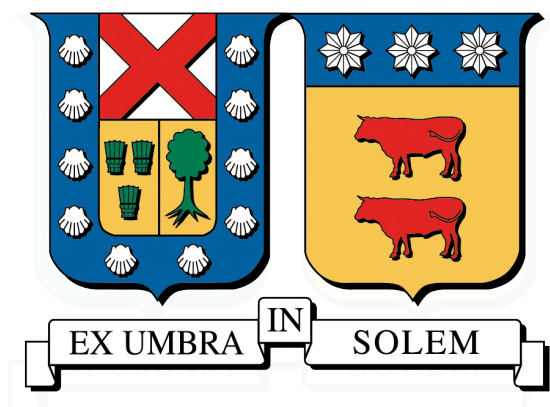


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS
SANTIAGO- CHILE



**APLICACIÓN DE LA TEORÍA DE JUEGOS DE STACKELBERG
EN CADENA DE SUMINISTRO DE LA INDUSTRIA
ALIMENTARIA ENTRE PRODUCTOR Y DISTRIBUIDOR**

JAVIERA ANDREA BUSTOS FLORES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERA CIVIL INDUSTRIAL

PROFESOR GUÍA : DR. VICTOR ALBORNOZ S.
PROFESOR CORREFERENTE : DRA. SARA RODRIGUEZ S.

OCTUBRE 2016

Agradecimientos

A mi madre, Carmen Flores, por creer en mí, por la constante motivación y, por sobre todo, por su amor.

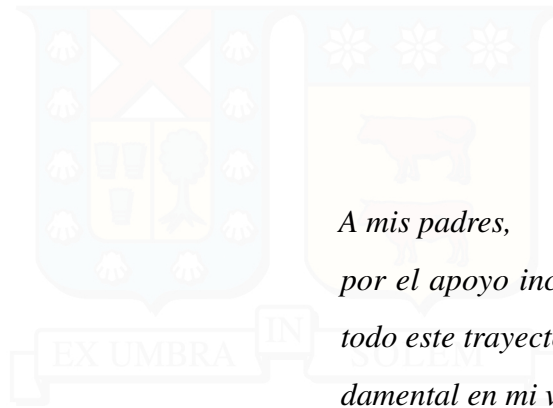
A mi padre, Hector Bustos, por los ejemplos de perseverancia que lo caracterizan y me han guiado siempre.

A mi hermano, Cristian, por estar conmigo y por el apoyo brindado.

A Aldo por apoyarme, aconsejarme y por su amor incondicional.

A mi profesor guía, Dr. Victor Albornoz, por la confianza, los conocimientos brindados y por guiarme en la elaboración de mi memoria.

A la Dra. Sara Rodriguez por sus valiosos comentarios para mejorar este trabajo y por su tiempo.



*A mis padres,
por el apoyo incondicional a través de
todo este trayecto y por ser un pilar fun-
damental en mi vida.*

RESUMEN EJECUTIVO

El presente trabajo muestra una aplicación del juego de Stackelberg, bajo la estructura de líder y seguidor, en la cadena de suministro de la industria alimentaria. El juego contempla dos niveles de decisión entre procesador de productos y distribuidor, y es modelado como un problema de programación lineal binivel (BLPP) que busca maximizar las utilidades del líder y el nivel de servicio del seguidor.

Las principales decisiones del problema incluyen decisiones de patrones de corte a utilizar, materia prima a adquirir, cantidades a producir, vender y almacenar, para el líder; y cantidad de faltante e inventario para el seguidor. Las restricciones del modelo establecen capacidad productiva de la planta, límite de materia prima, balance de inventario y capacidad de almacenamiento.

Este modelo fue resuelto utilizando datos de empresas pertenecientes a la industria porcina. Los resultados indican una reducción de los costos y un aumento en el nivel de servicio. La principal contribución es apoyar y ayudar en la coordinación e integración de dos agentes en la cadena de suministro.

Palabras Clave. Teoría de Juegos, Cadena de Suministro, Programación binivel, Industria Porcina.

ABSTRACT

The present work describes an application of the Stackelberg game, under the leader and follower structure in the food supply chain. The game includes two levels of decision making, the products processor and distributor, and it is modeled as a bilevel lineal programming problem (BLPP), which aims to maximize the profit of the leader and the service level of the follower.

The main decisions of the problem include pattern cuts to be used, commodities acquisition, amount to produce, sell and store for the leader; and the missing product and inventory for the follower. The restrictions of the model establish the productive capacity of the plant, pork carcasses limit, inventory balance and storage capacity.

This model was applied using data from companies from pork industry. The results indicate costs reduction and increasing the level of service. The main contribution is to support and assist in the coordination and integration of the two supply chain agents.

Keywords. Game Theory, Supply Chain, Pork Industry, Bilevel Programming.

Índice de Contenidos

1. Introducción	1
1.1. Descripción del problema	3
1.2. Contexto	4
1.3. Objetivos	4
1.3.1. Objetivo General	4
1.3.2. Objetivos Específicos	5
1.4. Estructura	5
2. Marco Teórico	6
2.1. Teoría de Juegos	6
2.1.1. Tipos de juegos	7
2.1.2. Definición formal de un juego	10
2.1.3. El modelo de Stackelberg	12
2.2. La Gestión de la Cadena de Suministro	15
2.2.1. Cadena de suministro en la Industria Cárnica	16
2.3. Aplicación Teoría de Juegos	19
2.4. Modelos de Programación Matemática	19
2.4.1. Modelo de Programación Lineal	20
2.4.2. Modelo de Programación Entera-Mixto	20
2.5. Modelo de Programación Binivel	22
2.5.1. Algoritmo para BLPP	25
2.6. Modelo de Planificación de Producción	27
3. Metodología	33
3.1. Descripción del problema de teoría de juegos	33
3.2. Modelo de Optimización de dos niveles	35
3.2.1. Descripción del modelo	35
3.2.2. Formulación Modelo Binivel	36
3.2.3. Reformulación Modelo	41
3.3. Modelo de Optimización del líder	44
3.4. Estrategia de resolución	47
4. Experimento Computacional	48
4.1. Descripción	48
4.2. Instancias	48

4.2.1. Supuestos	50
4.3. Resultados	51
4.4. Análisis de resultados	54
5. Conclusiones	58
Bibliografía	59



Índice de Tablas

4.1. Productos seleccionados.	49
4.2. Resultados obtenidos para el caso base.	51
4.3. Adquisición de carcasas durante el horizonte de planificación.	51
4.4. Cantidad de faltante y sobrante por producto al final del horizonte de planificación.	52
4.5. Resultados obtenidos para el primer caso de estudio.	53
4.6. Comparación entre dos modelos: de dos niveles y un nivel	53
4.7. Resultados obtenidos para el tercer caso de estudio.	54

Índice de Figuras

2.1. Árbol juego simultáneo	12
2.2. Árbol juego secuencial	12
2.3. Proceso de gestión en la cadena de suministro	16
2.4. Cadena de suministro Industria Cárnica	17

1 | Introducción

La demanda de carne en los países en desarrollo sigue viéndose impulsada por el aumento de ingresos y el crecimiento demográfico. En el escenario en el que se presentan los países en desarrollo, con un fuerte y continuo desarrollo económico, se estima que se mantendrá el alza en el consumo de proteínas y, como consecuencia, un aumento en el consumo de carne, dando lugar a un mercado generalmente activo ([OECD/FAO, 2016](#)). En las regiones menos desarrolladas, los productos de donde proviene el mayor consumo de proteínas (60 %) corresponderán a los cereales para el 2024, mientras que la cuota de proteínas proveniente del consumo de carne representará el 9 % en países en desarrollo y un 26 % en países desarrollados ([OECD/FAO, 2015](#)), marcando una tendencia creciente en el consumo de productos cárnicos. A nivel mundial, se espera que el consumo de carne crezca un 1.4 % anual, constituyendo más del 16 % en la ingesta de proteínas. Si bien se prevé que el consumo per capita disminuya debido a sus altos precios, continua su expansión en los países en desarrollo, donde Asia y Medio Oriente predominan con altos consumos per capita. Como consecuencia, se espera que la producción de carne aumente en un 17 % en los países en desarrollo y un 2 % en los países desarrollados del 2014 a 2024 ([OECD/FAO, 2015](#)).

Dentro de la industria cárnica, la carne roja que presenta el mayor consumo a nivel mundial corresponde a la carne de cerdo, su demanda ha tenido un fuerte crecimiento durante las últimas décadas. Lo anterior se debe principalmente a los cambios en los patrones de consumo en la población derivados del aumento de ingresos de países en desarrollo que presentan economías de rápido crecimiento. El sector porcino, junto a las aves de corral, es el subsector pecuario de mayor crecimiento. Donde el total de animales alcanzó los mil millones antes del 2015, cifra que dobló el número obtenido en la década

de 1970 ([OECD/FAO, 2016](#)).

Durante las últimas décadas, el mercado y la industria alimentaria han cambiado notablemente, por ejemplo, la concentración de mercado ha aumentado y el ambiente dentro de las industrias se vuelve cada vez más competitivo ([Kamerschen, 1968](#)). El tener conocimiento y poder sobre lo que sucede al interior de cada empresa y como ésta, a la vez se relaciona con sus socios, es consecuencia directa de estos cambios. En este contexto, el área de investigación de operaciones cumple un papel imprescindible, y con ellos también las relaciones organizacionales con los agentes externos ya que como Forrester ([1958](#)) indica, estos influyen en el desempeño de investigación, promoción, ingeniería y ventas, convirtiendo la gestión y el uso correcto de sus herramientas en clave de éxito.

La literatura ha prestado bastante atención en cómo administrar la cadena de suministro, la cual muestra en detalle como la empresa gestiona el área de operaciones. La cadena de suministro está compuesta por tres etapas: Aprovisionamiento, en donde la empresa adquiere las materias primas necesarias mediante sus proveedores; Operaciones, etapa en la que se procesan las materias primas para obtener los productos terminados; y por último, Distribución, donde el producto final es comercializado a un cliente. La administración de la cadena de suministro en la primera y última etapa comprende, dentro de su concepto, la coordinación entre los agentes involucrados, con los cuales al momento de adquirir las materias primas para la fabricación del producto y/o comercializar el producto final, se negocian variables claves, las cuales tienen un impacto directo en la estructura de costos totales.

Por otro lado, la teoría de juegos se ha usado extensamente para analizar la interacción entre las firmas que integran la cadena de suministro ([Hennet y Arda, 2008](#)) pues, es una herramienta objetiva para soportar el proceso de toma de decisiones ([Marulanda y Delgado, 2012](#)). En cuanto a las relaciones organizacionales, el modelo de Stackelberg bajo la suposición generalizada de un juego estático no cooperativo en donde ambos jugadores tienen información perfecta y maximizan beneficios, define un problema de programación binivel lineal (BLPP, por sus siglas en inglés) ([Bialas y Karwan, 1984](#)). Las interacciones entre los agentes participantes en la cadena de suministro son capturadas a través de un juego entre un líder con un seguidor. Donde el líder es quien presenta ventaja y, por ende,

es quien optimiza primero su diseño y decisiones operativas, dentro de estas decisiones se encuentran: ubicación de instalaciones, dimensionamiento, tecnología a utilizar, cantidad de materia prima y productos terminados y fijación de precios (Yue y You, 2014a). Finalmente, el seguidor observa las acciones del líder y sigue sus pasos adecuándolo a su contexto, de forma de maximizar sus utilidades.

Considerando la importancia de las relaciones organizacionales, el impacto que generan en la empresa y trabajando bajo el modelo de Stackelberg, se propone que existe una relación de líder-seguidor, entre con los clientes de la empresa, la cual establece la forma en que se toman las decisiones dentro de la compañía y da noción de las variables que se ven afectadas para poder tomar el control, transformarse en el líder de este juego, con el propósito de ser quien optimice primero el diseño y tome las decisiones operativas, de esta forma se maximizan las utilidades en la empresa.

1.1. Descripción del problema

En los eslabones de la cadena de suministro, en el contexto de la industria cárnica, se encuentran las actividades de procesamiento de carne y comercialización. La procesadora de productos cárnicos, mediante la materia prima obtenida de los proveedores, es la encargada de procesar la carne utilizando distintos tipos de patrones de corte para luego venderla a empresas comercializadoras. Los mayoristas y minoristas son los encargados de pedir una cantidad determinada de productos a la empresa procesadora con el objetivo de satisfacer su propia demanda. El problema radica en que se produce un desbalance entre la cantidad que produce la planta procesadora y la demanda que deben enfrentar los mayoristas, por lo que el productor debe pagar una multa. Esta penalización puede disminuir su valor mediante la coordinación e integración de actividades e información que pueden compartir ambos agentes de la cadena. De modo que el líder obtenga información actualizada sobre las preferencias del consumidor y la demanda para la cual debe producir, evitando pérdidas por productos vencidos y colaborando al mayorista a cumplir con un alto nivel de servicio. En este contexto, la coordinación e integración entre ambos agentes juega un rol vital para mejorar la eficiencia y aumentar el rendimiento de la cadena.

Este trabajo consiste en modelar el juego existente entre dos agentes de la cadena de suministro en la industria cárnica, en las actividades de producción y comercialización, bajo el supuesto de que hay una relación de líder y seguidor. Este modelo tiene el propósito de apoyar en la coordinación e integración entre los agentes de la cadena. Además se resuelve un caso en particular de la industria porcina el cual ayudará a corroborar el modelo planteado.

1.2. Contexto

El problema de planificación de producción en la industria cárnica ha presentado gran interés en la literatura. [Bixby et al. \(2006\)](#) fue uno de los primeros autores en estudiar este tema, presentó un modelo de calendarización para la producción, el cual fue implementado en una empresa estadounidense permitiendo obtener retornos del 200 % de la inversión dentro del primer año de implementación. Este modelo considera el cerdo como el animal principal, no obstante, puede ser generalizado para toda la industria cárnica.

Recientemente, [Albornoz et al. \(2015\)](#) desarrolló un trabajo de planificación de producción en una empresa procesadora de carne. El problema comprende dos tipos de productos, fresco y congelado, y consiste principalmente en determinar la manera óptima de realizar los patrones de corte y el número de canales a procesar para satisfacer la demanda de productos y niveles de inventario en un horizonte de planificación de corto plazo. Este modelo da soporte y entrega ayuda en la toma de decisiones en la planificación de operaciones de corte en la industria cárnica. Es por esto, que se utiliza como referencia para plantear el modelo binivel que se presenta en capítulos posteriores.

1.3. Objetivos

1.3.1. Objetivo General

Plantear un juego de Stackelberg en el contexto de la cadena de suministro en la industria cárnica que ayude en la coordinación e integración entre el líder y seguidor, maximizando los beneficios del productor y el nivel de servicio del mayorista.

1.3.2. Objetivos Específicos

- Estudiar la literatura existente en relación a problemas de toma de decisiones en cadenas de suministro que incorporen la teoría de juegos como metodología de resolución.
- Analizar como se relaciona el líder con el seguidor en los juegos de Stackelberg en el contexto de cadena de suministro para modelar el juego entre ambos agentes.
- Plantear un juego de Stackelberg que refleje la toma de decisiones entre la planta procesadora de carne y el mayorista dentro de la industria cárnica.
- Validar empíricamente el modelo de programación binivel planteado con datos históricos sobre relación productor-mayorista en cuanto a cantidades a vender y decisiones estratégicas para una empresa perteneciente a la Industria Porcina.

1.4. Estructura

La estructura de este documento es la siguiente. En el Capítulo 2 se presenta el marco teórico con los tópicos aplicados para el desarrollo del tema, con una breve descripción de teoría de juegos, enfatizando en el juego de Stackelberg; la gestión de la cadena de suministro, destacando el contexto de la industria cárnica; y modelos de optimización, focalizado en la programación binivel. En el Capítulo 3 se muestra la metodología propuesta, mediante la formulación de un problema binivel, la reformulación de este para transformarlo a un problema de un nivel no-lineal y la aplicación de un algoritmo que permite resolver problemas de programación binivel lineal. En el Capítulo 4 se entregan los principales resultados obtenidos y un breve análisis de estos. Por último, en el Capítulo 5 se presentan las conclusiones y se discuten algunos temas que se podrían abordar en un futuro próximo.

2 | Marco Teórico

2.1. Teoría de Juegos

Un juego puede definirse como «todo problema de decisión donde hay más de un agente decisor y las decisiones de un jugador tiene efectos sobre el otro» ([Ricart, 1988](#)).

Se consideran las siguientes suposiciones, tal y como señala Soto ([2005](#)) para la teoría de juegos:

1. Cada jugador tiene a su disposición dos o más opciones de estrategias, las cuales se encuentran bien identificadas, llamadas "jugadas".
2. Cada una de las diversas combinaciones de jugadas para los jugadores los dirige a un estado final que se encuentra definido (i.e. ganar, perder o retirarse), esto da por concluido el juego.
3. La ganancia para cada jugador está asociada específicamente con cada situación final.
4. Cada uno de los jugadores tiene completo conocimiento de su propio juego y el de sus oponentes, lo cual implica que los jugadores tienen conocimiento total de las reglas del juego y así también de las preferencias y creencias de los otros participantes, sus utilidades y curso de acción.
5. Los jugadores son racionales; esto implica que cada jugador, disponiendo de dos o más opciones, seleccionará aquella que le represente mayor beneficio.

En este contexto y según señala Kogan ([2007](#)), la teoría de juegos considera decisiones racionales entre dos o más partes que compiten uno contra otro con el fin de alcanzar un

objetivo, optimizar sus ganancias individuales, donde cada una de las partes puede depender de la otra.

2.1.1. Tipos de juegos

La literatura nos entrega distintas clasificaciones para los juegos entre los agentes involucrados. Esta clasificación depende principalmente de la relación entre los actores, en donde se puede establecer un juego cooperativo o no cooperativo; la forma en que se toman las decisiones en el juego, encontrándose los juegos estáticos y dinámicos; y el tipo de información que posee una firma sobre las otras, donde se puede estar en un juego de información perfecta o imperfecta. A continuación, se define cada uno de los juegos más relevantes:

Juegos cooperativos y no cooperativos

Binmore (2008) menciona que existen dos planteamientos distintos en la teoría de juegos, investigados por Von Neumann y Morgenstern (2007):

- **Juegos cooperativos**

En este planteamiento los autores buscaron describir la conducta óptima en juegos con un gran número de jugadores. Los juegos cooperativos estudian como los individuos racionales actúan entre sí en un esfuerzo por lograr metas interdependientes, con la finalidad de maximizar los intereses particulares de cada uno a través del logro de metas compartidas, las cuales se encuentran previamente establecidas. (Soto y Valente, 2005).

- **Juegos no cooperativos**

Corresponde al planteamiento estratégico, en el cual los jugadores presentan intereses opuestos en el juego, por lo que se requiere especificar detalladamente lo que los jugadores pueden y no pueden hacer durante este, y después buscar para cada jugador una estrategia óptima. A estos juegos se les llama estrictamente competitivos, o de suma cero, porque cualquier ganancia para un jugador siempre se equilibra exactamente por una pérdida correspondiente para el otro jugador. En este juego los

individuos racionales actúan para lograr maximizar sus propias metas ([Von Neumann y Morgenstern, 2007](#)).

Juegos estáticos y dinámicos

Según la forma en que interactúan los agentes al tomar sus decisiones, se encuentran los siguientes tipos de juegos:

- **Juegos estáticos**

Corresponden a aquellos en donde los jugadores toman las decisiones forma simultánea, es decir, cada jugador elige una estrategia sin conocer las decisiones de los demás jugadores, todos los jugadores toman las decisiones al mismo tiempo y solo cuentan con un movimiento. De esta forma, no pueden considerar dentro de su plan de juego las decisiones que fueron tomadas por los otros jugadores. La condición de que un juego sea simultáneo está dada por las circunstancias de los jugadores, cuando las decisiones son desconocidas entre jugadores, es como si el juego fuese simultaneo ([Gibbons, 1993](#)).

- **Juegos dinámicos**

En los juegos dinámicos las decisiones se toman de manera sucesiva, por lo que cada jugador toma su decisión conociendo la estrategia tomada por el primer jugador. Luego, los jugadores reaccionan a ella y el primer jugador tiene la posibilidad de cambiar sus decisiones. Se considera líder a quien toma la primera decisión y seguidores a quienes luego de conocer la estrategia tomada por el líder deciden su curso de acción a tomar ([Gibbons, 1993](#)).

Juegos con información completa e incompleta

Uno de los aspectos más importantes en la toma de decisiones y la predicción de resultados en un juego, es la información que tiene disponible el jugador. La falta de esta información puede lograr que el jugador no permita distinguir cuál es la mejor opción. Los tipos de juego según el tipo de información se clasifican en completos o incompletos:

- **Juegos con información completa**

Corresponde un tipo especial de juegos en los cuales los jugadores tienen toda la información sobre la estructura del juego así como los resultados y las posibles estrategias de todos los jugadores y sus preferencias, la función de ganancias de cada jugador es conocida por los jugadores (Carrillo de León y Limón Ledesma, 2015).

- **Juegos con información incompleta**

Corresponde a aquel juego en donde se ignoran algunas características: objetivos, resultados y posibles estrategias de los otros jugadores, es decir, cuando no se está familiarizado o consciente de todas las reglas. Se puede no tener conciencia de los resultados que tendrán las decisiones o incluso no saber cuáles son todas las opciones de juego (Carrillo de León y Limón Ledesma, 2015).

Juegos con información perfecta e imperfecta

Tal y como señala Carrillo (2015) lo que determina que un juego sea de información perfecta o imperfecta es el historial del propio juego:

- **Juegos con información perfecta**

Consiste en aquellos juegos en donde el jugador que está a punto de realizar la jugada conoce cada una de las jugadas realizadas por él y por los otros jugadores desde el inicio hasta ese momento del juego.

El mismo autor menciona que en un juego donde se tiene información perfecta, todos los jugadores conocen el historial de juego de cada uno de los agentes, esto le permite determinar con exactitud el punto del juego en el que se encuentra (Carrillo de León y Limón Ledesma, 2015).

- **Juegos con información imperfecta**

Son los juegos en donde al menos un jugador desconoce alguna de las jugadas previas, ya sea suya o de otro jugador. Un claro ejemplo de juegos de información imperfecta corresponde a los juegos simultáneos, debido a que, las jugadas que se realizan por los otros jugadores no son conocidas (Carrillo de León y Limón Ledesma, 2015).

Es importante no confundir la información perfecta con la información completa. Ya que el conocimiento de un jugador sobre las elecciones que los otros jugadores han realizado no necesariamente implican que el jugador va a conocer el resultado de sus elecciones. Por otro lado, el conocerlas no quiere decir que se conozca la jugada que eligió el jugador (Carrillo de León y Limón Ledesma, 2015).

2.1.2. Definición formal de un juego

Existen dos maneras de representar un juego, la forma estratégica y la forma extensiva.

Representación en forma estratégica de un juego

Tal y como señala Gibbons (1993), la representación general de un juego contempla:

1. Los jugadores del juego
2. Las estrategias que dispone cada jugador
3. La ganancia de cada jugador en cada combinación posible de estrategia

Se considerarán n jugadores, desde el jugador 1 al n y un jugador arbitrario se denomina como jugador i . S_i corresponde al conjunto de estrategias de cada jugador i , también conocido por *espacio de estrategias de i* , y s_i es un elemento arbitrario del conjunto de estrategias. Sea $(s_1, \dots, s_n)$ una combinación de estrategias, una para cada jugador, y sea u_i la función de utilidades de cada jugador i (Gibbons, 1993). De esta forma:

La representación en forma normal de un juego con n jugadores especifica los espacios de estrategias de los jugadores $S_1, \dots, S_n$ y sus funciones de ganancias $u_1, \dots, u_n$. Denotamos este juego con (Gibbons, 1993):

$$G = \{S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n\} \quad (2.1)$$

El mismo autor (1993) menciona que hay estrategias que un jugador racional no utilizará, éstas son las estrategias estrictamente dominadas.

En el juego de forma normal $G = (S_1, \dots, S_n; u_1, \dots, u_n)$, sean s'_i y s''_i posibles estrategias del jugador i . La estrategia s'_i está estrictamente dominada por la estrategia s''_i si para cada combinación posible de las estrategias de los restantes jugadores la ganancia de i por utilizar s'_i es estrictamente menor que la ganancia de i por utilizar s''_i , es decir:

$$u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s'_i, s_{i+1}, \dots, s_n) < u_i(s_1, \dots, s_{i-1}, s''_i, s_{i+1}, \dots, s_n) \quad (2.2)$$

para cada $(s_1, \dots, s_{i-1}, s_{i+1}, \dots, s_n)$ que puede ser construida a partir de los espacios de estrategias de los otros jugadores $(S_1, \dots, S_{i-1}, S_{i+1}, \dots, S_n)$

Representación en forma extensiva de un juego

Una manera de organizar la información de las decisiones y utilidad de cada uno de los agentes es mediante un diagrama de árbol, considerado como grafo. Este diagrama está formado por vértices y aristas. Cada vértice representa las estrategias posibles para cada jugador y se señalan con la inicial de cada uno de los jugadores, por ejemplo, 1 y 2. En las aristas se indican las elecciones disponibles para cada jugador en ese instante del juego, por ejemplo, se escribe sobre cada arista “A” o “B”, según corresponda. Cada uno de los vértices terminales del árbol es un punto final del juego que caracteriza completamente la jugada que llega a él, es decir, partiendo de la raíz del árbol, existe sólo una secuencia de elecciones en el árbol que lleva al vértice final considerado. Por último, en cualquier sistema de reglas proporcionado para un juego, habrá un conjunto fijo de resultados o utilidades específicas para cada jugada. Estos resultados se señalan con unas etiquetas situadas en los vértices finales en las que se detallan las utilidades para cada uno de los jugadores en el orden en el que intervienen ([Antequera Guerra y Espinel Febles, 2011](#)).

Antequera ([2011](#)) también señala que los diagramas de árbol son un recurso potente que se emplea de manera habitual para enumerar todas las posibilidades lógicas de una secuencia de sucesos, en la que cada suceso puede ocurrir de un número finito de maneras y, por tanto, también se pueden considerar como un recurso en la resolución de problemas en general, no sólo en los de combinatoria y probabilidad.

Cuando las decisiones son simultáneas, da lo mismo cuál de los dos jugadores se sitúe

primero. No sucede lo mismo cuando las decisiones son sucesivas. En las siguientes figuras se muestra un ejemplo para cada uno de los diferentes juegos:

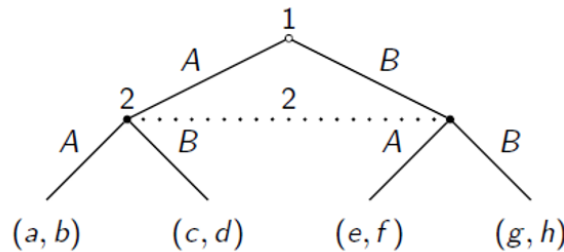


Figura 2.1: Árbol juego simultáneo

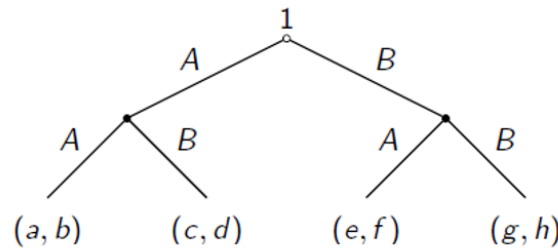


Figura 2.2: Árbol juego secuencial

2.1.3. El modelo de Stackelberg

Dentro de los distintos modelos presentes en la teoría de juego, nos encontramos con el modelo de Stackelberg. El primer juego de Stackelberg fue descrito por el alemán economista Heinrich Freiherr von Stackelberg en 1934, que estudió la competencia entre dos empresas con bienes homogéneos. El concepto del modelo de Stackelberg se extendió a una variedad de campos y diversas investigaciones donde se estudiaba situaciones en donde estaba presente la relación líder-seguidor (Chu y You, 2014).

En los juegos dinámicos, como es el caso de Stackelberg, se pueden apreciar varias jugadas y movimientos posibles que tiene cada jugador en un punto de decisión, y con ello generar la representación que muestre el historial de juego (Carrillo de León y Limón Ledesma, 2015).

Modelo de duopolio de Stackelberg

El modelo de duopolio de Stackelberg consiste en dos jugadores: un líder y un seguidor. El juego de Stackelberg es un juego sucesivo. Por lo tanto, el líder toma acciones primero y luego el seguidor reacciona a las decisiones del líder racionalmente. Se supone que el líder sabe de antemano que el seguidor observará sus decisiones y el líder tiene pleno conocimiento de cómo el seguidor responderá a sus decisiones. Una vez que el líder toma sus decisiones debe comprometerse con ellas. El líder es reconocido por tener ciertas ventajas por sobre sus seguidores, entre ellas se puede considerar la infraestructura del fabricante. Estas ventajas permiten al líder obtener un mayor beneficio que sus seguidores. Es por esto que el líder debe garantizar incentivos a sus seguidores, porque de otra forma estos podrían negarse a participar en la cadena de suministro y convertir al plan del líder en un plan estratégico no rentable (Yue y You, 2014b). Este modelo decide sucesivamente sobre la cantidad a producir o el precio de un producto.

■ Definición formal juego de Stackelberg en base a cantidad

El desarrollo temporal del juego de Stackelberg en base a la cantidad a producir es el siguiente (Gibbons, 1993):

1. La empresa líder (1) escoge una cantidad $q_1 \geq 0$
2. La empresa seguidora (2) observa q_1 y escoge entonces una cantidad $q_2 \geq 0$
3. Las ganancias de la empresa i vienen dadas por la función de beneficio:

$$\pi_i(q_i, q_j) = q_i[P(Q) - c] \quad (2.3)$$

donde $P(Q) = a - Q$ es el precio de equilibrio de mercado cuando la cantidad agregada es $Q = q_1 + q_2$ y c corresponde al coste marginal constante de producción, los costos fijos son cero.

■ Definición formal juego de Stackelberg en base a precio

Si las variables estratégicas son los precios, significaría que las empresas seguidoras fijan sus precios en respuesta a la iniciativa de la empresa líder, y esta elige sus precios sabiendo que las seguidoras ajustarán posteriormente sus precios de una manera predecible ([Fernández-Baca, 2000](#)). En este contexto, el juego de Stackelberg en base a precios tiene la siguiente secuencia ([Gibbons, 1993](#)):

1. La empresa líder (1) escoge precio $p_1 \geq 0$
2. La empresa seguidora (2) observa p_1 y luego decide su precio $p_2 \geq 0$
3. Las ganancias de la empresa i vienen dadas por la función de beneficio:

$$\pi_i(p_i, p_j) = q_i(p_i, p_j)[p_i - c] \quad (2.4)$$

donde $q_i(p_i, p_j) = a - p_i + bp_j$ es la cantidad demandada de la empresa i por los consumidores y $b, b > 0$, refleja hasta qué punto el producto de la empresa i es un sustituto del producto de la empresa j ([Gibbons, 1993](#)).

Stackelberg con equilibrio

Este caso se centra en la toma de decisiones secuencial y no cooperativa por parte de los jugadores. En juegos de dos jugadores estas estrategias aseguran que ningún jugador se desvíe de su estrategia de equilibrio dinámico durante el horizonte temporal del juego. Los modelos de Cournot y Stackelberg con equilibrios son conceptos útiles para modelos estáticos o modelos de corto horizonte, los modelos de juegos dinámicos resultan más útiles cuando el horizonte no es demasiado corto, de forma que el ajuste para alcanzar el estado de equilibrio no debe ser ignorado. ([Cruz Jr, 1975](#)).

Stackelberg en la cadena de suministro

Considerando los distintos agentes dentro de la cadena de suministro que componen las distintas etapas de aprovisionamiento, producción y distribución y bajo el contexto del

juego de Stackelberg se considerarán los distintos juegos para estructura cooperativa y no cooperativa entre los agentes en cuestión:

- **Stackelberg cooperativo**

En esta parte, se aplica un enfoque de juego cooperativo a la relación entre los agentes de la cadena de suministro (productor-mayorista) con el fin de determinar si ambas partes pueden aumentar sus ganancias si trabajan de manera cooperativa. Con este enfoque, el vendedor trabaja en conjunto para obtener un resultado que hace que ambos participantes se encuentren en mejor situación ([Esmaeili et al., 2009](#)).

- **Stackelberg no cooperativo**

En esta parte, se considera que la relación entre el productor y el mayorista tiene estructura no cooperativa. En concreto, se considera la interacción entre el comprador y el vendedor como un juego de Stackelberg, donde uno de los participantes, el líder, tiene la iniciativa. El líder hace el primer movimiento y el seguidor reacciona al jugar el mejor movimiento consistente con la información disponible. El objetivo del líder es diseñar su movimiento de tal manera que se maximice su ingreso después de considerar todos los movimientos racionales que el seguidor puede idear ([Esmaeili et al., 2009](#)).

2.2. La Gestión de la Cadena de Suministro

La gestión de la cadena de suministro (Supply Chain Management, en inglés) es un término que involucra la esencia de la logística integrada. Se centra en las interacciones de la logística que tienen lugar en áreas y funciones de marketing y producción dentro de una empresa, también enfatiza en las relaciones entre empresas dentro del canal de flujo del producto. Una buena gestión en la cadena de suministro crea oportunidades para mejorar costos y el nivel de servicio ofrecido al cliente, mediante la coordinación y colaboración entre los distintos agentes de la cadena ([Ballou, 2004](#)).

La administración de la cadena de suministro engloba todas las actividades asociadas con el flujo y transformación de los bienes, desde que se obtiene la materia prima hasta que se entrega un producto terminado al usuario final, así también existen flujos de información relacionados. Los materiales y la información fluyen en ambos sentidos en la cadena de suministro, tal y como se observa en la siguiente figura (Christopher, 2016):

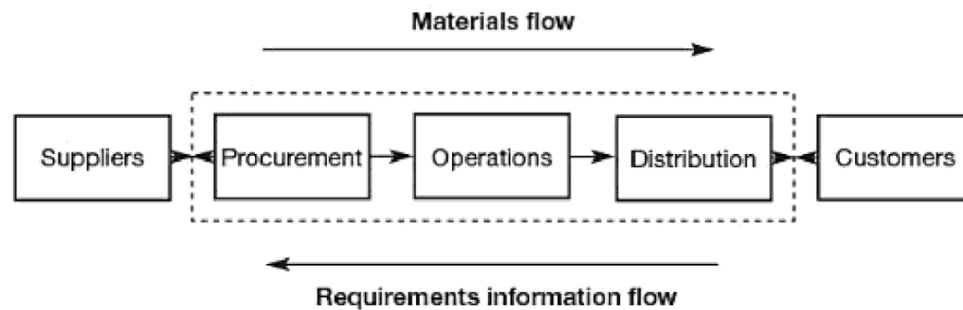


Figura 2.3: Proceso de gestión en la cadena de suministro

Hoy en día, y como Ballou (2004) menciona, las empresas están logrando éxito al compartir información valiosa con sus proveedores. Las empresas manufactureras que operan mediante un programa de producción mantienen relaciones con sus proveedores con mutuos beneficios mediante la disminución de inventarios, lo cual en el largo plazo mejora el desempeño de las empresas de forma individual y de la cadena como un todo.

2.2.1. Cadena de suministro en la Industria Cárnica

En la actualidad, la nueva estrategia competitiva en la cría de animales ya no se basa en las explotaciones agrícolas individuales que compiten como entidades independientes, sino como una cadena de suministro integrada (Christopher, 1999). Basado en la experiencia, la planificación de la producción en la industria cárnica se hace de forma individual. En la actualidad, con la regulación, responsabilidad social y valores del consumidor, se crea un nuevo entorno de planificación que dificulta la gestión de la cadena de suministro, haciendo necesario el desarrollo de métodos de planificación (Plà et al., 2013).

El modelamiento de las cadenas alimentarias presenta cierta dificultad debido, por ejemplo, a que variables como impacto ambiental, bienestar animal y calidad de la carne

son difíciles de cuantificar. Se trabaja con productos perecederos que tienen alto grado de variabilidad e incertidumbre en todos los eslabones de la cadena, desde el proveedor al mayorista (Rodríguez et al., 2014). Perez (2010) resalta la importancia de una visión completa de la cadena en la industria de productos cárnicos, de este modo se coordinan estrategias de productividad y de mejora de la calidad en los procesos y productos en cada uno de los eslabones.

La cadena de suministro de la industria de productos cárnicos incluye agentes encargados de la adquisición, producción, matanza, procesamiento, distribución y comercialización de los productos cárnicos a los consumidores finales. Dentro de la cadena, diferentes agentes trabajan de manera coordinada para realizar procesos dependientes que conducen a la producción y comercialización de productos finales (Rodríguez et al., 2014). En la siguiente figura se observa la cadena de suministro de esta industria:

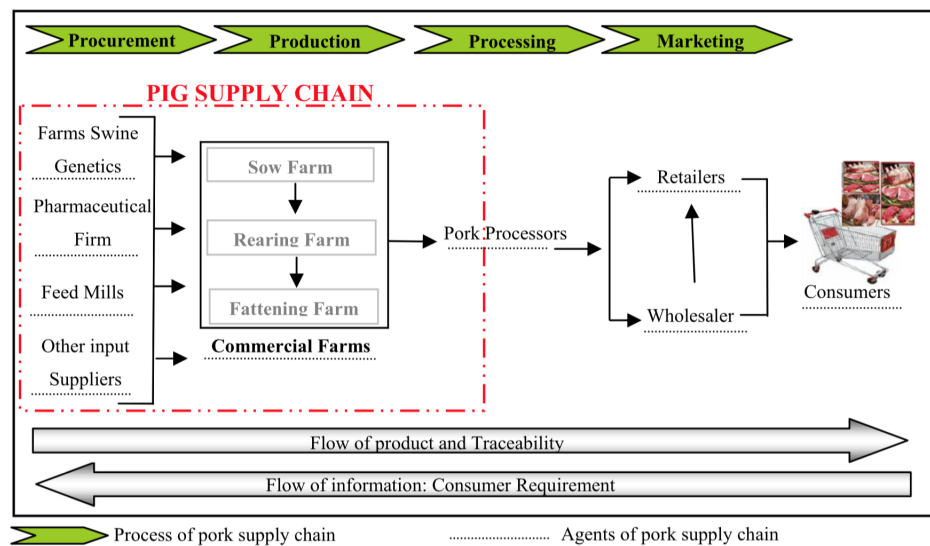


Figura 2.4: Cadena de suministro Industria Cárnica

Los lechones de las granjas de cerdas son transferidos a las granjas de crianza para más tarde ser trasladados a granjas de engorde para su posterior sacrificio en los mataderos. El producto resultante es procesado en una planta empacadora de carne que busca satisfacer la demanda de los clientes. En la etapa final de la cadena, los productos son entregados a los clientes mediante mayoristas o minoristas. La información fluye en ambos sentidos de

la cadena, entregando datos clave como la demanda y preferencias de los consumidores (Rodríguez et al., 2014).

Los diferentes eslabones de la cadena y sus agentes se describen a continuación:

- **Adquisición:** proceso mediante el cual se proporciona la materia prima para el procesamiento de los productos cárnicos. Empresas farmacéuticas y granjas de selección son los principales agentes; encargados de mejorar la genética, desarrollo de líneas puras y esquemas de cruce.
- **Producción:** consiste en el conjunto de operaciones que pueden ser desarrollados en cualquier granja o conjunto de granjas especializadas. La estructura generalmente responde a tres etapas diferentes: reproducción, cría y engorda, por lo que existen granjas de cerdas (para la producción de lechones), granjas de crías y granjas de engorda.
- **Procesadora de carne:** proceso en donde se realiza el sacrificio de animales y se procesa la carne para obtener distintos tipos de corte, ocurre principalmente en mataderos y líneas de corte. Dependiendo de la estructura, las líneas de corte se encuentran en una planta de envasado de carne separada o junto al matadero (Perez et al., 2010)
- **Marketing:** comprende las actividades de distribución y comercialización de los productos cárnicos al consumidor final. La comercialización es realizada por empresas mayoristas y minoristas, incluidas las carnicerías, obteniendo información sobre demanda y de las principales preocupaciones de los consumidores: bienestar de los animales, el medio ambiente, la calidad y la inocuidad de los alimentos, destacando la trazabilidad como uno de los aspectos más importantes a lo largo de la cadena (Perez et al., 2010).

2.3. Aplicación Teoría de Juegos

En la literatura se encuentran algunos ejemplos de aplicación de la Teoría de Juegos en la gestión de la cadena de suministro. [Kalashnikov y Ríos-Mercado \(2002\)](#) plantean un modelo de optimización binivel para una problemática en la Industria del gas natural, mediante un problema de minimización de transacciones monetarias, entre los agentes de la cadena, se refleja la toma de decisiones que surge en esta industria. El modelo planteado por estos autores corresponde a un problema lineal binivel mixto, que mediante reformulaciones se lleva a un problema de programación matemática estándar y con algoritmos propuestos se resuelve un problema de pequeña dimensión.

El proceso de toma de decisiones dentro de la cadena: comprar, vender, almacenar y transportar gas natural, es bastante complejo. Los agentes de la cadena: productores, transportistas (gasoductos) y vendedores son parte fundamental y las decisiones de cada uno de los miembros afecta a los otros. En la actividad de transporte de la cadena de suministro, el transportista firma un contrato con una empresa de gasoductos que le permite trasladar cantidades determinadas del producto entre diversos puntos del gasoducto. El problema radica en que se produce un desbalance entre la cantidad entregada y la estipulada en el contrato, por lo que el transportista debe pagar una multa. La penalización corresponde a una función de los desbalances diarios, por lo que el transportista busca minimizar la cantidad de desbalances diarios y así disminuir el monto de la multa. El modelo que se propone en este artículo toma al transportista como líder y al gasoducto como seguidor. Debido a las características de integralidad de las variables, se plantea un algoritmo que permite resolver el modelo para una instancia pequeña .

2.4. Modelos de Programación Matemática

El desarrollo de los modelos de programación se encuentra dentro de los avances científicos más importantes del siglo XX ([Hillier et al., 1989](#)), los efectos desde entonces han sido destacados. En la actualidad es una herramienta que ayuda a una gran variedad de empresas en todo el mundo a ahorrar miles o millones de dólares, incluyendo a pequeñas y

medianas empresas; su aplicación se ha ampliado rápidamente a distintos sectores.

La variedad de situaciones a las que se puede aplicar estos modelos es muy grande, abarcando desde la asignación de instalaciones de producción hasta la asignación de recursos nacionales acorde a las necesidades de un país; desde la selección en carteras de inversiones hasta la selección de patrones de envío, entre otros (Hillier et al., 1989). Todos estos modelos tienen en común la planeación de actividades que permiten obtener un resultado óptimo, es decir, el resultado que alcance de mejor manera el objetivo del modelo entre todas las alternativas disponibles.

2.4.1. Modelo de Programación Lineal

La programación lineal describe el problema mediante un modelo matemático en el cual todas las funciones matemáticas que se utilizan en el modelo deben ser funciones lineales. La forma general de expresar los problemas de programación lineal pueden escribirse de la siguiente forma estándar (Bard, 2013) :

$$\text{mín } f(\mathbf{x}) \triangleq \mathbf{c}\mathbf{x} \quad (2.5)$$

$$\text{subject to } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.6)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \quad (2.7)$$

donde $\mathbf{c}$ corresponde a un vector fila de dimensión n , $\mathbf{b}$ a un vector columna dimensión m , $\mathbf{A}$ a una matriz de $m \times n$ con $m \leq n$ y $\mathbf{x} \in R^n$. Las restricciones sobre las variables son ecuaciones lineales o límites de no negatividad. El coeficiente $\mathbf{c}$ en la función objetivo se conoce como los costos, la matriz $\mathbf{A}$ comprende los coeficientes tecnológicos; al lado derecho de la igualdad, $\mathbf{b}$ indica los recursos disponibles. En general se supone que los datos ($\mathbf{c}$, $\mathbf{A}$, $\mathbf{b}$) que definen el problema son conocidos y deterministas.

2.4.2. Modelo de Programación Entera-Mixto

La programación entera describe un problema mediante variables de decisión que solamente toman valores enteros. Si todas las funciones matemáticas son lineales corresponde a

un problema de programación lineal entera y puede escribirse de la siguiente forma (Bard, 2013) :

$$\text{mín } f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} \quad (2.8)$$

$$\text{subject to } \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{b} \quad (2.9)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \text{ and integer} \quad (2.10)$$

donde $\mathbf{c}$ corresponde a un vector fila de dimensión n , $\mathbf{b}$ a un vector columna dimensión m , $\mathbf{A}$ a una matriz de $m \times n$ con $m \leq n$ y $\mathbf{x} \in R^n$ al vector de decisión, el cual tiene un carácter no-negativo y entero.

Cuando se tiene en un mismo problema variables de decisión continuas y enteras se habla de programación entera-mixto y se expresa de la siguiente manera (Bard, 2013):

$$\text{mín } f(\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{x} + \mathbf{d}\mathbf{y} \quad (2.11)$$

$$\text{subject to } \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{b} \quad (2.12)$$

$$\mathbf{x} \geq 0 \text{ and integer} \quad (2.13)$$

$$\mathbf{y} \geq 0 \quad (2.14)$$

donde $\mathbf{d}$ corresponde a un vector fila de dimensión s , $\mathbf{B}$ a una matriz de $m \times s$, e $\mathbf{y}$ al vector de decisión de dimensión s , el cual tiene un carácter continuo y no-negativo. Cuando las variables enteras pueden tomar cierto número de decisiones del tipo “sí o no”, se habla de variables binarias. Debido a que estos problemas involucran solamente dos posibilidades, la variable decisión se puede representar de la siguiente forma (Hillier et al., 1989):

$$x = \begin{cases} 1 & \text{si la decisión es sí} \\ 0 & \text{si la decisión es no} \end{cases}$$

2.5. Modelo de Programación Binivel

En muchos procesos de toma de decisiones existe una estructura jerárquica entre los agentes tomadores de decisiones, donde estas se toman en los diferentes niveles de esta jerarquía. Las interacciones entre los agentes participantes en la cadena de suministro son capturadas a través de un juego entre un líder con un seguidor que sigue la estructura del juego de Stackelberg.

La estrategia básica líder/seguiror fue propuesta originalmente por el duopolio de Von Stackelberg. El juego de Stackelberg es aplicable para ciertos sistemas de toma de decisiones jerárquicas en economías mixtas, donde los responsables políticos toman decisiones en el nivel superior e influyen la toma de decisiones de los particulares y empresas (Migdalas et al., 2013).

El área de investigaciones enfocada en las estructuras jerárquicas es la programación multinivel. Una forma de manejar este tipo de jerarquías es centrarse en una sola panta e incluir los otros niveles como restricciones. En términos de modelado, el dominio de soluciones factibles está asociado a un problema de programación multinivel determinado por una serie de problemas de optimización que deben resolverse en una secuencia determinada. Cuando se consideran solo dos niveles, se denomina optimización binivel. En este caso se tiene un líder (asociado al nivel superior) y un seguidor (asociado al nivel inferior). Si las restricciones del líder y seguidor son lineales, se trata de un problema de optimización binivel lineal (Bilevel Linear Programming Problem, en inglés) (Migdalas et al., 2013). Las decisiones de un nivel pueden afectar en el comportamiento de la toma de decisiones en otros niveles, a pesar de que el líder no controle las acciones de los seguidores totalmente.

El problema de programación binivel lineal (BLPP) puede escribirse de la siguiente forma (Bard, 2013):

Para $x \in X \subset R^n$, $y \in Y \subset R^m$, $F : X \times Y \rightarrow R^1$, y $f : X \times Y \rightarrow R^1$.

$$\min_{x \in X} F(x, y) = c_1 x + d_1 y \quad (2.15)$$

$$\text{subject to } A_1x + B_1y \leq b_1 \quad (2.16)$$

$$\min_{y \in Y} f(x, y) = c_2x + d_2y \quad (2.17)$$

$$\text{subject to } A_2x + B_2y \leq b_2 \quad (2.18)$$

Donde $c_1, c_2 \in R^m$, $b_1 \in R^p$, $b_2 \in R^q$, $A_1 \in R^{p \times n}$, $B_1 \in R^{p \times m}$, $A_2 \in R^{q \times n}$, $B_2 \in R^{q \times m}$. Los conjuntos X e Y corresponden a restricciones adicionales de las variables, cotas inferiores y superiores o carácter entero. Las variables x corresponden a las decisiones del líder e y a las del seguidor. Luego de que el líder selecciona su decisión x , el primer término en la función objetivo del seguidor se transforma en una constante. De este modo, $f(x, y)$ es reemplazado por $f(y)$.

Bard (2013) define las siguientes regiones de soluciones factibles, para el problema general y para los agentes involucrados en el juego:

Definiciones:

(1) Región factible:

$$S \triangleq \{(x, y) : x \in X, y \in Y, A_1x + B_1y \leq b_1, A_2x + B_2y \leq b_2\} \quad (2.19)$$

(2) Región factible para el seguidor para cada $x \in X$,:

$$S(x) \triangleq \{y \in Y : B_2y \leq b_2 - A_2x\} \quad (2.20)$$

(3) Proyección de S en el espacio de decisión del líder:

$$S(X) \triangleq \{x \in X : \exists y \in Y, A_1x + B_1y \leq b_1, A_2x + B_2y \leq b_2\} \quad (2.21)$$

(4) Conjunto de reacción racional del seguidor para $x \in S(X)$,:

$$P(x) \triangleq \{y \in Y : y \in \arg \min[f(x, \hat{y}) : \hat{y} \in S(x)]\} \quad (2.22)$$

(5) Región Inducible:

$$IR \triangleq \{(x, y) : (x, y) \in S, y \in P(x)\} \quad (2.23)$$

Para asegurar la consistencia de las definiciones anteriores, se asume que S es un conjunto no vacío y compacto, y que para todas las decisiones tomadas por el líder, el seguidor tiene un espacio de reacción $P(x) \neq \emptyset$. El conjunto de reacción racional, $P(x)$, corresponde a la respuesta del seguidor, mientras que la región inducible IR define el conjunto en el cual el líder puede optimizar. De este modo, el BLPP puede ser escrito como:

$$\min\{F(x, y) : (x, y) \in IR\} \quad (2.24)$$

El mismo autor señala la siguiente proposición, la cual propone una reformulación al problema 2.15 del BLPP para variables continuas:

Proposición 1:

Una condición necesaria para que (x^*, y^*) sean solución del BLPP es que existan vectores (fila) u^* y v^* , tales que (x^*, y^*, u^*, v^*) resuelvan el siguiente problema:

$$\min c_1 x + d_1 y \quad (2.25)$$

$$\text{subject to } A_1 x + B_1 y \leq b_1 \quad (2.26)$$

$$u B_2 - v = -d_2 \quad (2.27)$$

$$u(b_2 - A_2 x - B_2 y) + v y = 0 \quad (2.28)$$

$$A_2 x + B_2 y \leq b_2 \quad (2.29)$$

$$x \geq 0, y \geq 0, u \geq 0, v \geq 0 \quad (2.30)$$

Mediante esta proposición se genera una nueva restricción no lineal (2.28). No obstante, esta reformulación juega un rol clave en el desarrollo de algoritmos para la resolución del BLPP.

2.5.1. Algoritmo para BLPP

Existen diversos algoritmos propuestos para resolver problemas de programación binivel lineal. Muchos de ellos son solo de interés académico debido que resultan poco prácticos para implementar o muy ineficientes (Bard, 2013).

A continuación, se plantea uno de los métodos más populares para resolver BLPP, conocido como “Kuhn-Tucker Approach”, que toma como base el problema reformulado en la proposición anterior (2.25). La idea principal es usar la técnica del “branch and bound” para la restricción 2.28. Al omitir o relajar esta restricción, el problema vuelve a ser de programación lineal, siendo más fácil de resolver.

Kuhn-Tucker Approach:

Para ver cómo se puede resolver el problema se deben reescribir las inecuaciones del problema del seguidor de la siguiente manera: $g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$, $i = 1, \dots, q + m$, y teniendo en cuenta que la holgura complementaria simplemente significa $u_i g_i(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$ ($i = 1, \dots, q + m$).

Fortuny-Amat y McCarl (1981) fueron los primeros en proponer un esquema para estos términos. En esencia, convierten la reformulación del problema general en uno de programación lineal entero-mixto reemplazando los términos multiplicativos de la restricción no lineal en un conjunto de desigualdades:

$$\begin{aligned} u_i &\leq Mz_i \\ g_i &\leq M(1 - z_i) \end{aligned}$$

donde M representa una constante suficientemente grande. Se agregan $q + m$ variables y $2(q + m)$ restricciones nuevas al problema. Este método permite resolver el problema, sin embargo, no asegura algún grado de eficiencia en su resolución.

Bard y Moore (1990) por otro lado, proponen un camino alternativo para reescribir la restricción no lineal del problema 2.25. El algoritmo propuesto por estos autores permite encontrar el óptimo global del problema garantizando mayor nivel de eficiencia comparado a otros algoritmos. La idea básica consiste en omitir la restricción 2.28 y solucionar el

problema de programación lineal. En cada iteración se debe verificar si la restricción no lineal satisface las condiciones, en este caso, el punto encontrado corresponde a una posible solución; si no, mediante el método del branch and bound se examinan todas las posibles combinaciones para esta restricción.

Antes de describir el algoritmo, se definen los siguientes conjuntos. Sea $W = \{1, \dots, q + m\}$ el conjunto de índices para los términos en 2.28 y $\bar{F}$ el límite superior de la función objetivo del líder. En el k th nivel del búsqueda en el árbol se define el subconjunto de índices $W_k \subset W$, y un conjunto P_k donde se asigna cualquier $u_i = 0$ o $g_i = 0$ para cada $i \in W_k$. Sea:

$$S_k^+ = \{i : i \in W_k \text{ y } u_i = 0\}$$

$$S_k^- = \{i : i \in W_k \text{ y } g_i = 0\}$$

$$S_k^0 = \{i : i \notin W_k\}$$

Para $i \in S_k^0$ las variables u_i y g_i son libres de asumir valores negativos en la solución del problema 2.25 con la restricción no lineal omitida (2.28).

Algoritmo:

Paso 0 : Inicialización. Fijar $k = 0$, $S_k^+ = \emptyset$, $S_k^- = \emptyset$, $S_k^0 = \{1, \dots, q + m\}$ y $\bar{F} = \infty$.

Paso 1 : Iteración k . Sea $u_i = 0$ para $i \in S_k^+$ y $g_i = 0$ para $i \in S_k^-$. Resolver 2.25 sin 2.28. Si el problema resultante es infactible, ir al Paso 5; de lo contrario hacer $k \leftarrow k + 1$ y designar la solución como $(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{u}^k)$

Paso 2: Revisar. Si $F(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k, \mathbf{u}^k) \geq \bar{F}$, ir al Paso 5.

Paso 3: Branching. Si $u_i^k g_i^k(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k) = 0$, $i = 1, \dots, q + m$, ir al Paso 4; sino, seleccionar i para el cual $u_i^k g_i^k(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k) = 0$ es mayor y designarlo como i_1 . Hacer $S_k^+ \leftarrow S_k^+ \cup \{i_1\}$, $S_k^0 \leftarrow S_k^0 \setminus \{i_1\}$, $S_k^- \leftarrow S_k^-$. Agregar i_1 a P_k , e ir al Paso 1.

Paso 4: Actualizar. $\bar{F} = F(\mathbf{x}^k, \mathbf{y}^k)$.

Paso 5 : Retroceder. Si no hay nodos vivos, ir al Paso 6. Sino ramificar un nuevo vértice y actualizar S_k^+ , S_k^- , S_k^0 y P_k , ir al Paso 1.

Paso 6 : **Finalización.** Si $\bar{F} = \infty$, no hay solución factible para 2.15. De lo contrario, declarar el punto factible asociado a $\bar{F}$ como la solución óptima.

Proposición 2: Bajo el supuesto de singularidad asociado al conjunto $P(\mathbf{x})$ (2.22), el algoritmo finaliza el óptimo global del BLPP (2.15) .

Demostración: El algoritmo obliga la satisfacción de las condiciones de holgura complementaria en problema 2.25, que es una representación equivalente de 2.15. Al considerar implícitamente todas las combinaciones de $u_i g_i(x, y) = 0$ en los Pasos 3 y 5, la solución óptima no puede ignorarse.

2.6. Modelo de Planificación de Producción

Como punto de partida se utiliza el trabajo presentado por Albornoz et al. (2015) el cual desarrolla un modelo de planificación de producción para la industria porcina. El objetivo principal del modelo es encontrar la combinación de patrones de corte que logren satisfacer la demanda de productos frescos y congelados. Existen varios patrones de corte en el mercado; cada patrón de corte implica una actividad que corresponde a un conjunto de productos específicos, con su respectivo costo de producción. Un producto se puede obtener de diferentes patrones de corte. Sin embargo, el rendimiento obtenido puede ser diferente según el patrón de corte utilizado.

La empresa procesadora no tan solo debe considerar del rendimiento de los productos según el patrón de corte, también debe considerar la disponibilidad del canal, comportamiento de la demanda, donde cada producto tiene su propio nivel de demanda. La principal preocupación en este modelo es determinar las veces que se aplica cada patrón de corte, y los niveles de producción para cada producto. La gran variabilidad en la demanda, incertidumbre del mercado y perecibilidad de los productos son algunos de los problemas que presentan la mayoría de los agentes en la cadena de suministro en la industria porcina.

En este problema la materia prima es procesada mediante cortes longitudinales que se realizan a los animales, ya sea cerdo o vacuno, dando como resultado carcasas de animales

(dos secciones simétricas). De cada una de estas carcasas se pueden obtener secciones, las cuales son procesadas para adquirir distintos productos, esto se logra mediante los diferentes patrones de corte. Cada sección tiene diferentes patrones y rendimientos según los productos que se deseen obtener. Además, las carcasas no son homogéneas, tienen propiedades que varían de carcasa en carcasa, tales como la ternura, cantidad y distribución de grasa y la configuración de los tejidos; por lo que según las características del tipo de carcasa se determina los productos que se pueden extraer de ella.

A continuación se presenta el modelo desarrollado por [Albornoz et al. \(2015\)](#):

Conjuntos y parámetros:

T	: Número de periodos del horizonte de planificación.
J	: Número de patrones de corte.
L	: Duración de los productos frescos.
$k \in K$	: Conjunto de secciones por carcasa.
$j \in J_k$	: Conjunto de patrones de corte por sección k .
$r \in R$	: Conjunto para representar los diferentes tipos de carcasas.
$i \in P$	: Conjunto de productos.
H	: Carcasas disponibles para procesar durante el horizonte de planificación.
α_r	: Proporción de carcasas del tipo r .
ψ_{ijr}	: Rendimiento del producto i usando el patrón de corte j en carcasa del tipo r .
p_{it}^f	: Precio de venta del producto fresco i .
p_{it}^c	: Precio de venta del producto congelado i .
c_j	: Costo operacional del patrón de corte j en tiempo normal.
c_j^e	: Costo operacional del patrón de corte j en tiempo extra.
b^c	: Costo de procesar producto congelado (por kg).
h^f	: Costo de mantener en inventario el producto fresco por un periodo.
h^c	: Costo de mantener en inventario el producto congelado por un periodo.
f_i^f	: Costo por faltante del producto fresco i .
f_i^c	: Costo por faltante del producto congelado i .

- F^c : Capacidad para el proceso de congelación.
 W^f : Capacidad de almacenamiento del producto fresco (en kg).
 W^c : Capacidad de almacenamiento del producto congelado (en kg).
 t_j : Tiempo de operación del patrón de corte j .
 T_w : Horas disponibles en tiempo normal.
 T_w^e : Horas disponibles en tiempo extra.
 δ : Parámetro auxiliar para mejorar el control de las carcasas disponibles.
 τ : Duración del proceso de congelación
 d_{it}^f : Demanda del producto fresco i en periodo t .
 d_{it}^c : Demanda del producto congelado i en periodo t .

Variables de decisión:

- v_{it}^f : Cantidad del producto fresco i a vender en el periodo t .
 v_{it}^c : Cantidad del producto congelado i a vender en el periodo t .
 x_{it} : Cantidad del producto i a procesar en el periodo t .
 $x_{it(r')}$: Cantidad del producto i a procesar en el periodo t para vender en t' .
 H_t : Cantidad de carcasas a comprar en el periodo t .
 z_{jrt} : Veces que se utiliza el patrón de corte j en carcasa de tipo r en el periodo t en tiempo normal.
 z_{jrt}^e : Veces que se utiliza el patrón de corte j en carcasa de tipo r en el periodo t en tiempo extra.
 x_{it}^c : Cantidad del producto congelado i a procesar en el periodo t .
 I_{it}^c : Cantidad del producto congelado i a mantener en inventario en el periodo t .
 u_{it}^f : Cantidad de faltante del producto fresco i en el periodo t con l .
 u_{it}^c : Cantidad de faltante del producto congelado i en el periodo t con l .

Función Objetivo:

La función objetivo se obtiene calculando la diferencia entre los ingresos por venta de los productos, frescos y congelados, obtenidos mediante los patrones de corte, menos los costos operacionales asociados. Estos costos operacionales son los siguientes: costos de

congelación, costo inventario de productos congelados y frescos, costos por no satisfacer la demanda y costos de mano de obra asociados a los patrones de corte.

$$\begin{aligned}
 \max \sum_{i \in P} \sum_{t=1}^T (p_{it}^f v_{it}^f + p_{it}^c v_{it}^c) - \sum_{i \in P} \sum_{t=1}^T b^c x_{it}^c - \sum_{i \in P} \sum_{t=1}^T h^c I_{it}^c - \sum_{i \in P} \sum_{t=1}^T \sum_{l=0}^L h^f l x_{it(t+l)}^f \\
 - \sum_{i \in P} \sum_{t=1}^T (f_i^f u_{it}^f + f_i^c u_{it}^c) - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in J} \sum_{r \in R} (c_j z_{jrt} + c_j^e z_{jrt}^e) \quad (2.31)
 \end{aligned}$$

Restricciones:

- Carcasas a ser procesadas:

$$\alpha_r H_t = \sum_{j \in J_k} (z_{jrt} + z_{jrt}^e); t = 1, \dots, T, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (2.32)$$

- Rendimiento de patrones de corte:

$$x_{it} = \sum_{r \in R} \sum_{j \in J_k} \psi_{ijr} (z_{jrt} + z_{jrt}^e) = 0; \forall i \in P, t = 1, \dots, T, \forall k \in K, \quad (2.33)$$

- Horas-Hombre disponibles en tiempo normal y tiempo extra:

$$\sum_{r \in R} \sum_{j \in J_k} t_j z_{jrt} \leq T_w; \forall t = 1, \dots, T \quad (2.34)$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{j \in J_k} t_j z_{jrt}^e \leq T_w^e; \forall t = 1, \dots, T \quad (2.35)$$

- Balance producto fresco y congelado:

$$x_{it} = \sum_{l=0}^L x_{it(t+l)}^f + x_{it}^c; \forall i \in P, t = 1, \dots, T. \quad (2.36)$$

- Producto fresco a vender:

$$v_{it}^f = \sum_{l=0}^L x_{i(t-l)t}^f ; \forall i \in P, t = 1, \dots, T. \quad (2.37)$$

- Producto congelado a vender:

$$v_{it}^c = I_{i(t-1)}^c + x_{i(t-\tau)}^c - I_{it}^c ; \forall i \in P, t = 1, \dots, T. \quad (2.38)$$

- Demanda de producto fresco:

$$v_{it}^f + u_{it}^f = d_{it}^f ; \forall i \in P, t = 1, \dots, T. \quad (2.39)$$

- Demanda de producto congelado:

$$v_{it}^c + u_{it}^c = d_{it}^c ; \forall i \in P, t = 1, \dots, T. \quad (2.40)$$

- Límite de carcasas:

$$\delta H \leq \sum_{t=1}^T H_t \leq H ; t = 1, \dots, T \quad (2.41)$$

- Capacidad de congelamiento:

$$\sum_{i \in P} \left(\sum_{t'=t-\tau}^t x_{it'}^c \right) \leq F^c ; t = 1, \dots, T. \quad (2.42)$$

- Capacidad almacenar producto fresco:

$$\sum_{i \in P} \sum_{l=1}^L \sum_{t'=t}^{t-l+|L|-1} x_{i(t-l)(t')}^f \leq W^f ; t = 1, \dots, T. \quad (2.43)$$

- Capacidad almacenar producto congelado:

$$\sum_{i \in P} I_{it}^c \leq W^c ; t = 1, \dots, T. \quad (2.44)$$

- Naturaleza de las variables de decisión: H_t , z_{jrt} y z_{jrt}^e son variables enteras no-negativas para cada $j \in J$ y $t \in T$. Las otras variables de decisión son continuas y no-negativas.



3 | Metodología

3.1. Descripción del problema de teoría de juegos

La industria agroalimentaria está evolucionando continuamente y enfrentando grandes cambios impulsados principalmente por el escenario en que se encuentran los países en desarrollo, en un fuerte y continuo desarrollo económico, aumentando el consumo de proteínas y como consecuencia, aumentando el consumo de carne. Esto indica que la industria cárnica debe prepararse para enfrentar el crecimiento esperado a nivel mundial. Mantener una buena relación con los diferentes agentes dentro de la cadena de suministro, coordinar actividades y compartir información clave ayudan a alinear la cadena mejorando la eficiencia y productividad en la industria. El proceso de toma de decisiones dentro de la cadena es bastante complejo.

Las interacciones entre los agentes participantes en la cadena de suministro son capturadas a través de un juego entre un líder con un seguidor que sigue la estructura del juego de Stackelberg. Este juego involucra dos agentes decisores, donde cada una de las decisiones de un jugador tiene efectos sobre el otro. Los agentes corresponden a: procesadora de productos cárnicos y mayorista.

En la actividad entre la planta procesadora y la empresa mayorista, la planta procesadora produce una cantidad de productos dada por el comportamiento histórico de la demanda que vende a los mayoristas, quienes mediante sus propios canales distribuyen y comercializan los productos cárnicos a los clientes finales. El problema radica en que se produce un desbalance entre la cantidad que produce la planta procesadora y la demanda que deben enfrentar los mayoristas, por lo que el productor debe pagar una multa. Esta penalización puede

disminuir su valor mediante la coordinación e integración de actividades e información que pueden compartir ambos agentes de la cadena. Al compartir información sobre las preferencias del consumidor y demanda, el productor evita pérdidas por productos vencidos y colabora al mayorista a maximizar su nivel de servicio, mejorando el rendimiento de la toda la cadena.

Los agentes involucrados en este juego, sus estrategias y ganancias se detallan a continuación:

Empresa procesadora: es la encargada del procesamiento de la carne desde la materia prima obtenida del proveedor hasta el producto final. Este jugador decide, en base a los patrones de corte a utilizar, la cantidad a procesar de cada uno de sus productos, cuanto va a vender a cada distribuidor, la cantidad de carcasas necesarias y el inventario que va a almacenar de producto terminado. La planta procesadora tiene como objetivo maximizar las ganancias obtenidas a través de la comercialización de los productos cárnicos.

Empresa mayorista: es la encargada de la compra y comercialización de carne. Los productos cárnicos son comprados a la empresa procesadora para luego ser vendidos a clientes finales. Este jugador decide sobre la cantidad de faltante a sus clientes finales y lo que mantendra en inventario. Tiene como objetivo maximizar el nivel de servicio.

El juego que se da entre ambos agentes presenta las siguientes características:

- Estático: Los jugadores toman las decisiones de manera simultánea, la empresa mayorista no conoce las decisiones que la procesadora de carne está tomando, de esta forma se obtiene el carácter estático en este juego.
- No cooperativo: Cada uno de los jugadores presentan intereses opuestos en el juego. La empresa procesadora busca maximizar sus utilidades, mientras que el mayorista busca maximizar su nivel de servicio, sin importar el costo que esto le conlleva al productor.

- Con información perfecta: Ambos jugadores conocen la estructura del juego, los posibles resultados y estrategias. La planta procesadora conoce la función objetivo del mayorista y también sus preferencias.

Dadas las características detalladas recientemente, juego estático y no cooperativo, se asegura que los jugadores no se desviarán de su estrategia de equilibrio durante el horizonte temporal del juego, siempre y cuando se consideren cortos horizontes.

De este modo, nos encontramos bajo un juego de Stackelberg no cooperativo. En donde el líder, quien tiene la iniciativa, hace el primer movimiento y el seguidor reacciona al mejor movimiento que pueda realizar con la información que dispone. El líder maximiza sus utilidades considerando todos las posibles jugadas racionales que el jugador pueda idear.

Este juego de Stackelberg describe un problema que puede ser modelado mediante el problema de programación binivel lineal. El cual mediante la metodología de Stackelberg busca ayudar en la coordinación e integración de dos agentes en la cadena de suministro de la industria cárnica.

3.2. Modelo de Optimización de dos niveles

En esta sección se presenta el modelo de programación binivel que modela el juego de Stackelberg entre los agentes en la cadena de suministro de la industria cárnica. Los principales supuestos y consideraciones que se han hecho para la formulación del modelo binivel derivan de trabajos que ya han desarrollado esta temática ([Albornoz et al., 2015](#)).

3.2.1. Descripción del modelo

Para el desarrollo y formulación de este modelo de optimización binivel se considera la existencia de solo una empresa procesadora de productos de carne porcina y una empresa mayorista. La empresa procesadora cuenta con ciertas ventajas por sobre los otros agentes en la industria, entre ellas se puede considerar la infraestructura, además, este agente decide cuánto vender a sus clientes y en caso de no vender a ellos, el mayorista no tiene opción

de ejercer. De este modo el líder, en este juego, es la empresa procesadora, quien obtiene mayor beneficio y tiene un mayor poder de negociación con su seguidor, empresa mayorista. El líder (empresa procesadora) es quien decide primero su estrategia y el seguidor (empresa mayorista) reacciona a esta decisión. El cómo se procesará la materia prima, dado por los patrones de corte, tiene gran relevancia en este modelo:

Patrones de Corte: La forma en la que cada una de las carcasas puede ser cortadas define un patrón de corte. Cada patrón entrega un rendimiento sobre los productos que incluye este. Debido a la gran cantidad de patrones existentes, se trabaja con secciones de patrones para disminuir esta cantidad.

Consideraciones

En el modelo de [Albornoz et al. \(2015\)](#) el problema presenta dos tipos de productos, carne fresca y carne congelada. Para el desarrollo del modelo binivel, por simplicidad, se considerará solo un tipo de producto, carne fresca. Según el artículo 271 del Reglamento Sanitario de los Alimentos de Chile, la carne fresca es “aquella que ha sido sometida a un proceso de enfriamiento, en un rango de temperaturas de 1° a 7°C por 24 a 48 horas” y según normas sanitarias, los productos frescos pueden ser almacenados por un periodo máximos de 10 días.

3.2.2. Formulación Modelo Binivel

El siguiente modelo pretende ayudar a la coordinación e integración de dos agentes en la cadena de suministro de la industria cárnica bajo el esquema de líder y seguidor establecido por el juego de Stackelberg.

A continuación, se definen los conjuntos, parámetros y variables asociadas:

Conjuntos y parámetros:

T : Número de periodos del horizonte de planificación.

- J : Número de patrones de corte.
 $k \in K$: Conjunto de secciones por carcasa.
 $j \in J_k$: Conjunto de patrones de corte por sección k .
 $r \in R$: Conjunto para representar los diferentes tipos de carcasas.
 $i \in P$: Conjunto de productos.
 H : Carcasas disponibles para procesar durante el horizonte de planificación.
 α_r : Proporción de carcasas del tipo r .
 ψ_{ijr} : Rendimiento del producto i usando el patrón de corte j en carcasa del tipo r .
 p_i : Precio de venta del producto i .
 c_j : Costo operacional del patrón de corte j en tiempo normal.
 c_j^e : Costo operacional del patrón de corte j en tiempo extra.
 h : Costo de mantener un producto en inventario por un periodo para el líder.
 f_i : Costo por faltante del producto i para el líder.
 W : Capacidad de almacenamiento del líder (en kg).
 t_j : Tiempo de operación del patrón de corte j .
 T_w : Horas disponibles en tiempo normal.
 T_w^e : Horas disponibles en tiempo extra.
 δ : Parámetro auxiliar para mejorar el control de las carcasas disponibles.
 P : Precio de compra de una carcasa.
 d_{it} : Demanda del seguidor producto i en periodo t .
 G : Capacidad de almacenamiento del seguidor (en kg).

Variables de decisión:

- v_{it} : Cantidad a vender del producto i en el periodo t .
 x_{it} : Cantidad del producto i a tener en el periodo t .
 s_i : Cantidad de sobrante del producto i al final del horizonte de planificación.
 H_t : Cantidad de carcasas a comprar en el periodo t .
 z_{jrt} : Veces que se utiliza el patrón de corte j en carcasa de tipo r en el periodo t en tiempo normal.
 z_{jrt}^e : Veces que se utiliza el patrón de corte j en carcasa de tipo r en el periodo t en tiempo extra.

tiempo extra.

I_{it} : Cantidad de inventario a tener el líder del producto i en el periodo t .

u_{it} : Cantidad de faltante del seguidor del producto i en el periodo t .

I'_{it} : Cantidad a de inventario a tener el seguidor del producto i en el periodo t .

$$\max \sum_{i \in P} \sum_{t=1}^T p_i v_{it} - \sum_{t=1}^T PH_t - \sum_{t=1}^T \sum_{j \in J} \sum_{r \in R} (c_j z_{jrt} + c_j^e z_{jrt}^e) - \sum_{i \in P} \sum_{t=1}^T h I_{it} - \sum_{i \in P} \sum_{t=1}^T f_i u_{it} \quad (3.1)$$

subject to

$$\alpha_r H_t - \sum_{j \in J_k} (z_{jrt} + z_{jrt}^e) = 0 ; t = 1, \dots, T, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (3.2)$$

$$x_{it} - \sum_{r \in R} \sum_{j \in J_k} \psi_{ijr} (z_{jrt} + z_{jrt}^e) = 0 ; \forall i \in P, t = 1, \dots, T, \forall k \in K, \quad (3.3)$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{j \in J_k} t_j z_{jrt} \leq T_w ; \forall t = 1, \dots, T. \quad (3.4)$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{j \in J_k} t_j z_{jrt}^e \leq T_w^e ; \forall t = 1, \dots, T. \quad (3.5)$$

$$v_{it} - x_{it} - I_{it} + I_{i,t+1} = 0 ; \forall i \in P, t = 1, \dots, T - 1. \quad (3.6)$$

$$v_{iT} - x_{iT} + s_i - I_{iT} = 0 ; \forall i \in P. \quad (3.7)$$

$$\sum_{t=1}^T H_t \leq H ; \quad (3.8)$$

$$- \sum_{t=1}^T H_t \leq -\delta H ; \quad (3.9)$$

$$\sum_{i \in P} I_{it} \leq W ; t = 1, \dots, T. \quad (3.10)$$

$$v_{it} \geq 0, x_{it} \geq 0, s_i \geq 0, I_{it} \geq 0, H_t \text{ entera}, z_{jrt} \text{ entera}, z_{jrt}^e \text{ entera} \quad (3.11)$$

$$\min \sum_{i \in P} \sum_{t=1}^T u_{it} \quad (3.12)$$

subject to

$$v_{it} + u_{it} + I'_{it} - I'_{i,t+1} = d_{it} ; \forall i \in P, t = 1, \dots, T. \quad (3.13)$$

$$v_{iT} + u_{iT} + I'_{iT} = d_{iT} ; \forall i \in P. \quad (3.14)$$

$$\sum_{i \in P} I'_{it} \leq G ; \forall t = 1, \dots, T \quad (3.15)$$

$$I_{i,T} = 0 ; \forall i \in P. \quad (3.16)$$

$$u_{it} \geq 0 ; I'_{it} \geq 0 \quad (3.17)$$

Donde las variables v_{it} , x_{it} , s_i , H_t , z_{jrt} , z_{jrt}^e e I_{it} son las decisiones del líder y las variables u_{it} e I'_{it} las del seguidor.

La función objetivo 3.1 corresponde al líder, el cual busca maximizar su utilidad mediante los ingresos que recibe por venta de productos cárnicos al seguidor, y los siguientes costos: mantención de inventario, producción asociados a patrones de corte, adquisición de materia prima (carcasas de cerdo) y faltante, al no satisfacer completamente la demanda del mayorista. Por otro lado, el seguidor tiene como objetivo satisfacer toda su demanda, la función objetivo 3.12 es la del mayorista quien minimiza la demanda insatisfecha de sus productos.

Las siguientes restricciones son propias del líder:

- **Carcasas a ser procesadas (3.37)** : Establece la igualdad entre los tipos patrones de corte a utilizar y las carcasas a procesar en un periodo determinado, de modo que no quede materia prima sin ser procesada.
- **Rendimiento de patrones de corte (3.38)**: Esta restricción calcula los kilogramos de carne de cada producto obtenidos de los diferentes patrones de corte utilizados en cada periodo de tiempo.
- **Horas-Hombre disponibles en tiempo normal (3.39)**: Garantiza que no se excedan las horas de trabajo con las que cuenta la empresa procesadora de carne.
- **Horas-Hombre disponibles en tiempo extra (3.40)**: Garantiza que no se excedan las horas extra de trabajo con las que cuenta la empresa procesadora de carne.
- **Balance de producto producido (3.41, 3.42)**: Determina que lo producido de un

producto en un determinado periodo, incluyendo el inventario del periodo anterior, es lo que: se va a vender al seguidor, se mantendrá en inventario y, además considera sobrante, cantidad que la empresa vende en su propio local al final del horizonte de planificación al no ser solicitada por el mayorista (no presenta ingresos ya que se asume como costo hundido).

- **Límite de carcasas** (3.43, 3.44): Establece un límite superior e inferior de acuerdo a la cantidad de animales de los proveedores y un porcentaje δ dado que permite una mayor flexibilidad en el número de carcasas a procesar.
- **Capacidad de Inventario** (3.45): Garantiza que la capacidad con la que cuenta la empresa manufacturera de almacenar productos en inventario no se supere.
- **Naturaleza de las variables de decisión** (3.11): Todas las variables tienen carácter no-negativo, solo las carcasas a adquirir en cada periodo y los patrones de corte en tiempo normal y tiempo extra corresponden a variables enteras, las otras variables son continuas.

Las siguientes restricciones son propias del seguidor:

- **Satisfacción de demanda** (3.13, 3.14): Esta restricción asegura el cumplimiento de la demanda del producto en un periodo determinado, se considera faltante en caso de que la empresa procesadora no le haya vendido suficiente cantidad del producto para satisfacer la demanda.
- **Capacidad de almacenamiento** (3.15): Garantiza que la capacidad con la que cuenta el mayorista de almacenar productos en inventario no se supere.
- **Inventario final** (3.16): Satisface la condición de no almacenar productos al final del horizonte de planificación.
- **Naturaleza de las variables de decisión** (3.48): Todas las variables son no-negativas y continuas.

3.2.3. Reformulación Modelo

Mediante la **Proposición 1** se realiza una reformulación al modelo presentado, esta reformulación permite pasar de un modelo binivel a un modelo de un solo nivel. No obstante, en esta reformulación el problema se transforma en un modelo no lineal. Esta proposición es válida solo para variables continuas, de este modo, para simplificar la resolución del mismo se considerarán todas las variables como continuas, relajando la integralidad de los patrones de corte y carcasas a adquirir.

El modelo resultante de la reformulación es el siguiente:

$$\min - \sum_{i \in P} \sum_{t=1}^T p_i v_{it} + \sum_{t=1}^T PH_t + \sum_{t=1}^T \sum_{j \in J} \sum_{r \in R} (c_j z_{jrt} + c_j^e z_{jrt}^e) + \sum_{i \in P} \sum_{t=1}^T h I_{it} + \sum_{i \in P} \sum_{t=1}^T f_i u_{it} \quad (3.18)$$

subject to

$$\alpha_r H_t - \sum_{j \in J_k} (z_{jrt} + z_{jrt}^e) = 0 ; t = 1, \dots, T, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (3.19)$$

$$x_{it} - \sum_{r \in R} \sum_{j \in J_k} \psi_{ijr} (z_{jrt} + z_{jrt}^e) = 0 ; \forall i \in P, t = 1, \dots, T, \forall k \in K, \quad (3.20)$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{j \in J_k} t_j z_{jrt} \leq T_w ; \forall t = 1, \dots, T \quad (3.21)$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{j \in J_k} t_j z_{jrt}^e \leq T_w^e ; \forall t = 1, \dots, T \quad (3.22)$$

$$v_{it} - x_{it} - I_{it} + I_{i,t+1} = 0 ; \forall i \in P, t = 1, \dots, T-1. \quad (3.23)$$

$$v_{iT} - x_{iT} + s_i - I_{iT} = 0 ; \forall i \in P. \quad (3.24)$$

$$\sum_{t=1}^T H_t \leq H ; t = 1, \dots, T \quad (3.25)$$

$$-\sum_{t=1}^T H_t \leq -\delta H ; t = 1, \dots, T \quad (3.26)$$

$$\sum_{i \in P} I_{it} \leq W ; t = 1, \dots, T. \quad (3.27)$$

$$uB_2 - v = -d_2 \quad (3.28)$$

$$u(b_2 - A_2x - B_2y) + vy = 0 \quad (3.29)$$

$$v_{it} + u_{it} + I_{it}^r - I_{i,t+1}^r = d_{it} ; \forall i \in P, t = 1, \dots, T - 1. \quad (3.30)$$

$$v_{iT} + u_{iT} + I_{iT}^r = d_{iT} ; \forall i \in P. \quad (3.31)$$

$$\sum_{i \in P} I_{it}^r \leq G ; \forall t = 1, \dots, T \quad (3.32)$$

$$I_{i,T} = 0 ; \forall i \in P. \quad (3.33)$$

$$v_{it} \geq 0, x_{it} \geq 0, s_i \geq 0, I_{it} \geq 0, H_t \text{ entera},$$

$$z_{jrt} \text{ entera}, z_{jrt}^e \text{ entera}, u_{it} \geq 0 ; I_{it}^r \geq 0 \quad (3.34)$$

$$x \geq 0 ; y \geq 0 ; u \geq 0 ; ; y \geq 0 \quad (3.35)$$

Las variables x e y , en las restricciones 3.28 y 3.29, corresponden a los vectores de decisión del líder y seguidor respectivamente. Donde: x e y son vectores columna con las siguientes dimensiones:

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_{(T(3I+2JR+1))} \end{bmatrix}$$

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_{(2IT)} \end{bmatrix}$$

Por otro lado, las matrices A_1 y B_1 están representadas por los coeficientes de las variables x e y , respectivamente, para las restricciones del líder. Del mismo modo, las matrices A_2 y

B_2 de las restricciones 3.28 y 3.29 son los coeficientes de las variables del líder y seguidor para las restricciones del seguidor, la dimensión de cada matriz se muestra a continuación:

$$A_1 = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,(3I+2JR+1)} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,(3I+2JR+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{(T(5+I(1+K(1+R))))},1 & A_{(T(5+I(1+K(1+R))))},2 & \cdots & A_{(T(5+I(1+K(1+R)))),(3I+2JR+1)} \end{bmatrix}$$

$$B_1 = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,(2IT)} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \cdots & B_{2,(2IT)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{(T(5+I(1+K(1+R))))},1 & B_{(T(5+I(1+K(1+R))))},1 & \cdots & B_{(T(5+I(1+K(1+R)))),(2IT)} \end{bmatrix}$$

$$A_2 = \begin{bmatrix} A_{1,1} & A_{1,2} & \cdots & A_{1,(3I+2JR+1)} \\ A_{2,1} & A_{2,2} & \cdots & A_{2,(3I+2JR+1)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{(I(T+1)+T),1} & A_{(I(T+1)+T),2} & \cdots & A_{(I(T+1)+T),(3I+2JR+1)} \end{bmatrix}$$

$$B_2 = \begin{bmatrix} B_{1,1} & B_{1,2} & \cdots & B_{1,(2IT)} \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \cdots & B_{2,(2IT)} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{(I(T+1)+T),1} & B_{(I(T+1)+T),2} & \cdots & B_{(I(T+1)+T),(2IT)} \end{bmatrix}$$

El vector fila u es libre de signo, debido a las características de dualidad presentes en las restricciones del seguidor y su dimensión está representada por la cantidad de restricciones del seguidor. El vector fila v es no-negativo y su dimensión queda dada por cantidad de variables de decisión del seguidor. Las dimensiones de los vectores duales son las siguientes:

$$u = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_{(I(T+1)+T)} \end{bmatrix}$$

$$v = \begin{bmatrix} v_1 & v_2 & \cdots & v_{(2IT)} \end{bmatrix}$$

3.3. Modelo de Optimización del líder

El modelo de optimización de un solo nivel, propio del líder, que se propone en esta sección busca maximizar el beneficio de la planta procesadora mediante los ingresos provenientes de las ventas y los costos asociados de: procesar los productos, adquisición de materia prima, mantener en inventario y faltante al no satisfacer la demanda.

En este caso, el líder se enfrenta a una demanda estimada mediante las ventas históricas de sus productos a los mayoristas. El líder no posee la información suficiente para realizar pronósticos con bajos errores, ya que esta información es propia del mayorista, quien tiene contacto directo con los clientes finales lo que permite conocer sus preferencias y estimar de mejor forma la demanda.

Los parámetros, variables de decisión, función objetivo y restricciones son los siguientes:

Conjuntos y parámetros:

T : Número de periodos del horizonte de planificación.

J : Número de patrones de corte.

$k \in K$: Conjunto de secciones por carcasa.

$j \in J_k$: Conjunto de patrones de corte por sección k .

- $r \in R$: Conjunto para representar los diferentes tipos de carcasas.
 $i \in P$: Conjunto de productos.
 H : Carcasas disponibles para procesar durante el horizonte de planificación.
 α_r : Proporción de carcasas del tipo r .
 ψ_{ijr} : Rendimiento del producto i usando el patrón de corte j en carcasa del tipo r .
 p_i : Precio de venta del producto i .
 c_j : Costo operacional del patrón de corte j en tiempo normal.
 c_j^e : Costo operacional del patrón de corte j en tiempo extra.
 h : Costo de mantener un producto en inventario por un periodo para el líder.
 f_i : Costo por faltante del producto i para el líder.
 W : Capacidad de almacenamiento del líder (en kg).
 t_j : Tiempo de operación del patrón de corte j .
 T_w : Horas disponibles en tiempo normal.
 T_w^e : Horas disponibles en tiempo extra.
 δ : Parámetro auxiliar para mejorar el control de las carcasas disponibles.
 P : Precio de compra de una carcasa.
 d_{it}^e : Demanda estimada del líder del producto i en periodo t .

Variables de decisión:

- v_{it} : Cantidad a vender del producto i en el periodo t .
 x_{it} : Cantidad del producto i a tener en el periodo t .
 s_i : Cantidad de sobrante del producto i al final del horizonte de planificación.
 H_t : Cantidad de carcasas a comprar en el periodo t .
 z_{jrt} : Veces que se utiliza el patrón de corte j en carcasa de tipo r en el periodo t en tiempo normal.
 z_{jrt}^e : Veces que se utiliza el patrón de corte j en carcasa de tipo r en el periodo t en tiempo extra.
 I_{it} : Cantidad de inventario a tener el líder del producto i en el periodo t .
 u_{it}^e : Cantidad de faltante del producto i en el periodo t para la demanda estimada.
 u_{it}^r : Cantidad de faltante del producto i en el periodo t para la demanda real.

$$\min - \sum_{i \in P} \sum_{t=1}^T p_i v_{it} + \sum_{t=1}^T PH_t + \sum_{t=1}^T \sum_{j \in J} \sum_{r \in R} (c_j z_{jrt} + c_j^e z_{jrt}^e) + \sum_{i \in P} \sum_{t=1}^T h I_{it} + \sum_{i \in P} \sum_{t=1}^T f_i (u_{it}^e + u_{it}^r) \quad (3.36)$$

subject to

$$\alpha_r H_t - \sum_{j \in J_k} (z_{jrt} + z_{jrt}^e) = 0 ; t = 1, \dots, T, \forall k \in K, \forall r \in R \quad (3.37)$$

$$x_{it} - \sum_{r \in R} \sum_{j \in J_k} \psi_{ijr} (z_{jrt} + z_{jrt}^e) = 0 ; \forall i \in P, t = 1, \dots, T, \forall k \in K, \quad (3.38)$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{j \in J_k} t_j z_{jrt} \leq T_w ; \forall t = 1, \dots, T. \quad (3.39)$$

$$\sum_{r \in R} \sum_{j \in J_k} t_j z_{jrt}^e \leq T_w^e ; \forall t = 1, \dots, T. \quad (3.40)$$

$$v_{it} - x_{it} - I_{it} + I_{i,t+1} = 0 ; \forall i \in P, t = 1, \dots, T-1. \quad (3.41)$$

$$v_{iT} - x_{iT} + s_i - I_{iT} = 0 ; \forall i \in P. \quad (3.42)$$

$$\sum_{t=1}^T H_t \leq H ; \quad (3.43)$$

$$- \sum_{t=1}^T H_t \leq -\delta H ; \quad (3.44)$$

$$\sum_{i \in P} I_{it} \leq W ; t = 1, \dots, T. \quad (3.45)$$

$$v_{it} + u_{it}^e = d_{it}^e ; \forall i \in P, t = 1, \dots, T. \quad (3.46)$$

$$d_{it}^e + u_{it}^r = d_{it}^r ; \forall i \in P, t = 1, \dots, T. \quad (3.47)$$

$$v_{it} \geq 0, x_{it} \geq 0, s_i \geq 0, I_{it} \geq 0, u_{it}^e \geq 0 ; u_{it}^r \geq 0 ; H_t \text{ entera}, z_{jrt} \text{ entera}, z_{jrt}^e \text{ entera} \quad (3.48)$$

La restricción 3.46 hace referencia al faltante entre la cantidad disponible a vender y la demanda esperada. Mientras que 3.47 lo hace entre la demanda esperada y la demanda real.

3.4. Estrategia de resolución

Para resolver el problema de programación lineal binivel en primer lugar se deben relajar todas las variables enteras ya que las reformulaciones propuestas solo admiten variables continuas. Además, se deben considerar las dimensiones de los vectores x , y , u , v y de las matrices A_1 , B_1 , A_2 y B_2 , los cuales quedan dados por la cardinalidad de los conjuntos P , T , K y R . En una instancia donde los conjuntos mencionados son relativamente pequeños, el problema se puede resolver utilizando la formulación propuesta por [Fortuny-Amat y McCarl \(1981\)](#) agregando $(3IT + I + T)$ variables y $2(3IT + I + T)$ restricciones nuevas al modelo del tipo:

$$\begin{aligned} u_i &\leq Mz_i \\ g_i &\leq M(1 - z_i) \end{aligned}$$

Donde g_i toma los valores de las restricciones del seguidor ([3.30](#), [3.31](#), [3.32](#), [3.33](#)) y de las variables de decisión, u_{it} , I_{it}^r , según corresponda.

De este modo, se reformula [3.18](#) y se garantiza llegar a un punto óptimo con cierto grado de eficiencia, según sea el tamaño de los conjuntos. Para resolver el problema en una instancia más grande, conjuntos con una mediana o alta cantidad de datos, se recomienda utilizar el algoritmo propuesto por [Bard y Moore \(1990\)](#).

4 | Experimento Computacional

4.1. Descripción

Con el propósito de validar el modelo binivel propuesto, se utilizan datos reales de una empresa perteneciente a la industria porcina. Los datos corresponden a: costos de producción, mantención de inventario, tiempos de producción y el precio de venta de los productos. La demanda para el horizonte de planificación, entre otros datos y parámetros fueron generados de forma aleatoria, basandose en antecedentes de empresas del sector porcino, para generar la instancia de experimentación. De este modo, los datos utilizados cuentan con los tamaños apropiados y son similares a las situaciones que enfrentan día a día las empresas que interactúan dentro de la cadena de suministro. Las instancias presentadas en este capítulo fueron desarrolladas mediante el software AMPL y resueltas con CPLEX 12.6.2.0 utilizando un computador Apple Macbook Pro Retina Display; con procesador Intel Core i5-5257U Broadwell y con 8 GB de Memoria RAM.

4.2. Instancias

Con los datos proporcionados de empresas pertenecientes al sector porcino se generaron instancias que permiten observar el comportamiento que tiene la coordinación e integración de dos niveles en la cadena de suministro. Los datos corresponden a: 17 patrones de cortes distintos, 5 secciones por cada carcasa y 40 productos en un horizonte de planificación de 10 días. Debido a la gran cantidad de productos, se seleccionan aquellos 15 que cuentan con los precios más altos, los cuales representan el 67 % de la demanda total de los 40 productos. Los productos y sus respectivos precios se muestran a continuación:

n	Producto	Precio de venta
1	Pierna con hueso	42.5
2	Pierna sin hueso	43.5
3	Paleta con hueso	40
4	Pulpa espaldilla	41
5	Pecho completo	48
6	Pecho costilla	50.5
7	Carrillera	41.5
8	Barriga	49
9	Tocino	49.5
10	Entrecot	49
11	Filete	50.5
12	Entrecot+Filete	49.5
13	Lomo	48
14	Cabeza de lomo	50
15	Media cabeza de lomo	50

Tabla 4.1: Productos seleccionados.

Se realizarán tres casos de estudio que serán resueltos en la próxima sección:

- *Caso base:* Considerando la instancia generada ,se resuelve el problema de programación binivel que esta asociado al juego entre el líder y seguidor.
- *Caso 1:* Se generan 5 instancias al variar el costo de faltante que enfrenta el líder al no satisfacer la demanda del mayorista para observar la relación entre este parámetro y el nivel de servicio del mayorista. El nivel de servicio corresponde al cuociente entre la demanda satisfecha y la demanda total.
- *Caso 2:* Se realiza una comparación entre el problema de optimización de un nivel, propio del líder , y de dos niveles, líder y seguidor.
- *Caso 3:* Se observa como varían las decisiones del líder y seguidor frente a cambios en la cantidad de carcasas disponibles durante todo el horizonte de planificación.

4.2.1. Supuestos

Los supuestos realizados para llevar a cabo el experimento computacional son los siguientes:

- No se deben realizar conversiones de animales ya que se trabaja directamente con carcasas.
- Un animal corresponde a dos carcasas.
- Las carcasas son homogéneas y se considera solo un tipo de carcasa, por lo que conjunto R tiene solo un valor, $r = 1$.
- Tanto la planta procesadora como el mayorista no cuentan con inventario inicial.
- El horizonte de planificación es de 10 días.
- La vida útil de los productos frescos son 10 días y no alcanzan a vencer durante el horizonte de planificación.
- La planta tiene capacidad suficiente para procesar las carcasas que llegan diariamente y para almacenar los productos finales.
- Se trabajan 8 horas diarias y existe un sobretorno de 3 horas.
- No se pueden inventariar las carcasas.
- El mayorista cuenta con una capacidad de bodega limitada.
- La demanda es generada aleatoriamente para todos los productos.
- No debe existir sobreproducción
- La cantidad de carcasas disponibles a adquirir durante todo el horizonte de planificación es de 5.000 y no existe un límite inferior para cada periodo, $\delta = 1$.
- El líder conoce la demanda real del mayorista, tanto para el problema binivel como para el de un solo nivel.

Con todo lo descrito anteriormente, la instancia generada y sus derivadas generan un problema de programación binivel lineal el cual mediante las reformulaciones ya detalladas, se transforma en un problema de programación lineal entero-mixto. La cantidad de variables de decisión del líder y seguidor son 700 y 300 respectivamente. El problema cuenta con 2.825 restricciones y 475 variables duales.

4.3. Resultados

Ejecutando las distintas instancias para cada uno de los casos de estudio ya mencionados, se obtuvieron los siguientes resultados :

Caso base: Correspondiente al problema de integración y coordinación de dos niveles en la cadena de suministro de la industria porcina: planta procesadora y mayorista. El líder es la empresa procesadora de productos cárnicos y el seguidor es el mayorista.

Beneficio del líder	3.557.190
Nivel de Servicio del seguidor	73,7 %
Faltante total	44.522
Carcasas adquiridas	4.424
Sobrante total	38.523

Tabla 4.2: Resultados obtenidos para el caso base.

En este juego, el líder obtiene beneficios de 3.557.190, mientras que el mayorista logra un nivel de servicio del 73,7 %. Esto se logra utilizando el 88 % de las carcasas disponibles para todo el horizonte de planificación que corresponden a 4.424 de un total de 5.000, la forma en que se adquieren las carcasas durante todo el horizonte de planificación (10 días) se detalla en la siguiente tabla:

t	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
H_t	550	516	548	415	555	447	427	506	336	124

Tabla 4.3: Adquisición de carcasas durante el horizonte de planificación.

Por otro lado, la cantidad de nivel de servicio alcanzada sugiere que no se logro satisfacer toda la demanda de productos. Las cantidades de faltante durante todo el horizonte de planificación suma un total de 44.522 y el sobrante de todos los productos al final del horizonte de planificación es de 38.523. El detalle por cada uno de los 15 productos del faltante y sobrante, durante y al final del horizonte de planificación se encuentra en la siguiente tabla:

i	Faltante	Sobrante
1	0	0
2	0	0
3	0	4.672
4	4.321	0
5	0	0
6	24.105	1.226
7	6.970	0
8	5.012	0
9	1.297	0
10	0	23.946
11	436	0
12	0	728
13	0	0
14	0	7.950
15	2.380	0

Tabla 4.4: Cantidad de faltante y sobrante por producto al final del horizonte de planificación.

Caso 1: El costo de faltante varía en $\pm 10\%$ y $\pm 15\%$ obteniendo así 5 instancias, considerando el caso base, que permiten obtener diferentes valores para la función objetivo, el nivel de servicio, las carcasas utilizadas durante todo el horizonte de planificación y el porcentaje de carcasas que son utilizadas del total (% Ocupación):

Instancia	1	2	3	4	5
Variación costo faltante	-15 %	-10 %	-	+10 %	+15 %
Valor Objetivo	+4 %	+6 %	3.557.190	-4 %	-6 %
Nivel de Servicio	73,7 %	73,7 %	73,7 %	73,8 %	73,9 %
Carcasas adquiridas	0 %	0 %	4.424	+2 %	+3 %
% Ocupación	88 %	88 %	88 %	90 %	91 %

Tabla 4.5: Resultados obtenidos para el primer caso de estudio.

La instancia 3 corresponde al caso base, donde los costos de faltante fueron obtenidos por las empresas que se utilizaron como referencia. Los valores en porcentaje están calculados en relación a esta instancia.

Caso 2: Los valores obtenidos al resolver el juego entre líder y seguidor se detalla en el caso base. Una nueva instancia se presenta cuando el líder no actúa en conjunto al seguidor, al resolver el problema de optimización del líder se obtienen los resultados que se pueden observar en la siguiente tabla de comparación:

Modelos	Valor Objetivo	Nivel de Servicio	% de Ocupación	Sobrante total
Binivel	3.557.190	73,7 %	88 %	38.523
Un nivel	1.805.780	72,5 %	86 %	38.886

Tabla 4.6: Comparación entre dos modelos: de dos niveles y un nivel

Caso 3: Frente a los cambios en la cantidad de materia prima, carcasas de cerdo, se proponen 5 instancias, considerando el caso base, en donde la cantidad de carcasas total para todo el horizonte varía en $\pm 20\%$ y $\pm 30\%$.

La instancia 8 representa el caso base, con un total de 5.000 carcasas, y los valores en porcentajes están calculados en base a esta instancia. La siguiente tabla muestra los cambios en el valor objetivo, nivel de servicio, % Ocupación y sobrante total:

Instancia	6	7	8	9	10
Total carcassas disponibles	-30 %	-20 %	5.000	+20 %	+30 %
Valor Objetivo	-13,4 %	- 3,1 %	3.557.190	0 %	0 %
Nivel de Servicio	69,2 %	72,3 %	73,7 %	73,7 %	73,7 %
Carcassas adquiridas	-21 %	-10 %	4.424	0 %	0 %
% Ocupación	100 %	100 %	88 %	88 %	88 %
Sobrante total	-54,4 %	-26,6 %	38.523	0 %	0 %

Tabla 4.7: Resultados obtenidos para el tercer caso de estudio.

4.4. Análisis de resultados

En primer lugar, la resolución para las distintas instancias presentadas fueron realizadas en menos de un minuto logrando llegar al óptimo global. Considerando la dimensión de este problema, con 1.475 variables y 2.825 restricciones, la reformulación que nos ofrece [Fortuny-Amat y McCarl \(1981\)](#) es válida y eficiente como estrategia de resolución y se podría implementar en problemas de mayor dimensión sin la necesidad de implementar el algoritmo “Kuhn-Tucker Approach”.

En base a los resultados obtenidos en la sección anterior se realizan los siguientes análisis para cada uno de los casos de estudio:

Caso base: El beneficio obtenido por el líder corresponde a 3.557.190 y el nivel de servicio del mayorista a 73,7 %, el no alcanzar el 100 % implica que hay demanda que no se logró satisfacer. Se observa, además, que la planta procesadora no alcanza su máxima capacidad y la tasa de ocupación de carcassas durante el horizonte de planificación es menor al 100 % por lo que aún hay materia prima disponible para ser procesada.

Lo anterior implica que el líder va producir para satisfacer al máximo la demanda del seguidor siempre y cuando los ingresos sean mayores a los costos asociados de cada uno de los productos. Cuando el costo supere los ingresos obtenidos por venta, el líder va a preferir no seguir produciendo y asumir la multa por faltante.

La cantidad de carcasas que se adquieren durante cada periodo no presenta grandes variaciones en el horizonte de planificación, con excepción del último día en donde la cantidad de carcasas adquiridas son para procesarlas y vender los productos finales solo para ese periodo, sin dejar productos en inventario.

El sobrante es producto los patrones de cortes utilizados en los cuales se obtienen productos que no son mayormente demandados para los periodos siguientes. Los productos que quedan en inventario al final del horizonte de planificación resultan como sobrante y son vendidos por la misma empresa, sin embargo, no se presentan ingresos por venta ya que se asumen como costo hundido. El producto que presenta la mayor cantidad de sobrante corresponde al Entrecot ($i = 10$) con 23.946, esto se debe principalmente a que el patrón de corte que da origen a este producto también lo hace para el Filete ($i = 11$) y los rendimientos son 10,9 y 0,9 respectivamente. Claramente al obtener Filete, uno de los productos con el precio más alto y que resulta conveniente vender, se obtiene Entrecot en grandes dimensiones sin la necesidad de ser demandado por el mayorista.

En este juego se relacionan los agentes en dos niveles de la cadena de suministro, se observa que las decisiones de uno tienen efecto sobre el otro. La cantidad de faltante seleccionada por el mayorista tiene efectos en la función de beneficios del líder, y este al decidir cuanto producir tiene efecto en la cantidad de faltante que tendrá el seguidor.

Caso 1: El costo de faltante es un parámetro que representa una penalización por no satisfacer la demanda del seguidor y se encuentra en la función objetivo del líder. Este parámetro acompaña a la cantidad de faltante, variable de decisión del seguidor.

En la tabla 4.5 se presentan 5 instancias en las cuales al disminuir el costo de faltante para cada uno de los productos, las decisiones y valor objetivo de los agentes no presenta cambios. Esto se debe a que el líder en base a su óptimo de producción alcanza el máximo nivel de servicio para el seguidor. Al disminuir el costo por faltante, el líder no tiene mayor motivación por aumentar el nivel de servicio ya que no genera más ingresos.

Por el contrario, cuando se aumenta el costo por faltante, la función de costos aumenta y por tanto sus beneficios disminuyen, en este punto el líder debe adquirir más carcasas para procesarlas e intentar satisfacer de mejor forma la demanda, siempre y cuando los ingresos

sean mayores a los costos. En la tabla 4.5 se observa que el nivel de servicio aumenta conforme aumenta el costo por faltante, aunque lo hacen en distinto orden de magnitud, con ello también aumentan las carcasas adquiridas y el % de ocupación, ya que se necesita más materia prima para obtener una mayor cantidad de productos que en el caso base.

Este caso representa el juego que tiene el líder con seguidor, donde el seguidor mediante su faltante y el costo asociado a este, la multa que cobra al líder, exige que se satisfaga su demanda lo mejor posible. El líder por su parte optimiza su producción y decide cual es la cantidad a vender, no necesariamente va a satisfacer el 100 % de la demanda, ya sea por capacidad de procesamiento o por que los costos asociados a vender ese producto son mayores a los ingresos que puede obtener por concepto de venta.

Caso 2: El problema de un nivel corresponde a aquel en donde el líder optimiza sus operaciones para satisfacer su demanda y maximizar sus beneficios. En la tabla 4.6 se observa que el líder no utiliza la totalidad de las carcasas disponibles, además, el nivel de servicio con el que atiende la demanda es de 72,5 % y las capacidades productivas de la planta no se encuentran al máximo.

Al comparar ambos modelos, el binivel (caso base) con el de un solo nivel, el nivel de servicio que entrega el líder y los beneficios que obtiene son mayores cuando esta se coordinando e integrando con el mayorista. El % de ocupación aumenta ya que se procesa una mayor cantidad de productos y, por ende, se obtiene menos faltante. En cuanto al sobrante, en el caso del binivel la cantidad total al final del horizonte de planificación es menor al obtenido en el modelo de un nivel.

En este caso se observa la importancia al coordinar e integrarse en la cadena. El líder busca maximizar sus ingresos y aunque en este caso cuenta con la información de demanda real, no logra los ingresos que logra al trabajar junto al seguidor. La diferencia entre los valores objetivos se debe principalmente a que cuando trabajan en conjunto productor y mayorista, el inventario no se centra solo en una bodega, sino que se comparten los costos entre ambos agentes. El coordinar actividades no solo mejora los beneficios, sino también el nivel de servicio otorgado y mejora la productividad.

Caso 3: La materia prima, carcasas de cerdo, son obtenidos mediante proveedores de la planta procesadora.

En la tabla 4.7 se generan 5 instancias al variar porcentualmente el total de carcasas disponibles a lo largo del horizonte de planificación. En el caso base (instancia 8), el % de ocupación es del 88 % de un total de 5.000 carcasas, lo cual indica que se adquieren 4.400 carcasas para procesar. Al aumentar la cantidad de carcasas disponibles, este valor no cambia, ya que no corresponde a una restricción activa.

Caso contrario cuando se disminuyen las carcasas en un 20 % y 30 %, a 4.000 y 3.500 respectivamente. La restricción de no activa para a ser activa. El % de ocupación aumenta al 100 %, lo que implica que se utiliza la totalidad de carcasas disponibles. Por otro lado, el faltante aumenta y, como consecuencia, el nivel de servicio disminuye ya que falta materia prima para obtener los productos finales necesarios. El sobrante también disminuye producto que se procesa una menor cantidad de carcasas, obteniendo menos productos al final del horizonte de planificación.

Este último caso muestra la importancia que tiene la disponibilidad de materia prima y como esto afecta al resto de la cadena. Resaltando la importancia de coordinar la cadena de suministro como un todo, donde también se deben incluir a los proveedores para lograr mejores resultados.

5 | Conclusiones

Este trabajo plantea un juego de Stackelberg entre dos agentes de la industria cárnica: planta procesadora y mayorista quienes corresponden respectivamente al líder y seguidor; este juego de dos niveles permite coordinar e integrarse en la cadena y puede ser modelado como un problema de programación lineal binivel en donde el líder maximiza sus beneficios y el seguidor su nivel de servicio.

El modelo fue validado a través de distintas instancias generadas para empresas de la industria porcina. En los experimentos computacionales se destaca la importancia que tiene la coordinación e integración entre los agentes de la cadena, no solamente entre dos agentes sino entre mas agentes estén conectados se obtendrán mejores rendimientos, mayor nivel de servicio y más eficientes serán las empresas y la cadena como tal. También se debe resaltar la importancia de modelar estas situaciones mediante la teoría de juegos, específicamente de Stackelberg ya que cuenta con el esquema de líder y seguidor, y de plantear un problema de programación binivel, el cual entrega los conjuntos de decisiones que mejoran los objetivos de los jugadores. Las reformulaciones utilizadas para transformar el problema binivel a un modelo de un nivel no-lineal y luego al de programación entera-mixta, resultan ser útiles en este contexto ya que garantizan óptimos globales con tiempos de resolución menores a un minuto, demostrando ser eficientes para las dimensiones resueltas en este trabajo.

La teoría de juegos en la cadena de suministros demuestra ser una herramienta muy potente que permite modelar los juegos entre los agentes para industrias del sector alimentario. Como trabajo futuro se propone profundizar en técnicas de resolución que permitan resolver el problema de programación binivel entero-mixto y modelar una situación en donde se reflejen los tres niveles en la cadena de suministro: proveedor, productor y distribuidor.

Bibliografía

- Albornoz, Victor M; Gonzalez-Araya, Marcela; Gripe, Matias C; Rodriguez, Sara V; y Treviño, E Juventino (2015). An optimization model for planning operations in a meat packing plant. In *International Conference on Operations Research and Enterprise Systems* (pp. 136–146).: Springer. [1.2](#), [2.6](#), [3.2](#), [3.2.1](#)
- Antequera Guerra, Ana Teresa y Espinel Febles, María Candelaria (2011). Resolución de juegos cotidianos con árboles de decisión: aportaciones de una experiencia con alumnos de secundaria. *Educación matemática*, 23(2), 33–63. [2.1.2](#)
- Ballou, Ronald H (2004). *Logística: Administración de la cadena de suministro*. Pearson Educación. [2.2](#), [2.2](#)
- Bard, Jonathan F (2013). *Practical bilevel optimization: algorithms and applications*, volume 30. Springer Science & Business Media. [2.4.1](#), [2.4.2](#), [2.4.2](#), [2.5](#), [2.5](#), [2.5.1](#)
- Bard, Jonathan F y Moore, James T (1990). A branch and bound algorithm for the bilevel programming problem. *SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing*, 11(2), 281–292. [2.5.1](#), [3.4](#)
- Bialas, Wayne F y Karwan, Mark H (1984). Two-level linear programming. *Management science*, 30(8), 1004–1020. [1](#)
- Binmore, Ken (2008). *Teoría de juegos: una breve introducción*. Alianza Editorial. [2.1.1](#)
- Bixby, Ann; Downs, Brian; y Self, Mike (2006). A scheduling and capable-to-promise application for swift & company. *Interfaces*, 36(1), 69–86. [1.2](#)
- Carrillo de León, Monserrat y Limón Ledesma, Carlos (2015). *Una aproximación a la teoría de juegos*. PhD thesis. [2.1.1](#), [2.1.3](#)
- Christopher, Martin (1999). Logistics and supply chain management: Strategies for reducing cost and improving service financial times: Pitman publishing. london, 1998 isbn 0 273 63049 0 (hardback) 294+ 1× pp. [2.2.1](#)
- Christopher, Martin (2016). *Logistics & supply chain management*. Pearson Higher Ed. [2.2](#)
- Chu, Yunfei y You, Fengqi (2014). Integrated scheduling and dynamic optimization by stackelberg game: bilevel model formulation and efficient solution algorithm. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 53(13), 5564–5581. [2.1.3](#)

- Cruz Jr, JB (1975). Survey of nash and stackelberg equilibrium strategies in dynamic games. In *Annals of Economic and Social Measurement, Volume 4, number 2* (pp. 339–344). NBER. [2.1.3](#)
- Esmaeili, Maryam; Aryanezhad, Mir-Bahador; y Zeephongsekul, Panlop (2009). A game theory approach in seller–buyer supply chain. *European Journal of Operational Research*, 195(2), 442–448. [2.1.3](#)
- Fernández-Baca, Jorge (2000). *Microeconomía: teoría y aplicaciones*. Universidad del Pacífico, Centro de Investigación. [2.1.3](#)
- Forrester, Jay (1958). W., 1958. “industrial dynamics: A major breakthrough for decision makers.”. *Harvard Business Review*, 36(4), 37–66. [1](#)
- Fortuny-Amat, José y McCarl, Bruce (1981). A representation and economic interpretation of a two-level programming problem. *Journal of the operational Research Society*, 32(9), 783–792. [2.5.1](#), [3.4](#), [4.4](#)
- Gibbons, Robert (1993). *Un primer curso de teoría de juegos*. Antoni Bosch Editor. [2.1.1](#), [2.1.2](#), [2.1.2](#), [2.1.3](#), [2.1.3](#), [3](#)
- Hennet, Jean-Claude y Arda, Yasemin (2008). Supply chain coordination: A game-theory approach. *Engineering Applications of Artificial Intelligence*, 21(3), 399–405. [1](#)
- Hillier, Frederick S Lieberman; Hillier, Gerald J Frederick S; y Lieberman, Gerald J (1989). *Introducción a la Investigación de Operaciones*. McGraw-Hill,. [2.4](#), [2.4.2](#)
- Kalashnikov, Vyacheslav V y Rios-Mercado, RZ (2002). *Solving a natural gas cash-out bilevel program by a penalty function method*. Technical report, Technical Report PISIS-2002-03, Graduate Program in Systems Engineering, Universidad Autónoma de Nuevo León, San Nicolás de los Garza, México. [2.3](#)
- Kamerschen, David R (1968). Market growth and industry concentration. *Journal of the American Statistical Association*, 63(321), 228–241. [1](#)
- Kogan, Konstantin y Tapiero, Charles S (2007). *Supply Chain Games: Operations Management and Risk Valuation: Operations Management and Risk Evaluation*, volume 113. Springer Science & Business Media. [2.1](#)
- Marulanda, Marcelo Villa y Delgado, José Fidel Torres (2012). Análisis de teoría de juegos en cadenas de suministros de dos niveles, productor-comprador, bajo esquema vendor managed inventory (vmi). *Iteckne*, 9(1). [1](#)
- Migdalas, Athanasios; Pardalos, Panos M; y Värbrand, Peter (2013). *Multilevel optimization: algorithms and applications*, volume 20. Springer Science & Business Media. [2.5](#)
- OECD/FAO (2015). Ocde-fao perspectivas agrícolas 2015,. *OECD Publishing, París*. [1](#)

- OECD/FAO (2016). Food and agriculture organization of the united nations,. *OECD Publishing, París*. [1](#)
- Perez, Catalina; de Castro, Rodolfo; Simons, David; y Gimenez, Gerusa (2010). Development of lean supply chains: a case study of the catalan pork sector. *Supply Chain Management: An International Journal*, 15(1), 55–68. [2.2.1](#), [2.2.1](#)
- Plà, Lluís M; Sandars, Daniel L; y Higgins, Andrew J (2013). A perspective on operational research prospects for agriculture. *Journal of the Operational Research Society*, 65(7), 1078–1089. [2.2.1](#)
- Ricart, J (1988). Una introducción a la teoría de los juegos. *Documento de Investigación IESE Business School. Universidad de Navarra. España*. [2.1](#)
- Rodríguez, Sara V; Plà, Lluís M; y Faulin, Javier (2014). New opportunities in operations research to improve pork supply chain efficiency. *Annals of Operations Research*, 219(1), 5–23. [2.2.1](#), [2.2.1](#)
- Soto, Antonio y Valente, María Rosa (2005). Teoría de los juegos: Vigencia y limitaciones. *Revista de Ciencias Sociales*, 11(3). [2.1](#), [2.1.1](#)
- Von Neumann, John y Morgenstern, Oskar (2007). *Theory of games and economic behavior*. Princeton university press. [2.1.1](#)
- Von Stackelberg, Heinrich (1934). *Marktform und gleichgewicht*. J. Springer. [2.1.3](#)
- Yue, Dajun y You, Fengqi (2014a). Fair profit allocation in supply chain optimization with transfer price and revenue sharing: Minlp model and algorithm for cellulosic biofuel supply chains. *AIChE Journal*, 60(9), 3211–3229. [1](#)
- Yue, Dajun y You, Fengqi (2014b). Game-theoretic modeling and optimization of multi-echelon supply chain design and operation under stackelberg game and market equilibrium. *Computers & Chemical Engineering*, 71, 347–361. [2.1.3](#)