UNIVERSIDAD TECNICA
FEDERICO SANTA MARIA

Problemas Estocásticos Totalmente Convexos de Tipo Bolza en Tiempo Discreto

Franco Sebastián Cerda Alfaro

Universidad Tećnica Federico Santa María
Departamento de Matemática
Valparaíso, Chile
Junio 2019

Problemas Estocásticos Totalmente Convexos de Tipo Bolza en Tiempo Discreto

Franco Sebastián Cerda Alfaro

Trabajo presentado como requisito parcial para optar al título de:
Ingeniero Civil Matemático

Profesores guía:
Pedro Gajardo Adaro y Cristopher Hermosilla Jiménez

Universidad Técnica Federico Santa María
Departamento Matemática
Valparaíso, Chile
Junio 2019

Mientras más grande sea tu meta, mayor será el sabor de la victoria

Agradecimientos

La injusticia producida al realizar los agradecimientos es difícil de minimizar, dado que es imposible abarcar a todas las personas que de forma explícita o no, ayudan al desarrollo de un trabajo, por lo que pido disculpas de antemano. Sin embargo, a riesgo de caer en esta injusticia me gustaría agradecer en primer lugar a los profesores que tuve durante mi vida universitaria, en particular a los profesores referentes de este trabajo Pedro Gajardo y Cristopher Hermosilla quienes se han tomado el arduo trabajo de transmitirme sus diversos conocimientos, brindarme oportunidades, su tiempo y paciencia durante este tiempo al desarrollar este trabajo, además aprovecho estas lineas para felicitarlos tanto por su labor docente como académica dentro de la comunidad universitaria.
El desarrollo de este trabajo, no puede ser señalada como algo fácil de realizar, sin embargo las experiencias vividas a lo largo del desarrollo son inolvidables por lo que puedo afirmar categóricamente que disfrute cada investigación, proyecto, cualquier proceso en particular y esto no es simplemente consecuencia de mi disposición, sino por todos aquellos compañeros y amigos que he compartido durante mi aventura universitaria y aportan un pequeño grano de arena, tanto académica como emocionalmente.
Este trabajo es un logro más que llevo a cabo y sin dudas es en gran medida realizada gracias a mi familia, no se donde me encontraría si no fuera por su amor, compresión y ayuda. No va haber manera de devolver todo lo ofrecido por ustedes. ¡Los amo!.
Finalmente, agradezco el apoyo económico otorgado por el proyecto FONDECYT Nº 1160567 durante el desarrollo de este trabajo.

Resumen

Este trabajo constituye un estudio de funciones valor de problemas de optimización estocástico tipo Bolza en tiempo discreto, en donde la información disponible caracterizada por $\sigma-$álgebras, juegan un rol importante y además los Lagrangianos y costo final se asumen convexos. Desarrollando el problema dual, usando la teoría de la conjugada de Fenchel, este trabajo busca establecer supuestos tales como casi seguramente la condición de factibilidad interior y la condición recursiva, analizando lo que se ha denominado el problema general y generando condiciones de optimalidad utilizando principalmente resultados conocidos para el caso determinista, para no obtener salto de dualidad entre las funciones valor del problema tipo Bolza y su dual.

Palabras clave: Optimización Estocástica, Problema tipo Bolza, Función valor, LQR, no anticipativo .

Abstract

This work constitutes a study of value functions of stochastic optimization Bolza problems in discrete time, in which the available information characterized by $\sigma-$ algebras, play an important role and where the Lagrangians and final cost are assumed convex. Developing the Dual problem using Fenchel's conjugate theory, this work seeks to establish assumptions such as almost surely the feasible interior conditions and the recursive condition, analyzing what has been called the general problem and generating optimality conditions using mainly known results for the deterministic case and so there is no duality gap between the value functions of the Bolza problem and its Dual

Keywords: Stochastic Optimization, Bolza Problem, Value Function, LQR, no anticipative)

Contenido

Lista de símbolos y Abreviaciones

Símbolo o Abreviatura	**Término**
$\mathbb{R}$	Conjunto de los números reales
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty\} \cup \{+\infty\}$
$\mathbb{N}$	Conjunto de los números naturales
Val	Función valor
cl	Operador clausura
$\mathbb{E}$	Operador esperanza
$\mathbb{E}^t$	Esperanza condicional a la sigma álgebra considerada hasta el tiempo t
$\mathbb{P}$	Medida de probabilidad
cs	Casi seguramente

1 Introducción

Un problema de optimización bajo incertidumbre, es un problema de optimización cuyo objetivo es principalmente la obtención de una solución "factible", pero como el azar está presente en este tipo de problemas, al momento de la toma de decisiones se debe enfrentar a lo desconocido. Es por ello que la información disponible hasta cierto instante de tiempo se vuelve imprescindible. De hecho, dependiendo de la información que se tiene disponible, se pueden obtener distintas soluciones, o en peores casos, no tener ninguna solución. Esta importancia de la información disponible se puede evidenciar en los problemas de optimización estocásticos presentados en [14] y [2]. Es por ello que en esta memoria se asumirá que no hay pérdida de información de un instante a otro y esta información será caracterizada con filtraciones.
La motivación principal de este trabajo es aprovechar y adaptar herramientas de la optimización determinista al caso estocástico. Este tipo de problemas se aplican a modelos tales como el manejo de inventarios, el control de polución, el modelamiento de problemas financieros, etc.

El tipo de problema con incertidumbre que se aborda en este trabajo se denomina Problema Estocástico de Bolza (PEB). En esta tesis se trabaja con el tiempo de manera discreta y el objetivo es analizar la función valor asociada a un PEB adaptando herramientas del análisis convexo clásico como lo es la dualidad. Es por ello que los problemas que se abordan en este trabajo tienen una estructura convexa específica y los elementos que definen el problema (función objetivo, dinámica, etc) dependen explícitamente de la incertidumbre. De esta manera, se busca estudiar la relación desde el punto de vista de la dualidad entre las funciones valor del PEB y un problema dual asociado.

En particular este tipo de problemas han sido estudiados en la literatura usando enfoques similares a los de esta memoria. En [12], se analiza una versión de un Problema de Bolza (determinista y a tiempo continuo). En este artículo se logran establecer relaciones entre las funciones valor del problema de optimización y su "problema dual". En esta memoria se busca establecer un resultado similar para el PEB.
Además, en [9], se estudia la versión determinista y estocástica de un problema de optimización en donde, difieren del PEB en la dependencia explicita de la incertidumbre del costo final, además que no hay un estudio de las funciones valor.
Cabe destacar que un concepto fundamental para el trabajo que se presentará más adelante son los *integrandos normales*, los cuales permiten asegurar la medibilidad de los elementos que

definen el problema. La razón principal para considerar el concepto de integrandos normales es poder manejar las dificultades que genera la dependencia explícita de la incertidumbre.

En la última parte de este trabajo, se aplican los resultados obtenidos en dos ejemplos. El primero de ellos es el problema Lineal Cuadrático (LQ) con restricciones de estado. Este problema, es un problema de control óptimo, es por ello que una de las dificultades es escribir de forma equivalente el problema LQ como un PEB. Cabe destacar que para tratar el problema LQ se usan herramientas similares que en [4] y [10].
En segundo lugar, se construye un problema de optimización de portafolios, el que está asociado a un mercado especificado por un modelo a n pasos. Junto con esto se revisan conceptos como el arbitraje y la completitud, lo que permite dar una interpretación financiera al problema.

1.1. Resultado Principal

Ahora se describirá el resultado principal que se demostrará en esta tesis y cuyos detalles técnicos se verán más adelante.
La función valor a estudiar tiene la estructura

$$V_\tau(\xi) = \text{Min}\left\{\mathbb{E}\left(\sum_{t=\tau}^{T-1} L_t\left(\omega, x_t(\omega), \Delta x_t(\omega)\right)\right) + \mathbb{E}(g(\omega, x_T(\omega))) \mid \mathbb{E}(x_\tau(\omega)) = \xi\right\},$$

con $V_T(\xi) = \mathbb{E}(g(\omega, x_T(\omega)))$. Además, $\Delta x_t := x_{t+1} - x_t$ para cada $t \in \{0, \ldots, T-1\}$, g representa el costo final y L_t son costos instantáneos.
Se introduce un problema dual asociado cuya estructura será

$$W_\tau(\eta) = \text{Min}\left\{\mathbb{E}\left(\sum_{t=\tau}^{T-1} L_t^*\left(\omega, \mathbb{E}^{t+1}(\Delta x_t^*(\omega)), \mathbb{E}^{t+1}(x_t^*(\omega))\right)\right) + \mathbb{E}\left(g^*(\omega, -\mathbb{E}^T(x_T^*(\omega)))\right) \mid \mathbb{E}(x_\tau^*(\omega)) = -\eta\right\},$$

donde $L_t^*(\omega, \cdot, \cdot), g^*(\omega, \cdot)$ denotan las conjugadas de Fenchel de $L_t(\omega, \cdot, \cdot), g(\omega, \cdot)$, respectivamente para cada ω fijo.

Las funciones vistas anteriormente están definidas en espacios apropiados y con una estructura convexa subyacente.
El resultado principal de esta memoria se puede describir como sigue:

Teorema 1.1. *Bajo hipótesis que se presentarán más adelante, $\eta \to W_\tau(\eta)$ es la conjugada de Fenchel de $\xi \to V_\tau(\xi)$ para todo $\tau \in \{0, \ldots, T\}$ fijo.*

La demostración del Teorema 1.1 se presenta en Sección 3.3.

Esquema de demostración Teorema 1.1

A continuación se describirán los que se usarán para demostrar el Teorema 1.1.
El primer paso es definir el problema de optimización estocástico a considerar, luego viene el estudio de funciones de perturbación, junto con el cálculo de sus conjugadas de Fenchel. Después, se estudian condiciones de optimalidad. Finalmente, usándose el hecho que no hay salto de dualidad entre los problemas asociados a una función de permutación (por definir) y el problema dual definido, se puede concluir.

1.2. Estructura del Manuscrito

En el Capítulo 2 se presenta el Problema estocástico de Bolza en tiempo discreto y se realizan los supuestos necesarios a medida que se avanza en el documento, definiendo los conceptos que se van a utilizar. Se definen las multifunciones medibles, integrandos normales, junto con propiedades y algunas consecuencias. Al final del Capítulo 2 se recuerda el esquema clásico de dualidad vía funciones de perturbación.
En el Capítulo 3 se introducen estas funciones de perturbación asociadas a dos problemas de optimización convenientes para los objetivos del trabajo. Se estudian las condiciones de optimalidad referente a uno de los problemas. Se muestran los teoremas fundamentales referente a las funciones valor y se propone un problema dual asociado al PEB.
En el Capítulo 4 se aplican los resultados del capítulo anterior a dos ejemplos, los que son el problema lineal cuadrático y un problema de optimización de portafolios, descritos anteriormente. En ambos se establece el problema dual asociado.
Finalmente, en el Capítulo 5 se presentan conclusiones y algunos comentarios adicionales.

2 Notación y Preliminares

En este Capítulo se introduce el tipo de problema que se aborda durante el trabajo y se definen algunos conceptos y notaciones útiles para facilitar la comprensión del documento.

En primer lugar, sea Ω un conjunto no vacío denominado el espacio muestral o de eventos, $\mathcal{A}$ una $\sigma-$álgebra de subconjuntos de Ω. Luego $(\Omega, \mathcal{A})$ es un espacio de medida, el cual se puede asociar a una medida $\mathbb{P}$ con $\mathbb{P}(\Omega) = 1$. El triplete $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ se denomina un espacio de probabilidad y a $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad.
Otro concepto importante es el denominado filtración, para ello se fija en el trascurso de este trabajo un horizonte de tiempo a $T \in \mathbb{N}$.

Definición 2.1. *Una filtración es una familia de σ-álgebras $\{\mathcal{A}_t\}_{t\in\{0,1\ldots,T\}}$ que satisface las inclusiones*

$$\mathcal{A}_0 \subseteq \mathcal{A}_1 \subseteq \ldots \subseteq \mathcal{A}_{T-1} \subseteq \mathcal{A}_T \subseteq \mathcal{A}.$$

Una filtración puede ser interpretada como una representación histórica que no va conteniendo información futura en cada instante.
Se debe tener en consideración que la información disponible en cada instante, es importante para problemas estocásticos. Esto es ilustrado con en el contraejemplo de Witsenhausen (para más detalles puede ver [14] y [2, Section 4.2]). Es por ello que manejar esta información es una de las dificultades, no tan solo en este trabajo, sino que en cualquier tipo de problema que tenga incertidumbre.
En particular, en este trabajo la información disponible ha sido modelada con una filtración. Implícitamente se está asumiendo que no hay pérdida de información de un instante de tiempo a otro, lo que no siempre sucede. Por ejemplo, se puede considerar una sub $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}_t$ tal que $\mathcal{F}_t \subset \mathcal{A}_t$ con $\mathcal{A}_{t-1} \not\subset F_t$ (la $\sigma-$álgebra $\mathcal{F}_t$ representa solo la información disponible hasta dicho instante), es decir, se pierde información.
Dado $t \in \{0, \ldots, T\}$, $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}_t, \mathbb{P})$ denota el espacio de funciones $x : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\mathcal{A}_t-$medibles y esencialmente acotadas sobre $(\Omega, \mathcal{A}_t, \mathbb{P})$.
En consecuencia, para $t \in \{0, \ldots T\}$ la $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}_t$ representa la información disponible hasta el tiempo t, por tanto decir que una función $x_t : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es $\mathcal{A}_t$-medible quiere decir que $x^{-1}(A) \in \mathcal{A}_t$ para cada conjunto de Borel A (donde X^{-1} denota la imagen inversa) y se interpreta como que $x_t(\omega)$ solo depende de la información hasta ese tiempo y no de detalles no observados del pasado o eventos arbitrarios del futuro. En otras palabras, no se pierde información y es no anticipativo.

Dado lo descrito anteriormente, se define el espacio donde estarán definidos los problemas a tratar en este trabajo,

Definición 2.2. *Para algún $\tau \in \{0, \dots, T\}$, se define el espacio de proceso de toma de decisiones no anticipativo como*

$$\mathbf{X}_\tau := \prod_{t=\tau}^{T} \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}_t, \mathbb{P}).$$

Observación 2.1. Cuando $\tau = 0$, por simplicidad se denota $\mathbf{X}_0 = \mathbf{X}$ y los elementos de $\mathbf{X}_\tau$ ($\tau \in \{0, \dots, T\}$) se denominarán trayectorias.

Ahora se está en condiciones de definir el problema en el cual se enfoca este trabajo.

Definición 2.3 (Problema estocástico de Bolza en tiempo discreto (PBE)). *Dado un tiempo inicial $\tau \in \{0, \dots, T\}$ y un estado inicial $\xi \in \mathbb{R}^n$, se define el problema estocástico de Bolza en tiempo discreto*

$$\begin{cases} \textit{Minimizar} \quad I(\mathbf{x}) := \mathbb{E}\left(\sum_{t=\tau}^{T-1} L_t\left(\omega, x_t(\omega), \Delta x_t(\omega)\right)\right) + \mathbb{E}(g(\omega, x_T(\omega))) \\ \textit{sobre} \qquad \mathbf{x} \in \mathbf{X}_\tau \;\; \textit{tal que } \mathbb{E}(x_\tau(\omega)) = \xi \end{cases} \tag{$\mathrm{P}_\tau(\xi)$}$$

donde $\Delta x_t := x_{t+1} - x_t$ para cada $t \in \{0, \dots, T-1\}$, $g : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ es el costo final y $L_t : \Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ son costos instantáneos.

Este problema se puede entender como el costo total al empezar en un tiempo τ hasta el horizonte de tiempo T, donde cada Lagrangiano para $t \in \{\tau, \dots, T-1\}$ representa el costo que se incurre en aquel instante de tiempo. Se denota por $V_\tau(\xi)$ al valor de ($\mathrm{P}_\tau(\xi)$) para un tiempo inicial $\tau \in \{0, \dots, T\}$ con $V_T(\xi) = \mathbb{E}(g(\omega, x_T(\omega))$ donde $\mathbb{E}(x_T(\omega)) = \xi$.

Definición 2.4. *Sea Y un espacio vectorial normado y $f : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ una función. Se define el dominio de f denotado por dom(f) y el epígrafo de f denotado por epi(f) mediante*

$$\textit{dom}(f) = \{x \in Y : f(x) < +\infty\}, \qquad \textit{epi}(f) = \{(x, r) \in Y \times \mathbb{R} : f(x) \leq r\}.$$

Una función f se dice propia si dom$(f) \neq \emptyset$ y $f(x) > -\infty$ para todo $x \in Y$, convexa si epi(f) es un conjunto convexo y semicontinua inferior si epi(f) es un conjunto cerrado.
Finalmente, se denota $f \in \Gamma_0(Y)$ si la función f es semicontinua inferior, convexa y propia.

Observación 2.2. Se puede mostrar que f es convexa si y solo si

$$f(\lambda y_1 + (1-\lambda) y_2) \leq \lambda f(y_1) + (1-\lambda) f(y_2) \;\forall \lambda \in [0, 1], \;\; \forall y_1, y_2 \in Y$$

El primer supuesto a considerar es la convexidad:

$$\begin{cases} i) & g(\omega,\cdot)\in\Gamma_0(\mathbb{R}^n) \text{ para } \omega\in\Omega.\\ ii) & L_t(\omega,\cdot,\cdot)\in\Gamma_0(\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n) \text{ para } t\in\{0,\ldots,T-1\},\omega\in\Omega.\end{cases} \tag{2-1}$$

Proposición 2.1. Con los supuestos en (2-1), $\mathbf{x}\to I(\mathbf{x})$ definido en $(\mathrm{P}_\tau(\xi))$ es una función convexa.

Demostración. Sea $\lambda\in[0,1]$, $\mathbf{x},\mathbf{y}\in\mathbf{X}_\tau$, luego

$$\begin{aligned}
&I(\lambda\mathbf{x}+(1-\lambda)\mathbf{y})=\\
&\mathbb{E}\left(\sum_{t=\tau}^{T-1}L_t\left(\omega,\lambda x_t(\omega)+(1-\lambda)y_t(\omega),\lambda\Delta x_t(\omega)+(1-\lambda)\Delta y_t(\omega)\right)\right)+\mathbb{E}(g(\omega,\lambda x_T(\omega)+(1-\lambda)y_T(\omega)))\\
&\leq\lambda\mathbb{E}\left(\sum_{t=\tau}^{T-1}L_t\left(\omega,x_t(\omega),\Delta x_t(\omega)\right)\right)+\lambda\mathbb{E}(g(\omega,x_T(\omega)))+(1-\lambda)\mathbb{E}\left(\sum_{t=\tau}^{T-1}L_t\left(\omega,y_t(\omega),\Delta y_t(\omega)\right)\right)\\
&+(1-\lambda)\mathbb{E}(g(\omega,y_T(\omega)))\\
&=\lambda I(\mathbf{x})+(1-\lambda)I(\mathbf{y})
\end{aligned}$$

lo que concluye la demostración. ∎

Otro de los supuestos que se necesita es que exista al menos un $x\in\mathbf{X}$ tal que $I(\mathbf{x})<+\infty$. Notar que hay ciertas restricciones implícitas en el supuesto que $I(\mathbf{x})$ no sea idénticamente $+\infty$. Para esto se considera los siguientes conjuntos

$$F_t(\omega,z):=\{w\in\mathbb{R}^n : L_t(\omega,z,w)<+\infty\} \tag{2-2}$$

$$Z_t(\omega):=\{z\in\mathbb{R}^n : F_t(\omega,z)\neq\emptyset\} \tag{2-3}$$

$$C_g(\omega):=\{a\in\mathbb{R}^n : g(\omega,a)<+\infty\}. \tag{2-4}$$

Luego, cada $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ tal que $I(\mathbf{x})<+\infty$ debe cumplir

$$x_T(\omega)\in C_g(\omega),\quad \Delta x_t(\omega)\in F(\omega,x_t) \text{ y } x_t(\omega)\in Z_t(\omega). \tag{2-5}$$

La minimización en el problema $(\mathrm{P}_\tau(\xi))$ puede ser restringida a los $\mathbf{x}\in\mathbf{X}$ que cumplen con las restricciones (2-5).

Después de ver las restricciones implícitas que posee el problema, se necesita asegurar la medibilidad de los elementos del PBE. El análisis para los supuestos necesarios para asegurar la medibilidad se verá a continuación.

Definición 2.5. *Sea A un conjunto, se define la indicatriz de A a la función dada por*

$$\delta_A(x)=\begin{cases}0 & si\ \ x\in A\\ +\infty & si\ no.\end{cases} \tag{2-6}$$

Observación 2.3. Si A es un conjunto convexo, entonces $\delta_A(x)$ es una función convexa y si A es cerrado, entonces δ_A es una función semicontinua inferior.

Para determinar la $\mathcal{A}_t$-medibilidad de los mapeos $\omega \mapsto L_t(\omega, x(\omega), v(\omega))$ y $\omega \mapsto g(\omega, x(\omega))$ (donde x, v son $\mathcal{A}_t$-medibles), se necesita introducir la noción de multifunciones medibles, ya que, no es suficiente que $L_t(\omega, x, v)$ sea medible en ω y semicontinua inferior en (x, v) como lo es en el caso cuando se tiene $L_t(x, v)$ (no depende explícitamente de ω).
Un ejemplo donde se puede apreciar que no es suficiente que $(\omega, x, v) \to L_t(\omega, x.v)$ sea medible en ω y semicontinua inferior en (x, v) para la medibilidad de $\omega \mapsto L_t(\omega, x(\omega), v(\omega))$, se presenta a continuación.

Ejemplo 2.1. Dado $\Omega \subset [0, 1]$ un conjunto no medible (existen estos conjuntos por ejemplo los conjuntos de Vitali), se define

$$L_t(\omega, x, v) = \begin{cases} 0 & \text{si } \; x = \omega \in \Omega \\ +\infty & \text{si no.} \end{cases}$$

Fijando ω se tiene que $(x, v) \to L_t(\omega, x, v) = \delta_{\{\omega\}}(x)$ es semicontinua inferior ($\{\omega\}$ cerrado) y fijando x, se obtiene que $\omega \to L_t(\omega, x, v) = \delta_{\{x\}}(\omega)$ es medible. Sin embargo, si se considera $x(\omega) = \omega$, luego $\omega \to L_t(\omega, x(\omega), v) = \delta_\Omega(\omega)$ no es medible, ya que, $\delta_\Omega^{-1}(\{0\}) = \Omega$, el cual no es medible.

Ahora se presentan algunas definiciones útiles, para tratar las multifunciones, sus características y propiedades.

Definición 2.6. *Dada una multifunción $\Gamma : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, se define el dominio y el grafo de Γ respectivamente por*

$$Dom\ (\Gamma) = \{\omega \in \Omega : \Gamma(\omega) \neq \emptyset\}, \quad gph\ (\Gamma) = \{(\omega, x) : x \in \Gamma(\omega)\}.$$

Además, si $\Omega_1 \subset \Omega$, entonces se tiene que

$$\Gamma(\Omega_1) = \cup_{\omega \in \Omega_1} \Gamma(\omega)$$

Definición 2.7. *La preimagen de una multifunción $\Gamma : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, se describe por*

$$\Gamma^{-1}(x) = \{\omega \in \Omega : x \in \Gamma(\omega)\}$$

Definición 2.8. *Se dice que una multifunción $\Gamma : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es de valores cerrados, si $\Gamma(\omega) \subset \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado para cada $\omega \in \Omega$.*

Definición 2.9 (Multifunción Medible). *Sea $\Gamma : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una multifunción de valores cerrados, se dice que Γ es medible (respecto a $\mathcal{A}$) si para cada conjunto cerrado $C \subset \mathbb{R}^n$, el conjunto $\Gamma^{-1}(C)$ es medible, es decir, $\Gamma^{-1}(C) \in \mathcal{A}$.*

Con las definiciones anteriores, se puede introducir la propiedad de integrando normal la cual será un supuesto sobre las funciones L_t y g para asegurar que los mapeos $\omega \mapsto L_t(\omega, x(\omega), v(\omega))$ y $\omega \mapsto g(\omega, x(\omega))$ sean $\mathcal{A}_t$-medibles.

Definición 2.10 (Multiepígrafo). *Dada una función $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, se define el multiepígrafo $E_f : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^{n+1}$ asociado a f, por*

$$E_f(\omega) = epi\ f(\omega, \cdot) = \{(x, \alpha) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} : f(\omega, x) \leq \alpha\}.$$

Definición 2.11 (Integrando Normal). *Una función $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, se dice un integrando normal si su multiepígrafo asociado es medible y de valores cerrados.*

Observación 2.4. Si se considera una función $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, con $f(\omega, x) = g(x)$ y g semi continua inferior, se tiene que f es un integrando normal dado que su multiepígrafo es de valores cerrados y constante.

Definición 2.12. *Una función $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, se dice un integrando semicontinuo inferior si $f(\omega, \cdot)$ es semi continua inferior para cada $\omega \in \Omega$, un integrando convexo si $f(\omega, \cdot)$ es una función convexa para cada $\omega \in \Omega$ y un integrando propio si $f(\omega, \cdot)$ es una función propia para cada $\omega \in \Omega$*

Observación 2.5. Si una función $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$, es un integrando semicontinuo inferior, se tiene que su multiepígrafo es de valores cerrados.

Uno de los lemas importantes respecto a los integrandos normales es el siguiente,

Lema 2.1 ([6, Theorem 2A]). Considere f un integrando semicontinuo inferior sobre $\Omega \times \mathbb{R}^n$. Si f es un integrando normal, entonces f es $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$- medible ($\mathcal{B}$ es la álgebra de los conjuntos de Borel). El converso es cierto si $(\Omega, \mathcal{A})$ es completo (si $A \in \mathcal{A}$ con $\mathbb{P}(A) = 0$ y sea $B \subset A$ entonces $B \in \mathcal{A}$).

Proposición 2.2. Sea $x : \Omega \to \mathbb{R}^n$ y $v : \Omega \to \mathbb{R}^n$ funciones medibles. Si las funciones L_t y g son integrandos normales, entonces los mapeos $\omega \mapsto L_t(\omega, x(\omega), v(\omega))$ y $\omega \mapsto g(\omega, x(\omega))$ son medibles.

Demostración. Se definen $a_1 : \omega \to (\omega, x(\omega))$ (a_1 es medible de $(\Omega, \mathcal{A})$ en $(\Omega \times \mathbb{R}^n, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B})$ y $a_2 : \omega \to (\omega, x(\omega), v(\omega))$ (a_2 es medible de $(\Omega, \mathcal{A})$ en $(\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n, \mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B})$). Por el Lema 2.1 se tiene que L_t y g son $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B} \otimes \mathcal{B}$ y $\mathcal{A} \otimes \mathcal{B}$ medibles respectivamente. Por lo tanto las composiciones $L_t \circ a_2$ y $g \circ a_1$ son medibles.

En consecuencia, en este trabajo se asumirá que las funciones L_t ($t \in \{0, \ldots, T-1\}$) y g son integrandos normales.
Adicionalmente, se considera para la función L_t la condición que para todo $\rho, \sigma > 0$, existe una función sumable $\gamma_t : \Omega \to \mathbb{R}$, es decir que tiene esperanza finita tal que

$$L_t(\omega, z_t, v_t) \geq \gamma_t(\omega) \quad cs \quad \text{cuando} \quad |z_t| \leq \rho, \quad |v_t| \leq \sigma,$$

donde *cs* abrevia casi seguramente.
Para la función g, se considera la condición que para todo $\rho > 0$, existe una función sumable γ tal que

$$g(\omega, z_t) \geq \gamma(\omega) \quad cs \quad \text{cuando} \quad |z_t| \leq \rho.$$

De esta forma, con las hipótesis antes establecidas, la esperanza en la Definición 2.3 mayora una función sumable y así tenemos que esta esperanza está bien definida, ya sea finita ó $+\infty$. Estos supuestos adicionales permiten enunciar la siguiente proposición.

Proposición 2.3. La función $\mathbf{x} \to I(\mathbf{x})$ es una función propia, semicontinua inferior.

Demostración. Al existir $\mathbf{x}$ tal que $I(\mathbf{x}) < +\infty$, luego $dom(I) \neq \emptyset$. Por lo anterior, las funciones L_t y g mayoran a funciones sumables, por lo que los valores que toma $I(\mathbf{x})$ están en $\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, por lo tanto $I(\mathbf{x})$ es una función propia. Finalmente, la semicontinuidad inferior de $I(\mathbf{x})$ es consecuencia del Lema de Fatou ([1, Theorem A.21]). ∎

Para finalizar la introducción a los integrando normales, los siguientes Lemas muestran algunas propiedades útiles que cumplen estos y algunas en general para multifunciones medibles.

Lema 2.2 ([11, Proposition 14.44, Corollary 14.46]). Sea J un conjunto de índices y $f_j : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un integrando normal para cada $j \in J$. Entonces las funciones $m, n : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ dadas por

- $m(\omega, x) = \sum_{j \in J} \alpha_j f_j(\omega, x)$, $\alpha_j \in \mathbb{R}_+$ con J finito,
- $n(\omega, x) = \alpha(\omega) f_j(\omega, x)$ para algún $j \in J$ y $\alpha : \Omega \to \mathbb{R}_+$ medible.

son integrandos normales.

Lema 2.3 (Medibilidad en sistema de restricciones, [11, Theorem 14.36]). Considere una multifunción $X : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ medible e I_1, I_2 conjuntos de índices numerables. Además sean $\alpha_i : \Omega \to \mathbb{R}$ funciones medibles y $f_i : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ integrandos normales para todo $i \in I_1 \cup I_2$. Si además para $i \in I_2$ se tiene que $f_i(\omega, \cdot)$ es continua para todo $\omega \in \Omega$, luego si se define $C(\omega)$, dado por

$$x \in C(\omega) \iff x \in X(\omega) \text{ y } f_i(\omega, x) - \alpha_i(\omega) \leq 0 \text{ para } i \in I_1\ ,\ f_i(\omega, x) - \alpha_i(\omega) = 0 \text{ para } i \in I_2$$

entonces $C : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ es medible.

Lema 2.4 (Integrando indicatriz, [11, Example 14.32]). La indicatriz $\delta_C : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ de una multifuncion $C : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ definida por

$$\delta_C(\omega, x) = \delta_{C(\omega)}(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x \in C(\omega) \\ +\infty & \text{si } x \notin C(\omega) \end{cases}$$

es un integrando normal si y solo si C es medible y de valores cerrados.

Los siguientes lemas muestran algunas operaciones adicionales donde se preserva la característica de ser integrando normal. Una de las operaciones fundamentales para el desarrollo de este trabajo es la conjugada de Fenchel.

Definición 2.13. *Sea $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un integrando normal, se define la conjugada de f por f^* al aplicar para cada $\omega \in \Omega$ la conjugada de Fenchel, es decir*

$$f^*(\omega, v) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{v \cdot x - f(\omega, x)\}, \tag{2-7}$$

donde "$\cdot$" denota el producto punto de $\mathbb{R}^n$.

Lema 2.5 ([11, Theorem 14.50]). Para un integrando normal $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ se tiene que la conjugada de f es un integrando normal.

Observación 2.6. Por lo anterior, es fácil concluir que f^{**} es un integrando normal.

El próximo lema establece la existencia de una selección medible de una multifunción. En este trabajo solo se necesita enunciar este lema para multifuciones a valores en $\mathbb{R}^n$. Sin embargo, tal como se menciona en [6] existen autores que han generalizado este resultado a espacios metrizables, completos y separables.

Lema 2.6 (Selección Medible, [6, Corollary 1C]). Sea $\Gamma : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una multifunción medible y de valores cerrados, entonces existe $v : \text{Dom } (\Gamma) \to \mathbb{R}^n$ medible tal que $v(\omega) \in \Gamma(\omega)$ para todo $\omega \in \text{Dom } (\Gamma)$

Lema 2.7 ([6, Corollary 1P]). Sea $\Gamma : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una multifunción de valores cerrados y medible, y $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función tal que $F(\omega, u)$ es medible en ω y continua en u. Luego la multifunción $H : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dada por

$$H(\omega) = \text{cl } (F(\omega, \Gamma(\omega))).$$

es de valores cerrados y medible.

Lema 2.8 ([6, Corollary 1Q]). Sea $\Gamma : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ una multifunción de valores cerrados y medible, y defina $F : \Omega \times \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^n$ una función tal que $F(\omega, u)$ sea medible en ω y continua en u. Luego la multifunción $H : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^m$ dada por

$$H(\omega) = \{u \in \mathbb{R}^m : F(\omega, u) \in \Gamma(\omega)\}$$

es de valores cerrados y medible.

Lema 2.9 ([6, Corollary 1R]). Sea $\Gamma : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^m$ una multifunción de valores cerrados y medible. Luego la multifunción $H : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dada por

$$H(\omega) = \text{cl } \{x \in \mathbb{R}^n : \exists y \in \mathbb{R}^k \text{con } (x, y, u(\omega)) \in \Gamma(\omega)\}$$

donde $u : \Omega \to \mathbb{R}^m$ es medible, es de valores cerrados y medible.

Observación 2.7. En el Lema 2.9, el operador clausura (cl) es superfluo si $\Gamma(\omega)$ es acotado.

Lema 2.10 ([6, Corollary 2X]). Sea $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ un integrando propio, convexo y normal y $x : \Omega \to \mathbb{R}^n$ medible, luego

$$H(\omega) = \partial f(\omega, x(\omega))$$

es de valores cerrados y medible. Donde $\partial f(\omega, \cdot) : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ está definido por

$$\partial f(\omega, x) := \{y \in \mathbb{R}^n : y \cdot (x' - x) + f(\omega, x) \leq f(\omega, x') \; \forall \; x' \in \mathbb{R}^n\}. \tag{2-8}$$

Definición 2.14. *Un espacio X de funciones medibles $x : \Omega \to \mathbb{R}^n$ es descomponible respecto a una medida μ si para cada función en $x_0 \in X$ y para cada elemento A de la $\sigma-$álgebra asociada a Ω con $\mu(A) < +\infty$ se tiene que las funciones $x : \Omega \to \mathbb{R}^n$ definidas por*

$$x(\omega) = \begin{cases} x_0(\omega) \; \textit{para} \; \omega \in \Omega \setminus A \\ x_1(\omega) \; \textit{para} \; \omega \in A \end{cases}$$

pertenecen a dicho espacio, para todo $x_1 : \Omega \to \mathbb{R}^n$ acotada.

El primer ejemplo que se puede pensar es el espacio que contiene todas las funciones medibles $x : \Omega \to \mathbb{R}^n$. Otro ejemplo es $\mathcal{L}^p$ $(1 \leq p \leq +\infty)$ importante en nuestro caso es dado donde está definido el PEB $(\mathbf{X}_\tau)$.
Finalmente, el siguiente resultado permite tener condiciones para intercambiar el mínimo y la esperanza en el problema $(\mathrm{P}_\tau(\xi))$ de la Definición 2.3, lo que permitirá simplificar el problema.

Lema 2.11 ([11, Theorem 14.60]). Sea X un espacio de funciones medibles de Ω a $\mathbb{R}^n$ descomponible, respecto a una medida μ finita sobre una $\sigma-$álgebra $\mathcal{A}$. Si $f : \Omega \times \mathbb{R}^n \to \overline{\mathbb{R}}$ es un integrando normal, entonces

$$\inf_{x \in X} \int_\Omega f(\omega, x(\omega)) d\mu = \int_\Omega \inf_{x \in \mathbb{R}^n} f(\omega, x) d\mu$$

siempre que la primera integral no sea idénticamente igual a $+\infty$

Observación 2.8. Tal como se dijo anteriormente, esto permite cambiar una minimización sobre el espacio a una minimización punto a punto. Para asegurar que la primera integral no es idénticamente $+\infty$, solo basta que exista un elemento del espacio de funciones donde se tenga que la integral es finita. Dicho supuesto es usual en optimización.

Debido a las Proposiciones 2.1 y 2.3, se concluye que el PEB es de la forma

$$\inf\{f(x) : x \in X\} \tag{2-9}$$

donde $X = \mathbf{X}_\tau$ es un espacio de Banach, $f = I$ y en consecuencia $f \in \Gamma_0(X)$.
Cuando un problema de optimización tiene la forma descrita en (2-9) se pueden realizar las siguientes definiciones.

Definición 2.15. *Sea Y un espacio vectorial normado, una función $\phi \in \Gamma_0(X \times Y)$ se dice una función de perturbación para un problema de la forma* (2-9) *si $\phi(x, 0) = f(x)$ para todo $x \in X$. Además, a la función ϕ se le asocia su función valor*

$$V_\phi(y) = \text{ínf}\{\phi(x, y) : x \in X\}.$$

Definición 2.16. *Sea $\phi \in \Gamma_0(X \times Y)$ una función de perturbación asociada al problema* (2-9)*, se define el problema dual (asociado a ϕ) por*

$$V_{\phi^*}(0) = \text{ínf}\{\phi^*(0, y^*) : y^* \in Y^*\},$$

donde Y^* denota el espacio dual de Y.

De esta manera, en el siguiente capítulo se busca establecer un problema dual asociada a una función de perturbación para el PEB. Indistintamente, se declara a este problema como el problema dual, sin embargo, no se debe olvidar que este problema es consecuencia de una función de perturbación en particular.

Definición 2.17. *Dada una función de perturbación ϕ asociada al problema* (2-9)*. Se dice que no hay salto de dualidad (Duality gap) si*

$$V_\phi(0) = -V_{\phi^*}(0). \tag{2-10}$$

2.1. Resumen Supuestos

A continuación se describen nuevamente los supuestos realizados en este capítulo para el desarrollo de este trabajo

i)
$$\begin{cases} i) & g(\omega, \cdot) \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n) \text{ para } \omega \in \Omega. \\ ii) & L_t(\omega, \cdot, \cdot) \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n) \text{ para } t \in \{0, \dots, T-1\}, \omega \in \Omega. \end{cases}$$

ii) Existencia de al menos un $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ tal que $I(\mathbf{x}) < +\infty$

iii) L_t $(t \in \{0, \dots, T-1\})$ y g son integrandos normales.

iv) Para la función L_t la condición que para todo $\rho, \sigma > 0$, existe una función sumable (momento finito) $\gamma_t : \Omega \to \mathbb{R}$, es decir que tiene esperanza finita tal que

$$L_t(\omega, z_t, v_t) \geq \gamma_t(\omega) \quad cs \quad \text{cuando} \quad |z_t| \leq \rho, \quad |v_t| \leq \sigma.$$

Para la función g, se considera la condición que para todo $\rho > 0$, existe una función sumable γ tal que

$$g(\omega, z_t) \geq \gamma(\omega) \quad cs \quad \text{cuando} \quad |z_t| \leq \rho.$$

3 Dualidad

En el capítulo anterior se ha definido el Problema estocástico de Bolza en tiempo discreto (Definición 2.3) y se han introducido los supuestos con los que se trabajará, los cuales se encuentran resumidos en Sección 2.1. Se ha mencionado que el PEB es de la forma del problema (2-9), es por ello que en este capítulo se busca definir una función de perturbación para desarrollar el problema dual asociado. Con una función de perturbación en particular se busca establecer el valor del problema dual para el PEB y verificar bajo ciertos supuestos adicionales que no se tiene salto de dualidad, siendo esto último la principal motivación de este estudio.
En primer lugar, se incorpora notación adicional para ayudar al entendimiento del tema, siendo de mayor utilidad principalmente en el cálculo de las conjugadas.

Definición 3.1. *Para $\tau \in \{0, \dots, T\}$, se denota*

$$Ł_\tau^\infty := \prod_{t=\tau}^{T} \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

Observación 3.1. Es fácil ver que $\mathbf{X}_\tau$ introducido en la Definición 2.2 cumple $\mathbf{X}_\tau \subset Ł_\tau^\infty$, dado que si $\mathbf{x} = (x_\tau, \dots, x_T) \in \mathbf{X}_\tau$, luego la $\sigma-$álgebra generada por cada componente x_t, está contenida en $\mathcal{A}_t$, además como $\{\mathcal{A}_t\}_{\{t=0,\dots,T\}}$ es una filtración, entonces la $\sigma-$álgebra generada por x_t está contenida en $\mathcal{A}$, luego sigue siendo acotadas, por lo que permite concluir que $\mathbf{x}$ está en $Ł_\tau^\infty$.

Definición 3.2. *Para $\tau \in \{0, \dots, T\}$ se define*

$$Ł_\tau^1 := \prod_{t=\tau}^{T} \mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$$

donde para algún $t \in \{0, \dots, T\}$, $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ denota el espacio de funciones $x : \Omega \to \mathbb{R}^n$ integrables sobre $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$.

Observación 3.2. En el caso $\tau = 0$, se denota $Ł_0^1 = Ł^1$.

Definición 3.3. *Para algún $\tau \in \{0, \dots, T\}$ y funciones $\mathbf{x} \in Ł_\tau^{+\infty}$ e $\mathbf{y} \in Ł_\tau^1$ se define el producto de dualidad $\langle \cdot, \cdot \rangle_*$ entre $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ dado por*

$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle_* = \mathbb{E}\left(\sum_{t=\tau}^{T} x_t(\omega) \cdot y_t(\omega) \right).$$

Observación 3.3. Dado $\mathbf{x} \in Ł_\tau^{+\infty}$ e $\mathbf{y} \in Ł_\tau^1$, el producto de dualidad entre ellos es finito.

A continuación se presenta un problema, al que luego se demostrará que es un problema dual (asociado a cierta función de perturbación) del problema de $(\mathrm{P}_\tau(\xi))$ introducido en Definición 2.3.

Definición 3.4. *Se define el problema* $(\mathrm{D}_\tau(\eta))$

$$\begin{cases} \textit{Minimizar} & \mathbb{E}\left(\sum_{t=\tau}^{T-1} L_t^*\left(\omega, \mathbb{E}^{t+1}(\Delta x_t^*(\omega)), \mathbb{E}^{t+1}(x_t^*(\omega))\right)\right) + \mathbb{E}\left(g^*(\omega, -\mathbb{E}^T(x_T^*(\omega)))\right) \\ \textit{sobre} & \mathbf{x}^* \in \mathcal{K}_\tau \ \textit{tal que}\ \mathbb{E}(x_\tau^*(\omega)) = -\eta \end{cases} \tag{$\mathrm{D}_\tau(\eta)$}$$

donde $L_t^*(\omega,\cdot,\cdot), g^*(\omega,\cdot)$ *son las conjugadas de Fenchel de* $L_t(\omega,\cdot,\cdot), g(\omega,\cdot)$*, respectivamente para cada* ω *y* $\mathcal{K}_\tau = \{\mathbf{x}^* = (x_\tau^*,\ldots,x_T^*) \in Ł_\tau^1 : x_t^*$ *es* $\mathcal{A}_{t+1}$*-medible con* $t \in \{\tau,\ldots,T-1\}$*,* x_T^* *es* $\mathcal{A}_T$*-medible ,* $\mathbb{E}^0(x_0^*) = \mathbb{E}(x_0^*)\}$.

El objetivo de aquí en adelante es mostrar que efectivamente $(\mathrm{D}_\tau(\eta))$ es un problema dual de $(\mathrm{P}_\tau(\xi))$, junto con estudiar las funciones valor de los problemas $(\mathrm{P}_\tau(\xi))$ y $(\mathrm{D}_\tau(\eta))$ y establecer bajo que condiciones no se tiene salto de dualidad.

Para ello, se define $J, J_G : \mathbf{X} \to \overline{\mathbb{R}}$ y en consecuencia se estudian los siguientes problemas,

$$\mathrm{Val}(P) = \inf_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} J(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(l(\omega, \mathbb{E}(x_0(\omega)), x_T(\omega))) + \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\omega, x_t(\omega), \Delta x_t(\omega))\right) \tag{P}$$

$$\mathrm{Val}(P_G) = \inf_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} J_G(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(l(\omega, x_0(\omega), x_T(\omega))) + \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\omega, x_t(\omega), \Delta x_t(\omega))\right). \tag{P_G}$$

Establecer las condiciones para no tener salto de dualidad entre los problemas anteriores y un problema dual asociado, permitirá concluir que no se tiene salto de dualidad entre las funciones valor de los problemas $(\mathrm{P}_\tau(\xi))$ y $(\mathrm{D}_\tau(\eta))$ al escoger una forma particular para la función l, la cual será $l(\omega,\xi,\xi') = g(\omega,\xi') - \langle \xi, \eta\rangle$.
De manera general, la función l está definida de $\Omega \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$ a $\overline{\mathbb{R}}$. Además, basta suponer que l es un integrando normal, $l(\omega,\cdot,\cdot) \in \Gamma_0(\mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n)$ y de manera análoga se puede obtener los resultados sobre medibilidad, convexidad para los problemas (P) y (P_G), vistos anteriormente.
Los problemas (P) y (P_G) constituye una variación del problema desarrollado en [9], dado que tal como se presenta no es aplicable para los objetivos de este trabajo.
Por otro lado, se puede apreciar que (P_G) generaliza a (P), dado que se puede definir $x_0(\omega) = \mathbb{E}(x_0)$ (determinista) para cada $\omega \in \Omega$.

Se definen las siguientes funciones de perturbación para los problemas (P), (P_G) respectivamente

$$\begin{aligned}
\phi(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \mathbb{E}(l(\omega,\mathbb{E}(x_0(\omega))+\mathbb{E}(y_0(\omega)),x_T(\omega))+ \\
&\quad \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\omega,x_t-\mathbb{E}_\Delta^{t+1}y_t(\omega),\Delta x_t(\omega)+\mathbb{E}_\Delta^t y_{t+1}(\omega)+\mathbb{E}^{t+1}y_t(\omega))\right) \\
\phi_G(\mathbf{x},\mathbf{y}) &= \mathbb{E}(l(\omega,x_0(\omega)+y_0(\omega),x_T(\omega))+ \\
&\quad \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\omega,x_t(\omega)-\mathbb{E}_\Delta^{t}y_t(\omega),\Delta x_t(\omega)+\mathbb{E}_\Delta^t y_{t+1}(\omega)+\mathbb{E}^{t+1}y_t(\omega))\right)
\end{aligned}$$

donde $\mathbf{x}\in\mathbf{X},\mathbf{y}\in Ł^\infty$.

Observación 3.4. El operador $\mathbb{E}_\Delta^t(\cdot)=\mathbb{E}^{t+1}(\cdot)-\mathbb{E}^t(\cdot)$ se puede interpretar como la ganancia de información de un instante a otro.

Con esto las funciones valor de los problemas (P) y (P_G) asociados a las funciones $\phi(\mathbf{x},\mathbf{y})$ y $\phi_G(\mathbf{x},\mathbf{y})$ vienen dadas por

$$\begin{aligned}
V_\phi(\mathbf{y}) &= \inf_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \mathbb{E}(l(\omega,\mathbb{E}(x_0(\omega))+\mathbb{E}(y_0(\omega)),x_T(\omega))+ \\
&\quad \mathbb{E}\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\omega,x_t-\mathbb{E}_\Delta^{t+1}y_t(\omega),\Delta x_t(\omega)+\mathbb{E}_\Delta^t y_{t+1}(\omega)+\mathbb{E}^{t+1}y_t(\omega)) \\
V_{\phi_G}(\mathbf{y}) &= \inf_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}} \mathbb{E}(l(\omega,x_0(\omega)+y_0(\omega),x_T(\omega))+ \\
&\quad \mathbb{E}\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\omega,x_t(\omega)-\mathbb{E}_\Delta^{t}y_t(\omega),\Delta x_t(\omega)+\mathbb{E}_\Delta^t y_{t+1}(\omega)+\mathbb{E}^{t+1}y_t(\omega))
\end{aligned}$$

Notar que $V_\phi(0)=\text{Val }(P)$ y $V_{\phi_G}(0)=\text{Val }(P_G)$.
Finalmente, se necesita hablar de subdiferenciales de las funciones valor y estos, en base a lo anterior, son

$$\begin{aligned}
\partial V_\phi(\mathbf{y}) &:= \{\mathbf{y}^*\in Ł^1 : \langle \mathbf{y}^*,\mathbf{y}'-\mathbf{y}\rangle_* + V_\phi(\mathbf{y}) \le V_\phi(\mathbf{y}') \quad \forall \mathbf{y}'\in Ł^\infty\} \\
\partial V_{\phi_G}(\mathbf{y}) &:= \{\mathbf{y}^*\in Ł^1 : \langle \mathbf{y}^*,\mathbf{y}'-\mathbf{y}\rangle_* + V_{\phi_G}(\mathbf{y}) \le V_{\phi_G}(\mathbf{y}') \quad \forall \mathbf{y}'\in Ł^\infty\}.
\end{aligned}$$

3.1. El Problema Dual

Proposición 3.1. Un problema dual para el problema asociado al valor(P) es,

$$\inf_{\mathbf{y}^*\in Ł^1} \mathbb{E}\left(l^*(\omega,\mathbb{E}(y_0^*(\omega)),-\mathbb{E}^T(y_T^*(\omega))))\right)+\mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1}L_t^*(\omega,\mathbb{E}^{t+1}(\Delta y_t^*(\omega)),\mathbb{E}^{t+1}(y_{t+1}^*(\omega)))\right), \tag{D}$$

con las restricciones

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^0(y_0^*)&=\mathbb{E}(y_0^*),\\ y_{t-1}^*&=\mathbb{E}^t(y_{t-1}^*) \text{ con } t=1,\dots,T\\ y_T^*&=\mathbb{E}^T(y_T^*).\end{aligned}$$

El problema dual del problema asociado al valor (P_G), es dado por

$$\inf_{y^*\in L^1} \mathbb{E}\left(l^*(\omega,\mathbb{E}^0(y_0^*(\omega)),-\mathbb{E}^T(y_T^*(\omega))))\right)+\mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1}L_t^*(\omega,\mathbb{E}^{t+1}(\Delta y_t^*(\omega)),\mathbb{E}^{t+1}(y_{t+1}^*(\omega)))\right), \tag{D_G}$$

con las restricciones

$$\begin{aligned}y_0^*&=\mathbb{E}^0(y_0^*),\\ y_{t-1}^*&=\mathbb{E}^t(y_{t-1}^*) \text{ con } t=1,\dots,T\\ y_T^*&=\mathbb{E}^T(y_T^*)\end{aligned}$$

Demostración. La idea es obtener las conjugadas de V_ϕ y V_{ϕ_G}. Los cálculos para ambas son casi idénticas y cambian en algunos pasos. Por este motivo, solo se calcula la conjugada de V_{ϕ_G} detallándose donde difieren ambas. Luego por definición la conjugada de $V_{\phi_G}(y)$ es

$$\begin{aligned}V_{\phi_G}^*(\mathbf{y}^*)&=\sup_{\mathbf{y}\in Ł^\infty}\{\langle\mathbf{y},\mathbf{y}^*\rangle_*-V_{\phi_G}(\mathbf{y})\}\\ &=\sup_{\mathbf{y}\in Ł^\infty}\{\langle\mathbf{y},\mathbf{y}^*\rangle_*-\inf_{\mathbf{x}\in\mathbf{X}}\{\phi_G(\mathbf{x},\mathbf{y})\}\}\\ &=\sup_{\mathbf{y}\in Ł^\infty,\mathbf{x}\in\mathbf{X}}\{\langle\mathbf{y},\mathbf{y}^*\rangle_*-\phi_G(\mathbf{x},\mathbf{y})\}\\ &=\sup_{\mathbf{y}\in Ł^\infty,\mathbf{x}\in\mathbf{X}}\left\{\mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T}y_t(\omega)\cdot y_t^*(\omega)\right)-\mathbb{E}\left(l(\omega,x_0(\omega)+y_0(\omega),x_T(\omega)\right)\right.\\ &\left.-\mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1}L_t(\omega,x_t-\mathbb{E}_\Delta^{t+1}y_t(\omega),\Delta x_t(\omega)+\mathbb{E}_\Delta^t y_{t+1}(\omega)+\mathbb{E}^{t+1}y_t(\omega))\right)\right\}\end{aligned}$$

Para la conjugada de V_ϕ se tiene

$$V_\phi^*(\mathbf{y}^*) = \sup_{\mathbf{y}\in Ł^\infty, \mathbf{x}\in\mathbf{X}} \Bigg\{ \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T} y_t(\omega)\cdot y_t^*(\omega)\right) - \mathbb{E}\left(l(\omega, \mathbb{E}(x_0(\omega)) + \mathbb{E}(y_0(\omega)), x_T(\omega)\right)$$
$$- \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\omega, x_t(\omega) - \mathbb{E}_\Delta^{t+1} y_t(\omega), \Delta x_t(\omega) + \mathbb{E}_\Delta^{t} y_{t+1}(\omega) + \mathbb{E}^{t+1} y_t(\omega))\right) \Bigg\}.$$

Para continuar con el cálculo de las conjugadas se necesitan los siguientes cambios de variables:

$$a_0 = x_0 + y_0 \tag{3-1}$$
$$z_{t+1} = x_t - \mathbb{E}_\Delta^t y_t \quad t = 0\ldots T-1 \tag{3-2}$$
$$w_{t+1} = \Delta x_t + \mathbb{E}_\Delta^t y_t + \mathbb{E}^{t+1} y_{t+1} \quad t = 0\ldots T-1 \tag{3-3}$$
$$v_{t+1} = y_t - \mathbb{E}^{t+1} y_t \quad t = 0\ldots T-1 \tag{3-4}$$
$$u = y_T - \mathbb{E}^T y_T \tag{3-5}$$
$$s_0 = \mathbb{E}^0 y_0 - y_0 \tag{3-6}$$

Notar que z_{t+1} y w_{t+1} son $\mathcal{A}_{t+1}$-medible, y $\mathbb{E}^{t+1} v_{t+1} = 0$, $\mathbb{E}^T u = 0$, $\mathbb{E}^0 s_0 = 0$.
Para la conjugada de V_ϕ, los cambios de variables que difieren son

$$a_0 = \mathbb{E}(x_0(\omega)) + \mathbb{E}(y_0(\omega)) \tag{3-7}$$
$$s_0 = x_0(\omega) + \mathbb{E}^0(y_0(\omega)) - \mathbb{E}(x_0(\omega)) - \mathbb{E}(y_0(\omega)). \tag{3-8}$$

En este caso $a_0 \in \mathbb{R}^n$ y s_0 es $\mathcal{A}_0$-medible.
De los cambios de variables presentados se obtienen algunas relaciones entre ellas aplicables directamente en el cálculo de las conjugadas. En primer lugar, si se aplica $\mathbb{E}^{t-1}$ con $t = 1, \ldots, T$ en (3-2), se obtiene

$$\mathbb{E}^{t-1} z_t = x_{t-1}$$
$$\mathbb{E}_\Delta^{t-1} y_{t-1} = \mathbb{E}^{t-1} z_t - z_t.$$

De (3-3), junto con lo anterior se tiene

$$\begin{aligned}\mathbb{E}^t y_t &= w_t - x_t + x_{t-1} - \mathbb{E}_\Delta^{t-1} y_{t-1}\\ &= w_t - x_t + z_t,\end{aligned}$$

para $t = 1, \ldots, T$.
Por lo tanto,

$$y_T = u + \mathbb{E}^T y_T = u + w_T - x_T + z_T.$$

Además

$$\begin{aligned} y_{t-1} &= y_{t-1} - \mathbb{E}^t y_{t-1} + \mathbb{E}\Delta^{t-1} y_{t-1} + \mathbb{E}^{t-1} y_{t-1} \\ &= v_t - z_t + w_{t-1} + z_{t-1} \end{aligned}$$

para $t = 2, \ldots, T$.

Para el caso $t = 1$, del caso anterior, se deduce

$$\begin{aligned} y_0 &= y_0 - \mathbb{E}^1 y_0 + \mathbb{E}^0_\Delta y_0 + \mathbb{E}^0 y_0 \\ &= v_1 - z_1 + s_0 + \mathbb{E}^0 z_1 + y_0 \\ &= v_1 - z_1 + s_0 + a_0. \end{aligned}$$

Para la conjugada de V_ϕ la técnica es similar y se obtiene lo mismo, es decir,

$$\begin{aligned} y_0 &= y_0 - \mathbb{E}^1 y_0 + \mathbb{E}^0_\Delta y_0 + \mathbb{E}^0 y_0 \\ &= v_1 - z_1 + \mathbb{E}^0 z_1 + \mathbb{E}^0 y_0 + s_0 - x_0 + \mathbb{E} x_0 + \mathbb{E} y_0 \\ &= v_1 - z_1 + s_0 + a_0. \end{aligned}$$

Con este análisis sobre las variables anteriores, el siguiente paso es ver cómo afectan al producto dualidad. Directamente se obtiene

$$\begin{aligned} \sum_{t=0}^{T} \mathbf{y}_t^* \cdot \mathbf{y}_t &= y_0^* \cdot (v_1 - z_1 + s_0 + a_0) + y_T^* \cdot (z_T + w_T - x_T + u) + \sum_{t=1}^{T-1} y_t^* \cdot (v_{t+1} - z_{t+1} + z_t + w_t) \\ &= y_0^* \cdot (s_0 + a_0) - y_T^* \cdot (s_T + x_T) + \sum_{t=1}^{T-1} y_t^* \cdot (z_t + w_t) + \sum_{t=1}^{T-1} y_{t-1}^* \cdot (v_t - z_t) + y_T^* \cdot u \\ &= y_0^* \cdot (s_0 + a_0) - y_T^* \cdot x_T + \sum_{t=1}^{T} y_t^* \cdot (z_t + w_t) + \sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^* \cdot (v_t - z_t) + y_T^* \cdot u \\ &= y_0^* \cdot (s_0 + a_0) - y_T^* \cdot x_T + \sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^* \cdot v_t + \sum_{t=1}^{T} \Delta y_{t-1}^* \cdot z_t + y_t^* \cdot w_t + y_T^* \cdot u \end{aligned}$$

lo que permite deducir

$$\begin{aligned} &\mathbb{E}(y_0^* \cdot (s_0 + a_0)) + \mathbb{E}(y_T^* \cdot (u - x_T)) + \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^* \cdot v_t\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{T} \Delta y_{t-1}^* \cdot z_t + y_t^* \cdot w_t\right) - \\ &\mathbb{E}\left(l(\omega, a_0, x_T)\right) - \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_{t+1}(\omega, z_{t+1}, w_{t+1})\right) \\ &= \mathbb{E}(y_0^* \cdot a_0) + \mathbb{E}(\mathbb{E}^0(y_0^* - y_0^*)s_0) + \mathbb{E}(y_T^* \cdot x_T) + \mathbb{E}((y_T^* + \mathbb{E}^T y_T^*) \cdot u) + \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^* \cdot v_t\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{T} \Delta y_{t-1}^* \cdot z_t\right) + \\ &+ \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{T} y_t^* \cdot w_t\right) - \mathbb{E}(l(\omega, a_0, x_T)) + \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{T} (y_{t-1}^* + \mathbb{E}^t y_{t-1}^*) v_t + y_t \cdot w_t\right) - \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\omega, z_{t+1}, w_{t+1})\right). \end{aligned}$$

Esto último es consecuencia de que z_{t+1} y w_{t+1} son $\mathcal{A}_{t+1}$-medible, y $\mathbb{E}^{t+1}v_{t+1} = 0$, $\mathbb{E}^T u = 0$, $\mathbb{E}^0 s_0 = 0$.

De las observaciones anteriores y el hecho que las funciones son integrandos normales, se tiene que $V^*_{\phi_G}(\mathbf{y}^*)$, es equivalente a

$$\begin{aligned}
V^*_{\phi_G}(\mathbf{y}^*) = \sup_{\mathbf{y}\in Ł^\infty, \mathbf{x}\in\mathbf{X}} & \Big\{ \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T} y_t(\omega)\cdot y_t^*(\omega)\right) - \mathbb{E}(l(\omega, x_0(\omega)+y_0(\omega), x_T(\omega)) \\
& - \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\omega, x_t - \mathbb{E}^{t+1}_\Delta y_t(\omega), \Delta x_t(\omega) + \mathbb{E}^t_\Delta y_{t+1}(\omega) + \mathbb{E}^{t+1} y_t(\omega))\right)\Big\} && \text{(3-9)} \\
& = \sup_{s_0} \mathbb{E}\{\Big(y_0^*(\omega) - \mathbb{E}^0(y_0^*(\omega))\Big)\cdot s_0\} + && \text{(3-10)} \\
& \sup_{u, v_{t+1}} \left\{\mathbb{E}\sum_{t=0}^{T-1}(\mathbb{E}^{t+1}(y_t^*(\omega)) - y_t^*(\omega))v_{t+1}) + \mathbb{E}^T((y_T^*(\omega) - y_T^*(\omega))u)\right\} + && \text{(3-11)} \\
& \sup_{a_0, x_T} \{\mathbb{E}(y_0^*(\omega)a_0) + \mathbb{E}(y_T^*(\omega)x_T) - \mathbb{E}(l(\omega, a_0, x_T))\} + && \text{(3-12)} \\
& \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1}\sup_{z'_{t+1}, w'_{t+1}}\Big\{\Delta y_t^*(\omega)z'_{t+1} + y^*_{t+1}(\omega)w'_{t+1} - L_t(\omega, z_{t+1}, w'_{t+1})\Big\}\right) && \text{(3-13)} \\
& = \mathbb{E}\left(l^*(\omega, \mathbb{E}^0(y_0^*(\omega)), -\mathbb{E}^T(y_T^*(\omega))))\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t^*(\omega, \mathbb{E}^{t+1}(\Delta y_t^*(\omega)), \mathbb{E}^{t+1}(y^*_{t+1}(\omega)))\right) && \text{(3-14)} \\
& = \phi_G^*(0, \mathbf{y}^*) && \text{(3-15)}
\end{aligned}$$

con las restricciones

$$\begin{aligned}
y_0^* &= \mathbb{E}^0(y_0^*) && \text{(3-16)} \\
y_{t-1}^* &= \mathbb{E}^t(y_{t-1}^*) \text{ con } t = 1, \ldots, T && \text{(3-17)} \\
y_T^* &= \mathbb{E}^T(y_T^*) && \text{(3-18)}
\end{aligned}$$

Por la existencia de al menos un $\mathbf{x}$ tal que el funcional asociado al problema $J_G(\mathbf{x}) < +\infty$, el supremo de la definición de la conjugada no es $-\infty$, luego, de los cambios de variables el supremo de (3-9) se puede descomponer obteniendo (3-10), (3-11), (3-12) y (3-13) donde estos últimos dos es consecuencia de Lema 2.11. Finalmente (3-14) y las restricciones son obtenidas del hecho que los supremos en (3-10) y (3-11) son $+\infty$ al menos que se anulen y eso ocurre con las condiciones (3-16),(3-17) y (3-18). Por otro lado notar que por Lema 2.5, las funciones L_t^* y l^* son integrandos normales por lo que no hay problemas sobre la medibilidad y las esperanzas tomadas. De este modo también se concluye la igualdad (3-15).

Para $V_\phi^*(\mathbf{y}^*)$ se concluye

$$\begin{aligned} V_\phi^*(y^*) = &\sup_{\mathbf{y}\in Ł^\infty, \mathbf{x}\in \mathbf{X}} \left\{ \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T} y_t(\omega)\cdot y_t^*(\omega)\right) - \mathbb{E}(l(\omega, \mathbb{E}(x_0(\omega)) + \mathbb{E}(y_0(\omega)), x_T(\omega)) \right. \\ & \left. - \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\omega, x_t - \mathbb{E}_\Delta^{t+1} y_t(\omega), \Delta x_t(\omega) + \mathbb{E}_\Delta^t y_{t+1}(\omega) + \mathbb{E}^{t+1} y_t(\omega))\right)\right\} && \text{(3-19)} \\ &= \sup_{s_0} \mathbb{E}\{\Big(\mathbb{E}(y_0^*(\omega)) - \mathbb{E}^0(y_0^*(\omega))\Big)\cdot s_0\} + && \text{(3-20)} \\ & \sup_{u, v_{t+1}} \{\mathbb{E}\sum_{t=0}^{T-1}(\mathbb{E}^{t+1}(y_t^*(\omega)) - y_t^*(\omega))v_{t+1}) + \mathbb{E}^T((y_T^*(\omega) - y_T^*(\omega))u)\} + && \text{(3-21)} \\ & \sup_{a_0, x_T} \{(\mathbb{E}(y_0^*(\omega)))a_0 + \mathbb{E}(y_T^*(\omega)x_T) - \mathbb{E}l(\omega, a_0, x_T)\} + && \text{(3-22)} \\ & \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} \sup_{z'_{t+1}, w'_{t+1}} \{\Delta y_t^*(\omega) z'_{t+1} + y_{t+1}^*(\omega) w'_{t+1} - L_t(\omega, z_{t+1}, w'_{t+1})\}\right) && \text{(3-23)} \\ &= \mathbb{E}(l^*(\omega, \mathbb{E}(y_0^*(\omega)), -\mathbb{E}^T(y_T^*(\omega)))) + \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t^*(\omega, \mathbb{E}^{t+1}(\Delta y_t^*(\omega)), \mathbb{E}^{t+1}(y_{t+1}^*(\omega)))\right) && \text{(3-24)} \\ &= \phi^*(0, \mathbf{y}^*) && \text{(3-25)} \end{aligned}$$

con las restricciones

$$\mathbb{E}^0(y_0^*) = \mathbb{E}(y_0^*) \tag{3-26}$$

$$y_{t-1}^* = \mathbb{E}^t(y_{t-1}^*) \text{ con } t = 1, \ldots, T \tag{3-27}$$

$$y_T^* = \mathbb{E}^T(y_T^*). \tag{3-28}$$

La justificación de lo anterior es similar al caso $V_{\phi_G}^*$.
De esta forma se ha podido determinar el problema dual del problema (P_G), dado por

$$\inf_{\mathbf{y}^*\in Ł^1} \phi_G^*(0, \mathbf{y}^*) = \mathbb{E}\left(l^*(\omega, \mathbb{E}^0(y_0^*(\omega)), \mathbb{E}^T(y_T^*(\omega)))\right) + \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t^*(\omega, \mathbb{E}^{t+1}(\Delta y_t^*(\omega)), \mathbb{E}^{t+1}(y_{t+1}^*(\omega)))\right) \tag{3-29}$$

con las restricciones

$$\begin{aligned} y_0^* &= \mathbb{E}^0(y_0^*) \\ y_{t-1}^* &= \mathbb{E}^t(y_{t-1}^*) \text{ con } t = 1, \ldots, T \\ y_T^* &= \mathbb{E}^T(y_T^*). \end{aligned}$$

De forma similar para el caso (D). ▮

Observación 3.5. Notar que

$$-V^*_{\phi_G}(\mathbf{y}^*) = -\phi^*(0,\mathbf{y}^*) = \inf_{\mathbf{y}}\{V_{\phi_G}(\mathbf{y}) - \langle \mathbf{y},\mathbf{y}^*\rangle\} \leq \phi(0) - \langle 0,\mathbf{y}^*\rangle = Val(P_G)$$

Esto implica que $-Val(D_G) \leq Val(P_G)$.
Además, se tiene

$$-\phi^*_G(0,\mathbf{y}^*) = -Val(D_G) = Val(P_G)$$

si y solo si $\inf_{\mathbf{y}}\{V_{\phi_G}(\mathbf{y}) - \langle \mathbf{y},\mathbf{y}^*\rangle\}$ es alcanzado en $\mathbf{y} = 0$, lo cual por definición corresponde a la condición $\mathbf{y}^* \in \partial V_{\phi_G}(0)$, es decir, se tiene una condición para no tener salto de dualidad. Lo mismo es replicable a $Val(D)$ y $Val(P)$.

3.2. Condiciones de optimalidad

Se ha logrado establecer una condición para no tener salto de dualidad de los problemas (P) y (P_G) y sus respectivos duales (D) y (D_G). Ahora se estudiará bajo qué supuestos se tiene tal condición y para ello se verán algunos teoremas relativos al problema (P_G). Las condiciones a exponer en esta parte son equivalente a las necesarias para los problemas $(\mathrm{P}_\tau(\xi))$ y $(\mathrm{D}_\tau(\eta))$ dado que se puede representar el primero como un caso particular del problema general (P_G).

Observación 3.6. Desde ahora, al problema (P_G) se le denominará indistintamente por problema general.

Teorema 3.1. *Una condición suficiente y necesaria para la optimalidad de $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ del problema general es la existencia de algún $\mathbf{y}^* \in \text{Ł}^1$ tal que*

a) $b_0(\omega) = \mathbb{E}^0 y^*_0(\omega)$, $b_T(\omega) = \mathbb{E}^T y^*_T(\omega)$ *para algún* $(b_0(\omega), -b_T(\omega)) \in \partial l(\omega, x_0, x_T)$ *c.s.*

b) $(\mathbb{E}^{t+1}\Delta y^*_t(\omega), \mathbb{E}^{t+1}p_{t+1}(\omega)) \in \partial L_t(\omega, x_t(\omega), \Delta x_t(\omega))$ *cs* $\forall\ t = 0,\dots T-1$.

c) y^*_t *es* $\mathcal{A}_{t+1}-$*medible con* $t = 0,\dots,T-1$.

De hecho, estas relaciones son satisfechas por $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ e $\mathbf{y}^* \in \text{Ł}^1$ si y solo si $\mathbf{x}$ resuelve el problema general e $\mathbf{y}^* \in \partial\phi_G(0)$

Demostración. Por definición si $\mathbf{y}^* \in \partial\phi_G(0)$, se obtiene

$$\phi_G(0) + \langle \mathbf{y}^*,\mathbf{y}\rangle_* \leq \phi_G(\mathbf{y})\ \forall\mathbf{y} \in \text{Ł}^\infty$$
$$\phi_G(0) \leq -\langle \mathbf{y}^*,\mathbf{y}\rangle_* + \phi_G(\mathbf{y})\ \forall\mathbf{y} \in \text{Ł}^\infty$$

Si $\mathbf{x}$ resuelve el problema general, entonces $\mathbf{x}$ alcanza el ínfimo en $\phi_G(0)$ y esto, por lo anterior, es equivalente a tener el ínfimo de

$$-\mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T} y_t(\omega)\cdot y_t^*(\omega)\right) + \mathbb{E}(l(\omega, \overline{x}_0(\omega) + y_0(\omega), \overline{x}_T(\omega)))$$
$$+\,\mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\omega, \overline{x}_t(\omega) - \mathbb{E}^t_\Delta y_t(\omega), \Delta\overline{x}_t(\omega) + \mathbb{E}^t_\Delta y_{t+1}(\omega) + \mathbb{E}^{t+1} y_t(\omega))\right)$$

sobre $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}$ e $\mathbf{y} \in \text{Ł}^\infty$ siendo alcanzado en $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ e $\mathbf{y} = 0$.
En adelante se omitirá el término ω de las trayectorias. En consecuencia, el teorema puede ser establecido, al mostrar que lo anterior se mantiene si y solo si se cumple a), b), c) del enunciado. Al usar los cambios de variables (3-1), (3-2), (3-3), (3-4),(3-5), (3-6) utilizados para obtener el problema (D_G), se concluye que para demostrar el teorema, se debe obtener que a), b), c) se mantienen si y solo el ínfimo de

$$-\,\mathbb{E}(y_0^*\cdot a_0) - \mathbb{E}(\mathbb{E}^0(y_0^* - y_0^*)s_0) + \mathbb{E}(y_T^*\cdot\overline{x}_T) + \mathbb{E}((y_T^* - \mathbb{E}^T y_T^*)\cdot u) - \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{T} y_{t-1}^*\cdot v_t\right) -$$
$$\mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{T}\Delta y_{t-1}^*\cdot z_t\right) + -\mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{T} y_t^*\cdot w_t\right) + \mathbb{E}(l(\omega, a_0, \overline{x}_T) - \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{T}(y_{t-1}^* - \mathbb{E}^t y_{t-1}^*)v_t + y_t^*\cdot w_t\right)$$
$$+\,\mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\omega, z_{t+1}, w_{t+1})\right)$$

sobre las variables (3-1), (3-2), (3-3), (3-4),(3-5), (3-6), es alcanzado con

$$a_0 = x_0 \tag{3-30}$$
$$\overline{x}_0 = x_0 \tag{3-31}$$
$$z_{t+1} = x_t \text{ con } t = 0,\ldots,T-1 \tag{3-32}$$
$$w_{t+1} = \Delta x_t \text{ con } t = 0,\ldots,T-1 \tag{3-33}$$
$$v_{t+1} = 0 \text{ con } t = 0,\ldots,T-1 \tag{3-34}$$
$$u = 0 \tag{3-35}$$
$$s_0 = 0., \tag{3-36}$$

ya que estas relaciones implican que $\overline{\mathbf{x}} = \mathbf{x}$ e $y = 0$.
Efectivamente, con $t = 0$ se obtiene

$$x_0 = \overline{x}_0 + y_0$$
$$x_0 = \overline{x}_0 - \mathbb{E}^1 y_0 + \mathbb{E}^0 y_0$$
$$0 = \mathbb{E}^0 y_0 - y_0.$$

Luego, restando las primeras dos ecuaciones, se concluye que $\mathbb{E}^1 y_0 = 0$ e $y_0 = 0$. De esta manera $\overline{x}_0 = x_0$.
Además, de (3-32) y (3-33) para $t = 0$ se deduce

$$
\begin{aligned}
x_1 &= \overline{x}_1 - \mathbb{E}^2 y_1 + \mathbb{E}^1 y_1 \\
x_1 - x_0 &= \overline{x}_1 - \overline{x}_0 + \mathbb{E}^1 y_0 - \mathbb{E}^0 y_0 + \mathbb{E}^1 y_1.
\end{aligned}
$$

Se concluye que $\mathbb{E}^2 y_1 = 0$ e $y_1 = 0$. De esta manera $\overline{x}_1 = x_1$.
De esta forma, por inducción, se propone como hipótesis inductiva que $\overline{x}_{t-1} = x_{t-1}$ e $y_{t-1} = 0$, por demostrar que se cumple para t. Para esto, notar que

$$
\begin{aligned}
x_t &= \overline{x}_t - \mathbb{E}^{t+1} y_t + \mathbb{E}^t y \\
x_t - x_{t-1} &= \overline{x}_t - \overline{x}_{t-1} + \mathbb{E}^t y_{t-1} - \mathbb{E}^{t-1} y_{t-1} + \mathbb{E}^t y_t.
\end{aligned}
$$

Lo anterior junto a la hipótesis inductiva, permite probar lo deseado ($\overline{x}_t = x_t$ y $y_t = 0$)..
Luego, el ínfimo descrito anteriormente, se puede descomponer en

$$
\inf_{v_t, u} \left\{ \mathbb{E}\left((y_T^* - \mathbb{E}^T y_T^*) \cdot u \right) + \mathbb{E}\left(\sum_{t=1}^{T} (y_{t-1}^* - \mathbb{E}^t y_{t-1}^*) v_t \right) \right\} + \tag{3-37}
$$

$$
\inf_{s_0} \{ \mathbb{E}(\mathbb{E}^0 y_0^* - y_0^*) s_0) \} + \tag{3-38}
$$

$$
\inf_{a_0, \overline{x}_T} \{ -\mathbb{E}(y_0^* \cdot a_0) + \mathbb{E}(y_T^* \cdot \mathbf{x}_T) + \mathbb{E}(l(\omega, a_0, \overline{x}_T) \} + \tag{3-39}
$$

$$
\sum_{t=0}^{T-1} \inf_{z'_{t+1}, w'_{t+1}} \left\{ \mathbb{E}\left(L_t(\omega, z'_{t+1}, w'_{t+1}) - \mathbb{E}^{t+1} \Delta y_t^* z'_{t+1} - \mathbb{E}^t y_{t+1}^* w'_{t+1} \right) \right\} \tag{3-40}
$$

El ínfimo en (3-37), no es $-\infty$ a menos que $y_t^* = \mathbb{E}^{t+1} y_t^*$ para $t = 0, \ldots, T-1$ e $y_T^* = \mathbb{E}^T y_T^*$, por lo que el valor de este ínfimo es 0 y es alcanzado para $v_t = u = 0$. Para el ínfimo en (3-38), con el mismo razonamiento de antes, se tiene la condición $\mathbb{E}^0 y_0^* = y_0^*$, cuyo valor es 0 y alcanzado en $s_0 = 0$. Junto con esto, es imposible que se alcancen estos ínfimos a menos que estos se anulen y sean alcanzados por $s_0 = v_t = u = 0$ y esto es si y solo si c) se cumple y también se tiene $b_0 = y_0^*$, $b_T = y_T^*$ para algún (b_0, b_T). Luego, $b_0 = \mathbb{E}^0 y_0^*$, $b_T = \mathbb{E}^T y_T^*$ y como l es integrando normal, se puede tomar puntualmente su ínfimo y este es alcanzado por $a_0 = x_0$, $\overline{x}_T = x_T$ si y solo si $a_0(\omega) = x_0(\omega)$, $\overline{x}_T(\omega) = x_T(\omega)$, pero esta es la propiedad a). Para terminar, con argumento similar al anterior, dado que las funciones L_t son integrandos normales, los ínfimos en (3-39) y (3-40) se pueden tomar puntualmente sobre $\mathbb{R}^n$, luego $z_{t+1} = x_t$, $w_{t+1} = \Delta x_t$ con $t = 0, \ldots, T-1$ si y solo si para cada ω, se alcanza el ínfimo casi seguramente $z'_{t+1} = x_t(\omega)$, $w'_{t+1} = \Delta x_t(\omega)$ con $t = 0, \ldots, T-1$, pero esto corresponde a la propiedad b).

En esta parte final se buscan condiciones para establecer el hecho que $\partial V_{\phi_G}(0) \neq \emptyset$, muy parecido a las condiciones en el caso determinista. Para esto se establecerán los supuestos necesarios y de esta manera concluir con el Teorema 3.4 que es el teorema que cumple y resume los objetivos de este trabajo. Es por ello que para la siguiente parte se considera la siguiente notación

$$F_t(\omega, z_t) := \{w_t \in \mathbb{R}^n : L_t(\omega, z_t, w_t) < +\infty\} \tag{3-41}$$
$$Z_t(\omega) := \{z_t \in \mathbb{R}^n : F(\omega, z_t) \neq \emptyset\} \tag{3-42}$$
$$C(\omega) := \{(a_0, a_T) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : l(\omega, a_0, a_T) < +\infty\}. \tag{3-43}$$

Definición 3.5. *El problema general (P_G) se dice que satisface la condición recursiva acotada si para $t = 0, \ldots, T-1$ se tiene*

a) $\forall \rho > 0, \sigma > 0$ *existe* $\beta : \Omega \to \mathbb{R}$ *una función sumable tal que casi seguramente*

$$\begin{aligned} &z_t \in Z_t(\omega) \ \ y \ |z_t| \leq \rho, w_t \in F_t(\omega, z_t) \ \ y \ |w_t| \leq \sigma \\ &\Rightarrow L_t(\omega, z_t, w_t) \leq \beta(\omega) \quad c.s \end{aligned}$$

b) $\forall \rho > 0 \ \ \exists \rho' > 0$ *tal que casi seguramente*

$$[z_t \in Z_t(\omega) \ \ y \ |z_t| \leq \rho] \Rightarrow [\exists w_t \in F_t(\omega, z_t) \ \ con \ z_t + w_t \in Z_{t+1} \ \ y \ |z_t + w_t| \leq \rho']$$

con $Z_{T+1} = \mathbb{R}^n$.

Bajo esta definición, $\omega \to Z_t(\omega)$ es una multifunción de valores cerrados y por ser la función L_t un $\mathcal{A}_{t+1}-$integrando normal se concluye que $\omega \to Z_t(\omega)$ es $\mathcal{A}_{t+1}-$ medible, dado que se puede ver a $\omega \to Z_t(\omega)$ como una proyección del multiepígrafo de las funciones L_t que por definición es $\mathcal{A}_{t+1}-$medible. Sin embargo, se necesita una suposición sobre la medibilidad para más adelante, la cual es que $\omega \to Z_t(\omega)$ es $\mathcal{A}_t-$medible y es básicamente por la restricción implícita que esta conlleva y es que $x_t(\omega) \in Z_t(\omega)$.

Definición 3.6. *Se dice que el problema general satisface casi seguramente la condición de factibilidad interior si para algún $\overline{\mathbf{x}} \in \mathbf{X}$, $\epsilon > 0$ y una función sumable $\alpha_t : \Omega \to \mathbb{R}$ se satisface*

$$(\overline{x}_0(\omega), \overline{x}_T(\omega)) \in C(\omega), \ \ y$$

además, para $t = 0, \ldots, T-1$, se tiene,

$$\begin{aligned} &z_t \in Z_t(\omega), w_t \in F_t(\omega, z_t) \ \ y \ L_t(\omega, z_t, w_t) \leq \alpha_t(\omega) \ \ c.s \\ &cuando \ |z_t - \overline{x}_t| \leq \epsilon, |w_t - \Delta\overline{x}_t| \leq \epsilon. \end{aligned}$$

Definición 3.7. *Una multifunción de valores compactos $D : \Omega \rightrightarrows (\mathbb{R}^n)^{T+1}$, se dice no anticipativa si para cada $t = 0, \ldots, T$ la proyección*

$$D^t(\omega) := \{(x_0, \ldots, x_t) | \exists (x_{t+1}, \ldots, x_T) \text{ con } (x_0, \ldots, x_T) \in D(\omega)\}$$

es $\mathcal{A}_t$- medible.

Lema 3.1 ([9, Proposition 3]). Suponga que el problema general (P_G) satisface la condición recursiva (3.5) y Z_t definido por (3-42) definida en (3-42) es $\mathcal{A}_t-$medible para $t = 0 \ldots, T-1$. Entonces, para $\overline{\rho}_t > 0$ arbitrario con $t = 0, \ldots, T$, existe una constante $\rho_t \geq \overline{\rho}_t$ tal que la multifunción de valores compactos $D : \Omega \rightrightarrows (\mathbb{R}^n)^{T+1}$ definida por

$$\begin{aligned} D^t(\omega) := \{&\mathbf{x} = (x_0, \ldots, x_t) : |x_t| \leq \rho_t \text{ y } \Delta x_t \in F(\omega, x_t) \\ &\text{para } t = 0, \ldots, T-1\} \end{aligned}$$

es no anticipativa. Más aún, existirán funciones sumables $\alpha_t : \Omega \to \mathbb{R}$ tales que

$$|L_t(\omega, x_t, \Delta x_t)| \leq \alpha_t(\omega) \text{ cs, } \text{ cuando } \mathbf{x} \in D^t(\omega).$$

Para establecer el siguiente teorema se pide que $\partial l(\omega, x_0, x_T)$ sea acotado y la función $l(\omega, a_0, a_T) = f_0(\omega, a_0) + f_T(\omega, a_T)$ donde f_0 es un $\mathcal{A}_0$ -integrando normal y f_T es un $\mathcal{A}_T$ -integrando normal e integrando convexo. Note que por definición

$$\partial l(\omega, x_0, x_T) = \{(a, b) : (a, b) \cdot ((y_0, y_T) - (x_0, x_T)) + l(\omega, x_0, x_T) \leq l(\omega, y_0, y_T) \ \ \forall \ \ (y_0, y_T)\}.$$

Entonces, como $l(\omega, a_0, a_T) = f_0(\omega, a_0) + f_T(\omega, a_T)$, se tiene

$$\begin{aligned} \partial l(\omega, x_0, x_T) = &\{(a, b) : (a, b) \cdot ((y_0, y_T) - (x_0, x_T)) + f_0(\omega, x_0) + f_T(\omega, x_T) \leq f_0(\omega, y_0) + \\ &f_T(\omega, y_T) \ \forall (y_0, y_T)\}. \end{aligned}$$

Si $y_T = x_T$, entonces $a \in \partial f_0(\omega, x_0)$ y si $y_0 = x_0$, entonces $b \in \partial f_T(\omega, x_T)$, de esta forma se concluye

$$\partial l(\omega, x_0, x_T) \subset \partial f_0(\omega, x_0) \times \partial f_T(\omega, x_T).$$

Teorema 3.2. *Suponga que el problema general satisface la condición recursiva acotada y casi seguramente la condición de factibilidad interior, la multifunción Z_t es $\mathcal{A}_t-$medible para $t = 0, \ldots, T-1$. Además se supone, $\partial l(\omega, x_0, x_T)$ es acotado y la función $l(\omega, a_0, a_T) = f_0(\omega, a_0) + f_T(\omega, a_T)$ donde f_0 es un $\mathcal{A}_0$ -integrando normal y f_T es un $\mathcal{A}_T$ -integrando normal y convexos. Luego, para que $\mathbf{x} \in \mathbf{X}$ sea óptimo en el problema general, es necesario y suficiente, que exista $\mathbf{y}^* \in Ł^1$ satisfaciendo a),b),c), del Teorema 3.1 visto anteriormente.*

Demostración. En primer lugar, se define

$$h(\omega, a_0, a_T) = \inf_{x' \in (\mathbb{R}^n)^{T+1}} \{ \sum_{t=0}^{T-1} L_t \left(\omega, x'_t, \Delta x'_t\right) : x'_0 = a_0, x'_T = a_T \}.$$

De esta forma, h es convexa para cada ω, consecuencia de la convexidad de las funciones L_t para cada ω. Además, considere

$$C'(\omega) = dom(h(\omega, \cdot, \cdot)) := \{(a_0, a_T) : h(\omega, a_0, a_T) < +\infty\}.$$

Este conjunto tiene interior no vacío casi seguramente, dado por la hipótesis de casi seguramente factibilidad interior. De hecho, por la hipótesis de casi seguramente factibilidad interior se tiene que existe $\overline{\mathbf{x}}$ y una función sumable β como la en la propiedad a) de la hipótesis de condición recursiva acotada, es decir, para ρ, σ suficientemente grandes se obtiene

$$L_t(\omega, x'_t, \Delta x'_t) \leq \beta(\omega) \text{ cuando } \|x' - \overline{x}\|_\infty \leq \epsilon$$

y además $(\overline{x}_0(\omega), \overline{x}_T(\omega)) \in C(\omega) \cap int(C'(\omega))$
Por otro lado,

$$\begin{aligned}
Val(P_G) &= \inf_{\mathbf{x} \in \mathbf{X}} \mathbb{E}(l(\omega, x'_0(\omega), x'_T(\omega))) + \mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1} L_t(\omega, x'_t(\omega), \Delta x'_t(\omega))\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\inf_{x' \in (\mathbb{R}^n)^{T+1}} \left\{ l(\omega, x'_0, x'_T) + \sum_{t=0}^{T-1} L_t(\omega, x'_t, \Delta x'_t) \right\}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\inf\{(h(\omega, a_0, a_T) + l(\omega, a'_0, a_T)) : (a_0, a_T) \in C(\omega) \cap C'(\omega)\}\right) \\
&= \mathbb{E}\left(\inf\{(h(\omega, a_0, a_T) + l(\omega, a'_0, a_T)) : (a_0, a_T) \in ri(C(\omega)) \cap int(C'(\omega))\}\right)
\end{aligned}$$

Esto es debido a que $C(\omega) \cap int(C'(\omega)) \neq \emptyset$ y eso implica que $ri(C(\omega)) \cap int(C'(\omega)) \neq \emptyset$ casi seguramente para cada ω.
Luego, tiene sentido suponer que $h(\omega, a_0, a_T) > -\infty \quad \forall (a_0, a_T)$ cs, ya que, si este no fuera el caso, se obtiene que tendría que ser $-\infty$ en $int(domh)$ y esto implicaría que el problema general tendría el valor $-\infty$ por lo hecho anteriormente y esto seria una contradicción con el hecho que existe una solución $\mathbf{x}$ para el problema general. Es así que se evita el caso $\infty - \infty$ cuando se suman l y h.
De esta forma, $\mathbf{x}$ resuelve el problema general si y solo si

$$\inf_{(a_0, a_T) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \{(h(\omega, a_0, a_T) + l(\omega, a_0, a_T))\}$$

es alcanzada en $(a_0, a_T) = (x_0(\omega), x_T(\omega))$

y el ínfimo en la definición de h para $(a_0, a_T) = (x_0(\omega), x_T(\omega))$ es alcanzado con $\mathbf{x}(\omega) = (x_0(\omega), \ldots, x_T(\omega))$ cs.
Esto, desde un punto de vista de subdiferenciales es equivalente a que casi seguramente $(0,0) \in \partial((l+h)(\omega, x_0(\omega), x_T(\omega))$ y como $C(\omega) \cap int(C'(\omega)) \neq \emptyset$ se tiene como consecuencia

$$\partial(l+h)(\omega, x_0(\omega), x_T(\omega)) = \partial l(\omega, x_0(\omega), x_T(\omega)) + \partial h(\omega, x_0(\omega), x_T(\omega)).$$

De esta forma existe $(b_0(\omega), -b_T(\omega)) \in \partial l(\omega, x_0(\omega), x_T(\omega))$ con $(-b_0(\omega), b_T(\omega)) \in \partial h(\omega, x_0(\omega), x_T(\omega))$ medibles. Efectivamente, ya que, si se define $A(\omega)$ dado por

$$A(\omega) = \{(\bar{b}_0, -\bar{b}_T) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n : (-\bar{b}_0, \bar{b}_T) \in \partial h(\omega, x_0(\omega), x_T(\omega)) \wedge (\bar{b}_0, -\bar{b}_T) \in \partial l(\omega, x_0(\omega), x_T(\omega))\}.$$

Por lo anterior se tiene que casi seguramente $A(\omega) \neq \emptyset$, y además se tiene que $\omega \to A(\omega)$ es de valores cerrados y medible, dado que $A(\omega) = (-\partial h(\omega, x_0(\omega), x_T(\omega))) \cap \partial l(\omega, x_0(\omega), x_T(\omega))$. Así, al aplicar los lemas 2.9 y 2.7 con F como la proyección sobre x_0, se obtiene que

$$F(A(\omega)) \subset F(\partial l(\omega, x_0(\omega), x_T(\omega))) \subset \partial f_0(\omega, x_0(\omega))$$

. Se tiene que $\partial f_0(\omega, x_0(\omega))$ es $\mathcal{A}_0$ -medible lo que implica que $F(A(\omega))$ es $\mathcal{A}_0$ -medible de valores cerrados, luego por el Lema 2.6 se concluye (de forma similar resulta para obtener $b_T(\omega)$). De esta forma el ínfimo

$$\inf_{(a_0, a_T) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n} \{h(\omega, a_0, a_T) + b_0(\omega) \cdot a_0' - b_T(\omega) \cdot a_T'\}$$

es alcanzado en $(x_0(\omega), x_T(\omega))$, y en consecuencia,

$$\inf_{x' \in (\mathbb{R}^n)^{T+1}} \{\sum_{t=0}^{T-1} L_t\left(\omega, x_t', \Delta x_t'\right) + b_0(\omega) x_0' - b_T(\omega) x_T'\}$$

es alcanzado en $x' = \mathbf{x}(\omega)$).
Se ha definido un nuevo problema, cuyo objetivo es utilizarlo de manera que se tenga $\mathbf{y}^* \in Ł^1$ de tal manera que se cumpla el teorema. Este corresponde a un problema convexo puntualmente, es decir, por cada ω si una solución es local, luego esta es una solución global. De esta forma, solo se requiere tomar atención a $\mathbf{x}' \in \mathbf{X}$ que satisfaga $\|\mathbf{x}'\| \leq \bar{\rho}$ donde $\bar{\rho} > \{\|\mathbf{x}\|, \|\bar{\mathbf{x}}\|\}$.
De esta forma, del Lema 3.1, con $\rho_t = \bar{\rho}$ para $t = 0, \ldots, T$, se obtiene la multifunción D definido en Lema 3.1 y vectores $\tilde{x} \in (\mathbb{R}^n)^{T+1}$ que satisfacen parte b) del Lema 3.1. Luego sea

$$f(\omega, \tilde{x}) = \begin{cases} \sum_{t=0}^{T-1} L_t\left(\omega, \tilde{x}_t, \Delta\tilde{x}_t\right) + b_0(\omega) \cdot \tilde{x}_0 - b_T(\omega) \cdot \tilde{x}_T & \text{si } \|x'\| \leq \bar{\rho} \\ +\infty & \text{si no .} \end{cases}$$

Luego, de la forma que se ha definido D, se tiene que $D(\omega) = domf(\omega, \cdot)$. Además, si $\widetilde{\mathbf{x}} \in D(\omega)$, luego

$$\begin{aligned}
|f(\omega, \widetilde{\mathbf{x}})| &= |\sum_{t=0}^{T-1} L_t\left(\omega, \widetilde{x}_t, \Delta\widetilde{x}_t\right) + b_0(\omega)\cdot\widetilde{x}_0 - b_T(\omega)\cdot\widetilde{x}_T| \\
&\leq \sum_{t=0}^{T-1} |L_t\left(\omega, \widetilde{x}_t, \Delta\widetilde{x}_t\right)| + |b_0(\omega)\cdot\widetilde{x}_0 - b_T(\omega)\cdot\widetilde{x}_T| \\
&\leq \sum_{t=0}^{T-1} \alpha_t(\omega) + \alpha_T(\omega)
\end{aligned}$$

donde, $\alpha_T(\omega) = |b_0(\omega)|\rho_0 + |b_T(\omega)|\rho_T \geq |b_0(\omega)\cdot\widetilde{x}_0 - b_T(\omega)\cdot\widetilde{x}_T|$. Por otro lado, dado que la función L_t es $\mathcal{A}_{t+1}$-normal entonces es $\mathcal{A}$-normal , luego f es $\mathcal{A}$-normal (por el Lema 2.2). De esta forma, para $\|\mathbf{x}'\| \leq \overline{\rho}$ implica que $|\mathbf{x}'(\omega)| \leq \overline{\rho}_t$ c.s y en consecuencia

$$f(\omega, \mathbf{x}'(\omega)) = \sum_{t=0}^{T-1} L_t\left(\omega, x'_t(\omega), \Delta x'_t(\omega)\right) + b_0(\omega)\cdot x'_0(\omega) - b_T(\omega)\cdot x'_T(\omega)$$

Dado que $\mathbf{x}$ es solución lo anterior es equivalente a que

$$\operatorname*{ínf}_{\mathbf{x}'\in\mathbf{X}} \mathbb{E}(f(\omega, \mathbf{x}'(\omega)))$$

es alcanzado en $\mathbf{x}' = \mathbf{x}$ si y solo si

$$\mathbb{E}\left(\operatorname*{ínf}_{x'\in(\mathbb{R}^n)^{T+1}} f(\omega, x')\right)$$

es alcanzado en $x' = \mathbf{x}(\omega)$, es decir puntualmente. Además, se tiene $\widetilde{\mathbf{x}} \in D(\omega)$ cuando $|\widetilde{\mathbf{x}} - \overline{\mathbf{x}}| \leq \delta$ y también $L_t(\omega, z_{t+1}, w_{t+1}) \leq \alpha_t(\omega)$ cuando $|z_{t+1} - \overline{x}_t| \leq \delta$ y $|w_{t+1} - \Delta\overline{x}_t| \leq \delta$ con $t = 0, \ldots, T-1$.

Luego, por [8, página 182] se puede concluir que existe $\mathbf{q} = (q_0, \ldots, q_T) \in Ł^1$ tal que $E^t q_t = 0$ y el problema de minimización

$$\operatorname*{ínf}_{x'\in(\mathbb{R}^n)^{T+1}} \{f(\omega, x') + q(\omega)x'\}$$

tiene solución en $x' = x(\omega)$ donde $\mathbf{x}$ es solución del problema anterior. Además, como $\|\mathbf{x}\| \leq \overline{\rho}$ implica $|\mathbf{x}(\omega)| \leq \overline{\rho}$.

Por definición de f se tiene

$$\operatorname*{ínf}_{x'\in(\mathbb{R}^n)^{T+1}} \{\sum_{t=0}^{T-1} L_t\left(\omega, x'_t(\omega), \Delta x'_t(\omega)\right) + b_0(\omega)\cdot x'_0(\omega) - b_T(\omega)\cdot x'_T(\omega) + \sum_{t=0}^{T} q_t(\omega)\cdot x'_t\}$$

se alcanza en $x' = \mathbf{x}(\omega)$, es decir,que $x' = \mathbf{x}(\omega)$ es solución del siguiente problema determinista dependiente de ω,

$$\inf_{x' \in (\mathbb{R}^n)^{T+1}} \{\sum_{t=0}^{T-1} L_t^{\omega}\left(x_t'(\omega), \Delta x_t'(\omega)\right) + l^{\omega}\left(x_0', x_T'\right)\} \tag{P_G^{ω}}$$

con $L_t^{\omega}\left(z_t, w_t\right) = L_t\left(\omega, z_t, w_t\right) - q_t(\omega) \cdot z_t$ y $l^{\omega}\left(a_0, a_T\right) = b_0(\omega) \cdot a_0 - (b_T(\omega) + q_T(\omega)) \cdot a_T$.
Luego, para el caso determinista (ver [9, Theorem 1]) se tiene un vector $\widetilde{p} \in (\mathbb{R}^n)^{T+1}$ tal que

$$(\widetilde{p}_0, -\widetilde{p}_T) \in \partial l^{\omega}(x_0(\omega), x_T(\omega)) \tag{3-44}$$

$$(\Delta \widetilde{p}_t, \widetilde{p}_t) \in \partial L_t^{\omega}(x_0(\omega), x_T(\omega)). \tag{3-45}$$

Más aún, se tiene

$$\sum_{t=0}^{T} |\widetilde{p}_t| \leq 2[\sum_{t=0}^{T} \alpha_t(\omega) - j^{\omega}(x(\omega))]/\delta, \tag{3-46}$$

donde $j^{\omega}(x(\omega)) = \sum_{t=0}^{T-1} L_t^{\omega}\left(x_t(\omega), \Delta x_t(\omega)\right) + l^{\omega}\left(x_0(\omega), x_T(\omega)\right)$
Ahora, sea $\Gamma(\omega)$ el conjunto de $\widetilde{p}$ descritos por las ecuaciones (3-44) y (3-45). De esta forma se tiene que este conjunto es distinto de vacío y acotado. Luego, el objetivo es establecer la existencia de $\mathbf{p}$ que sea $\mathcal{A}$-medible de manera que se tenga $p(\omega) \in \Gamma(\omega)$ cs. Para esto, por el Teorema 2.6 solo basta mostrar que la multifunción $\Gamma : \Omega \rightrightarrows (\mathbb{R}^n)^{T+1}$ tal que $\omega \to \Gamma(\omega)$ es de valores cerrados y $\mathcal{A}$-medible. Para esto se usa la siguiente representación

$$\Gamma(\omega) = A^{-1}(C_0(\omega) \times \ldots \times C_t(\omega) \times \ldots \times C_T(\omega))$$

donde

$$\begin{aligned} C_0(\omega) &:= \partial l^{\omega}\left(x_0(\omega), x_T(\omega)\right) \\ C_{t+1}(\omega) &:= \partial L_t^{\omega}\left(x_t(\omega), \Delta x_t(\omega)\right) \text{ con } t = 0, \ldots T-1, \end{aligned}$$

y A es una función tal que $\mathbf{p} = (p_0, p_1, \ldots, p_T) \to A(\mathbf{p}) = (p_0, p_T, p_0, \Delta p_0, \ldots, p_{T-1}, \Delta p_{T-1})$.
Es fácil ver que A es lineal y como cada C_t $(t = 0, \ldots T)$ es cerrado, se concluye que $\Gamma(\omega)$ es cerrado. Además como los subdiferenciales preservan medibilidad (Lema 2.10), se concluye que $\Gamma(\omega)$ es $\mathcal{A}$-medible.
De esta forma se ha establecido una función $\mathbf{p}$ que es $\mathcal{A}$-medible, tal que $\mathbf{p}(\omega) \in \Gamma(\omega)$.

También se tiene

$$\begin{aligned}
|j^{\omega}(\mathbf{x}(\omega))| &= |\sum_{t=0}^{T-1} L_t^{\omega}\left(x_t(\omega), \Delta x_t(\omega)\right) + l^{\omega}\left(x_0(\omega), x_T(\omega)\right)| \\
&\leq \sum_{t=0}^{T-1} |L_t^{\omega}\left(x_t(\omega), \Delta x_t(\omega)\right)| + |l^{\omega}\left(x_0(\omega), x_T(\omega)\right)| \\
&\leq \sum_{t=0}^{T-1} |L_t\left(\omega, x_t(\omega), \Delta x_t(\omega)\right) - q_t(\omega)\cdot x_t(\omega)| + |b_0(\omega)\cdot x_0(\omega) - (b_T(\omega)+q_T(\omega))\cdot x_T(\omega)| \\
&\leq \sum_{t=0}^{T} |q_t|\rho_t + \alpha_t(\omega).
\end{aligned}$$

Junto con lo anterior, se tiene

$$\begin{aligned}
\partial l^{\omega}\left(x_0(\omega), x_T(\omega)\right) &= \left(b_0(\omega), -b_T(\omega) - q_T(\omega)\right) \\
\partial L_t^{\omega}\left(x_t(\omega), \Delta x_t(\omega)\right) &= \partial L_t(\omega, x_t(\omega), \Delta x_t(\omega)) - (q_t(\omega), 0) \text{ con } t = 0, \ldots T-1.
\end{aligned}$$

Esto implica que

$$\begin{aligned}
p_0(\omega) &= b_0(\omega) \\
p_T(\omega) &= -b_T(\omega) - q_T(\omega) \\
(\Delta p_t(\omega) + q_t(\omega), p_t(\omega)) &\in \partial L_t(\omega, x_t(\omega), \Delta x_t(\omega) \text{ con } t = 0, \ldots T-1.
\end{aligned}$$

Por (3-46) se concluye que $\mathbf{p} \in Ł^1$. Para finalizar, se define $y_t^* = \mathbb{E}^{t+1}(p_t - q_t)$ con $t = 0, \ldots T-1$ e $y_T^* = (p_T - q_T)$. Luego y_t^* es $\mathcal{A}_{t+1}$-medible y .

$$\mathbb{E}^t y_t^* = \mathbb{E}^t p_t - \mathbb{E}^t q_t = \mathbb{E}^t p_t \text{ con } t = 0, \ldots T$$

De esta forma,

$$(\mathbb{E}^0 y_0^*(\omega), -\mathbb{E}^T y_T^*(\omega)) = (b_0(\omega), b_T(\omega))$$

y también

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}^{t+1}(\Delta p_t(\omega) + q_t(\omega)) &= \mathbb{E}^{t+1}(p_{t+1}(\omega) - p_t(\omega) + q_t(\omega)) \\
&= \mathbb{E}^{t+1}(p_{t+1}(\omega) - p_t(\omega) + q_t(\omega) + q_{t+1}(\omega) - q_{t+1}(\omega)) \\
&= \mathbb{E}^{t+1}(y_{t+1}^*(\omega) - y_t^*(\omega) + q_{t+1}(\omega)) \\
&= \mathbb{E}^{t+1}(\Delta y_t^*(\omega) + q_{t+1}(\omega)) \\
&= \mathbb{E}^{t+1}(\Delta y_t^*(\omega)).
\end{aligned}$$

Finalmente, la multifunción $\omega \to \partial L_t(\omega, x_t(\omega), \Delta x_t(\omega))$ es $\mathcal{A}_{t+1}$-medible, para $t = 0, \ldots, T-1$ dado que las funciones L_t, x_t y Δx_t son $\mathcal{A}_{t+1}-$medibles. Además como esta es una multifunción de valores convexos se toma esperanza condicional respecto a $\mathcal{A}_{t+1}$ y usando la anterior se concluye que

$$\mathbb{E}^{t+1}(\Delta y_t^*(\omega)), \mathbb{E}^{t+1}(p_t(\omega))) \in \partial L_t(\omega, x_t(\omega), \Delta x_t(\omega)) \text{ con } t = 0, \dots T-1,$$

lo cual permite concluir.

Observación 3.7. Si $l(\omega, \cdot, \cdot)$ es continua en $(x_0(\omega), x_T(\omega))$ para cada ω, entonces se tiene que $\partial l(\omega, x_0(\omega), x_T(\omega))$ es acotada y distinto de vacío. En particular l es llamado un mapeo de Carathéodory.

El teorema anterior es establecido en [9] para el caso particular en que l toma valores deterministas y no depende de ω. Los esfuerzos en este caso son establecer supuestos adicionales para asegurar la medibilidad de b_0 y b_T dado que en [9] son deterministas y por tanto vista como funciones, son medibles y de esta manera se utiliza en cierta parte de la demostración argumentos similares a los establecidos en [9].

3.3. Teoremas Principales

Recuerde que $V_\tau(\xi) = \mathrm{Val}(P_\tau(\xi))$ y se define $W_\tau(\eta) = \mathrm{Val}(D_\tau(\eta))$, luego con lo visto en las secciones anteriores se pueden enunciar los siguientes teoremas

Teorema 3.3. *Considere para el problema (P_G) el caso $l(\omega, \xi, \xi') = g(\omega, \xi') - \langle \xi, \eta \rangle$ e $\mathbf{y}^* \in \partial V_\phi(0)$, luego $\eta \to W_\tau(\eta)$ es la conjugada de $\xi \to V_\tau(\xi)$ para todo $\tau \in \{0, \dots, T\}$ fijo.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $\tau = 0$. Al usar la notación del problema (P_G), si $l(\omega, \xi, \xi') = g(\omega, \xi') - \langle \xi, \eta \rangle$, así $l^*(\omega, r, r') = g^*(\omega, r')$ cuando $r = -\eta$, $+\infty$ en otro caso, en consecuencia se obtiene

$$\begin{aligned} -Val(P) &= \sup_\xi \{\langle \xi, \eta \rangle - V_0(\xi)\} \\ Val(D) &= W_0(\eta) \end{aligned}$$

como $\mathbf{y}^* \in \partial V_\phi(0)$ no se tiene salto de dualidad y en consecuencia

$$\sup_\xi \{\langle \xi, \eta \rangle - V_0(\xi)\} = -Val(P) = Val(D) = W_0(\eta).$$

Teorema 3.4. *Considere las hipótesis del Teorema 3.2, luego se obtiene que $\eta \to W_\tau(\eta)$ es la conjugada de $\xi \to V_\tau(\xi)$ para todo $\tau \in \{0, \dots, T\}$ fijo.*

Demostración. Sin pérdida de generalidad, supóngase que $\tau = 0$. Del teorema anterior, se concluye que l tiene la forma $l(\omega, \xi, \xi') = f_0(\omega, \xi) + f_T(\omega, \xi')$, entonces por teoremas 3.2 y 3.1 se tiene $\mathbf{y}^* \in \partial V_\phi(0)$ y esto significa que no se tiene salto de dualidad, por lo tanto

$$\sup_{\xi}\{\langle \xi, \eta \rangle - V_0(\xi)\} = -Val(P) = Val(D) = W_0(\eta).$$

∎

Observación 3.8. Note que aquí es fácil deducir una relación sobre los subdiferenciales, la cual es

$$\eta \in \partial V_\tau(\xi) \Longleftrightarrow \xi \in \partial \overline{V}_\tau(\eta) \Longleftrightarrow V_\tau(\xi) + \overline{V}_\tau(\eta) = \langle \xi, \eta \rangle \, .$$

4 Aplicaciones

Tal como se ha explicado, el tipo de problemas que son cubierto en este trabajo tiene un amplio campo de aplicaciones. En este trabajo, se abordan dos ejemplos, el primero es un problema denominado Problema lineal cuadrático, el cual es un problema de control a costo mínimo. El segundo ejemplo que se quiere establecer es un problema de portafolios sobre un mercado a n pasos. Además, se discute como afectan estos sobre ciertas características de mercado como lo es el arbitraje y la completitud.

4.1. Problema Lineal Cuadrático

Sean A, A_0, P, Q matrices $n \times n$, B, B_0 matrices $n \times m$, R una matriz $m \times m$ y $c \in \mathbb{R}^n$. Se establece el problema de costo mínimo dado por

$$\mathbb{E}\left(\sum_{t=0}^{T-1}\left[z_t^\top P z_t + u_t^\top R u_t\right]\right) + \mathbb{E}\left(z_T^\top Q z_T\right)$$

sobre $\{z_0, \dots, z_T\} \subseteq \mathbf{X}_1$ y $\{u_0, \dots, u_{T-1}\} \subseteq \mathbf{U}_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ tales que

$$\begin{cases} z_{t+1} = (A_0 + \alpha_t A) z_t + (B_0 + \beta_t B) u_t, & \text{cs } t \in [0, T-1], \\ z_0 = \xi_0 + \gamma c. \end{cases} \tag{LQ}$$

Se considera P, Q y R matrices definidas positivas, $\mathbf{X}_1 \subseteq \mathbb{R}^n$ y $\mathbf{U}_1 \subseteq \mathbb{R}^m$ conjuntos no vacíos, cerrados y convexos. Los ruidos γ, $\{\alpha_0, \dots, \alpha_{T-1}\}$ y $\{\beta_0, \dots, \beta_{T-1}\}$ son variables aleatorias 1-dimensional definidas sobre un espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$, tales que $\mathbb{E}(\alpha_t) = \mathbb{E}(\beta_t) = \mathbb{E}(\gamma) = 0$ para $t = 0, \dots, T-1$ y

$$\mathbb{E}(\alpha_t \alpha_s) = \mathbb{E}(\beta_t \beta_s) = \begin{cases} 1 & \text{si } t = s \\ 0 & \text{si no.} \end{cases} \qquad \forall t, s \in \{0, \dots, T-1\}.$$

Ciertamente, por definición z_{t+1} es una variable aleatoria que depende sobre γ, $\alpha_0, \dots, \alpha_t$ y $\beta_0, \dots, \beta_t$, lo que significa que z_{t+1} debe ser $\mathcal{A}_t$-medible, donde

$$\mathcal{A}_t = \sigma(\gamma, \alpha_0, \dots, \alpha_t, \beta_0, \dots, \beta_t).$$

De esto último se desprende inmediatamente que no se pierde información a medida que se avanza en el tiempo. A continuación, se verá que este problema confirma los supuestos realizados anteriormente, por lo que se debe escribir la forma de Definición 2.3. Para esto, se define

$$
\begin{aligned}
\widetilde{L}_t(\omega, x_t, v_t) &= z_t^\top P z_t + \delta_{\mathbf{X}_1}(z_t) + u_t^\top R u_t + \delta_{\mathbf{U}_1}(u_t) + \delta_C(\omega, (x_t, v_t)) \\
\widetilde{g}(\omega, x_T) &= z_T^\top Q z_T,
\end{aligned}
$$

donde $\delta_C(\omega, (x_t, v_t)) = \delta_{C(\omega)}((x_t, v_t))$ y

$$
C(\omega) = \{(x_t, v_t) : w_t = (A_0 + \alpha_t(\omega)A - 1)z_t + (B_0 + \beta_t(\omega)B)u_t\},
$$

con $x_t = (z_t, y_t)$ y $v_t = (w_t, u_t)$.

Por otro lado, dada las suposiciones que se establecieron para las matrices y los conjuntos $\mathbf{X}_1, \mathbf{U}_1$, implica que las funciones $\widetilde{L}_t$ y $\widetilde{g}$, cumple con la suposiciones realizadas en (2-1). Además, dada las propiedades de las matrices P, R, Q, se puede apreciar que $\widetilde{L}_t, \widetilde{g} \geq 0$.

Además, al definir $U : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^m, X : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$ dado respectivamente por $U(\omega) = \mathbf{U}_1$, $X(\omega) = \mathbf{X}_1$ (multifunciones constantes), luego por visto en Observación 2.4 estas son medibles y por lo tanto, gracias a Lema 2.4, las funciones $\delta_X(\cdot)$ y $\delta_U(\cdot)$ son integrando normales.

Además, $(A_0 + \alpha_t(\omega)A - 1)z_t + (B_0 + \beta_t(\omega)B)u_t - w_t$ es un integrando normal, dado que cada término que suma es un integrando normal (la mayoría son integrando normales constantes y como α_t y β_t son ruidos blancos entonces un integrando normal por los ruidos sigue siendo integrando normal), finalmente la suma finita de integrandos normales es un integrando normal. De esta forma $C : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^n$, dado por $C(\omega)$ es de valores cerrados y medible, por lo tanto $\delta_C(\omega, \cdot)$ es un integrando normal.

Ahora se procede a calcular las conjugadas de las funciones $\widetilde{L}_t$ y $\widetilde{g}$, para así determinar el dual de este problema que será de la forma dada por el problema $(\mathrm{D}_\tau(\eta))$.

Cálculo de $\widetilde{L}_t^*$

Por definición, la conjugada de la función $\widetilde{L}_t$ está dada por

$$\begin{aligned}
\widetilde{L}_t^*(\omega, x_t^*, v_t^*) &= \sup_{x_t, v_t}\{x_t^* \cdot x_t + v_t^* \cdot v_t - L_t(\omega, x_t, v_t)\} \\
&= \sup_{x_t, v_t}\{z_t^* \cdot z_t + y_t^* \cdot y_t + w_t^* \cdot w_t + u_t^* \cdot u_t - z_t^\top P z_t - \delta_X(z_t) - u_t^\top R u_t - \delta_U(u_t) \\
&- \delta_C(\omega, (x_t, v_t))\} \\
&= \sup_{x_t, v_t}\{z_t^* \cdot z_t + y_t^* \cdot y_t + w_t^* \cdot ((A_0 + \alpha_t(\omega)A - 1)z_t + (B_0 + \beta_t(\omega)B)u_t) + u_t^* \cdot u_t \\
&- z_t^\top P z_t - \delta_X(z_t) - u_t^\top R u_t - \delta_U(u_t)\} \\
&= \sup_{x_t, v_t}\{z_t^* \cdot z_t + y_t^* \cdot y_t + w_t^* \cdot A_0 z_t + w_t^* \cdot \alpha_t(\omega) A z_t + w_t^* \cdot -z_t + w_t^* \cdot B_0 u_t \\
&+ w_t^* \cdot \beta_t(\omega) B u_t + \langle u_t^*, u_t\rangle - z_t^\top P z_t - \delta_X(z_t) - u_t^\top R u_t - \delta_U(u_t)\} \\
&= \sup_{x_t, v_t}\{(z_t^* + A_0^* w_t^* + \alpha_t(\omega) A^* w_t^* - w_t^*) \cdot z_t + (u_t^* + B_0^* w_t^* + \beta_t(\omega) A^* w_t^*) \cdot u_t + y_t^* \cdot y_t \\
&- z_t^\top P z_t - \delta_X(z_t) - u_t^\top R u_t - \delta_U(u_t)\}
\end{aligned}$$

Por otro lado,

$$f_1(z_t) = z_t \cdot P z_t \tag{4-1}$$

luego, $f_1^*(z_t^*)$, está dada por

$$f_1^*(z_t^*) = \sup_{z_t}\{z_t^* \cdot z_t - f_1(z_t)\} \tag{4-2}$$

como f_1 es Gateaux-diferenciable, entonces $z_t^* \cdot z_t - f_1(z_t)$ es Gateaux-diferenciable, continua y convexa, luego este supremo se alcanza en $z_t = \frac{1}{2}P^{-1}z_t^*$, en consecuencia

$$f_1^*(z_t^*) = \frac{1}{4}\left(z_t^* \cdot P^{-1} z_t^*\right). \tag{4-3}$$

Sea $f_2 = \delta_X(z_t)$, luego $f_2^*(z_t^*)$, está dada por

$$\begin{aligned}
f_2^*(z_t^*) &= \sup_{z_t}\{z_t^* \cdot z_t - f_2(z_t)\} && (4\text{-}4) \\
&= \sup_{z_t \in \mathbf{X}_1}\{z_t^* \cdot z_t\} && (4\text{-}5) \\
&= \sigma_{\mathbf{X}_1}(z_t^*) && (4\text{-}6)
\end{aligned}$$

$\sigma_{\mathbf{X}_1}(z_t^*)$ es denominada como función soporte.
Como producto de lo anterior, al definir $f_3(u_t) = u_t \cdot R u_t$ y $f_4(u_t) = \delta_{\mathbf{U}_1}(u_t)$, se concluye que

$$f_3^*(z_t^*) = \frac{1}{4}\left(u_t^* \cdot R^{-1} u_t^*\right) \tag{4-7}$$

$$f_4^*(z_t^*) = \sigma_U(u_t^*). \tag{4-8}$$

Entonces al aplicar lo anterior al cálculo de $\widetilde{L}^*$, se tiene

$$\begin{aligned}\widetilde{L}^*(\omega, x_t^*, v_t^*) &= \sup_{x_t, v_t}\{(z_t^* + A_0^* w_t^* + \alpha_t(\omega) A^* w_t^* - w_t^*) \cdot z_t + (u_t^* + B_0^* w_t^* + \beta_t(\omega) A^* w_t^*) \cdot u_t + y_t^* \cdot y_t\} \\ &- z_t^\top P z_t - \delta_X(z_t) - u_t^\top R u_t - \delta_U(u_t)\} \\ &= \sup_{z_t}\{(z_t^* + A_0^* w_t^* + \alpha_t(\omega) A^* w_t^* - w_t^*) \cdot z_t - z_t^\top P z_t - \delta_X(z_t)\} \\ &+ \sup_{u_t}\{(u_t^* + B_0^* w_t^* + \beta_t(\omega) A^* w_t^* \cdot u_t - u_t^\top R u_t - \delta_U(u_t)\} \\ &+ \sup_{y_t}\{y_t^* \cdot y_t\} \\ &= (f_1 + f_2)^*(z_t^* + A_0^* w_t^* + \alpha_t(\omega) A^* w_t^* - w_t^*) + (f_3 + f_4)^*(u_t^* + B_0^* w_t^* + \beta_t(\omega) A^* w_t^*)\end{aligned}$$

con la condición $y_t^* = 0$, luego como f_1, f_3 son continuas y se desarrolla el problema en dimensión finita, se obtiene

$$\begin{aligned}\widetilde{L}^*(\omega, x_t^*, v_t^*) &= (f_1 + f_2)^*(z_t^* + A_0^* w_t^* + \alpha_t(\omega) A^* w_t^* - w_t^*) + (f_3 + f_4)^*(u_t^* + B_0^* w_t^* + \beta_t(\omega) A^* w_t^*) \\ &= f_1^* \Box f_2^*(z_t^* + A_0^* w_t^* + \alpha_t(\omega) A^* w_t^* - w_t^*) + f_3^* \Box f_4^*(u_t^* + B_0^* w_t^* + \beta_t(\omega) A^* w_t^*)\end{aligned}$$

donde $\Box$ denota la inf-convolución, es decir, si Y es un espacio de Banach y $v_1, v_2 : Y \to \overline{\mathbb{R}}$ funciones propias. Luego

$$v_1 \Box v_2(x) = \inf_{y \in Y}\{v_1 \cdot (x - y) + v_2(y)\}$$

De la misma forma que se ha utilizado para obtener (4-3), se puede deducir que $\widetilde{g}(x_T^*) = \frac{1}{4}\left(z_T^* \cdot Q^{-1} z_T^*\right)$
De esta forma, el problema dual es caracterizado por

$$\begin{aligned}\text{ínf } \mathbb{E}(\sum_{t=0}^{T-1} f_1^* \Box \sigma_{\mathbf{X}_1}(\mathbb{E}^{t+1}(\Delta z_t^*(\omega)) + A_0^* \mathbb{E}^{t+1}(w_t^*(\omega)) + \alpha_t(\omega) A^* \mathbb{E}^{t+1}(w_t^*(\omega)) - \mathbb{E}^{t+1}(w_t^*(\omega))) \\ + f_3^* \Box \sigma_{\mathbf{U}_1}(\mathbb{E}^{t+1}(u_t^*) + B_0^* \mathbb{E}^{t+1}(w_t^*) + \beta_t(\omega) A^* \mathbb{E}^{t+1}(w_t^*))) + \mathbb{E}(\frac{1}{4} \mathbb{E}^T(x_T^*(\omega))^\top Q^{-1} \mathbb{E}^T(x_T^*(\omega)))\end{aligned}$$

sobre $\mathbf{x}^* \in \mathcal{K}_\mathbf{0}$ tal que $\mathbb{E}(x_0^*(\omega)) = -\eta$

donde A^*, A_0^*, B^*, B_0^* al estar en dimensión finita simplemente corresponde a la transpuesta de las matrices A, A_0, B, B_0 respectivamente.
Suponga que los conjuntos $F(\omega, x_t), Z(\omega)$ y $C_{\widetilde{g}}(\omega)$ definidos en (2-2) son distintos de vacío, en particular para el caso de $C_{\widetilde{g}}(\omega) = C_{\widetilde{g}}$, dado que $\widetilde{g}$ no depende de ω explícitamente y es distinta de vacío por la continuidad, los otros casos se tendrán para cuando se cumpla la dinámica establecida en el problema y en particular para cuando $det(A_0 + \alpha_t(\omega) A - 1)) \neq 0$ cs.

Por otro lado, notar que este problema satisface la condición recursiva acotada, ya que si para $z_t \in Z_t(\omega)$ y $|z_t| \leq \rho, w_t \in F_t(\omega, z_t)$ y $|w_t| \leq \sigma$, luego

$$\widetilde{L}_t(\omega, x_t, v_t) = z_t^\top P z_t + u_t^\top R u_t \tag{4-9}$$

lo cual ya es una función sumable. Además, la parte b) de la definición se cumple fácilmente, ya que, para $x_t \in Z_t$ y $|x_t| \leq \rho$ se puede escoger Δx_t que debe pertenecer a $F_t(\omega, x_t)$ por construcción, entonces se tiene $x_{t+1} \in Z_{t+1}$ y $|x_t + \Delta x_t| = |x_{t+1}|\rho'$ y se puede pedir que $\mathbf{X_1}$ sea compacto para que no se dependa de ω (donde $\rho, \rho' > 0$).
También satisface trivialmente la casi seguramente la condición de factibilidad interior, dado que la función $\widetilde{g}$ es continua y si $x_t \in Z_t(\omega)$ y $v_t \in F_t(\omega, x_t)$ entonces las funciones $\widetilde{L}_t$ también son continuas.
Finalmente se quiere mostrar que $Z_t(\omega)$ es $\mathcal{A}_t-$medible, pero esto es obtenido, dado que $\widetilde{L}_t$ por lo dicho anteriormente es $\mathcal{A}_t-$integrando normal, luego F_t sera $\mathcal{A}_t-$medible y por tanto como Z_t se puede ver como el dominio de F_t implica que Z_t es $\mathcal{A}_t-$medible. Por tanto, como $\widetilde{g}$ no depende explícitamente de ω y $\widetilde{g}$ es continua se tiene las condiciones del Teorema 3.4, por tanto, no se tiene salto de dualidad.

4.2. Optimización de Portafolios

Otro punto de vista interesante en el que se puede aplicar lo desarrollado en este trabajo es a la matemática financiera, específicamente a la evaluación de derivados financieros, optimización de portafolios, entre otras. Durante años el análisis convexo se ha incorporado de forma integral a la matemática financiera, desarrollando en varios contextos problemas de optimización y por tanto lo desarrollado en este trabajo se complementa de buena manera.
Uno de los elementos que se utilizan en estos temas son procesos de precios de activos, en este trabajo se entenderá un activo como un derecho económico o inversión para quien entrega un bien, además estos pueden ser entendidos como un mecanismo de financiamiento para quien los emite, algunos ejemplos comunes son bonos, divisas, pagarés, etc.
De manera fundamental estos tipos de problemas son interesantes dado que cambio en los activos subyacentes (puede ser de manera aleatoria) implica cambios en los derivados financieros.
Los procesos de precios de activos que se consideran son los dados por el modelo a un paso (con $T = 1$), es decir se considera los procesos $S : \Omega \times I \to \mathbb{R}_+^{d+1}$, con $I = [0, T] \cap \mathbb{N}$. Usualmente, se suele omitir el término ω en $S(\omega, t)$, denotando simplemente $S(t)$. Además, en primer lugar, solo se considera el modelo a un paso. En el instante $t = 0$, el término $S(0)$ la mayoría de las veces es conocido. Por otro lado, propio de la estructura del mercado, no todos los procesos de activo de precios se considera estocásticos, por lo general se asume que el proceso $S^0(t)$ (donde $S^0(t)$, denota la primera componente del proceso S en el instante t) es lo que se llama de manera general un proceso de precio de un activo libre de riesgo, donde en el caso del modelo a un paso se tiene $S^0(0) = 1$ y $S^0(1) = 1 + rT = 1 + r$, donde r se puede entender como una tasa de interés y de esta manera S^0 se puede entender como un bono.
Se define $h : \Omega \times I \to \mathbb{R}^{d+1}$ un vector de portafolios en donde cada componente determina la proporción de n activos a obtener en el tiempo t. En caso del modelo a un paso, solo se tiene un portafolio elegido por algún inversionista en el tiempo $t = 0$.

Definición 4.1. *Se define el proceso de valor $M^h(\cdot)$ de un portafolio h, dado por*

$$M^h(t) = S(t) \cdot h = \sum_{i=0}^{d} S^i(t)h^i. \tag{4-10}$$

Para $t = 0$,

$$M^h(0) = S(0) \cdot h = h^0 + \sum_{i=1}^{d} S^i(t)h^i \tag{4-11}$$

Donde, se puede interpretar en este tiempo el precio del portafolio h y para $t = T = 1$

$$M^h(T) = S(T) \cdot h = h^0(1 + r) + \sum_{i=1}^{d} S^i(T)h^i \tag{4-12}$$

De manera general un supuesto que se realiza es el hecho que el portafolio h es auto-financiable, es decir, si para la compra de una nueva cartera de un instante de tiempo a otro debe ser financiado únicamente por venta de activos ya en el portafolio o en otras palabras, no se incurre en gastos extras al vender o comprar un portafolio.

Definición 4.2. *Una oportunidad de arbitraje es un portafolio auto-financiable h con un tiempo de maduración T tal que*

$$M^h(0) = 0 \quad c.s \tag{4-13}$$

$$\mathbb{P}(M^h(T) \geq 0) = 1 \tag{4-14}$$

$$\mathbb{P}(M^h(T) > 0) > 0 \tag{4-15}$$

Además, se dirá que el mercado financiero está libre de arbitraje si este no tiene oportunidades de arbitraje.

Observación 4.1. La definición anterior puede ser generalizada a un proceso M dependiente S distinto al modelo a un paso.

De manera más intuitiva las ecuaciones anteriores describen que no importando que se comience con 0 valor monetario, en el tiempo final se es capaz de generar dinero, ganancias, es decir no se está tomando ningún tipo de riesgo al invertir en los activos.
Con lo anterior, considérese una función $u : dom(u) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ continua, creciente y estrictamente cóncava ($-u$ estrictamente convexa), la que se denominará función de utilidad. Ahora, sitúese en la situación que un inversionista quiere invertir con un presupuesto limitado en un mercado financiero, u una función de utilidad que refleja las preferencias del inversionista. Entonces de esta manera la elección de un portafolio puede estar basada en la utilidad esperada, con una restricción de presupuesto, es decir el problema es

$$\begin{cases} \text{máx}_{h\in\mathbb{R}^{n+1}} \mathbb{E}(u(M^h(T))) \\ \text{s.t } M^h(0) \leq B \end{cases} \tag{4-16}$$

donde B es el presupuesto disponible.
Por un lado se debe tener que $M^h(T)$ debe estar en el domino de la función de utilidad, en caso contrario se considera que el valor de este problema es $-\infty$, por otro lado, en algunos contextos se puede considerar otra restricción y es que el valor del portafolio sea mayor a una cierta cantidad, que refleja lo que el inversionista quiere obtener como ganancia. Sin embargo, eso hace más restrictivo el problema por lo que no se considerará por ahora.
Notar que, en este caso, se puede remover la restricción de presupuesto considerando un factor de descuento a la ganancia neta, es decir para u portafolio h se tiene

$$\frac{1}{1+r}M^h(T) - M^h(0) = h \cdot y \tag{4-17}$$

Con $y = (0, y_1, \cdot, y_d)$ e $y^i = \frac{S^i(T)}{1+r} - S^i(0)$ con $i = 1, \cdot, d$

Además para un portafolio h tal que $h \cdot S(0) < B$, luego agregando una inversión libre de riesgo $B - h \cdot S(0) > 0$, se puede obtener un portafolio mucho mejor (en el sentido de la utilidad) dado por $(h^0 + B - h \cdot S(0), h^1, \cdot, h^d)$, es por esto que se concentra los esfuerzos en portafolios tal que $h \cdot S(0) = B$, es decir, $M^h(0) = B$.
De la ecuación se obtiene que

$$M^h(T) = (1 + r)(y + B) \tag{4-18}$$

De esta forma se puede definir $\overline{u}(y) = u((1 + r)(y + B))$. La función $\overline{u}$, cumple es una función de utilidad, dado que es la composición de una función de utilidad con una función lineal. De esta forma se tiene un problema de optimización sin restricciones.
Este problema es interesante porque bajo ciertas hipótesis en la función de ganancia u se puede establecer una medida de martingala equivalente y esto por el primer teorema fundamental de valorización de activos implica que es libre de arbitraje. Ahora, usando la idea fundamental de lo expuesto anteriormente, y extendiendo esta idea al contexto de este trabajo, considere $u : \Omega \times dom(u) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ continua, creciente para cada $\omega \in \Omega$ y un integrando estrictamente cóncavo, es decir $-u$ integrando estrictamente convexo. Y además se considera un mercado dado por el modelo a n pasos, $S : \Omega \times I \to \mathbb{R}^{d+1}_+$, con $I = [0, T]$, la diferencia es que T no es necesariamente igual a 1, luego existen $t_0 = 0 < t_1 < \ldots, t_j < \ldots < t_n = T$ (partición del intervalo I) en donde de un tiempo t_j a un tiempo t_{j+1} sigue el modelo a un paso, nuevamente se tiene que $S(0) = s$ la mayoría de las veces es conocido. Por otro lado, propio de la estructura del mercado, no todos los procesos de activo de precios se considera estocásticos, por lo general se asume que $S^0(t)$ es lo que se llama de manera general un proceso de precio de activo libre de riesgo, donde en el caso del modelo a n pasos, se tiene $S^0(0) = 1$, $S^0(t_1) = 1(1 + r\frac{T}{n})$, de forma general

$$S^0(t_j) = 1(1 + r\frac{T}{n})^j. \tag{4-19}$$

Se define $\mathbf{h} : \Omega \times I \to \mathbb{R}^{d+1}$ un vector de portafolios en donde cada componente determina la proporción de $d + 1$ activos a obtener en el tiempo $t \in \{t_0, t_1, \ldots t_j, \ldots, t_n\}$, en caso del modelo a un paso solo se tiene un portafolio elegido por algún inversionista en el tiempo $t = 0$, pero en el caso a n pasos, $\mathbf{h}$ depende de las decisiones hechas en cada instante de tiempo, luego dada la interpretación los portafolios es razonable pensar (usándose la definición de espacio de proceso de toma de decisiones no anticipativo) en que $\mathbf{h} \in \mathbf{X}$, con $\mathcal{A}_{t_j} = \sigma(S(t), 0 \leq t \leq t_j)$ (la $\sigma-$álgebra generada por los procesos S hasta el tiempo t_j), es fácil ver qué $\mathcal{A}_0$ es la $\sigma-$álgebra trivial si $S(0)$ es determinista (de aquí se deriva el hecho de porque en el problema anterior la maximización simplemente es sobre $\mathbb{R}^{d+1}$ y además es evidente que $\mathcal{A}_0 \subset \mathcal{A}_{t_1} \subset \ldots \subset \mathcal{A}_{t_j} \subset \ldots \subset \mathcal{A}_T$.

Para este contexto, el proceso de valor $M^{\mathbf{h}}(\cdot)$ de un portafolio h, es dado por

$$M^{\mathbf{h}}(t) = S(t) \cdot \mathbf{h}_t = \sum_{i=0}^{d} S^i(t) h_t^i \tag{4-20}$$

Anteriormente se ha tomado el supuesto que el portafolio **h** es autofinanciable, es decir, si para la compra de una nueva cartera de un instante de tiempo a otro debe ser financiado únicamente por venta de activos ya en el portafolio.

Definición 4.3. *Un portafolio es auto-financiable si*

$$S(t_j) \cdot h_{t_{j-1}} = S(t_j) \cdot h_{t_j} \tag{4-21}$$

$S(t_j) \cdot h_{t_{j-1}}$ corresponde al capital que se obtiene al término del periodo $[t_{j-1}, t_j[$, usándose un portafolio $h_{t_{j-1}}$ "desarrollado " en el instante t_{j-1}. Luego, la igualdad dada en (4-21) dice que $S(t_j) \cdot h_{t_{j-1}}$ debe ser igual al capital que se invertirá en el instante t_j cuando se defina el nuevo portafolio h_{t_j} que se mantendrá durante el siguiente período $[t_j, t_{j+1}[$.
Con esto y lo expuesto respecto al presupuesto B para el caso del modelo a un paso, se establece en este caso que $M^{\mathbf{h}}(0) = B$.
Con esto se define el problema de maximización de utilidad, dada por

$$\begin{cases} \sup_{\mathbf{h} \in \mathbf{X}} \mathbb{E}(u(V^{\mathbf{h}}(T))) \\ \text{s.t } S(t_j) \cdot h_{t_{j-1}} = S(t_j) \cdot h_{t_j} \\ \quad M^{\mathbf{h}}(0) = B. \end{cases} \tag{4-22}$$

Lo cual es equivalente a

$$\begin{cases} \sup_{\mathbf{h} \in \mathbf{X}} \mathbb{E}(u(\omega, h_T)) \\ \text{s.t } S(t_j) \cdot h_{t_{j-1}} = S_{t_j} \cdot h_{t_j} \\ \quad s \cdot h_0 = B. \end{cases} \tag{4-23}$$

Luego, con el hecho que

$$\sup_{\mathbf{h} \in \mathbf{X}} \mathbb{E}(u(\omega, h_T)) = - \inf_{\mathbf{h} \in \mathbf{X}} \mathbb{E}(-u(\omega, h_T)). \tag{4-24}$$

Y si se escribe

$$L_t(\omega, h_t, \Delta h_t) = \begin{cases} 0 & \text{si } S(t) \cdot \Delta h_t = 0 \\ +\infty & \text{si } S(t) \cdot \Delta h_t \neq 0 \end{cases} \tag{4-25}$$

se plantea el siguiente problema, para obtener un problema estocástico de tipo Bolza en tiempo discreto

$$\begin{cases} \inf_{\mathbf{h}\in\mathbf{X}} \mathbb{E}(\sum_{t\in\{t_0,\dots,t_j,\dots,t_{n-1}\}} L_t(\omega,h_t,\Delta h_t)) + \mathbb{E}(\overline{u}(\omega,h_T)) \\ \quad h_0 = \xi_0, \end{cases} \tag{4-26}$$

donde $\overline{u} = -u$ y ξ_0 es tal que $s \cdot \xi_0 = B$, luego $\overline{u}$ será un integrando normal, continuo para cada $\omega \in \Omega$ (es decir, es un mapeo de Carathéodory), convexo.
Además, sea v la función valor asociado al problema anterior, luego $v > -\infty$ en consecuencia de la continuidad de $\overline{u}$ y que $L_t \geq 0$. Se define $C_t : \Omega \rightrightarrows \mathbb{R}^{d+1}$, por

$$C_t(\omega) = \{\mathbf{x} \in \mathbf{X} : S(t) \cdot \mathbf{x}_t = 0\}$$

Se puede apreciar que C_t por la Proposición 2.3 es medible y de valores cerrados (se define $f_t(\omega, x) = S(t) \cdot x$ y dado que $\mathcal{A}_t$ es la sigma álgebra generada hasta el tiempo t y la función f_t es medible y para cada ω la continuidad es directa), y por tanto esto explica que las funciones L_t son integrandos normales. Luego, el dual asociado al problema anterior es dado por

$$\begin{cases} \text{Minimizar} \quad \mathbb{E}\left(\sum_{t\in\{t_0,\dots,t_j,\dots,t_{n-1}\}} L_t^*\left(\omega, \mathbb{E}^{t+1}(\Delta h_t^*), \mathbb{E}^{t+1}(h_t^*)\right)\right) + \mathbb{E}\left(\overline{u}^*(\omega, -\mathbb{E}^T(h_T^*))\right) \\ \text{sobre} \qquad \mathbf{h}^* \in \mathcal{K}_{\mathbf{0}} \text{ tal que } h_0^* = -\eta \end{cases} \tag{4-27}$$

Donde L_t^* corresponde a la función soporte de la multifunción C_t.
Además, se tiene que $Z_t(\omega) = \mathbb{R}^{d+1}$, dado que L_t, no depende explícitamente de h_t, luego se concluye que Z_t es $\mathcal{A}_t-$medible. De esta forma queda directo que el problema satisface la condición recursiva acotada y casi seguramente la condición de interior factible, por la continuidad de $\overline{u}$.
Luego por el Teorema 3.4, no se tiene salto de dualidad entre los problemas (4-26) y (4-27).
En el caso que el mercado sea libre de arbitraje, se debe tener que dos portafolios solución deben tener la misma función valor en cada instante, si no se tendría oportunidades de arbitraje, por lo que la elección de ξ_0 no es crucial.
Por otro lado, un instrumento financiero simple, es una variable aleatoria de la forma $X = \phi(S(T))$, donde $\phi(\cdot)$ es una función que se denomina función de contrato. Algunos ejemplos son

$$\max\{S(T) - K, 0\} \quad \text{(Opción Europea de Compra)} \tag{4-28}$$
$$\max_{\tau}\{\mathbb{E}(exp\{-r\tau\}\max\{S(\tau) - K, 0\})\} \quad \text{(Opción Americana de Compra)} \tag{4-29}$$
$$S(T) - K \quad \text{(Contrato a Plazo)} \tag{4-30}$$

Donde $exp\{x\}$ denota la función exponencial.
Los contratos a plazo, se establecen entre dos partes materializado en un contrato, en el que en un instante inicial se fija el valor de compra o venta de la proporción de un activo, cuya ejecución se realiza en $t = T$. En ambos contratos se obliga a las partes a la ejecución del contrato, independiente del valor del activo en tal instante.
Además, las opciones de compra o venta también se materializan a través de un contrato entre dos partes. En este, se especifica tanto el tiempo de ejecución, proporción del activo a transar. La principal diferencia entre las opciones y los contratos a plazo, es en que estos se otorga un derecho de compra o venta, pero en ninguna circunstancia constituye una obligación. Existen distintos tipos de opciones, de los que principalmente en este trabajo se han mencionado dos, opciones europeas y opciones americanas. La principal diferencia de lo anterior radica en que con un tiempo T, en la opción europea, se ejerce el derecho de compra o venta en dicho instante, sin embargo, para las opciones americanas se puede ejercer tal derecho en un tiempo τ $(0 \leq \tau \leq T)$. Notar que τ es estocástico (tiempo de parada).

Definición 4.4. *Se dice que un derivado financiero simple con un tiempo de maduración T es alcanzable o replicable, si existe un portafolio $\mathbf{h}$ auto financiable tal que*

$$M^{\mathbf{h}}(T) = X \quad cs \tag{4-31}$$

Además, se denomina que un mercado es completo cuando cada derivado financiero es alcanzable.

Luego el problema (4-26) se puede adaptar, a la valorización de derivados, dado que el mercado al ser completo se reduce a encontrar un portafolio que alcance al derivado.
Se han mencionado dos conceptos importantes como lo son el arbitraje y la completitud asociado a mercados financieros. Para verificar esto se tiene asociado los teoremas fundamentales que asocian estos conceptos con la existencia y unicidad de una medida de martingala equivalente (puede ver [3] y [1]). Sin embargo, se ha construido el modelo a n pasos, de aquí se puede dar más estructura, donde para los activos que no son libre de riesgo se tenga en cada instante, dos posibilidades, llámese a, b asociados a una cierta probabilidad, luego este mercado se denomina modelo multinomial a n pasos. Este mercado es libre de arbitraje cuando se tiene $a < 1 + r < b$, además se puede mostrar que este mercado es completo usándose inducción (para más detalles, puede ver [1]).

5 Conclusiones y Comentarios

Las principales contribuciones de este trabajo son dos:

i) Establecer que la conjugada de la función valor del PEB es la función valor de su problema dual para una función de perturbación en particular.

ii) Establecer condiciones para que no haya salto de dualidad.

Esto se demuestra en los teoremas 3.3 y 3.4. Se puede decir que estos últimos resultados son la versión estocástica discreta del resultado mostrado en [12, Sección 5]. Si bien se usa la misma estrategia que en [9], analizar lo que se denominó en este trabajo como problema general, se debió hacer algunas modificaciones, dado que la estructura dada para la función valor asociada al PBE es distinta, porque en [9], l es una función determinista. Es por ello que se hacen las modificaciones pertinentes tales como el supuesto de condición casi seguramente de factibilidad inferior. Luego, agregando condiciones sobre l para asegurar la medibilidad de b_0 y b_T. Al igual que en [9] se utilizan los resultados de [8] para concluir.

Se ha podido corroborar los supuestos en un problema clásico como lo es el (LQ), estableciendo el dual de este, aumentando la dimensionalidad del problema y considerando los controles como la diferencia de un elemento y el cual no aporta mayores inconvenientes en la deducción del dual. Se ha podido construir un problema de optimización de portafolios, asociando una función de ganancia en la cual el objetivo es maximizar el valor esperado de esta función. Se obtuvo que este problema es equivalente al PBE, cumpliendo los supuestos establecidos para no haya salto de dualidad. Cabe mencionar que este problema se podría haber planteado desde un punto de vista de minimizar la variabilidad de la función ganancia, agregando restricciones asociadas al valor esperando de la ganancia.

Se ha hecho una conexión con la valoración de derivados financieros, sin embargo, con las hipótesis relacionadas con el arbitraje, estas coinciden en su valor. Una extensión directa como trabajo a futuro es estudiar esto cuando el tiempo es continuo, donde la teoría de martingalas se hace imprescindible y así para hacer una conexión con la existencia y unicidad de medidas de martingala equivalentes para procesos de difusión (modelando los procesos de precios) asociadas a movimientos Brownianos.

Bibliografía

[1] T. Björk. *Arbitrage theory in continuous time*. Oxford university press, 2009.

[2] P. Carpentier, J.-P. Chancelier, G. Cohen, and M. De Lara. Stochastic multi-stage optimization. In *Probability Theory and Stochastic Modelling*, volume 75. Springer, 2015.

[3] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic finance: an introduction in discrete time*. Walter de Gruyter, 2011.

[4] C. Hermosilla and P. R. Wolenski. Constrained and impulsive linear quadratic control problems. *IFAC-PapersOnLine*, 50(1):1637–1642, 2017.

[5] T. Rockafellar. Conjugate convex functions in optimal control and the calculus of variations. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 32(1):174–222, 1970.

[6] T. Rockafellar. Integral functionals, normal integrands and measurable selections. In *Nonlinear operators and the calculus of variations*, pages 157–207. Springer, 1976.

[7] T. Rockafellar. Optimization under uncertainty," lecture notes. 2001.

[8] T. Rockafellar and R. B. Wets. Nonanticipativity and l1-martingales in stochastic optimization problems. In *Stochastic Systems: Modeling, Identification and Optimization, II*, pages 170–187. Springer, 1976.

[9] T. Rockafellar and R. B. Wets. Deterministic and stochastic optimization problems of bolza type in discrete time. *Stochastics: An International Journal of Probability and Stochastic Processes*, 10(3-4):273–312, 1983.

[10] T. Rockafellar and R. B. Wets. Generalized linear-quadratic problems of deterministic and stochastic optimal control in discrete time. *SIAM Journal on control and optimization*, 28(4):810–822, 1990.

[11] T. Rockafellar and R. B. Wets. *Variational analysis*, volume 317. Springer Science & Business Media, 2009.

[12] T. Rockafellar and P. R. Wolenski. Convexity in Hamilton–Jacobi Theory I: Dynamics and Duality. *SIAM Journal on Control and Optimization*, 39(5):1323–1350, 2000.

[13] V. A. Rokhlin. Selected topics from the metric theory of dynamical systems. *Uspekhi Matematicheskikh Nauk*, 4(2):57–128, 1949.

[14] H. S. Witsenhausen. A counterexample in stochastic optimum control. *SIAM Journal on Control*, 6(1):131–147, 1968.