahí cae hasta el radio  $R_d$  donde las fuerzas de marea le destruirán. El tiempo propio que este observador medirá hasta alcanzar este radio será,

$$\Delta\tau = 2M \left[ \arctan \left( \sqrt{\frac{2M}{R_d} - 1} \right) + \frac{\sqrt{2M/R_d - 1}}{4M/R_d} \right], \quad (3.248)$$

que con las cantidades dadas, este tiempo medido por este observador será aproximadamente de,

$$\Delta\tau \approx 107960,86[s], \quad (3.249)$$

lo que equivalen a aproximadamente 30 horas.

## Capítulo 4

# Conclusiones

Para concluir con este documento se ha explorado la postulación de la relatividad general comenzado con la gravedad Newtoniana y como los elementos de esta teoría llevan a plantear la relación entre curvatura y gravedad. Posteriormente, los resultados derivados de tales relaciones fueron utilizados para analizar situaciones físicas más complejas como el interior y colapso de una estrella.

Fueron revisadas posibles ecuaciones candidatas a una teoría de campo escalar de la gravedad obteniendo que a pesar de distintas posibles ecuaciones capaces de aproximar la gravedad, estas no son suficientes y no cumplen con algunos principios y consecuencias de la relatividad especial. Un posible candidato fue descartado porque tampoco permitía que la gravedad afectara a la luz. Fue revisado el planteamiento de la idea de curvatura al considerar que no es posible converger sistemas de referencia Lorentzianos en presencia de gravedad. La revisión matemática de distintas métricas comprobaron que no es posible asegurar que el espacio-tiempo sea plano en presencia de gravedad.

Fueron analizadas las bases para poder describir curvatura en un espacio de cuatro dimensiones como la ecuación geodésica desde donde se obtuvieron resultados preliminares de cantidades conservadas. Fue deducida y demostrada la principal relación entre curvatura y gravedad a través de la ecuación de fuerzas de marea resultando en el tensor de Riemann y una ecuación candidata a describir la gravedad. Esta fue analizada y descartada al no cumplir con la conservación local del tensor energía-momento. Algunos resultados relevantes de estas relaciones fueron las aproximaciones de fuerzas de marea en la tierra y los ejemplos de geodésicas y curvatura sobre una esfera. Posteriormente se demostró la obtención del tensor de Einstein con el fin de cumplir con la conservación local del tensor energía-momento. Adicionalmente fue revisada la teoría linealizada de la gravedad recuperando las expresiones Newtonianas y permitiendo levantar algunas condiciones para describir situaciones relativistas de forma aproximada mediante teoría de perturbaciones a una métrica plana, obteniendo una ecuación de onda y demostrando la existencia de ondas gravitacionales.

Fue analizada la métrica de Schwarzschild y sus efectos inmediatos como solución de vacío a la ecuación de Einstein. Se determinaron cantidades relevantes asociadas a esta métrica mediante el método geodésico y utilizando el software “Maxima”. También fue planteado un sistema de referencia ortonormal Lorentziano y analizadas las componentes de los elementos de la métrica en tal sistema. Con este se determinó el corrimiento al rojo gravitacional a través de diferentes cantidades conservadas y diferentes transformaciones entre sistemas de referencia computando valores numéricos reales e hipotéticos para este corrimiento a modo de ejemplo didáctico.

Varios resultados de estas derivaciones teóricas han confirmado que la teoría Newtoniana coincide perfectamente con la gravedad en ciertos casos de tal forma que matemáticamente es hasta indistinguible de la relatividad general. En el caso de la métrica de Schwarzschild, se demostró en el análisis de campo débil que las fuerzas de marea, las ecuaciones geodésicas y sus propiedades son coincidentes. La ecuación de fuerzas de marea coincide con la contracción del tensor de Riemann. Los períodos orbitales en una trayectoria circular perfecta en la métrica de Schwarzschild coincide con la ley Newtoniana y de la misma forma, se demostró que la ecuación geodésica radial es exactamente igual a la ecuación de movimiento radial para un potencial Newtoniano.

Fue examinado el teorema de Birkhoff y sus consecuencias para el exterior estelar. Para el interior estelar fueron planteadas ecuaciones de Einstein en presencia de materia con ayuda de un sistema de referencia sobre el elemento de fluido que simplificó las ecuaciones. Fueron obtenidas las ecuaciones de Tolman–Oppenheimer–Volkoff y fue analizada la solución de Schwarzschild que considera una estrella de densidad constante. Con las métricas estelares determinadas, se desarrollaron diagramas de “embedding” matemáticamente y fueron graficados en el programa “python”, permitiendo visualizar el efecto de curvatura de estas métricas en la dirección radial. Las soluciones en el vacío fueron posteriormente utilizadas para analizar el colapso de una estrella ideal en el espacio-tiempo de Schwarzschild. Se realizó la transformación de coordenadas de Eddington-Finkelstein y fueron obtenidas las geodésicas respectivas en este sistema. Se realizó un diagrama de rayos de luz para este sistema coordenado lo que permitió visualizar la orientación de los conos de luz y como estos no generaban conflictos matemáticos como en la métrica de Schwarzschild. Finalmente fueron computadas las ecuaciones de aceleraciones de marea dentro del radio gravitacional y cálculos teóricos idealizados fueron realizados para un observador en caída al agujero negro M87, obteniendo su radio de Schwarzschild y cuanto tardaría un observador en caer dentro hasta ser eliminado por las fuerzas de marea.

Cabe destacar el avance realizado en la profundización de los conceptos y análisis realizados en relatividad general en el vacío y en presencia de materia. También cabe destacar el desarrollo y profundización en el uso de técnicas como las transformaciones de coordenadas para reducir problemas en relatividad general.

Algunos problemas sugeridos y abiertos todavía por abordar en detalle son aquellos casos de simetrías más allá de las esféricas, entre otros, soluciones de materia o de fluidos no ideales con el fin de modelar más precisamente los fenómenos internos estelares como la convección o corrientes internas con el fin de obtener modelos termodinámicos estelares más realistas y sus efectos sobre la métrica del interior estelar. Otros temas por abarcar son aquellas soluciones dinámicas que incluyen los efectos de rotaciones como la de Kerr o considerar estrellas con momento angular no nulo. Finalmente queda abierto el problema de unir todos estos resultados en un modelo más realista para modelar soluciones de una estrella y la gravedad.

# Bibliografía

- [1] Kip S. Thorne and Roger D. Blandford. *Modern classical physics: optics, fluids, plasmas, elasticity, relativity, and statistical physics*. Princeton University Press, 2017.
- [2] Saúl Ramos-Sánchez. *Relatividad para futuros físicos*, volume 1. CopIt ArXives, 2018.
- [3] Luciano Rezzolla. Geodesic deviation and weak-field solutions. Technical report, 3rd VIRGO-EGO-SIGRAV School on Gravitational Waves, Pisa, 2004.
- [4] Christopher M. Hirata. Lecture viii: Linearized gravity. <http://www.tapir.caltech.edu/~chirata/ph236/>, 2012.