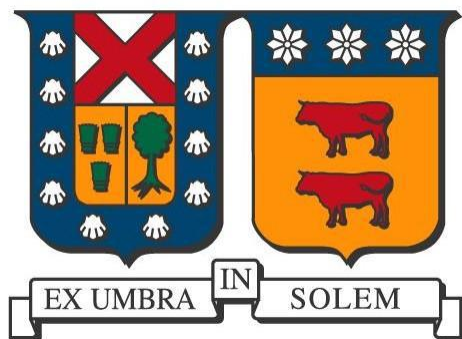


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA METALÚRGICA Y DE
MATERIALES



IMPLEMENTACIÓN DE ALGORITMOS DE OPTIMIZACIÓN DE LEYES
DE CORTE PARA LA MAXIMIZACIÓN DE VAN EN DEPÓSITOS
MONO-METÁLICOS Y EN BIMETÁLICOS CON ESTRATEGIA DE
ACOPIO DE MINERAL

Felipe Eduardo Valdenegro Herrera

Memoria de Título para optar al título profesional de Ingeniero Civil de Minas

Profesor guía
Fabián Alejandro Manríquez León

2025

Santiago, Chile



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título; ☐ Tesis de Postgrado;

Título del trabajo: Implementación de algoritmos de optimización de leyes de corte para la maximización de van en depósitos mono-metálicos y en bimetálicos con estrategia de acopio de mineral

Nombre del candidato(a): Felipe Eduardo Valdenegro Herrera

Carrera / Grado: Ingeniería civil de minas

Campus: Santiago San Joaquín; Departamento: Departamento de ingeniería de minas, metalurgia y materiales

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Fabián Alejandro Manríquez León, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL

☒ El trabajo **NO** contiene información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (embargo) por:

☐ 6 meses; ☐ 12 meses; ☐ 2 años; ☐ 3 años; ☐ 5 años; ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 18/08/2025; Firma: _____

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 18/08/2025

; Firma: _____

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

RESUMEN

En una operación minera, el elegir correctamente la ley de corte es fundamental para así asegurar el potencial económico que esta posee. Esta decisión permite distinguir entre el material minado que aporta valor económico de aquel que no lo hace. En 1964, Lane propuso un algoritmo que marcó un hito en este ámbito, al presentar un modelo diseñado para maximizar las ganancias de explotaciones mineras aplicadas a un mineral. No obstante, este enfoque resulta limitado cuando se trata de escenarios más complejos, como la extracción simultánea de varios minerales o la posibilidad de almacenar temporalmente el mineral extraído.

Este estudio parte de la hipótesis de que aplicar una política de ley de corte que varíe a lo largo del tiempo, junto con la opción de acopio, puede generar un mayor Valor Actual Neto (VAN) en comparación con estrategias más rígidas que usan leyes de corte constantes. En base a esto, el objetivo principal fue desarrollar e implementar un algoritmo en Python capaz de optimizar el VAN en operaciones mineras que involucran dos minerales, considerando además el uso de acopios

Para ello, se llevó a cabo una revisión del modelo de Lane y sus posteriores desarrollos, se seleccionaron casos de estudio relevantes y se implementó el algoritmo tanto en hojas de cálculo como en código Python. Posteriormente, se compararon diferentes estrategias: con y sin uso de acopios, y con leyes de corte fijas frente a leyes variables. La evaluación se centró en los resultados económicos y el impacto en el VAN.

Los resultados indican que las estrategias con leyes de corte variables ofrecieron un mejor rendimiento económico, aumentando el VAN en un 6,39 % en el primer caso de estudio y en un 4,43 % en el segundo. Además, se comprobó que el uso de acopios no solo mejora la eficiencia del proyecto, sino que también permite extender la vida útil de la mina.

ABSTRACT

In a mining operation, correctly selecting the cut-off grade is essential to ensure the project's economic potential. This decision allows for distinguishing between the mined material that adds economic value and that which does not. In 1964, Lane proposed an algorithm that marked a milestone in this field by introducing a model designed to maximize profits from mining operations focused on a single mineral. However, this approach becomes limited when applied to more complex scenarios, such as the simultaneous extraction of multiple minerals or the possibility of temporarily stockpiling extracted ore.

This study is based on the hypothesis that applying a time-dependent cut-off grade policy, along with the option to stockpile material, can generate a higher Net Present Value (NPV) compared to more rigid strategies that use constant cut-off grades. Based on this, the main objective was to develop and implement an algorithm in Python capable of optimizing the NPV in mining operations involving two minerals, also considering the use of stockpiles.

To achieve this, a review of Lane's model and its later developments was conducted, relevant case studies were selected, and the algorithm was implemented both in spreadsheets and Python code. Various strategies were then compared: with and without the use of stockpiles, and with fixed versus variable cut-off grades. The evaluation focused on economic outcomes and the impact on NPV.

The results indicate that strategies using variable cut-off grades offered better economic performance, increasing the NPV by 6.39% in the first case study and 4.43% in the second. Additionally, it was confirmed that stockpiling not only improves the project's efficiency but also extends the mine's operational life.

Tabla de contenido

1.	Introducción.....	1
1.1	Hipótesis de trabajo.....	1
1.2	Objetivos.....	2
1.2.1	Objetivo general.....	2
1.2.2	Objetivos específicos	2
1.3	Alcances.....	2
2.	Antecedentes.....	3
2.1	Marco teórico.....	3
2.1.1	Planificación minera de corto, mediano y largo plazo.....	3
2.1.2	Leyes de corte	3
2.1.3	Acopio de mineral.....	5
2.2	Estado del arte.....	5
3.	Metodología.....	10
3.1	Etapa I: Implementación del algoritmo de Lane (1964)	10
3.2	Etapa II: Implementación del algoritmo de Asad (2005).....	10
4.	Desarrollo	11
4.1	Herramientas utilizadas.....	11
4.2	Algoritmo de Lane (1964).....	11
4.2.1	Descripción del algoritmo de Lane.....	11
4.2.2	Casos de estudio de algoritmo de Lane.....	15
4.3	Algoritmo de Asad (2005)	18
4.3.1	Descripción de algoritmo de Asad.....	18
4.3.2	Casos de estudio de algoritmo de Asad	24
5.	Resultados.....	28

5.1	Resultados etapa I: Implementación de algoritmo de Lane (1964)	28
5.1.1	Resultados caso 1A	28
5.1.2	Resultados caso 1B	28
5.2	Resultados etapa II: Implementación de algoritmo de Asad (2005)	28
5.2.1	Resultados caso 2A	29
5.2.2	Resultados caso 2B	29
5.3	Análisis y discusión de resultados	29
5.3.1	Análisis y discusión de resultados etapa I	29
5.3.2	Análisis y discusión de resultados etapa II	30
6.	Conclusiones	31
6.1	Trabajo futuro	31
7.	Referencias	32
8.	Anexo A: Recursos Algoritmo de Lane	36
8.1	Deducción matemática de las leyes de corte limitantes según enfoque de maximización de beneficio	36
8.1.1	Ley de corte limitante mina para maximización de beneficio	36
8.1.2	Ley de corte limitante concentración para maximización de beneficio	38
8.1.3	Ley de corte limitante refinación para maximización de beneficio	39
8.2	Deducción matemática de las leyes de corte limitantes según enfoque de maximización de VAN	40
8.2.1	Deducción matemática de la contribución marginal para operaciones de un mineral	40
8.2.2	Ley de corte limitante mina para maximización de VAN	42
8.2.3	Ley de corte limitante concentración para maximización de VAN	44
8.2.4	Ley de corte refinación para maximización de VAN	45
8.3	Determinación de leyes de corte de equilibrio Algoritmo de Lane	46

8.4	Cálculo de leyes de corte para cada par de etapas y ley de corte global Algoritmo de Lane	47
8.5	Metodología para actualización de distribución tonelaje-ley de un mineral	48
9.	Anexo B: Recursos algoritmo de Asad.....	49
9.1	Ecuaciones para construir grillas de cantidades en algoritmo de Asad	49
9.2	Expresión de contribución marginal en algoritmo de Asad.....	50
9.2.1	Deducción matemática de la contribución marginal para operaciones de dos minerales	50
9.2.2	Expresiones de la contribución marginal para operaciones de dos minerales según la etapa limitante.....	51
9.2.3	Determinación del valor de la contribución marginal máxima.....	53
9.3	Cálculo de resultados del plan de leyes de corte de dos minerales.....	54
9.3.1	Determinación de la etapa limitante del proceso y las leyes de corte.....	54
9.3.2	Cálculo de la vida de la mina.....	54
9.3.3	Cálculo de las cantidades del plan de leyes de corte.....	56
9.4	Metodología para realizar la expansión de una grilla	57
9.5	Metodología para actualización de la distribución tonelaje-ley de dos minerales.....	60
10.	Anexo C: Resultados experimentales.....	61
10.1	Resultados experimentales etapa I: Implementación de algoritmo de Lane (1964) ..	61
10.1.1	Resultados experimentales caso 1A.....	61
10.1.2	Resultados experimentales caso 1B	63
10.2	Resultados experimentales etapa II: Implementación de algoritmo de Asad (2005).	66
10.2.1	Resultados experimentales caso 2A.....	66
10.2.2	Resultados experimentales caso 2B.....	68

Índice de figuras

Figura 1. Representación de la distribución tonelaje-ley bidimensional.....	20
Figura 2. Representación gráfica entre los valores presentes y futuros.....	41
Figura 3. Ejemplo de gráfica de P_m , P_c y P_r en función de ley de mineral bajo distintos procesos limitantes.....	46
Figura 4. Plan de leyes de corte experimentales maximización de beneficio caso 1A.....	62
Figura 5. Plan de leyes de corte experimentales maximización de VAN caso 1A.....	63
Figura 6. Plan de leyes de corte experimentales maximización de beneficio caso 1B.....	64
Figura 7. Plan de leyes de corte experimentales maximización de VAN caso 1B.....	65
Figura 8. Plan de leyes de corte experimentales sin acopio caso 2A.....	66
Figura 9. Plan de leyes de corte experimentales con acopio caso 2A.....	67
Figura 10. Plan de leyes de corte experimentales sin acopio caso 2B.....	68
Figura 11. Plan de leyes de corte experimentales con acopio caso 2B.....	69

Índice de tablas

Tabla 1. Parámetros técnico-económicos de entrada Algoritmo de Lane.....	12
Tabla 2. Formato de distribución tonelaje-ley para un mineral.	12
Tabla 3. Parámetros técnico-económicos caso 1A.....	16
Tabla 4. Distribución tonelaje-ley caso 1A.....	16
Tabla 5. Parámetros técnico-económicos caso 1B.....	17
Tabla 6. Distribución tonelaje-ley caso 1B.....	17
Tabla 7. Parámetros técnico-económicos de entrada algoritmo de Asad (2005).	19
Tabla 8. Formato de la distribución tonelaje-ley para dos minerales.....	21
Tabla 9. Parámetros técnico-económicos caso 2A.....	25
Tabla 10. Distribución tonelaje-ley caso 2A.....	25
Tabla 11. Parámetros técnico-económicos caso 2B.....	26
Tabla 12. Distribución tonelaje-ley caso 2B.....	27
Tabla 13. Resumen de resultados experimentales caso 1A.....	28
Tabla 14. Resumen de resultados experimentales caso 1B.....	28
Tabla 15. Resumen de resultados experimentales caso 2A.....	29
Tabla 16. Resumen de resultados experimentales caso 2B.....	29
Tabla 17. Generación de Pm, Pr y Pc en función de leyes de mineral en cada rango.....	46
Tabla 18. Actualización de distribución tonelaje-ley para un mineral.....	48
Tabla 19. Ejemplo de grilla de mínimos.	53
Tabla 20. Grilla de distribución tonelaje-ley para ejemplo de expansión de grilla.....	57
Tabla 21. Grilla de distribución tonelaje-ley expandida para mineral 1.....	58
Tabla 22. Grilla de distribución tonelaje-ley expandida para mineral 2.....	58
Tabla 23. Grilla extendida para mineral 1 y para mineral 2.....	59
Tabla 24. Actualización de distribución tonelaje-ley para dos minerales.....	60
Tabla 25. Resultados experimentales maximización de beneficio caso 1A.....	61
Tabla 26. Resultados experimentales maximización de VAN caso 1A.....	62
Tabla 27. Resultados experimentales maximización de beneficio caso 1B.....	63
Tabla 28. Resultados experimentales maximización de VAN caso 1B.....	64
Tabla 29. Resultados experimentales sin acopio caso 2A.....	66
Tabla 30. Resultados experimentales con acopio caso 2A.....	67

Tabla 31. Resultados experimentales sin acopio caso 2B.....	68
Tabla 32. Resultados experimentales con acopio caso 2B.....	69

1. Introducción

La minería enfrenta una amplia gama de desafíos y obstáculos en cada una de sus etapas, una de ellas corresponde al de planificación. Un aspecto crucial dentro de esta guarda relación con la selección de la ley de corte. Este es un parámetro utilizado para discriminar qué material se considera económicamente viable para su procesamiento y cuál es descartado como estéril. La ley de corte afecta no sólo a la cuantificación de las reservas, sino que también impacta directamente en la rentabilidad económica de la operación. Su elección está condicionada por una combinación de factores técnicos y económicos, que deben ser evaluados cuidadosamente para garantizar el éxito financiero de la mina a lo largo de su vida útil.

La optimización de la ley de corte ha sido tema de investigación continua en la industria minera. Lane (1964) publicó un algoritmo pionero que estableció las bases para optimizar este valor crucial. El método, conocido actualmente como Algoritmo de Lane, tiene un enfoque orientado a maximizar el beneficio anual y otro orientado a la maximización del VAN de una operación minera. Dentro de este algoritmo se consideran variables como los costos operativos, las capacidades técnicas de la operación, la recuperación metalúrgica y el precio de venta del mineral.

A pesar de su gran contribución, el método original de Lane presentaba limitaciones, podía aplicarse solo en operaciones que explotan un solo mineral, y no considera opción de gestionar acopio de mineral, práctica común en operaciones que explotan múltiples minerales a la vez.

Motivado por estos desafíos, el presente trabajo se centra en la implementación y evaluación de un algoritmo basado en el trabajo elaborado por Asad (2005), el cual persigue el propósito de optimización de la ley de corte en operaciones mineras de dos minerales, incorporando la estrategia de acopio de mineral. El propósito es estudiar cómo este enfoque puede impactar en la rentabilidad económica de las operaciones mineras al aplicarlo a casos de estudio y comparar, en términos de beneficio anual y VAN, el plan de ley de corte sin considerar la estrategia de acopio de mineral contra el caso en que el acopio si es considerado.

1.1 Hipótesis de trabajo

El incremento del VAN en una operación minera se logra, para escenarios de explotación de un mineral, incorporando estrategia de leyes de corte variable en el tiempo en lugar de constantes, e incorporando estrategia de acopio de mineral para escenarios de explotación de dos minerales.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo general

- Desarrollar e implementar mediante lenguaje de programación Python un algoritmo de optimización de leyes de corte que logre la maximización del VAN.

1.2.2 Objetivos específicos

- Identificar y analizar los distintos parámetros técnicos, económicos y operativos que influyen en la determinación de la ley de corte y comprender como estos se relacionan para lograr ese propósito.
- Evaluar el rendimiento del algoritmo implementado utilizando conjuntos de datos ya sean hipotéticos o reales y comparar los resultados obtenidos para validar su eficacia y precisión.
- Proponer un plan de leyes de corte que optimice la cantidad de mineral explotado, las leyes de corte y el VAN utilizando los resultados obtenidos, dentro de un contexto de planificación de largo plazo.

1.3 Alcances

- El algoritmo implementado sólo permite incorporar parámetros de entrada específicos fijos (costos, capacidades, precio de venta, recuperación y tasa de descuento).
- El algoritmo desarrollado permite determinar una política de ley de corte en el tiempo, con fines únicamente formativos.
- El plan de producción propuesto sólo es aplicable a los casos mencionados en este trabajo.

2. Antecedentes

2.1 Marco teórico

2.1.1 Planificación minera de corto, mediano y largo plazo

La planificación minera es el proceso de definir una secuencia óptima de extracción de bloques de un yacimiento de mineral, con el objetivo de maximizar la rentabilidad económica del proyecto y respetando al mismo tiempo, restricciones operacionales, de mezcla de leyes de mineral y estabilidad geotécnica del yacimiento de acuerdo con Whittle (1989). Este proceso de planificación sigue una estructura bajo tres niveles u horizontes temporales: largo, mediano y de corto plazo.

De acuerdo con Osanloo et al. (2008b) la planificación de largo plazo comprende horizontes de tiempo que van típicamente de 20 a 30 años. En esta etapa se define la factibilidad económica del proyecto y se determinan los flujos de caja que se esperan a lo largo de la vida útil de la mina. Esta planificación constituye además un prerequisite fundamental para las etapas de planificación de menor horizonte de tiempo, ya que orienta las decisiones futuras y permite visualizar el comportamiento global del proyecto. Por su parte, la planificación de mediano plazo se extiende entre 1 a 5 años, permitiendo un diseño más detallado de la extracción en áreas específicas del yacimiento y facilitando la programación de reemplazos o adquisiciones de equipos, indica Osanloo et al, (2008b). Por último, la planificación de corto plazo cubre períodos entre un mes a un año, pudiendo incluso tener subdivisiones diarias o semanales, y tiene un enfoque operacional, asegurando la implementación efectiva de los planes establecidos, adaptándose a cambios en las condiciones y restricciones productivas en el corto plazo.

2.1.2 Leyes de corte

Hall (2014) entrega un acercamiento inicial al concepto de ley de corte al concebirla como un número que permite distinguir dos cursos de acción distintos. El material con una ley superior a la ley de corte es tratado de una manera, mientras que el material con una ley inferior a la ley de corte es tratado de una manera distinta. Una definición que comparten tanto Dagdelen (1992) como Hall (2014) indica que la ley de corte corresponde a la ley usada para distinguir entre mineral y desecho, una ley superior a la ley de corte se considera mineral, en caso contrario se considera estéril y se manda a botadero.

Existen distintos tipos de leyes de corte que responden a diferentes contextos y objetivos:

- Ley de corte crítica: Es la ley de corte que hace que el beneficio sea nulo. Es el valor mínimo de ley que permite que los ingresos generados igualen los costos asociados a su extracción y procesamiento según Jélvez (2017). Este tipo de ley de corte ha sido históricamente el más utilizado por su simplicidad, aunque Hall (2014) argumenta que presenta limitaciones al no considerar factores geológicos ni capacidades del sistema de producción. La expresión de la ley de corte crítica (LCC) adopta la forma de la ecuación (1):

$$LCC = \frac{C_m + C_p}{(P - C_{frv}) * Rec} \quad (1)$$

Donde:

- $C_m = \text{Costo de mina}$
 - $C_p = \text{Costo de planta}$
 - $P = \text{Precio del metal}$
 - $C_{frv} = \text{Costo de fundición, refinería y venta}$
 - $Rec = \text{Recuperación metalúrgica}$
- Ley de corte marginal o de equilibrio: Corresponde al valor de la ley marginal, pero sin el costo de mina, dado que corresponde a un gasto ya incurrido y se debe tomar la decisión de enviarlo a planta o a botadero de lastre. En la ecuación (2) se muestra la fórmula de la ley de corte marginal (LCM):

$$LCM = \frac{C_p}{(P - C_{frv}) * Rec} \quad (2)$$

Donde:

- $C_p = \text{Costo de planta}$
 - $P = \text{Precio del metal}$
 - $C_{frv} = \text{Costo de fundición, refinería y venta}$
 - $Rec = \text{Recuperación metalúrgica}$
- Leyes de corte equivalentes: Este tipo de leyes se pueden aplicar bajo escenarios de depósitos polimetálicos para estandarizar el valor de distintos elementos contenidos en un mismo bloque. Hall (2014) indica que estas leyes permiten comparar unidades que contienen más de un metal transformando sus leyes individuales a una ley común.

En cuanto se refiere a aplicación práctica, se distinguen dos importantes leyes de corte:

- Leyes de corte de planificación (*Planning cut-off grades*): Son las utilizadas en etapas tempranas de diseño y planificación de mina. Hall (2014) argumenta que su enfoque está orientado a definir estrategias de largo plazo y deben mantenerse, por este motivo, estables en el tiempo para asegurar la coherencia del plan minero.
- Leyes de corte operacional (*Operational cut-off grades*): Estas se aplican en el corto plazo por operadores en terreno. Estas leyes se ajustan según condiciones operativas, disponibilidad de material o fluctuaciones en el mercado, aunque sus cambios deben mantenerse dentro de rangos establecidos en la planificación general según indica Hall (2014).

La determinación de una ley de corte debe ser siempre el resultado de una evaluación estratégica, para que, de esta manera según Hall (2014) la ley de corte óptima sea el resultado de un modelo de optimización estratégica y no como un supuesto inicial.

2.1.3 Acopio de mineral

El acopio de mineral es aquel material mineralizado proveniente de la mina que no cumple con los requisitos para considerarlo económicamente viable para ser procesado en el momento de su extracción, pero que podría tornarse valioso en el futuro, por lo que se opta por almacenarlo temporalmente. Según Asad (2005), esta estrategia se fundamenta en la naturaleza dinámica de las leyes de corte, las cuales tienden a disminuir a lo largo de la vida útil de una mina a medida que el VAN del proyecto declina progresivamente.

El material minado que presenta leyes intermedias, es decir, leyes mayores a la ley de corte marginal pero menores a la ley de corte óptima, puede ser derivado al acopio en lugar de ser destinado a botadero. Esta reserva adquiere un carácter estratégico pues, puede ser procesada en el futuro cuando las condiciones económicas o las capacidades operacionales lo permitan. El uso del acopio no está exento de desafíos, sin embargo, su implementación permite extender la vida útil de la operación y maximizar el aprovechamiento económico del recurso y con ello, del proyecto.

2.2 Estado del arte

La optimización de la ley de corte es un aspecto de gran importancia, debido a su impacto directo en la rentabilidad económica de la explotación. Esta no sólo influye en la economía de la operación, sino que también afecta a la planificación de la mina y a la cantidad de material que se extrae,

procesa y vende en un determinado período de tiempo. En este contexto, la metodología desarrollada por Lane (1964) se ha consolidado como un trabajo pionero que estableció las bases generales para determinar las leyes de corte en minería y más aún, entrega una metodología clara y definida para determinar la ley de corte óptima.

El modelo original elaborado por Lane (1964) desarrolla una política de ley de corte que considera la operación minera como un proceso compuesto por tres etapas: mina, concentrador y refinería. La ley de corte se define en función de las capacidades técnicas, los costos y las cantidades presentes en las tres etapas mencionadas. El funcionamiento del modelo de Lane se basa en que una etapa, o una combinación de ellas, actúa como la limitante gobernante del proceso. Como resultado, el modelo entrega una política de ley de corte que facilita la confección de un plan de producción para la vida útil de la mina.

El algoritmo de Lane ha representado una referencia esencial en la optimización de la ley de corte en operaciones mineras desde su introducción. A lo largo de los años, varios investigadores han propuesto extensiones y modificaciones que han permitido adaptar y mejorar la aplicación del modelo bajo diferentes contextos.

Dagdelen (1992) confirma los beneficios del modelo de Lane implementando un caso de estudio en el cual detalla los pasos para la implementación del algoritmo. En reemplazo del enfoque gráfico utilizado por Lane (1964, 1984, 1988), Dagdelen (1993) incorpora la interpolación lineal para obtener estimaciones más precisas de las leyes de corte. En su investigación Whittle y Vassiliev (1998) demostraron cómo el cálculo de la ley de corte en el modelo de Lane está influenciado por los cambios en los costos, las capacidades y las recuperaciones. Utilizaron un modelo estocástico para prever valores variables para la recuperación, en contraste a los tradicionales valores constantes o promedios, como parámetro de entrada en el modelo de Lane. Bascetin y Nieto (2007) introdujeron un factor de optimización que mejora la convergencia del VAN a lo largo del proceso iterativo, lo cual se traduce en una mejora en el VAN global de la operación minera. Asad (2007) incorporó la variación de los precios de productos y costos operativos en el modelo de Lane con el propósito de obtener una política de ley de corte más realista. Esta modificación fue implementada en un caso hipotético de depósito de cobre, lo que demostró un incremento positivo en el valor del VAN. Otra modificación fue hecha cuando Osanloo et al. (2008a) integraron consideraciones ambientales específicas para depósitos de pórfidos de cobre, abarcando el manejo

de residuos. Gholamnejad (2008, 2009) incorporó el costo de rehabilitación de vertederos en la función de beneficios del modelo de Lane. Esto ocasionó una modificación en el punto óptimo de la ley de corte, lo cual a su vez llevó a una disminución en la cantidad total de residuos enviados a los vertederos, promoviendo de esta manera el procesamiento de minerales con leyes bajas. Durante su investigación, Rendu (2009) adaptó para diversas situaciones la teoría de leyes de corte de Lane, destacando la diferencia entre políticas que maximizan el VAN o la Tasa Interna de Retorno (TIR). Además, Rendu (2009) explicita la importancia de considerar tanto variables fijas como controladas para definir estrategias óptimas de ley de corte. Abdollahisharif et al. (2012) adaptaron el modelo de Lane para incluir capacidades de producción variables, logrando un aumento en el VAN al ajustar la capacidad de refinación a la demanda del mercado y derivar las capacidades de procesamiento y minería en función de la ley de corte y la capacidad de refinación. El mismo año Khodayari y Jafarnejad (2012) reforman el modelo de Lane de tal manera que maximiza la cantidad de metal a producir por año. Asad y Dimitrakopoulos (2013) extienden el modelo heurístico de Lane para optimizar leyes de corte en minería a cielo abierto, considerando incertidumbre geológica y múltiples flujos de procesamiento. Githiria y Musingwini (2019) presentan un modelo estocástico incorporando incertidumbre en parámetros como el precio de mineral y distribuciones realistas del tonelaje-ley. El modelo, aplicado a un caso de estudio de una mina de oro, arrojó una mejora de VAN entre un 7% a un 186% respecto a métodos deterministas.

Las contribuciones discutidas anteriormente se enfocaron en la ampliación del modelo de Lane y fueron aplicables a los depósitos de minerales con un único mineral. Lane (1984, 1988) realizó una importante extensión a su modelo original propuesto en 1964, al presentar la técnica de búsqueda por redes. Esta fue la primera propuesta metodológica para optimizar las leyes de corte en yacimientos con dos metales y tiene una naturaleza iterativa, que permite explorar diferentes combinaciones de leyes de corte con el objetivo de maximizar el VAN. El proceso comienza con una suposición inicial de las leyes de corte γ_1 y γ_2 (leyes de corte de mineral 1 y mineral 2 respectivamente), seguida de la evaluación del VAN. Luego se genera una secuencia de nuevos pares de leyes estimadas, que permiten ir evaluando continuamente el VAN y mejorando los pares anteriores hasta identificar la combinación que ofrece el mayor VAN. Después de que Lane publicara esta modificación en 1984 y 1988, numerosos estudios han surgido como extensiones del modelo de Lane para casos de dos minerales.

Dagdelen y Asad (1997) implementan la técnica de búsqueda por redes, en donde proporcionan un análisis de sensibilidad que muestra cómo las variaciones en las capacidades de producción afectan la política de ley de corte. Por su parte, Cetin y Dowd (2002) utilizaron un algoritmo genético para definir las leyes de corte y compararon este enfoque con la técnica de búsqueda por redes descrita por Lane (1984, 1988). Osanloo y Ataei (2003) incorporaron un factor de ley equivalente en el modelo de Lane y utilizaron el método de búsqueda de la sección dorada. En otro estudio, Ataei y Osanloo (2003) exploraron la aplicación de algoritmos genéticos, la búsqueda de la sección dorada y la técnica de búsqueda por redes para el modelo de Lane, implementándolos en un programa informático y aplicándolos a un yacimiento de plomo-zinc. Posteriormente, Ataei y Osanloo (2004) integraron tanto la técnica de búsqueda por redes como los algoritmos genéticos en un procedimiento algorítmico para optimizar las leyes de corte en yacimientos de plomo-zinc. Asad (2005) abordó la gestión de acopios para yacimientos con dos minerales, utilizando la técnica de búsqueda en cuadrícula y desarrollando un algoritmo que extiende el modelo de Lane (1984, 1988) para este propósito. Con posterioridad, Cetin y Dowd (2013) amplían el modelo de Lane para operaciones con más de dos minerales, aplicando la técnica de búsqueda por redes bajo este contexto.

Un aspecto crítico en la optimización de la ley de corte en minería es la gestión de los acopios de mineral, que permiten almacenar material de baja ley para su procesamiento en períodos posteriores, cuando las condiciones económicas son más favorables. Este enfoque ha sido explorado y validado por varios estudios, que han demostrado su eficacia en mejorar la rentabilidad y sostenibilidad de las operaciones mineras. A continuación, se presentan algunas de las investigaciones clave que han evaluado el impacto de los acopios en la planificación y optimización minera.

Mason (1984) mediante un análisis descriptivo demuestra que una política de ley de corte variable en el tiempo tiende a fomentar la creación de acopios de mineral al indicar que, si las leyes de corte son altas en los primeros años de la mina y disminuyen con el tiempo, en consecuencia, la ley media del mineral almacenado en acopios puede superar la ley de corte de la mina en sus años tardíos de operación. Lane (1988) asienta una aproximación técnica al uso de acopios de mineral al determinar una ley de corte específica para el acopio en basada en los costos de manejo de material. Lane (1988) argumenta que el material cuya ley se encuentra por debajo de la ley de corte

en los primeros años de la operación de la mina, puede ser procesado en los años posteriores, cuando la ley media del yacimiento disminuye y resulte económicamente viable procesar el material que había sido destinado a acopio.

Investigaciones posteriores, como la realizada por Schellman (1989), han comprobado que incorporar acopio a la operación minera puede generar un VAN mayor en comparación al método propuesto por Lane (1964). Según Schellman (1989) el impacto de los acopios en el VAN depende especialmente de la diferencia entre las leyes de corte altas y bajas. Si esta diferencia es significativa, entonces el acopio se convierte en un elemento potencial a ser considerado para el proyecto. Schellman, (1989) añade que, si bien este impacto en el VAN depende de cada caso en particular, el acopio en minas de rajo abierto es una opción que siempre debiese ser considerada.

En su trabajo, Asad (2005) permite asegurar la maximización del VAN al considerar todos los puntos posibles en la grilla cercanos a la solución estimada y además es aplicable incluso si alguno de los minerales involucrados es de menor importancia. Asad (2005) reconoce la ventaja que representan los acopios de mineral al proporcionar flexibilidad en la toma de decisiones con respecto al procesamiento del mineral. Por otro lado, Asad y Topal (2011) ampliaron el trabajo de Asad (2007) al incluir la opción de acopio. En ambos casos de Asad (2005) y Asad y Topal (2011) se demuestra que la recuperación del material almacenado, después de agotar las reservas de la mina, aumenta tanto el VAN como la vida útil de la operación.

Desde su publicación, el modelo de Lane ha experimentado una evolución considerable, incorporando factores económicos, ambientales y técnicos que han mejorado su precisión y relevancia en la optimización de las leyes de corte para operaciones mineras bajo diversos escenarios. Este avance ha permitido una planificación y operación minera más flexible y eficiente, garantizando una gestión más efectiva de los recursos minerales.

3. Metodología

La metodología bajo la cual se procede contempla dos etapas. En la primera de ellas se implementa el Algoritmo de Lane de 1964. Esta parte busca determinar leyes de corte bajo dos enfoques, en escenarios donde hay solo un mineral; un enfoque es la maximización del beneficio, mientras que el otro persigue la maximización del VAN. En la segunda etapa se implementa el algoritmo desarrollado en la publicación de Asad (2005). Este corresponde a un algoritmo cuyo objetivo es determinar leyes de corte en escenarios donde hay dos minerales y, además se extiende el procedimiento para incorporar la estrategia de acopio de mineral. El enfoque de este algoritmo persigue la maximización del VAN.

La metodología para cada una de las etapas puede dividirse en tres fases:

3.1 Etapa I: Implementación del algoritmo de Lane (1964)

1. Revisión bibliográfica de la teoría de Lane: Se estudia la formulación teórica y matemática del modelo de Lane (1964), el cual se encuentra explicado en Hustrulid et al. (2013).
2. Implementación en hojas de cálculo: El algoritmo se implementa en hojas de cálculo, replicando dos casos de estudio. La implementación se hace bajo los dos enfoques mencionados con anterioridad: maximización del beneficio y maximización del VAN.
3. Implementación en Python: El procedimiento del algoritmo es programado en lenguaje Python para automatizar el proceso de cálculo de leyes de corte. La implementación en Python se realiza bajo los mismos enfoques de la implementación en hojas de cálculo.

3.2 Etapa II: Implementación del algoritmo de Asad (2005)

1. Revisión bibliográfica de algoritmo presentado en Asad (2005): Se estudia la formulación teórica y matemática del algoritmo. Se apoya la revisión bibliográfica con lectura de Dagdelen y Mohammad (1997).
2. Implementación en hojas de cálculo: El algoritmo se implementa en hojas de cálculo, se replican dos casos de estudio, ambos bajo el enfoque de maximización de VAN y contemplando dos minerales con incorporación de acopio.
3. Implementación en Python: El procedimiento del algoritmo se programa en lenguaje Python. Se replican 2 casos de estudio bajo enfoque de maximización de VAN e incorporación de acopio de mineral.

4. Desarrollo

4.1 Herramientas utilizadas

Se emplearon dos herramientas principales para el desarrollo e implementación de los modelos:

- Microsoft Excel: Utilizado para realizar una primera validación manual de los algoritmos, facilitando la comprensión lógica de sus componentes. Su uso permite implementar estructuras tabulares y verificar fórmulas de cálculo paso a paso.
- Python: Lenguaje de programación ampliamente utilizado en entornos científicos y de análisis de datos. Su uso permite automatizar procesos, manejar estructuras de datos más complejas y ejecutar múltiples iteraciones con eficiencia.

4.2 Algoritmo de Lane (1964)

A continuación, se presenta la descripción del Algoritmo de Lane. Se explica el procedimiento general bajo el cual este trabaja para el enfoque en la maximización del beneficio económico y su variante enfocada en la maximización de VAN. La fundamentación matemática del algoritmo, así como otros procedimientos técnicos se desarrollan como apartado en anexo A. Se presenta también en este capítulo los casos de estudio que se replican en esta etapa.

4.2.1 Descripción del algoritmo de Lane

Lane (1964) concibe la operación minera como un sistema compuesto por tres etapas, cada una con sus propios costos asociados y restricciones en capacidad. Estas etapas corresponden a mina, concentración y refinación. La primera etapa corresponde al proceso de extracción del material mineralizado; la segunda, al procesamiento del mineral para obtener el concentrado; y la tercera, a la transformación del concentrado en el producto final y su comercialización. A esta última etapa también se le conoce como fundición o venta. Para comenzar a trabajar con el algoritmo de Lane, es necesario antes conocer los parámetros de entrada con los que opera este método, estos corresponden a una serie de cantidades técnico-económicas y la distribución tonelaje-ley del material mineralizado.

- I. Los parámetros técnico-económicos corresponden a los mostrados en la tabla 1:

Tabla 1. Parámetros técnico-económicos de entrada Algoritmo de Lane.

Símbolo	Parámetro
M	Capacidad máxima mina
C	Capacidad máxima concentración
R	Capacidad máxima refinación
m	Costo mina
c	Costo concentración
r	Costo refinación
f	Costos fijos
s	Precio de venta del metal
y	Recuperación
d	Tasa de descuento (o interés)

Por su parte, la distribución tonelaje-ley suele darse como la cantidad de tonelaje existente entre un rango de ley de mineral estructurada en una tabla como se ve en la tabla 2:

Tabla 2. Formato de distribución tonelaje-ley para un mineral.

Rango de ley (g_i)	Tonelaje ($T(g_i)$)
g_1	$T(g_1)$
g_2	$T(g_2)$
...	...
g_k	$T(g_k)$
Total	$\sum T(g_i)$

- II. Una vez conocidos los parámetros de entrada, corresponde conocer las siguientes relaciones, estas ecuaciones (3): Costos totales y (4): Beneficio, corresponden a las ecuaciones básicas del algoritmo:

$$T_c = m * Q_m + c * Q_c + r * Q_r + f * T \quad (3)$$

$$P = (s - r) * Q_r - c * Q_c - m * Q_m - f * T \quad (4)$$

Donde:

- Q_m : Cantidad de material a minar
- Q_c : Cantidad de material a concentrar
- Q_r : Cantidad de material a refinar
- T : Período de tiempo

III. El siguiente paso consiste en calcular las leyes de corte limitantes, estas se fundamentan asumiendo que, una etapa solamente limita la capacidad total del sistema. Las leyes de corte limitantes corresponden a:

- g_m : Ley de corte limitante mina (solo el proceso mina limita el sistema)
- g_c : Ley de corte limitante concentración (solo el proceso concentración limita el sistema)
- g_r : Ley de corte limitante refinación (solo el proceso refinación limita el sistema)

La formulación matemática de las leyes de corte limitantes g_m, g_c y g_r se desarrollan dentro de Anexo A, en subcapítulos 8.1 y 8.2 para enfoque en maximización de beneficio y de VAN respectivamente.

IV. Lo siguiente que debe realizarse es determinar las leyes de corte balanceadas. Este paso se basa en el supuesto de que, no solo un proceso es el que limita el sistema, sino que una combinación de dos procesos es el que lo hace. Este proceso arroja como resultados las siguientes cantidades:

- g_{mc} : Ley de corte balanceada mina – concentración
(el proceso mina – concentracion limita el sistema)
- g_{mr} : Ley de corte balanceada mina – refinación
(el proceso mina – refinación limita el sistema)
- g_{cr} : Ley de corte balanceada concentración – refinación
(el proceso concentración – refinación limita el sistema)

Es importante destacar que este paso se realiza de manera idéntica para ambos enfoques de maximización de beneficio y de VAN. El procedimiento para este paso se muestra en el subcapítulo 8.3 dentro de Anexo A.

V. Una vez que se han determinado las seis leyes de corte (tres limitantes y tres de balance) (g_m , g_c , g_r , g_{mc} , g_{mr} y g_{cr}) se debe calcular el óptimo para cada par de etapas, para posteriormente calcular la ley de corte global. Las cantidades que resultan de este paso se denotarán como se indica a continuación:

- G_{mc} : Ley de corte óptima mina – concentración
- G_{mr} : Ley de corte óptima mina – refinación
- G_{cr} : Ley de corte óptima concentración – refinación
- G : Ley de corte óptima global

El procedimiento para determinar estas cantidades se muestra en Anexo A subcapítulo 8.4.

VI. Con el valor de G obtenido, se determinan las cantidades $Q_m(G)$, $Q_c(G)$, $Q_r(G)$ y $T(G)$, para luego reemplazarlas en (4) obteniendo un valor para el beneficio P , con el cual, se puede calcular el VAN mediante la expresión de la ecuación (5):

$$VAN = \frac{P * [(1+d)^n - 1]}{d * (1+d)^n} \quad (5)$$

Donde:

- n : vida del depósito

Los pasos indicados desde I a VI corresponden al procedimiento para rutina de una iteración. En este punto, existe una marcada diferencia en los siguientes pasos según el enfoque bajo el cual se trabaje. Por un lado, se tiene el enfoque que busca la maximización del beneficio; aquí solo basta con seguir el procedimiento según se ha explicado hasta este punto. Las cantidades calculadas en el punto VI (Q_m , Q_c , Q_r , *Beneficio*, *VAN*, *Ley de corte*) son los resultados para el plan de leyes de corte para la cantidad de periodos T que han sido determinados. Por otro lado, se tiene el enfoque que persigue la maximización de VAN; esta variante del algoritmo mantiene la base metodológica del enfoque previamente mencionado, sin embargo, a diferencia de ella, la actual variante posee una metodología de carácter iterativo. En esta variante, se deben añadir el siguiente procedimiento: con el nuevo valor de VAN obtenido en el paso VI, se deben repetir los pasos dados desde el punto III a VI (reemplazando el valor de VAN donde corresponda), lo que dará como resultado otra vez un nuevo valor de VAN. Este proceso se repite iterativamente hasta alcanzar una convergencia del VAN. Una vez se alcance dicha convergencia, las cantidades (Q_m , Q_c , Q_r , *Beneficio*, *VAN*, *Ley de corte*) obtenidas en esa iteración, son las que corresponden

definitivamente a ese período. A este procedimiento donde se deben realizar rutinas de iteración hasta alcanzar la convergencia de VAN se le denomina rutina de convergencia. A una rutina de convergencia le suele tomar de 3 a 5 rutinas de iteración alcanzar la convergencia del VAN, aunque dicha cantidad puede variar dependiendo del nivel de tolerancia que se busca alcanzar en dicha convergencia.

Por último, una vez que en el paso anterior se haya alcanzado la convergencia de VAN, antes de comenzar a iterar para un nuevo período, corresponde actualizar la distribución tonelaje-ley, esto debe hacerse procurando que la proporcionalidad de tonelaje correspondiente para cada rango de ley de mineral siga manteniendo la proporcionalidad dentro de la distribución. La actualización de la distribución tonelaje-ley asegura que el algoritmo no itere indefinidamente al ser el procedimiento que representa el agotamiento del material en la mina. La metodología de este procedimiento se muestra en subcapítulo 8.5 de Anexo A.

4.2.2 Casos de estudio de algoritmo de Lane

En este apartado se presentan los datos de los casos de estudio desarrollados para aplicar el algoritmo de Lane. El primero de estos casos, el cual se designa como “Caso 1A” corresponde al ejemplo original propuesto por Lane (1964). El segundo caso es un estudio presentado por Asad et al. (2016), el cual lleva por nombre “Caso 1B”.

i. Caso 1A

A continuación, se muestra los parámetros técnico-económicos en la tabla 3 y la distribución tonelaje-ley en la tabla 4:

Tabla 3. Parámetros técnico-económicos caso 1A.

Símbolo	Parámetro	Valor	Unidad
M	Capacidad mina	100	t/año
C	Capacidad planta	50	t/año
R	Capacidad refinación	40	t/año
m	Costo mina	1	USD/t
c	Costo planta	2	USD/t
r	Costo refinación	5	USD/lb
s	Precio de venta	25	USD/lb
f	Costos fijos	300	USD/año
y	Recuperación	100	%
d	Tasa de descuento	15	%

Tabla 4. Distribución tonelaje-ley caso 1A.

Ley lb/t	Tonelaje t
0,0 - 0,1	100
0,1 - 0,2	100
0,2 - 0,3	100
0,3 - 0,4	100
0,4 - 0,5	100
0,5 - 0,6	100
0,6 - 0,7	100
0,7 - 0,8	100
0,8 - 0,9	100
0,9 - 1,0	100
Total	1000

ii. Caso 1B

Para este caso, los parámetros técnico-económicos y la distribución tonelaje-ley se muestran en las tablas 5 y 6 respectivamente:

Tabla 5. Parámetros técnico-económicos caso 1B.

Símbolo	Parámetro	Valor	Unidad
M	Capacidad mina	20.000.000	t/año
C	Capacidad planta	10.000.000	t/año
R	Capacidad refinación	90.000	t/año
m	Costo mina	0,5	USD/t
c	Costo planta	0,6	USD/t
r	Costo refinación	50	USD/lb
s	Precio de venta	550	USD/lb
f	Costos fijos	4.000.000	USD/año
y	Recuperación	90	%
d	Tasa de descuento	15	%

Tabla 6. Distribución tonelaje-ley caso 1B.

Ley %	Tonelaje t
0 ,00 - 0,15	14.400.000
0,15 - 0,20	4.600.000
0,20 – 0,25	4.400.000
0,25 – 0,30	4.300.000
0,30 – 0,35	4.200.000
0,35 – 0,40	4.100.000
0,40 – 0,45	3.900.000
0,45 – 0,50	3.800.000
0,50 – 0,55	3.700.000
0,55 – 0,60	3.600.000
0,60 – 0,65	3.400.000
0,65 – 0,70	3.300.000
0,70 – 1,56	42.300.000
TOTAL	100.000.000

4.3 Algoritmo de Asad (2005)

Lane (1988) presenta una metodología para buscar leyes de corte óptimas que maximicen el VAN en contextos donde se dispone a extraer dos minerales. Esta nueva metodología corresponde a una adaptación que, el mismo Lane realiza sobre el algoritmo original presentado en Lane (1964), este nuevo algoritmo se conoce como “Técnica de búsqueda por grilla (o redes)”. Asad (2005) presenta una adaptación extendida de este procedimiento, pues, además añade la metodología necesaria para incorporar acopio de mineral en el procedimiento. En este apartado es presentada la descripción del algoritmo de Asad (2005). Se explica el funcionamiento general de la metodología, mencionando cómo se integra la estrategia de acopio de mineral. También se presentan los casos de estudio que se replican en esta etapa. La fundamentación matemática del algoritmo y otros procedimientos técnicos se desarrollan como apartado dentro del Anexo B.

4.3.1 Descripción de algoritmo de Asad

El algoritmo de Asad (2005) considera la operación minera como un sistema compuesto de cuatro etapas: mina, concentración refinación del mineral 1 y refinación del mineral 2. Estas corresponden a las mismas contempladas en el algoritmo de Lane; sin embargo, al tratarse de dos minerales en lugar de solo uno, se requieren dos etapas de refinación, una para cada mineral a extraer.

- I. El algoritmo comienza declarando una serie de parámetros técnico-económicos y una distribución tonelaje-ley. Para el presente caso, se incorporan valores correspondientes al mineral 2 en algunos de estos parámetros, los cuales se listan en la tabla 7:

Tabla 7. Parámetros técnico-económicos de entrada algoritmo de Asad (2005).

Símbolo	Parámetro
M	Capacidad mina
C	Capacidad concentración
R₁	Capacidad refinación mineral 1
R₂	Capacidad refinación mineral 2
S₁	Precio venta mineral 1
S₂	Precio venta mineral 2
m	Costo mina
c	Costo concentración
sh	Costo manejo
r₁	Costo refinación mineral 1
r₂	Costo refinación mineral 2
f	Costos fijos
y₁	Recuperación mineral 1
y₂	Recuperación mineral 2
d	Tasa de descuento

En escenarios de extracción de dos minerales, la distribución tonelaje-ley es bidimensional y se representa como una serie de contornos según Asad (2005). La ley de corte puede entenderse como una línea, cuya delimitación separa el mineral del material estéril o desecho. La figura (1) muestra una representación de las ideas recién planteadas. Las leyes de corte óptimas del mineral 1 y mineral 2 corresponden a γ_1 y γ_2 respectivamente.

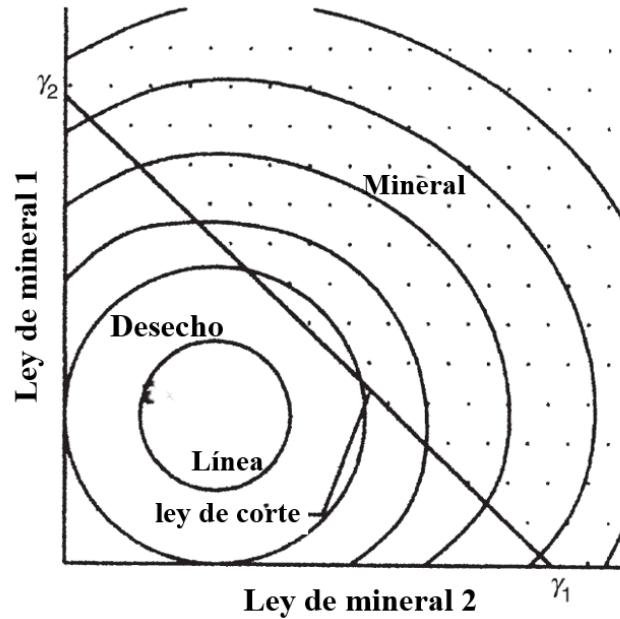


Figura 1. Representación de la distribución tonelaje-ley bidimensional.

Nota: Adaptado de Cutoff grade optimization algorithm with stockpiling option for open pit mining operations of two economic minerals (p. 178), por Asad 2005.

Es importante destacar que, la forma bidimensional que tiene la distribución tonelaje-ley permite ver la distribución como una grilla o red y, a cada par ordenado de rangos de ley de mineral, como un punto dentro de esa grilla. Esta forma de visualizar la distribución es la razón por la cual a este algoritmo también se le conoce como “Técnica de búsqueda por grilla”. Visualizar de esta manera la distribución ayuda a comprender los pasos próximos, pues cuando se lea “un punto en la grilla” o “para cada punto en la grilla” debe tenerse en cuenta que se está haciendo referencia a un (o a cada) par ordenado de la distribución tonelaje-ley.

Antes de proseguir con la explicación de los siguientes pasos, es necesario establecer una definición técnica del formato de distribución tonelaje-ley de dos minerales. Si se tienen K rangos de ley de mineral para el mineral 1, M rangos de ley de mineral para el mineral 2, y existe para cada rango de mineral 1 y mineral 2 una cantidad $T_{g_1(i)-g_2(j)}$ toneladas de material. La distribución tonelaje-ley para dos minerales adopta, por consiguiente, una forma como en la tabla 8:

Tabla 8. Formato de la distribución tonelaje-ley para dos minerales.

	$[g_1(1), g_1(2)]$	$[g_1(2), g_1(3)]$	...	$[g_1(K-1), g_1(K)]$
$[g_2(1), g_2(2)]$	$Tg_1(1-2)-g_2(1-2)$	$Tg_1(2-3)-g_2(1-2)$	...	$Tg_1(K-1-K)-g_2(1-2)$
$[g_2(2), g_2(3)]$	$Tg_1(1-2)-g_2(2-3)$	$Tg_1(2-3)-g_2(2-3)$	...	$Tg_1(K-1-K)-g_2(2-3)$
...	...	...	...	...
$[g_2(M-1), g_2(M)]$	$Tg_1(1-2)-g_2(M-1-M)$	$Tg_1(2-3)-g_2(M-1-M)$	...	$Tg_1(K-1-K)-g_2(M-1-M)$

Dado que hay dos procesos de refinación, la fórmula para calcular el beneficio se adapta y se expresa como se muestra en la ecuación (6):

$$P = \{[(S_1 - r_1) * g_{avg1} * y_1] + [(S_2 - r_2) * g_{avg2} * y_2] - c\} * Q_c - m * Q_m - f * T \quad (6)$$

II. El siguiente paso implica la construcción de una serie de nuevas grillas a partir de la grilla de distribución tonelaje-ley. Estas grillas mantienen los rangos de ley de los minerales 1 y 2, los cuales actúan como ejes de coordenadas que permiten identificar y singularizar cada punto dentro de la grilla. La creación de cada nueva grilla está gobernada por una ecuación que actúa sobre cada uno de sus puntos. La explicación de la construcción de estas grillas y las ecuaciones para ello se detallan dentro del Anexo B en el subcapítulo 9.1. La interpretación de cada nueva grilla es la siguiente: cada punto en estas nuevas grillas representa el valor de la cantidad correspondiente a la grilla si las leyes de corte coincidieran con las leyes de mineral asociadas a ese punto en particular (de manera ordenada a través de los rangos de ley de mineral). A continuación, se listan las cantidades para las cuales se construyen estas grillas:

- T_o : Toneladas de ore (mineral)
- T_w : Toneladas de waste (estéril)
- g_{avg1} : Ley promedio de mineral 1
- g_{avg2} : Ley promedio de mineral 2
- Q_c : Cantidad de material a concentrar
- Q_m : Cantidad de material a extraer (minar)
- Q_{r1} : Cantidad de material de mineral 1 a refinar
- Q_{r2} : Cantidad de material de mineral 2 a refinar

- III. Con ayuda de las grillas recién creadas y, siguiendo el procedimiento presentado en el subcapítulo 9.2 de Anexo B, se construyen cinco grillas más a partir de la ecuación de la contribución marginal deducida en la sección 9.2.1 y presentadas en 9.2.3. Dentro de la siguiente sección 9.2.3 se explica el procedimiento para encontrar el valor $v_{m\acute{a}x}$, el cual es sumamente necesario para poder avanzar a los pasos posteriores del algoritmo. A saber, en este paso deben construirse las grillas para las siguientes cinco cantidades:
- v_m : *Contribución marginal asumiendo que mina es la etapa limitante*
 - v_c : *Contribución marginal asumiendo que concentración es la etapa limitante*
 - v_{r1} : *Contribución marginal asumiendo que refinación de mineral 1 es la etapa limitante*
 - v_{r2} : *Contribución marginal asumiendo que refinación de mineral 2 es la etapa limitante*
 - v_{minimos} : *Grilla correspondiente a los minimos de cada punto*

Es importante en este punto mencionar lo siguiente: las ecuaciones (75), (76), (77) y (78) corresponde a las cantidades de v_m , v_c , v_{r1} y v_{r2} respectivamente indicadas en Asad (2005). Sin embargo, en la implementación del algoritmo se trabajó, con las ecuaciones (80), (81), (82) y (83) presentadas en Dagdelen y Asad (1997) para las cantidades antes mencionadas.

Cómo última parte de este paso, se obtienen las leyes de corte para el mineral 1 y el mineral 2. Aunque estas leyes de corte iniciales logran maximizar el VAN, no puede confirmarse que representen el máximo absoluto. Por ello, se incorpora un paso adicional en la metodología. La metodología para hallar las leyes de corte se presenta en el subcapítulo 9.3 en la sección 9.3.1 de Anexo B.

- IV. Alrededor de los puntos correspondientes a las leyes de corte de mineral 1 y 2 encontradas en el paso anterior, en la distribución tonelaje-ley debe implementarse un procedimiento de “expansión de la grilla” manteniendo la proporcionalidad en rangos y tonelaje. Esta expansión consiste en subdividir ciertos rangos de ley, refinando así la matriz original y generando una mayor cantidad de casillas que representen mejor el comportamiento del yacimiento. El propósito de este procedimiento es inspeccionar los puntos cercanos de las leyes de corte encontradas, lo que permite asegurar que los

- valores de ley de corte óptimos γ_1 y γ_2 , correspondientes a mineral 1 y 2 respectivamente, maximizan efectivamente el VAN. El algoritmo establece que este proceso de búsqueda de leyes de corte debe realizarse un total de tres veces. Los valores encontrados en la tercera oportunidad corresponden a las leyes óptimas γ_1 y γ_2 mencionadas anteriormente. La metodología para realizar la expansión de la grilla se detalla en subcapítulo 9.4 de Anexo B.
- V. Al llegar a este punto, con las leyes γ_1 y γ_2 obtenidas en el paso anterior, es posible calcular los resultados de las cantidades (Q_m, Q_c, Q_{r1}, Q_{r2}) junto a las leyes promedio de mineral 1 y 2. También en este paso, en base a la etapa limitante del sistema se calcula la vida útil restante de la operación según procedimiento detallado en sección 9.3.2 de Anexo B. Con estos valores, se calcula el beneficio económico y el VAN siguiendo los pasos indicados en sección 9.3.3. El procedimiento seguido hasta este paso corresponde a la rutina de una iteración. El algoritmo de técnica de búsqueda por grillas, al igual que el algoritmo de Lane, tiene una naturaleza de carácter iterativa. Por consiguiente, el siguiente paso del algoritmo contempla realizar rutinas de convergencia del VAN para obtener resultados.
- VI. Una vez que se obtiene un resultado para el VAN en el paso V, los pasos del II al V deben repetirse. En cada repetición, el valor del VAN previamente calculado se actualiza en donde corresponda, generando un nuevo valor de VAN. Este proceso se itera continuamente hasta que el VAN alcanza la convergencia. Al lograrse esta convergencia, los resultados de las cantidades correspondientes al plan de leyes de corte (*Ley de corte mineral 1 y 2, $Q_m, Q_c, Q_{r1}, Q_{r2}, Beneficio, VAN$*) obtenidos en esa última iteración son los que se aplican para el período actual. Este procedimiento, que implica iteraciones hasta la convergencia del VAN, se denomina rutina de convergencia.
- VII. Cuando se decide por la estrategia de crear acopio de mineral, el material que se hallaba por debajo de la ley de corte y sobre la ley de corte de equilibrio para cada período, se destina al almacenamiento de acopio durante la vida de la mina. El material que va siendo destinado a acopio, mantiene la proporcionalidad dada por la distribución tonelaje-ley a lo largo de todo el período que se va abasteciendo. Asad (2005) señala que hay dos opciones bajo las cuales se puede manejar el uso de acopio:

- El material fluye a la planta de procesamiento simultáneamente tanto de la mina como del almacenamiento.
- El almacenamiento sirve como una reserva para ser procesada después de que concluya la extracción minera.

El enfoque bajo el cual trabajo Asad (2005) corresponde al segundo, y es, el mismo enfoque bajo el cual se trabaja en el presente proyecto.

VIII. Cuando se haya concluido un período, es decir, realizado las rutinas de convergencia, obtenido los resultados para el plan de leyes de corte y actualizado las reservas en el acopio, corresponde actualizar la distribución tonelaje-ley. Este proceso de actualización sigue una lógica similar a la de un escenario con un solo mineral. La metodología para llevar a cabo esta acción se desarrolla dentro de Anexo B en subcapítulo 9.5.

4.3.2 Casos de estudio de algoritmo de Asad

Los datos de los casos de estudio desarrollados para implementar el algoritmo de Asad (2005) se exponen en este apartado. El primer caso de estudio se encuentra en Dagdelen y Mohammad (1997). El segundo caso de estudio es posible hallarlo en Asad (2005). Aquí, el primer caso lleva por denominación “Caso 2A”, por su parte el segundo caso se denominará “Caso 2B”.

i. Caso 2A

Los parámetros técnico-económicos y la distribución tonelaje-ley se muestran en las tablas 9 y 10 respectivamente:

Tabla 9. Parámetros técnico-económicos caso 2A.

Símbolo	Parámetro	Valor	Unidad
M	Capacidad mina	10.000.000	t/año
C	Capacidad concentración	5.000.000	t/año
R₁	Capacidad refinación cobre	50.000	t/año
R₂	Capacidad refinación oro	150.000	oz/año
S₁	Precio venta cobre	2.100	\$/t
S₂	Precio venta oro	385	\$/oz
m	Costo mina	2,5	\$/t
c	Costo concentración	5,5	\$/t
sh	Costo manejo	1,125	\$/t
r₁	Costo refinación cobre	100	\$/t
r₂	Costo refinación oro	5	\$/oz
f	Costos fijos	3.500.000	\$/año
y₁	Recuperación cobre	90	%
y₂	Recuperación oro	80	%
d	Tasa de descuento	15	%

Tabla 10. Distribución tonelaje-ley caso 2A.

Rangos de ley de mineral			Cobre: Rango [%], Material [t]								
			0,0000	0,0025	0,0035	0,0045	0,0055	0,0065	0,0075	0,0085	0,0095
			0,0025	0,0035	0,0045	0,0055	0,0065	0,0075	0,0085	0,0095	0,0200
Oro: Rango [lb/t], Material [t]	0,000	0,015	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5
	0,015	0,020	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	0,020	0,025	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	0,025	0,030	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	0,030	0,035	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5	0,5
	0,035	0,040	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	0,040	0,045	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	0,045	0,050	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0
	0,050	0,055	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5	1,5

ii. Caso 2B

En las tablas 11 y 12 se muestran los parámetros técnico-económicos y la distribución tonelaje-ley para el caso de estudio:

Tabla 11. Parámetros técnico-económicos caso 2B.

Símbolo	Parámetro	Valor	Unidad
M	Capacidad mina	4.000.000	t/año
C	Capacidad concentración	2.000.000	t/año
R₁	Capacidad refinación cobre	15.000	t/año
R₂	Capacidad refinación oro	80.000	oz/año
S₁	Precio venta cobre	2.100	\$/t
S₂	Precio venta oro	420	\$/oz
m	Costo mina	1,5	\$/t
c	Costo concentración	3.5	\$/t
sh	Costo manejo	0.675	\$/t
r₁	Costo refinación cobre	500	\$/t
r₂	Costo refinación oro	50	\$/oz
f	Costos fijos	2.000.000	\$/año
y₁	Recuperación cobre	90	%
y₂	Recuperación oro	80	%
d	Tasa de descuento	15	%

Tabla 12. Distribución tonelaje-ley caso 2B.

Rangos de ley de mineral			Cobre: Rango [%], Material [t]				
			0,00	0,02	0,03	0,04	>0,05
			0,02	0,03	0,04	0,05	
Oro: Rango [lb/t], Material [t]	0,000	0,025	963.250	834.670	987.650	824.870	977.640
	0,025	0,035	782.450	928.780	887.780	954.480	853.760
	0,035	0,045	954.760	919.830	692.870	673.780	839.860
	0,045	0,055	827.380	739.390	842.670	689.290	658.540
	0,055	0,065	853.890	794.790	947.870	824.890	875..780
	0,065	0,075	682.760	823.760	983.480	974.590	773.830
	0,075	0,085	754.870	859.940	991.650	873.480	930.580
	0,085	0,095	747.780	759.570	693.390	962.380	878.470
	>0.095		927.470	797.780	892.480	989.870	627.780

5. Resultados

A continuación, se presenta un resumen de los resultados experimentales obtenidos en la implementación de los casos de estudio respectivo a las etapas I y II de la metodología. El resumen de los resultados experimentales, se organizan por etapa y enfoque para caso de estudio. El contenido del resumen corresponde al beneficio total del plan de leyes de corte, el VAN correspondiente al primer año y la vida útil calculada de la operación.

5.1 Resultados etapa I: Implementación de algoritmo de Lane (1964)

En este apartado se presenta el resumen de los resultados experimentales para caso 1A y 1B en las tablas 13 y 14 respectivamente.

5.1.1 Resultados caso 1A

Tabla 13. Resumen de resultados experimentales caso 1A.

Enfoque	Beneficio [USD]	VAN [USD] (Primer año)	Vida útil [año]
Maximización beneficio	2600,04	1174,9	12
Maximización VAN	2.682,7	1254,9	11
Diferencia	3,179%	6,809%	-8,333%

5.1.2 Resultados caso 1B

Tabla 14. Resumen de resultados experimentales caso 1B.

Enfoque	Beneficio [USD]	VAN [USD] (Primer año)	Vida útil [año]
Maximización beneficio	162.154.443	90.375.913	8
Maximización VAN	167.333.920	94.379.334	7
Diferencia	3,194%	4,430%	-12,5%

5.2 Resultados etapa II: Implementación de algoritmo de Asad (2005)

En esta sección se presenta el resumen de los resultados experimentales para caso 2A y 2B en las tablas 15 y 16 respectivamente.

5.2.1 Resultados caso 2A

Tabla 15. Resumen de resultados experimentales caso 2A.

Enfoque	Beneficio [USD]	VAN [USD] (Primer año)	Vida útil [año]
Sin acopio	868.045.800	395.281.600	13
Con acopio	964.552.530	407.511.500	16
Diferencia	11,118%	3,094%	23,077%

5.2.2 Resultados caso 2B

Tabla 16. Resumen de resultados experimentales caso 2B.

Enfoque	Beneficio [USD]	VAN [USD] (Primer año)	Vida útil [año]
Sin acopio	461.312.732	193.499.000	15
Con acopio	541.652.470	200.394.300	20
Diferencia	17,415%	3,563%	33,333%

La totalidad de los resultados experimentales, incluyendo el plan de leyes de corte para toda la vida de la operación, las cantidades de material minado, concentrado y refinado, así como el beneficio y el VAN por período, se presentan de forma detallada y estructurada en el Anexo C de este documento.

5.3 Análisis y discusión de resultados

5.3.1 Análisis y discusión de resultados etapa I

Los resúmenes de los resultados de esta etapa, presentados en las tablas 13 y 14, muestran una comparativa en los resultados por medio de la diferencia porcentual entre los enfoques. En ambos casos, el enfoque de maximización de VAN produce y un beneficio mayor que el enfoque de maximización del beneficio. Sin embargo, en ambos casos, ocurre una disminución en la vida útil del proyecto. Esto indica que a pesar de que el objetivo del enfoque de VAN no es el beneficio, si resulta en un beneficio total superior. Por otro lado, la vida útil sufre una disminución en ambos casos, esto se puede explicarse por medio de la estrategia de maximización de VAN. Esta toma en cuenta el valor del dinero en el tiempo, tendiendo a recuperar la inversión y generar los mayores flujos de efectivo en un período más corto, explotando el mineral de alta ley en periodos tempranos de la operación.

5.3.2 Análisis y discusión de resultados etapa II

En ambos casos, el enfoque que incorpora acopio de mineral demuestra ser más eficaz respecto al enfoque que no lo considera. Existe un incremento tanto en beneficio, VAN y vida útil para los dos casos. Si bien el incremento en el VAN no es significativo si se compara con el incremento del beneficio total, el porcentaje de aumento demuestra refuerza la idea que la incorporación de acopio es una estrategia favorable enfocada en mejorar la rentabilidad y duración de la operación. Es precisamente en la duración donde se deja ver la ventaja más notable de la estrategia de acopio, pues resalta la capacidad de este de extender la operación al procesar material valioso que hubiese sido clasificado como estéril y enviado a botadero de no haber existido esta opción.

6. Conclusiones

A partir del trabajo realizado e informado en el presente documento, se advierte principalmente:

- Una estrategia de ley de corte variables resulta eficaz por sobre una de leyes constante, tanto en términos de VAN como de beneficio total. Este resultado respalda la primera parte de la hipótesis planteada.
- La estrategia de incorporar acopio de mineral incrementa el beneficio total, el VAN de la operación y la vida útil, lo cual respalda la segunda parte de la hipótesis que fue planteada.
- Existe un aprovechamiento del recurso mineral disponible al incorporar acopio, debido al aprovechamiento en etapas tardías del proyecto, del recurso que no fue posible procesar en etapas tempranas.
- El algoritmo de optimización implementado demostró ser funcional y arrojar resultados satisfactorios que se alinean con los objetivos e hipótesis propuestos. Durante la labor de la presente memoria, se advirtió que el algoritmo de técnica de técnica por grillas es altamente sensible a cambios en algunos de sus parámetros y que por lo tanto, resulta sumamente complicado, replicar 100% algún caso de estudio, sino se explicitan del todo todos los parámetros con los cuales se trabaja para llevar a cabo dicha labor.

6.1 Trabajo futuro

Como trabajo futuro que puede ser aplicado sobre lo realizado en este proyecto se menciona:

- Realizar un análisis de sensibilidad: Debido a que se mencionó que el algoritmo contiene variables que influyen altamente en los resultados, es posible realizar un análisis de sensibilidad al modificar cualquier parámetro técnico-económico o variable dentro del algoritmo que se desee estudiar.
- Extender y aplicar la metodología a tres minerales: La metodología del algoritmo de búsqueda de técnica por grillas, es extrapolable a depósitos que contienen tres e incluso más minerales. Los autores Ataei y Osanloo (2004) proporcionan la base metodológica para llevar a cabo dicha tarea.
- Extender y aplicar la metodología a tres minerales y acopio: De la misma forma que la metodología puede ser extendida para ser aplicada en tres minerales, se puede sobre esa extensión incorporar la metodología para también poder contemplar acopio de mineral.

7. Referencias

- Abdollahisharif, J., Bakhtavar, E., & Anemangely, M. (2012). Optimal cut-off grade determination based on variable capacities in open-pit mining. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 112(12), 1065-1069.
- Asad, M. W. A. (2005). Cutoff grade optimization algorithm with stockpiling option for open pit mining operations of two economic minerals. *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment*, 19(3), 176-187.
- Asad, M. (2007). Optimum cut-off grade policy for open pit mining operations through net present value algorithm considering metal price and cost escalation. *Engineering Computations*, 24(7), 723–736. <https://doi.org/10.1108/026444400710817961>
- Asad, M. W. A., & Topal, E. (2011). Net present value maximization model for optimum cut-off grade policy of open pit mining operations. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 111(11), 741-750.
- Asad, M. W. A., & Dimitrakopoulos, R. (2013). A heuristic approach to stochastic cutoff grade optimization for open pit mining complexes with multiple processing streams. *Resources Policy*, 38(4), 591-597.
- Asad, M. W. A., Qureshi, M. A., & Jang, H. (2016). A review of cut-off grade policy models for open pit mining operations. *Resources Policy*, 49, 142-152.
- Ataei, M., & Osanloo, M. (2003). Methods for calculation of optimal cutoff grades in complex ore deposits. *Journal of Mining Science*, 39, 499-507.
- Ataei, M., & Osanloo, M. (2004). Using a combination of genetic algorithm and the grid search method to determine optimum cutoff grades of multiple metal deposits. *International Journal of Surface Mining, Reclamation and Environment*, 18(1), 60-78.
- Bascetin, A., & Nieto, A. (2007). Determination of optimal cut-off grade policy to optimize NPV using a new approach with optimization factor. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 107(2), 87–94.

Cetin, E., & Dowd, P. A. (2002). The use of genetic algorithms for multiple cut-off grade optimisation.

Cetin, E., & Dowd, P. A. (2013). Multi-mineral cut-off grade optimization by grid search. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 113(8), 659-665.

Dagdelen, K. (1992). Cut-off grade optimization. In Y. T. Bhappu & R. J. Mutmanský (Eds.), *Proceedings of the 23rd International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Minerals Industries (APCOM 1992)* (pp. 157–165). Tucson, AZ: Society for Mining, Metallurgy, and Exploration.

Dagdelen, K. (1993). An NPV optimization algorithm for open pit mine design. In *Proceedings of the 24th International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Minerals Industries (APCOM 1993)* (pp. 257–263). Montreal, Canada: Canadian Institute of Mining, Metallurgy, and Petroleum.

Dagdelen, K., & Mohammed, W. A. A. (1997). Multi mineral cutoff grade optimization with option to stockpile. *PREPRINTS-SOCIETY OF MINING ENGINEERS OF AIME*.

Gholamnejad, J. (2008). Determination of the optimum cutoff grade considering environmental cost. *J. Int. Environmental Application & Science*, 3(3), 186-194.

Gholamnejad, J. (2009). Incorporation of rehabilitation cost into the optimum cut-off grade determination. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 109(2), 89-94.

Githiria, J., & Musingwini, C. (2019). A stochastic cut-off grade optimization model to incorporate uncertainty for improved project value. *Journal of the Southern African institute of mining and metallurgy*, 119(3), 217-228.

Hall, B. (2014). *Cut-off grades and optimising the strategic mine plan*. The Australasian Institute of Mining and Metallurgy.

Hustrulid, W., Kuchta, M., & Martin, R. (2013). *Open pit mine planning & design* (3rd ed.).

Jélvez, E. (2017). *Metodología multietapa para la planificación de la producción de largo plazo en minas a rajo abierto bajo incertidumbre geológica* [Tesis de doctorado, Universidad de Chile]. Repositorio de la Universidad de Chile. <https://repositorio.uchile.cl/handle/2250/145983>

- Khodayari, A., & Jafarnejad, A. (2012). Cut-off grade optimization for maximizing the output rate. *International Journal of Mining and Geo-Engineering*, 46(2), 157-162.
- Lane, K. F. (1964). Choosing the optimum cut-off grade. *Quarterly of the Colorado School of Mines*, 59(4), 811-829.
- Lane, K. F. (1984). Cut-off grades for two minerals. In *Proceedings of the 18th International Symposium on the Application of Computers and Operations Research in the Minerals Industries (APCOM 1984)* (pp. 485–492). London, UK: International APCOM Symposium.
- Lane, K. F. (1988). *The economic definition of ore cutoff grades in theory and practice*. London, UK: Mining Journal Books.
- Mason, P. M. (1984). Capital and operational planning for open pit in a modern economy. In *Proceedings of the 18th International Symposium on the Application of Computers and Mathematics in the Mineral Industry* (pp. 791–802). London, UK: Institute of Materials, Minerals and Mining.
- Osanloo, M., & Ataei, M. (2003). Using equivalent grade factors to find the optimum cut-off grades of multiple metal deposits. *Minerals Engineering*, 16(8), 771-776.
- Osanloo, M., Rashidinejad, F., & Rezai, B. (2008a). Incorporating environmental issues into optimum cut-off grades modeling at porphyry copper deposits. *Resources Policy*, 33(4), 222–229. <https://doi.org/10.1016/j.resourpol.2008.06.001>
- Osanloo, M., Gholamnejad, J., & Karimi, B. (2008b). Long-term open pit mine production planning: a review of models and algorithms. *International Journal of Mining, Reclamation and Environment*, 22(1), 3–35. <https://doi.org/10.1080/17480930601118947>
- Rendu, J. M. (2009). Cut-off grade estimation—old principles revisited—application to optimisation of net present value and internal rate of return. *Orebody Modelling and Strategic Mine Planning, Perth*, 165-169.
- Schellman, M. G. (1989). Determination of an optimum cutoff grade policy considering the stockpile alternative. *1980-1989-Mines Theses & Dissertations*.

Whittle, J. (1989). *The facts and fallacies of open pit optimization* (pp. 1–7). Whittle Programming Pty Ltd.

Whittle, D., & Vassiliev, P. (1998, October). Synthesis of stochastic recovery prediction and cutoff optimization. In *Mine to Mill Conference* (pp. 53-55).

8. Anexo A: Recursos Algoritmo de Lane

8.1 Deducción matemática de las leyes de corte limitantes según enfoque de maximización de beneficio

8.1.1 Ley de corte limitante mina para maximización de beneficio

Recordemos que esta ley se basa en la suposición de que el proceso mina, es decir, la tasa de extracción es la limitante del sistema. Se comienza tomando la expresión básica del beneficio dada por ecuación (4):

$$P = (s - r) * Q_r - c * Q_c - m * Q_m - f * T \quad (4)$$

Si la capacidad mina es la limitante, entonces el tiempo necesario minar una cantidad de material Q_m es:

$$T_m = \frac{Q_m}{M} \quad (7)$$

Reemplazando la ecuación (7) en (4):

$$P = (s - r) * Q_r - c * Q_c - \left(m + \frac{f}{M}\right) * Q_m$$

Se toma la derivada de la nueva expresión de P con respecto a g para encontrar la ley g que maximiza el beneficio, esto se refleja en la ecuación (8):

$$\frac{dP}{dg} = (s - r) * \frac{dQ_r}{dg} - c * \frac{dQ_c}{dg} - \left(m + \frac{f}{M}\right) * \frac{dQ_m}{dg} \quad (8)$$

Sin embargo, la cantidad por minar es independiente de la ley:

$$\frac{dQ_m}{dg} = 0 \quad (9)$$

Esto convierte la ecuación (8) a la ecuación (10):

$$\frac{dP}{dg} = (s - r) * \frac{dQ_r}{dg} - c * \frac{dQ_c}{dg} \quad (10)$$

La cantidad por refinar Q_r está relacionada con la cantidad a concentrar Q_c mediante la relación de la ecuación (11):

$$Q_r = \bar{g} * y * Q_c \quad (11)$$

Donde:

- $\bar{g}$: Ley media enviada a concentración
- y : Recuperación (parámetro de entrada del algoritmo)

Si se toma la derivada de Q_r con respecto a g se tiene:

$$\frac{dQ_r}{dg} = \bar{g} * y * \frac{dQ_c}{dg} \quad (12)$$

Sustituyendo la ecuación (12) en la ecuación (10):

$$\frac{dP}{dg} = [(s - r) * \bar{g} * y - c] * \frac{dQ_c}{dg} \quad (13)$$

Se busca el valor más bajo de $\bar{g}$ que cumpla con:

$$\frac{dP}{dg} = 0 \quad (14)$$

Por lo tanto, la ley de corte g_m basada en que la mina es el proceso limitante, corresponde al valor de g dado por la ecuación (15):

$$g_m = \bar{g} = \frac{c}{y*(s-r)} \quad (15)$$

8.1.2 Ley de corte limitante concentración para maximización de beneficio

Esta ley de corte se basa en el supuesto de que el proceso concentración por sí solo es el que limita al sistema. Tomando la expresión básica del beneficio dada por la ecuación (4) y considerando que el tiempo requerido para concentrar la cantidad Q_c es:

$$T_c = \frac{Q_c}{c} \quad (16)$$

Sustituyendo esta ecuación (16) en (4):

$$P = (s - r) * Q_r - (c + \frac{f}{c}) * Q_c - m * Q_m \quad (17)$$

Se toma la derivada de esta nueva expresión de P con respecto a g para hallar la ley g que maximice el beneficio:

$$\frac{dP}{dg} = (s - r) * \frac{dQ_r}{dg} - (c + \frac{f}{c}) * \frac{dQ_c}{dg} - m * \frac{dQ_m}{dg} \quad (18)$$

La cantidad por minar es independiente de la ley de mineral:

$$\frac{dQ_m}{dg} = 0 \quad (19)$$

En este caso, la cantidad por refinar Q_r está relacionada con la cantidad a concentrar Q_c mediante la relación de la ecuación (20):

$$\frac{dQ_r}{dQ_c} = g * y \quad (20)$$

Reemplazando (20) y (19) en (18), da como resultado:

$$\frac{dQ_r}{dg} = \frac{(c + \frac{f}{c})}{(s - r)} = g * y \quad (21)$$

En consecuencia, la ley de corte g_c basada en que concentración es el proceso limitante, corresponde al valor de g dado por la ecuación (22):

$$g_c = g = \frac{c + \frac{f}{c}}{(s - r) * y} \quad (22)$$

8.1.3 Ley de corte limitante refinación para maximización de beneficio

Esta ley de corte se basa en la suposición de que el proceso de refinación por si solo es el que limita al sistema. Si se toma la expresión básica del beneficio dada por la ecuación (4) y considerando que el tiempo requerido para refinar la cantidad Q_r es:

$$T_r = \frac{Q_r}{R} \quad (23)$$

Si se sustituye la ecuación (23) en (4), entonces:

$$P = (s - r) * Q_r - c * Q_c - m * Q_m - f * \frac{Q_r}{R} \quad (24)$$

Para hallar la ley g que maximice el beneficio, se toma la derivada de la nueva expresión de P con respecto a g , resultando en (25):

$$\frac{dP}{dg} = \left(s - r - \frac{f}{R}\right) * \frac{dQ_r}{dg} - c * \frac{dQ_c}{dg} - m * \frac{dQ_m}{dg} \quad (25)$$

La cantidad por minar es independiente de la ley de mineral:

$$\frac{dQ_m}{dg} = 0 \quad (26)$$

En este caso, la cantidad por refinar Q_r está relacionada con la cantidad a concentrar Q_c mediante la relación de la ecuación (27):

$$\frac{dQ_r}{dQ_c} = g * y \quad (27)$$

Al sustituir (26) y (27) en (25), se obtiene:

$$\left(s - r - \frac{f}{R}\right) * \frac{dQ_r}{dg} = c * \frac{dQ_c}{dg} \quad (28)$$

Finalmente, la ley de corte g_r que considera la refinación como proceso limitante, es el valor de g dado por la ecuación (29):

$$g_r = g = \frac{c}{\left(s - r - \frac{f}{R}\right) * y} \quad (29)$$

8.2 Deducción matemática de las leyes de corte limitantes según enfoque de maximización de VAN

8.2.1 Deducción matemática de la contribución marginal para operaciones de un mineral

En el algoritmo de Lane con enfoque en la maximización, se incorpora un nuevo concepto: la contribución marginal, esta según Hustrulid et al. (2013) es una cantidad que cuantifica el decaimiento entre el valor presente de las reservas entre los tiempos $t = 0$ y un tiempo $t = T$. A continuación, se detalla cómo se establece esta cantidad. Se debe tener presente que el objetivo es la maximización del VAN del proyecto, para ello se comienza considerando que existen dos beneficios en un tiempo t :

- Beneficio presente (P): Beneficio obtenido en el período actual T .
- Beneficio futuro (W): Beneficio producido por el valor del mineral remanente después de extraer una cantidad Q_m en un tiempo T .

Para deducir la expresión de la contribución marginal, se debe calcular el VAN trayendo al valor actual el beneficio presente y futuro, ambos descontados a la tasa de descuento d :

$$PV_p(t = 0) = \frac{P}{(1+d)^T} \quad (30)$$

$$PV_w(t = 0) = \frac{W}{(1+d)^T} \quad (31)$$

Donde:

- PV_p : Valor actual neto debido al beneficio P realizado en el período T por minar la cantidad Q_m
- PV_w : Valor actual neto debido a la suma de los beneficios P_i realizado en el período T_i hasta los periodos $i = N$

La relación entre PV_p y PV_w se puede comprender de manera gráfica según la figura (2) mostrada a continuación:

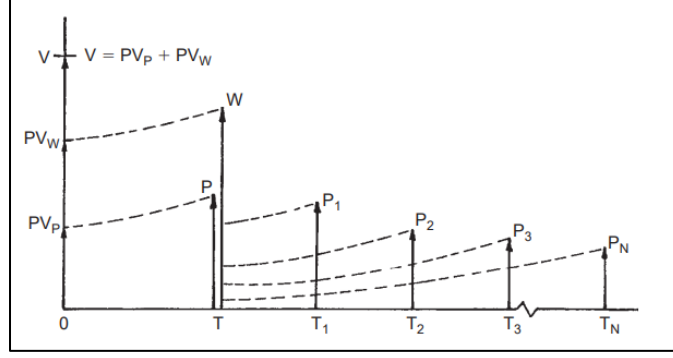


Figura 2. Representación gráfica entre los valores presentes y futuros.

Nota: Adaptado de Open pit mine planning & design (p. 562), por Hustrulid et al. 2013.

El valor presente total V es la suma de ambos valores (30) y (31):

$$V = PV_P + PV_W = \frac{P+W}{(1+d)^T} \quad (32)$$

Para valores de T muy pequeños, puede ser empleada la siguiente aproximación:

$$(1 + d)^T \approx 1 + T * d \quad (33)$$

Al reorganizar la ecuación (32) para expresar $W + P$ en términos de V y utilizando la aproximación anterior:

$$W + P = V * (1 + T * d) \quad (34)$$

Estratégicamente se despeja la diferencia entre el valor presente V y el valor futuro W . De esta manera, la ecuación resultante $V - W$ representa el beneficio presente P menos el costo de oportunidad de posponer el valor V , representado por $V * T * d$ en la ecuación (35):

$$V - W = P - V * T * d \quad (35)$$

A la expresión anterior se le conoce como la contribución marginal v al VAN:

$$v = P - V * T * d \quad (36)$$

Al sustituir P según su definición en ecuación (4), se obtiene:

$$v = (s - r) * Q_r - c * Q_c - m * Q_m - T * (f + d * V) \quad (37)$$

Esta es la función que debe maximizarse para encontrar la ley óptima que maximiza el VAN.

8.2.2 Ley de corte limitante mina para maximización de VAN

Esta ley se basa en la suposición de que el proceso mina, es decir, la tasa de extracción es la única limitante del sistema. A diferencia del enfoque en maximización beneficio, en donde se tomaba la expresión básica del beneficio, aquí la función que debe maximizarse es la contribución marginal, dada por la ecuación (37):

$$v = (s - r) * Q_r - c * Q_c - m * Q_m - T * (f + d * V) \quad (37)$$

Si la capacidad mina es la limitante, entonces el tiempo necesario minar una cantidad de material Q_m es:

$$T_m = \frac{Q_m}{M} \quad (7)$$

Reemplazando la ecuación (7) en (37):

$$v_m = (s - r) * Q_r - c * Q_c - \left(m + \frac{f + d * V}{M}\right) * Q_m \quad (38)$$

Se toma la derivada de la nueva expresión de v_m con respecto a g para encontrar la ley g que maximiza el VAN:

$$\frac{dv_m}{dg} = (s - r) * \frac{dQ_r}{dg} - c * \frac{dQ_c}{dg} - \left(m + \frac{f + d * V}{M}\right) * \frac{dQ_m}{dg} \quad (39)$$

Sin embargo, la cantidad por minar es independiente de la ley:

$$\frac{dQ_m}{dg} = 0 \quad (40)$$

Esto convierte la ecuación (39) a la ecuación (41):

$$\frac{dv_m}{dg} = (s - r) * \frac{dQ_r}{dg} - c * \frac{dQ_c}{dg} \quad (41)$$

La cantidad por refinar Q_r está relacionada con la cantidad a concentrar Q_c de tal manera que convierte la ecuación (41) en:

$$\frac{dv_m}{dg} = [(s - r) * y * \bar{g} - c] * \frac{dQ_c}{dg} \quad (42)$$

Se busca el valor más bajo de $\bar{g}$ que cumpla con:

$$\frac{dv_m}{dg} = 0 \quad (43)$$

Por lo tanto, la ley de corte g_m basada en que la mina es el proceso limitante, corresponde al valor de g dado por la ecuación (44):

$$g_m = \bar{g} = \frac{c}{y^*(s-r)} \quad (44)$$

8.2.3 Ley de corte limitante concentración para maximización de VAN

Esta ley de corte se basa en el supuesto de que el proceso concentración por sí solo es el que limita al sistema. Al tomar la expresión de contribución marginal según ecuación (37) y considerando que el tiempo requerido para concentrar la cantidad Q_c es:

$$T_c = \frac{Q_c}{c} \quad (16)$$

Sustituyendo esta ecuación (16) en (37):

$$v_c = (s - r) * Q_r - (c + \frac{f+d*V}{c}) * Q_c - m * Q_m \quad (45)$$

Se toma la derivada de esta nueva expresión de v_m con respecto a g para hallar la ley g que maximice el VAN:

$$\frac{dv_c}{dg} = (s - r) * \frac{dQ_r}{dg} - (c + \frac{f+d*V}{c}) * \frac{dQ_c}{dg} - m * \frac{dQ_m}{dg} \quad (46)$$

La cantidad por minar es independiente de la ley de mineral:

$$\frac{dQ_m}{dg} = 0 \quad (47)$$

En este caso, la cantidad por refinar Q_r está relacionada con la cantidad a concentrar Q_c mediante la relación de la ecuación (48):

$$\frac{dQ_r}{dQ_c} = g * y \quad (48)$$

Reemplazando (47) y (48) en (46), da como resultado:

$$\frac{dQ_r}{dg} = \frac{(c + \frac{f+d*V}{c})}{(s-r)} = g * y \quad (49)$$

En consecuencia, la ley de corte g_c basada en que concentración es el proceso limitante, corresponde al valor de g dado por la ecuación (50):

$$g_c = g = \frac{c + \frac{f+d*V}{c}}{(s-r)*y} \quad (50)$$

8.2.4 Ley de corte refinación para maximización de VAN

Esta ley de corte se basa en la suposición de que el proceso de refinación por sí solo es el que limita al sistema. Si se toma la expresión de contribución marginal dada por la ecuación (37) y considerando que el tiempo requerido para refinar la cantidad Q_r es:

$$T_r = \frac{Q_r}{R} \quad (23)$$

Si se sustituye la ecuación (23) en (37), entonces:

$$v_r = (s - r) * Q_r - c * Q_c - m * Q_m - f * \frac{Q_r}{R} \quad (51)$$

Para hallar la ley g que maximice el VAN, se toma la derivada de la nueva expresión de v_r con respecto a g , resultando en (52):

$$\frac{dv_r}{dg} = \left(s - r - \frac{f}{R}\right) * \frac{dQ_r}{dg} - c * \frac{dQ_c}{dg} - m * \frac{dQ_m}{dg} \quad (52)$$

La cantidad por minar es independiente de la ley de mineral:

$$\frac{dQ_m}{dg} = 0 \quad (53)$$

En este caso, la cantidad por refinar Q_r está relacionada con la cantidad a concentrar Q_c mediante la relación de la ecuación (54):

$$\frac{dQ_r}{dQ_c} = g * y \quad (54)$$

Al sustituir (53) y (54) en (52), se obtiene:

$$\left(s - r - \frac{f}{R}\right) * \frac{dQ_r}{dg} = c * \frac{dQ_c}{dg} \quad (55)$$

Finalmente, la ley de corte g_r que considera la refinación como proceso limitante, es el valor de g dado por la ecuación (56):

$$g_r = g = \frac{c}{\left(s - r - \frac{f + d * V}{R}\right) * y} \quad (56)$$

8.3 Determinación de leyes de corte de equilibrio Algoritmo de Lane

La forma de encontrar las leyes de corte balanceadas que se describe a continuación es la que puede hallarse en Hustrulid et al. (2013). Deben calcularse las cantidades Q_m , Q_c , Q_r y T bajo tres escenarios: mina es el proceso limitante, concentración es el proceso limitante y refinación es el proceso limitante. Luego estas cantidades se deben emplear para ser remplazadas en la expresión de beneficio en la ecuación (4); esto generará a su vez tres subexpresiones de P : P_m , P_c y P_r . A su vez, para cada subexpresión P_i , se tendrán tantos valores como rangos se evalúen para cada escenario, ya que, para cada escenario, se deben calcular los valores de P_i para cada ley presente en la distribución tonelaje-ley. La idea es generar una tabla de P_m , P_c y P_r en función de las leyes de cada rango, como se vería en la tabla (17):

Tabla 17. Generación de P_m , P_r y P_c en función de leyes de mineral en cada rango.

Rango de ley (g_i)	Q_m	Q_c	Q_r	T	P_m	P_c	P_r
g_1	$Q_m(g_1)$	$Q_c(g_1)$	$Q_r(g_1)$	$T(g_1)$	$P_m(g_1)$	$P_c(g_1)$	$P_r(g_1)$
g_2	$Q_m(g_2)$	$Q_c(g_2)$	$Q_r(g_2)$	$T(g_2)$	$P_m(g_2)$	$P_c(g_2)$	$P_r(g_2)$
...	...	...	...	...	...	...	...
g_k	$Q_m(g_k)$	$Q_m(g_k)$	$Q_m(g_k)$	$T(g_k)$	$P_m(g_k)$	$P_c(g_k)$	$P_r(g_k)$

Con los valores calculados se prosigue a realizar una gráfica que integre a P_m , P_c y P_r , como se muestra a modo de ejemplo en la figura (). Se observa que hay tres intersecciones en la gráfica, estas corresponden a las leyes de corte balanceadas: g_{mc} , g_{mr} y g_{cr} .

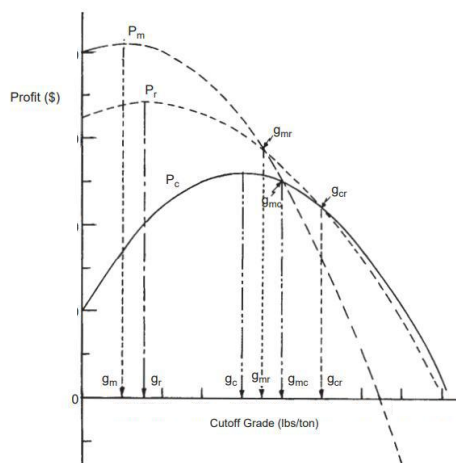


Figura 3. Ejemplo de gráfica de P_m , P_c y P_r en función de ley de mineral bajo distintos procesos limitantes.

Nota: Adaptado de Open pit mine planning & design (p. 557), por Hustrulid et al. 2013.

8.4 Cálculo de leyes de corte para cada par de etapas y ley de corte global Algoritmo de Lane

El cálculo estas leyes de corte es sumamente sencillo y directo, para ello solo deben seguirse las reglas definidas a según:

- Regla para mina-concentración:

$$G_{mc} = \begin{cases} g_m & \text{si } g_{mc} \leq g_{mr} \\ g_c & \text{si } g_{mc} \geq g_c \\ g_{mc} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (57)$$

- Regla para mina-refinación:

$$G_{mr} = \begin{cases} g_m & \text{si } g_{mr} \leq g_m \\ g_r & \text{si } g_{mr} \geq g_r \\ g_{mr} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (58)$$

- Regla para concentración-refinación:

$$G_{cr} = \begin{cases} g_r & \text{si } g_{cr} \leq g_r \\ g_c & \text{si } g_{cr} \geq g_c \\ g_{cr} & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (59)$$

- Regla para la ley de corte global:

$$G = \text{valor medio de } \{G_{mc}, G_{mr}, G_{cr}\} \quad (60)$$

8.5 Metodología para actualización de distribución tonelaje-ley de un mineral

Esta actualización de la distribución puede hacerse siguiendo la siguiente fórmula dada, por la ecuación (61):

$$T'_{gi} = T_{gi} - \left[\frac{T_{gi}}{T_{zona}} * Q' \right] \quad (61)$$

Donde:

- T'_{gi} : Nuevo tonelaje en el rango g_i
- T_{gi} : Tonelaje actual en el rango g_i
- T_{zona} : Corresponde a la suma de tonelaje en la zona bajo o sobre la ley de corte
- Q' : Cantidad a extraer según se está sobre o bajo la ley de corte.
Sobre la ley de corte, la cantidad a extraer es Q_c ;
bajo la ley de corte, la cantidad a extraer es $Q_m - Q_c$

Con el propósito de ejemplificar, si se tiene una distribución tonelaje-ley con cuatro rangos de mineral g_i , los cuales tienen asociado cada uno su tonelaje $T(g_i)$. La ley de corte obtenida corresponde a g_2 , la cantidad a concentrar es Q_c y la cantidad a minar Q_m , entonces para actualizar en cada rango el tonelaje se debe seguir la relación dada en la tabla (18):

Tabla 18. Actualización de distribución tonelaje-ley para un mineral.

Rango de ley (g_i)	Tonelaje ($T(g_i)$)	Nuevo tonelaje $T'_{(gi)}$
g_1	$T(g_1)$	$T_{gi} - \left[\frac{T_{gi}}{T_{g1} + T_{g2}} * (Q_m - Q_c) \right]$
g_2	$T(g_2)$	$T_{gi} - \left[\frac{T_{gi}}{T_{g1} + T_{g2}} * (Q_m - Q_c) \right]$
Punto de “quiebre” de la ley de corte: Aquí se separan las zonas.		
g_3	$T(g_3)$	$T_{gi} - \left[\frac{T_{gi}}{T_{g2} + T_{g4}} * (Q_c) \right]$
g_4	$T(g_4)$	$T_{gi} - \left[\frac{T_{gi}}{T_{g3} + T_{g4}} * (Q_c) \right]$
Total	$\sum T(g_i)$	$\sum T'(g_i)$

9. Anexo B: Recursos algoritmo de Asad

9.1 Ecuaciones para construir grillas de cantidades en algoritmo de Asad

Para efectos de cálculo, un rango de mineral 1, $[g_1(k)-g_1(k+1)]$ se denota como k^* . De manera análoga, un rango de mineral 2, $[g_2(m)-g_2(m+1)]$, es representado como m^* . En esta notación, $g_1(k)$ y $g_2(m)$ corresponden a las leyes de corte de k^* y m^* respectivamente. Considerando que k^* toma la forma de cada rango de mineral 1 y m^* cada rango de mineral 2, es posible construir las grillas de cantidades para este paso, siguiendo las reglas antes descritas según las ecuaciones (62) a (69):

- Toneladas de ore (mineral)

$$T_o(k^*, m^*) = \sum_{k=k^*}^K \sum_{m=m^*}^M t(k, m) \quad (62)$$

- Toneladas de waste (estéril)

$$T_w(k^*, m^*) = \sum_{k=k^*}^{k^*-1} \sum_{m=m^*}^{m^*-1} t(k, m) \quad (63)$$

- Ley promedio de mineral 1

$$g_{avg1}(k^*) = \frac{\sum_{k=k^*}^K [\sum_{m=m^*}^M t(k, m) (\frac{g_1(k) + g_1(k+1)}{2})]}{T_o(k^*, m^*)} \quad (64)$$

- Ley promedio de mineral 2

$$g_{avg2}(m^*) = \frac{\sum_{k=k^*}^K [\sum_{m=m^*}^M t(k, m) (\frac{g_2(m) + g_2(m+1)}{2})]}{T_o(k^*, m^*)} \quad (65)$$

- Cantidad de material a concentrar

$$Q_c = \begin{cases} C & \text{si } T_o > C \\ T_o & \text{en otro caso} \end{cases} \quad (66)$$

- Cantidad de material a extraer

$$Q_m = Q_c * (1 + \frac{T_w}{T_o}) \quad (67)$$

- Cantidad de material de mineral 1 a refinar

$$Q_{r1} = Q_c * g_{avg1} * y_1 \quad (68)$$

- Cantidad de material de mineral 2 a refinar

$$Q_{r2} = Q_c * g_{avg2} * y_2 \quad (69)$$

9.2 Expresión de contribución marginal en algoritmo de Asad

9.2.1 Deducción matemática de la contribución marginal para operaciones de dos minerales

Si aplicamos un razonamiento idéntico al explicado en el capítulo 8.2.1 (Deducción matemática de la contribución marginal para operaciones de un mineral), se obtiene entonces la expresión de la contribución marginal para operación con dos minerales. Se toma la expresión de beneficio para este escenario, la cual está dada por la ecuación (6), y la expresión de contribución marginal v dada en la ecuación (36):

$$P = \{[(S_1 - r_1) * g_{avg1} * y_1] + [(S_2 - r_2) * g_{avg2} * y_2] - c\} * Q_c - m * Q_m - f * T \quad (6)$$

$$v = P - V * T * d \quad (36)$$

Al reemplazar (6) en (36) da como resultado:

$$v = \{[(S_1 - r_1) * g_{avg1} * y_1] + [(S_2 - r_2) * g_{avg2} * y_2] - c\} * Q_c - m * Q_m - (f + d * V) * T \quad (70)$$

9.2.2 Expresiones de la contribución marginal para operaciones de dos minerales según la etapa limitante

Al haber cuatro etapas que pueden actuar como limitantes: mina, concentración, refinería mineral 1 y refinería mineral 2. La expresión que toma T si mina, concentración, refinería 1 y refinería 2 es la etapa limitante cambia y adopta la forma de las ecuaciones (71), (72), (73) y (74) respectivamente:

$$T = \frac{Q_m}{M} \quad (71)$$

$$T = \frac{Q_c}{c} \quad (72)$$

$$T = \frac{Q_c * g_{avg1} * y_1}{R_1} \quad (73)$$

$$T = \frac{Q_c * g_{avg2} * y_2}{R_2} \quad (74)$$

Si se sustituyen las ecuaciones (71)-(74) en la ecuación (70) se obtiene:

$$v_m = \left\{ (S_1 - r_1) * g_{avg1} * y_1 + (S_2 - r_2) * g_{avg2} * y_2 - c \right\} * Q_c - \left[m + \frac{(f+d*V)}{M} \right] * Q_m \quad (75)$$

$$v_c = \left\{ (S_1 - r_1) * g_{avg1} * y_1 + (S_2 - r_2) * g_{avg2} * y_2 - \left(c + \frac{(f+d*V)}{c} \right) \right\} * Q_c - [m * Q_m] \quad (76)$$

$$v_{r1} = \left\{ \left(S_1 - r_1 - \frac{(f+d*V)}{R_1} \right) * g_{avg1} * y_1 + (S_2 - r_2) * g_{avg2} * y_2 - c \right\} * Q_c - [m * Q_m] \quad (77)$$

$$v_{r2} = \left\{ (S_1 - r_1) * g_{avg1} * y_1 + \left(S_2 - r_2 - \frac{(f+d*V)}{R_2} \right) * g_{avg2} * y_2 - c \right\} * Q_c - [m * Q_m] \quad (78)$$

Donde, cada v_{etapa} representa la fórmula de la ecuación marginal dependiendo de cuál sea la etapa que efectivamente es la limitante del proceso.

Las ecuaciones presentadas en Dagdelen y Asad (1997) para la contribución marginal son:

$$w = \frac{T_o}{T_o + T_w} \quad (79)$$

$$V_m = w * \left[\left((S_1 - r_1) * g_{avg1} * y_1 \right) + \left((S_2 - r_2) * g_{avg2} * y_2 \right) - c \right] - m - \frac{f+dv}{M} \quad (80)$$

$$V_c = w * \left[\left((S_1 - r_1) * g_{avg1} * y_1 \right) + \left((S_2 - r_2) * g_{avg2} * y_2 \right) - \left(c + \frac{f+dv}{c} \right) \right] - m \quad (81)$$

$$V_{r1} = w * \left[\left(\left(S_1 - r_1 - \frac{f+dv}{R_1} \right) * g_{avg1} * y_1 \right) + \left((S_2 - r_2) * g_{avg2} * y_2 \right) - c \right] - m \quad (82)$$

$$V_{r2} = w * \left[\left((S_1 - r_1) * g_{avg1} * y_1 \right) + \left(\left(S_2 - r_2 - \frac{f+dv}{R_2} \right) * g_{avg2} * y_2 \right) - c \right] - m \quad (83)$$

Finalmente, a partir de los resultados obtenidos en la construcción de las grillas anteriores (independiente de cual opción se elija), se puede crear una quinta grilla. En cada punto de esta grilla se encuentra el valor mínimo de los cuatro puntos correspondientes en las cuatro grillas previamente mencionadas. De manera general, esto puede plantearse según la ecuación (84):

$$v_{\text{mínimos}_{ij}} = \text{mín}(v_{m_{ij}}, v_{c_{ij}}, v_{r1_{ij}}, v_{r2_{ij}}) \quad (84)$$

9.2.3 Determinación del valor de la contribución marginal máxima

De manera general, para encontrar el valor de la contribución marginal máxima $v_{m\acute{a}x}$ debe encontrarse el valor máximo dentro de la grilla de mínimos creada en el punto anterior cumpliendo con la relación dada en la ecuación (85):

$$v_{m\acute{a}x} = \text{Max}[\text{Min}(v_m, v_c, v_{r1}, v_{r2})] \quad (85)$$

A modo de ejemplo, si se tiene una grilla de mínimos a partir de una distribución como la presentada en la tabla (19), encontrar $v_{m\acute{a}x}$ no es nada más que encontrar el valor máximo dentro de esa grilla de mínimos:

Tabla 19. Ejemplo de grilla de mínimos.

Grilla mínimos	$[g_1(1), g_1(2)]$	$[g_1(2), g_1(3)]$	...	$[g_1(K-1), g_1(K)]$
$[g_2(1), g_2(2)]$	0.251	0.584	...	0.316
$[g_2(2), g_2(3)]$	0.153	0.987	...	0.287
...	...	...	...	...
$[g_2(M-1), g_2(M)]$	0.788	0.952	...	0.214

En el ejemplo, el valor de $v_{m\acute{a}x}$ es de 0.987.

9.3 Cálculo de resultados del plan de leyes de corte de dos minerales

9.3.1 Determinación de la etapa limitante del proceso y las leyes de corte

La clave para entender cómo se define la etapa limitante radica en la construcción de la grilla de mínimos y en la determinación del valor de $v_{m\acute{a}x}$. Ambos aspectos se detallan en los dos incisos previos dentro de este Anexo.

Una vez que se haya encontrado el valor de $v_{m\acute{a}x}$ se debe identificar la grilla (v_m, v_c, v_{r1}, v_{r2}) a la que este corresponde. La grilla asociada a $v_{m\acute{a}x}$ indica cual es la etapa limitante dentro del proceso. Por ejemplo, si el valor $v_{m\acute{a}x}$ está asociado a la grilla v_c , esta corresponde a la grilla de contribución marginal considerando la etapa de concentración como la limitante del proceso, entonces la etapa limitante del proceso corresponde a la concentración.

Por otro lado, el valor de $v_{m\acute{a}x}$ se encuentra asociado a un rango de ley de mineral 1 y de mineral 2 de forma ordenada. Las leyes correspondientes a ese rango corresponden a las leyes de corte.

9.3.2 Cálculo de la vida de la mina

En el inciso anterior, se explicó la forma de encontrar las leyes de corte para mineral 1 y 2. Estas leyes de corte, contienen inherentemente información capaz de identificar, por medio de un eje coordinado, a cualquier punto de la grilla de distribución tonelaje-ley y, por consiguiente, a cualquier grilla que se construye a partir de esta distribución. La forma en que las leyes de corte calculadas guardan esta información es aprovechada para calcular la vida de la mina o LOM (por sus siglas en inglés: *Life of Mine*). También para calcular este valor, es necesario saber cuál es la etapa que limita el proceso de la operación, lo cual se explicó también anteriormente.

Si las leyes de corte de mineral 1 y 2 son γ_1 y γ_2 respectivamente, la vida de la mina se calcula dependiendo de la etapa limitante del sistema mediante las ecuaciones:

- Si la etapa limitante es mina

$$LOM = \frac{grilla_{ore}(0,0)}{M} \quad (86)$$

Donde:

- $grilla_{ore}(0,0)$: Cantidad total de material disponible para minar
- Si la etapa limitante es concentración

$$LOM = \frac{grilla_{ore}(\gamma_1, \gamma_2)}{C} \quad (87)$$

Donde:

- $grilla_{ore}(\gamma_1, \gamma_2)$: Cantidad de mineral correspondiente a concentrar en las leyes de mineral γ_1 y γ_2

- Si la etapa limitante es refinación de mineral 1

$$LOM = \frac{grilla_{Qr1}(\gamma_1, \gamma_2)}{R_1} \quad (88)$$

Donde:

- $grilla_{Qr1}(\gamma_1, \gamma_2)$: Cantidad de mineral 1 correspondiente a refinar en las leyes de mineral γ_1 y γ_2

- Si la etapa limitante es refinación de mineral 2

$$LOM = \frac{grilla_{Qr2}(\gamma_1, \gamma_2)}{R_2} \quad (89)$$

Donde:

- $grilla_{Qr2}(\gamma_1, \gamma_2)$: Cantidad de mineral 2 correspondiente a refinar en las leyes de mineral γ_1 y γ_2

9.3.3 Cálculo de las cantidades del plan de leyes de corte

Siguiendo el razonamiento aplicado subcapítulos anteriores, la información que guardan las leyes de corte en el eje coordenado es aprovechada para el cálculo de los resultados correspondientes al plan de leyes de corte.

Si las leyes de corte de mineral 1 y 2 son γ_1 y γ_2 respectivamente, entonces cada cantidad puede ser calculada mediante su ecuación respectiva de la manera siguiente:

- Cálculo de Q_m

$$Q_{m(\text{resultado})} = grilla_{Q_m}(\gamma_1, \gamma_2) \quad (90)$$

- Cálculo de Q_c

$$Q_{c(\text{resultado})} = grilla_{Q_c}(\gamma_1, \gamma_2) \quad (91)$$

- Cálculo de Q_{r1}

$$Q_{r1(\text{resultado})} = grilla_{Q_{r1}}(\gamma_1, \gamma_2) \quad (92)$$

- Cálculo de Q_{r2}

$$Q_{r2(\text{resultado})} = grilla_{Q_{r2}}(\gamma_1, \gamma_2) \quad (93)$$

- Beneficio anual: Se utiliza la expresión de beneficio dada por la ecuación (6):

$$P = \{[(S_1 - r_1) * g_{avg1}(\gamma_1, \gamma_2) * y_1] + [(S_2 - r_2) * g_{avg2}(\gamma_1, \gamma_2) * y_2] - c\} * Q_c - m * Q_m - f * T$$

Donde debe tenerse en cuenta:

$$T = \begin{cases} 1 & \text{si } LOM \geq 1 \\ LOM & \text{si } LOM < 1 \end{cases} \quad (94)$$

- VAN

$$VAN = \frac{P * [(1+d)^{LOM} - 1]}{d(1+d)^{LOM}} \quad (95)$$

9.4 Metodología para realizar la expansión de una grilla

Para aplicar el procedimiento de expansión de una grilla se debe:

- I. Identificar los rangos a subdividir: Se identifican los rangos de ley de mineral 1 y mineral 2 en los cuales se desea aplicar la expansión. Esta decisión se basa generalmente en una ley de corte, de modo que el rango donde se encuentra dicha ley de corte se refina para lograr una representación más detallada en esa zona de interés.
- II. Subdivisión proporcional de los rangos: Una vez identificado el rango a subdividir, este se divide en sub-rangos de igual amplitud.
- III. Redistribuir el tonelaje: La redistribución del tonelaje se hace a partir del tonelaje original hacia los puntos nuevos de la grilla expandida, manteniendo la proporcionalidad entre el tonelaje y los tamaños de los rangos. Es decir, el tonelaje original se reparte entre las nuevas celdas según la proporción que representan respecto al rango original.

A modo de ejemplo, si se tiene un formato de distribución tonelaje-ley como la mostrada en la tabla (20) en donde existen originalmente cuatro rangos de mineral 1 y también cuatro rangos de mineral 2 y cada punto dentro de la grilla tiene asociado su respectivo tonelaje $T_{g1(i)-g2(j)}$.

Tabla 20. Grilla de distribución tonelaje-ley para ejemplo de expansión de grilla.

	$[g_1(1), g_1(2)]$	$[g_1(2), g_1(3)]$	$[g_1(3), g_1(4)]$	$[g_1(4), g_1(5)]$
$[g_2(1), g_2(2)]$	$T_{g1(1-2)-g2(1-2)}$	$T_{g1(2-3)-g2(1-2)}$	$T_{g1(3-4)-g2(1-2)}$	$T_{g1(4-5)-g2(1-2)}$
$[g_2(2), g_2(3)]$	$T_{g1(1-2)-g2(2-3)}$	$T_{g1(2-3)-g2(2-3)}$	$T_{g1(3-4)-g2(2-3)}$	$T_{g1(4-5)-g2(2-3)}$
$[g_2(3), g_2(4)]$	$T_{g1(1-2)-g2(3-4)}$	$T_{g1(2-3)-g2(3-4)}$	$T_{g1(3-4)-g2(3-4)}$	$T_{g1(4-5)-g2(3-4)}$
$[g_2(4), g_2(5)]$	$T_{g1(1-2)-g2(4-5)}$	$T_{g1(2-3)-g2(4-5)}$	$T_{g1(3-4)-g2(4-5)}$	$T_{g1(4-5)-g2(4-5)}$

Para expandir la grilla alrededor de una ley entre $g_1(2)$ y $g_1(3)$ para el mineral 1, y alrededor de una ley entre $g_2(2)$ y $g_2(3)$ para mineral 2, se deben primero identificar los rangos a subdividir. En el ejemplo previamente presentado, estos corresponden a los rangos y tonelajes destacados en gris.

A continuación, se procede a hacer la subdivisión de los rangos. Supongamos que para el mineral 1 la subdivisión se realiza en dos sub-rangos: un 60% para el primero y un 40% para el segundo.

El rango por subdividir, como se dijo anteriormente, corresponde para mineral 1 al $g_1(2) - g_1(3)$, el primer sub-rango (60%) pasaría a ser $g_1(2) - g_1(2.6)$ y el segundo $g_1(2.6) - g_1(3)$. Por su parte, cada tonelaje dentro de esa columna pasa por el proceso de redistribución hacia los nuevos rangos recién creados y con las proporciones también recién mencionadas. Tras esta primera expansión de la grilla en el mineral 1, el ejemplo con el cual se está trabajando quedaría como el mostrado en la tabla (21):

Tabla 21. Grilla de distribución tonelaje-ley expandida para mineral 1.

	$[g_1(1), g_1(2)]$	$[g_1(2), g_1(2.6)]$	$[g_1(2.6), g_1(3)]$	$[g_1(3), g_1(4)]$	$[g_1(4), g_1(5)]$
$[g_2(1), g_2(2)]$	$Tg_{1(1-2)}-g_{2(1-2)}$	$0.6*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(1-2)}]$	$0.4*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(1-2)}]$	$Tg_{1(3-4)}-g_{2(1-2)}$	$Tg_{1(4-5)}-g_{2(1-2)}$
$[g_2(2), g_2(3)]$	$Tg_{1(1-2)}-g_{2(2-3)}$	$0.6*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(2-3)}]$	$0.4*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(2-3)}]$	$Tg_{1(3-4)}-g_{2(2-3)}$	$Tg_{1(4-5)}-g_{2(2-3)}$
$[g_2(3), g_2(4)]$	$Tg_{1(1-2)}-g_{2(3-4)}$	$0.6*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(3-4)}]$	$0.4*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(3-4)}]$	$Tg_{1(3-4)}-g_{2(3-4)}$	$Tg_{1(4-5)}-g_{2(3-4)}$
$[g_2(4), g_2(5)]$	$Tg_{1(1-2)}-g_{2(4-5)}$	$0.6*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(4-5)}]$	$0.4*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(4-5)}]$	$Tg_{1(3-4)}-g_{2(4-5)}$	$Tg_{1(4-5)}-g_{2(4-5)}$

Realizando el mismo procedimiento para mineral 2, este se subdivide en dos rangos de 50% cada uno. El rango $g_2(2) - g_2(3)$ al subdividirlo pasa a ser $g_2(2) - g_2(2.5)$ el primero y, $g_2(2.5) - g_2(3)$ el segundo. La redistribución se hace en un 50% a cada tonelaje nuevo de la fila. En el ejemplo con el que se trabaja, esto quedaría como en la tabla (22):

Tabla 22. Grilla de distribución tonelaje-ley expandida para mineral 2.

	$[g_1(1), g_1(2)]$	$[g_1(2), g_1(2.6)]$	$[g_1(2.6), g_1(3)]$	$[g_1(3), g_1(4)]$	$[g_1(4), g_1(5)]$
$[g_2(1), g_2(2)]$	$Tg_{1(1-2)}-g_{2(1-2)}$	$0.6*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(1-2)}]$	$0.4*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(1-2)}]$	$Tg_{1(3-4)}-g_{2(1-2)}$	$Tg_{1(4-5)}-g_{2(1-2)}$
$[g_2(2), g_2(2.5)]$	$0.5*[Tg_{1(1-2)}-g_{2(2-3)}]$	$0.5*[0.6*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(2-3)}]]$	$0.5*[0.4*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(2-3)}]]$	$0.5*[Tg_{1(3-4)}-g_{2(2-3)}]$	$0.5*[Tg_{1(4-5)}-g_{2(2-3)}]$
$[g_2(2.5), g_2(3)]$	$0.5*[Tg_{1(1-2)}-g_{2(2-3)}]$	$0.5*[0.6*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(2-3)}]]$	$0.5*[0.4*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(2-3)}]]$	$0.5*[Tg_{1(3-4)}-g_{2(2-3)}]$	$0.5*[Tg_{1(4-5)}-g_{2(2-3)}]$
$[g_2(3), g_2(4)]$	$Tg_{1(1-2)}-g_{2(3-4)}$	$0.6*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(3-4)}]$	$0.4*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(3-4)}]$	$Tg_{1(3-4)}-g_{2(3-4)}$	$Tg_{1(4-5)}-g_{2(3-4)}$
$[g_2(4), g_2(5)]$	$Tg_{1(1-2)}-g_{2(4-5)}$	$0.6*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(4-5)}]$	$0.4*[Tg_{1(2-3)}-g_{2(4-5)}]$	$Tg_{1(3-4)}-g_{2(4-5)}$	$Tg_{1(4-5)}-g_{2(4-5)}$

La nueva grilla extendida con los puntos expandidos resaltados en naranja, que da como resultado queda de la forma mostrada en la tabla (23):

Tabla 23. Grilla extendida para mineral 1 y para mineral 2.

	$[g_1(1), g_1(2)]$	$[g_1(2), g_1(2.6)]$	$[g_1(2.6), g_1(3)]$	$[g_1(3), g_1(4)]$	$[g_1(4), g_1(5)]$
$[g_2(1), g_2(2)]$	$Tg_1(1-2)-g_2(1-2)$	$Tg_1(2-2.6)-g_2(1-2)$	$Tg_1(2.6-3)-g_2(1-2)$	$Tg_1(3-4)-g_2(1-2)$	$Tg_1(4-5)-g_2(1-2)$
$[g_2(2), g_2(2.5)]$	$Tg_1(1-2)-g_2(2-2.5)$	$Tg_1(2-2.6)-g_2(2-2.5)$	$Tg_1(2.6-3)-g_2(2-2.5)$	$Tg_1(3-4)-g_2(2-2.5)$	$Tg_1(4-5)-g_2(2-2.5)$
$[g_2(2.5), g_2(3)]$	$Tg_1(1-2)-g_2(2.5-3)$	$Tg_1(2-2.6)-g_2(2.5-3)$	$Tg_1(2.6-3)-g_2(2.5-3)$	$Tg_1(3-4)-g_2(2.5-3)$	$Tg_1(4-5)-g_2(2.5-3)$
$[g_2(3), g_2(4)]$	$Tg_1(1-2)-g_2(3-4)$	$Tg_1(2-2.6)-g_2(3-4)$	$Tg_1(2.6-3)-g_2(3-4)$	$Tg_1(3-4)-g_2(3-4)$	$Tg_1(4-5)-g_2(3-4)$
$[g_2(4), g_2(5)]$	$Tg_1(1-2)-g_2(4-5)$	$Tg_1(2-2.6)-g_2(4-5)$	$Tg_1(2.6-3)-g_2(4-5)$	$Tg_1(3-4)-g_2(4-5)$	$Tg_1(4-5)-g_2(4-5)$

Resulta sumamente importante recordar y destacar que, las proporciones bajo las cuales se aplicó la expansión de la grilla en el ejemplo anterior puede variar y tomar los valores que sean convenientes de aplicar. Incluso el proceso de expansión puede también realizarse de manera reiterada cuantas veces sea necesaria aplicarla.

Por último, es importante mencionar que la metodología presentada en esta sección puede aplicarse de manera inversa, es decir, en lugar de subdividir la grilla, esta puede unirse en puntos de interés, siguiendo las reglas de proporcionalidad explicadas anteriormente. Este resultado da una grilla “contraída” o “unida”.

9.5 Metodología para actualización de la distribución tonelaje-ley de dos minerales

La actualización de la distribución tonelaje-ley sigue una idea análoga al escenario de un mineral. Incluso la misma ecuación (61) usada en ese escenario, es aplicable en este, recordemos que la formula (61) está definida según:

$$T'_{gi} = T_{gi} - \left[\frac{T_{gi}}{T_{zona}} * Q' \right] \quad (61)$$

Donde:

- T'_{gi} : Nuevo tonelaje en el rango g_i
- T_{gi} : Tonelaje actual en el rango g_i .
- T_{zona} : Corresponde a la suma de tonelaje correspondiente a la zona bajo o sobre la ley de corte.
- Q' : Cantidad a extraer según se está sobre o bajo la ley de corte. Sobre la ley de corte, la cantidad a extraer es Q_c ; bajo la ley de corte, la cantidad a extraer es $Q_m - Q_c$.

Si, por ejemplo, la ley de corte γ_1 es $g_1(2)$ y la ley de corte γ_2 es $g_2(2)$ para una distribución tonelaje-ley de dos minerales. La cantidad por minar es Q_m y la cantidad a concentrar es Q_c . Entonces, existen dos zonas: la zona sobre ley de corte (zona verde) y la zona bajo la ley de corte (zona naranja). La forma de actualizar la distribución tonelaje-ley se muestra dentro de la tabla 24:

Tabla 24. Actualización de distribución tonelaje-ley para dos minerales.

	$[g_1(1), g_1(2)]$	$[g_1(2), g_1(3)]$	...	$[g_1(K-1), g_1(K)]$
$[g_2(1), g_2(2)]$	$T_{g_1(1-2)} - g_2(1-2)$	$T_{g_1(2-3)} - g_2(1-2)$	...	$T_{g_1(K-1-K)} - g_2(1-2)$
$[g_2(2), g_2(3)]$	$T_{g_1(1-2)} - g_2(2-3)$	$T_{g_1(2-3)} - g_2(2-3)$	...	$T_{g_1(K-1-K)} - g_2(2-3)$
...	...	...	...	...
$[g_2(M-1), g_2(M)]$	$T_{g_1(1-2)} - g_2(M-1-M)$	$T_{g_1(2-3)} - g_2(M-1-M)$	...	$T_{g_1(K-1-K)} - g_2(M-1-M)$
Zona naranja	$T_{gi} - \left[\frac{T_{gi}}{T_{zona \text{ naranja}}} * (Q_m - Q_c) \right]$			
Zona verde	$T_{gi} - \left[\frac{T_{gi}}{T_{zona \text{ verde}}} * (Q_c) \right]$			

10. Anexo C: Resultados experimentales

En este apartado, se presentan los resultados experimentales obtenidos para los cuatro casos de estudio, implementados en las etapas I y II de la metodología. Los resultados se exponen de manera sistemática en dos formatos:

- I. **Tabla del plan de leyes de corte:** Muestra los resultados experimentales específicos del plan de leyes de corte para cada caso.
- II. **Gráfica:** Elaborada a partir de los datos de la tabla del plan de leyes de corte.

Los resultados experimentales se organizan por etapa y enfoque para cada caso de estudio.

10.1 Resultados experimentales etapa I: Implementación de algoritmo de Lane (1964)

En esta sección se muestran los resultados del caso 1A y 1B.

10.1.1 Resultados experimentales caso 1A

- Enfoque maximización de beneficio

Tabla 25. Resultados experimentales maximización de beneficio caso 1A.

Año	Q_m [t]	Q_c [t]	Q_r [t]	Q_w [t]	Ley media [lb/t]	Ley corte [lb/t]	Beneficio [USD]	VAN [USD]
1	83,3	50	35	33,333	0,7	0,4	216,67	1.174,49
2	83,3	50	35	33,333	0,7	0,4	216,67	1.133,99
3	83,3	50	35	33,333	0,7	0,4	216,67	1.087,42
4	83,3	50	35	33,333	0,7	0,4	216,67	1.033,86
5	83,3	50	35	33,333	0,7	0,4	216,67	972,27
6	83,3	50	35	33,333	0,7	0,4	216,67	901,44
7	83,3	50	35	33,333	0,7	0,4	216,67	819,98
8	83,3	50	35	33,333	0,7	0,4	216,67	726,31
9	83,3	50	35	33,333	0,7	0,4	216,67	618,59
10	83,3	50	35	33,333	0,7	0,4	216,67	494,71
11	83,3	50	35	33,333	0,7	0,4	216,67	352,24
12	83,3	50	35	33,333	0,7	0,4	216,67	188,41

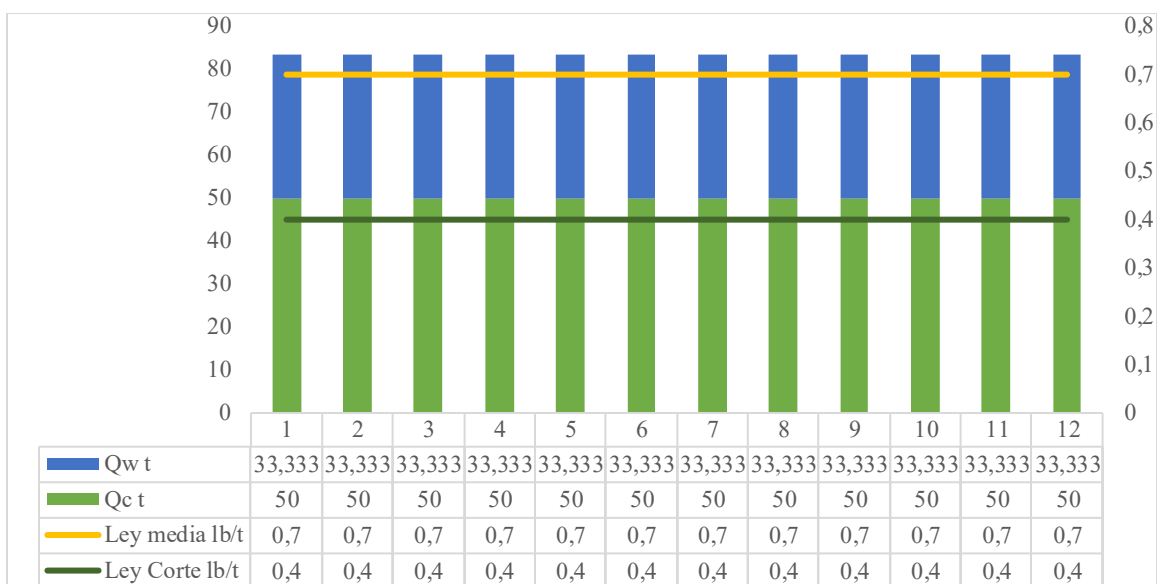


Figura 4. Plan de leyes de corte experimentales maximización de beneficio caso 1A.

- Enfoque en la maximización de VAN

Tabla 26. Resultados experimentales maximización de VAN caso 1A.

Año	Q_m [t]	Q_c [t]	Q_r [t]	Q_w [t]	Ley Media [%]	Ley Corte [%]	Beneficio [USD]	VAN [USD]
1	100	50	37,5	50	0,75	0,5	250	1.254,69
2	100	50	37,5	50	0,75	0,5	250	1.192,90
3	100	50	37,5	50	0,75	0,5	250	1.121,83
4	100	50	37,5	50	0,75	0,5	250	1.040,10
5	100	50	37,5	50	0,75	0,5	250	946,12
6	100	50	37,5	50	0,75	0,5	250	838,04
7	100	50	37,5	50	0,75	0,5	250	705,94
8	97,21	50	37,14	47,21	0,743	0,486	245,62	571,09
9	93,02	50	36,56	43,02	0,731	0,462	238,22	416,44
10	88,72	50	35,91	38,72	0,718	0,436	229,49	242,88
11	21,05	12,47	8,78	8,58	0,704	0,408	219,37	50,10

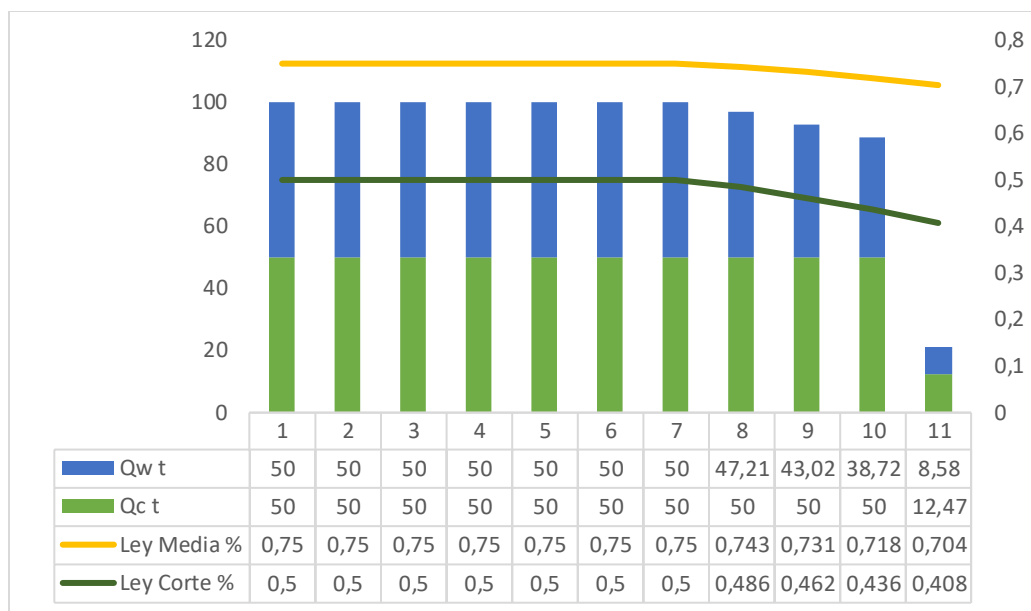


Figura 5. Plan de leyes de corte experimentales maximización de VAN caso 1A.

10.1.2 Resultados experimentales caso 1B

- Enfoque en la maximización de beneficio

Tabla 27. Resultados experimentales maximización de beneficio caso 1B.

Año	Q_m [Mt]	Q_c [Mt]	Q_r [kt]	Q_w [Mt]	Ley media [%]	Ley corte [%]	Beneficio [USD]	VAN [USD]
1	12,647	10,0	73.186	2,647	0,813	0,222	20.269.305	90.375.913
2	12,647	10,0	73.186	2,647	0,813	0,222	20.269.305	83.662.603
3	12,647	10,0	73.186	2,647	0,813	0,222	20.269.305	75.942.238
4	12,647	10,0	73.186	2,647	0,813	0,222	20.269.305	67.063.751
5	12,647	10,0	73.186	2,647	0,813	0,222	20.269.305	56.853.414
6	12,647	10,0	73.186	2,647	0,813	0,222	20.269.305	45.111.437
7	12,647	10,0	73.186	2,647	0,813	0,222	20.269.305	31.608.061
8	11,464	9,268	65.867	2,196	0,813	0,222	20.269.305	16.079.060

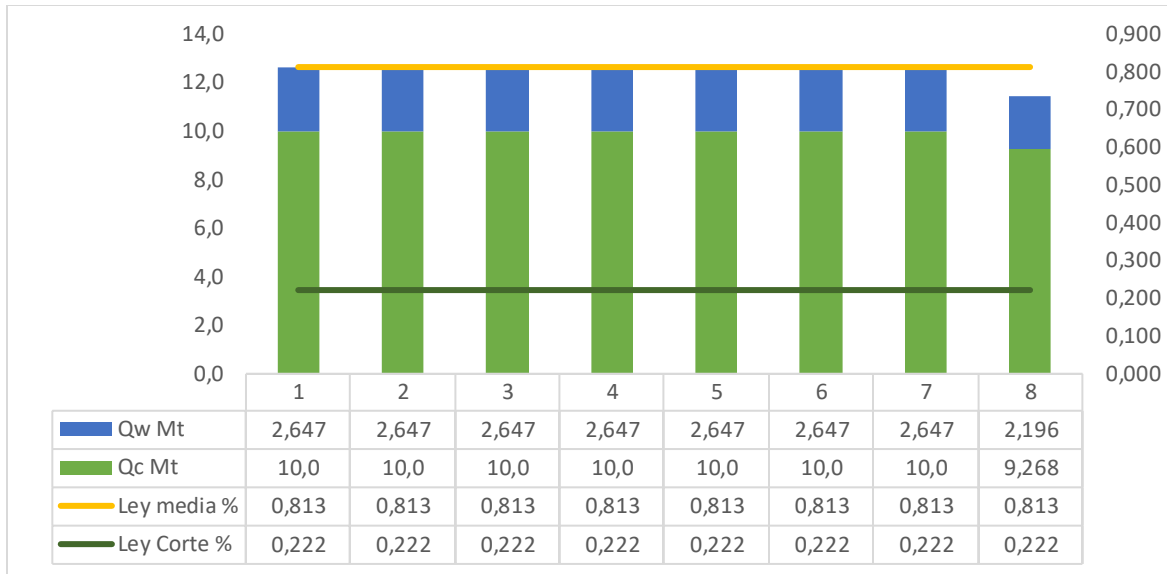


Figura 6. Plan de leyes de corte experimentales maximización de beneficio caso 1B.

- Enfoque en la maximización de VAN

Tabla 28. Resultados experimentales maximización de VAN caso 1B.

Año	Q_m [t]	Q_c [t]	Q_r [t]	Q_w [t]	Ley media [%]	Ley corte [%]	Beneficio [USD]	VAN [USD]
1	17.851.755	10.000.000	90.000	7.851.755	1,000	0,504	26.075.344	94.379.334
2	17.708.465	10.000.000	89.661	7.708.465	0,996	0,498	25.976.653	82.620.936
3	16.744.324	10.000.000	87.102	6.744.324	0,968	0,455	25.178.863	69.825.628
4	15.778.209	10.000.000	84.317	5.778.209	0,937	0,408	24.269.569	55.755.882
5	14.790.765	10.000.000	81.190	4.790.765	0,902	0,356	23.199.880	40.261.262
6	13.831.258	10.000.000	77.836	3.831.258	0,865	0,300	22.002.835	23.300.584
7	12.875.985	10.000.000	74.137	2.875.985	0,824	0,238	20.630.776	4.821.460

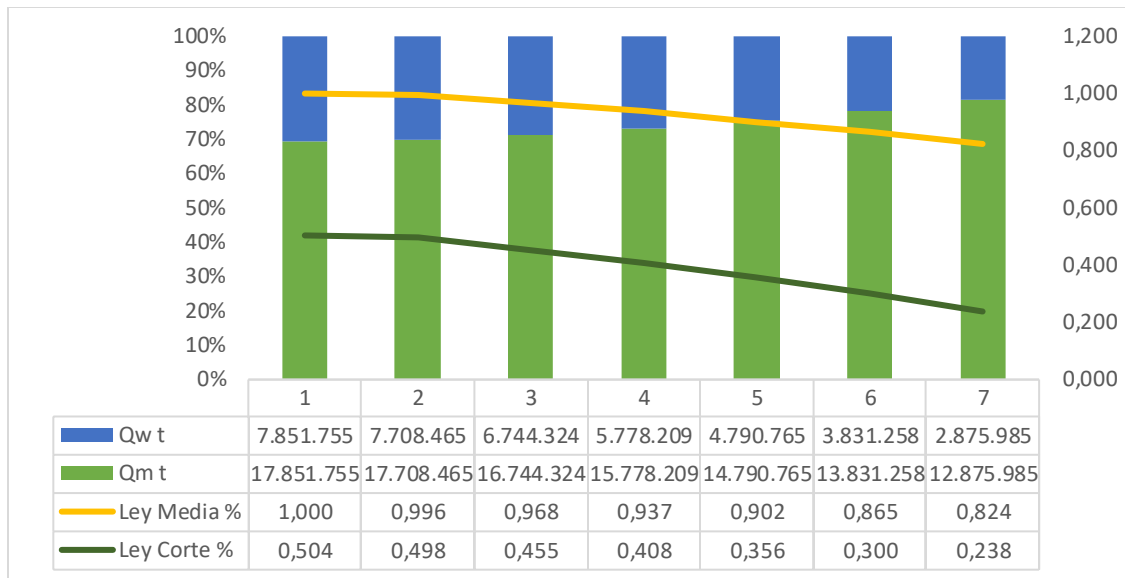


Figura 7. Plan de leyes de corte experimentales maximización de VAN caso 1B.

10.2 Resultados experimentales etapa II: Implementación de algoritmo de Asad (2005)

En esta sección se muestran los resultados de los casos 2A y 2B

10.2.1 Resultados experimentales caso 2A

- Sin acopio de mineral

Tabla 29. Resultados experimentales sin acopio caso 2A.

Año	COG1 [%]	COG2 [oz/t]	Q_m [Mt]	Q_c [Mt]	Q_{r1} [kt]	Q_{r2} [kt]	Beneficio [USD]	VAN [USD]
1	0,00361	0,01167	7,571481	5,0	34,852823	146,969697	75.625.430	395.281.600
2	0,00350	0,01167	7,451299	5,0	34,553571	146,969697	75.327.380	378.948.400
3	0,00328	0,01167	7,222028	5,0	33,959615	146,969697	74.712.650	360.463.300
4	0,00306	0,01000	6,850746	5,0	33,371269	144,666667	73.589.000	339.820.100
5	0,00283	0,01000	6,652174	5,0	32,788043	144,666667	72.918.990	317.204.100
6	0,00250	0,00833	6,236413	5,0	31,921875	142,318841	71.333.880	291.865.700
7	0,00222	0,00667	6,020111	5,0	31,630137	139,929078	70.383.050	264.311.700
8	0,00194	0,00500	5,815034	5,0	31,329392	137,500000	69.371.200	233.575.400
9	0,00167	0,00250	5,563636	5,0	31,020000	133,787879	67.970.300	199.240.500
10	0,00125	0,00000	5,294118	5,0	30,540441	130,000000	66.245.590	161.156.300
11	0,00056	0,00000	5,126582	5,0	29,702532	130,000000	64.988.610	119.084.200
12	0,00000	0,00000	5,000000	5,0	29,000000	130,000000	63.900.000	71.958.200
13	0,00000	0,00000	1,696378	1,696	9,838994	44,105837	21.679.720	18.851.930

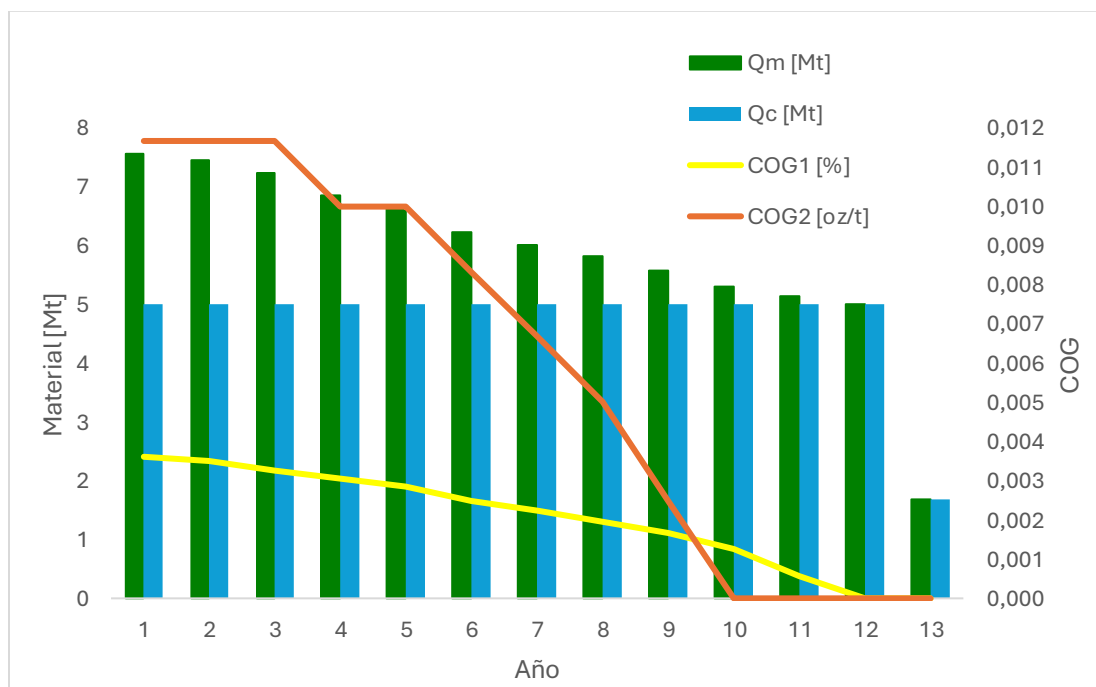


Figura 8. Plan de leyes de corte experimentales sin acopio caso 2A.

- Con acopio de mineral

Tabla 30. Resultados experimentales con acopio caso 2A.

Año	COG1 [%]	COG2 [oz/t]	Qm [Mt]	Qc [Mt]	Qr1 [kt]	Qr2 [kt]	Beneficio [USD]	VAN [USD]	Origen
1	0,00361	0,01167	7,571481	5,000	34,852823	146,969697	75.625.430	407.511.500	Mina
2	0,00350	0,01167	7,451299	5,000	34,553571	146,969697	75.327.380	393.012.800	Mina
3	0,00328	0,01167	7,222028	5,000	33,959615	146,969697	74.712.650	376.637.300	Mina
4	0,00306	0,01000	6,850746	5,000	33,371269	144,666667	73.589.000	358.420.300	Mina
5	0,00283	0,01000	6,652174	5,000	32,788043	144,666667	72.918.990	338.594.300	Mina
6	0,00250	0,00833	6,236413	5,000	31,921875	142,318841	71.333.880	316.464.500	Mina
7	0,00222	0,00667	6,020111	5,000	31,630137	139,929078	70.383.050	292.600.300	Mina
8	0,00194	0,00500	5,815034	5,000	31,329392	137,500000	69.371.200	266.107.300	Mina
9	0,00167	0,00250	5,563636	5,000	31,020000	133,787879	67.970.300	236.652.200	Mina
10	0,00125	0,00000	5,294118	5,000	30,540441	130,000000	66.245.590	204.179.700	Mina
11	0,00056	0,00000	5,126582	5,000	29,702532	130,000000	64.988.610	168.561.000	Mina
12	0,00000	0,00000	5,000000	5,000	29,000000	130,000000	63.900.000	128.856.600	Mina
13	0,00000	0,00000	1,696378	1,696	9,838994	44,105837	21.679.720	84.285.090	Mina
14	0,00000	0,00500	5,912770	5,000	16,897957	110,745115	38.227.190	75.248.140	Acopio
15	0,00000	0,004167	5,738182	5,000	16,897957	108,016447	37.386.710	48.308.160	Acopio
16	0,00000	0,001667	3,152670	2,990	10,106470	59,914160	20.892.830	18.167.680	Acopio

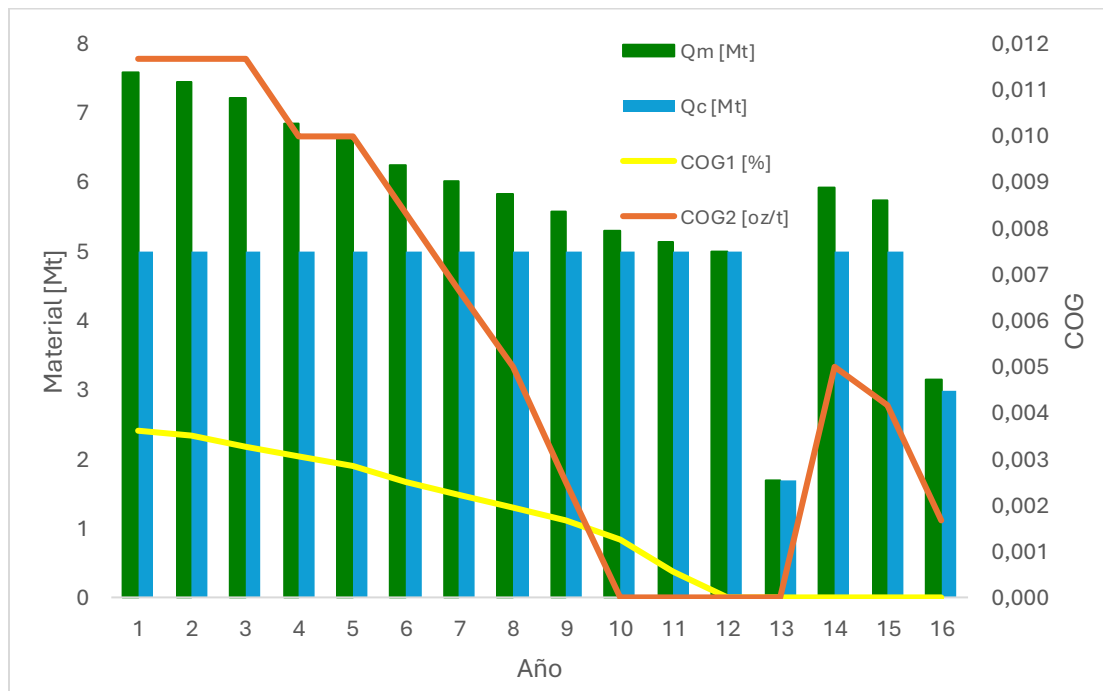


Figura 9. Plan de leyes de corte experimentales con acopio caso 2A.

10.2.2 Resultados experimentales caso 2B

- Sin acopio de mineral

Tabla 31. Resultados experimentales sin acopio caso 2B.

Año	COG1 [%]	COG2 [oz/t]	Q_m [Mt]	Q_c [Mt]	Q_{r1} [kt]	Q_{r2} [kt]	Beneficio [USD]	VAN [USD]
1	0,0278	0,0026	3,546269	2,00	79,533444	12,801541	35.590.440	193.499.000
2	0,0267	0,0025	3,379600	2,00	78,368307	12,681541	35.217.340	186.933.500
3	0,0256	0,0025	3,272653	2,00	77,220501	12,681541	34.953.070	179.756.200
4	0,0244	0,0022	3,125176	2,00	76,088445	12,555041	34.553.030	171.766.500
5	0,0233	0,0022	3,032261	2,00	74,970745	12,555041	34.278.850	162.978.500
6	0,0211	0,0019	2,820454	2,00	72,773607	12,424889	33.575.380	153.146.400
7	0,0200	0,0017	2,704276	2,00	71,692096	12,291247	33.135.660	142.542.900
8	0,0178	0,0014	2,595813	2,00	70,592129	12,154263	32.672.190	130.788.700
9	0,0156	0,0008	2,459400	2,00	69,457135	11,870832	32.003.370	117.734.900
10	0,0133	0,0004	2,348986	2,00	68,289759	11,650488	31.384.510	103.391.700
11	0,0100	0,0000	2,218441	2,00	66,483139	11,423928	30.549.380	87.515.960
12	0,0056	0,0000	2,115738	2,00	63,981408	11,423928	29.777.800	70.093.970
13	0,0017	0,0000	2,033370	2,00	61,715468	11,423928	29.062.950	50.830.260
14	0,0000	0,0000	2,000000	2,00	60,724536	11,423928	28.746.360	29.391.850
15	0,0000	0,0000	4,E-07	4,E-07	12,278264	2,309874	5.812.402	5.054.263

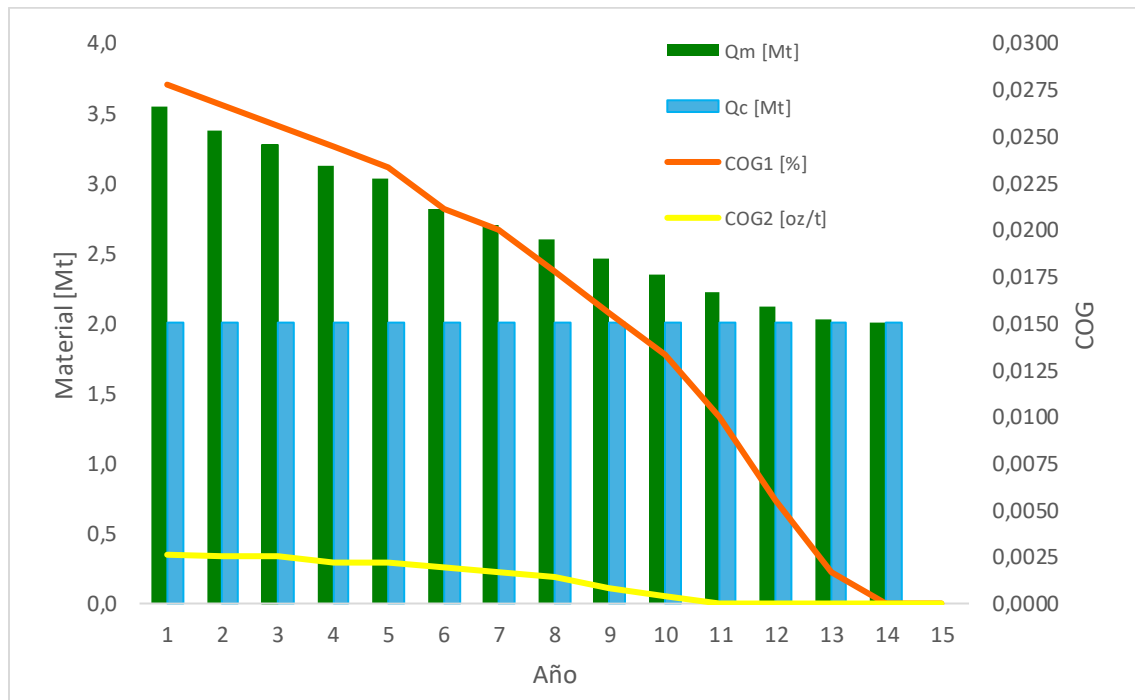


Figura 10. Plan de leyes de corte experimentales sin acopio caso 2B.

- Con acopio de mineral

Tabla 32. Resultados experimentales con acopio caso 2B.

Año	COG1 [%]	COG2 [oz/t]	Qm [Mt]	Qc [Mt]	Qr1 [kt]	Qr2 [kt]	Beneficio [USD]	VAN [USD]	Origen
1	0,0278	0,0026	3,546269	2,00	79,533444	12,801541	35.590.440	200.394.300	Mina
2	0,0267	0,0025	3,379600	2,00	78,368307	12,681541	35.217.340	194.863.000	Mina
3	0,0256	0,0025	3,272653	2,00	77,220501	12,681541	34.953.070	188.875.100	Mina
4	0,0244	0,0022	3,125176	2,00	76,088445	12,555041	34.553.030	182.253.200	Mina
5	0,0233	0,0022	3,032261	2,00	74,970745	12,555041	34.278.850	175.038.200	Mina
6	0,0211	0,0019	2,820454	2,00	72,773607	12,424889	33.575.380	167.015.100	Mina
7	0,0200	0,0017	2,704276	2,00	71,692096	12,291247	33.135.660	158.492.000	Mina
8	0,0178	0,0014	2,595813	2,00	70,592129	12,154263	32.672.190	149.130.100	Mina
9	0,0156	0,0008	2,459400	2,00	69,457135	11,870832	32.003.370	138.827.400	Mina
10	0,0133	0,0004	2,348986	2,00	68,289759	11,650488	31.384.510	127.648.200	Mina
11	0,0100	0,0000	2,218441	2,00	66,483139	11,423928	30.549.380	115.410.900	Mina
12	0,0056	0,0000	2,115738	2,00	63,981408	11,423928	29.777.800	102.173.200	Mina
13	0,0017	0,0000	2,033370	2,00	61,715468	11,423928	29.062.950	87.721.340	Mina
14	0,0000	0,0000	2,000000	2,00	60,724536	11,423928	28.746.360	71.816.590	Mina
15	0,0000	0,0000	4,04E-07	4,04E-07	12,278264	2,309874	5.812.402	53.842.710	Mina
16	0,0000	0,0010	2,263864	2,00	32,947119	10,656572	18.712.840	56.106.710	Acopio
17	0,0000	0,0011	2,307352	2,00	32,947119	10,825261	18.953.390	45.809.880	Acopio
18	0,0000	0,0008	2,221986	2,00	32,947119	10,489499	18.473.790	33.727.970	Acopio
19	0,0000	0,0004	2,105157	2,00	32,947119	9,997127	17.764.860	20.313.380	Acopio
20	0,0000	0,0000	7,54E-07	7,54E-07	12,422362	3,588089	6.434.858	5.595.529	Acopio

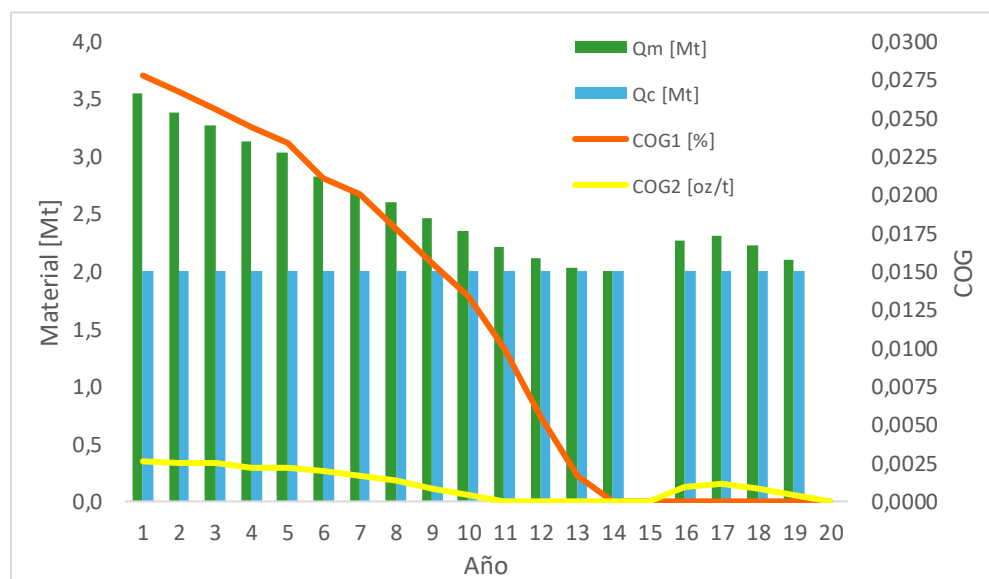


Figura 11. Plan de leyes de corte experimentales con acopio caso 2B.