

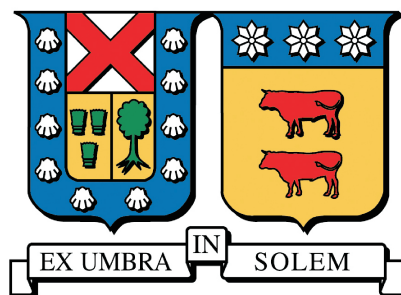
UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE OBRAS CIVILES

**DESARROLLO DE UN ESTIMADOR OPTIMIZADO DE
LA SENSIBILIDAD DE LA CONFIABILIDAD
ESTRUCTURAL APLICANDO LINE SAMPLING**

JORGE NICOLÁS TAPIA DONOSO

Ingeniero Civil

Septiembre de 2021



UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE OBRAS CIVILES

**DESARROLLO DE UN ESTIMADOR OPTIMIZADO DE
LA SENSIBILIDAD DE LA CONFIABILIDAD
ESTRUCTURAL APLICANDO LINE SAMPLING**

Memoria de Título presentada por
JORGE NICOLÁS TAPIA DONOSO

Como requisito parcial para optar al título de
Ingeniero Civil

Profesor Guía
Dr. Marcos Alberto Valdebenito Castillo

Septiembre de 2021

DESARROLLO DE UN ESTIMADOR OPTIMIZADO DE LA SENSIBILIDAD DE LA CONFIABILIDAD ESTRUCTURAL APLICANDO LINE SAMPLING.

AUTOR

JORGE NICOLÁS TAPIA DONOSO

TRABAJO DE MEMORIA, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniero Civil de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN

Mg. Herman Hernández

Dr. Héctor Jensen

Dr. Marcos Valdebenito Castillo

Valparaíso, Chile, Septiembre de 2021.

Al final del viaje, el destino siempre te alcanza

RESUMEN

El diseño de sistemas de ingeniería rara vez puede desarrollarse de manera determinista. La incertidumbre en dichos modelos puede encontrarse en distintos factores o propiedades que cumplen un rol fundamental en el sistema ingenieril, como lo pueden ser propiedades de los materiales, o valores de las solicitaciones a las cuales se ve sometido el sistema. Dado esto, es necesario cuantificar la confiabilidad del sistema dado el nivel de incertidumbre existente. Para lograr esto se puede recurrir a herramientas matemáticas, como lo es la teoría de probabilidad.

La confiabilidad puede ser estimada a través de la probabilidad de falla, la cual mide las chances de que alguna respuesta del sistema exceda un valor umbral pre-establecido bajo algún criterio ingenieril, por ejemplo, el valor de algún desplazamiento de piso.

Para poder modelar la incertumbre que afecta a un modelo, es recurrente asignar a variables de interés, funciones de densidad de probabilidad, las cuales poseen valores característicos que las definen, como lo son el valor esperado y la desviación estándar. La adecuada elección de las funciones de densidad de probabilidad es un paso fundamental para estimar correctamente la confiabilidad, por lo que, una variación en algunos de los parámetros característicos que la definen puede provocar variaciones considerables en el valor de la probabilidad de falla. Mencionado lo anterior, no solo es importante estimar adecuadamente la confiabilidad, si no que además, cuantificar que tan sensible es su valor respecto a los parámetros que definen a las funciones de densidad de probabilidad, pues puede entregar valiosa información del sistema.

Existen distintas estrategias que permiten estimar la confiabilidad y su sensibilidad, una de ellas es aplicando el método de simulación *Line Sampling*, el cual permite estimar la probabilidad de falla, y en una etapa de post procesamiento cuantificar la sensibilidad mediante dos enfoques distintos pero equivalentes.

El presente trabajo de título propone una estrategia que permita mejorar la estimación de la sensibilidad de la confiabilidad mediante un estimador óptimo combinado, el cual combine en un único estimador a los dos enfoques distintos que se pueden utilizar con la técnica de simulación *Line Sampling*, para problemas que involucren variables aleatorias.

Palabras Clave: *Confiabilidad, Probabilidad de Falla, Sensibilidad de la Confiabilidad, Variables Aleatoria, Parámetros Característicos, Line Sampling, Estimador Óptimo Combinado.*

CONTENIDO

RESUMEN	I
CONTENIDO	III
ÍNDICE DE FIGURAS	V
ÍNDICE DE TABLAS	VII
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Introducción General	1
1.2. Objetivos Generales	2
1.3. Objetivos Específicos	3
1.4. Estructura del trabajo de memoria de título	3
2. PROBABILIDAD DE FALLA Y SU SENSIBILIDAD	4
2.1. Introducción	4
2.2. Probabilidad de Falla	5
2.2.1. Formulación en el Espacio Físico	5
2.2.2. Formulación en el Espacio Normal Estándar	7
2.3. Sensibilidad de la Probabilidad de Falla	9
2.3.1. Sensibilidad de la Probabilidad - Integración sobre el Dominio de Falla (IDF)	9
2.3.2. Sensibilidad de la Probabilidad - Integración sobre la Función de Estado Límite (IFEL)	11
2.3.3. Relación entre los enfoques IFEL e IFD para la obtención de la sensibilidad de la probabilidad de falla	13
2.4. Evaluación de la Probabilidad de Falla Utilizando el Método de Simulación Line Sampling	14
2.5. Estimación de la Sensibilidad de la Confiabilidad Utilizando la Técnica de Simulación Line Sampling	17
2.5.1. Enfoque 1: Método de Integración sobre el Dominio de Falla (IDF)	17
2.5.2. Enfoque 2: Método de Integración sobre la Función de Estado Límite (IFEL)	18
2.6. Implementación del Estimador de Sensibilidad para Distribución Gaussiana y Log- Normal	19

2.6.1. Expresiones Análíticas para la velocidad ($\mathbf{v}$) para Variables Gaussianas y Log-Normal	20
2.6.2. Solución Análítica para la Integral Unidimensional ($\varphi_{\mathbf{z},\theta_{l,i}}$) para Variables Gaussianas y Log-Normal	21
3. FORMULACIÓN DEL ESTIMADOR ÓPTIMO COMBINADO DE LA SENSIBILIDAD	23
3.1. Introducción	23
3.2. Técnica de la Mejor Estimación Lineal Insesgada	24
3.3. Técnica de Separación - Avramidis	29
3.3.1. Análisis del Sesgo utilizando la técnica de Avramidis	33
4. APLICACIÓN DEL ESTIMADOR ÓPTIMO COMBINADO	34
4.1. Introducción	34
4.2. Ejemplo N°1: Caso Analítico	35
4.2.1. Resultados con los estimadores IFEL e IDF	35
4.2.2. Resultados con el Estimador Óptimo Combinado	36
4.3. Ejemplo N°2: Caso Analítico con Correlación	38
4.3.1. Resultados estimadores IFEL e IDF	38
4.3.2. Resultados Estimador Óptimo Combinado	38
4.4. Ejemplo N°3: Función de Desempeño Explícita	40
4.4.1. Sensibilidad de la Confiabilidad con Estimadores IFEL e IDF	40
4.4.2. Sensibilidad de la Confiabilidad Estimador Óptimo Combinado	42
4.5. Ejemplo N°4: Flujo Bajo Una Tablestaca	45
4.5.1. Sensibilidad de la Confiabilidad Estimadores IFEL e IDF	46
4.5.2. Sensibilidad de la Confiabilidad Estimador Óptimo Combinado	48
5. CONCLUSIONES	50
REFERENCIAS	52

ÍNDICE DE FIGURAS

2.1. Representación esquemática 3D de la función de desempeño	6
2.2. Representación en el plano de la función de desempeño	6
2.3. Ilustración esquemática de la variación que sufre la función de densidad de probabilidad al sufrir una perturbación $\mu_i + \delta\mu_i$ positiva.	10
2.4. Ilustración esquemática de la variación que sufre la función de densidad de probabilidad al sufrir una perturbación $\mu_i + \delta\mu_i$ positiva.	12
2.5. Ilustración esquemática de la técnica de simulación <i>Line Sampling</i> en el espacio normal estándar	15
3.1. Representación esquemática del parámetro de control óptimo	26
3.2. β en función de ρ	26
3.3. $\frac{\sigma_C}{\sigma_1}$ en función de ρ	27
4.1. Esquema de represa con dos estratos de suelo	46

ÍNDICE DE TABLAS

3.1. Ejemplo método de separación de Avramidis	30
4.1. Valor Esperado y Varianza Estimadores IFEL e IDF - Ejemplo N°1	35
4.2. Valores Parámetros de Aplicación del Estimador Óptimo Combinado para Simulaciones - Ejemplo N°1	36
4.3. Valores Estimador Óptimo Combinado y Varianza del Estimador - Ejemplo N°1	36
4.4. Resultado Varianza Muestral Asociada a las Corridas Independientes	37
4.5. Valor Esperado Estimadores IFEL e IDF - Ejemplo N°2	38
4.6. Valores Parámetros de Aplicación del Estimador Óptimo Combinado para Simulaciones - Ejemplo N°2	39
4.7. Valores Estimador Óptimo Combinado y Varianza para Simulación - Ejemplo N°2	39
4.8. Resultado Varianza Muestral Asociada a las Corridas Independientes	40
4.9. Resultado Estimación de la Sensibilidad Respecto a μ_2 , Enfoques IFEL e IDF	41
4.10. Resultado Estimación de la Sensibilidad Respecto a σ_2 , Enfoques IFEL e IDF	41
4.11. Valores Parámetros de Aplicación del Estimador Óptimo Combinado para Simulaciones - Sensibilidad Respecto a μ_2	42
4.12. Valores Parámetros de Aplicación del Estimador Óptimo Combinado para Simulaciones - Sensibilidad Respecto a σ_2	43
4.13. Resultado Estimación de la Sensibilidad Estimador Óptimo Combinado	43
4.14. Resultado Varianza Muestral Asociada a las Corridas Independientes - Sensibilidad Respecto a μ_2	44
4.15. Resultado Varianza Muestral Asociada a las Corridas Independientes - Sensibilidad Respecto a σ_2	45
4.16. Valor Esperado Estimadores IFEL e IDF, Sensibilidad Respecto a μ - Ejemplo N°4	46
4.17. Valores Parámetros de Aplicación del Estimador Óptimo Combinado para Simulaciones - Sensibilidad Respecto a μ	48
4.18. Valor Esperado Estimador Óptimo Combinado, Sensibilidad Respecto a μ - Ejemplo N°4	49

INTRODUCCIÓN

1.1. Introducción General

La representación del comportamiento físico de un sistema ingenieril se puede estimar mediante modelos numéricos. La construcción de un modelo numérico requiere de información que caracterice adecuadamente el sistema en estudio, como lo pueden ser información respecto a los materiales, dimensiones de los elementos que lo componen, o solicitaciones a las cuales se ve sometido y producen una respuesta de interés del sistema. Comúnmente en el análisis y diseño, los valores que adoptan las propiedades mencionadas anteriormente son valores determinísticos, es decir, un valor único seleccionado bajo algún criterio pertinente, el cual produce una respuesta singular del sistema. Dado el gran número de variables y parámetros que se ven involucrados en la representación de un sistema, es claro, que en una o más variables exista incertidumbre en el valor determinístico seleccionado, como lo puede ser la dimensión de un material, o el valor de alguna solicitación externa. Por lo tanto, debido la existencia de incertidumbre en el valor de algún(os) parámetro(s) del sistema, es evidente que también existe un grado de incertidumbre en la respuesta de éste. En vista de eso, es necesario cuantificar la confiabilidad de los sistemas ingenieriles.

La confiabilidad o probabilidad de falla es una medida de la posibilidad que una respuesta de interés del sistema sobrepase un valor umbral definido bajo algún criterio, en relación a las condiciones de servicio o desempeño esperado del sistema. Por esta razón, en un análisis o diseño basado en incertidumbre, resulta importante determinar de manera adecuada la probabilidad de falla, con el fin de prever adecuados niveles de desempeño del sistema.

Para poder realizar un análisis de confiabilidad es necesario caracterizar de manera lo más adecuada posible la incertidumbre dentro de un modelo. Una manera de caracterizar la incertidumbre

es a través de la teoría de probabilidad, con la cual se pueden relacionar variables físicas involucradas en el sistema con variables aleatorias. Este tipo de variable se define a través de una función de densidad de probabilidad, la cual posee parámetros característicos de ella, como lo son el valor esperado y una desviación estándar. La correcta elección de los parámetros que caracterizan una función de densidad de probabilidad involucrada en el sistema es un paso fundamental para la correcta estimación de la confiabilidad, ya que una perturbación en algunos de estos parámetros puede afectar considerablemente el valor de la confiabilidad. Por esta razón, no es solo de importancia estimar adecuadamente la confiabilidad de un sistema, si no que también su sensibilidad respecto a los parámetros que caracterizan a las variables aleatorias involucradas.

Para poder cuantificar la confiabilidad es posible aplicar métodos de simulación, siendo la técnica de simulación *Line Sampling* uno con bastante eficiencia numérica. La ventaja de utilizar este método de simulación, además de su eficiencia numérica, es que permite en una etapa de post-procesamiento cuantificar la sensibilidad de la confiabilidad mediante dos enfoques distintos, pero equivalentes, tal como se discute en [6] y [15].

Dada la posibilidad de aplicar dos enfoques distintos para cuantificar la sensibilidad de la confiabilidad utilizando un mismo método de simulación, existe la posibilidad de mejorar la estimación de la sensibilidad de la confiabilidad. El presente trabajo busca presentar una metodología que mejore la estimación de la sensibilidad, la cual consiste en combinar los dos enfoques existentes utilizando *Line Sampling*. La validación de la metodología propuesta se presenta mediante la aplicación a problemas que presentan incertidumbre en alguno de sus parámetros, los cuales se modelan como variables aleatorias.

1.2. Objetivos Generales

Los objetivos generales de la presente memoria son los siguientes:

- 1.- Evaluar la sensibilidad de la confiabilidad aplicando Line Sampling.
- 2.- Proponer una estrategia que permita obtener una mejor estimación de la sensibilidad de la confiabilidad.
- 3.- Aplicar la estrategia propuesta y estudiarla en relación a variables aleatorias que definen el problema.
- 4.- Validar la técnica de simulación Line Sampling, como una herramienta para evaluar la sensibilidad de la confiabilidad.

1.3. Objetivos Específicos

1. Estudiar estrategias para estimar la sensibilidad de la confiabilidad, y aplicar un estimador óptimo combinado que permite mejorar la estimación de la confiabilidad.
2. Estudiar qué parámetros influyen en la implementación de un estimador óptimo combinado.
3. Implementar computacionalmente el estimador óptimo combinado en base a las estrategias desarrolladas en *Line Sampling* para estimar la confiabilidad respecto a los parámetros de distribución.
4. Aplicar el estimador óptimo combinado en problemas de ingeniería civil, para validar su uso.

1.4. Estructura del trabajo de memoria de título

Los capítulos que componen la presente memoria de título se organizan de la siguiente manera:

- **Capítulo 2:** Presenta la definición de probabilidad de falla y su sensibilidad respecto a parámetros de distribución para problemas que involucran variables aleatorias. Además, se presenta la aplicación del método de simulación *Line Sampling* para la estimación de la probabilidad de falla, y la aplicación de dos estrategias distintas para cuantificar la sensibilidad de la confiabilidad.
- **Capítulo 3:** En este capítulo se desarrolla la formulación de un estimador óptimo combinado para la sensibilidad de la confiabilidad. La formulación se realiza con el objetivo de combinar las dos estrategias desarrolladas aplicando *Line Sampling*.
- **Capítulo 4:** Se presentan ejemplos de aplicación del estimador óptimo combinado, realizando un análisis de los resultados obtenidos.
- **Conclusiones:** Se presentan las conclusiones obtenidas a partir de los ejemplos desarrollados, y se discuten las ventajas de la estrategia desarrollada.

PROBABILIDAD DE FALLA Y SU SENSIBILIDAD

2.1. Introducción

Los sistemas de ingeniería en general, presentan múltiples variables que definen su comportamiento, pudiendo ser factores internos, por ejemplo: propiedades de los materiales, dimensiones de algún elemento estructural, etc. O factores externos como solicitaciones de cargas externas, temperatura, etc. Dado esto, se habla de confiabilidad estructural de un sistema cuando se busca evaluar cuán seguro es el comportamiento del sistema frente a un criterio de falla preestablecido, todo esto, caracterizando adecuadamente las fuentes de incertidumbre que pueden existir tanto internas como externas, mediante modelos probabilísticos adecuados [13].

2.2. Probabilidad de Falla

Para determinar la probabilidad de falla o confiabilidad de un sistema de ingeniería, o alguno de sus componentes, es necesario cuantificar de manera correcta la incertidumbre existente en algunos de los parámetros que lo caracteriza. Para esto, se recurre a la teoría de probabilidad, la cual brinda las herramientas adecuadas para poder cuantificar la incertidumbre existente en algunos parámetros. En particular, la caracterización de la incertidumbre en alguna variable implica asignarle una distribución de probabilidad y sus parámetros que la definen, como es el valor esperado y la desviación estándar, siendo ésta selección un factor clave en la magnitud del valor de la probabilidad de falla [8]. En las siguientes secciones se presenta la metodología a utilizar para realizar un análisis de confiabilidad mediante la probabilidad de falla.

2.2.1. Formulación en el Espacio Físico

Considere un modelo ingenieril en que la incertidumbre existente en los parámetros que lo definen, se caracterizan a través de n variables aleatorias independientes X_i , $i=1, \dots, n$. Para el caso en que existe dependencia entre ellas, es necesario extender los conceptos presentados en esta memoria siguiendo el enfoque discutido en [16]. El valor que toman estas variables de entrada se denota como x_i , $i=1, \dots, n$. Por otro lado, cada variable de entrada tiene asociada una función de densidad de probabilidad la cual se denota como $f_{X_i}(x_i|\theta_i)$, donde θ_i es un vector de dimensión $n_i \times 1$ que agrupa los parámetros de la distribución de densidad de probabilidad de X_i , como lo son el valor esperado y la desviación estándar. Se define la función de densidad de probabilidad conjunta como $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$, donde $\mathbf{x}=[x_1, \dots, x_n]^T$ y $\boldsymbol{\theta}=[\theta_1^T, \dots, \theta_n^T]^T$, donde $(\cdot)^T$ denota la traspuesta.

Para poder evaluar la confiabilidad del sistema, se debe definir el evento de falla, el cual representa un comportamiento indeseado del sistema al sobrepasar un valor umbral establecido previamente, el cual se denotará como b . Para formular la idea anterior se define la respuesta del sistema como $r(\mathbf{x})$, pudiendo evaluar la condición del sistema a través de una función de desempeño $g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$, la cual se define de acuerdo a la ecuación 2.2.1.

$$g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 1 - \frac{r(\mathbf{x})}{b} \quad (2.2.1)$$

La función mostrada en 2.2.1 está construida de tal manera que, para cada realización de $\mathbf{x}$ se tiene lo siguiente:

1. Si se cumple que $g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) < 0$, la realización de $\mathbf{x}$ genera un evento de falla.
2. Si se cumple que $g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) > 0$, la realización de $\mathbf{x}$ es un evento seguro.
3. Si se cumple que $g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) = 0$, se genera una superficie denominada función de estado límite.

En las figuras 2.1 y 2.2 se puede apreciar una representación esquemática de la función de desempeño, de estas figuras se puede notar que la función de estado límite es la encargada de

separar la región donde se encuentran las realizaciones de $\mathbf{x}$ que generan un evento de falla de las realizaciones seguras. Descrito lo anterior, es posible evaluar la probabilidad de falla o confiabilidad del sistema mediante la ecuación 2.2.2.

$$p_F = \int_{g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x} \quad (2.2.2)$$

La ecuación 2.2.2 se puede escribir de manera alternativa como se muestra en la ecuación 2.2.3, donde Ω^n es el dominio asociado al vector de variables aleatorias $\mathbf{X}$ e $I_{\mathbf{x}}(\mathbf{x})$ es la función indicatriz, la cual se define como se muestra en la ecuación:

$$I_{\mathbf{x}}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } g(\mathbf{x}) > 0 \\ 1 & \text{si } g(\mathbf{x}) \leq 0 \end{cases} \quad (2.2.3)$$

$$p_F = \int_{\mathbf{x} \in \Omega^n} I_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x} \quad (2.2.4)$$

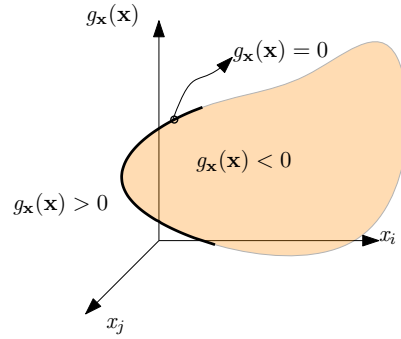


Figura 2.1: Representación esquemática 3D de la función de desempeño

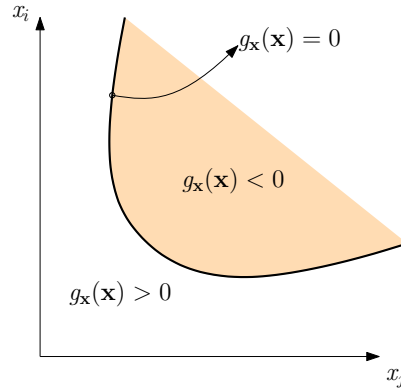


Figura 2.2: Representación en el plano de la función de desempeño

2.2.2. Formulación en el Espacio Normal Estándar

Para obtener la probabilidad de falla del sistema, es conveniente pasar de una formulación de la probabilidad considerando variables aleatorias físicas $\mathbf{X}$ a una formulación en variables aleatorias estandarizadas. Para lograr esto, se expresa la ecuación 2.2.2 en términos de un vector de variables aleatorias normal estándar $\mathbf{Z}$ [3]. Para describir la dependencia entre variables se requiere de un modelo apropiado, como puede ser el de *Nataf* [10].

Para la transformación de variables aleatorias del espacio físico al espacio normal estándar (y viceversa), se recurre a una transformación de la siguiente manera:

$$\mathbf{z} = T_{zx}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) \quad (2.2.5)$$

$$\mathbf{x} = T_{zx}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) \quad (2.2.6)$$

Las funciones de transformación de las ecuaciones 2.2.5 y 2.2.6 son funciones vectoriales, las cuales no son necesariamente lineales, ya que esto depende de la función de distribución de probabilidad de las variables aleatorias físicas involucradas.

Descrito lo anterior, es posible expresar la ecuación 2.2.2 en términos de variables normales estándar. Para realizar dicha transformación, se aplica un cambio de variables para una integral múltiple de la siguiente manera:

$$p_F = \int_{g_x(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x} = \int_{g_x(T_{zx}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})) \leq 0} f_{\mathbf{X}}(T_{zx}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})|\boldsymbol{\theta}) |\det(J_{T_{zx}})| d\mathbf{z} \quad (2.2.7)$$

Donde $J_{t_{zx}}$ es la matriz Jacobiana asociada a la función de la transformación $T_{zx}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})$, $\det(\cdot)$ es el determinante de la matriz y $|\cdot|$ denota el valor absoluto.

$$J_{T_{zx}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x_1}{\partial z_1} & \frac{\partial x_1}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial x_1}{\partial z_n} \\ \frac{\partial x_2}{\partial z_1} & \frac{\partial x_2}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial x_2}{\partial z_n} \\ \vdots & \dots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial x_n}{\partial z_1} & \frac{\partial x_n}{\partial z_2} & \dots & \frac{\partial x_n}{\partial z_n} \end{bmatrix} \quad (2.2.8)$$

Se puede demostrar que al aplicar la transformación de variables de acuerdo a la ecuación 2.2.7, la probabilidad de falla del sistema se puede expresar de la siguiente manera:

$$p_F = \int_{g_x(T_{zx}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})) \leq 0} f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} I_{\mathbf{X}}(T_{zx}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})) f_{\mathbf{Z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (2.2.9)$$

Donde $f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z})$ es la función de densidad de probabilidad normal estándar en n dimensiones. Con el objetivo de simplificar la notación de la ecuación 2.2.9, se define $g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) = g_{\mathbf{x}}(T_{zx}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}))$ e $I_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) = I_{\mathbf{x}}(T_{zx}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}))$. Dadas estas definiciones, la ecuación 2.2.9 se puede expresar en términos de variables normales estándar de la siguiente forma:

$$p_F = \int_{g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) \leq 0} f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} = \int_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} I_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (2.2.10)$$

De la ecuación 2.2.10 se puede observar lo siguiente:

1. La función de densidad de probabilidad normal estándar es independiente del vector de parámetros $\boldsymbol{\theta}$.
2. La función de desempeño está expresada en términos de la variable $\mathbf{z}$, sin embargo, depende del valor de $\boldsymbol{\theta}$.

2.3. Sensibilidad de la Probabilidad de Falla

En la sección anterior se presentó cómo se cuantifica la confiabilidad a través de la probabilidad de falla. Tal como se explicó, el valor de la probabilidad de falla depende de las variables aleatorias involucradas, las cuales siguen funciones de densidad de probabilidad. Las funciones de densidad de probabilidad poseen parámetros característicos, como lo son el valor medio o la desviación estándar, los cuales, al sufrir alguna perturbación en sus valores pueden provocar un cambio considerable en el valor de la probabilidad de falla. La presente sección presenta como cuantificar la sensibilidad de la confiabilidad mediante dos enfoques distintos, pero equivalentes [6].

2.3.1. Sensibilidad de la Probabilidad - Integración sobre el Dominio de Falla (IDF)

De la ecuación 2.2.4 se puede apreciar que el valor de cada realización de $\mathbf{x}$ está condicionado por el valor que tomen los parámetros característicos de la función de densidad de probabilidad, los cuales están contenidos en el vector $\boldsymbol{\theta}$. Mencionado lo anterior, considere una pequeña perturbación $\Delta\theta_{l,i}$, la cual se aplica en el l -ésimo parámetro de la i -ésima variable $\theta_{l,i}$. La perturbación aplicada provoca que la función de densidad de probabilidad se denote como $f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta} + \mathbf{e}_{l,i}\Delta\theta_{l,i})$, donde $\mathbf{e}_{l,i}$ es un vector cuyas entradas son ceros, excepto para la posición $\left(\sum_{k=1}^{i-1} n_k + l\right)$ -ésima, donde toma el valor de 1. De manera esquemática, la figura 2.3 presenta una distribución Gaussiana con un valor esperado de μ_i , la cual sufre una perturbación positiva de $\delta\mu_i$.

Asumiendo que p_F es diferenciable respecto a $\boldsymbol{\theta}$, es posible obtener la sensibilidad de la probabilidad de falla a través de la derivada parcial de p_F respecto a cada parámetro del vector $\boldsymbol{\theta}$ [17], como se presenta en la siguiente ecuación:

$$\frac{\partial p_F}{\partial \theta_{l,i}} = \frac{\partial}{\partial \theta_{l,i}} \left(\int_{g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}) \leq 0} f_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x} \right), \quad l = 1, \dots, n_i, \quad i = 1, \dots, n \quad (2.3.1)$$

Donde $\theta_{l,i}$ corresponde al l -ésimo parámetro de la función de distribución de probabilidad asociado a X_i y n_i es el número de parámetros de distribución asociados con la i -ésima variable.

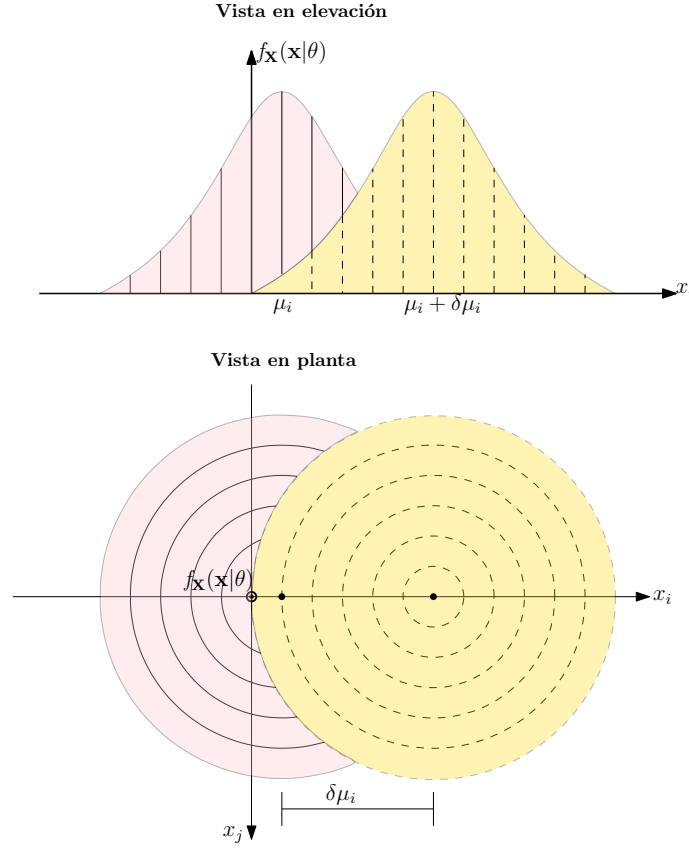


Figura 2.3: Ilustración esquemática de la variación que sufre la función de densidad de probabilidad al sufrir una perturbación $\mu_i + \delta\mu_i$ positiva.

Para acomodar la notación de la ecuación 2.3.1, se define la función $h_{\mathbf{x},\theta_{l,i}}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$ de la siguiente manera:

$$h_{\mathbf{x},\theta_{l,i}}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{l,i}} \quad (2.3.2)$$

Definida la ecuación 2.3.2, la ecuación 2.3.1 se puede expresar de la siguiente manera:

$$\frac{\partial p_F}{\partial \theta_{l,i}} = \left(\int_{g_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \leq 0} h_{\mathbf{x},\theta_{l,i}}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) d\mathbf{x} \right) \quad (2.3.3)$$

Al igual que la probabilidad de falla, es conveniente expresar la sensibilidad de la probabilidad en términos de variables normales estándar, para eso se introduce el cambio de variable indicado en 2.2.6 en la ecuación 2.3.3:

$$\frac{\partial p_F}{\partial \theta_{l,i}} = \left(\int_{g_{\mathbf{X}}(T_{\mathbf{zx}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})|\boldsymbol{\theta}) \leq 0} h_{\mathbf{x},\theta_{l,i}}(T_{\mathbf{zx}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})|\boldsymbol{\theta}) f_{\mathbf{X}}(T_{\mathbf{zx}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})|\boldsymbol{\theta}) |\det(J_{T_{\mathbf{zx}}})| d\mathbf{z} \right) \quad (2.3.4)$$

Para abreviar la expresión se introduce la siguiente nomenclatura $h_{\mathbf{z},\theta_{l,i}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) = h_{\mathbf{x},\theta_{l,i}}(T_{\mathbf{zx}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})|\boldsymbol{\theta})$, quedando la expresión para la sensibilidad de la probabilidad de falla de la siguiente forma:

$$\frac{\partial p_F}{\partial \theta_{l,i}} = \left(\int_{g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) \leq 0} h_{\mathbf{z},\theta_{l,i}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \right) \quad (2.3.5)$$

Donde la función $h_{\mathbf{z},\theta_{l,i}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})$ se define de la siguiente manera:

$$h_{\mathbf{z},\theta_{l,i}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{1}{f_{\mathbf{X}}(T_{\mathbf{zx}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})|\boldsymbol{\theta})} \frac{\partial f_{\mathbf{X}}(T_{\mathbf{zx}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})|\boldsymbol{\theta})}{\partial \theta_{l,i}} \quad (2.3.6)$$

Es posible obtener de forma analítica la expresión de la ecuación 2.3.6 para varios tipos de funciones de distribución de probabilidad, tal como se presenta en la sección 2.6.

2.3.2. Sensibilidad de la Probabilidad - Integración sobre la Función de Estado Límite (IFEL)

Esta sección presenta un enfoque alternativo al presentado en la sección 2.3.1. Este enfoque consiste en deducir la expresión de la sensibilidad de la probabilidad de falla diferenciando directamente la ecuación 2.2.9 respecto a $\theta_{l,i}$.

$$\frac{\partial p_F}{\partial \theta_{l,i}} = \frac{\partial}{\partial \theta_{l,i}} \left(\int_{g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) \leq 0} f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \right) \quad (2.3.7)$$

La integral anterior puede ser calculada con la fórmula de Leibnitz [4], obteniendo la siguiente expresión:

$$\frac{\partial p_F}{\partial \theta_{l,i}} = \left(\int_S f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) \mathbf{v}_{l,i}^T \mathbf{n} dS \right) \quad (2.3.8)$$

Donde:

- $\mathbf{v}_{l,i}$ es el término denotado como velocidad, el cual se define de acuerdo a la ecuación 2.3.9, y representa la razón de cambio de $\mathbf{z}$ respecto de una perturbación en el valor de $\theta_{l,i}$.

$$\mathbf{v}_{l,i} = \partial \mathbf{z} / \partial \theta_{l,i} \quad (2.3.9)$$

- S es el conjunto de puntos pertenecientes a la función de estado límite, i.e.:

$$S = \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n : g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) = 0\} \quad (2.3.10)$$

- dS es un elemento diferencial de superficie.

- $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la función de estado límite:

$$\mathbf{n} = \frac{\left[\frac{\partial g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})}{\partial z_n} \right]^T}{\left\| \left[\frac{\partial g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})}{\partial z_1}, \dots, \frac{\partial g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})}{\partial z_n} \right]^T \right\|} = \frac{\nabla_{\mathbf{z}} g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})}{\|\nabla_{\mathbf{z}} g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})\|} \quad (2.3.11)$$

Donde $\|\cdot\|$ denota la norma Euclidiana de un vector.

La figura 2.4 presenta de manera esquemática los vectores velocidad ($\mathbf{v}$) y el vector normal a la función de estado límite ($\mathbf{n}$) en un elemento diferencial de superficie en el plano normal estándar, al generarse una perturbación en algún parámetro de la función de densidad de probabilidad.

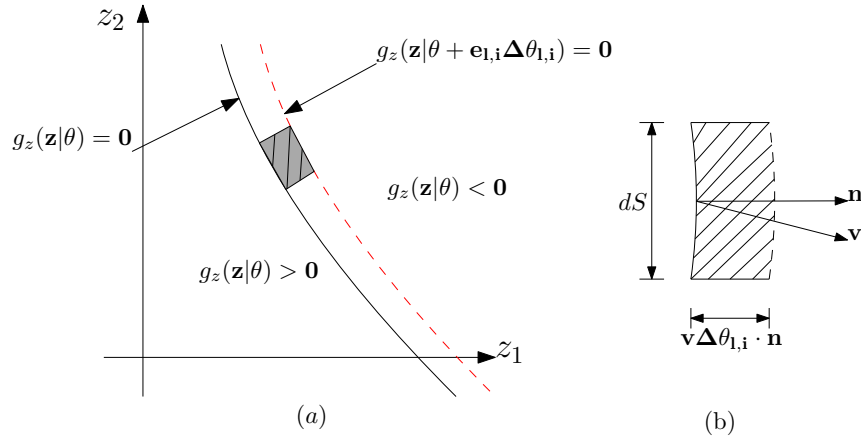


Figura 2.4: Ilustración esquemática de la variación que sufre la función de densidad de probabilidad al sufrir una perturbación $\mu_i + \delta\mu_i$ positiva.

En aplicaciones prácticas de interés, es normal solo tener acceso al gradiente de la función de desempeño en términos de las variables aleatorias físicas $\nabla_{\mathbf{x}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta})$. Para tal caso, es posible obtener el gradiente en el espacio normal estándar utilizando la matriz Jacobiana de la siguiente manera:

$$\nabla_{\mathbf{z}} g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) = J_{T_{zx}}^T \nabla_{\mathbf{x}} g_{\mathbf{x}}(\mathbf{x}|\boldsymbol{\theta}) \quad (2.3.12)$$

2.3.3. Relación entre los enfoques IFEL e IFD para la obtención de la sensibilidad de la probabilidad de falla

Hasta el momento se han presentado dos enfoques distintos para cuantificar la sensibilidad de la confiabilidad. Dadas sus formulaciones, ambos enfoques pueden parecer independientes entre sí. Sin embargo, ambos se encuentran relacionados a través del teorema de la divergencia, como se discute en [2, 10]. Por un lado, el primero enfoque (IDF) calcula la divergencia del flujo de probabilidad sobre el dominio de falla, solo requiriendo la información de la función de densidad de probabilidad para el desarrollo de la ecuación 2.3.6. Por otro lado, el segundo enfoque (IFEL) puede interpretarse como el cálculo del flujo de probabilidad a través de la función o superficie de estado límite. El flujo de probabilidad representa la función de densidad de probabilidad en cada punto en el espacio normal estándar sobre la superficie de estado límite, multiplicada por la velocidad $(\mathbf{v}_{l,i} \cdot \mathbf{n})$ de ese punto. Por lo tanto, este segundo enfoque requiere información sobre el gradiente de la función de estado límite, tal como se indica en la ecuación 2.3.11. En resumen, los dos enfoques presentados anteriormente son dos procedimientos distintos, pero equivalentes para cuantificar una misma cantidad.

2.4. Evaluación de la Probabilidad de Falla Utilizando el Método de Simulación Line Sampling

Para realizar un análisis de confiabilidad estructural, en problemas de baja o alta dimensionalidad, se puede recurrir a técnicas de simulación para realizar las estimaciones de interés, siendo la técnica de simulación *Line Sampling*(LS) [9] bastante eficiente para estimar la probabilidad de falla.

El primer paso para la aplicación de *Line Sampling* consiste en encontrar un vector que apunte hacia la región con mayor contribución a la probabilidad de falla en el espacio normal estándar. El vector descrito anteriormente se denomina dirección importante, la cual se identificará con la letra α [9]. Si bien existen varios métodos para obtener dicha dirección [9], en los procedimientos utilizados en el presente documento, la dirección importante se obtendrá con la siguiente expresión:

$$\alpha = -\frac{\nabla_{\mathbf{z}} g_{\mathbf{z}}(\mathbf{0}|\theta)}{\|\nabla_{\mathbf{z}} g_{\mathbf{z}}(\mathbf{0}|\theta)\|} \quad (2.4.1)$$

Donde $\nabla_{\mathbf{z}} g_{\mathbf{z}}(\mathbf{0}|\theta) = 0$ es el gradiente de la función de desempeño evaluado en el origen del espacio normal estándar.

Una vez encontrada la dirección importante en el espacio normal estándar, se generan de manera aleatoria líneas paralelas a la dirección importante, evaluando la función de desempeño a lo largo de la líneas generadas. Para realizar esto, se introduce una rotación de coordenadas en el espacio normal estándar, de manera que:

$$\mathbf{z} = \alpha z^{\parallel} + \Gamma \mathbf{z}^{\perp} \quad (2.4.2)$$

Donde:

- $z^{\parallel}$ es una coordenada paralela a dirección α .
- $\mathbf{z}^{\perp}$ es un vector de dimensión $(n - 1) \times 1$, y representa al conjunto de $(n-1)$ coordenadas perpendiculares a α
- Γ corresponde a la matriz de rotación de coordenadas, tiene dimensiones $n \times (n - 1)$

Lo descrito anteriormente se puede visualizar de manera esquemática a continuación en la figura 2.5.

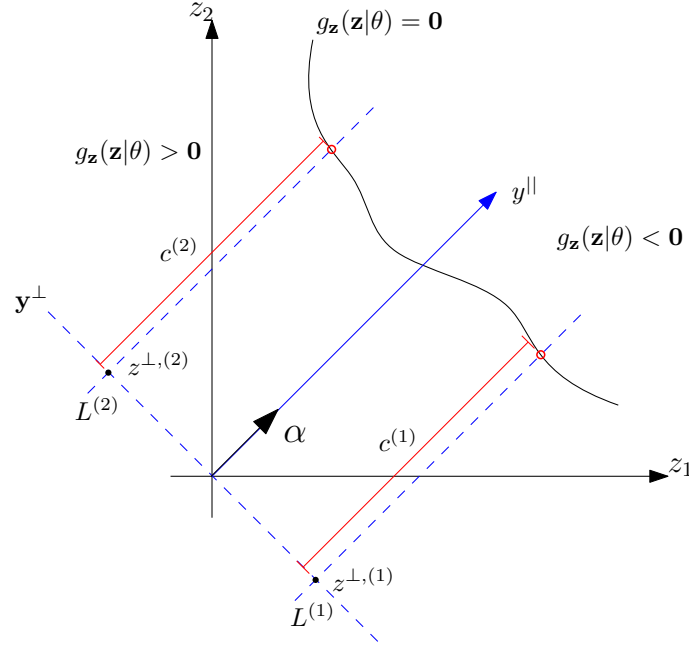


Figura 2.5: Ilustración esquemática de la técnica de simulación *Line Sampling* en el espacio normal estándar

Considerando el cambio de coordenadas presentado en la ecuación 2.4.2, y que la función de densidad de probabilidad normal estándar posee simetría radial, es posible expresar la ecuación de probabilidad de falla 2.2.10, de la siguiente manera:

$$p_F = \int_{\mathbf{z}^\perp \in \mathbb{R}^{n-1}} \int_{z^\parallel \in \mathbb{R}} I_{\mathbf{z}}(\boldsymbol{\alpha} z^\parallel + \Gamma \mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta}) f_{Z^\parallel}(z^\parallel) f_{\mathbf{Z}^\perp}(\mathbf{z}^\perp) dz^\parallel d\mathbf{z}^\perp \quad (2.4.3)$$

Donde:

- $f_{Z^\parallel}(z^\parallel)$ es la función de distribución normal estándar de dimensión 1.
- $f_{\mathbf{Z}^\perp}(\mathbf{z}^\perp)$ es a función de densidad de probabilidad de dimensión $(n-1)$.
- $f_{Z^\parallel}(z^\parallel)$ y $f_{\mathbf{Z}^\perp}(\mathbf{z}^\perp)$ son independientes.

Considerando la estructura de la integral anterior se define la función $\psi(\Gamma \mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta})$ de la siguiente manera:

$$\psi(\Gamma \mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta}) = \int_{z^\parallel \in \mathbb{R}} I_{\mathbf{z}}(\boldsymbol{\alpha} z^\parallel + \Gamma \mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta}) f_{Z^\parallel}(z^\parallel) dz^\parallel \quad (2.4.4)$$

La función $\psi(\Gamma \mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta})$ corresponde a una integral que se evalúa a lo largo de una línea paralela a la dirección importante $\boldsymbol{\alpha}$. Para poder evaluar la ecuación 2.4.4 se generan de manera aleatoria muestras $\mathbf{z}^{(\perp, j)}$ y líneas paralelas a vector $\boldsymbol{\alpha}$ como se muestra de manera esquemática en la figura 2.5. Considerando que dicha línea solo intersecta una vez a la función de estado límite, es posible

evaluar la integral de la ecuación 2.4.4 en la región de falla de la siguiente manera:

$$\psi(\Gamma \mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta}) = \int_c^\infty I_{\mathbf{z}}(\boldsymbol{\alpha} z^\parallel + \Gamma \mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta}) f_{Z^\parallel}(z^\parallel) dz^\parallel \quad (2.4.5)$$

Donde c corresponde a la distancia Euclidiana entre la muestra generada y la intersección entre la línea paralela y la función de estado límite $g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta}) = 0$. Es posible notar en la ecuación 2.4.5, que el término $I_{\mathbf{z}}(\boldsymbol{\alpha} z^\parallel + \Gamma \mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta}) = 1$, ya que la integral está siendo evaluada sobre el dominio de falla. Dado esto, la integral de dicha ecuación, evaluada sobre una línea se puede expresar como la función de probabilidad acumulada normal estándar $\Phi(\cdot)$ evaluada en el negativo del valor c , es decir:

$$\psi(\Gamma \mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta}) = \int_c^\infty f_{Z^\parallel}(z^\parallel) dz^\parallel = \Phi(-c) \quad (2.4.6)$$

Descrito lo anterior, es posible expresar la ecuación 2.4.3 de manera más compacta de la siguiente forma:

$$p_F = \int_{\mathbf{z}^\perp \in \mathbb{R}^{n-1}} \psi(\Gamma \mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta}) f_{\mathbf{z}^\perp}(\mathbf{z}^\perp) d\mathbf{z}^\perp \quad (2.4.7)$$

La integral de la ecuación 2.4.7 se puede estimar mediante la técnica de simulación *Monte Carlo* [14], generando muestras aleatorias del vector de variables aleatorias $\mathbf{z}^\perp$. De ésta manera, es posible obtener el estimador de la probabilidad de falla de la técnica de simulación *Line Sampling*, el cual se denota de la siguiente manera:

$$p_F \approx \hat{p}_F = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Phi(-c^{(j)}), \quad \mathbf{z}^{\perp, (j)} \sim f_{\mathbf{z}^\perp}(\mathbf{z}^\perp), \quad j = 1, \dots, N \quad (2.4.8)$$

La desviación estándar $\sigma_{\hat{p}_F}$ y el coeficiente de variación del estimador obtenido con el método de simulación *Line Sampling* se pueden obtener con la siguiente expresión:

$$\sigma_{\hat{p}_F} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \left(\left(\sum_{j=1}^N \Phi(-c^{(j)})^2 \right) - N \hat{p}_F^2 \right)} \quad (2.4.9)$$

$$\delta_{\hat{p}_F} \approx \hat{\delta}_{\hat{p}_F} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sqrt{\frac{1}{(N-1)} \left(\left(\sum_{j=1}^N \Phi(-c^{(j)})^2 \right) - N \hat{p}_F^2 \right)}}{\hat{p}_F} \quad (2.4.10)$$

2.5. Estimación de la Sensibilidad de la Confiabilidad Utilizando la Técnica de Simulación Line Sampling

Como se presentó en la sección anterior, *Line Sampling* puede ser ocupado para estimar la probabilidad de falla trabajando en el espacio normal estándar. Esto, permite en una etapa de post-procesamiento aplicar las técnicas IFEL e IDF para estimar la sensibilidad de la probabilidad de falla.

2.5.1. Enfoque 1: Método de Integración sobre el Dominio de Falla (IDF)

Para estimar la sensibilidad de la probabilidad de falla mediante este enfoque, el primer paso consiste en la generación de muestras aleatorias $\mathbf{z}^{\perp, (j)}$, con $j = 1, \dots, N$, en el hiperplano ortogonal a la dirección importante $\boldsymbol{\alpha}$. Luego, se integra numéricamente a lo largo de cada línea generada $L^{(j)}$, con $j = 1, \dots, N$, sobre el dominio de falla. Para poder evaluar la sensibilidad de la probabilidad de falla, considere el siguiente cambio de notación en la ecuación 2.3.5

$$\frac{\partial p_F}{\partial \theta_{l,i}} = \int_{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^n} I_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) h_{\mathbf{z}, \theta_{l,i}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) f_{\mathbf{z}}(\mathbf{z}) d\mathbf{z} \quad (2.5.1)$$

Considerando la rotación de coordenadas definida en la ecuación 2.4.2, se define la función φ de la siguiente forma:

$$\varphi_{\mathbf{z}, \theta_{l,i}}(\Gamma \mathbf{z}^{\perp} | \boldsymbol{\theta}) = \int_{\mathbf{z}^{\parallel} \in \mathbb{R}} I_{\mathbf{z}}(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{z}^{\parallel} + \Gamma \mathbf{z}^{\perp} | \boldsymbol{\theta}) h_{\mathbf{z}, \theta_{l,i}}(\boldsymbol{\alpha} \mathbf{z}^{\parallel} + \Gamma \mathbf{z}^{\perp} | \boldsymbol{\theta}) f_{\mathbf{z}^{\parallel}}(\mathbf{z}^{\parallel}) d\mathbf{z}^{\parallel} \quad (2.5.2)$$

Por lo tanto, la ecuación 2.5.1 se puede reescribir de la siguiente manera:

$$\frac{\partial p_F}{\partial \theta_{l,i}} = \int_{\mathbf{z}^{\perp} \in \mathbb{R}^{n-1}} \varphi_{\mathbf{z}, \theta_{l,i}}(\Gamma \mathbf{z}^{\perp} | \boldsymbol{\theta}) f_{\mathbf{z}^{\perp}}(\mathbf{z}^{\perp}) d\mathbf{z}^{\perp} \quad (2.5.3)$$

Se podrá notar que la ecuación anterior se puede estimar mediante la generación de muestras aleatorias en el espacio normal estándar de $\mathbf{z}^{\perp}$, a través de una simulación *Monte Carlo*. Finalmente se tiene el siguiente estimador de la sensibilidad de la probabilidad de falla mediante el enfoque IDF:

$$\frac{\partial p_F}{\partial \theta_{l,i}} \approx \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \theta_{l,i}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \varphi_{\mathbf{z}, \theta_{l,i}}(\Gamma \mathbf{z}^{\perp, (j)} | \boldsymbol{\theta}), \quad \mathbf{z}^{\perp, (j)} \sim f_{\mathbf{z}^{\perp}}(\mathbf{z}^{\perp}), \quad j = 1, \dots, N \quad (2.5.4)$$

La varianza y el coeficiente de variación del estimador de la sensibilidad mediante el enfoque IDF se obtienen de la siguiente manera:

$$\mathbb{V} \left[\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \theta_{l,i}} \right] = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \left(\left(\sum_{j=1}^N (\varphi_{\mathbf{z}, \theta_{l,i}}(\Gamma \mathbf{z}^{\perp, (j)} | \boldsymbol{\theta}))^2 \right) - N \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \theta_{l,i}}^2 \right)} \quad (2.5.5)$$

$$\delta_{\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \theta_{l,i}}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sqrt{\frac{1}{(N-1)} \left(\left(\sum_{j=1}^N (\varphi_{\mathbf{z}, \theta_{l,i}}(\Gamma \mathbf{z}^\perp, (j) | \boldsymbol{\theta}))^2 \right) - N \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \theta_{l,i}}^2 \right)}}{\left| \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \theta_{l,i}} \right|} \quad (2.5.6)$$

La ecuación 2.5.6 asume que el valor de la sensibilidad es distinto que cero.

2.5.2. Enfoque 2: Método de Integración sobre la Función de Estado Límite (IFEL)

Tal como se menciona en la sección 2.4, se considera que cada línea paralela a la dirección importante, generada de manera aleatoria en el espacio normal estándar, solo intersecta una vez a la función de estado límite. Dado esto, para estimar la ecuación 2.3.8 se introducen las siguientes consideraciones:

1. La integral se parametriza respecto del vector de coordenadas $\mathbf{z}^\perp$, el cual es perpendicular a la dirección importante $\boldsymbol{\alpha}$. Por lo tanto, es posible expresar el diferencial de superficie de la siguiente manera:

$$dS = \frac{d\mathbf{z}^\perp}{|\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{n}|} \quad (2.5.7)$$

Donde $\mathbf{n}$ es el vector unitario normal a la función de estado límite (ver ecuación 2.3.11).

2. Se define la función $\varsigma_{l,i}(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta})$ de la siguiente manera:

$$\varsigma_{l,i}(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta}) = \frac{\mathbf{v}_{l,i}^T \mathbf{n}}{|\boldsymbol{\alpha}^T \mathbf{n}|} = \frac{\mathbf{v}_{l,i}^T \nabla_{\mathbf{z}} g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta})}{|\boldsymbol{\alpha}^T \nabla_{\mathbf{z}} g_{\mathbf{z}}(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta})|} \quad (2.5.8)$$

Donde $\mathbf{v}_{l,i}$ representa la velocidad (ver ecuación 2.3.9).

3. La función de estado límite cumple la siguiente relación:

$$g_{\mathbf{z}}(\boldsymbol{\alpha} c + \Gamma \mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta}) = 0 \quad (2.5.9)$$

Note que el valor de c depende $\mathbf{z}^\perp$, por lo tanto, $c = c(\mathbf{z}^\perp)$

Reemplazando los términos definidos en los puntos anteriores en la ecuación 2.3.8, se obtiene la siguiente expresión:

$$\frac{\partial p_F}{\partial \theta_{l,i}} = \int_{\mathbf{z}^\perp \in \mathbb{R}^{n-1}} \varsigma_{l,i}(\boldsymbol{\alpha} c + \Gamma \mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta}) \phi(c) f_{\mathbf{z}^\perp}(\mathbf{z}^\perp) d\mathbf{z}^\perp \quad (2.5.10)$$

Donde $\phi(\cdot)$ es la función de densidad de probabilidad normal estándar.

Al igual que la ecuación 2.4.7, la expresión anterior puede ser evaluada mediante una simulación *Monte Carlo*. De ésta manera se obtiene el estimador de la sensibilidad de la probabilidad de falla mediante el enfoque IFEL de la siguiente manera:

$$\frac{\partial p_F}{\partial \theta_{l,i}} \approx \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \theta_{l,i}} = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N s_{l,i}(\alpha c^{(j)} + \Gamma \mathbf{z}^{\perp,(j)} | \boldsymbol{\theta}) \phi(c^{(j)}), \quad \mathbf{z}^{\perp,(j)} \sim f_{\mathbf{z}^{\perp}}(\mathbf{z}^{\perp}), \quad j = 1, \dots, N \quad (2.5.11)$$

La varianza y el coeficiente de variación del estimador de la sensibilidad mediante el enfoque IFEL se obtienen de la siguiente manera:

$$\mathbb{V} \left[\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \theta_{l,i}} \right] = \frac{1}{N(N-1)} \left(\left(\sum_{j=1}^N (s_{l,i}(\alpha c^{(j)} + \Gamma \mathbf{z}^{\perp,(j)} | \boldsymbol{\theta}) \phi(c^{(j)}))^2 \right) - N \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \theta_{l,i}}^2 \right) \quad (2.5.12)$$

$$\delta_{\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \theta_{l,i}}} = \frac{1}{\sqrt{N}} \frac{\sqrt{\frac{1}{(N-1)} \left(\left(\sum_{j=1}^N (s_{l,i}(\alpha c^{(j)} + \Gamma \mathbf{z}^{\perp,(j)} | \boldsymbol{\theta}) \phi(c^{(j)}))^2 \right) - N \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \theta_{l,i}}^2 \right)}}{\left| \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \theta_{l,i}} \right|} \quad (2.5.13)$$

La ecuación 2.5.13 asume que el valor de la sensibilidad es distinto de cero.

2.6. Implementación del Estimador de Sensibilidad para Distribución Gaussiana y Log-Normal

Como se pudo observar en las secciones anteriores, existen varios términos definidos que dependen del tipo de densidad de distribución de probabilidad, que son necesarios obtener para estimar la sensibilidad de la probabilidad de falla, como los siguientes terminos:

- El término velocidad ($\mathbf{v}_{l,i}$) definido en la ecuación 2.3.9, el cual representa la razón de cambio de $\mathbf{z}$ respecto a una perturbación en el valor de $\theta_{l,i}$
- El término $h_{\mathbf{z},\theta_{l,i}}(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta})$ definido en la ecuación 2.3.2, el cual corresponde a la derivada de la función de densidad de probabilidad respecto a $\theta_{l,i}$, normalizado por la función de densidad de probabilidad.
- El término $\varphi_{\mathbf{z},\theta_{l,i}}(\Gamma \mathbf{z}^{\perp,(j)} | \boldsymbol{\theta})$ correspondiente a la integral definida en la ecuación 2.5.2, la cual evalúa la expresión $h_{\mathbf{z},\theta_{l,i}}(\mathbf{z} | \boldsymbol{\theta})$ a lo largo de una línea generada $L^{(j)}$ al utilizar el enfoque IDF para estimar la sensibilidad de la probabilidad de falla con *Line Sampling*.

En la presente sección se deducen las expresiones analíticas para las cantidades mencionadas anteriormente para el caso en que las variables físicas que siguen distribuciones de probabilidad Gaussiana o Log-Normal.

2.6.1. Expresiones Análíticas para la velocidad (v) para Variables Gaussianas y Log-Normal

Considere que la variable aleatoria X_i sigue una distribución Normal Estándar o Log-Normal. Para ambos casos los parámetros de la función de distribución de probabilidad son μ_i y σ_i , los cuales representan el valor esperado y la desviación estándar de la función de distribución. Ambos parámetros mencionados anteriormente se agrupan en el vector θ_i , de manera tal que $\theta_i = [\mu_i, \sigma_i]^T$.

Para el caso donde X_i sigue una distribución Gaussiana, se tiene la siguiente función de transformación:

$$z_i = T_{xz}(x_i|\theta_i) = \frac{x_i - \mu_i}{\sigma_i} \quad (2.6.1)$$

Diferenciando la ecuación 2.6.1 respecto a $\theta_{l,i}$ y x_i , se obtienen los siguientes resultados:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_i} = \frac{1}{\sigma_i} \quad (2.6.2)$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial \theta_{1,i}} = v_{1,i} = \frac{1}{\sigma_i} \quad (2.6.3)$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial \theta_{2,i}} = v_{2,i} = \frac{-z_i}{\sigma_i} \quad (2.6.4)$$

Para el caso donde X_i sigue una distribución Log-Normal, se tiene la siguiente función de transformación:

$$z_i = T_{xz}(x_i|\theta_i) = \frac{\ln(x_i) - \mu_{G_i}}{\sigma_{G_i}} \quad (2.6.5)$$

Donde:

$$\mu_{G_i} = \ln \left(\frac{\mu_i^2}{\sqrt{\mu_i^2 + \sigma_i^2}} \right) \quad (2.6.6)$$

$$\sigma_{G_i} = \sqrt{\ln \left(\frac{\sigma_i^2}{\mu_i^2} + 1 \right)} \quad (2.6.7)$$

Note que, μ_{G_i} y σ_{G_i} son el valor esperado y desviación estándar de $\ln(X_i)$. Diferenciando la función de transformación presentada en la ecuación 2.6.5 respecto a x_i y $\theta_{l,i}$, se obtienen los siguientes resultados:

$$\frac{\partial z_i}{\partial x_i} = \frac{1}{x_i \sigma_{G_i}} = \frac{e^{-\mu_{G_i} - \sigma_{G_i} z_i}}{\sigma_{G_i}} \quad (2.6.8)$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial \theta_{1,i}} = v_{1,i} = -\kappa_i - \lambda_i \left(\frac{\ln(x_i) - \mu_{G_i}}{\sigma_{G_i}} \right) = -\kappa_i - \lambda_i z_i \quad (2.6.9)$$

$$\frac{\partial z_i}{\partial \theta_{2,i}} = v_{2,i} = -\zeta_i - \eta_i \left(\frac{\ln(x_i) - \mu_{G_i}}{\sigma_{G_i}} \right) = -\zeta_i - \eta_i z_i \quad (2.6.10)$$

Donde:

$$\kappa_i = \frac{1}{\sigma_{G_i}} e^{-\mu_{G_i} - \sigma_{G_i}^2/2} \left(2 - e^{-\sigma_{G_i}^2} \right) \quad (2.6.11)$$

$$\lambda_i = \frac{1}{\sigma_{G_i}^2} e^{-\mu_{G_i} - \sigma_{G_i}^2/2} \left(e^{-\sigma_{G_i}^2} - 1 \right) \quad (2.6.12)$$

$$\zeta_i = -\frac{1}{\sigma_{G_i}} e^{-\mu_{G_i} - 3\sigma_{G_i}^2/2} \left(\sqrt{e^{\sigma_{G_i}^2} - 1} \right) \quad (2.6.13)$$

$$\eta_i = -\frac{\zeta_i}{\sigma_{G_i}} \quad (2.6.14)$$

2.6.2. Solución Análítica para la Integral Unidimensional ($\varphi_{\mathbf{z},\theta_{l,i}}$) para Variables Gaussianas y Log-Normal

Considerando que la variable X_i sigue una distribución Gaussiana, se tiene que la función $h_{\mathbf{z},\theta_{l,i}}$ puede ser expresada de la siguiente manera:

$$h_{\mathbf{z},\theta_{1,i}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) = h_{\mathbf{z},\mu_i}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) = \frac{z_i}{\sigma_i} \quad (2.6.15)$$

$$h_{\mathbf{z},\theta_{2,i}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) = h_{\mathbf{z},\sigma_i}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{\sigma_i} + \frac{z_i^2}{\sigma_i} \quad (2.6.16)$$

Se puede apreciar en las ecuaciones 2.6.15 y 2.6.16 que la función $h_{\mathbf{z},\theta_{l,i}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta})$, con $l = 1,2$ es polinomio de z_i . Por lo tanto, la ecuación 2.5.2 puede ser resuelta de forma analítica [12], obteniendo los siguientes resultados:

$$\varphi_{\mathbf{z},\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}^\perp|\theta_i) = \frac{z_i^\perp}{\sigma_i} \Phi(-c) + \frac{\alpha_i}{\sigma_i} \phi(c) \quad (2.6.17)$$

$$\varphi_{\mathbf{z},\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}^\perp|\theta_i) = \frac{1}{\sigma_i} \left((z_i^\perp)^2 + \alpha_i^2 - 1 \right) \Phi(-c) + \frac{\alpha_i}{\sigma_i} (2z_i^\perp + \alpha_i c) \phi(c) \quad (2.6.18)$$

Para el caso en que X_i sigue una distribución Log-Normal, se tiene que la función $h_{\mathbf{z},\theta_{l,i}}$ puede ser expresada de la siguiente manera:

$$h_{\mathbf{z},\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) = h_{\mathbf{z},\mu_i}(z_i|\theta_i) = -\lambda_i + \kappa_i z_i + \lambda_i z_i^2 \quad (2.6.19)$$

$$h_{\mathbf{z},\boldsymbol{\theta}}(\mathbf{z}|\boldsymbol{\theta}) = h_{\mathbf{z},\sigma_i}(z_i|\theta_i) = -\eta_i + \zeta_i z_i + \eta_i z_i^2 \quad (2.6.20)$$

Donde κ_i , λ , ζ_i y η_i corresponden a los términos definidos en las ecuaciones 2.6.11, 2.6.12, 2.6.13

y 2.6.14.

De igual manera que para la distribución Gaussiana, para el caso Log-Normal la ecuación 2.5.2 puede ser resuelta de forma analítica [12], obteniendo los siguientes resultados:

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{z}, \theta_{1,i}}(\mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta}) &= \left(\lambda_i \left((\mathbf{z}_i^\perp)^2 + \alpha_i^2 - 1 \right) + \kappa_i z_i^\perp \right) \Phi(-c) + \dots \\ &\quad \left(\lambda_i \alpha_i (2z_i^\perp + \alpha_i c) + \kappa_i \alpha_i \right) \phi(c) \end{aligned} \quad (2.6.21)$$

$$\begin{aligned} \varphi_{\mathbf{z}, \theta_{2,i}}(\mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta}) &= \left(\eta_i \left((\mathbf{z}_i^\perp)^2 + \alpha_i^2 - 1 \right) + \zeta_i z_i^\perp \right) \Phi(-c) + \dots \\ &\quad \left(\eta_i \alpha_i (2z_i^\perp + \alpha_i c) + \zeta_i \alpha_i \right) \phi(c) \end{aligned} \quad (2.6.22)$$

Donde κ_i , λ , ζ_i y η_i corresponden a los términos definidos en las ecuaciones 2.6.11, 2.6.12, 2.6.13 y 2.6.14.

FORMULACIÓN DEL ESTIMADOR ÓPTIMO COMBINADO DE LA SENSIBILIDAD

3.1. Introducción

Como se explicó en las secciones anteriores, para problemas ingenieriles en donde algún parámetro de diseño presente incertidumbre en su valor, es posible realizar un análisis de confiabilidad mediante la probabilidad de falla. Tal como es importante la probabilidad de falla, también lo es su sensibilidad respecto a los parámetros asociados a las funciones de densidad de probabilidad involucradas.

De acuerdo a lo presentado en la sección 2.5, es posible estimar la sensibilidad de la probabilidad de falla mediante dos enfoques distintos, pero equivalentes. Esto genera la oportunidad de mejorar el estimador de la sensibilidad, por lo que en el presente capítulo se presenta un método para obtener un estimador óptimo de la sensibilidad, combinando los dos enfoques presentados en la sección 2.5.

3.2. Técnica de la Mejor Estimación Lineal Inesgada

En resumen, hasta el momento se han descrito los siguientes procedimientos para cuantificar la sensibilidad de la confiabilidad:

1. Integración sobre la función de estado límite (IFEL)(ver ecuación 2.5.10).

$$\frac{\partial p_F}{\partial \theta_{l,i}}^{\text{IFEL}} = \int_{\mathbf{z}^\perp \in \mathbb{R}^{n-1}} \varsigma_{l,i}(\boldsymbol{\alpha}c + \Gamma \mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta}) \phi(c) f_{\mathbf{z}^\perp}(\mathbf{z}^\perp) d\mathbf{z}^\perp = \int_{\mathbf{z}^\perp \in \mathbb{R}^{n-1}} \xi_1(\mathbf{z}^\perp) f_{\mathbf{z}^\perp}(\mathbf{z}^\perp) d\mathbf{z}^\perp \quad (3.2.1)$$

Con el objeto de simplificar la notación, en la ecuación anterior se introdujo la definición $\xi_1(\mathbf{z}^\perp) = \varsigma_{l,i}(\boldsymbol{\alpha}c + \Gamma \mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta}) \phi(c)$.

2. Integración sobre el dominio de falla (IDF)(ver ecuación 2.5.3).

$$\frac{\partial p_F}{\partial \theta_{l,i}}^{\text{IDF}} = \int_{\mathbf{z}^\perp \in \mathbb{R}^{n-1}} \varphi_{\mathbf{z},\theta_{l,i}}(\Gamma \mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta}) f_{\mathbf{z}^\perp}(\mathbf{z}^\perp) d\mathbf{z}^\perp = \int_{\mathbf{z}^\perp \in \mathbb{R}^{n-1}} \xi_2(\mathbf{z}^\perp) f_{\mathbf{z}^\perp}(\mathbf{z}^\perp) d\mathbf{z}^\perp \quad (3.2.2)$$

Con el objeto de simplificar la notación, en la ecuación anterior se introdujo la definición $\xi_2(\mathbf{z}^\perp) = \varphi_{\mathbf{z},\theta_{l,i}}(\Gamma \mathbf{z}^\perp | \boldsymbol{\theta})$.

Para mejorar la estimación de la sensibilidad de la confiabilidad se adopta el procedimiento desarrollado por Nisius, denominado como procedimiento BLUE (Best Linear Unbiased Estimate) [11], el cual consiste en encontrar la mejor combinación lineal de dos observables de un mismo valor real, los cuales poseen algún grado de correlación. Para explicar este procedimiento, considere lo siguiente:

- x_1 y x_2 son dos estimadores de un observable cuyo valor real es x_T , y poseen varianzas σ_1^2 y σ_2^2 .
- Ambos estimadores se encuentran correlacionados, donde $-1 \leq \rho \leq 1$ denota la correlación entre ambos.
- Con la finalidad de explicar el procedimiento, se considera que la estimación x_1 es la más precisa, por lo tanto se cumple que $t = \sigma_2/\sigma_1 \geq 1$

Bajo el procedimiento BLUE, x_C corresponde al valor de la mejor combinación lineal de los dos estimadores, realizada de la siguiente manera:

$$x_C = (1 - \beta)x_1 + \beta x_2 \quad (3.2.3)$$

Donde β es el parámetro de control óptimo, y corresponde al peso de la estimación menos precisa. El objetivo es encontrar el parámetro de control óptimo de manera tal que el valor de

la varianza del estimador óptimo combinado sea menor que de cada estimador independiente. La varianza del estimador óptimo combinado se obtiene de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sigma_C^2 &= \int ((1-\beta)x_1 + \beta x_2 - \mathbb{E}[(1-\beta)x_1 + \beta x_2])^2 f_X(x) dx \\ &= \int (\beta(x_1 - \mathbb{E}[x_1]) + (1-\beta)(x_2 - \mathbb{E}[x_2]))^2 f_X(x) dx\end{aligned}\quad (3.2.4)$$

Considerando que el parámetro de de control óptimo β posee un valor constante, es posible reordenar la ecuación anterior de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}\sigma_C^2 &= (1-\beta)^2 \int (x_1 - \mathbb{E}[x_1])^2 f_X dx + \beta^2 \int (x_2 - \mathbb{E}[x_2])^2 f_X dx \\ &\quad + 2\beta(1-\beta) \int (x_1 - \mathbb{E}[x_1])(x_2 - \mathbb{E}[x_2]) f_X dx\end{aligned}\quad (3.2.5)$$

Es posible notar que en la ecuación 3.2.5 se encuentran definidos los términos de varianza y covarianza de los estimadores individuales. Dado esto, la varianza del estimador óptimo combinado queda como:

$$\sigma_C^2 = (1-\beta)^2 \sigma_1^2 + \beta^2 \sigma_2^2 + 2\beta(1-\beta) \text{cov}[x_1, x_2] \quad (3.2.6)$$

Para aplicar correctamente este procedimiento es necesario encontrar el parámetro de control óptimo adecuado, de manera tal que minimice la varianza del estimador óptimo combinado, como se presenta de manera esquemática la figura 3.1. En dicha figura, se observa que la varianza del estimador combinado σ_C^2 es un polinomio cuadrático respecto de β . Para obtener el valor del parámetro de control óptimo se iguala a cero la derivada de la ecuación 3.2.6 respecto a β , tal como se presenta a continuación:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \sigma_C^2}{\partial \beta} &= -2(1-\beta)\sigma_1^2 + 2\beta\sigma_2^2 + 2(1-2\beta)\text{cov}[x_1, x_2] = 0 \\ \beta^{\text{opt}} &= \frac{\sigma_1^2 - \text{cov}[x_1, x_2]}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\text{cov}[x_1, x_2]} = \frac{\sigma_1^2 - \rho\sigma_1\sigma_2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2 - 2\rho\sigma_1\sigma_2}\end{aligned}\quad (3.2.7)$$

Dada la estructura de la ecuación 3.2.3, es posible notar que en teoría el parámetro de control óptimo β puede tomar cualquier valor real sin afectar el valor del estimador combinado, sin embargo, la correcta elección del parámetro de control óptimo es fundamental para lograr el objetivo de minimizar la variabilidad del estimador combinado. Es posible demostrar que la ecuación 3.2.7 puede ser reescrita de la siguiente manera:

$$\beta^{\text{opt}} = \frac{1 - \rho t}{1 - 2\rho t + t^2} = \frac{1 - \rho t}{(1 - \rho t)^2 + t^2(1 - \rho^2)} \quad (3.2.8)$$

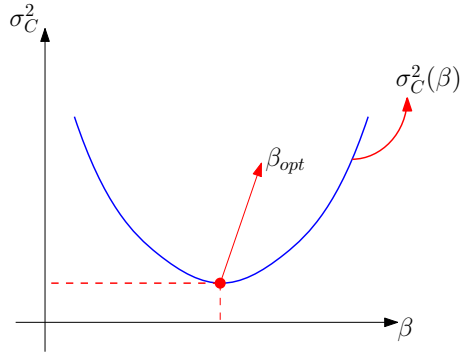
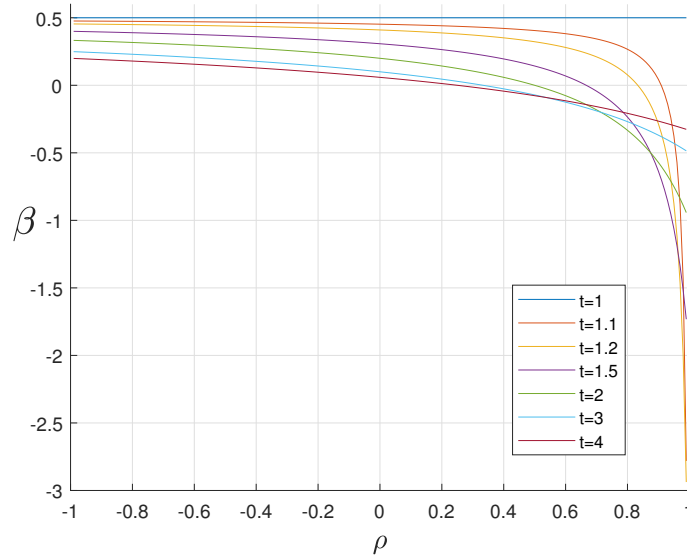


Figura 3.1: Representación esquemática del parámetro de control óptimo

La ecuación 3.2.8 es válida para $-1 \leq \rho \leq 1$ y $t \geq 1$. Se puede apreciar que el denominador es siempre positivo, de manera tal que el signo del parámetro de control óptimo β queda determinado por el numerador. El valor del parámetro de control óptimo β está directamente relacionado con la razón $t = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$ y la correlación ρ , tal como se puede apreciar en la figura 3.2, y su valor se encuentra dentro de los siguientes límites.

$$\frac{1}{2} \geq \beta = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - \rho t}{1 - 2\rho t + t^2} \geq \frac{1}{1 - t} \quad (3.2.9)$$

El límite izquierdo de la ecuación 3.2.9 se deriva del caso en que $\rho \neq 1$ y $z = 1$, y el límite derecho para el caso en que $\rho = 1$.

Figura 3.2: β en función de ρ

Se puede apreciar que el valor del parámetro de control óptimo β debe ser menor que $\frac{1}{2}$, ya que

en caso de ser mayor implicaría que la estimación x_2 es la más precisa. El valor del parámetro de control óptimo β se vuelve negativo para casos en que $\rho t > 1$, tal como se puede apreciar en la figura 3.2.

La figura 3.3 muestra que el nivel de mejora en la desviación estándar del estimador óptimo combinado está relacionado con la correlación existente (ρ) de los estimadores individuales, y la razón de sus desviaciones estándar ($t = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$). Pudiendo obtener valores de σ_C significativamente menores que los de σ_1 para casos en que el valor de la correlación ρ es más cercano a -1 .

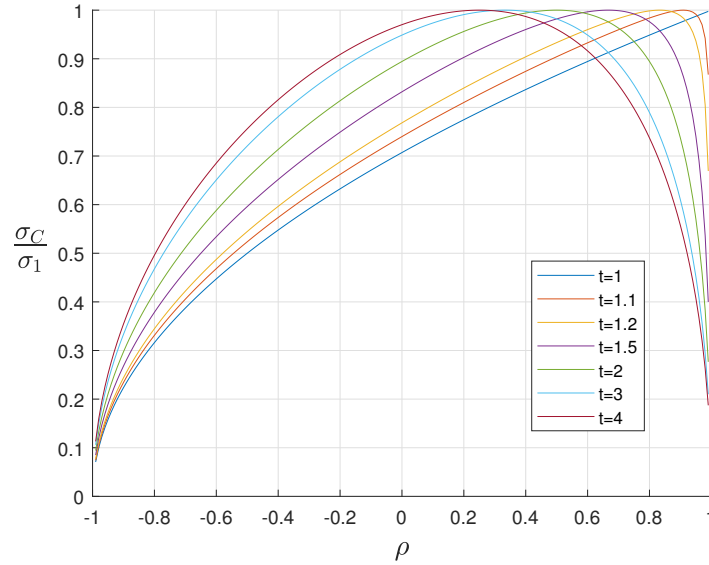


Figura 3.3: $\frac{\sigma_C}{\sigma_1}$ en función de ρ

Dado que no se conoce el valor real de la sensibilidad de la confiabilidad, ésta se puede estimar utilizando valores muestrales con la técnica de simulación Line Sampling, aplicando los enfoques IFEL o IDF. Por lo tanto, aplicando la ecuación 3.2.3 para combinar los procedimientos IFEL e IDF para valores muestrales se tiene que:

$$\begin{aligned}
 \frac{\partial p_F}{\partial \theta_{l,i}}^{\text{EOC}} &= (1 - \beta) \mathbb{E}[\xi_1(\mathbf{z}^\perp)] + \beta \mathbb{E}[\xi_2(\mathbf{z}^\perp)] \\
 \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \theta_{l,i}}^{\text{EOC}} &= (1 - \beta) \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_1(\mathbf{z}^{\perp,(i)}) \right) + \beta \left(\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_2(\mathbf{z}^{\perp,(i)}) \right) \\
 \frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \theta_{l,i}}^{\text{EOC}} &= (1 - \beta) \hat{\xi}_1 + \beta \hat{\xi}_2
 \end{aligned} \tag{3.2.10}$$

Donde EOC = Estimador óptimo combinado.

La varianza del estimador óptimo combinado y el parámetro de control óptimo se obtienen de

la siguiente manera:

$$\mathbb{V} \left[\frac{\partial p_F^{\text{EOC}}}{\partial \theta_{l,i}} \right] = (1 - \beta)^2 \mathbb{V} [\xi_1] + \beta^2 \mathbb{V} [\xi_2] + 2\beta(1 - \beta) \text{cov} [\xi_1, \xi_2] \quad (3.2.11)$$

$$\beta^{\text{opt}} = \frac{\mathbb{V} [\xi_1] - \text{cov} [\xi_1, \xi_2]}{\mathbb{V} [\xi_1] + \mathbb{V} [\xi_2] - 2\text{cov} [\xi_1, \xi_2]} \quad (3.2.12)$$

Dado que no se conoce la varianza y covarianza de ξ_1 y ξ_2 , no es posible determinar el valor del parámetro de control óptimo β . Una opción es reemplazar estas varianzas y covarianza por sus valores muestrales. No obstante, realizar esto violaría la ecuación 3.2.5, ya que en su desarrollo se considera que β posee un valor constante. Además, al ocupar valores muestrales se genera un sesgo en el valor de la estimación [5].

La siguiente sección presenta un mecanismo para poder eliminar el efecto del sesgo en el estimador óptimo combinado, y obtener de mejor manera el valor del parámetro de control óptimo.

3.3. Técnica de Separación - Avramidis

Para solucionar el problema del cálculo del parámetro de control óptimo (β) requerido para el estimador óptimo combinado de la sensibilidad de la confiabilidad, se implementa la técnica de separación de Avramidis [1]. Para esto, considere la siguiente expresión para del estimador óptimo combinando de la sensibilidad:

$$\xi_c^{(i)} = (1 - \beta_{\tau(i)})\xi_1^{(i)} + \beta_{\tau(i)}\xi_2^{(i)} \quad (3.3.1)$$

Donde $\{(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}) : i = 1, \dots, N\}$ son N muestras independientes de los estimadores de la sensibilidad de la probabilidad de falla, y $\xi_c^{(i)}$ corresponde al estimador óptimo combinado y $\beta_{\tau(i)}$ denota el parámetro de control óptimo asociado con la i -ésima muestra. El conjunto completo de muestras se divide en m grupos ($m \geq 3$), de manera tal que N siempre es un múltiplo entero de m ($N = km$, con $k \in \mathbb{N}$). Las k observaciones pertenecientes al l -ésimo grupo $\mathcal{G}_l = \{(\xi_1^{(i)}, \xi_2^{(i)}) : i \in \mathcal{F}_l\}$, consisten en observaciones con índices contenidos en el conjunto:

$$\mathcal{F}_l = \{(l-1)k + 1, (l-1)k + 2, \dots, lk\}, \quad l = 1, \dots, m \quad (3.3.2)$$

Note que el grupo al cual pertenece la i -ésima muestra viene dada por la siguiente función $\gamma(i)$:

$$\gamma(i) = \left\lceil \frac{(i-1)}{k} \right\rceil + 1, \quad i = 1, \dots, N \quad (3.3.3)$$

Donde $[x]$ denota la función parte entera, la cual entrega el número entero más grande menor o igual que x . Evidentemente, el valor que asume $\gamma(i)$ corresponde siempre a un número entero entre 1 y m (ambos inclusive). Además, se define una función de asignación de grupo de control $\tau(i)$ de la siguiente manera:

$$\tau(i) = (\gamma(i) \bmod m) + 1 \quad (3.3.4)$$

Donde $\gamma(i) \bmod m$ corresponde al resto de la división de $\gamma(i)$ sobre m . La asignación de un grupo de control $\tau(i)$ asociado con la i -ésima muestra permite definir la manera en la cuál se calcula el parámetro de control óptimo $\beta_{\tau(i)}$.

Para explicar mejor el procedimiento, considere a modo de ejemplo, que se tiene un total de N muestras de estimaciones de ξ_1 y ξ_2 . Aplicando la técnica de separación de Avramidis para $m = 3$ grupos se tiene que $N = 3k$, y que la función de pertenencia y la función de asignación para cada grupo toman los valores mostrados en la tabla 3.1. Los valores de la función de pertenencia y función de asignación de grupo de control mostrados en la tabla 3.1 pueden ser interpretados de la siguiente manera, cada muestra $\xi_j^{(i)}$ con $i = 1, \dots, N$ y $j = 1, 2$ pertenece al grupo asignado por el valor de $\gamma(i)$, mientras que el valor del parámetro de control óptimo $\beta_{\tau(i)}$ a utilizar sobre dicho grupo se obtiene con las muestras del grupo perteneciente al valor de la función de asignación de

control $\tau(i)$.

Tabla 3.1: Ejemplo método de separación de Avramidis

i	$\xi_1^{(i)}$	$\xi_2^{(i)}$	$\gamma(i)$	$\tau(i)$	$\beta_{\tau(i)}$
1	$\hat{\xi}_1^{(1)}$	$\hat{\xi}_2^{(1)}$	1	2	$\hat{\beta}_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
k	$\hat{\xi}_1^{(k)}$	$\hat{\xi}_2^{(k)}$	1	2	$\hat{\beta}_2$
$k+1$	$\hat{\xi}_1^{(k+1)}$	$\hat{\xi}_2^{(k+1)}$	2	3	$\hat{\beta}_3$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$2k$	$\hat{\xi}_1^{(2k)}$	$\hat{\xi}_2^{(2k)}$	2	3	$\hat{\beta}_3$
$2k+1$	$\hat{\xi}_1^{(2k+1)}$	$\hat{\xi}_2^{(2k+1)}$	3	1	$\hat{\beta}_1$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$
$3k$	$\hat{\xi}_1^{(3k)}$	$\hat{\xi}_2^{(3k)}$	3	1	$\hat{\beta}_1$

Bajo este procedimiento, el parámetro de control óptimo se obtiene de la siguiente manera:

$$\beta_{\tau(i)} = \frac{\sigma_{\hat{\xi}_1 \hat{\xi}_1}^2(\Xi_{1,\tau(i)}) - \sigma_{\hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2}(\Xi_{1,\tau(i)}, \Xi_{2,\tau(i)})}{\sigma_{\hat{\xi}_1 \hat{\xi}_1}^2(\Xi_{1,\tau(i)}) + \sigma_{\hat{\xi}_2 \hat{\xi}_2}^2(\Xi_{2,\tau(i)}) - 2\sigma_{\hat{\xi}_1 \hat{\xi}_2}(\Xi_{1,\tau(i)}, \Xi_{2,\tau(i)})} \quad (3.3.5)$$

Donde:

- $\Xi_{j,\tau(i)}$: Set de muestras de ξ_j asociados al grupo de control $\tau(i)$.
- $\sigma_{\hat{\xi}_j \hat{\xi}_j}^2(\Xi_j)$: Varianza muestral del conjunto de muestras Ξ_j .
- $\sigma_{\hat{\xi}_j \hat{\xi}_l}(\Xi_j, \Xi_l)$: Covarianza muestral de los conjuntos de muestras Ξ_j y Ξ_l .

De ésta manera se puede obtener el estimador óptimo combinado de la sensibilidad de la confiabilidad de la siguiente manera:

$$\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \theta}^{\text{EOC}} = \mathbb{E}[\hat{\xi}_c] = \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_c^{(i)} \right] \quad (3.3.6)$$

Además, se tiene la varianza del estimador óptimo combinado se obtiene de la siguiente forma:

$$\mathbb{V}[\hat{\xi}_c] = \mathbb{V} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_c^{(i)} \right] = \frac{1}{N^2} \sum_{i_1=1}^N \sum_{i_2=1}^N \text{cov}[\xi_c^{(i_1)}, \xi_c^{(i_2)}] \quad (3.3.7)$$

Sin embargo, se tiene que la covarianza cumple con los siguiente:

$$\begin{aligned}
\text{cov}[\xi_c^{(i_1)}, \xi_c^{(i_2)}] &= \mathbb{E}[\xi_c^{(i_1)}, \xi_c^{(i_2)}] - \mathbb{E}[\xi_c^{(i_1)}]\mathbb{E}[\xi_c^{(i_2)}] \\
&= \mathbb{E}[\xi_1^{(i_1)}\xi_1^{(i_2)} + \xi_1^{(i_1)}\beta_{\tau(i_2)}(\xi_2^{(i_2)} - \xi_1^{(i_2)}) \\
&\quad + \beta_{\tau(i_1)}(\xi_2^{(i_1)} - \xi_1^{(i_1)})\xi_1^{(i_2)} \\
&\quad + \beta_{\tau(i_1)}(\xi_2^{(i_1)} - \xi_1^{(i_1)})\beta_{\tau(i_2)}(\xi_2^{(i_2)} - \xi_1^{(i_2)})] \\
&\quad - \mathbb{E}[\xi_1^{(i_1)} + \beta_{\tau(i_1)}(\xi_2^{(i_1)} - \xi_1^{(i_1)})]\mathbb{E}[\xi_1^{(i_2)} + \beta_{\tau(i_2)}(\xi_2^{(i_2)} - \xi_1^{(i_2)})] \\
&= \underbrace{\mathbb{E}[\xi_1^{(i_1)}\xi_1^{(i_2)}]}_{(1)} + \underbrace{\mathbb{E}[\xi_1^{(i_1)}\beta_{\tau(i_2)}(\xi_2^{(i_2)} - \xi_1^{(i_2)})]}_{(2)} \\
&\quad + \underbrace{\mathbb{E}[\xi_1^{(i_2)}\beta_{\tau(i_1)}(\xi_2^{(i_1)} - \xi_1^{(i_1)})]}_{(3)} \\
&\quad + \underbrace{\mathbb{E}[\beta_{\tau(i_1)}(\xi_2^{(i_1)} - \xi_1^{(i_1)})\beta_{\tau(i_2)}(\xi_2^{(i_2)} - \xi_1^{(i_2)})]}_{(4)} \\
&\quad - \underbrace{\mathbb{E}[\xi_1^{(i_1)} + \beta_{\tau(i_1)}(\xi_2^{(i_1)} - \xi_1^{(i_1)})]\mathbb{E}[\xi_1^{(i_2)} + \beta_{\tau(i_2)}(\xi_2^{(i_2)} - \xi_1^{(i_2)})]}_{(5)}
\end{aligned} \tag{3.3.8}$$

De la ecuación 3.3.8, observe el término (2) del lado derecho de la ecuación:

$$\mathbb{E}[\underbrace{\xi_1^{(i_1)}}_{(2.a)}\beta_{\tau(i_2)}\underbrace{(\xi_2^{(i_2)} - \xi_1^{(i_2)})}_{(2.b)}]$$

Se puede observar que los términos (2.a) y (2.b) se obtienen de los conjuntos de muestras i_1 e i_2 respectivamente. Los conjuntos de muestras i_1 e i_2 son disjuntos, esto implica que los términos obtenidos de distintos conjuntos de muestras sean independientes. Mencionado lo anterior y bajo el supuesto que $i_1 \neq i_2$, se tiene que:

- Para el segundo término del lado derecho de la ecuación 3.3.8 se cumple lo siguiente:

$$\mathbb{E}[\xi_1^{(i_1)}\beta_{\tau(i_2)}(\xi_2^{(i_2)} - \xi_1^{(i_2)})] = \mathbb{E}[\xi_1^{(i_1)}\beta_{\tau(i_2)}]\mathbb{E}[(\xi_2^{(i_2)} - \xi_1^{(i_2)})] = 0 \tag{3.3.9}$$

- Un argumento equivalente se puede utilizar para el término (3), es decir:

$$\mathbb{E}[\xi_1^{(i_2)}\beta_{\tau(i_1)}(\xi_2^{(i_1)} - \xi_1^{(i_1)})] = \mathbb{E}[\xi_1^{(i_2)}\beta_{\tau(i_1)}]\mathbb{E}[(\xi_2^{(i_1)} - \xi_1^{(i_1)})] = 0 \tag{3.3.10}$$

- Respecto del término (4) del lado derecho de la ecuación 3.3.8. Dado que $m \geq 3$, la definición de $\tau(\cdot)$ asegura que una de las siguientes propiedades debe ocurrir: $\tau(j) \neq \gamma(i)$ o $\tau(i) \neq \gamma(j)$, entonces, por un argumento similar al de la ecuación 3.3.9, se tiene que las cantidades $\beta_{\tau(i_1)}(\xi_2^{(i_1)} - \xi_1^{(i_1)})\beta_{\tau(i_2)}$ y $(\xi_2^{(i_2)} - \xi_1^{(i_2)})$ son funciones respectivas de dos conjuntos de muestras disjuntos mutuamente independientes, por lo tanto:

$$\mathbb{E}[\beta_{\tau(i_1)}(\xi_2^{(i_1)} - \xi_1^{(i_1)})\beta_{\tau(i_2)}(\xi_2^{(i_2)} - \xi_1^{(i_2)})] = \mathbb{E}[\beta_{\tau(i_1)}(\xi_2^{(i_1)} - \xi_1^{(i_1)})\beta_{\tau(i_2)}]\mathbb{E}[(\xi_2^{(i_2)} - \xi_1^{(i_2)})] = 0 \quad (3.3.11)$$

- Luego aplicando los argumentos anteriores al término (5) del lado derecho de la ecuación 3.3.8, éste resulta $\mathbb{E}[\xi_1^{(i_1)}][\xi_1^{(i_2)}]$.

Por lo tanto, se obtiene que para $i_1 \neq i_2$:

$$\text{cov}[\xi_c^{(i_1)}, \xi_c^{(i_2)}] = \mathbb{E}[\xi_1^{(i_1)}\xi_1^{(i_2)}] - \mathbb{E}[\xi_1^{(i_1)}]\mathbb{E}[\xi_1^{(i_2)}] = 0 \quad (3.3.12)$$

Explicado lo anterior, se obtiene que la varianza del estimador óptimo combinado se puede estimar de la siguiente manera:

$$\mathbb{V}[\hat{\xi}_c] = \frac{1}{N^2} \sum_{i_1=1}^N \mathbb{V}[\xi_c^{(i)}] = \frac{1}{N} \mathbb{V}[\hat{\xi}_c] \quad (3.3.13)$$

Finalmente, la varianza del estimador óptimo combinado obtenido se puede estimar de la siguiente manera:

$$\mathbb{V} \left[\frac{\partial \hat{p}_F^{\text{EOC}}}{\partial \theta} \right] = \frac{1}{N(N-1)} \left(\left(\sum_{i=1}^N \xi_c^{(i)2} \right) - N\hat{\xi}_c^2 \right) \quad (3.3.14)$$

3.3.1. Análisis del Sesgo utilizando la técnica de Avramidis

A continuación, se investiga si al aplicar la técnica de Avramidis, el estimador combinado de la sensibilidad de la probabilidad posee un sesgo o no. En particular, aplicando la técnica de Avramidis se tiene que el sesgo es igual a:

$$\begin{aligned}
 \text{Sesgo}[\hat{\xi}_c] &= \mathbb{E} \left[\hat{\xi}_c - \frac{\partial p_F^{\text{EOC}}}{\partial \theta} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \left(\sum_{i=1}^N (1 - \beta_{\tau(i)}) \xi_1^{(i)} + \beta_{\tau(i)} \xi_2^{(i)} \right) - \frac{\partial p_F^{\text{EOC}}}{\partial \theta} \right] \\
 &= \mathbb{E} \left[\frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_1^{(i)} + \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \beta_{\tau(i)} (\xi_2^{(i)} - \xi_1^{(i)}) \right] - \frac{\partial p_F^{\text{EOC}}}{\partial \theta} \quad (3.3.15) \\
 &= \frac{1}{N} N \frac{\partial p_F^{\text{EOC}}}{\partial \theta} + \frac{1}{N} N \mathbb{E}[\beta_{\tau(i)} (\xi_2^{(i)} - \xi_1^{(i)})] - \frac{\partial p_F^{\text{EOC}}}{\partial \theta} \\
 &= \mathbb{E}[\beta_{\tau(i)}] \mathbb{E}[\xi_2^{(i)} - \xi_1^{(i)}] \\
 &= \mathbb{E}[\beta_{\tau(i)}] (\mathbb{E}[\xi_2^{(i)}] - \mathbb{E}[\xi_1^{(i)}])
 \end{aligned}$$

Se tiene que por definición $(\mathbb{E}[\xi_2^{(i)}] - \mathbb{E}[\xi_1^{(i)}]) = 0$, por lo tanto, se tiene que aplicando la técnica de separación de Avramidis, no existe sesgo en el estimador óptimo combinado para la obtención de la sensibilidad de la confiabilidad.

APLICACIÓN DEL ESTIMADOR ÓPTIMO COMBINADO

4.1. Introducción

En el capítulo 2 se explicó como estimar la probabilidad de falla de un sistema ingenieril aplicando la técnica de simulación *Line Sampling*, y además, se presentan dos enfoques para estimar la sensibilidad de la probabilidad de falla como etapa de post procesamiento, los cuales se corresponden a los enfoques IFEL e IDF. Con el objetivo de mejorar la estimación de la sensibilidad de falla, en el capítulo 3 se presenta una técnica para obtener un estimador óptimo combinado de la sensibilidad a partir de los dos enfoques nombrados anteriormente.

El presente capítulo presenta ejemplos de aplicación, los cuales pretenden validar la aplicación de las técnicas presentadas en las secciones 3.2 y 3.3. Se demuestra que al combinar los enfoques IFEL e IDF se puede tener una mejor estimación de la sensibilidad, principalmente en problemas que involucren variables aleatorias que siguen una distribución de probabilidad Gaussiana o Log-Normal.

4.2. Ejemplo N°1: Caso Analítico

Considere que el valor de la sensibilidad de la confiabilidad respecto al valor esperado de alguna variable de interés de un sistema ingenieril se cuantifica mediante los enfoques IFEL e IDF, y que respectivos estimadores siguen las siguientes funciones de densidad de probabilidad:

$$\frac{\partial p_F}{\partial \mu}^{\text{IFEL}} \sim N(1, 1), \quad \frac{\partial p_F}{\partial \mu}^{\text{IDF}} \sim N(1, t) \quad (4.2.1)$$

Donde $t = \sigma^{\text{IDF}} / \sigma^{\text{IFEL}}$

Observe que en este problema, se asume que las funciones de densidad de probabilidad asociadas a los estimadores de sensibilidad IFEL e IDF se conocen de forma analítica. Claramente, esto es una simplificación, puesto que lo habitual es que dichos estimadores deben ser calculados a través de la técnica de simulación *Line Sampling*. No obstante, esta simplificación se introduce para obtener expresiones analíticas y luego, comparar con el método propuesto. El objetivo es aplicar el estimador óptimo combinado para cuantificar la sensibilidad de la confiabilidad, realizando una simulación mediante valores aleatorios, considerando los siguientes parámetros:

- $t = 2$.
- Correlación de $\rho = 0$.
- $N = 99$ muestras.

4.2.1. Resultados con los estimadores IFEL e IDF

La tabla 4.1 presenta los valores esperados y las desviaciones estándar de los estimadores IFEL e IDF para el conjunto de 99 muestras aleatorias. Los resultados del enfoque IFEL se obtienen a través de la ecuación 2.5.11 para el valor esperado, y mediante la ecuación 2.5.12 se puede estimar la desviación estándar, mientras que, para el enfoque IDF el valor esperado se estima con la ecuación 2.5.4, y su desviación estándar mediante la ecuación 2.5.5.

Tabla 4.1: Valor Esperado y Varianza Estimadores IFEL e IDF - Ejemplo N°1

ρ	$\mathbb{E} \left[\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu}^{\text{IFEL}} \right]$	$\sigma_{\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu}^{\text{IFEL}}}$	$\mathbb{E} \left[\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu}^{\text{IDF}} \right]$	$\sigma_{\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu}^{\text{IDF}}}$
0	1.0383	$9.7 \cdot 10^{-2}$	0.9093	$2.3 \cdot 10^{-1}$

Como se puede observar en la tabla 4.1, la estimación de la sensibilidad del enfoque IFEL da un valor más cercano al valor esperado exacto con una menor desviación estándar del estimador, comparando el resultado con el obtenido mediante la estimación con el enfoque IDF. El anterior es un resultado coherente dado que la función de distribución de probabilidad del enfoque IDF posee un mayor valor de desviación estándar, ocasionando una mayor dispersión en el valor de las

muestras generadas de manera aleatoria.

4.2.2. Resultados con el Estimador Óptimo Combinado

Para obtener el resultado del estimador óptimo combinado a partir del conjunto de 99 muestras generadas, se aplica el procedimiento explicado en la sección 3.3 para métodos de simulación, para un total de $m = 3$ grupos. La tabla 4.2 presenta la cantidad de muestras por grupo, el grupo de pertenencia definido por la función γ , el valor de la función de asignación de grupo τ y valor del parámetro de control óptimo β_τ para cada grupo.

Tabla 4.2: Valores Parámetros de Aplicación del Estimador Óptimo Combinado para Simulaciones - Ejemplo N°1

ρ	Cantidad de Muestras	γ	τ	β_τ
0	33	1	2	0.2131
	33	2	3	0.1384
	33	3	1	0.1266

Aplicando las ecuaciones 3.3.6 y 3.3.9 se obtiene el siguiente estimador óptimo combinado y su desviación estándar:

Tabla 4.3: Valores Estimador Óptimo Combinado y Varianza del Estimador - Ejemplo N°1

ρ	$\frac{\partial \hat{\rho}_F}{\partial \mu}^{\text{EOC}}$	$\sigma_{\frac{\partial \hat{\rho}_F}{\partial \mu}}^{\text{EOC}}$
0	1.0237	$9.0 \cdot 10^{-2}$

Es posible notar que con la ecuación 3.2.6 se puede obtener el valor analítico del parámetro de control óptimo, cuyo valor corresponde a $\beta = 0.2$. De la tabla 4.2 se pueden apreciar los valores del parámetro de control óptimo obtenidos por cada grupo de muestras, notando que en cada grupo posee un valor distinto, obteniendo diferencias con el valor analítico del parámetro de control óptimo, como en el caso del grupo 2, cuyo valor presenta una diferencia del 63.3 % respecto al valor analítico.

Comparando los resultados presentados en las tablas 4.1 y 4.3, se observa que el valor de la sensibilidad de la confiabilidad del estimador óptimo combinado se encuentra entre los valores obtenidos de cada estimador individual, obteniendo una mejora en la estimación de la sensibilidad con un valor de desviación estándar menor para el estimador óptimo combinado.

Los resultados presentados anteriormente se obtienen de una corrida única para el conjunto de 99 muestras considerado. Para complementar los resultados presentados anteriormente, se realizan 1000 corridas independientes, cada una de 99 muestras. El objetivo de hacer estas 1000 corridas

independientes es validar la expresión para calcular la varianza del estimador óptimo combinado de la ecuación 3.3.14. Es decir, se compara la varianza del estimador provista por dicha ecuación con la varianza muestral asociada a las corridas independientes de la siguiente manera:

$$\mathbb{V}[\hat{\xi}_S] = \frac{1}{L-1} \sum_{j=1}^L \left([\hat{\xi}_S^{(j)}] - \mathbb{E}[\hat{\xi}_S] \right)^2 \quad (4.2.2)$$

Donde:

- L es el número de corridas (en este caso $L=1000$).
- $\hat{\xi}_S^{(j)}$ es el valor esperado de la sensibilidad de la confiabilidad de la j -ésima corrida, que involucra N simulaciones.
- $\mathbb{E}[\hat{\xi}_S]$ es el valor esperado promedio de $\hat{\xi}_S^{(1)}, \hat{\xi}_S^{(2)}, \dots, \hat{\xi}_S^{(L)}$.

A continuación, la tabla 4.4 presenta el resultado obtenido, se puede apreciar que el valor de la varianza muestral asociada a las corridas independientes posee una leve diferencia con el valor de la varianza del estimador óptimo cambiando, lo cual permite validar la expresión 3.3.14.

Tabla 4.4: Resultado Varianza Muestral Asociada a las Corridas Independientes

N	L	$\mathbb{V} \left[\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu}^{\text{EOC}} \right]$	$\mathbb{V} [\hat{\xi}_S]$
99	1000	$8.15 \cdot 10^{-3}$	$8.35 \cdot 10^{-3}$

4.3. Ejemplo N°2: Caso Analítico con Correlación

Para el presente ejemplo se considera el mismo caso presentado en 4.2, pero ahora los estimadores individuales presentan los siguientes valores de correlación:

- Correlación de $\rho = -0.95$ en un caso y en el otro, $\rho = 0.95$.

El objetivo es estudiar como varían los resultados presentados del estimador óptimo cambiando con respecto al el ejemplo anterior, al presentar un nivel de correlación entre los estimadores individuales.

4.3.1. Resultados estimadores IFEL e IDF

La tabla 4.5 presenta los valores esperados de los estimadores IFEL e IDF para el conjunto de 99 muestras generadas para cada valor de correlación.

Al igual que en el ejemplo N°1, el valor esperado de la estimación con el enfoque IFEL presenta un valor más cercano al valor exacto, con un menor valor de desviación estándar que los resultados obtenidos con el enfoque IDF. Este resultado refuerza el hecho de que al poseer una menor desviación estándar en la función de densidad de probabilidad, es más probable obtener un valor más cercano al exacto en la simulación, dada la menor dispersión en los valores de las muestras aleatorias generadas.

Tabla 4.5: Valor Esperado Estimadores IFEL e IDF - Ejemplo N°2

ρ	$\mathbb{E} \left[\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu} \right]^{\text{IFEL}}$	$\sigma_{\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu}}^{\text{IFEL}}$	$\mathbb{E} \left[\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu} \right]^{\text{IDF}}$	$\sigma_{\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu}}^{\text{IDF}}$
-0.95	1.069	$9.73 \cdot 10^{-2}$	0.871	$1.99 \cdot 10^{-1}$
0.95	0.941	$1.01 \cdot 10^{-1}$	0.866	$1.97 \cdot 10^{-1}$

4.3.2. Resultados Estimador Óptimo Combinado

La tabla 4.6 presenta la cantidad de muestras por grupo, el grupo perteneciente γ , valor de la función de asignación de grupo τ y valor del parámetro de control óptimo β_τ para cada grupo, para cada valor de correlación.

Al igual que en ejemplo anterior, con la ecuación 3.2.6 se puede obtener el valor analítico del parámetro de control óptimo, cuyo valor corresponde a $\beta = 0.3295$ para $\rho = -0.95$, y $\beta = -0.75$ para $\rho = 0.95$. De la tabla 4.5 se pueden apreciar los valores del parámetro de control óptimo obtenidos por cada grupo de muestras, notando que el valor y el signo del parámetro de control

Tabla 4.6: Valores Parámetros de Aplicación del Estimador Óptimo Combinado para Simulaciones - Ejemplo N°2

ρ	Cantidad de Muestras	γ	τ	β_τ
-0.95	33	1	2	0.3346
	33	2	3	0.3098
	33	3	1	0.3193
0.95	33	1	2	-0.7508
	33	2	3	-0.8096
	33	3	1	-0.8097

óptimo varía dependiendo si la correlación es negativa o positiva. Esto muestra una clara diferencia respecto a los resultados del ejemplo anterior, donde no existía correlación entre los estimadores individuales, por lo que el parámetro de control óptimo era siempre mayor a 0. El presente ejemplo presenta un caso en que $\rho t > 1$, por lo que se obtiene un valor negativo para el parámetro de control óptimo.

Aplicando las ecuaciones 3.3.6 y 3.3.9 se tiene que para la simulación, los valores para el estimador óptimo combinado y su desviación estándar son los siguientes:

Tabla 4.7: Valores Estimador Óptimo Combinado y Varianza para Simulación - Ejemplo N°2

ρ	$\frac{\partial \hat{p}_E}{\partial \mu}^{\text{EOC}}$	$\sigma_{\frac{\partial \hat{p}_E}{\partial \mu}^{\text{EOC}}}$
-0.95	1.006	$2.18 \cdot 10^{-2}$
0.95	1.003	$5.90 \cdot 10^{-2}$

Los resultados presentados en la tabla 4.7, muestran que los valores de la sensibilidad de la confiabilidad del estimador óptimo combinado obtenida a través de valores muestrales aleatorios es prácticamente equivalente al valor exacto, obteniendo una mejora en el valor de la estimación de la sensibilidad para ambos valores de correlación, con un valor de desviación estándar menor para el estimador óptimo combinado.

Al igual que en el ejemplo anterior, se busca validar la expresión 3.3.14 para calcular la varianza del estimador óptimo combinado, realizando 1000 corridas independientes, de 99 muestras cada una para obtener la varianza muestral asociada a las corridas independientes.

La tabla 4.8 presenta el resultado obtenido, donde se puede apreciar que el valor de la varianza muestral asociada a las corridas independientes no presenta diferencias considerables con el valor de la varianza del estimador óptimo cambiando, lo cual permite validar la expresión 3.3.14.

Tabla 4.8: Resultado Varianza Muestral Asociada a las Corridas Independientes

ρ	N	L	$\mathbb{V} \left[\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu}^{\text{EOC}} \right]$	$\mathbb{V} \left[\hat{\xi}_S \right]$
-0.95	99	1000	$4.76 \cdot 10^{-4}$	$4.49 \cdot 10^{-4}$
0.95	99	1000	$3.50 \cdot 10^{-3}$	$3.30 \cdot 10^{-3}$

4.4. Ejemplo N°3: Función de Desempeño Explícita

Considere que en un problema ingenieril se conoce la función de desempeño, la cual se define de la siguiente manera:

$$g_x(x) = b - \left(\frac{\sqrt{2}}{2}(x_1 + x_2) - \frac{1}{4}\kappa(x_1 - x_2)^2 \right), \quad X_i \sim N(0, 1), \quad i = 1, 2 \quad (4.4.1)$$

Donde b corresponde al valor umbral asociado con el criterio de falla, de manera tal que $p_F \approx 1 \cdot 10^{-3}$, X_1 y X_2 son variables aleatorias independientes de distribución Gaussiana, con parámetros de distribución $\theta_i = [\mu_i, \sigma_i]^T$, $i = 1, 2$ y κ es un parámetro que controla la no linealidad de la función de estado límite.

Para este ejemplo se utilizan los siguientes valores de κ :

- $\kappa = 0$: caso lineal.
- $\kappa = 0.1$: no linealidad débil.
- $\kappa = 1$: no linealidad fuerte.

El objetivo de este ejemplo es aplicar las estrategias para estimar la sensibilidad de la confiabilidad respecto a los parámetros de distribución de X_2 utilizando *Line Sampling* mediante los procedimientos IFEL e IDF explicados en la sección 2.6, y comparar sus resultados con la estrategia presentada en la sección 3.3 para obtener el estimador óptimo combinado, para los distintos valores de κ .

4.4.1. Sensibilidad de la Confiabilidad con Estimadores IFEL e IDF

La simulación con *Line Sampling* se realiza con una totalidad de 99 muestras aleatorias generadas, donde las tablas 4.9 y 4.10 presentan los resultados obtenidos de la sensibilidad de la confiabilidad respecto a $\theta_2 = [\mu_2, \sigma_2]^T$ para los distintos valores κ . Los resultados de la sensibilidad de la confiabilidad se obtienen mediante las ecuaciones 2.5.11 y 2.5.4 para los enfoques IFEL e IDF. También, se presentan las respectivas desviaciones estándar de cada estimador, obtenidas a través de las ecuaciones 2.5.12 y 2.5.5 para los enfoques IFEL e IDF, respectivamente.

De los resultados presentados en las tablas 4.9 y 4.10, se pueden realizán los siguientes comentarios:

- Se observa una leve tendencia a disminuir el valor de la sensibilidad de la confiabilidad respecto a μ_2 y σ_2 , a medida que aumenta el valor de κ .
- En la tabla 4.9 para $\kappa = 0$ se obtiene que la sensibilidad mediante el enfoque IFEL entrega un valor bastante pequeño para la desviación estándar, esto se debe a que el valor de la sensibilidad obtenido es prácticamente el valor exacto, ya que debido la linealidad de la función de desempeño, el valor del parámetro $\varsigma_{l,i}$ de la ecuación 2.5.11 es constante.
- Para $\kappa = 0.1$ la estimación más precisa de la sensibilidad de la confiabilidad respecto a μ_2 se obtiene mediante el enfoque IFEL.
- Para $\kappa = 1$ la estimación más precisa de la sensibilidad de la confiabilidad respecto a μ_2 se obtiene mediante el enfoque IDF.
- De la tabla 4.10 se puede apreciar que existen leves diferencias entre los valores de la sensibilidad obtenidos para los enfoques IFEL e IDF, obteniendo para todos los valores κ que la estimación más precisa de la sensibilidad de la confiabilidad respecto a σ_2 se obtiene con el enfoque IFEL.
- El valor del estimador de la sensibilidad respecto a μ_2 y σ_2 resulto ser un valor positivo para todos los valores de κ , esto indica que la probabilidad de falla aumenta si ocurre una perturbación positiva en alguno de estos parámetros.

Tabla 4.9: Resultado Estimación de la Sensibilidad Respecto a μ_2 , Enfoques IFEL e IDF

κ	$\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu_2}^{\text{IFEL}}$	$\sigma_{\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu_2}^{\text{IFEL}}}$	$\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu_2}^{\text{IDF}}$	$\sigma_{\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu_2}^{\text{IDF}}}$
0	0.0024	$2.92 \cdot 10^{-19}$	0.0025	$6.42 \cdot 10^{-5}$
0.1	0.0024	$3.65 \cdot 10^{-5}$	0.0025	$6.32 \cdot 10^{-5}$
1	0.0021	$1.85 \cdot 10^{-4}$	0.0024	$1.69 \cdot 10^{-4}$

Tabla 4.10: Resultado Estimación de la Sensibilidad Respecto a σ_2 , Enfoques IFEL e IDF

κ	$\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \sigma_2}^{\text{IFEL}}$	$\sigma_{\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \sigma_2}^{\text{IFEL}}}$	$\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \sigma_2}^{\text{IDF}}$	$\sigma_{\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \sigma_2}^{\text{IDF}}}$
0	0.0054	$1.53 \cdot 10^{-4}$	0.0056	$3.13 \cdot 10^{-4}$
0.1	0.0053	$1.15 \cdot 10^{-4}$	0.0055	$2.73 \cdot 10^{-4}$
1	0.0041	$3.48 \cdot 10^{-4}$	0.0049	$3.54 \cdot 10^{-4}$

4.4.2. Sensibilidad de la Confiabilidad Estimador Óptimo Combinado

El estimador óptimo combinado se obtiene a través del procedimiento explicado en la sección 3.3 para un total de $m = 3$ grupos. A diferencia de los ejemplos anteriores, en el presente ejemplo no se conoce a priori el valor de la correlación que existe entre los estimadores IFEL e IDF, por lo que no es posible deducir sus valores analíticos para comparar. A continuación, las tablas 4.11 y 4.12 presentan la cantidad muestras por grupo, y los valores obtenidos para la correlación ρ , el grupo de pertenencia γ , el valor de la función de asignación de grupo τ y el valor del parámetro de control óptimo β_τ obtenido para cada grupo, para los análisis de sensibilidad de la confiabilidad respecto a μ_2 y σ_2 , respectivamente.

Tabla 4.11: Valores Parámetros de Aplicación del Estimador Óptimo Combinado para Simulaciones - Sensibilidad Respecto a μ_2

κ	ρ	Cantidad de Muestras	γ	τ	β_τ
0	-0.0429	33	1	2	0
		33	2	3	$-4.93 \cdot 10^{-15}$
		33	3	1	$-7.92 \cdot 10^{-15}$
0.1	-0.1093	33	1	2	0.3135
		33	2	3	0.2443
		33	3	1	0.3084
1	0.6117	33	1	2	0.3722
		33	2	3	0.7205
		33	3	1	0.7488

Respecto a los resultados presentados en la tabla 4.11, se realizan los siguientes comentarios:

- Para $\kappa = 0$ se tiene un valor de correlación prácticamente nulo, además de los bajos valores obtenidos para el parámetro de control óptimo β_τ , esto es coherente con lo mencionado respecto a los resultados de la sección 4.4.1, donde se indicó que la estimación IFEL entrega prácticamente el resultado exacto, por lo que al obtener un valor bajo o nulo del parámetro de control óptimo β_τ , entrega el resultado de la estimación IFEL.
- Para $\kappa = 0.1$ se tiene un bajo valor en el nivel de correlación entre las estimaciones IFEL e IDF, la cual posee signo negativo, y se obtiene que el parámetro de control óptimo para cada grupo posee valor positivo.
- Para $\kappa = 1$ se tiene un valor medio en el nivel de correlación entre las estimaciones IFEL e IDF, la cual posee signo positivo, y se obtiene que el parámetro de control óptimo para cada grupo posee valor positivo.

Tabla 4.12: Valores Parámetros de Aplicación del Estimador Óptimo Combinado para Simulaciones - Sensibilidad Respecto a σ_2

κ	ρ	Cantidad de Muestras	γ	τ	β_τ
0	0.9904	33	1	2	-0.8708
		33	2	3	-0.9148
		33	3	1	-0.9013
0.1	0.8343	33	1	2	-0.2971
		33	2	3	-0.3959
		33	3	1	-0.3520
1	0.5114	33	1	2	0.3097
		33	2	3	0.5777
		33	3	1	0.5660

Respecto a los resultados presentados en la tabla 4.12, se realizan los siguientes comentarios:

- Se obtienen valores altos de correlación con signo positivo para $\kappa = 0$ y $\kappa = 0.1$. Además para ambos casos se obtienen valores del parámetro de control óptimo β_τ negativos para cada grupo, este resultado refuerza lo obtenido en el ejemplo anterior, donde se mencionó que para un valor alto de correlación es posible obtener valores de $\beta_\tau < 0$.
- Para $\kappa = 1$ se tiene un valor medio en el nivel de correlación entre las estimaciones IFEL e IDF, la cual posee signo positivo, obteniendo que el parámetro de control óptimo para cada grupo posee valor positivo.

A continuación, mediante las ecuaciones 3.3.6 y 3.3.9, se obtienen los valores del estimador óptimo combinado de la sensibilidad de la confiabilidad respecto a $\theta_2 = [\mu_2, \sigma_2]^T$ y su desviación estándar, cuyos resultados se presentan en la tabla 4.13.

Tabla 4.13: Resultado Estimación de la Sensibilidad Estimador Óptimo Combinado

κ	$\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu_2}^{\text{EOC}}$	$\sigma_{\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu_2}}^{\text{EOC}}$	$\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \sigma_2}^{\text{EOC}}$	$\sigma_{\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \sigma_2}}^{\text{EOC}}$
0	0.0024	$4.99 \cdot 10^{-19}$	0.0053	$4.08 \cdot 10^{-5}$
0.1	0.0024	$3.03 \cdot 10^{-5}$	0.0052	$9.23 \cdot 10^{-5}$
1	0.0022	$1.63 \cdot 10^{-4}$	0.0044	$3.11 \cdot 10^{-4}$

Comparando los resultados presentados en las tablas 4.9 y 4.10 con los de la tabla 4.13, se pueden realizar los siguientes comentarios.

- Para $\kappa = 0$ el estimador óptimo combinado para la sensibilidad de la confiabilidad respecto a μ_2 entrega un resultado equivalente al obtenido por estimador más preciso (IFEL) con

un mayor valor de desviación estándar. Lo anterior se puede explicar por el hecho de que la estimación más precisa entrega prácticamente el resultado exacto de la sensibilidad de la confiabilidad, el cual al combinarse con un estimador menos preciso altera el valor de la estimación. No obstante, este efecto es prácticamente despreciable, pues los números son muy pequeños y cercanos a la precisión del computador con el que se realizaron los análisis.

- Para $\kappa = 0$ el estimador óptimo combinado para la sensibilidad de la confiabilidad respecto a σ_2 entrega un resultado levemente menor que la estimación más precisa (IFEL), con un valor de desviación estándar menor, lo cual representa una clara mejora en la estimación de la sensibilidad de la confiabilidad.
- Para $\kappa = 0.1$ el estimador óptimo combinado para la sensibilidad de la confiabilidad respecto a μ_2 entrega un resultado equivalente al obtenido por estimador más preciso (IFEL), con un valor de desviación estándar menor, lo cual representa una clara mejora en la estimación de la sensibilidad de la confiabilidad.
- Para $\kappa = 0.1$ el estimador óptimo combinado para la sensibilidad de la confiabilidad respecto a σ_2 entrega un resultado levemente menor que la estimación más precisa (IFEL), con un valor de desviación estándar menor, lo cual representa una clara mejora en la estimación de la sensibilidad de la confiabilidad.
- Para $\kappa = 1$ el estimador óptimo combinado para la sensibilidad de la confiabilidad respecto a μ_2 entrega un resultado que se encuentra dentro de los valores obtenidos por los estimadores IFEL e IDF, con un valor de desviación estándar menor, lo cual representa una clara mejora en la estimación de la sensibilidad de la confiabilidad.
- Para $\kappa = 1$ el estimador óptimo combinado para la sensibilidad de la confiabilidad respecto a σ_2 entrega un resultado que se encuentra dentro de los valores obtenidos por los estimadores IFEL e IDF, con un valor de desviación estándar menor, lo cual representa una clara mejora en la estimación de la sensibilidad de la confiabilidad.

Al igual que en los ejemplos anteriores, se compara el resultado obtenido con la expresión 3.3.14 para calcular la varianza del estimador óptimo combinado, realizando 1000 corridas independientes de 99 muestras cada una, para obtener la varianza muestral asociada a las corridas independientes.

Tabla 4.14: Resultado Varianza Muestral Asociada a las Corridas Independientes - Sensibilidad Respecto a μ_2

κ	ρ	N	L	$\mathbb{V} \left[\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu}^{\text{EOC}} \right]$	$\mathbb{V} \left[\hat{\xi}_S \right]$
0	-0.0429	99	10^5	$2.49 \cdot 10^{-37}$	$7.89 \cdot 10^{-37}$
0.1	-0.1093	99	10^5	$9.16 \cdot 10^{-10}$	$1.79 \cdot 10^{-9}$
1	0.6117	99	10^5	$3.21 \cdot 10^{-8}$	$3.12 \cdot 10^{-8}$

Tabla 4.15: Resultado Varianza Muestral Asociada a las Corridas Independientes - Sensibilidad Respecto a σ_2

κ	ρ	N	L	$\mathbb{V} \left[\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu}^{\text{EOC}} \right]$	$\mathbb{V} \left[\hat{\xi}_S \right]$
0	0.9904	99	10^5	$1.66 \cdot 10^{-9}$	$4.78 \cdot 10^{-9}$
0.1	0.8343	99	10^5	$8.52 \cdot 10^{-9}$	$1.49 \cdot 10^{-8}$
1	0.5114	99	10^5	$1.10 \cdot 10^{-7}$	$1.11 \cdot 10^{-7}$

Los resultados presentados en las tablas 4.14 y 4.15, muestran que para $\kappa = 1$ el valor de la varianza del estimador óptimo combinado posee valores cercanos al de la varianza muestral asociada a corridas independientes para sensibilidad de la confiabilidad respecto a μ_2 y σ_2 , siendo prácticamente equivalentes. Para $\kappa = 0$ y $\kappa = 0.1$ se puede apreciar algunas diferencias, pero que no son mayores.

4.5. Ejemplo N°4: Flujo Bajo Una Tablestaca

El presente ejemplo consiste en el estudio del flujo a través de las capas de suelo bajo una tablestaca. El modelo de análisis se realiza mediante elementos finitos y consiste en una tablestaca que descansa sobre dos estratos de suelo, uno de arena limosa y el otro de grava limosa. La figura 4.1 presenta un esquema del modelo, donde los parámetros del suelo y la carga hidráulica tienen las siguientes características:

- La permeabilidad en [m/s] del estrato de suelo de arena limosa sigue la siguiente función de distribución de probabilidad:

$$k_{xx,1} \sim \text{LN}(5 \cdot 10^{-3}, 5 \cdot 10^{-3}), \quad k_{yy,1} \sim \text{LN}(1 \cdot 10^{-3}, 1 \cdot 10^{-3}) \quad (4.5.1)$$

- La permeabilidad en [m/s] del estrato de suelo de grava limosa sigue la siguiente función de distribución de probabilidad:

$$k_{xx,2} \sim \text{LN}(5 \cdot 10^{-6}, 5 \cdot 10^{-6}), \quad k_{yy,2} \sim \text{LN}(1 \cdot 10^{-6}, 1 \cdot 10^{-6}) \quad (4.5.2)$$

- La carga hidráulica h_D en [m] sigue la siguiente función de distribución de probabilidad:

$$h_D \sim \text{U}(5, 7) \quad (4.5.3)$$

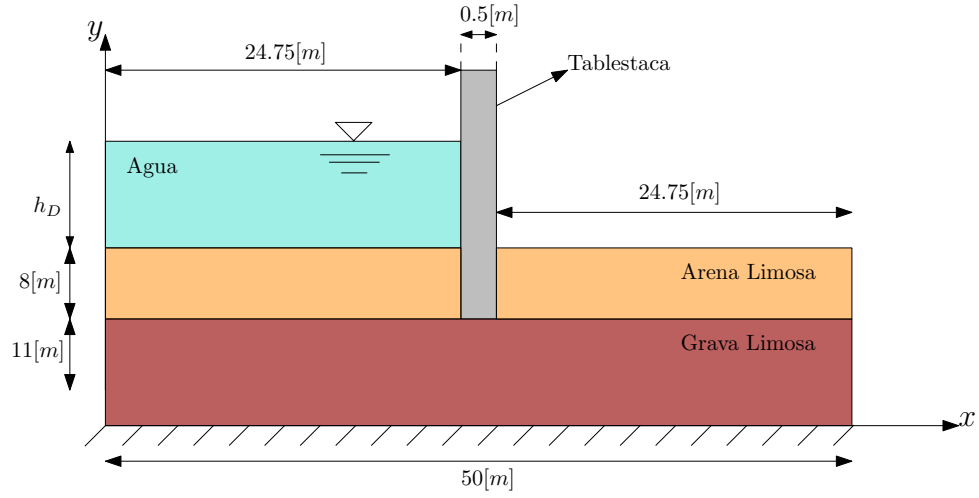


Figura 4.1: Esquema de represa con dos estratos de suelo

El objetivo, es evaluar la sensibilidad de la probabilidad de falla utilizando *Line Sampling* con los enfoques IFEL e IDF, respecto al valor esperado μ_i de las funciones de distribución de probabilidad que modelan la permeabilidad de cada estrato de suelo en ambas direcciones, y comparar sus resultados con el estimador óptimo combinado. Para esto, se considera como evento de falla la probabilidad de que el flujo de agua bajo la represa, en estado estacionario, exceda un umbral preestablecido $b = 30 \text{ [L/ hr m]}$.

4.5.1. Sensibilidad de la Confiabilidad Estimadores IFEL e IDF

La tabla 4.16 presenta los valores esperados de los estimadores IFEL e IDF para el conjunto de 396 muestras aleatorias independientes generadas. Como se puede apreciar en la tabla 4.16, los variables de permeabilidad del primer estrato de suelo son más sensibles respecto a una variación del valor esperado de las distribuciones de probabilidad que las caracterizan, respecto al segundo estrato de suelo. Respecto a los resultados de la sensibilidad de la confiabilidad obtenidos con la simulación *Line Sampling* mediante los enfoques IFEL e IDF, existen diferencias en los resultados obtenidos a través de cada estimador de la sensibilidad de la confiabilidad, obteniendo que la estimación de la sensibilidad con el enfoque IFEL es la más precisa para todas las permeabilidades.

Tabla 4.16: Valor Esperado Estimadores IFEL e IDF, Sensibilidad Respecto a μ - Ejemplo N°4

Parámetro	$\mathbb{E} \left[\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu_i} \right]^{\text{IFEL}}$	$\sigma_{\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu_i} \text{ IFEL}}$	$\mathbb{E} \left[\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu_i} \right]^{\text{IDF}}$	$\sigma_{\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu_i} \text{ IDF}}$
$\mu_{k_{xx},1}$	$1.60 \cdot 10^{-1}$	0.008	$-1.81 \cdot 10^1$	16.2
$\mu_{k_{yy},1}$	3.08	0.172	$7.31 \cdot 10^1$	78.1
$\mu_{k_{xx},2}$	$1.11 \cdot 10^5$	1375,4	$1.01 \cdot 10^5$	7467.8
$\mu_{k_{yy},2}$	$3.98 \cdot 10^5$	6242.8	$3.88 \cdot 10^5$	52189.1

La tabla 4.16 muestra los siguientes resultados:

- La estimación más precisa de la sensibilidad de la confiabilidad se obtiene con el enfoque IFEL.
- Los resultados de sensibilidad del primer estrato muestra resultado distintos entre ambos enfoques, obteniendo incluso que para la permeabilidad k_{xx} , el enfoque IFEL entrega un valor sensibilidad de la confiabilidad positivo, mientras que, para el enfoque IDF se obtiene un valor negativo. Pero esta sensibilidad es mucho menor que la sensibilidad respecto de los otros parámetros.
- Los resultados de sensibilidad de la confiabilidad respecto a μ_i del primer estrato muestran una gran diferencia en la desviación estándar de ambos enfoques, obteniendo mucha mayor precisión con el enfoque IFEL.
- La sensibilidad de la confiabilidad respecto a μ_i obtenida para el segundo estrato de sueño muestra que no existen grandes diferencias entre los resultados obtenidos con ambos enfoques, obteniendo que el enfoque IFEL posee un mayor grado de precisión que el enfoque IDF.

4.5.2. Sensibilidad de la Confiabilidad Estimador Óptimo Combinado

El estimador óptimo combinado se obtiene para un total de $m = 3$ grupos. La tabla 4.17 presenta la cantidad muestras por grupo, y los valores obtenidos para la correlación ρ , el grupo perteneciente γ , el valor de la función de asignación de grupo τ y el valor del parámetro de control óptimo β_τ obtenido para cada grupo, para los análisis de sensibilidad de la confiabilidad respecto a μ_i de las permeabilidades de cada estrato de suelo respectivamente.

Tabla 4.17: Valores Parámetros de Aplicación del Estimador Óptimo Combinado para Simulaciones - Sensibilidad Respecto a μ

Parámetro	ρ	Cantidad de Muestras	γ	τ	β_τ
$\mu_{kxx,1}$	-0.6933	132	1	2	$2.92 \cdot 10^{-4}$
		132	2	3	$3.58 \cdot 10^{-4}$
		132	3	1	$3.29 \cdot 10^{-4}$
$\mu_{kyy,1}$	-0.9567	132	1	2	0.0020
		132	2	3	0.0022
		132	3	1	0.0021
$\mu_{kxx,2}$	-0.8585	132	1	2	0.1575
		132	2	3	0.1377
		132	3	1	0.1356
$\mu_{kyy,2}$	-0.7942	132	1	2	0.0803
		132	2	3	0.0975
		132	3	1	0.0968

La tabla 4.18 presenta los resultados obtenidos del estimador óptimo combinado de la sensibilidad de la confiabilidad, donde se puede apreciar que la sensibilidad de la confiabilidad respecto a μ_i mejora en todos los casos.

A pesar de poseer diferencia entre los estimadores individuales IFEL e IDF, el nivel de correlación obtenido permite obtener una mejora en la estimación. Los resultados obtenidos indican que al sufrir una perturbación positiva en el parámetro μ_i de cada distribución de probabilidad de las permeabilidades de los estratos de suelo o nivel de la carga hidráulica, la probabilidad de falla a través de que el flujo de agua bajo la represa exceda el umbral preestablecido aumenta, ya que la sensibilidad obtenida es positiva para cada uno de los parámetros analizados.

Tabla 4.18: Valor Esperado Estimador Óptimo Combinado, Sensibilidad Respecto a μ - Ejemplo N°4

Parámetro	$\mathbb{E} \left[\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu_i}^{\text{EOC}} \right]$	$\sigma_{\frac{\partial \hat{p}_F}{\partial \mu_i}^{\text{EOC}}}$
$\mu_{k_{xx},1}$	$1.53 \cdot 10^{-1}$	$5.5 \cdot 10^{-3}$
$\mu_{k_{yy},1}$	3.22	$5.1 \cdot 10^{-2}$
$\mu_{k_{xx},2}$	$1.08 \cdot 10^5$	$6.2 \cdot 10^2$
$\mu_{k_{yy},2}$	$3.97 \cdot 10^5$	$3.5 \cdot 10^2$

CONCLUSIONES

La presente memoria de título ha presentado una estrategia que permite mejorar la estimación de la sensibilidad de la confiabilidad respecto a los parámetros que caracterizan una función de densidad de probabilidad, en problemas de ingeniería que presentan incertidumbre en alguna variable de interés, la cual sigue alguna función de densidad de probabilidad. La estrategia planteada es parte de una etapa de post-procesamiento una vez que se ha cuantificado la sensibilidad de la confiabilidad utilizando *Line Sampling*, mediante los enfoques de integración sobre la función de estado límite (IFEL), y el enfoque de integración sobre el dominio de falla (IDF), obteniendo un estimador óptimo combinado a partir de los resultados obtenidos de estos dos enfoques. De la estrategia para obtener el estimador óptimo combinado presentada se pueden realizar los siguientes comentarios:

- En base al procedimiento desarrollado en el capítulo 3, el resultado de la sensibilidad de la confiabilidad obtenido a través del estimador óptimo combinado es insesgado.
- En la práctica no se conoce el valor exacto de la sensibilidad de la confiabilidad, por lo que se recurre a los métodos de simulación para estimarla. Los métodos de simulación individuales presentados corresponden a los enfoques IFEL e IDF, el primero no siempre es aplicable ya que requiere como información de entrada el gradiente de la función de desempeño, el cual no siempre está disponible, mientras que, el enfoque IDF no requiere información adicional para su aplicación, por lo que su aplicabilidad es más general.
- Los resultados obtenidos en los ejemplos desarrollados le dan validez a la figura 3.3, obteniendo que el resultado del estimador óptimo combinado está altamente relacionado con el nivel de correlación obtenida de los estimadores individuales, siendo altamente recomendable la utilización del estimador óptimo combinado cuando se tiene valores de correlación en los siguientes rangos $-1 \leq \rho \leq -0.6$ y $\rho \approx 1$.
- Los resultados de la varianza del estimador óptimo combinado se validaron comparándolo con la varianza muestral asociada a las corridas independientes.

Se recomienda en casos donde no se posee el gradiente de la función de desempeño aplicar el enfoque IDF para estimar la sensibilidad de la confiabilidad. En caso de que si se encuentre disponible el gradiente de la función de desempeño es recomendable utilizar el enfoque IFEL para estimar la sensibilidad de la confiabilidad, ya que entrega en general mejores resultados. Finalmente si se obtiene un nivel de correlación entre los resultados de ambos enfoques en el rango de valores mencionado anteriormente se recomienda utilizar la estrategia planteada para mejorar la estimación de la sensibilidad de la confiabilidad utilizando *Line Sampling* mediante un estimador óptimo combinado, el cual entrega buenos resultados, cumpliendo con su objetivo. Pudiendo ampliarse su aplicación a casos que involucren otro tipo de distribución de probabilidad en variables de interés, o extender su aplicación también a problemas que involucren campos aleatorios.

REFERENCIAS

- [1] A.N. Avramidis and J.R. Wilson. A splitting scheme for control variates. *Operations Research Letters*, 14, 187-198, 1993.
- [2] K. Breitung. Reliability and optimization of structural systems - proceedings of the sixth IFIP WG7.5 working conference on reliability and optimization of structural systems 1994, chapter parameter-dependent integrals: some mathematical tools. In: IFIP - The international Federation for Information Processing. Boston, MA: Springer US; 1995. p. 104-11.
- [3] Der Kiureghian. First-and second-order reliability methods. *Engineering Design Reliability Handbook*, 14, 2004.
- [4] H. Flanders. Differentiation under the integral sign. *The American Mathematical Monthly*, 80(6):615-627, 1973.
- [5] I. González. Cuantificación de la incertidumbre en sistemas estructurales aplicando técnicas de reducción de modelos, remuestreo y reducción de varianza. Tesis (Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil). Valparaíso. UTFSM, Departamento de Obras Civiles, 2019.
- [6] H. Hernández. Estrategias para la estimación de la sensibilidad de la confiabilidad estructural aplicando la técnica de simulación Line Sampling. Tesis (Magíster en Ciencias de la Ingeniería Civil). Valparaíso. UTFSM, Departamento de Obras Civiles, 2018.
- [7] J. Haslinger and R. A.E. Makinen. Introduction to shape optimization: Theory, approximation, and computation: chapter sensitivity analysis. pages 99-127, SIAM, 2003.
- [8] H.A. Jensen, F. Mayorga, and M.A. Valdebenito. Reliability sensitivity estimation of nonlinear structural systems under stochastic excitation: A simulation-based approach. *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, 289:1-23, 2015.
- [9] P.S. Koutsourelakis, H.J. Pradlwarter, and G.I. Schueller. Reliability of structures in high dimensions, part I: algorithms and applications. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 19(4):409- 417, 2004.
- [10] P. Liu and A. Der Kiureghian. Multivariate distribution models with prescribed marginals and covariances. *Probabilistic Engineering Mechanics*, 1(2):105-112, 1986.
- [11] R. Nisius. On the combination of correlated estimates of a physics observable. *The European Physical Journal C*, 2014, 74, 3004.

- [12] JK. Pate and CB. Read. Handbook of the normal distribution. Marcel Dekker Inc; 1996.
- [13] G.I. Schuëller. On the treatment of uncertainties in structural mechanics and analysis. *Computers structures*, 85(5):235-243, 2007.
- [14] I. M. Sobol'. A primer for the Monte Carlo method. CRC press, 1994.
- [15] M.A Valdebenito, H.A. Jensen, H.B. Hernández, and L. Mehrez. Sensitivity estimation of failure probability applying line sampling. *Reliability Engineering and System Safety*, 171:99-111,2018.
- [16] M.A Valdebenito, H.A. Jensen, and H.B. Hernández. Probability sensitivity estimation of linear stochastic finite element models applying Line Sampling. *Structural Safety*, 81:101868,2019.
- [17] Y.T. Wu. Computational methods for ecient structural reliability and reliability sensitivity analysis. *AIAA Journal*, 32(8):1717-1723, 1994.