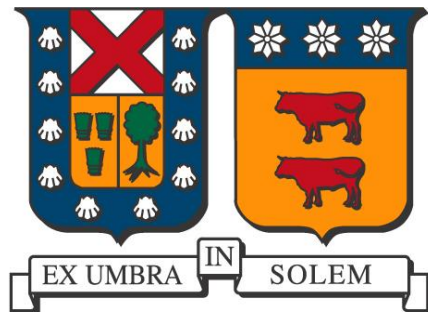


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA METALÚRGICA Y DE MATERIALES
SANTIAGO DE CHILE



FLUJO GRAVITACIONAL DE EXTRACCIONES DISCRETAS Y CONTINUAS EN MINERÍA BLOCK CAVING MEDIANTE DEM

JORGE ANDRÉS MORIS LIZAMA

Memoria para optar al Título Profesional de
INGENIERO CIVIL DE MINAS

Profesor Guía:

Dr. Sergio Andrés Palma Moya

Profesor Correferente:

Dr. Francisco Javier Vivanco Avaria

JULIO 2023

AGRADECIMIENTOS

A través de estas líneas deseo expresar sinceramente mi más profunda gratitud a todos aquellos que han contribuido de alguna forma en mi desarrollo personal y académico.

Primero que nada, me gustaría agradecer a toda mi familia por su importantísimo apoyo incondicional a lo largo de toda mi vida estudiantil, desde el jardín de niños hasta el día de hoy. Dar mis más sinceras gracias a mi madre Jessika y a mi padre Hugo por su buena crianza, enseñanza y amor. Sin el apoyo de ellos, no sería quien soy actualmente. Además, me gustaría también dar la mayor de las gracias a mis tíos, primos, abuelos, y a mi pareja.

Por otra parte, quiero expresar mi gratitud a mi profesor guía Sergio Palma, debido a su gran dedicación y orientación a lo largo de este camino. Su compromiso constante y sus valiosos consejos me han dado un gran empujón hacia el éxito de esta memoria. Realmente estoy muy agradecido por la confianza que depositó en mí. Le deseo el mayor de los éxitos en todos los proyectos que se proponga en el futuro. Igualmente, para todas las personas que componen el departamento de minas, como también a mi profesor correferente Francisco Vivanco.

Me gustaría agradecer también a todos mis amigos y compañeros de estudio, quienes siempre tenían algo que rescatar hasta en los peores momentos. Sus palabras de aliento, alegría y comprensión me han impulsado a superar cada desafío tanto individual como grupal, como también a mantenerme motivado en cada pasito de este largo camino. Agradecer en particular a los integrantes del grupo *Humildes USM-Usachn't*. Obviamente desearle a todos ellos el mayor de los éxitos tanto en la vida como en esta última etapa universitaria.

Agradecer también a todas las personas que conocí dentro de la selección masculina de Futsal y Fútbol. Dentro de estas ramas existe un gran compañerismo y competitividad, tanto en el ámbito deportivo como en el universitario. Recuerdo nostálgicamente todos esos buenos momentos que viví en todas las actividades ligadas a estas ramas. Muchas gracias por todo el apoyo y el buen clima desde el minuto cero. Les deseo el mayor de los éxitos deportivos y académicos a las personas que actualmente componen ambas ramas.

Finalmente, quiero agradecer a la Universidad Técnica Federico Santa María por proporcionarme a través de todos estos años los recursos necesarios, así como por fomentar un entorno propicio para el aprendizaje, la investigación y el crecimiento académico.

En resumen, estas palabras de agradecimiento buscan transmitir mi más profunda gratitud a todos aquellos que han aportado un granito de arena a mi desarrollo personal y académico, como también a la culminación de esta memoria de título. Agradezco profundamente todo el apoyo, cariño y confianza depositada en mí.

RESUMEN

La minería actual presenta un considerable desafío producto de los grandes costos y el inmenso daño ambiental que se provoca mediante la explotación de yacimientos superficiales cada vez más bajos y con menor ley. Por ello, el método de explotación subterráneo Block/Panel Caving es una excelente alternativa para disminuir estos puntos negativos. De hecho, este método tiene el costo más bajo y las tasas más altas de producción de todos los métodos de explotación subterráneos. Ahora bien, se hace necesario proponer e implementar una nueva y moderna teoría para los flujos gravitacionales.

En la presente memoria se busca determinar la influencia de las propiedades físicas del material o medio granular y el tipo de extracción en el comportamiento de los flujos gravitacionales, específicamente en las dimensiones de la Zona de Extracción Aislada (IEZ). Estas propiedades corresponden al coeficiente de fricción estático (μ_s), la energía superficial (γ) y la granulometría del mineral. Por otra parte, los tipos de extracción a considerar corresponden a una extracción continua y una discreta. Este estudio permitirá obtener una mejora de la planificación de los trabajos en la actual minería con el objetivo de optimizar la extracción de mineral, como también simplificar variables de estudio como el tipo de extracción y el rango de energía superficial (γ) a utilizar en estudios posteriores. Lo mencionado se logra mediante simulaciones computacionales simplificadas 2D, en el software basado en el método numérico DEM y de simulación de sólidos industriales y granulados EDEM™, de la compañía Altair®.

Los resultados muestran como las dimensiones de la IEZ aumentan continuamente con la masa o volumen extraído. De igual manera, las dimensiones máximas de la IEZ también lo hacen. Ahora bien, un incremento en el coeficiente de fricción estático (μ_s) permite observar cómo dicha variable impacta significativamente en la evolución y forma de la IEZ, generando un cuerpo más alto y menos ancho. Por otro lado, se encontró que la energía superficial (γ) es inversamente proporcional a las dimensiones máximas de la IEZ, implicando obtener un elipsoide de la IEZ menos esbelto a medida que γ aumenta. Además, realizando las simulaciones piloto se pudo encontrar como aumentaba la presencia de colgaduras a medida que incrementaba el valor de γ en las simulaciones, específicamente desde energías superficiales mayores a $0.6 \text{ (J/m}^2\text{)}$. Por otra parte, en cuanto a la granulometría, se encuentra la tendencia de tener una menor altura y ancho máximo para la IEZ a medida que la cantidad de tamaños aumenta. También es posible encontrar un gran indicio, donde el cambio no es significativo entre los dos diferentes tipos de extracción. Sucede que para una misma masa o volumen de extracción se tiene una misma altura y ancho para la IEZ aproximadamente. Finalmente, se propone un modelo matemático que predice la altura y ancho máximo de la IEZ a partir del volumen de extracción en centímetros cúbicos (cm^3).

PALABRAS CLAVES: Block Caving, Flujo gravitacional, Medio granular, Minería subterránea, Modelo matemático, Simulación, Zona de Extracción Aislada (IEZ).

ABSTRACT

Current mining presents a considerable challenge due to the high costs and the immense environmental damage caused by the exploitation of deeper and lower-grade deposits. Therefore, the underground Block/Panel Caving method of exploitation is an excellent alternative to reduce these negative points. In fact, this method has the lowest cost and highest production rates of all underground mining methods. However, it is necessary to propose and implement a new and modern theory for gravity flows.

This report seeks to determine the influence of the physical properties of the material or granular medium and the type of extraction on the behavior of gravity flows, specifically on the dimensions of the Isolated Extraction Zone (IEZ). These properties correspond to the coefficient of static friction (μ_s), the surface energy (γ) and the granulometry of the mineral. On the other hand, the types of extraction to consider correspond to a continuous and a discrete extraction. This study will allow to obtain an improvement in the planning of the works in the current mining with the objective of optimizing the extraction of ore, as well as simplifying study variables such as the type of extraction and the range of surface energy (γ) to be used in studies later. The aforementioned is achieved through simplified 2D computer simulations, in the software based on the numerical method DEM and simulation of industrial solids and granules EDEM™, from the company Altair®.

The results show how the dimensions of the IEZ increase continuously with the extracted mass or volume. Likewise, the maximum dimensions of the IEZ also do so. Now, an increase in the coefficient of static friction (μ_s) allows observing how this variable significantly impacts the evolution and shape of the IEZ, generating a taller and less wide body. On the other hand, it was found that the surface energy (γ) is inversely proportional to the maximum dimensions of the IEZ, implying to obtain a less slender IEZ ellipsoid as γ increases. In addition, performing the pilot simulations it could be found how the presence of hang-ups increased as the value of γ increased in the simulations, specifically from surface energies greater than 0.6 (J/m²). On the other hand, in terms of granulometry, it is found the tendency to have a lower maximum height and width for IEZ as the number of sizes increases. It is also possible to find a strong indication where the change is not significant between the two different types of extraction. It happens that for the same mass or volume of extraction there is approximately the same height and width for the IEZ. Finally, a mathematical model is proposed that predicts the maximum height and width of the IEZ from the extraction volume in cubic centimeters (cm³).

KEYWORDS: Block Caving, Simulation, Granular Medium, Gravity Flows, Isolated Extraction Zone (IEZ), Mathematical Model, Underground Mining.

NOMENCLATURA

H_C	Alto de la sección cilíndrica de la batea (cm)
H_T	Alto de la sección de la batea con forma de prisma trapezoidal (cm)
h	Altura de la partícula en el eje z (cm)
H_M	Altura del contenedor (cm)
h_0	Altura del elipsoide durante su crecimiento exponencial (m)
H	Altura del elipsoide (m)
H_{IEZ}	Altura del elipsoide IEZ (cm)
H_{IMZ}	Altura del elipsoide IMZ (cm)
H_{max}	Altura máxima de la IEZ (cm)
W_T	Ancho de la sección de la batea con forma de prisma trapezoidal (cm)
W_M	Ancho del contenedor (cm)
W	Ancho del elipsoide (m)
W_{IEZ}	Ancho del elipsoide IEZ (cm)
W_0	Ancho máximo de elipsoide cuando IMZ alcanza la superficie (m)
W_T	Ancho superior de la sección de la batea con forma de prisma trapezoidal (cm)
α	Ángulo de zanja de la batea de extracción (°)
S	Área de material granular extraído (m ²)
C_{tam}	Cantidad de tamaños (un)
$\Delta\rho$	Cambio de densidad (kg/m ³)
R^2	Coeficiente de determinación (-)
μ_s	Coeficiente de fricción estático (-)
ν	Coeficiente de Poisson (-)
C_r	Coeficiente de restitución (-)
μ_r	Coeficiente de rodadura (-)
β	Constante adimensional de ajuste (-)
a	Constante de ajuste función potencia (-)
b	Constante de potencia de ajuste función potencia (-)
w	Contenido de humedad (%)
σ_{XY}	Covarianza de las variables X e Y (-)
ρ_p	Densidad de sólidos (kg/m ³)

ρ	Densidad del medio granular (kg/m^3)
ρ_0	Densidad inicial del medio granular (kg/m^3)
D_c	Diámetro de la sección cilíndrica de la batea (cm)
R_i	Distancia del punto de contacto desde el centro de masa (cm)
γ	Energía superficial (J/m^2)
f	Factor de aflojamiento (-)
f_f	Fuerza de fricción (N)
t_i	Instante de tiempo i (s)
m_1	Masa en la primera etapa de crecimiento del ancho de la IMZ (kg)
m_2	Masa en la primera segunda de crecimiento del ancho de la IMZ (kg)
m	Masa extraída (kg)
m_h	Masa del elipsoide (kg)
G	Módulo de corte (Pa)
E	Módulo de Young (Pa)
e	Número de Euler (-)
n	Número de valores a comparar entre los resultados obtenidos (-)
P	Pasante acumulado (mm)
P_i	Partícula i (-)
$P_i + 1$	Partícula siguiente (-)
D_M	Profundidad del contenedor (cm)
D_T	Profundidad del prisma trapezoidal hueco (cm)
$H/W_{\text{máx}}$	Relación entre la altura y ancho máximo de la IEZ (-)
μ_r	Resistencia a la rodadura (-)
μ_{sM}	Set de datos para μ_s de Moris & Palma (-)
P_{20}	Tamaño correspondiente al 20% del pasante acumulado en los finos (mm)
P_{50}	Tamaño correspondiente al 50% del pasante acumulado en los finos (mm)
P_{80}	Tamaño correspondiente al 80% del pasante acumulado en los finos (mm)
D_p	Tamaño de grano (cm)
c	Tasa de crecimiento lineal (m/kg)
t	Tiempo (s)
t_{ext}	Tiempo de extracción (s)
t_{rep}	Tiempo de reposo (s)

x_2	Valor de la coordenada en x de la partícula con mayor valor en el eje x (cm)
x_1	Valor de la coordenada en x de la partícula con menor valor en el eje x (cm)
$\hat{y}_j$	Valor de la simulación (-)
y_j	Valor del modelo (-)
σ_X	Varianza de X.
σ_Y	Varianza de Y.
ω	Vector unitario de la velocidad angular (-)
$\vec{v}_p$	Velocidad de descenso de las partículas (m/s)
$\vec{v}_F$	Velocidad de propagación del frente de dilatación (m/s)
u_{xp}	Velocidad horizontal (m/s)
u_{yp}	Velocidad vertical (m/s)
V	Volumen extraído (cm ³)

ABREVIATURAS

2D	Dos dimensiones
3D	Tres dimensiones
CAD	<i>Computer-Aided Design</i>
CSV	<i>Comma-Separated Values</i>
DEM	<i>Discrete Elements Method</i>
GGs	<i>Ajuste granulométrico Gates-Gaudin-Schumann</i>
IEZ	<i>Isolated Extracted Zone</i>
IMZ	<i>Isolated Movement Zone</i>
LHD	<i>Load Haul Dump</i>
REBOP	<i>Rapid Emulator Based On PFC</i>
RMSE	<i>Root Mean Square Error</i>
UCL	<i>Under Cut Level</i>
XSLX	<i>Microsoft Excel Open XML Spreadsheet</i>

TABLA DE CONTENIDOS

1. INTRODUCCIÓN.....	16
1.1 MOTIVACIÓN	16
1.2 OBJETIVOS.....	17
1.2.1 OBJETIVO GENERAL.....	17
1.2.2 OBJETIVOS ESPECÍFICOS	17
1.3 ALCANCES.....	17
2. ANTECEDENTES	18
2.1 MINERÍA SUBTERRÁNEA	18
2.2 BLOCK CAVING.....	18
2.3 DILUCIÓN EN BLOCK CAVING.....	19
2.4 MEDIO GRANULAR.....	20
2.5 FLUJO GRAVITACIONAL	21
2.6 SEGREGACIÓN GRANULAR	22
2.7 ZONA DE EXTRACCIÓN Y MOVIMIENTO AISLADA	23
2.7.1 ESTUDIOS SOBRE LA RELACIÓN ENTRE LA IEZ E IMZ	23
2.7.2 MODELO CINEMÁTICO	25
2.7.3 ESTUDIOS SOBRE LA FORMA DE LA IEZ Y LA IMZ	27
2.7.4 ESTUDIOS SOBRE LA ALTURA Y EL ANCHO DE LA IEZ Y LA IMZ.....	28
2.7.5 ESTUDIOS SOBRE LA HUMEDAD PRESENTE EN EL MATERIAL GRANULAR	30
2.7.6 ESTUDIO MÁS RECIENTE	31
2.8 MÉTODO DE ELEMENTOS DISCRETOS.....	33
2.8.1 EDEM™.....	34
3. METODOLOGÍA	35
3.1 GEOMETRÍA DE LAS SIMULACIONES	35

3.2	EXTRACCIÓN DISCRETA.....	35
3.3	EXTRACCIÓN CONTINUA.....	36
3.4	COEFICIENTE DE FRICCIÓN ESTÁTICO.....	36
3.5	ENERGÍA SUPERFICIAL	36
3.6	MODELO DE CONTACTO	37
3.7	MEDIOAMBIENTE	38
3.8	CONTENEDOR.....	38
3.9	BATEAS DE EXTRACCIÓN.....	39
3.9.1	PRESENCIA DE COLGADURAS	40
3.10	DISTRIBUCIÓN GRANULOMÉTRICA DEL MATERIAL	41
3.11	VIRTUALES.....	41
3.12	PROPIEDADES DEL MATERIAL GRANULAR	42
3.13	ANÁLISIS DE DATOS	44
3.13.1	RECOPIACIÓN DE DATOS	44
3.13.2	DIMENSIONES DE LA IEZ	45
4.	RESULTADOS Y ANÁLISIS.....	47
4.1	MODELOS DE HIEZ Y WIEZ	47
4.2	IEZ EN EXTRACCIÓN DISCRETA.....	48
4.3	IEZ EN EXTRACCIÓN CONTINUA	58
4.3.1	μS VS γ	58
4.3.2	μS VS GRANULOMETRÍA.....	68
4.4	μS EN ESTUDIOS PREVIOS	77
4.5	EXTRACCIÓN DISCRETA VERSUS CONTINUA	78
4.6	MODELO MATEMÁTICO	81
4.7	MODELOS ACTUALES DE HIEZ Y WIEZ	85
5.	CONCLUSIONES.....	87

6. REFERENCIAS	89
7. ANEXOS	93
7.1 ANEXO A.....	93
7.2 ANEXO B.....	95
7.3 ANEXO C	98
7.4 ANEXO D.....	102
7.5 ANEXO E	103

LISTA DE FIGURAS

Figura 2.1: (a) Método de Block Caving para diferentes tiempos de extracción. (b) Vista de un punto (drawpoint) y una batea de extracción (drawbell). (c) Extracción de material desde un punto de extracción por un LHD. Rio Tinto, (Atlas Copco, 2018).....	19
Figura 2.2: Clasificación de material particulado en función del tamaño de partícula: coloides (barro), polvo (harina) y medios granulares (una duna de arena).	20
Figura 2.3: Proceso de tamizado cinético.	23
Figura 2.4: Modelo esquemático del IEZ que muestra el frente de dilatación moviéndose hacia arriba y el movimiento de las partículas hacia abajo una vez que han sido alcanzados por el IEZ [modificado de F. Vivanco (2011)]. Donde V_p es la velocidad de partículas, V_f es la velocidad del frente de dilatación, ρ_p es la densidad dentro de la IMZ, ρ_0 es la densidad fuera de la IMZ y $\Delta\rho$ es el cambio de densidad local introducido por el movimiento de la roca.	24
Figura 2.5: Frente de dilatación y movimiento de partículas, donde estas comienzan a moverse hacia abajo después de que son alcanzadas por el frente de dilatación que se mueve hacia arriba. Melo et al. (2009).	26
Figura 2.6: El modelo cinemático de Nedderman y Tüzün (modificado de (R. Nedderman, 2005)).	27
Figura 2.7: Dimensiones de la IEZ para diferente cantidad de masa de material extraído. (A. Jin et al, 2017).	27
Figura 2.8: Ancho de IEZ e IMZ en función de la masa extraída de material. (R. Castro, R. Trueman & A. Halim, 2007).....	29
Figura 2.9: Relación de altura y ancho de la IEZ en función del área extraída (S) para diferentes condiciones del material granular. (B. Reyes & S. Palma, 2021).	30
Figura 2.10: Altura y ancho de la IEZ en función de la masa extraída para diferentes grados de humedad (w). (V. Sánchez, R. Castro & S. Palma, 2019).	30
Figura 2.11: Altura y ancho de la IEZ en función del volumen extraído para distintos módulos de Young (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022).	31
Figura 2.12: Altura y ancho de la IEZ en función del volumen extraído para distintas densidades (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022).	31
Figura 2.13: Altura y ancho de la IEZ en función del volumen extraído para distintos coeficientes de restitución (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022).	32
Figura 2.14: Altura y ancho de la IEZ en función del volumen extraído para distintos coeficientes de rodadura (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022).	32
Figura 2.15: Altura y ancho de la IEZ en función del volumen extraído para distintos coeficientes de fricción estático (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022).	33
Figura 3.1: Esquema del área de contacto (JKR) (K. Johnson et al, 1971).	37
Figura 3.2: Dimensiones del contenedor del modelo CAD. a) Vista 3D, b) Vista frontal.....	39
Figura 3.3: Diseño de bateas de extracción divisiones Codelco (S. López, 2016).	39
Figura 3.4: Dimensiones de las bateas de extracción del modelo CAD. Vista; a) 3D, b) inferior y c) frontal.....	40
Figura 3.5: Geometrías de bateas de extracción utilizadas en simulaciones de flujo por gravedad.	41
Figura 3.6: Procedimiento de selección de partículas que conforman la IEZ para un determinado tiempo de extracción.	45
Figura 3.7: Eje de coordenadas utilizado para determinar la posición de las partículas. (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022).	46

Figura 3.8: Representación gráfica de las dimensiones de la IEZ y las partículas (puntos en azul) que corresponden a los límites de estas para su cálculo (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022).....	47
Figura 4.1: Comparación de modelos de distintos autores para la altura de la IEZ.	48
Figura 4.2: Comparación de modelos de distintos autores para el ancho de la IEZ.	48
Figura 4.3: IEZ para 0.5 segundos de extracción y distintos tiempos de reposo. (a) 0.5 segundos de reposo. (b) 1.5 segundos de reposo. (c) 3.0 segundos de reposo. (d) 5.0 segundos de reposo.	49
Figura 4.4: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de extracción.....	50
Figura 4.5: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de extracción.	50
Figura 4.6: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al tiempo de reposo considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de extracción.....	51
Figura 4.7: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al tiempo de reposo considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de extracción.	51
Figura 4.8: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de extracción.	52
Figura 4.9: IEZ para 2.5 segundos de reposo y distintos tiempos de extracción. (a) 0.5 segundos de extracción. (b) 1.5 segundos de extracción. (c) 3.0 segundos de extracción. (d) 5.0 segundos de extracción.....	53
Figura 4.10: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.	54
Figura 4.11: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.	54
Figura 4.12: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al tiempo de extracción considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.	55
Figura 4.13: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al tiempo de extracción considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.	55
Figura 4.14: Relación del volumen extraído con respecto al tiempo de extracción para la IEZ considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.	56
Figura 4.15: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al tiempo de extracción considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.	56
Figura 4.16: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.	57
Figura 4.17: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.	57
Figura 4.18: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de extracción.....	58
Figura 4.19: IEZ para una energía superficial de 0 [J/m ²] y distintos coeficientes de fricción estático. (a) μ_s igual a 0.25. (b) μ_s igual a 0.28. (c) μ_s igual a 0.31. (d) μ_s igual a 0.34.	59
Figura 4.20: IEZ para un coeficiente de fricción estático de 0.30 y distintos valores de energía superficial. (a) γ igual a 0 [J/m ²]. (b) γ igual a 0.2 [J/m ²]. (c) γ igual a 0.4 [J/m ²]. (d) γ igual a 0.6 [J/m ²].	60
Figura 4.21: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al coeficiente de fricción estático considerando una extracción continua.	61
Figura 4.22: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto a la energía superficial considerando una extracción continua.....	61

Figura 4.23: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al coeficiente de fricción estático considerando una extracción continua.....	62
Figura 4.24: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la energía superficial considerando una extracción continua.....	62
Figura 4.25: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: energía superficial.	63
Figura 4.26: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.	63
Figura 4.27: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: energía superficial.	64
Figura 4.28: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.	64
Figura 4.29: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al coeficiente de fricción estático considerando una extracción continua.....	65
Figura 4.30: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto a la energía superficial considerando una extracción continua.	66
Figura 4.31: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua. Leyenda: energía superficial.	67
Figura 4.32: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.	67
Figura 4.33: IEZ para una granulometría de 5 tamaños y distintos coeficientes de fricción estático. (a) μ_s igual a 0.25. (b) μ_s igual a 0.28. (c) μ_s igual a 0.31. (d) μ_s igual a 0.34.....	68
Figura 4.34: IEZ para un coeficiente de fricción estático de 0.32 y distinta granulometría o cantidad de tamaños. (a) C_{tam} igual a 3. (b) C_{tam} igual a 5. (c) C_{tam} igual a 7.....	69
Figura 4.35: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto a la granulometría del mineral considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.	70
Figura 4.36: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al coeficiente de fricción estático considerando una extracción continua. Leyenda: Cantidad de tamaños.101010 ..	70
Figura 4.37: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la granulometría del mineral considerando una extracción continua.....	71
Figura 4.38: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al coeficiente de fricción estático considerando una extracción continua.....	71
Figura 4.39: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: Cantidad de tamaños.	72
Figura 4.40: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.	72
Figura 4.41: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: Cantidad de tamaños.	73
Figura 4.42: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.	73
Figura 4.43: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto a la granulometría del mineral considerando una extracción continua.....	74
Figura 4.44: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al coeficiente de fricción estático considerando una extracción continua.....	75
Figura 4.45: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua, caso 2. Leyenda: coeficiente de fricción estático.	76
Figura 4.46: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua, caso 2. Leyenda: Cantidad de tamaños.....	76

Figura 4.47: Evolución de la altura de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando el coeficiente de fricción estático. Sturla, Vivanco & Palma (2022); Moris & Palma (2023).	77
Figura 4.48: Evolución del ancho de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando el coeficiente de fricción estático. Sturla, Vivanco & Palma (2022); Moris & Palma (2023).	78
Figura 4.49: Evolución de la altura de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta y continua respectivamente.	79
Figura 4.50: Evolución de la altura de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta y continua.	79
Figura 4.51: Evolución del ancho de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta y continua respectivamente.	80
Figura 4.52: Evolución del ancho de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta y continua. Sturla, Vivanco & Palma (2022); Moris & Palma (2023).	81
Figura 4.53: Evolución de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído y el modelo ajustado considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de extracción.	82
Figura 4.54: Evolución de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído y el modelo ajustado considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.	83
Figura 4.55: Evolución del ancho máximo de la IEZ con respecto al volumen extraído y el modelo ajustado considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de extracción.	84
Figura 4.56: Evolución del ancho máximo de la IEZ con respecto al volumen extraído y el modelo ajustado considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.	84
Figura 4.57: Comparación normalizada de modelos de distintos autores para la altura de la IEZ.	85
Figura 4.58: Comparación normalizada de modelos de distintos autores para el ancho de la IEZ.	86
Figura 7.1: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: energía superficial.	98
Figura 7.2: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.	98
Figura 7.3: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático completo.	99
Figura 7.4: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.	99
Figura 7.5: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: Cantidad de tamaños.	100
Figura 7.6: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.	100
Figura 7.7: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua. Leyenda: Cantidad de tamaños completos.	101
Figura 7.8: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático completo.	101
Figura 7.9: Comparación normalizada de modelos de distintos autores para la altura de la IEZ. Incluye los modelos generados en este estudio.	105

Figura 7.10: Comparación normalizada de modelos de distintos autores para el ancho de la IEZ. Incluye los modelos generados en este estudio.....	106
---	-----

LISTA DE TABLAS

Tabla 2-1: Características principales de los modelos matemáticos utilizados para el estudio del flujo gravitacional. (D. Garcés, 2015).	22
Tabla 3-1: Tiempos de extracción y reposo considerados para las simulaciones discretas.	35
Tabla 3-2: Magnitud de las propiedades del material granular para la extracción discreta.	43
Tabla 3-3: Magnitud de las propiedades del material granular para la extracción continua.	43
Tabla 4-1: Valores obtenidos para las constantes (a y b) asociadas al modelo matemático propuesto para la altura máxima de la IEZ.	82
Tabla 4-2: Coeficiente de determinación y error cuadrático medio obtenidos para el modelo matemático propuesto para la altura máxima de la IEZ.	82
Tabla 4-3: Valores obtenidos para las constantes (a y b) asociadas al modelo matemático propuesto para el ancho máximo de la IEZ.	83
Tabla 4-4: Coeficiente de determinación y error cuadrático medio obtenidos para el modelo matemático propuesto para el ancho máximo de la IEZ.....	83
Tabla 7-1: Distribución granulométrica utilizada por Basaure (2014) y Sturla, Vivanco & Palma (2022).	93
Tabla 7-2: Dimensión y distribución de partículas para el estudio de la influencia de la granulometría del mineral.....	94
Tabla 7-3: Extracto de la recopilación de datos perteneciente a la extracción discreta.	95
Tabla 7-4: Extracto de la recopilación de datos perteneciente a la extracción continua, energía superficial versus coeficiente de fricción.	96
Tabla 7-5: Extracto de la recopilación de datos perteneciente a la extracción continua, granulometría versus coeficiente de fricción estático.	97
Tabla 7-6: Modelos de <i>HIEZ</i> e <i>WIEZ</i> de distintos autores hasta la fecha.....	103
Tabla 7-7: Modelos de <i>HIEZ</i> e <i>WIEZ</i> de distintos autores hasta la fecha. Considerando el modelo de extracción discreta y continua.....	104

1. INTRODUCCIÓN

1.1 Motivación

Chile es visto internacionalmente como un país minero. Esto debido a que se ha construido una institucionalidad que permite la inversión en minería y al enorme potencial geológico presente en nuestro país. De hecho, cuenta con el 21% de las reservas mundiales de cobre con una participación mundial de producción de cobre del 24% (Consejo minero, 2023) [12].

La minería actual presenta un considerable desafío producto de los inmensos costos y el gran daño ambiental que se provoca mediante la explotación de yacimientos superficiales cada vez más bajos y con menor ley. De hecho, algunos megaproyectos en Chile como Mina Chuquicamata Subterránea y Nuevo Nivel Mina han optado por expandir sus operaciones de forma subterránea (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022) [45]. En vista de eso, se busca utilizar métodos de explotación masivos y de bajo costo, como el Block Caving, donde el impacto ambiental que se genera mediante este estilo es menor que los proyectos mineros de cielo abierto.

El Block/Panel Caving es un método de minería subterránea basado en la acción de la gravedad para la fracturación y el transporte de minerales. Tiene el costo más bajo y las tasas más altas de producción de todos los métodos subterráneos ((G. Hubert et al, 2000) [27]; (T. Heslop, 2000) [64]). La buena gestión de los riesgos es importante para garantizar la seguridad del personal y la infraestructura. Estos peligros asociados a las operaciones de minería subterránea son los bombeos de agua-barro, los estallidos de aire y rocas (J. Vallejos et al, 2017) [40]. Debido a esto, es necesario desarrollar métodos analíticos para predecir la ocurrencia de estos eventos. Aquello promueve la mitigación de probables peligros, una mejora de producción y un aumento de la seguridad en las operaciones tanto para el ámbito personal como el ligado a la infraestructura.

Dentro de este marco, el Proyecto Fondecyt N° 1211469: “Complex Fluids Behaviour and Hazards Prediction in Underground Mining: Mudrush and Airblast Events” se enfoca en el desarrollo de un software capaz de predecir estos eventos, implementando una nueva teoría para flujos granulares gravitacionales basada en experimentos controlados de laboratorio en medios granulares y mecánica de fluidos. Así mismo, este software propondrá los lineamientos del manejo del peligro basado en las características de la faena subterránea, como las propiedades del material fracturado y la influencia del agua en la generación de movimientos de barro.

Por último, es de gran importancia actualizar los modelos actuales que describen el comportamiento de los flujos gravitacionales. Esto se debe a que en la actualidad dichos modelos no consideran las diferentes propiedades del material granular, o factores externos como la presencia de agua en labores mineras producto del deshielo proveniente de sectores cordilleranos. Lo mencionado anteriormente modifica la interacción entre el material y afecta el comportamiento del flujo gravitacional.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Analizar la geometría del elipsoide de extracción (**IEZ**) en un medio granular simulando extracciones continuas y discretas de **Block Caving** mediante un software de simulaciones numéricas basadas en el **método de elementos discretos (DEM)**.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Caracterizar el elipsoide de extracción (**IEZ**) mediante una **extracción continua y discreta**.
- Determinar el elipsoide de extracción (**IEZ**) en función del **coeficiente de fricción estático (μ_s)** y la **granulometría del mineral**.
- Determinar el elipsoide de extracción (**IEZ**) en función del **coeficiente de fricción estático (μ_s)** y la **energía superficial (γ)**.

1.3 Alcances

- Estudio enmarcado en el Proyecto Fondecyt N° 1211469: “Complex Fluids Behaviour and Hazards Prediction in Underground Mining: Mudrush and Airblast Events”.
- Simulación computacional mediante el método de elementos discretos (DEM).
- Se modelará una geometría que simula una columna de mineral, la cual desemboca solamente en un único punto de extracción.
- La extracción se realiza de forma continua y discreta. Esta extracción se realizará por debajo de las bateas para disminuir el costo computacional.
- Se contará con un único ángulo de zanja para las bateas de extracción.
- Las dimensiones de la geometría y la cantidad de partículas son establecidas en función de la capacidad de procesamiento computacional. Se obtiene un análisis cuasi-2D del flujo granular a simular.
- Las partículas utilizadas para simular el macizo rocoso fragmentado poseen una geometría esférica perfecta.
- La forma del cuerpo formado corresponde a un elipsoide debido a las simulaciones 2D.
- Al momento de estudiar la presencia de la humedad en el flujo granular, se incorpora la variable de energía superficial (γ), la cual trabaja mediante fuerzas cohesivas entre moléculas.
- Las mediciones de las IEZ son aproximaciones visuales obtenidas mediante herramientas de EDEM y calculadas además a partir de un código de MATLAB™.

2. ANTECEDENTES

2.1 Minería Subterránea

La minería tiene por objetivo extraer recursos minerales de la tierra. La minería subterránea, por su parte, abarca todas las actividades encaminadas a extraer materias primas depositadas debajo de la tierra. El acceso a los recursos se efectúa por galerías, piques y chimeneas que están comunicados con la superficie. Dentro de la minería subterránea masiva, los métodos de hundimiento (caving) son una opción preferible y viable cuando se buscan bajos costos y altos ritmos de producción. Factores importantes dada la mayor presencia de yacimientos de bajas leyes y roca mineralizada cada vez más competente (G. Flores, 2014) [26]. Como principales desventajas de estos métodos se encuentran la alta inversión inicial y la baja flexibilidad a cambios en el diseño una vez que la operación ha comenzado (R. Castro, 2006) [50].

2.2 Block Caving

La explotación mediante Block Caving se realiza en yacimientos subterráneos masivos de tipo pórfido con alto tonelaje y una mediana o baja ley. Usualmente se opta por esta vía cuando el costo debido a la profundidad del yacimiento o características particulares de este no hacen viable la extracción mediante cielo abierto. Dicho método puede lograr altas tasas de extracción y bajos costos operativos ((E. Brown, 2007) [20]; (T. Heslop, 2000) [64]). Más detalladamente, debido a la alta inversión de capital inicial de un hundimiento de bloques y su falta de flexibilidad, es fundamental para el éxito de las minas de hundimiento lograr un nivel económicamente aceptable de recuperación de mineral y contenido de dilución durante la operación. Gran parte de la producción chilena de cobre provienen de pórfidos cupríferos, como lo son El Teniente y Chuquibambilla.

El Block Caving corresponde a un método masivo de minería subterránea de gran escala en el cual el cuerpo mineralizado se hunde naturalmente tras iniciar el quiebre del macizo rocoso desde un nivel de hundimiento ((D. Laubscher, 1994) [15]; (E. Brown, 2007) [20]). Esta técnica utiliza la gravedad terrestre en conjunto con esfuerzos internos de la roca para generar la fractura del macizo rocoso en fragmentos manejables que pasarán a través de los puntos de extracción (drawpoints), los cuales serán extraídos por un equipo de carga (H. Hamrin, 2001) [28].

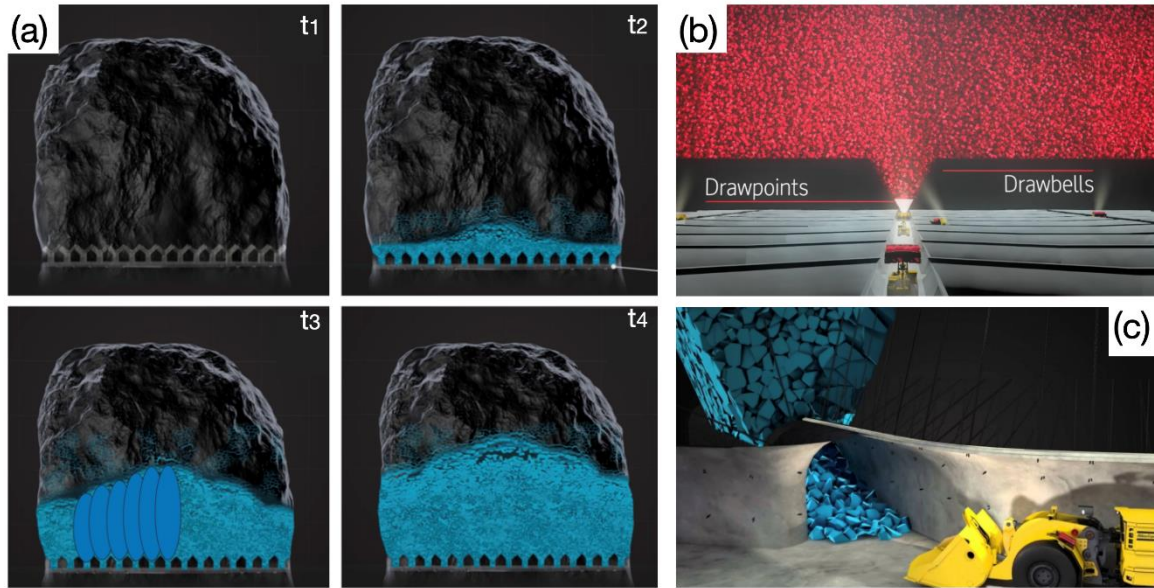


Figura 2.1: (a) Método de Block Caving para diferentes tiempos de extracción. (b) Vista de un punto (drawpoint) y una batea de extracción (drawbell). (c) Extracción de material desde un punto de extracción por un LHD. Rio Tinto, (Atlas Copco, 2018).

Se desarrolla un nivel de socavación en la base del yacimiento llamado nivel de hundimiento (UCL), donde a la vez se construye un nivel de producción a cierta distancia por debajo del nivel de hundimiento. Luego, se excavan aberturas llamadas bateas de extracción entre el nivel de hundimiento y el nivel de producción, donde los puntos de extracción se encuentran en las bases de dichas bateas de extracción, por donde el material es extraído posteriormente. A continuación, se extrae una capa de mineral horizontal del nivel de hundimiento para colapsar el yacimiento de mineral hacia arriba, donde el mineral quebrado cae en las bateas y se extraen en el nivel de producción mediante equipos LHD. A medida que el mineral quebrado se extrae de los puntos de extracción, el flujo de mineral provoca que el macizo rocoso continúe rompiéndose y cayendo (J. Douglas, 1992) [35].

Ahora bien, el método de Block Caving continuamente se ha ido modificando, adaptándose a los nuevos desafíos que surgen día a día. Por ello, existen dos metodologías que se han estudiado y aplicado en la última década, las cuales buscan enfrentar las problemáticas más recientes del método, conocidas como: Minería continua y Macrobloques (R. Gómez et al, 2017) [56].

2.3 Dilución en Block Caving

La recuperación y dilución del mineral en una operación de excavación en cuevas están fuertemente determinadas por el diseño y el desempeño del nivel de producción y las características de flujo del mineral y el material de desecho (R. Castro, R. Trueman & A. Halim, 2007) [54].

Ahora bien, el flujo por gravedad es el proceso por el cual la roca rota se mueve desde su ubicación in situ hacia los puntos de extracción en el nivel de producción. Este flujo contiene mineral junto con un porcentaje significativo de material inútil no deseado llamado dilución. La dilución es uno de los principales problemas en la minería subterránea debido a que cualquier punto de extracción contaminado con dilución se pierde para una mayor extracción de mineral, lo que aumenta los costos de operación de la mina. En principio, un buen control del caudal podría evitar la contaminación de los puntos de extracción con dilución. Puede lograrse mediante una disposición espacial adecuada de los puntos de extracción y el manejo adecuado de los mismos (F. Vivanco et al, 2011) [24]. Por ello, el propósito final de estudiar el flujo por gravedad es pronosticar el índice de recuperación de mineral, como las tasas de pérdida y dilución, que son los principales índices clave para evaluar la explotación de los depósitos de mineral y representan la utilización de los recursos subterráneos y la calidad de los minerales extraídos, respectivamente [30] [50]. Entonces, mediante la comprensión de las reglas básicas de extracción, es decir, el flujo de gravedad del mineral fragmentado y la roca durante el proceso de extracción, el método de hundimiento se puede aplicar de manera eficiente donde la pérdida de mineral y la dilución se pueden reducir al máximo (H. Sun, 2019) [29].

2.4 Medio Granular

Un medio granular es un conjunto de partículas macroscópicas suaves y duras, con tamaño mayor a 100 (μm) en diámetro que interactúan entre sí ((B. Andreotti, 2013) [8]; (J. Durán, 2003) [36]; (R. Nedderman & U. Tuzun, 1979) [58]). El estudio de los medios granulares en la última década ha presentado un gran impacto en la investigación y en el desarrollo de nuevas tecnologías principalmente enfocadas en la industria de la minería, agricultura, entre otros (Dimec, 2022) [18].

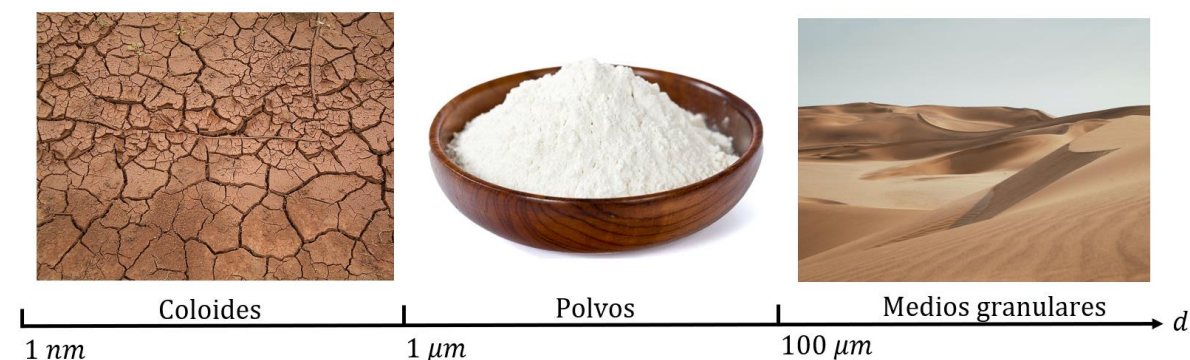


Figura 2.2: Clasificación de material particulado en función del tamaño de partícula: coloides (barro), polvo (harina) y medios granulares (una duna de arena).

Específicamente en minería, las aplicaciones están en el área de extracción, almacenamiento, transporte y procesamiento de minerales. No obstante, a pesar de sus aplicaciones en la industria, los medios granulares aún son complejos de comprender, y es aún más complejo describir su comportamiento con relación a la ingeniería, incluso en un caso ideal donde se cuenta con

partículas esféricas idénticas. Algunas de las dificultades para entender los medios granulares son:

- Los medios granulares están compuestos por una gran cantidad de partículas por lo que es muy difícil generar una descripción continua del movimiento de cada una de ellas.
- Las fluctuaciones térmicas son insignificantes, por tanto, los medios granulares son sistemas atérmicos.
- La falta de una clara separación de escalas, entre la escala microscópica y la escala macroscópica, es decir, entre el tamaño de grano y el tamaño de flujo, respectivamente.
- La interacción entre granos es compleja.
- Los medios granulares disipan fácilmente la energía.
- Los medios granulares pueden exhibir diferentes estados de la materia, un material granular puede comportarse como un sólido, un líquido o un gas.

De este modo, el comportamiento de los medios granulares puede explicarse definiendo ciertas relaciones físicas por las que se rigen. Caracterizar el comportamiento de estos materiales resulta de gran importancia para la industria en general, específicamente en la minería y en las minas que utilizan métodos de hundimiento para la extracción del mineral (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022) [45].

2.5 Flujo gravitacional

El descenso de material granular producto de la acción de la gravedad de la tierra se define como un flujo gravitacional (R. Kvapil, 1965) [57], dinámica en la que la minería de Block Caving es basada (D. Laubscher, 1994) [15]. Por ello, se desarrollan conceptos y fenómenos claves asociados al estudio de los flujos gravitacionales que describen el comportamiento del material granular cuando es extraído por Block Caving.

A continuación, se presenta un resumen de los principales modelos matemáticos empleados para el estudio del flujo gravitacional (D. Garcés, 2015) [14], donde claramente DEM destaca sobre la mayoría de los otros modelos presentados.

Tabla 2-1: Características principales de los modelos matemáticos utilizados para el estudio del flujo gravitacional. (D. Garcés, 2015).

Tipo de modelo	Fuerzas de contacto	Medios discretos	Patrones de flujo	Parámetros de entrada	Calibración y validación	Capacidad de estudiar mecanismos de flujo	Aplicación en control de tiraje
Elementos discretos (DEM)	✓	✓	✓	Características del material: tamaño límite de partícula, forma y fricción	Cantidad acotada de elementos que limitan la posibilidad de validación	✓	✗
Elementos finitos	✓	✗	✗	Parámetros de material continuo: ángulo de fricción, módulos de elasticidad, dilatación	Tamaño de partícula no puede ser incorporada	✓	✗
REBOP	✗	✗	✓	Erosión, colapso y perfil de velocidad de extracción	Puede ser calibrado con IEZ e IMZ experimental	✗	✓
Medio continuo estocástico	✗	✗	✓	Coefficientes de difusión, cambio de densidad en medio continuo, condiciones de borde	Puede ser calibrado con IEZ e IMZ experimental	✗	✓
Estocástico	✗	✗	✓	Probabilidad de llenar un vacío	Puede ser calibrado con IEZ experimental	✗	✓
Autómata celular	✗	✓	✓	Probabilidad de llenar un vacío y reglas para la función de transición	Puede ser calibrado con IEZ e IMZ experimental	✓	✓
LGrCA	✓	✓	✓	Modos de colisión de partículas y programación en una grilla fija	Puede ser calibrado con IEZ e IMZ experimental	✓	✗
Modelos volumétricos	✗	✗	✗	PED, altura de interacción y geometría de flujo	Puede ser calibrado usando leyes de mineral o modelos de flujo	✗	✓

2.6 Segregación granular

En los fenómenos naturales o procesos industriales en donde los medios granulares están presentes, los granos no son todos idénticos, sino que, son diferentes en formas, tamaños y propiedades mecánicas. En el caso de los flujos con distribución polidispersa se encuentra el fenómeno de segregación. Una mezcla homogénea de granos es difícil de lograr cuando existen diferencias entre partículas ya sea en términos de masa, propiedades mecánicas o tamaños. Entre los distintos mecanismos que existen para impedir una buena mezcla, el más eficaz es la

segregación. Sin embargo, a pesar de sus consecuencias para muchos problemas industriales, la segregación por tamaño no se comprende en su totalidad (B. Andreotti, 2013) [8].

Al momento de tener una mezcla de dos o más partículas diferentes (distribución polidispersa) fluyendo gracias a la gravedad, estas diferentes variedades de partículas tienden a separarse o segregarse. Dicho acontecimiento puede suceder de dos formas principales: segregación de densidad donde las partículas más densas se hunden hasta el fondo y segregación de tamaño donde las partículas más grandes se elevan a la superficie de un flujo. Si un flujo presenta un colapso granular, se espera que esto sea debido principalmente al proceso de tamizado cinético. Ahora bien, el tamizado cinético se produce debido al cizallamiento en el flujo que hace que se abran espacios entre las partículas en un flujo gravitacional. Por lo tanto, otras partículas pueden caer a través de estos espacios, y las partículas más pequeñas tienen más probabilidades de hacerlo que las partículas más grandes. Entonces, las partículas pequeñas tienden a acumularse en la base del flujo y las partículas grandes se encuentran necesariamente hacia la superficie (J. Caplan, 2018) [34]. A continuación, se presenta una figura de lo mencionado anteriormente en cuanto al proceso de tamizado cinético.

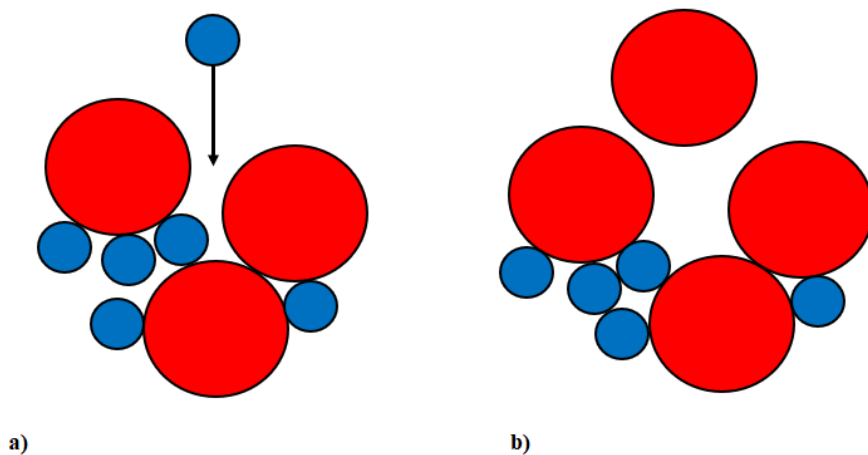


Figura 2.3: Proceso de tamizado cinético.

La **figura 2.3a** indica que una partícula pequeña puede caer fácilmente a través de los espacios de la estructura granular, donde se acumula cerca de la base. Por otra parte, la **figura 2.3b** dice que las partículas grandes no pueden caer fácilmente a través de los espacios y permanecen cerca de la superficie.

2.7 Zona de Extracción y Movimiento Aislada

2.7.1 Estudios sobre la relación entre la IEZ e IMZ

Uno de los primeros estudios y modelos fue realizado por Kvapil [57] en 1965, donde reconoce dos zonas. La zona de extracción aislada (IEZ) y la zona de movimiento aislada (IMZ). Dos zonas de forma elíptica: las cuales se generan mediante la extracción en un único punto de extracción

y considerando el efecto frontal de dilatación ((F. Melo, F. Vivanco & C. Fuentes, 2009) [23]; (R. Kvapil, 1965) [57]). La IEZ corresponde a la superficie limitante de la que se extraen todas las partículas, mientras que la IMZ se refiere a la superficie que limita la zona donde las partículas permanecen estáticas ((A. Rustan, 2000) [4]; (J. Bergmark et al, 1975) [33]; (M. Kuchta, 2002) [44]; (R. Castro, R. Trueman & A. Halim, 2007) [54]; (R. Kvapil, 1965) [57]). Específicamente, la IEZ corresponde a todo el material granular que se extrae por los puntos de extracción, mientras que la IMZ corresponde a todo el material granular que se mueve debido a esa extracción de mineral. A continuación, se presenta un modelo esquemático de ambas zonas mencionadas.

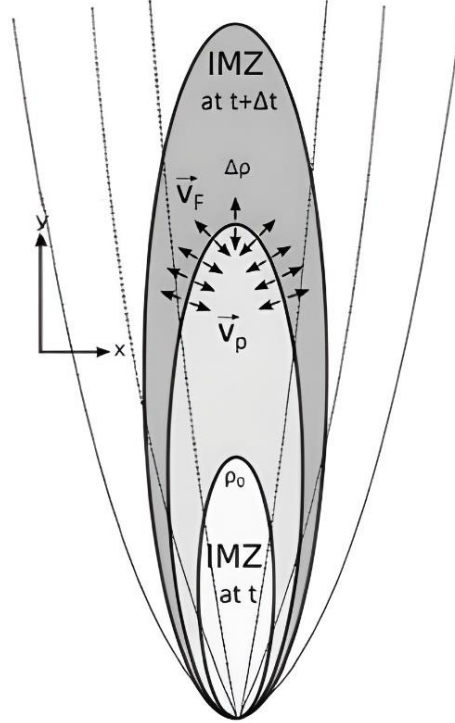


Figura 2.4: Modelo esquemático del IEZ que muestra el frente de dilatación moviéndose hacia arriba y el movimiento de las partículas hacia abajo una vez que han sido alcanzados por el IEZ [modificado de F. Vivanco (2011)]. Donde V_p es la velocidad de partículas, V_f es la velocidad del frente de dilatación, ρ_p es la densidad dentro de la IMZ, ρ_0 es la densidad fuera de la IMZ y $\Delta\rho$ es el cambio de densidad local introducido por el movimiento de la roca.

A partir de dicho modelo, Kvapil obtiene que la IMZ es 2.5 veces más alta que la IEZ. Específicamente, con el supuesto de la misma excentricidad para la IMZ y la IEZ, considerando un factor de aflojamiento o de pérdida (f) = 1.066, Janelid y Kvapil (1966) [32] encontraron una relación de las alturas de estas zonas dada por:

$$H_{IMZ} \cong 2.50H_{IEZ} \quad (2.1)$$

Vale la pena señalar que este resultado, hasta como mínimo para el año 2009, se usaba en el diseño de minas de hundimiento de bloques, aunque no hay suficiente apoyo experimental para la suposición hecha sobre la geometría IMZ (F. Melo, F. Vivanco & C. Fuentes, 2009) [23].

Ahora bien, Melo, Vivanco & Fuentes (2009) [23] consideran un frente de dilatación simple que se propaga hacia arriba a medida que los granulados fluyen hacia abajo. Dentro de este supuesto, muestra que la IEZ prácticamente no cambia por la dilatación. También se observa que la IMZ resultante es similar a la IEZ si el ancho y la altura de los cuerpos respectivos se escalan mediante factores apropiados que dependen de las variaciones locales de la densidad. Para comparar el resultado obtenido con el modelo cinemático utilizado y la relación propuesta por Janelid y Kvapil (1966) [32] se reemplaza el valor del cambio de densidad, donde $\Delta\rho/\rho$ es igual a 0.066, obteniendo la siguiente relación:

$$H_{IMZ} \cong 4.02H_{IEZ} \quad (2.2)$$

Nuevamente, Melo, Vivanco & Fuentes (2009) [23] calculan una variación de densidad del 10% en los resultados obtenidos, los cuales predicen una desviación del 60% con respecto al valor dado por Janelid y Kvapil. Esta discrepancia se debe a que el supuesto de igualdad de excentricidades utilizado por estos autores no se cumple en el modelo cinemático. Hasta donde se sabe, no hay evidencia experimental sobre la suposición de las mismas excentricidades para respaldar las conclusiones de Janelid y Kvapil. Por otra parte, aplicando las mismas ideas sobre el frente de dilatación al modelo de plasticidad, se obtiene la relación de alturas IMZ a IEZ y se demuestra que depende únicamente de los cambios de densidad locales. Al igual que en el modelo cinemático, el modelo de plasticidad se puede aplicar a la descripción de la IMZ cuando se incluyen los efectos de dilatación (F. Melo, F. Vivanco & C. Fuentes, 2009) [23].

En última instancia, es la IEZ la que determina la recuperación de un yacimiento y la rentabilidad de una mina (W. Hancock, 2013) [66]. La importancia de la IMZ es su capacidad para ser utilizada como precursora de la IEZ, por lo tanto, la IEZ y la IMZ se consideran complementarias e indispensables.

2.7.2 Modelo cinemático

En el contexto minero, el modelo cinemático se ha utilizado para calcular la forma de la zona de extracción aislada (IEZ) y se ha modificado para introducir tanto un coeficiente de difusión no constante (R. Chen, 1997) [55] como una regla heurística para la dilatación. Este frente se propaga de forma ascendente provocando un incremento de la porosidad que permite el movimiento de material (**figura 2.5**), afectando directamente a la IMZ y sin influir en la IEZ.

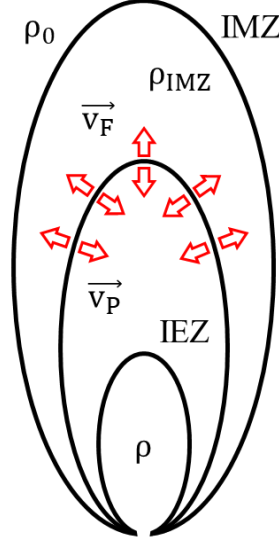


Figura 2.5: Frente de dilatación y movimiento de partículas, donde estas comienzan a moverse hacia abajo después de que son alcanzadas por el frente de dilatación que se mueve hacia arriba. Melo et al. (2009).

El modelo cinemático describe el movimiento del material granular, considerando que una partícula que sale del sistema crea un espacio, que está ocupado por una partícula de la capa superior. Por lo tanto, se genera un nuevo espacio, que está ocupado por la partícula de la capa superior (W. Mullins, 1972) [67]. Para que se produzca esto último, se supone que el peso de la partícula es suficiente para causar desplazamiento, ya que esto no considera el estrés en el sistema y depende únicamente del movimiento y la compactación del material granulado ((F. Melo et al, 2007) [22]; (M. Vivanco & F. Melo, 2013) [46]; (R. Nedderman & U. Tüzün, 1979) [58]). El modelo cinemático para predecir la distribución de velocidad formulado por Nedderman y Tüzün [58], considerando tres partículas como se muestra en la **figura 2.6**, sugiere que, si la velocidad descendente de la partícula 1 es mayor que la de la partícula 2, entonces habrá una tendencia a partícula 3 para moverse hacia la derecha, es decir existe una relación entre la velocidad horizontal u_{xp} y el gradiente de la velocidad vertical u_{yp} . La relación más simple posible está dada por Nedderman y Tüzün [58]:

$$u_{xp} = -Dp \frac{\partial u_{yp}}{\partial x} \quad (2.3)$$

Con un coeficiente de difusión proporcional al tamaño de grano (D_p), y suponiendo una densidad constante en todo el sistema. Reemplazando la siguiente ecuación en la ecuación de conservación de masa estacionaria, se puede expresar como:

$$\frac{\partial u_{xp}}{\partial x} + \frac{\partial u_{yp}}{\partial y} = 0 \quad (2.4)$$

Para la velocidad vertical, se da una ecuación similar a la difusión de la siguiente manera:

$$\frac{\partial u_{yp}}{\partial y} = Dp \frac{\partial^2 u_{yp}}{\partial x^2} \quad (2.5)$$

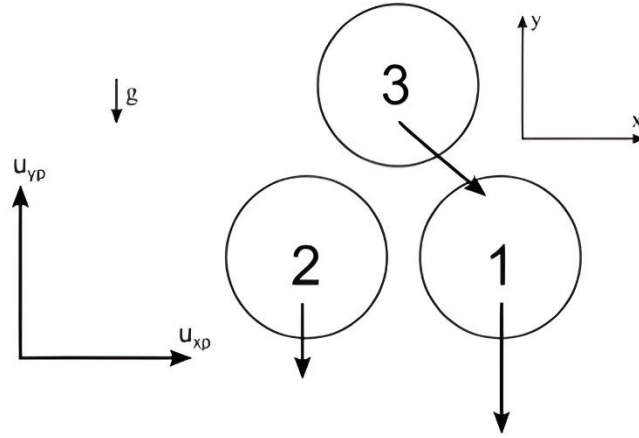


Figura 2.6: El modelo cinemático de Nedderman y Tüzün (modificado de (R. Nedderman, 2005)).

2.7.3 Estudios sobre la forma de la IEZ y la IMZ

Respecto de la forma que toman la IEZ e IMZ, Fröström (1970) [37] pudo demostrar que la teoría de la forma de la gota es más precisa que la teoría del elipsoide, que por lo tanto fue un cambio de paradigma muy importante en la teoría del flujo de gravedad. Bergmark y Roos (1975) [33] derivaron una ecuación matemática para la forma de gota a partir de leyes naturales simples. Las pruebas de extracción aisladas realizadas en este estudio confirmaron el hallazgo anterior de que la forma de la IEZ se parece más a una gota invertida que a un elipsoide estándar (A. Jin et al, 2017) [2]. Esto se logra apreciar en la **figura 2.7**.

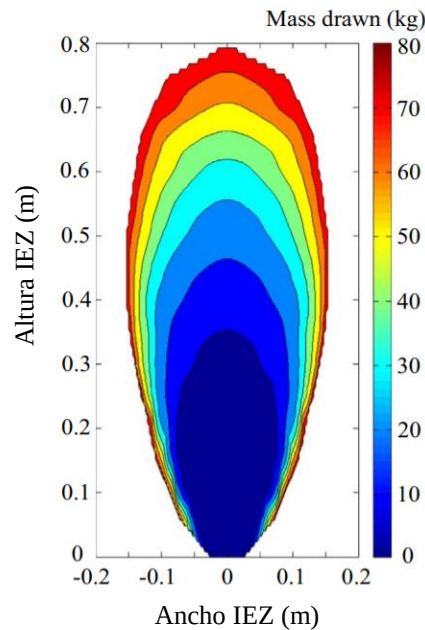


Figura 2.7: Dimensiones de la IEZ para diferente cantidad de masa de material extraído. (A. Jin et al, 2017).

De hecho, los resultados muestran que la tasa de dilución de mineral pronosticada basada en nuevas ecuaciones empíricas está más cerca de la tasa de dilución de mineral real, lo que significa

que, la teoría de la forma de gota invertida también es superior a la teoría de extracción de elipsoide para el pronóstico de la tasa de dilución de mineral (A. Jin et al, 2017) [2].

De igual manera, Sun (2020) [30] postula que las formas de IEZ a diferentes alturas son equivalentes a gotas invertidas con asimetría longitudinal. La forma invertida se vuelve más y más evidente a medida que aumenta la altura de la IEZ. Rustan (2000) [4] afirma lo mismo.

Más que nada, la forma de gota de agua invertida se genera debido a que la mayor extensión horizontal ocurre en la parte superior del cuerpo formado, como se aprecia en la **figura 2.7**. Aun así, en este estudio dicha forma no se genera debido a que son simulaciones computacionales 2D, y en los estudios generados sobre la forma de gota de agua invertida se realizan experimentalmente y de forma tridimensional. Por otro lado, por simplicidad, le seguiremos llamando IEZ durante esta presente memoria.

2.7.4 Estudios sobre la altura y el ancho de la IEZ y la IMZ

Peters (1984) [16] concluyó que el tamaño de partícula tenía un pequeño efecto en el ancho del IEZ e indicó que las dimensiones del ancho de la masa extraída tienen un papel importante en la determinación la geometría general de la IMZ y la IEZ.

Castro (2006) [50] llevó a cabo experimentos físicos a escala para medir tanto la IMZ como la IEZ, y concluyeron que el ancho de la IMZ e IEZ se ve afectado principalmente por la masa extraída y las correspondientes alturas de IMZ o IEZ, en lugar del tamaño de partícula, el tamaño del punto de extracción, la altura de la columna y la escala geométrica dentro del rango de valores considerado en los experimentos.

Adicionalmente, se observó que la tasa de crecimiento de la altura del IMZ en función de la extracción de masa disminuye durante la extracción y alcanza un valor constante (R. Castro, R. Trueman & A. Halim, 2007) [54]. La relación entre la altura de cada elipsoide H se describe en función de la masa extraída (m) de la siguiente forma:

$$H(m) = h_0 \left(1 - e^{-\frac{m}{m_h}} \right) + c \cdot m \quad (2.6)$$

Donde h_0 y m_h corresponden a la altura y masa del respectivo elipsoide durante su crecimiento exponencial, y c corresponde a la tasa de crecimiento lineal.

Nuevamente, Castro, Trueman & Halim (2007) [54] concluyen que la altura y el ancho de la zona de extracción aislada (IEZ) y la zona de movimiento aislado (IMZ) aumentan continuamente con la masa extraída y la altura de extracción. En cuanto al ancho (W) de la IEZ e IMZ, el análisis muestra que incrementa a medida que masa de material es extraída. La tasa de expansión del ancho de la IMZ decrece con la masa acumulada extraída. La relación que describe el ancho (W) de ambos elipsoides en función de la masa extraída (m) es:

$$W(m) = W_0 \left(1 - \beta e^{-\frac{m}{m_1}} - (1 - \beta) e^{-\frac{m}{m_2}} \right) \quad (2.7)$$

Donde W_0 es el ancho máximo después de que la IMZ alcanza la superficie, β corresponde a una constante adimensional de ajuste y m_1 y m_2 representan las masas que identifican ambas etapas en el crecimiento del ancho de la IMZ. El comportamiento de W se observa en la **figura 2.8**.

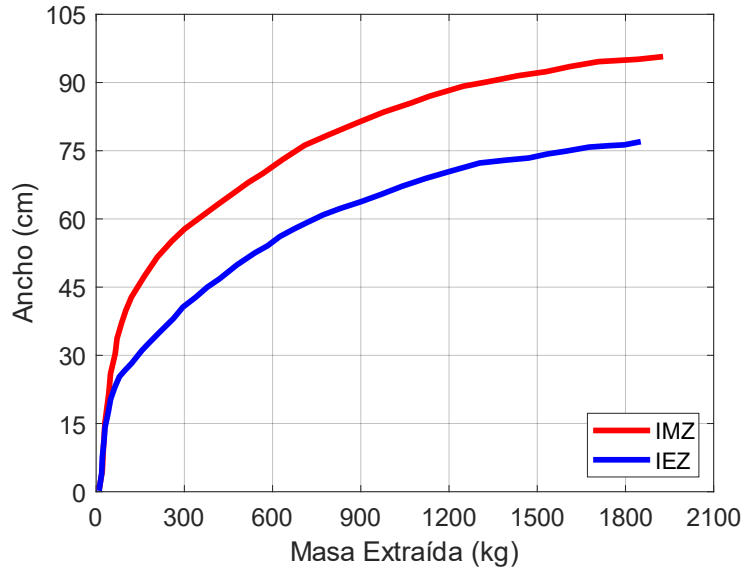


Figura 2.8: Ancho de IEZ e IMZ en función de la masa extraída de material. (R. Castro, R. Trueman & A. Halim, 2007).

Por otra parte, los resultados de Jin (2016) [1] muestran que el tamaño de partícula, el tamaño del punto de extracción y la altura de la columna tienen efectos insignificantes en la forma del IEZ, que se controla principalmente por extracción en masa, y que la relación de pérdida de mineral disminuye al aumentar el tamaño del punto de extracción y la altura de la capa de mineral extraído, por otro lado, incrementa al aumentar el espaciado del punto de extracción.

Sun (2020) [30] muestra que cuando la altura de la IEZ está entre los 30 y 80 metros, el tamaño de partícula, el tamaño del punto de extracción y la altura de la columna no tienen una influencia significativa en la forma y el ancho máximo de la IEZ. Estos resultados concuerdan con los obtenidos por Castro [50].

Reyes & Palma (2021) [9] mediante simulaciones DEM obtienen resultados que indican que el desarrollo de la IEZ es independiente de los tamaños de partícula y el tamaño de la abertura. Representan medios granulares secos, cohesivos y sobresaturados. Observan que el ancho de la IEZ se ve disminuido a medida que se incrementa el grado de cohesión, y aumenta cuando la movilidad del material es excesiva. En la **figura 2.9** es posible observar la diferencia en el comportamiento de las dimensiones de la IEZ en función del área extraída (S) para diferentes condiciones del material, comparando con resultados teóricos al utilizar las relaciones del modelo cinemático propuestas por Melo, Vivanco & Fuentes (2009) [23] para su cálculo.

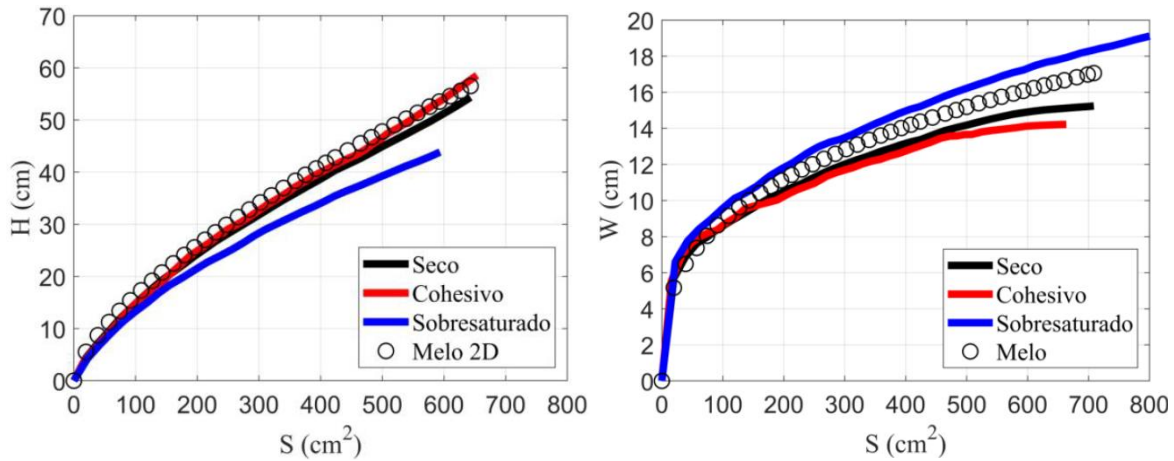


Figura 2.9: Relación de altura y ancho de la IEZ en función del área extraída (S) para diferentes condiciones del material granular. (B. Reyes & S. Palma, 2021).

2.7.5 Estudios sobre la humedad presente en el material granular

Existe escaso conocimiento sobre la influencia de la humedad en las dimensiones de la IEZ e IMZ. Sánchez, Castro & Palma (2019) [65] agregan la humedad como variable de estudio al material granular. Realizan un modelo físico utilizando un sistema LHD para la extracción del material granular fino con un contenido de humedad variable entre 0 y 8%. Esto considerando que, a mayor contenido de humedad, menos masa se puede extraer entre eventos. Los resultados muestran que las dimensiones de la IEZ dependen de tres variables: el contenido de humedad, el tamaño de partícula y la masa extraída acumulada. Se observa que existe una diferencia en el tamaño de la IEZ dependiendo de la humedad del material granular, donde a mayores humedades en el material granular se tiene una menor altura en la IEZ y un mayor ancho en la IEZ. Esto puede observarse en la **figura 2.10**.

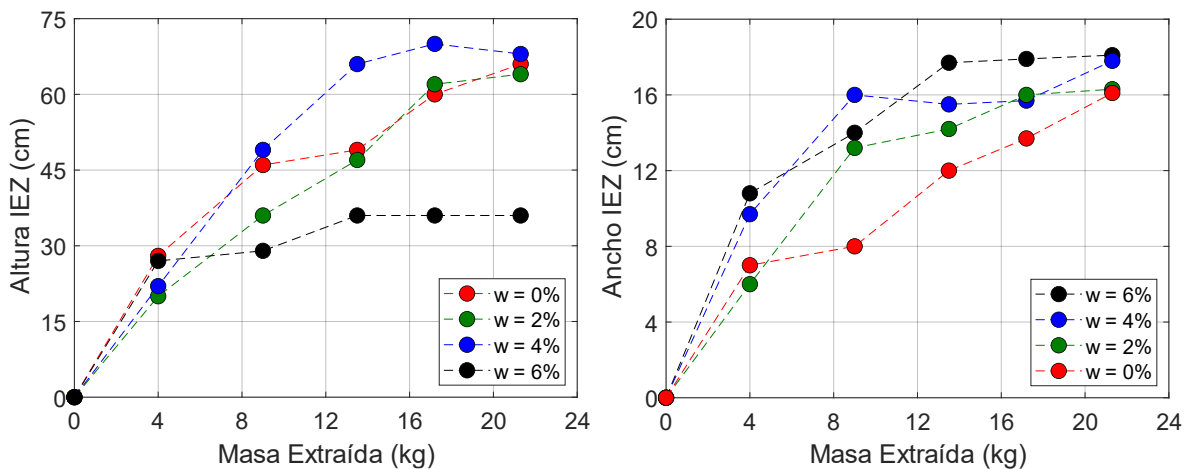


Figura 2.10: Altura y ancho de la IEZ en función de la masa extraída para diferentes grados de humedad (w). (V. Sánchez, R. Castro & S. Palma, 2019).

2.7.6 Estudio más reciente

Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45] estudian los parámetros físicos del material. Como primer parámetro buscan observar el cambio del módulo de Young (E). Encuentran que este parámetro no tiene influencia en el alto y ancho de la IEZ para determinados volúmenes extraídos. El resultado se presenta a continuación.

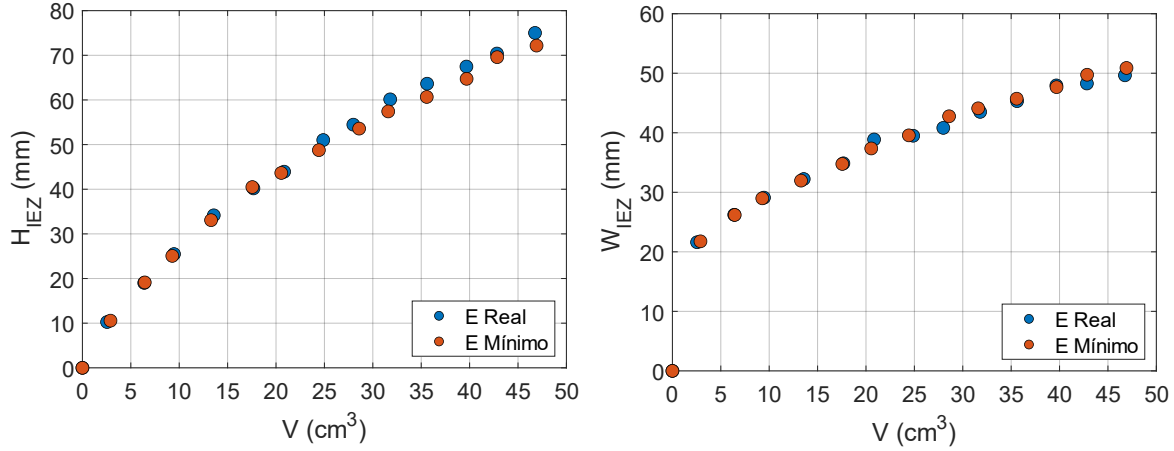


Figura 2.11: Altura y ancho de la IEZ en función del volumen extraído para distintos módulos de Young (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022).

Luego, estudian la variación de la densidad del material (ρ_p) considerando tres densidades distintas. Logran encontrar que la densidad no tiene influencia en el alto y ancho de la IEZ para determinados volúmenes extraídos. Los gráficos se presentan a continuación.

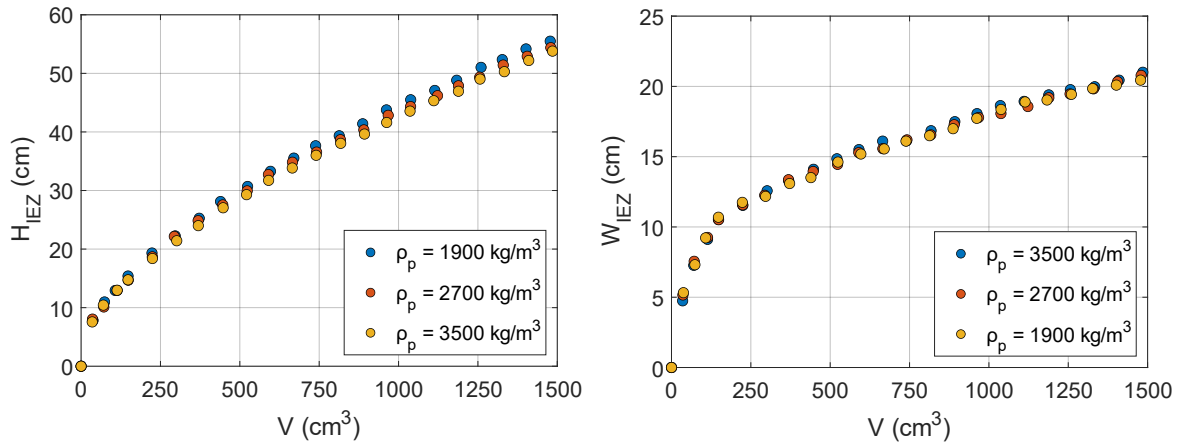


Figura 2.12: Altura y ancho de la IEZ en función del volumen extraído para distintas densidades (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022).

Por otra parte, observan el cambio del coeficiente de restitución (C_r) al estudiar el alto y ancho de la IEZ en función del volumen extraído considerando tres valores diferentes para el coeficiente

de restitución. Nuevamente, encuentran que el coeficiente de restitución no tiene influencia en el alto y ancho de la IEZ para determinados volúmenes extraídos. A continuación, se presentan los gráficos.

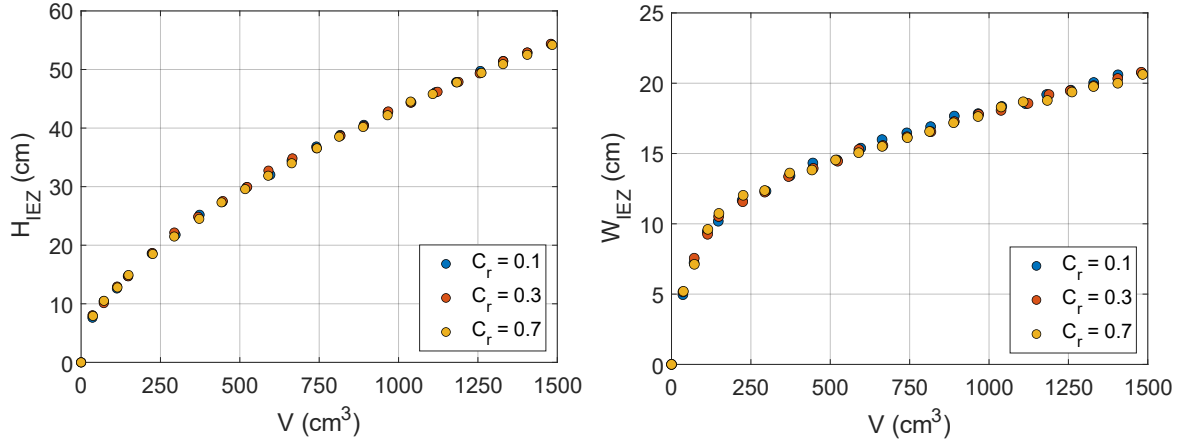


Figura 2.13: Altura y ancho de la IEZ en función del volumen extraído para distintos coeficientes de restitución (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022).

Por otro lado, observan el cambio del coeficiente de rodadura estándar (μ_r) al estudiar el alto y ancho de la IEZ en función del volumen extraído considerando cuatro valores diferentes para el coeficiente de rodadura. Se observa que dicho coeficiente tiene una mínima influencia en el alto y ancho de la IEZ para determinados volúmenes extraídos. Aun así, dicha variable no se considerará en este estudio, por lo cual tendrá un valor constante. A continuación, se presentan los gráficos asociados.

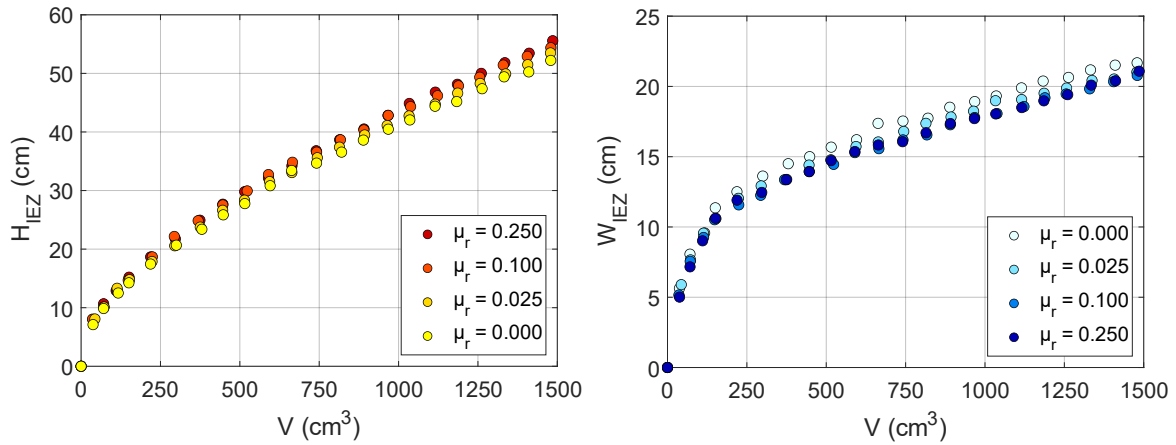


Figura 2.14: Altura y ancho de la IEZ en función del volumen extraído para distintos coeficientes de rodadura (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022).

Por último, observan el cambio del coeficiente de fricción estático (μ_s) al estudiar el alto y ancho de la IEZ en función del volumen extraído considerando ocho valores diferentes para el coeficiente de fricción estático. Se observa que dicho coeficiente tiene influencia significativa en

el alto y ancho de la IEZ para determinados volúmenes extraídos. A continuación, se presentan los gráficos asociados.

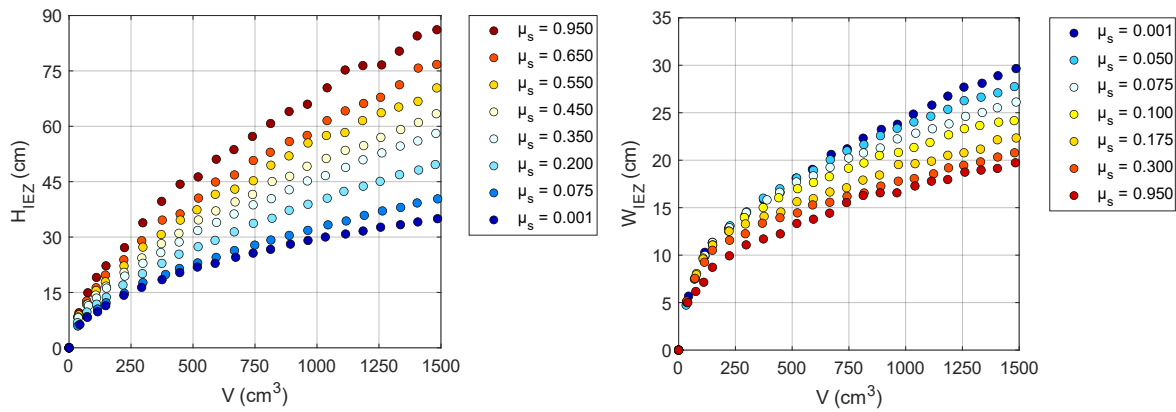


Figura 2.15: Altura y ancho de la IEZ en función del volumen extraído para distintos coeficientes de fricción estático (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022).

Al observar la **figura 2.15** es posible ver como dicha variable tiene una gran influencia en las dimensiones de la IEZ. Por ello, el coeficiente de fricción estático (μ_s) se considerará a lo largo de este estudio.

2.8 Método de Elementos Discretos

Los métodos de análisis numérico incluyen principalmente el método de diferencias finitas (FDM), el método de elementos finitos (FEM), el método de elementos discretos (DEM), la teoría de autómatas celulares (CA), o el acoplamiento de los métodos mencionados ((A. Munjiza, 2004) [3]; (D. Elmo et al, 2014) [13]; (E. Brown, 2003) [19]; (G. Chitombo, 2010) [25]; (P. Yashar, 2013) [49]; (R. Castro et al, 2009) [51]; (R. Verdugo et al, 2004) [60]). Entre estos, el método de elementos discretos (DEM) corresponde a una herramienta de modelado numérico que se puede aplicar a una amplia gama de aplicaciones que requieren el análisis del comportamiento de medios discretos. El DEM utiliza la segunda ley de Newton para establecer la relación entre el movimiento de partículas y las fuerzas que causan este movimiento (P. Cundall, 1979) [48]. Por ello, como el DEM tiene bases en la física newtoniana, muchos han concluido que tiene un potencial significativo como herramienta de investigación para el modelado del flujo de gravedad ((C. Alford, 1978) [10]; (H. Teufelsbauer et al, 2011) [31]). Por otra parte, Tanaka et al. (2001) [47] describen que su función es simular el movimiento de materiales granulares a través de una serie de cálculos que siguen el rastro de las partículas individuales que constituyen el material granular. Si las fuerzas de contacto que actúan en cada paso de tiempo son conocidas, la ecuación de movimiento de cada partícula se deduce de la segunda ley de Newton. En este método, la interacción de las partículas se asume solamente entre partículas que se mantienen en contacto directamente. Luego, las ecuaciones para el movimiento lineal y rotacional son expresadas por la suma de las fuerzas y momentos ejercidos por las partículas vecinas en contacto, respectivamente. El modelo PFC (DEM) proporciona una forma de simular material granular mediante el modelado de cada mineral o roca excavada como una partícula individual, y puede

proporcionar una gran cantidad de información sobre el comportamiento fundamental inalcanzable por otros modelos o métodos (W. Hancock, 2013) [66]. Además, el método DEM se basa en la suposición de que las perturbaciones no se propagan a partículas que no están en contacto directo durante un solo paso de tiempo. Luego, en lugar de resolver el mismo número de ecuaciones simultáneas que el de los puntos de contacto, la ecuación de movimiento para cada partícula se resuelve de forma independiente en cada paso de tiempo (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022) [45].

Las aplicaciones populares del modelado DEM y PFC incluyen geofísica, mecánica de rocas, estabilidad de taludes, optimización de procesos de manejo y almacenamiento de partículas. Se ha desarrollado una gran cantidad de modelos DEM sobre el flujo gravitatorio de roca fragmentada, pero pocos de ellos tienen en cuenta la forma de la roca y la fragmentación secundaria (H. Sun, 2019) [29]. Palma et al. (2019) [63] también afirman que el DEM es muy útil para simular de manera realista la interacción entre las rocas y el aire comprimido dentro de una mina.

2.8.1 EDEM™

El software EDEM™ de Altair® destaca por su alto rendimiento en la simulación de sólidos industriales y granulados. Impulsado por el modelado de elementos discretos (DEM), EDEM™ simula y analiza con rapidez y precisión el comportamiento de minerales extraídos, fibras, granos, comprimidos, polvos del carbón y tierra, entre otros (Altair EDEM™, 2023) [6]. Las simulaciones generadas en este software permiten entender como interactuarán dichos materiales con sus equipos en diversas condiciones de proceso y funcionamiento. Este software puede remediar algunas de las deficiencias que poseen las pruebas físicas, como los altos tiempos de experimentación o la dificultad de replicar condiciones entre diferentes tests.

EDEM™ destaca sobre otros softwares como ROCKY y YADE-DEM, ya que este es utilizado ampliamente en industrias como la minería, el procesamiento de minerales, donde es importante comprender el comportamiento de las partículas y su interacción con equipos y procesos.

Las herramientas DEM discretizan el conjunto de partículas para evaluarlas por unidad. Se comienza tomando un instante de tiempo t_i , se evalúa una partícula P_i , se verifican sus contactos y se realiza un cálculo de fuerzas. Todo esto en función de la segunda ley de Newton y de la ley de la conservación de la masa. Luego, se continúa con la siguiente partícula ($P_i + 1$) y se repite el proceso de cálculo, hasta el momento que las fuerzas resultantes sean la sumatoria de todas las fuerzas asociadas al conjunto completo de partículas. Finalmente, se toma el instante de tiempo siguiente y se repite todo el proceso nuevamente.

3. METODOLOGÍA

3.1 Geometría de las simulaciones

Las simulaciones por realizar constan de geometrías que representan estructuras de una operación de extracción minera subterránea mediante el método de hundimiento Block Caving. Se configura un modelo cuasi 2D a una escala de centímetros, ya que simular las mismas dimensiones de una mina de extracción subterránea sería imposible o muy costoso en cuanto a la carga y gasto computacional que conllevaría considerar una escala real.

Con eso en mente, mediante el software AutoCAD® se construye una geometría que representa al contenedor donde reposa el material fracturado para su posterior extracción, y otra geometría por debajo de esta anterior, la cual representa a las bateas y puntos de extracción por donde fluye el material granular tanto de forma continua como discreta, según sea el caso. Por último, se crea una última geometría rectangular, la cual representa un receptáculo para el material que cae por los puntos de extracción en cada simulación. Cabe destacar que para efectos de este estudio se extraerá únicamente por un único punto de extracción central.

Finalmente, dichas geometrías se exportan al software Altair® EDEM™ para configurarlas dentro de este.

3.2 Extracción discreta

Actualmente, la extracción discreta es la que se utiliza comúnmente en el método Block Caving, dejando tiempos de reposo con el objetivo de que el material se acondicione en el nivel de producción para una próxima extracción. Por ello, es importante el estudio de este tipo de extracción en esta memoria. Para las simulaciones a realizar en el caso discreto, se considera extraer mineral por un único punto de extracción central mediante intervalos variables, considerando tiempos de extracción y tiempos de reposo. A continuación, se presenta una tabla con los tiempos utilizados. Cabe destacar que el total de simulaciones para este caso es 100.

Tabla 3-1: Tiempos de extracción y reposo considerados para las simulaciones discretas.

Tiempo de extracción (s)	Tiempo de reposo (s)
0.5	0.5
1.0	1.0
1.5	1.5
2.0	2.0
2.5	2.5
3.0	3.0
3.5	3.5
4.0	4.0

4.5	4.5
5.0	5.0

3.3 Extracción continua

La minería continua es una tecnología de extracción y transporte de mineral que tiene por objetivo aumentar la tasa de velocidad de extracción de mineral en explotaciones mineras subterráneas esperando lograr tasas de extracción del orden de $1.5 \text{ (ton / (m}^2 \text{ día))}$ en promedio. Para las simulaciones a realizar en el caso continuo, se considera extraer mineral por un único punto de extracción central, fluidamente sin interrupción en la totalidad del tiempo de simulación. Cabe destacar que el total de simulaciones para este caso es 110 entre los dos casos a estudiar.

3.4 Coeficiente de fricción estático

El coeficiente de fricción corresponde a la relación entre la fuerza de deslizamiento y la fuerza de retención ejercida por dos superficies en contacto. Dicho coeficiente es de hecho una evaluación de la dificultad con la que la superficie de un material se deslizará sobre otro material. El coeficiente de fricción estático (μ_s) está relacionado con la fuerza necesaria para iniciar el movimiento de deslizamiento, o sea, cuando ambas superficies están en reposo. Cuanto mayor sea el coeficiente de fricción, significa que mayor será la fuerza de fricción (f_f). Por ende, para que se produzca el movimiento, se debe superar este coeficiente de fricción estático. Por último, la unidad de este coeficiente es adimensional.

3.5 Energía superficial

La energía superficial (γ) es el grado de atracción que existe entre las moléculas de un mismo material y entre las de distintos materiales. La energía superficial (γ) permite determinar la facilidad con la que se puede adherir una superficie. Más bien, es la energía que se necesita para romper enlaces intermoleculares en una superficie. Por eso, esta propiedad del material granular permite obtener un acercamiento o similitud al contenido de agua o porcentaje de humedad existente en el material granular.

En los líquidos, la densidad de energía y la tensión superficial (fuerza por unidad de longitud) son idénticos. La tensión superficial de un líquido es la fuerza que actúa tangencialmente por unidad de longitud en el borde de una superficie libre en equilibrio, la cual se tiende a contraer en dicha superficie. La tensión superficial usualmente se representa con la letra griega gamma (γ) y las unidades de tensión o energía superficial en el sistema internacional son (J/m^2) y (N/m). Por otra parte, las fuerzas cohesivas entre moléculas de un líquido son las responsables del fenómeno conocido como tensión superficial (Departamento de Química Física, 2020) [17].

Ahora bien, la tensión superficial puede ser afectada por la intensidad de las fuerzas intermoleculares, de modo que a medida que haya un mayor valor de γ significa una mayor fuerza

de atracción intermolecular a vencer para lograr aumentar su superficie en una unidad (C. Orellana, 2021) [11].

3.6 Modelo de contacto

Los modelos de contacto de partícula a partícula a utilizar constan de un modelo base denominado Hertz-Mindlin con JKR, y otro modelo denominado fricción de rodadura estándar.

La cohesión o adhesión se pueden modelar introduciendo un componente de fuerza de atracción en el modelo de contacto partícula a partícula. Los términos cohesión y adhesión generalmente se definen para atraer fuerzas entre cuerpos similares y diferentes, respectivamente.

El modelo de contacto de Johnson-Kendall-Roberts (JKR) es una extensión del conocido modelo de contacto de Hertz-Mindlin propuesto por Johnson-Kendall-Roberts (K. Johnson et al, 1971) [42]. El modelo tiene en cuenta las fuerzas de atracción debidas a los efectos de Van der Waals. Johnson, Kendall y Roberts (1971) [42] se basan en el concepto de minimizar las energías que están presentes en la zona de deformación. Esto quiere decir que la energía de adhesión se equilibra, lo que favorece el contacto frente a la energía elástica, la cual se opone a la deformación.

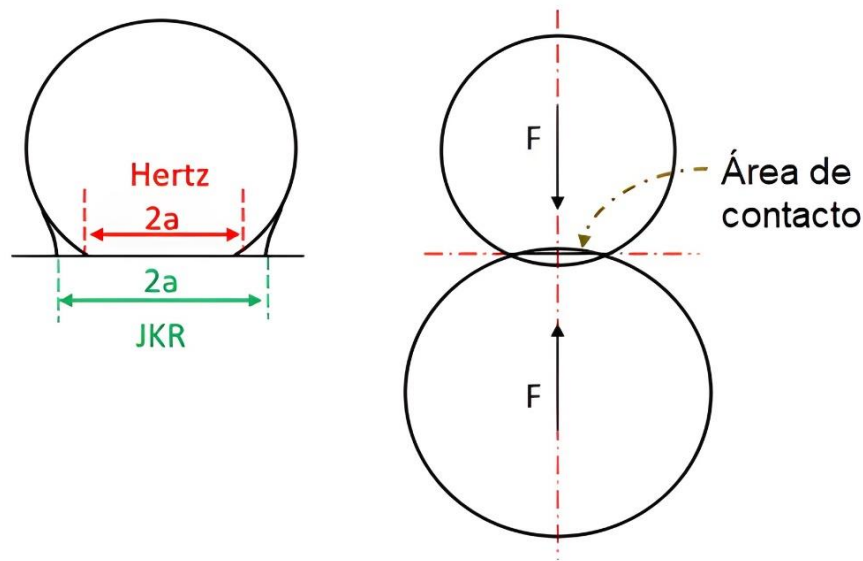


Figura 3.1: Esquema del área de contacto (JKR) (K. Johnson et al, 1971).

Sin embargo, el modelo también se usa para modelar material donde la adhesión es causada por fuerzas capilares o de puente líquido ((J. Hærvig et al, 2017) [38]; (J. Morrissey, 2013) [39]; (M. Carr et al, 2016) [43]; (R. Xia et al, 2019) [61]). Entonces, basta con bajos niveles de energía superficial o cohesión para que se adhieran con gran fuerza. Este modelo también incorpora amortiguación viscosa y mecanismos de resistencia a la rodadura similares a los del modelo lineal de resistencia a la rodadura.

Ahora bien, en EDEM™ el modelo Hertz-Mindlin con JKR permite modelar sistemas fuertemente adhesivos, como materiales secos o húmedos. La función Hertz-Mindlin con JKR utiliza los mismos cálculos que el modelo de contacto de “Hertz-Mindlin (sin deslizamiento)” de EDEM™, para los siguientes tipos de fuerza (C. Orellana, 2021) [11]:

- Fuerza elástica tangencial.
- Fuerza de disipación normal.
- Fuerza de disipación tangencial.

Por otro lado, se trabaja también con el modelo de fricción de rodadura estándar. Específicamente, corresponde a la fuerza que resiste el movimiento de un cuerpo rodante sobre una superficie.

Para las simulaciones en EDEM™ donde la fricción de rodadura es importante, se tiene en cuenta un par de torsión a las superficies de contacto (Altair EDEM™, 2023) [6]. A continuación, se presenta la ecuación donde se plasma lo anterior.

$$\tau_i = -\mu_r F_n R_i \omega_i \quad (3.1)$$

donde μ_r es el coeficiente de fricción de rodadura, R_i la distancia del punto de contacto desde el centro de masa y ω_i el vector de velocidad angular unitaria del objeto en el punto de contacto.

3.7 Medioambiente

El medioambiente corresponde a la gravedad, la cual se considera con un valor de $-9.81 \text{ (m/s}^2\text{)}$.

3.8 Contenedor

La geometría del modelo 2D, representado en la **figura 3.2**, cuenta con un contenedor con forma de paralelepípedo hueco con una altura (H_M) igual a 110 (cm) y una profundidad (D_M) de 3 (cm). Esta configuración es la utilizada por Sturla, Vivanco y Palma (2022) [45]. Por otra parte, el ancho (W_M) es de 76 (cm). Finalmente, el número de partículas alcanzado para esta completa configuración es de aproximadamente 600.000 partículas.

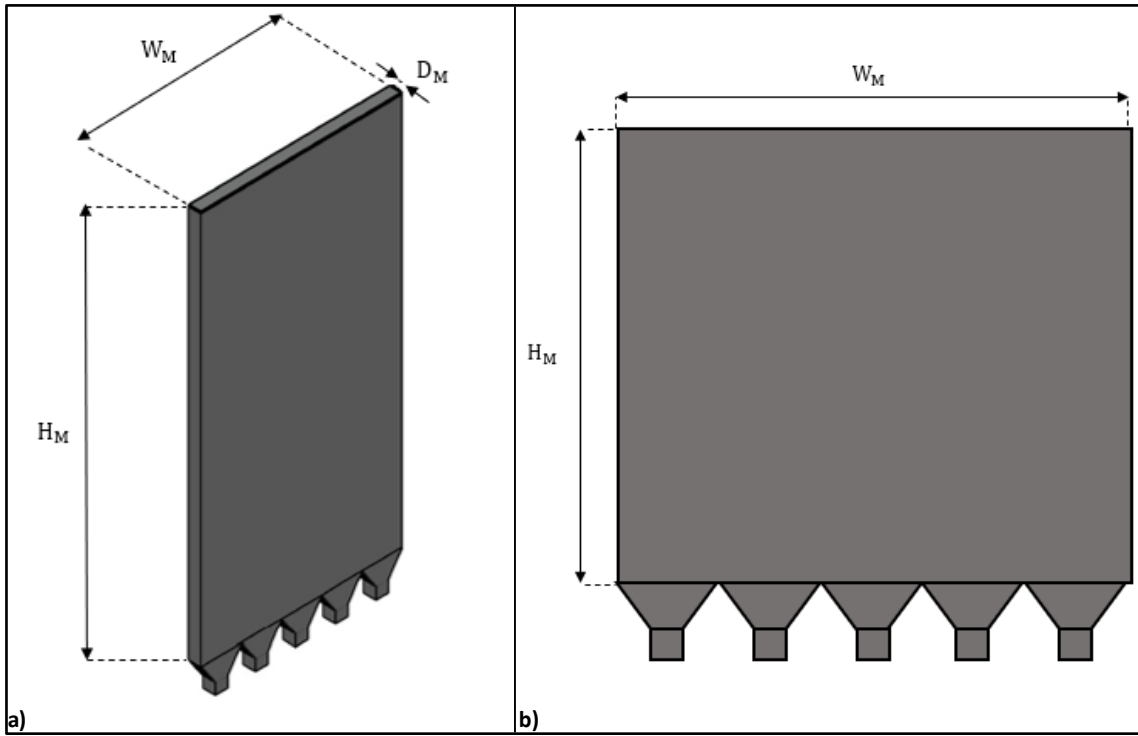


Figura 3.2: Dimensiones del contenedor del modelo CAD. a) Vista 3D, b) Vista frontal.

3.9 Bateas de Extracción

En el diseño de las bateas de extracción se utiliza la parametrización de López (2016) [62], donde se parte como base del diseño de bateas de extracción utilizadas en divisiones de Codelco (**figura 3.3**). Ahora bien, en este estudio el diseño de bateas se modifica de modo de permitir la extracción continua y discreta del material granular por la sección inferior de la batea (no por los costados). Por último, se considera un valor constante del ángulo β igual a 90° para todos los diseños de bateas de extracción (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022) [45].

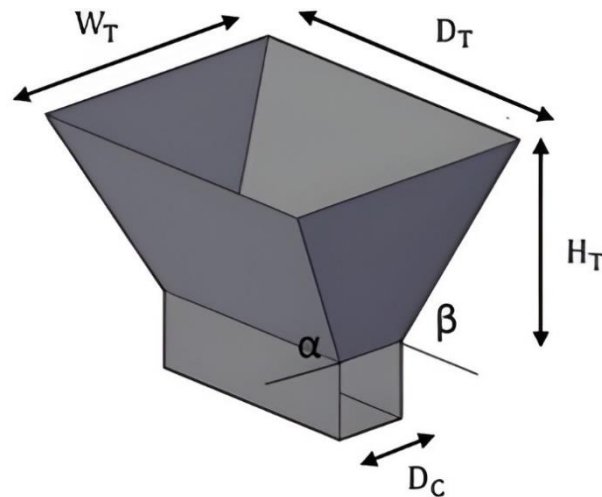


Figura 3.3: Diseño de bateas de extracción divisiones Codelco (S. López, 2016).

En la **figura 3.4** se observa la sección inferior de la batea de extracción que corresponde a un cubo con un interior cilíndrico hueco de 3 (cm) de alto (H_C) y 3 (cm) de diámetro (D_C), por donde fluye el material granular. La sección superior, con forma de prisma trapezoidal hueco, posee una profundidad (D_T) de 3 (cm) y 6 (cm) de alto (H_T) que conecta con la parte superior de la sección inferior, conduciendo el material hacia el punto de extracción abandonando la batea y el contenedor. El ancho inferior coincide con el diámetro de la sección cilíndrica (D_C) de 3 (cm), mientras que el ancho superior (W_T) consta de 15.2 (cm). El ángulo de zanja (α) que se forma entre la batea y el pilar que se ubica entre dos bateas es de 45° . El número de bateas de extracción será el mínimo impar que cumpla con un ancho total igual o superior a 60 (cm), cantidad que determina el ancho del contenedor (W_M). Por otro lado, el alto (H_T) de las bateas de extracción es seleccionado para evitar la formación de pilares de menor ancho que la abertura (D_C) en el punto de extracción. Este modelo es el utilizado por Sturla, Vivanco y Palma (2022) [45], el cual se utiliza nuevamente en este estudio modificando el ancho total (W_M).

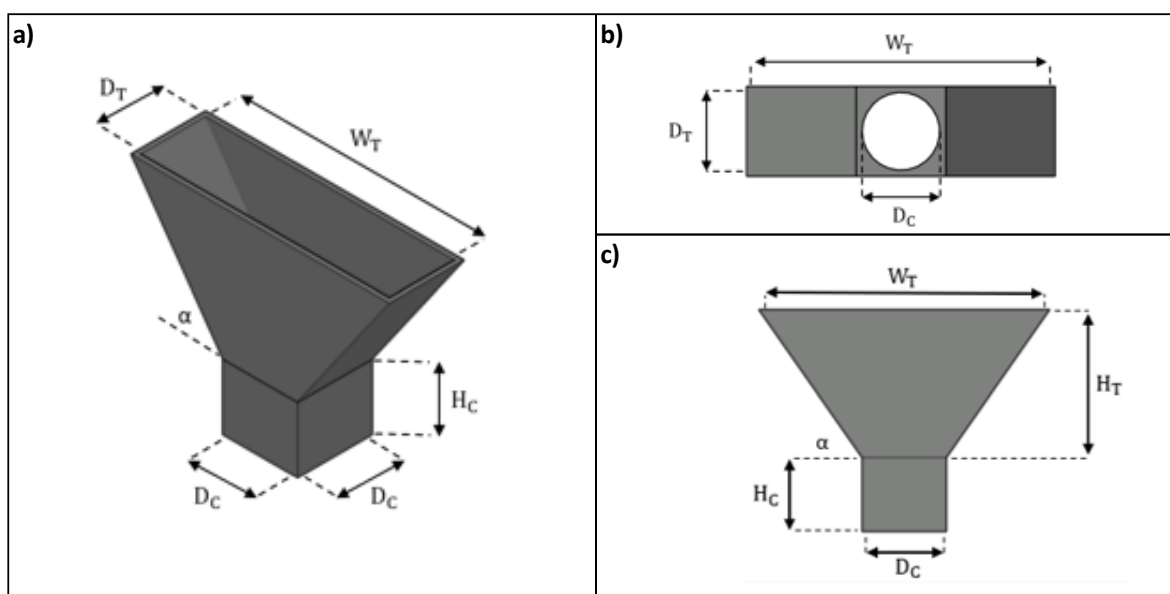


Figura 3.4: Dimensiones de las bateas de extracción del modelo CAD. Vista; a) 3D, b) inferior y c) frontal.

3.9.1 Presencia de colgaduras

Por otro lado, para las bateas de extracción se utiliza un diseño de batea del tipo circular (C). Este se puede observar en la **figura 3.5**. Dicho diseño permite menos eventos de colgaduras (R. Castro et al, 2023) [53]. Finalmente, se debe considerar que los factores influyentes en la formación de colgaduras son la fragmentación de la roca, humedad, carga vertical, fricción, relación entre las rocas y la abertura ((A. Sato & H. Tang, 2020) [5]; (R. Castro et al, 2016) [52]; (R. Kvapil, 1965) [57]; (V. Sánchez, R. Castro & S. Palma, 2019) [65]). A continuación, se presentan las geometrías utilizadas en el estudio realizado por Castro et al. (2023) [53].

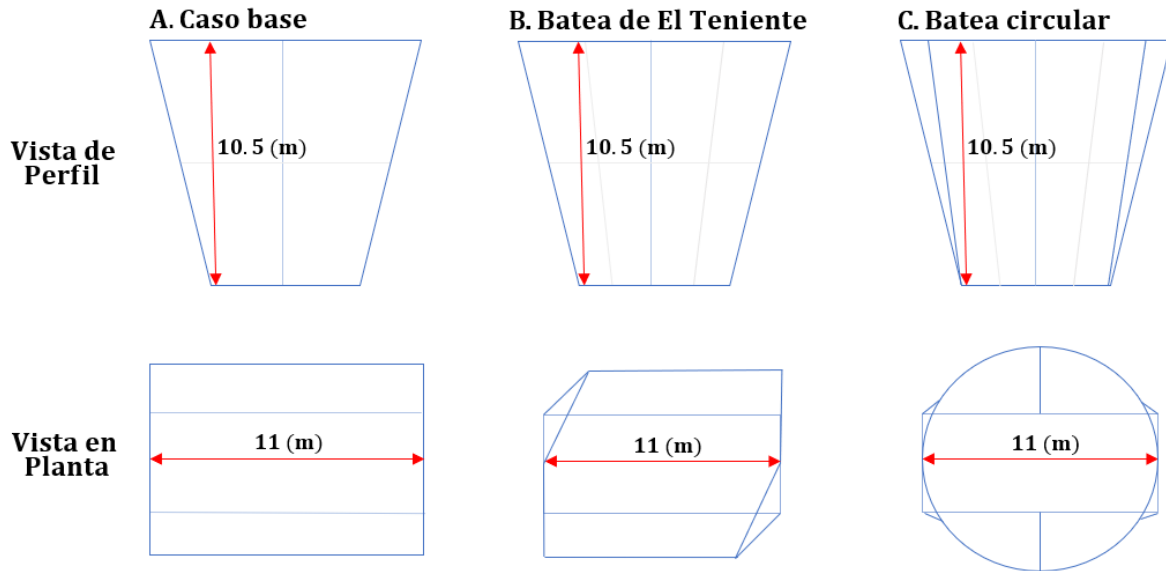


Figura 3.5: Geometrías de bateas de extracción utilizadas en simulaciones de flujo por gravedad.

Cabe destacar que para energías superficiales mayores a $0.6 \text{ (J/m}^2\text{)}$ existe la presencia de colgaduras en las simulaciones piloto o de prueba. Ahora bien, un mayor contenido de agua implica una mayor energía superficial y, por ende, un flujo con menor movilidad. Esto considerando los alcances de este estudio. El objetivo de estas pruebas es acotar el rango de este parámetro de material granular. Finalmente, el rango a estudiar de este parámetro físico es de 0 a $0.6 \text{ (J/m}^2\text{)}$.

3.10 Distribución granulométrica del material

Se realiza un ajuste Gates-Gaudin-Schuhmann (GGS) a mallas Teniente realizado por Basaure (2014) [41], donde lleva a cabo una escala a nivel laboratorio. Por otra parte, Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45] ejecutaron otra escala a nivel laboratorio de dicha granulometría, donde las partículas de radio 0.90, 1.65, 2.40 (mm) corresponden al pasante acumulado del 20%, 50% y 80%, P20, P50 y P80, respectivamente. Ahora bien, las partículas con radios por sobre el P80 e inferiores al P20 no se consideran para evitar problemas asociados al rendimiento computacional. Esta granulometría puede observarse en la **tabla 7-1** de la sección anexos.

Por otro lado, para el estudio de la distribución granulométrica del material se cuenta con tres distribuciones distintas. Nuevamente dicha información se puede observar en la **tabla 7-2** de la sección anexos.

3.11 Virtuales

Los diseños CAD creados son exportados al software Altair® EDEM™. Luego, se crea una geometría virtual, la cual se ajusta a la geometría del contenedor donde reposa el material granular. Ahora bien, a la geometría anterior se le incorpora una función con el objetivo de generar un volumen de partículas en el inicio de la simulación (segundo 0). Por otra parte, se

añade otra geometría ubicada bajo el punto de extracción por donde el material fluirá, esta especie de caja tendrá la cara superior libre para que el material granular repose en ella luego de ser extraído. Las dimensiones correspondientes de dicha caja son 40 (cm) de ancho, 20 (cm) de profundidad y 20 (cm) de altura. Además, se generan 5 polígonos que trabajaran como “tapas” en cada punto de extracción, evitando que el mineral fluya. Ahora bien, a la tapa que se encuentra en el punto de extracción central se le agregan movimientos de traslación variable después del segundo 0.5 para las simulaciones discretas. Por otro lado, nuevamente la tapa ubicada en el punto de extracción central se moverá al segundo 0.5 para permitir el libre flujo del material granular para la extracción continua.

La liberación del material granular después del segundo 0.5 tiene por objetivo lograr que dicho material alcance un estado de reposo durante esos segundos previos al inicio de la extracción.

3.12 Propiedades del Material Granular

Las simulaciones cuentan con una vasta cantidad de propiedades del material granular, donde se busca saber si existe influencia en algunas de dichas propiedades en cuanto al comportamiento del flujo gravitacional. Ahora bien, tanto las propiedades del material granular como las de las geometrías físicas, no así las virtuales que no interactúan con el material, poseen las mismas propiedades en todas las simulaciones. Por tanto, una variación en las propiedades del material también afectará las propiedades del material del contenedor y de las bateas de extracción (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022) [45].

Las propiedades del material para las simulaciones discretas se encuentran en la **tabla 3-2**. Los valores de módulo de Young (E) y coeficiente de Poisson (ν) corresponden al valor medio del rango definido por Riveros (2018) [21] para la roca ígnea característica de la Cordillera de Los Andes, Andesita. Del mismo modo, son los mismos valores utilizados por Sturla, Vivanco y Palma (2022) [45], donde luego de evaluar la influencia del módulo de Young para el caso real de la Andesita y el caso mínimo, se llega a la conclusión de que utilizar el valor real y máximo tarda 46 veces más tiempo de lo que toma el caso mínimo. Así mismo, las dimensiones de la IEZ no sufren cambios considerables a medida que el material granular es extraído, teniendo en cuenta estos dos casos estudiados. Por ello, para este trabajo se utiliza un módulo de Young de $3.00 \cdot 10^6$ (Pa), el cual permite reducir el tiempo de simulación y la carga computacional sin afectar el comportamiento del material granular. Por otra parte, el coeficiente de Poisson (ν) utilizado es 0.46.

Ahora bien, el módulo de corte (G) viene dado por la siguiente ecuación, donde es considerado el valor mínimo de E para la Andesita.

$$G = \frac{E}{2(1 + \nu)} \quad (3.2)$$

Utilizando la ecuación (3.2), el módulo de corte a utilizar en las simulaciones es $1.02 \cdot 10^6$ (Pa).

La densidad de sólidos (ρ_p) utilizada tiene un valor dentro del rango de la roca Andesita. Así mismo, en el caso de las propiedades de interacción del material C_r , μ_s y μ_r se escogen los mismos valores utilizados por Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45] dentro del rango indicado por Altair® EDEM™. Las variaciones de los valores para estas cuatro propiedades del material granular no tienen un impacto significativo en las dimensiones de la IEZ. Entonces, los valores escogidos por Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45] se presentan en la siguiente tabla, los cuales se replican para el estudio de las dimensiones de la IEZ considerando una extracción discreta. Cabe mencionar que la energía superficial considerada para este caso es 0.

Tabla 3-2: Magnitud de las propiedades del material granular para la extracción discreta.

Propiedad	Magnitud
Módulo de corte (G) (Pa)	$1.02 \cdot 10^6$
Coefficiente de Poisson (ν)	0.46
Módulo de Young (E) (Pa)	$3.00 \cdot 10^6$
Densidad de sólidos (ρ_p) (kg/m^3)	2700
Coefficiente de restitución (C_r)	0.3
Coefficiente de fricción estático (μ_s)	0.3
Resistencia a la rodadura (μ_r)	0.1
Energía superficial (γ) (J/m^2)	0.0

Ahora bien, para el caso de las simulaciones de extracción continua se toma otra serie de valores para algunas de las propiedades del material granular. Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45] estudia la gama completa del μ_s (entre 0.001 y 0.950), parámetro que tiene una gran influencia en las dimensiones de la IEZ. Ahora bien, el μ_s se acota entre 0.25 y 0.35 para tener un estudio más detallado de este rango de μ_s . Por otro lado, la energía superficial (γ) varía entre 0 y 0.6 (J/m^2). También se consideran las tres distribuciones granulométricas observadas en la **tabla 7-2** ubicada en anexos. A continuación, presentamos la magnitud de las propiedades del material granular para las extracciones continuas.

Tabla 3-3: Magnitud de las propiedades del material granular para la extracción continua.

Propiedad	Magnitud
Módulo de corte (G) (Pa)	$1.02 \cdot 10^6$
Coefficiente de Poisson (ν)	0.46
Módulo de Young (E) (Pa)	$3.00 \cdot 10^6$
Densidad de sólidos (ρ_p) (kg/m^3)	2700
Coefficiente de restitución (C_r)	0.3
Coefficiente de fricción estático (μ_s)	0.25 - 0.35
Resistencia a la rodadura (μ_r)	0.1
Energía superficial (γ) (J/m^2)	0.0 - 0.6

Entonces, las propiedades del material no significativas para este trabajo según la lectura de artículos asociados a este tema son los siguientes:

- Módulo de Young (E) (Pa).
- Módulo de corte (G) (Pa).
- Radio de Poisson (ν) – Andesita.
- Densidad de sólidos (ρ) (kg/m^3)
- Coeficiente de restitución (C_r).
- Coeficiente de rodadura (μ_r).

Por lo tanto, las propiedades del material que se considerarán para conocer su influencia en el material granular y en el comportamiento del flujo gravitacional son las siguientes:

- Coeficiente de fricción estático (μ_s)
- Energía superficial (γ) (J/m^2)
- Granulometría.

3.13 Análisis de datos

3.13.1 Recopilación de datos

Cada extracción es considerada hasta los 18.5 segundos de simulación, tanto para la extracción discreta como continua. Esto se traduce en aproximadamente 4.71 (kg) de masa extraída o bien, en 1746 (cm^3) de volumen extraído. Lo anterior aplica a la máxima cantidad de masa extraída en una de todas de las simulaciones realizadas. Cabe destacar que para realizar una simulación de 18.5 segundos bastaba de al menos 12 horas reales aproximadamente. La recopilación de estos datos se logra al agregar un sensor de masa al contenedor y a la caja ubicada bajo el contenedor. Este sensor permite conocer la masa no extraída y extraída respectivamente. Entonces, mediante dicha herramienta, la regla 3D Viewer de Altair® EDEM™ y la interfaz de Altair® EDEM™ se pueden obtener los siguientes parámetros:

- Masa no extraída (kg)
- Volumen no extraído (cm^3).
- Masa extraída (kg).
- Volumen extraído (cm^3).
- Masa total (kg).
- Volumen total (cm^3).
- $H_{m\acute{a}x}$ IEZ (cm).
- $W_{m\acute{a}x}$ IEZ (cm).

3.13.2 Dimensiones de la IEZ

Por otra parte, para conocer la posición de las partículas que conforman la IEZ se utiliza la herramienta anterior. Se seleccionan las partículas que han salido por el punto de extracción central, o sea, las que se encuentran en la caja con el sensor de masa. Entonces, terminada la simulación se debe ubicarse en el tiempo correspondiente a 18.5 segundos. En ese instante, es posible conocer la masa extraída y no extraída de cada simulación. Por último, para conformar la figura de la IEZ correspondiente se debe volver al tiempo donde comienza la extracción, los 0.5 segundos. Lo comentado anteriormente se presenta en la siguiente figura.

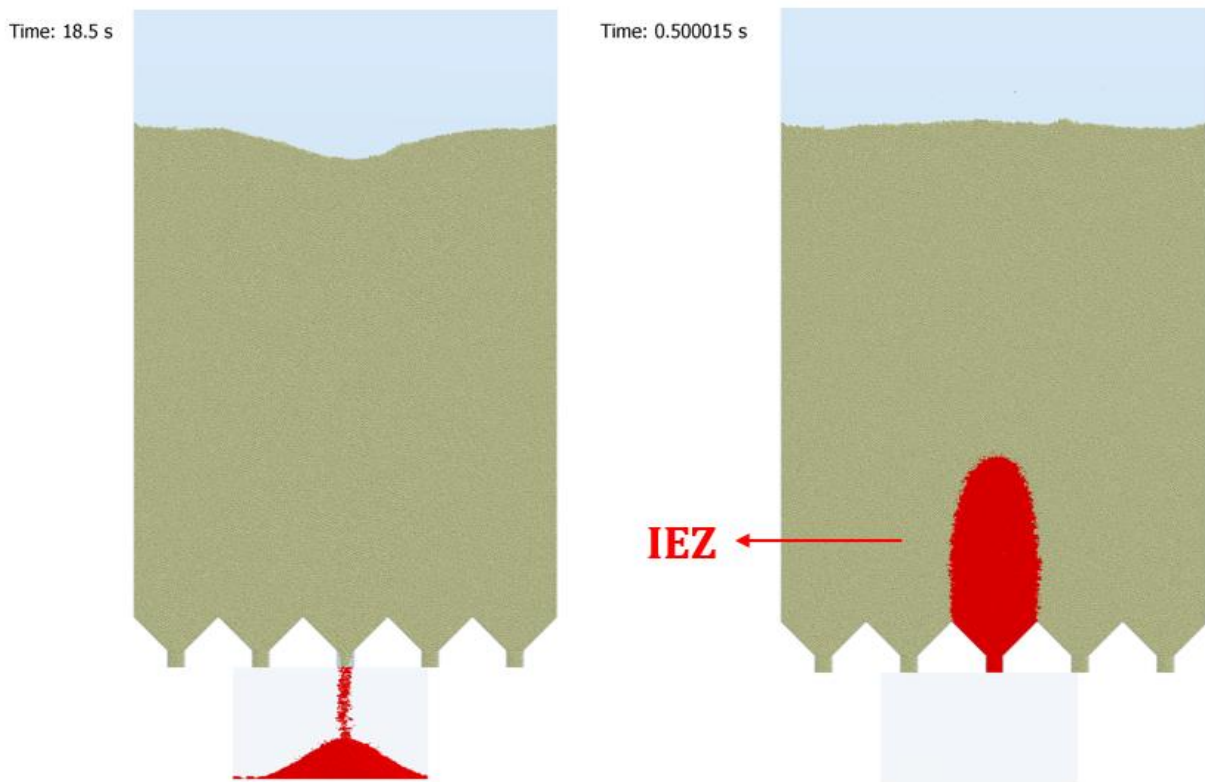


Figura 3.6: Procedimiento de selección de partículas que conforman la IEZ para un determinado tiempo de extracción.

Luego, estos datos son exportados en formato CSV con el fin de conocer la ubicación individual de cada una de estas partículas en los ejes x y z para las partículas seleccionadas que conforman la IEZ, sin considerar la posición en el eje y de estas. A continuación, se presenta un esquema de lo mencionado.

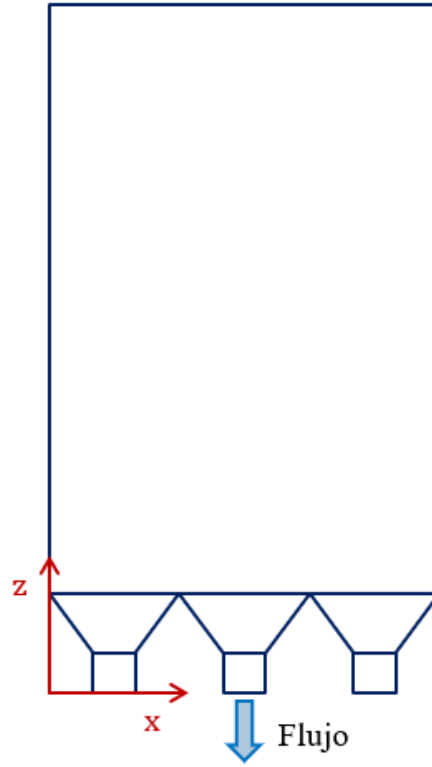


Figura 3.7: Eje de coordenadas utilizado para determinar la posición de las partículas. (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022).

Ahora bien, se obtiene la posición de cada partícula en el espacio simulado en función de la masa extraída. Se utiliza el código creado por Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45] en MATLABTM de MathWorks[®]. Este lee archivos CSV convertidos a XLSX que contienen las coordenadas en los ejes x y z de las partículas que conforman la IEZ a una masa extraída determinada. Dicho código compara las coordenadas de cada partícula para determinar la ubicación de aquella que se encuentra a una mayor altura h en el eje z . Además, compara las coordenadas en x de las partículas para determinar aquellas ubicadas en el menor y mayor valor en el eje x , x_1 y x_2 , respectivamente. El valor de h corresponde directamente al alto de la IEZ, H_{IEZ} , tomando como z igual 0 el punto inferior de la batea en el punto de extracción. En cambio, la resta entre x_2 menos x_1 corresponde al ancho de la IEZ, W_{IEZ} . Se asume que estas dos partículas se encuentran a un mismo nivel de altura en el eje z y, además, se desprecia una posible diferencia producto de sus probables distintas ubicaciones en el eje y [45]. Entonces, H_{IEZ} y W_{IEZ} representan las dimensiones del elipsoide de la IEZ que se obtienen a partir de la posición de las partículas en h , x_1 y x_2 , representadas en la **figura 3.8**.

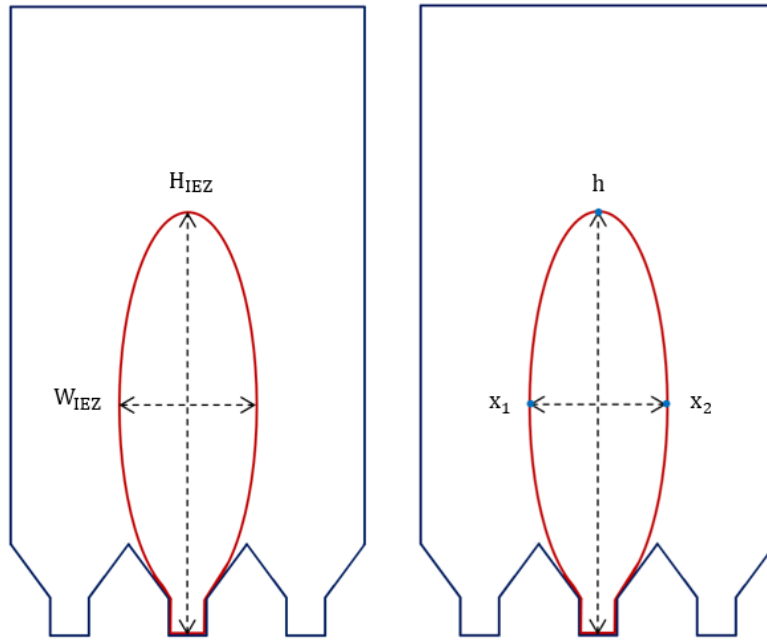


Figura 3.8: Representación gráfica de las dimensiones de la IEZ y las partículas (puntos en azul) que corresponden a los límites de estas para su cálculo (M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma, 2022).

Así mismo, mediante el uso de la herramienta del sensor de masa y la regla 3D Viewer de Altair® EDEM™ se obtiene otra medición de la máxima altura y ancho para la IEZ, con el fin de comprobar lo obtenido mediante el código de MATLAB™.

4. RESULTADOS Y ANÁLISIS

4.1 Modelos de H_{IEZ} y W_{IEZ}

Mediante la revisión bibliográfica realizada a lo largo estudio se confecciona un par gráficos comparativos para las dimensiones de la IEZ con los más modelos conocidos a la fecha. Estos son presentados en la **figura 4.1** y **4.2**. Los modelos realizados corresponden a los propuestos por:

- Castro, Trueman & Halim (2007) [54]
- Melo, Vivanco & Fuentes (2009) [23]
- Jin et al, (2017) [2]

Cabe mencionar que las ecuaciones por las cuales se rigen estos modelos mencionados se encuentran en la **tabla 7-6** y **7-7** ubicada en anexos.

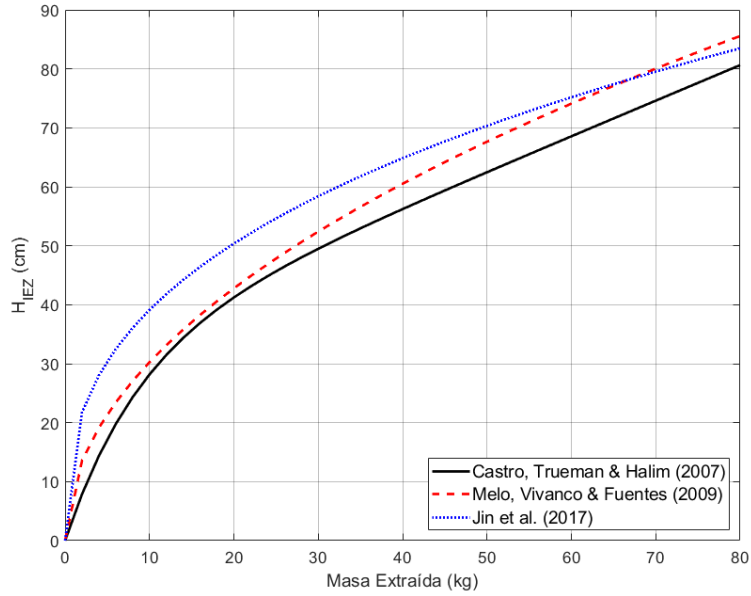


Figura 4.1: Comparación de modelos de distintos autores para la altura de la IEZ.

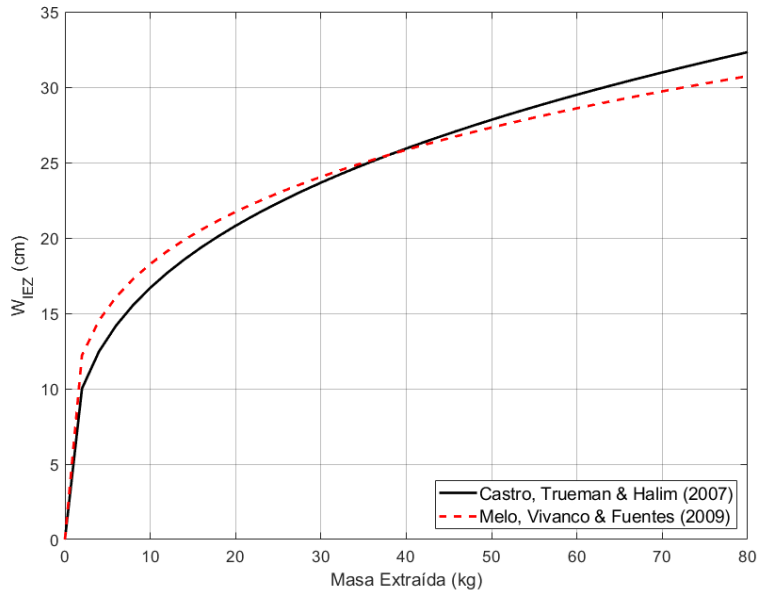


Figura 4.2: Comparación de modelos de distintos autores para el ancho de la IEZ.

La comparativa realizada consta de una masa extraída de hasta 80 kilogramos. Más adelante se agregarán los últimos modelos generados, además de un set de datos obtenido a lo largo de este estudio.

4.2 IEZ en extracción discreta

Los resultados de las simulaciones para las extracciones discretas se presentan a continuación. Estas simulaciones presentan una distribución granulométrica polidispersa de 7 tamaños. Se graficó la altura y ancho máximo de la IEZ en función del volumen extraído para las 100

simulaciones contempladas. Es posible observar lo encontrado por autores como Castro (2006) [50], Castro, Trueman & Halim (2007) [54], Melo, Vivanco & Fuentes (2009) [23], Jin et al. (2016) [1], Jin et al. (2017) [2] y Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45]. El alto y ancho máximo de la IEZ aumentan continuamente con la masa o volumen extraído. Por ello, solo se trabajará en base a la altura y ancho máximo de la IEZ, con el fin de ahorrar gasto computacional y clarificar los resultados obtenidos graficando 100 puntos y no 100 curvas, por ejemplo.

Es importante destacar que lo encontrado en las simulaciones discretas es un importante indicio, ya que debe comprobarse si los segundos de reposo de cada simulación son necesarios para que el sistema completo de partículas se encuentre detenido. Mediante herramientas de EDEM™ se puede confirmar lo anterior, realizando un histograma de velocidad vertical al momento de extraer material luego de un reposo en las extracciones discretas.

Los datos recopilados de estas simulaciones se presentan en un extracto de tabla, ubicada en la sección de anexos, donde se identifica como la **tabla 7-3**. Por otro lado, se presentan también algunas de las diferentes IEZ de las simulaciones de extracción discreta. En esta oportunidad se muestran cuatro ilustraciones para 0.5 segundos de extracción y distintos tiempos de reposo. Cabe destacar que las simulaciones tienen un tiempo efectivo considerado de 18 segundos. Debido a lo anterior, se observa como la **figura 4.3a** es la que presenta una mayor altura y ancho para la IEZ.

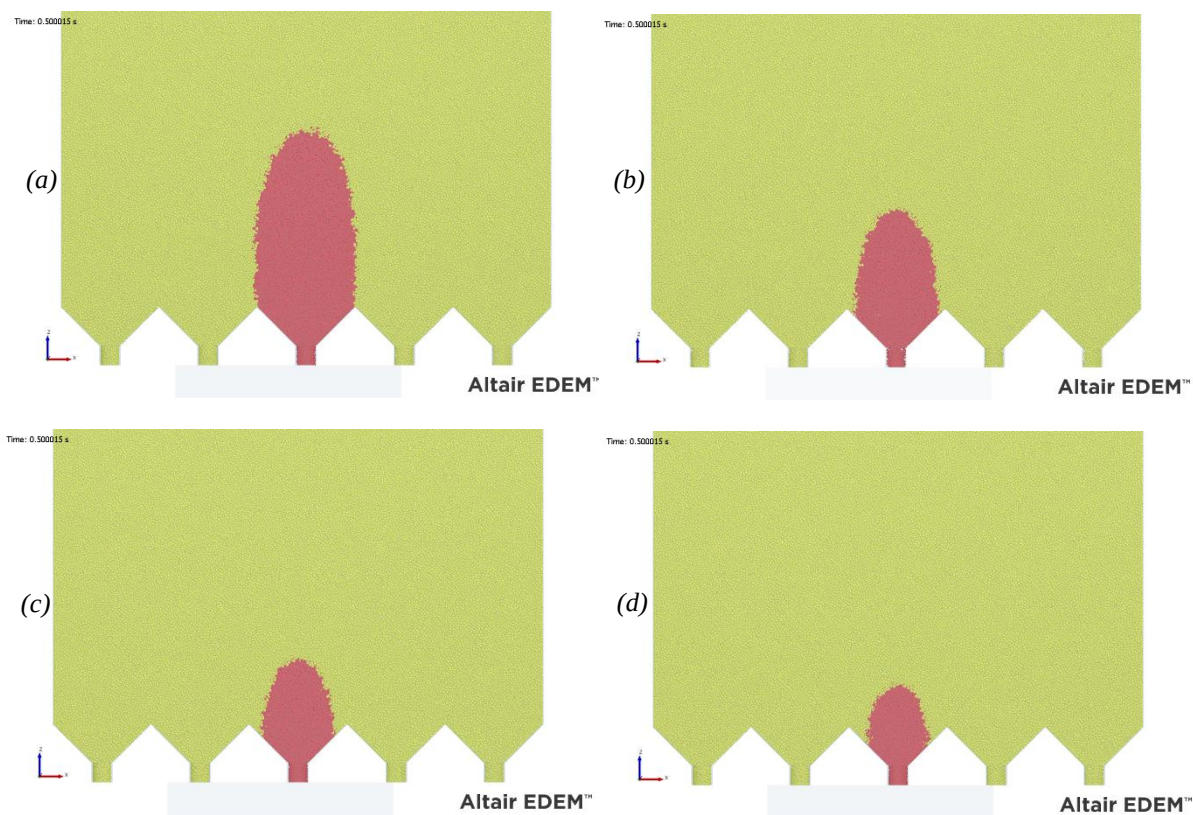


Figura 4.3: IEZ para 0.5 segundos de extracción y distintos tiempos de reposo. (a) 0.5 segundos de reposo. (b) 1.5 segundos de reposo. (c) 3.0 segundos de reposo. (d) 5.0 segundos de reposo.

Ahora bien, se presenta la altura y ancho máximo de la IEZ teniendo en cuenta el tiempo de extracción (t_{ext}). Los tiempos utilizados en las simulaciones de extracción discreta se encuentran en la **tabla 3-1**. Por ello, se ve por ejemplo como el color celeste representa una altura y ancho máximo para el menor tiempo de extracción del caso discreto. Se puede observar claramente que este color tiene las menores alturas y anchos máximos dentro de la **figura 4.4** y **4.5**.

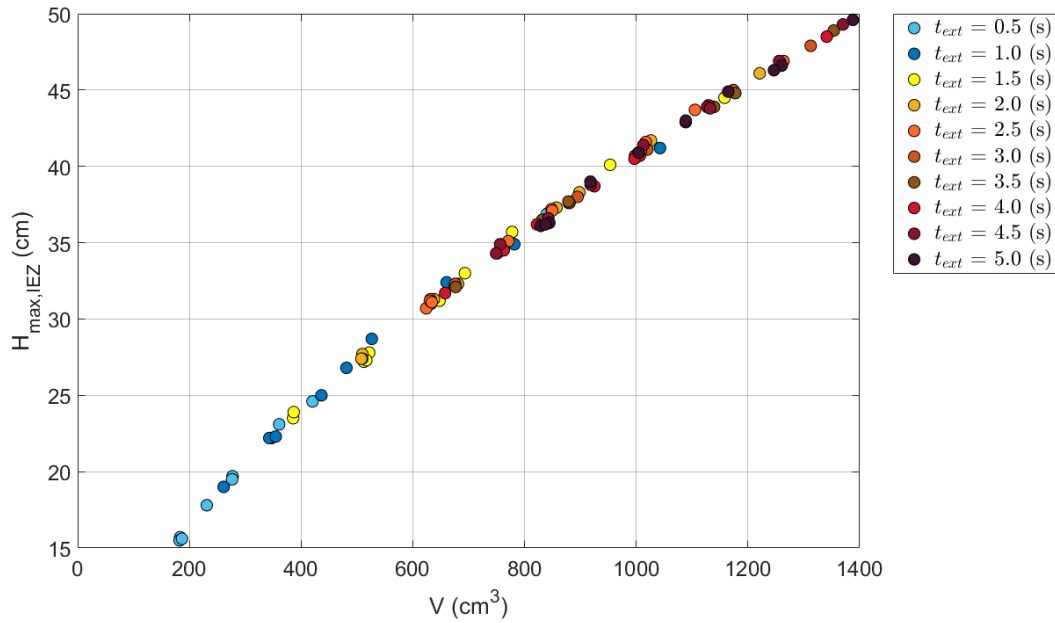


Figura 4.4: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de extracción.

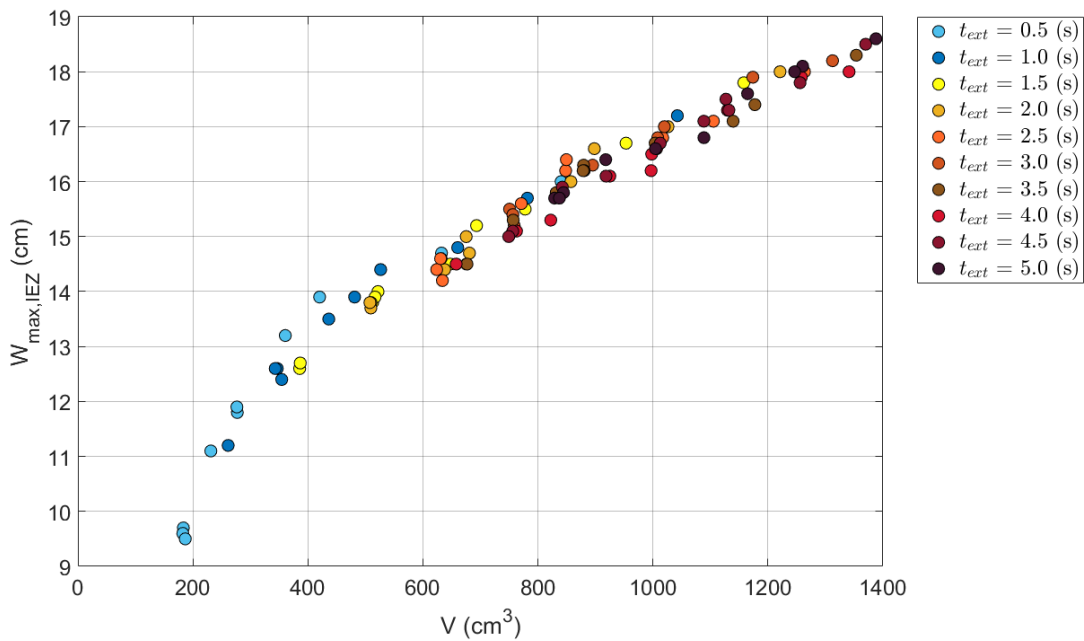


Figura 4.5: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de extracción.

Así mismo, se genera otro gráfico con las dimensiones de la IEZ respecto al tiempo de extracción (t_{ext}), considerando el tiempo reposo (t_{rep}). Aquello se presenta en la **figura 4.6** y **4.7**. Nuevamente se puede observar que los colores más claros (celeste, azul claro, amarillo) poseen una menor altura y ancho máximo, esto es evidente debido a que corresponden a los menores tiempos de extracción.

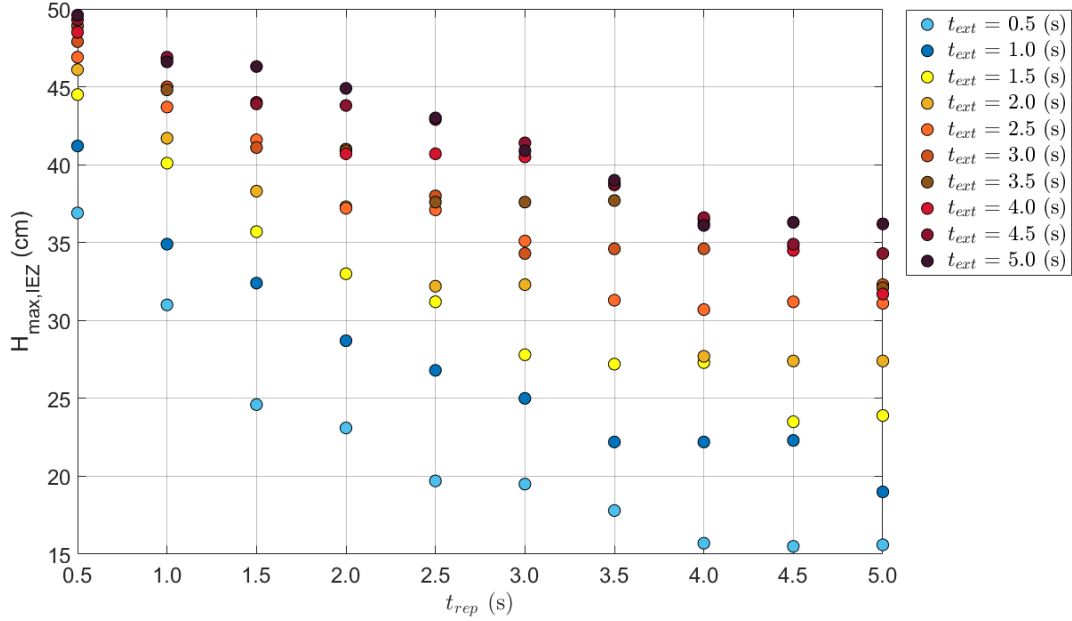


Figura 4.6: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al tiempo de reposo considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de extracción.

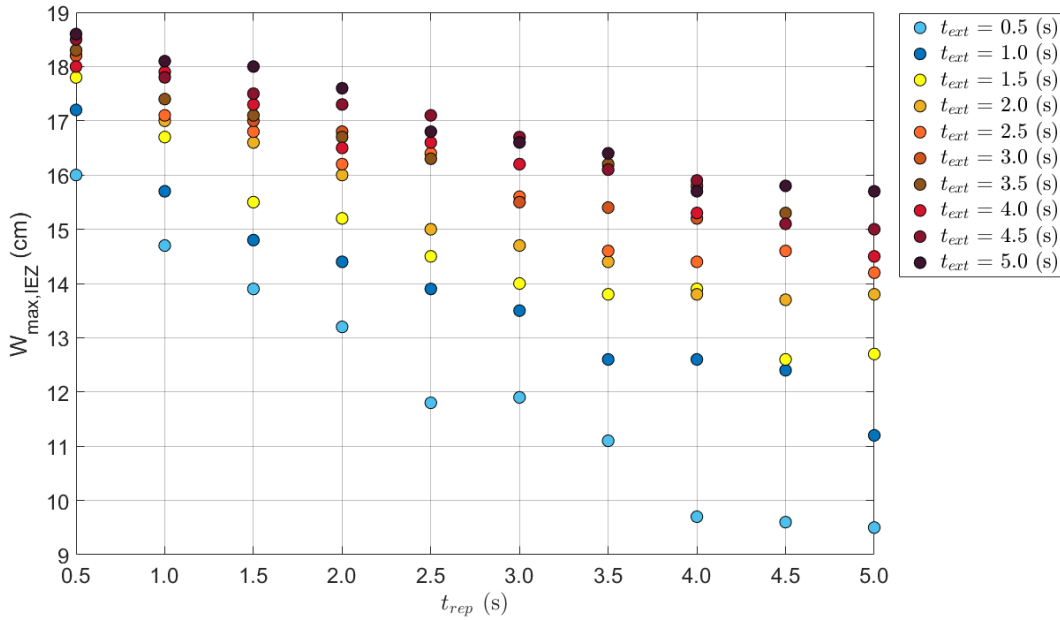


Figura 4.7: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al tiempo de reposo considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de extracción.

Por otro lado, se busca conocer la relación entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído para estas 100 simulaciones. De nuevo, la razón obtenida para los colores claros tiene un menor valor en comparación a los valores oscuros presentados en la leyenda de la **figura 4.8**. Esto vuelve a evidenciar que la altura máxima de la IEZ, el ancho máximo de la IEZ y la razón entre ambos aumentan continuamente con la masa o volumen extraído.

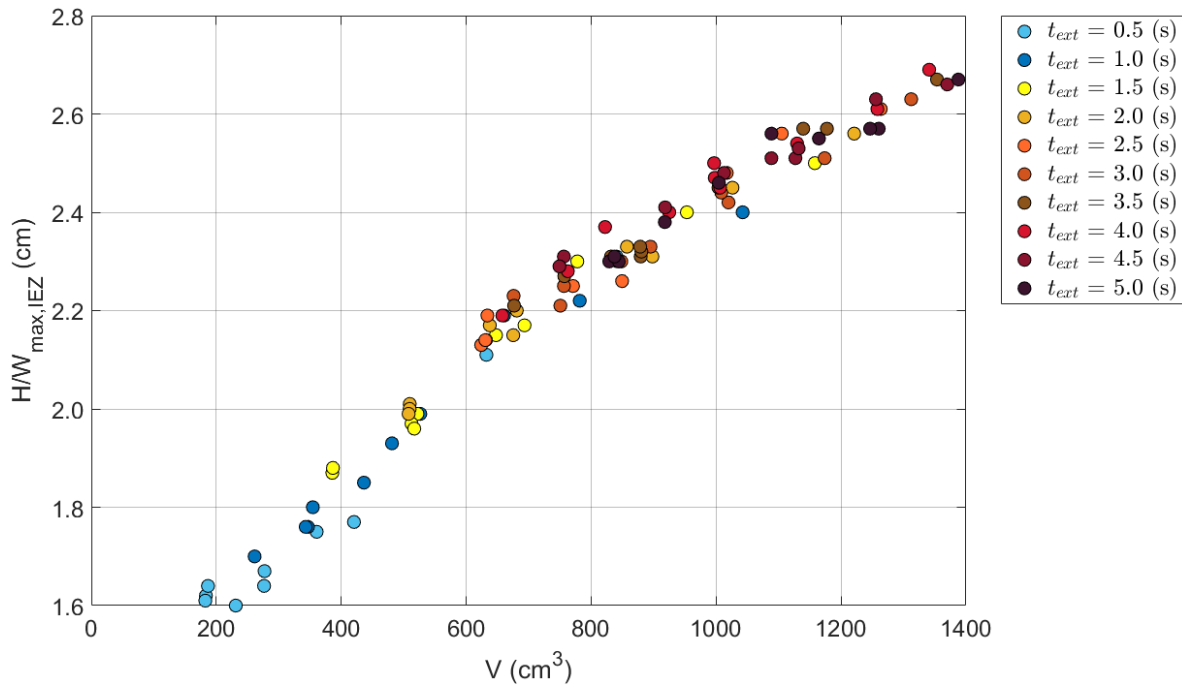


Figura 4.8: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de extracción.

Nuevamente se presentan algunas de las diferentes IEZ de las simulaciones de extracción discreta. Se muestran cuatro ilustraciones para 2.5 segundos de reposo y distintos tiempos de extracción. Las simulaciones tienen un tiempo efectivo considerado de 18 segundos. Debido a lo anterior, se muestra como la **figura 4.9a** es la que presenta una menor altura y ancho para la IEZ.

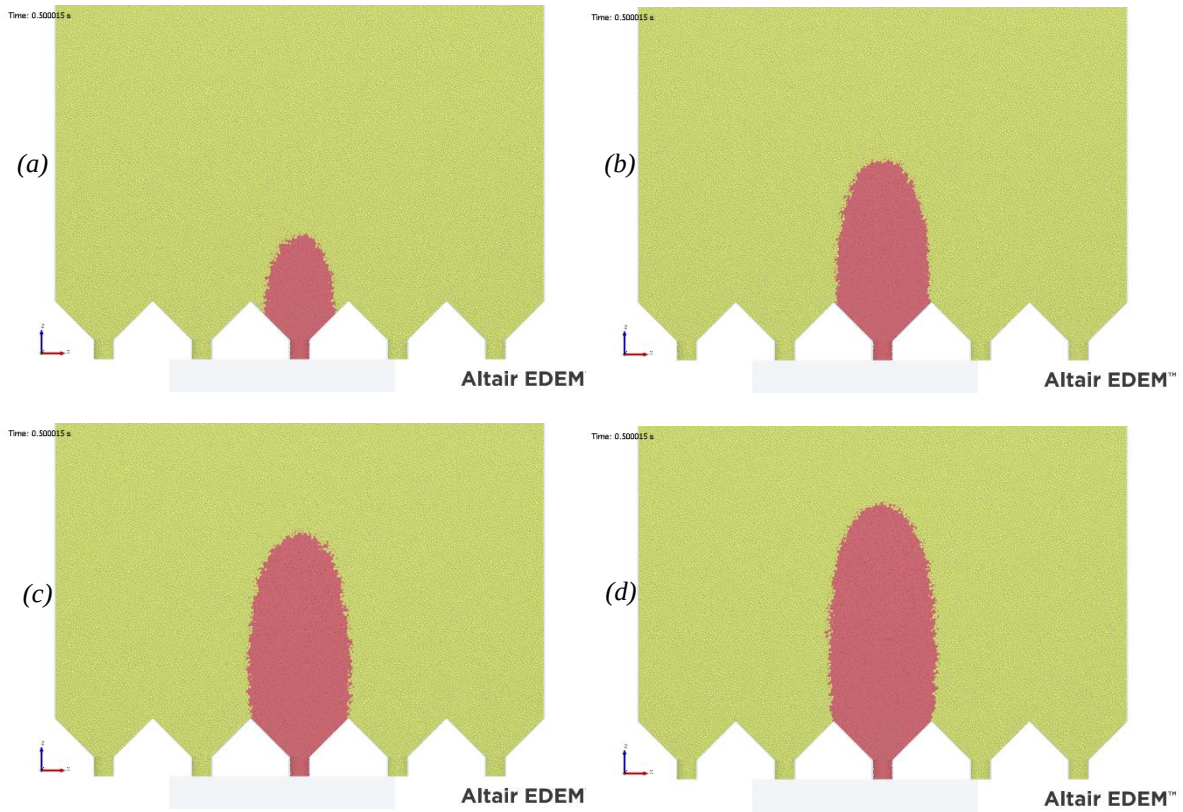


Figura 4.9: IEZ para 2.5 segundos de reposo y distintos tiempos de extracción. (a) 0.5 segundos de extracción. (b) 1.5 segundos de extracción. (c) 3.0 segundos de extracción. (d) 5.0 segundos de extracción.

Ahora bien, se realiza otra representación de la recopilación de datos para las simulaciones de extracción discreta. Se confecciona un par de gráficos que presentan la altura y ancho máximo de la IEZ teniendo en cuenta el tiempo de reposo (t_{rep}). Estos pueden ser apreciados en la **figura 4.10** y **4.11**. En este caso, evidentemente la paleta de colores se invierte, donde los colores más oscuros tienen una menor altura y ancho máximo para la IEZ.

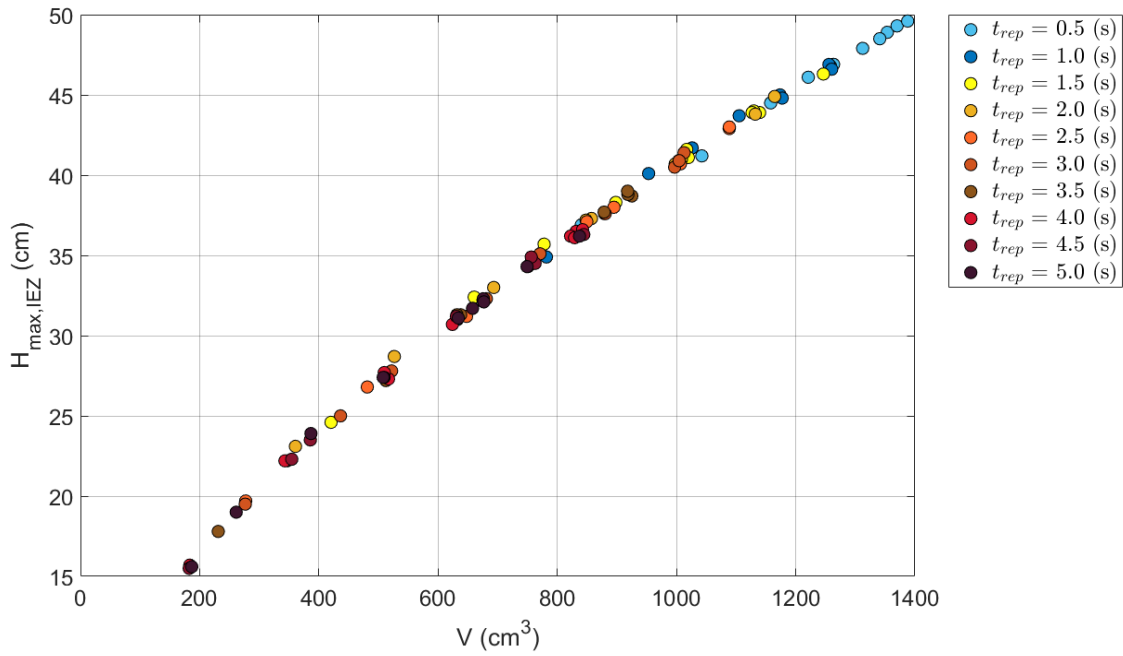


Figura 4.10: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.

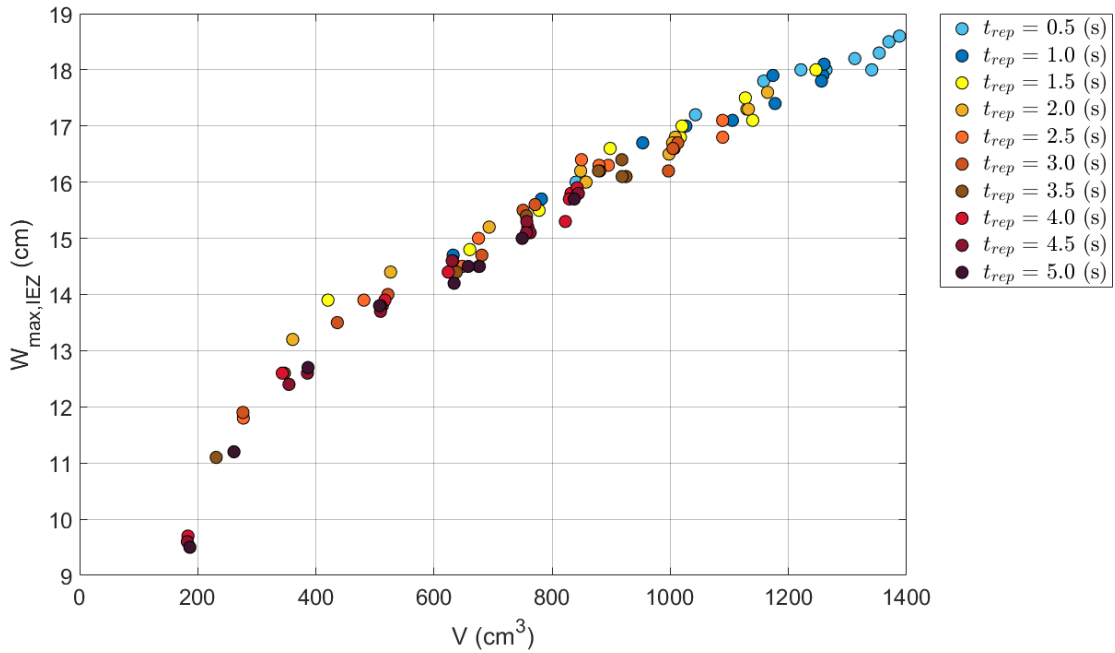


Figura 4.11: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.

En la **figura 4.12 y 4.13** se muestra la relación de la altura y ancho máximo de la IEZ con respecto al tiempo de extracción, donde se nota claramente el hecho de que, a mayor tiempo de extracción, mayor masa o volumen extraído, y así mismo, mayor altura y ancho máximo de la IEZ.

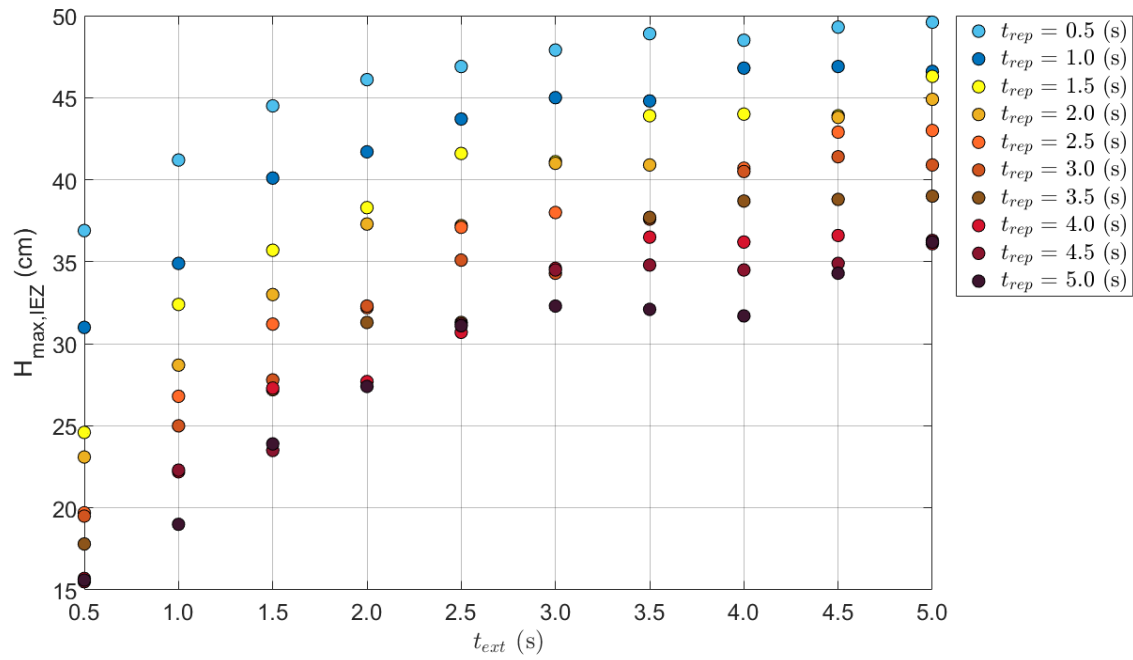


Figura 4.12: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al tiempo de extracción considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.

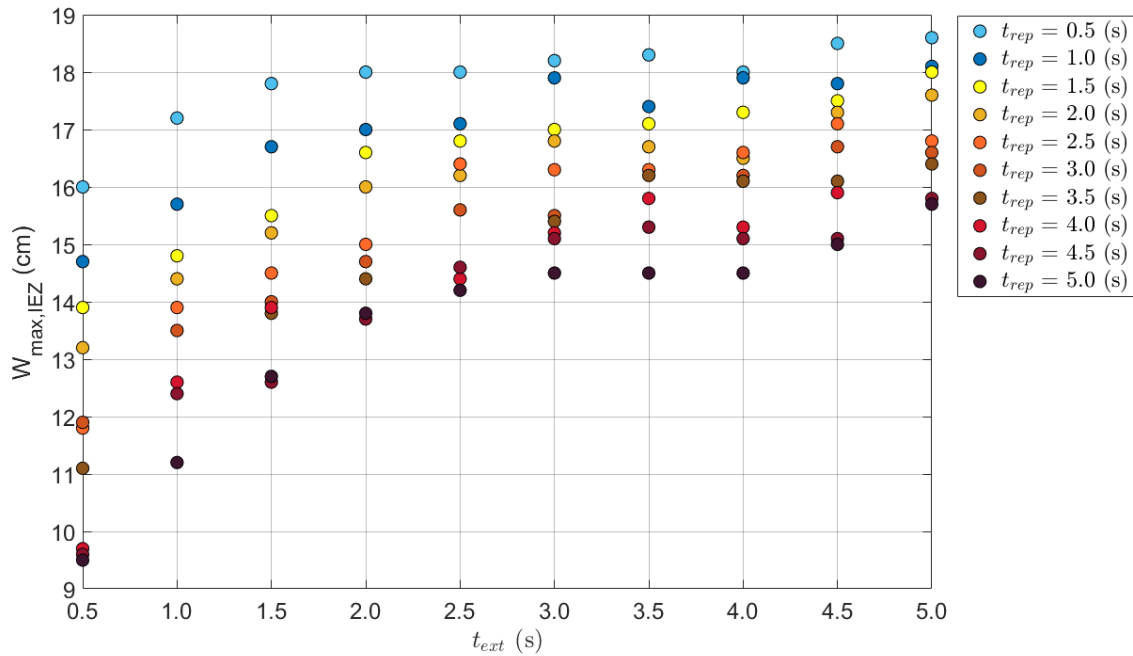


Figura 4.13: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al tiempo de extracción considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.

En esa misma línea, se grafica la relación del volumen extraído respecto al tiempo de extracción para las simulaciones de extracción discreta. Aquello es presentado en la **figura 4.14**.

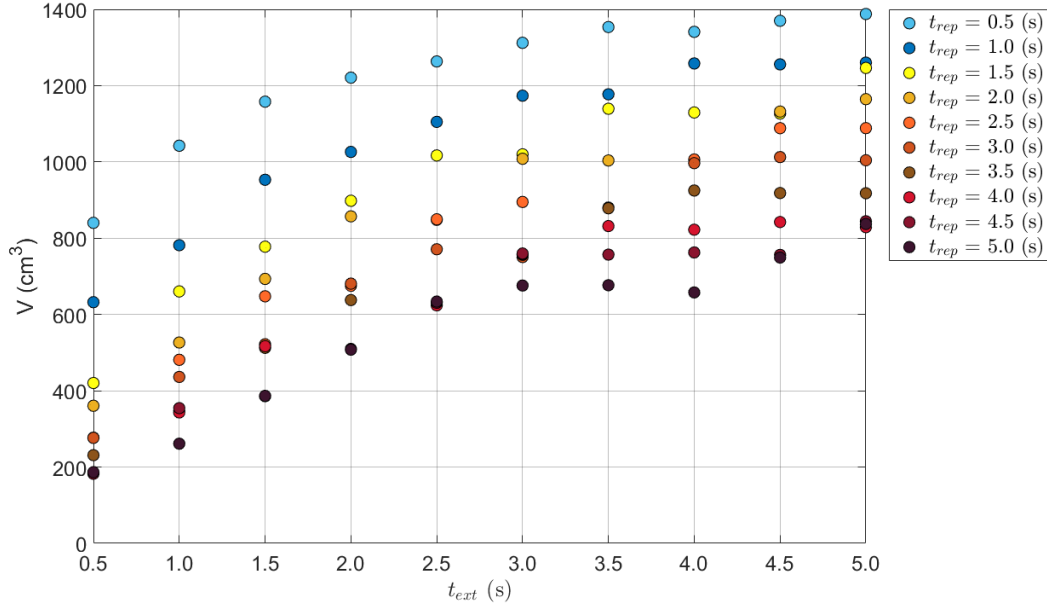


Figura 4.14: Relación del volumen extraído con respecto al tiempo de extracción para la IEZ considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.

En la **figura 4.15** y **4.16** se muestra la relación entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al tiempo de extracción y al volumen extraído respectivamente. Al contrario de lo presentado en la **figura 4.8**, la razón obtenida para los colores claros tiene un mayor valor en comparación de los valores oscuros presentados en la leyenda de la **figura 4.15** y **4.16**. Es así como nuevamente se evidencia que la altura máxima de la IEZ, el ancho máximo de la IEZ y la razón entre ambos aumentan continuamente con la masa o volumen extraído.

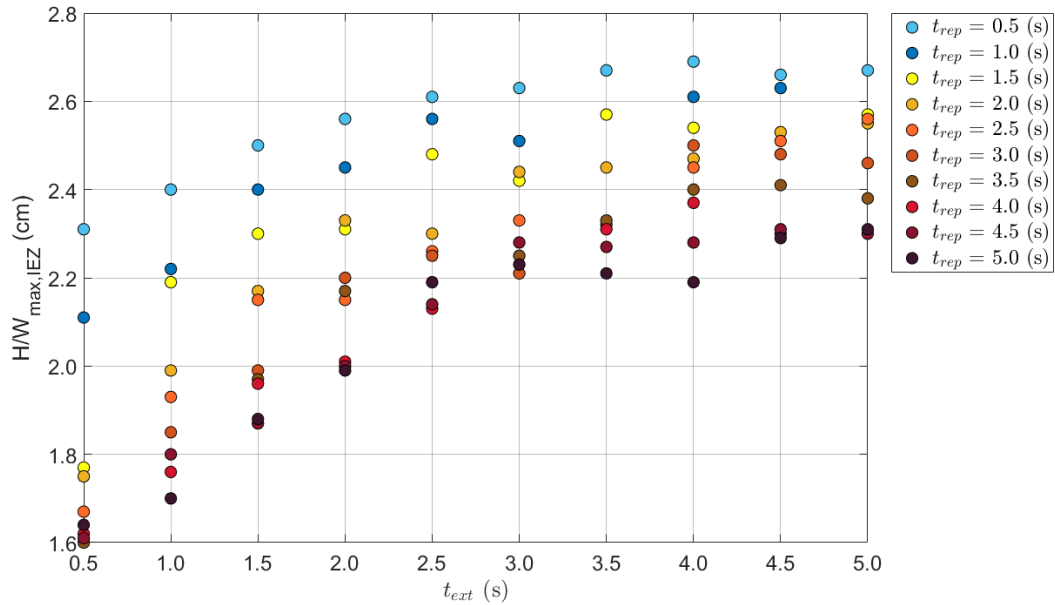


Figura 4.15: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al tiempo de extracción considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.

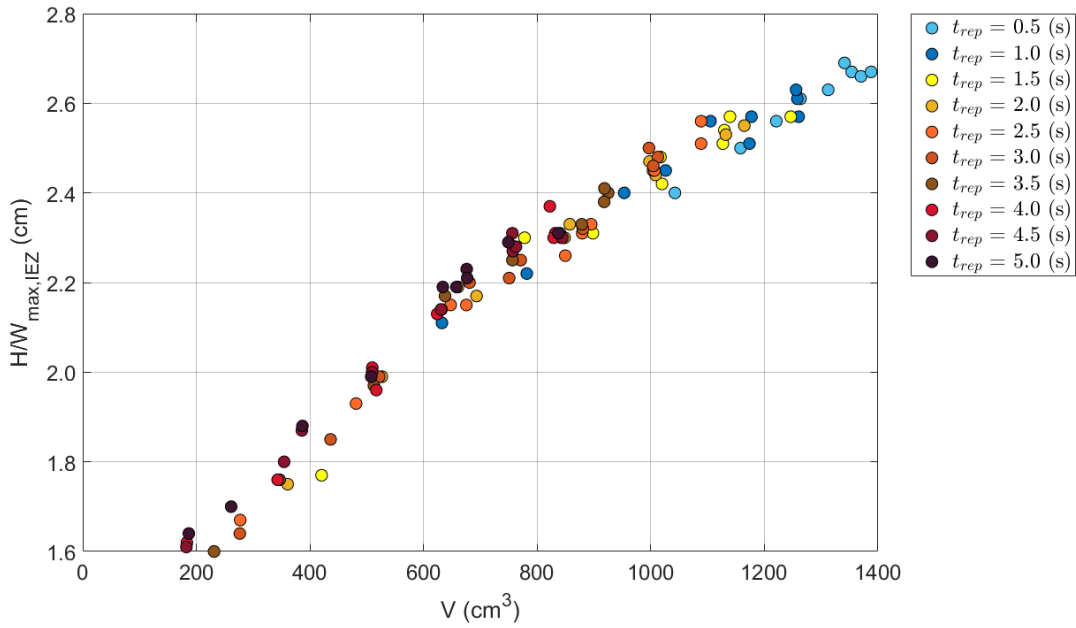


Figura 4.16: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.

Por último, se realiza un par de gráficos de correlación entre la altura y el ancho máximo de la IEZ para las simulaciones de extracción discreta. Estos son presentados en la **figura 4.17** y **4.18**. La **figura 4.17** tiene como leyenda el tiempo de reposo, por ello, los colores más claros poseen una altura y ancho máximo mayor. Todo lo contrario ocurre en la **figura 4.18**, donde se tiene como leyenda el tiempo de extracción. Por ende, los colores más claros poseen una altura y ancho máximo menor.

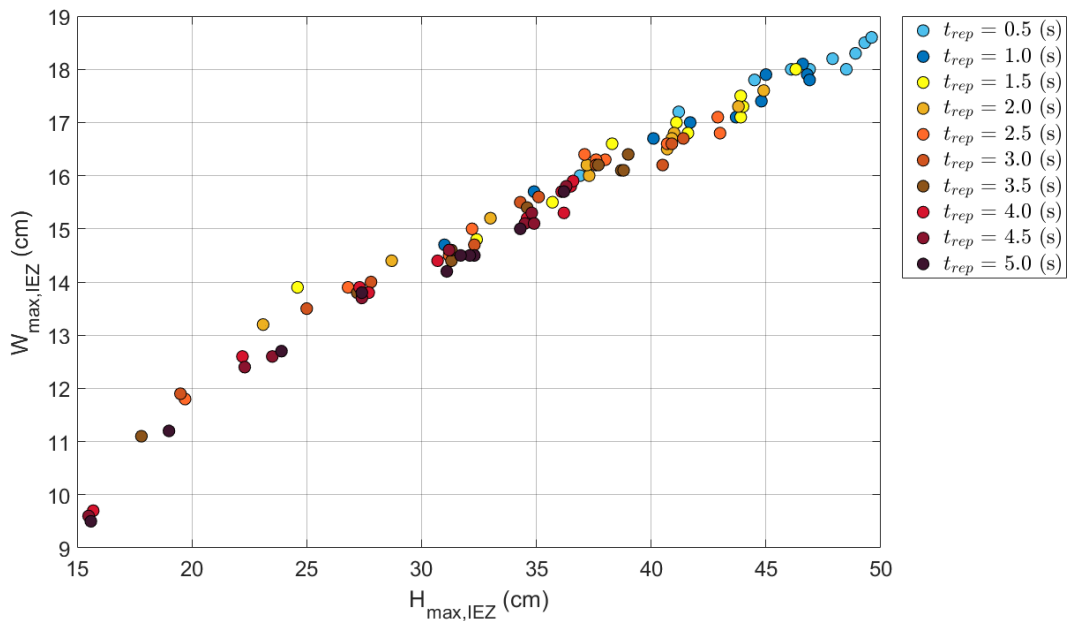


Figura 4.17: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.

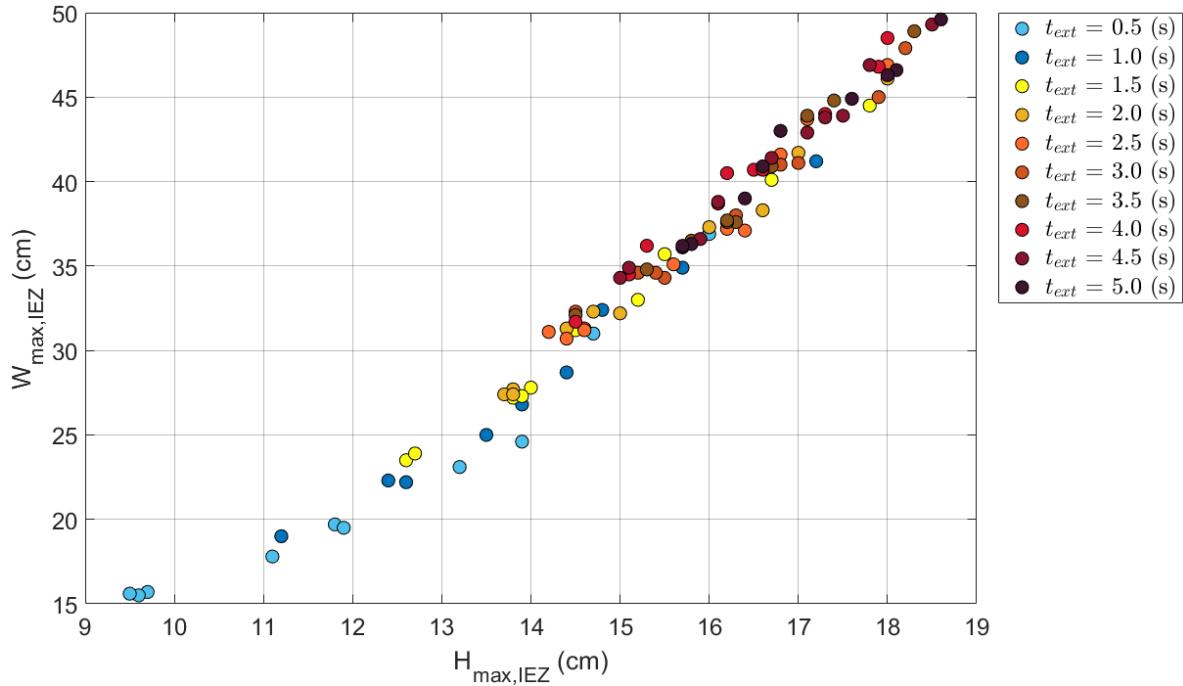


Figura 4.18: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de extracción.

4.3 IEZ en extracción continua

Los resultados de las simulaciones para la extracción continua se presentan a continuación. Se debe contemplar que para este tipo de simulación se tienen dos casos. El primero de ellos (caso 1) consta de 77 simulaciones, las cuales tienen por objetivo determinar el IEZ en función del coeficiente de fricción estático (μ_s) y la energía superficial (γ). Este último para poder obtener una aproximación de la influencia de la humedad presente en el material.

Por otro parte, el otro caso (caso 2) consta de 33 simulaciones, las cuales tienen como fin determinar la IEZ en función del coeficiente de fricción estático (μ_s) y de la granulometría o la cantidad de tamaños (C_{tam}) del material granular.

4.3.1 μ_s vs γ

Una pequeña parte de los datos recopilados de estas simulaciones se presentan en un extracto de tabla, ubicada en la sección de anexos, donde se identifica como la **tabla 7-4**. Por otro lado, se presentan también algunas de las diferentes IEZ de las simulaciones de extracción continua. Al respecto, se muestran cuatro ilustraciones con una energía superficial de 0 (J/m^2) y distintos coeficientes de fricción estático.

De este modo, al observar la **figura 4.19** se puede identificar como poco a poco la altura de la IEZ aumenta cuando μ_s también lo hace. Este aumento de μ_s significa obtener una IEZ más

esbelta, es decir, más alta y menos ancha. Los mismos hallazgos fueron encontrados por Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45], al observar que un incremento en el μ_s implica un aumento de la altura de la IEZ. Esto también se puede observar en la **figura 4.21** y **4.22**.

Por otro lado, observando nuevamente la **figura 4.19**, se nota muy levemente como el ancho máximo de la IEZ disminuye cuando μ_s incrementa. Por ello, el ancho máximo de la IEZ es inversamente proporcional al μ_s . Entonces es posible observar cómo μ_s impacta significativamente en la evolución y forma de la IEZ, generando un cuerpo más alto y menos ancho. Nuevamente, estos hallazgos fueron encontrados por Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45]. Lo anterior puede observarse en la **figura 4.23** y **4.24**.

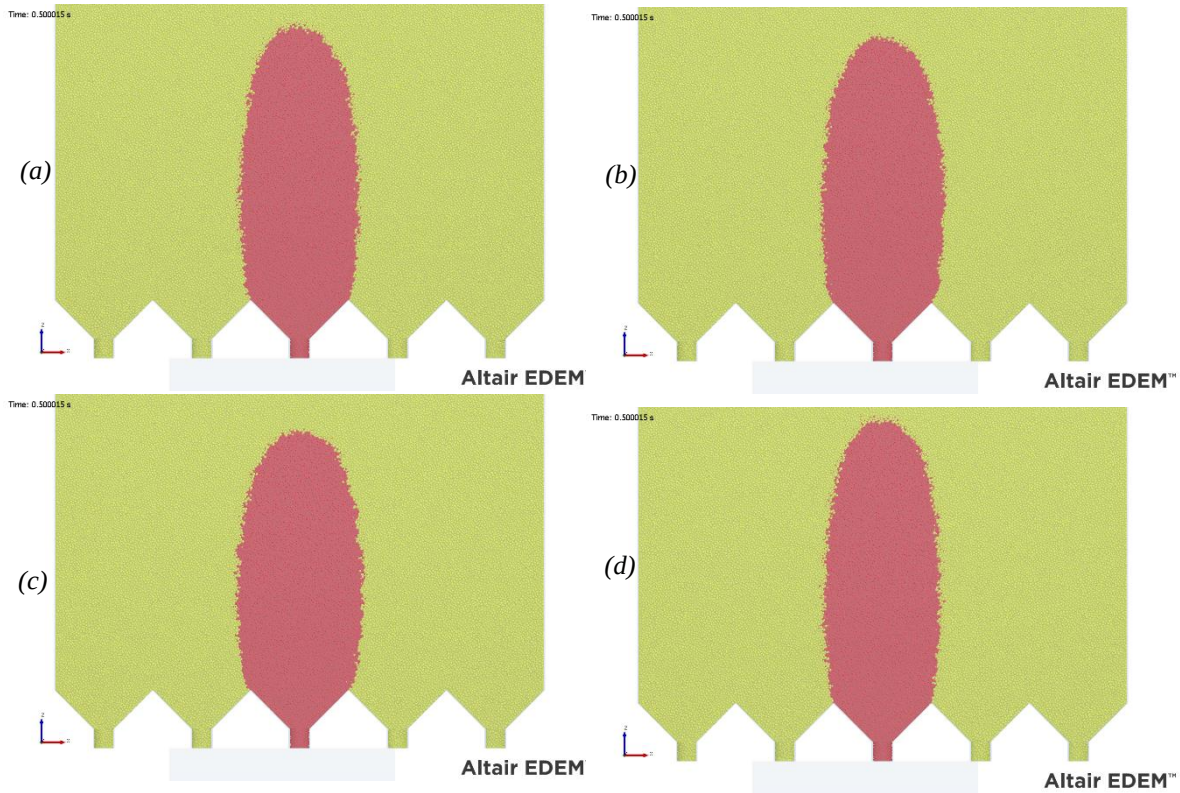


Figura 4.19: IEZ para una energía superficial de 0 [J/m²] y distintos coeficientes de fricción estático. (a) μ_s igual a 0.25. (b) μ_s igual a 0.28. (c) μ_s igual a 0.31. (d) μ_s igual a 0.34.

De igual manera, se muestran cuatro ilustraciones con un coeficiente de fricción estático de 0.30 y distintos valores para la energía superficial. Esto es posible observarlo en la **figura 4.20**, donde se puede identificar claramente que cuando γ aumenta, la altura de la IEZ disminuye. Estos hallazgos fueron encontrados Sánchez, Castro & Palma (2019) [65], al observar que a mayor humedad en el material granular se tiene una menor altura en la IEZ. Todo esto también puede observarse en la **figura 4.21** y **4.22**.

Por otra parte, mirando otra vez la **figura 4.20**, se percibe como el ancho de la IEZ disminuye cuando γ incrementa. Estos hallazgos fueron encontrados Reyes & Palma (2021) [9], al observar que un incremento en el grado de cohesión implica una disminución del ancho de la IEZ. Todo

lo anterior implica tener un elipsoide de la IEZ menos esbelto a medida que γ aumenta. Así mismo, esto puede verificarse al observar la **figura 4.23** y **4.24**.

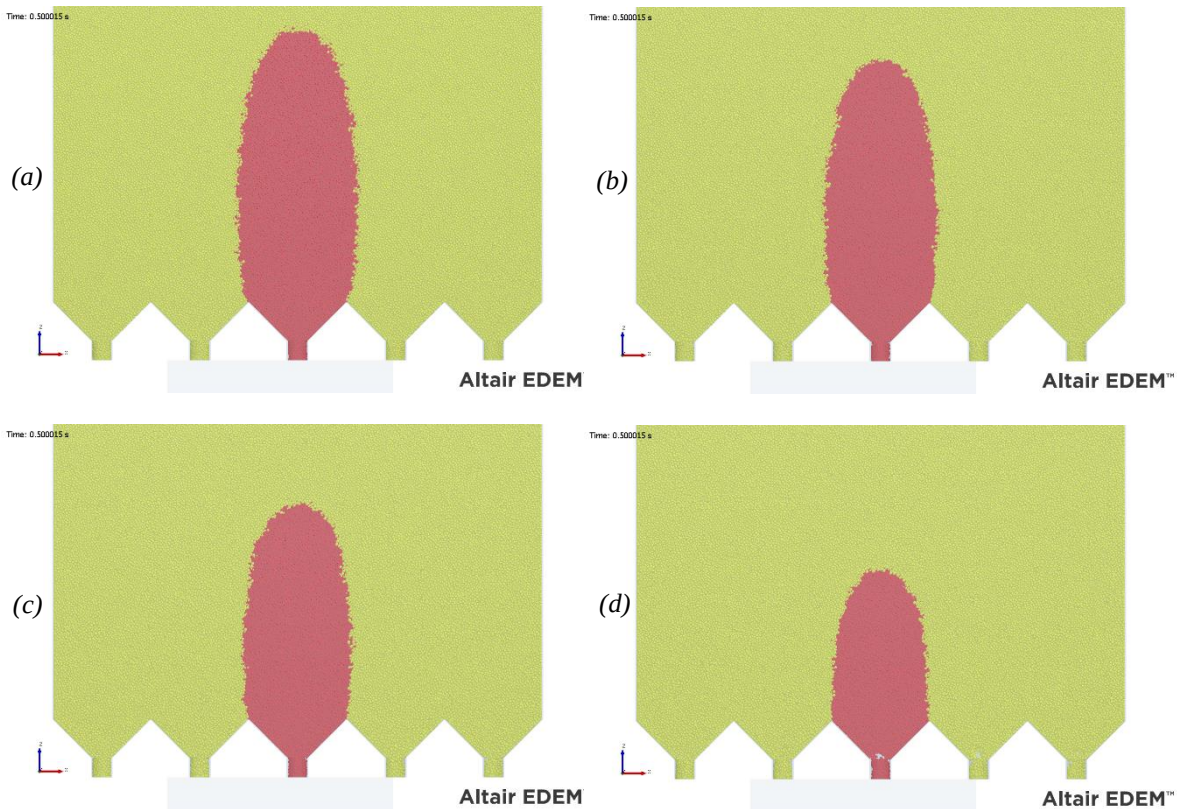


Figura 4.20: IEZ para un coeficiente de fricción estático de 0.30 y distintos valores de energía superficial. (a) γ igual a 0 [J/m²]. (b) γ igual a 0.2 [J/m²]. (c) γ igual a 0.4 [J/m²]. (d) γ igual a 0.6 [J/m²].

Por otro lado, Reyes & Palma (2021) [9] encontraron que aumentaba la presencia de colgaduras a medida que incrementaba el grado de cohesión. Lo mismo ocurre cuando aumenta γ en las simulaciones, específicamente desde energías superficiales mayores a 0.6 (J/m²). Ahora bien, Reyes & Palma (2021) [9] trabajaron en base al grado de cohesión del material granular, el cual es similar a la energía superficial debido a que corresponde a las fuerzas cohesivas entre moléculas del material granular. Aun así, estos parámetros requieren calibración para obtener dichas dimensiones en base al grado de humedad. Sin embargo, tanto la energía superficial como el grado de cohesión comprenden una buena aproximación al grado de humedad del material granular. En tal sentido, estos resultados son contradictorios al estudio de Sánchez, Castro & Palma (2019) [65] respecto al ancho de la IEZ en función del grado de humedad, ya que concluyen que a medida que incrementa el grado de humedad, aumentan las dimensiones horizontales de la IEZ.

Se construye un par de gráficos que representan la relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al coeficiente de fricción estático y a la energía superficial. Estos son presentados en la **figura 4.21** y **4.22**. Se desprende que la altura máxima de la IEZ es directamente proporcional a μ_s e inversamente proporcional a γ . Además, considerando la variación en las dimensiones de la

IEZ cuando la energía superficial es mayor a $0.4 \text{ (J/m}^2\text{)}$, se puede observar cómo estos resultados se dispersan y no presentan una tendencia clara.

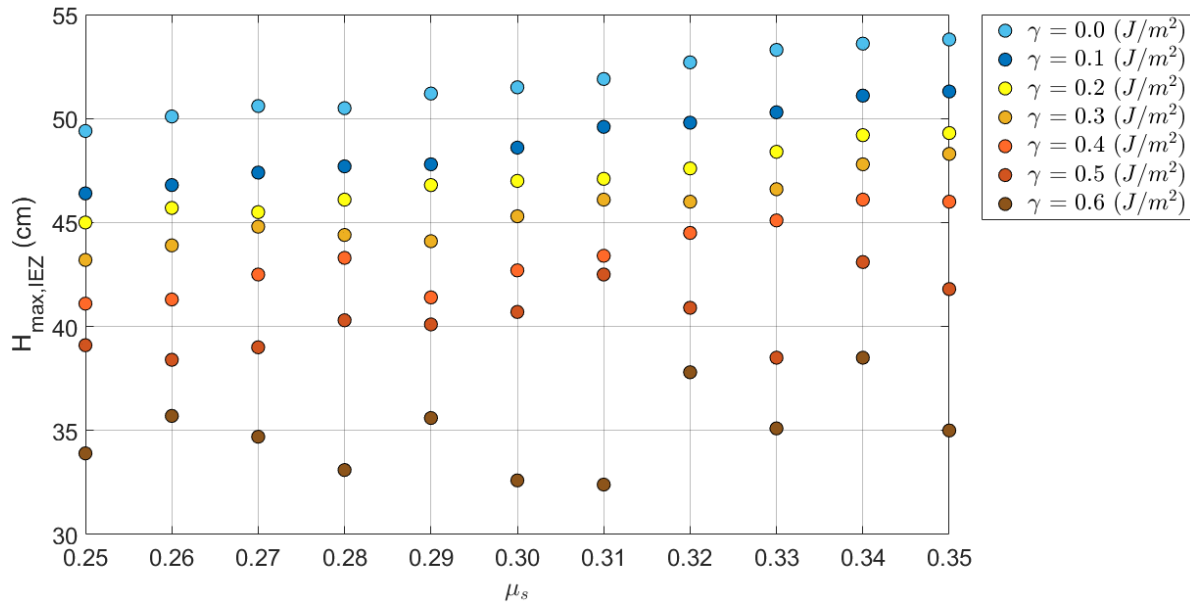


Figura 4.21: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al coeficiente de fricción estático considerando una extracción continua.

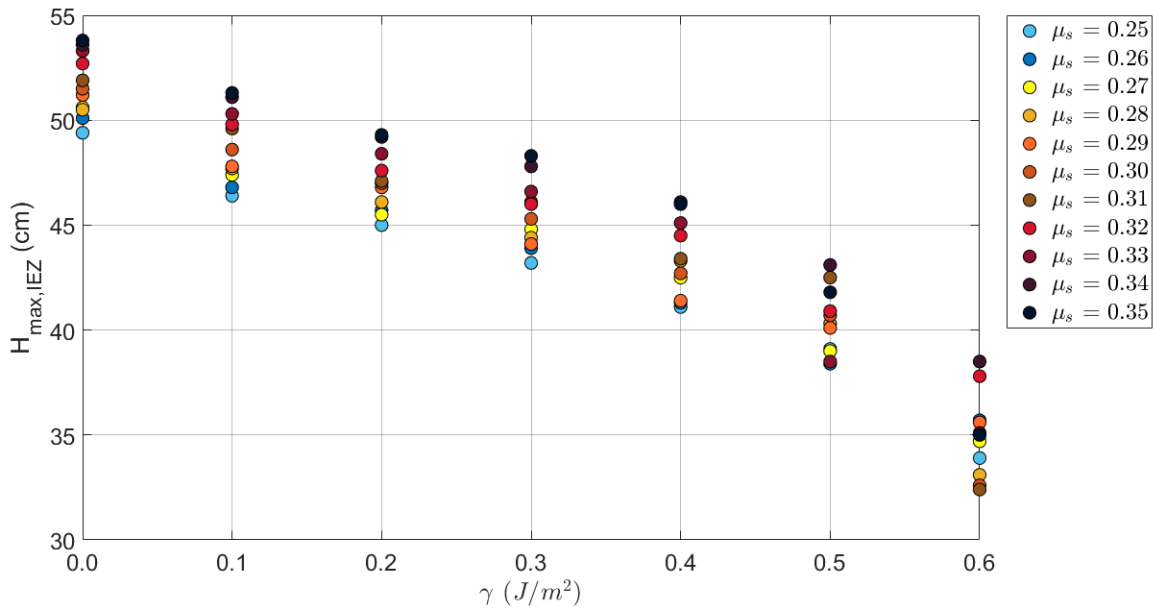


Figura 4.22: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto a la energía superficial considerando una extracción continua.

Por otro lado, se tiene otro par de gráficos que representan la relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al coeficiente de fricción estático y a la energía superficial. Estos son presentados en la **figura 4.23** y **4.24**. Se desprende que el ancho máximo de la IEZ es inversamente proporcional a μ_s y γ .

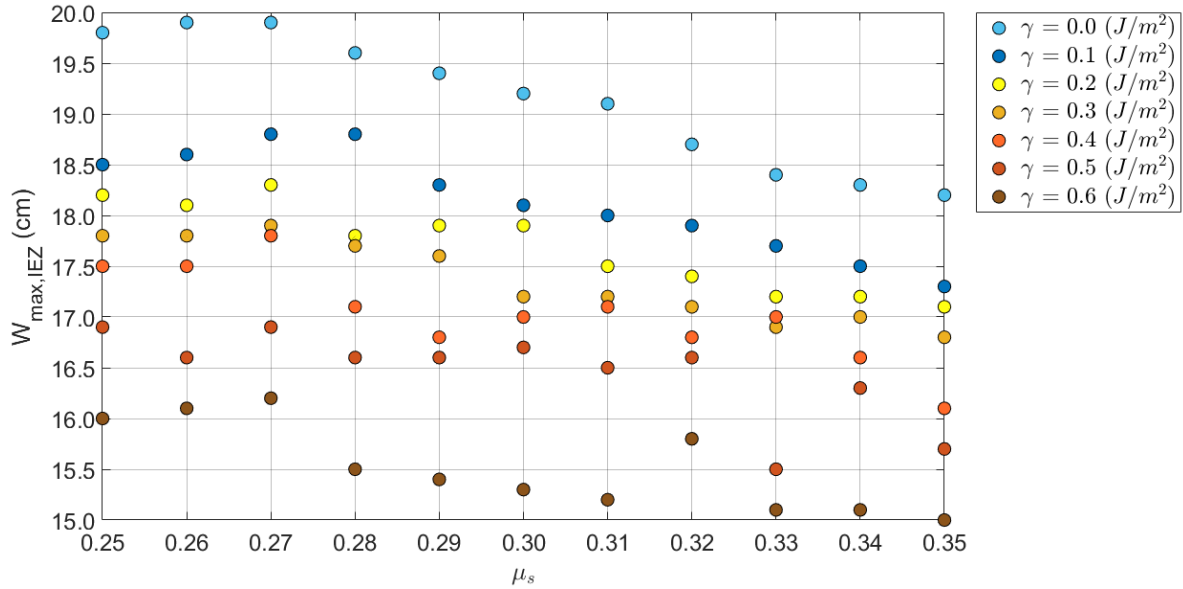


Figura 4.23: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al coeficiente de fricción estático considerando una extracción continua.

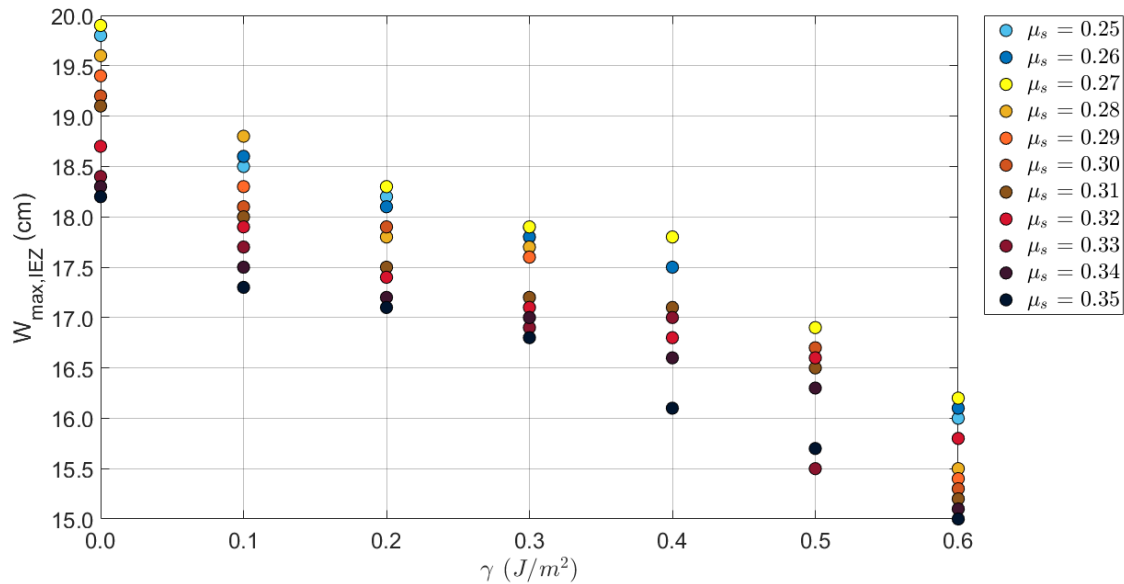


Figura 4.24: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la energía superficial considerando una extracción continua.

Es posible observar mediante la **figura 4.25** y **4.26** como el volumen extraído, y por ende, la altura máxima de la IEZ, aumentan cuando γ disminuye. Entonces, cuanto menor sea el valor de la energía superficial, mayor será el volumen extraído y la altura máxima de la IEZ.

Por otro lado, la **figura 4.25** y **4.26** muestran nuevamente como el volumen extraído, y por ende, la altura máxima de la IEZ, aumentan cuando μ_s también lo hace. Entonces, cuanto mayor sea el valor del coeficiente de fricción estático dentro del rango estudiado, mayor será el volumen extraído y la altura máxima de la IEZ.

Por ende, la altura máxima de la IEZ y el volumen extraído son inversamente proporcional a γ . Así mismo, la altura máxima de la IEZ y el volumen extraído son directamente proporcional a μ_s .

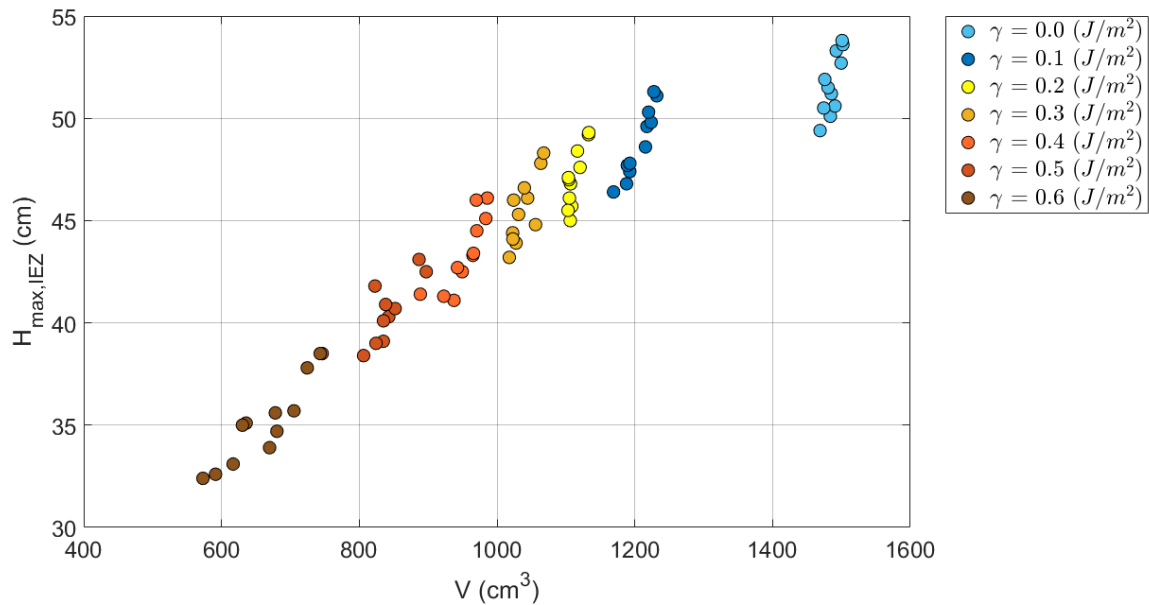


Figura 4.25: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: energía superficial.

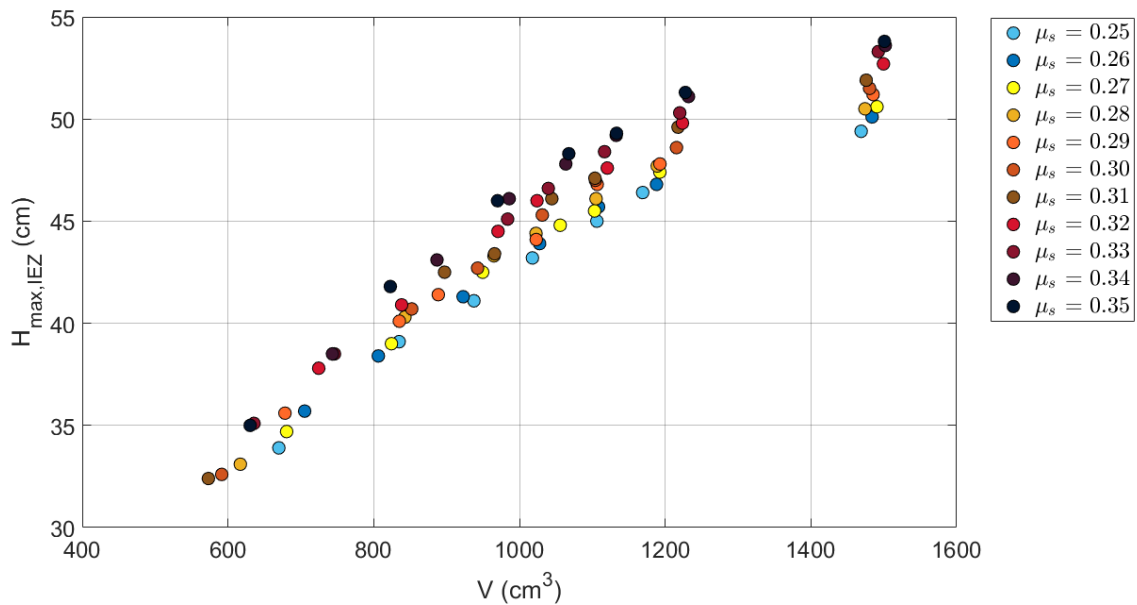


Figura 4.26: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.

En la **figura 4.27 y 4.28** se contempla la relación del ancho máximo de la IEZ respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. En la **figura 4.27 y 4.28** se nota como aumenta tanto el volumen extraído como el ancho máximo de la IEZ cuando γ disminuye. En la **figura**

4.27 y 4.28 se puede notar como el ancho máximo de la IEZ aumenta cuando μ_s disminuye. Entonces, el ancho máximo de la IEZ y el volumen extraído son inversamente proporcional a γ . Así mismo, el ancho máximo de la IEZ es también inversamente proporcional a μ_s .

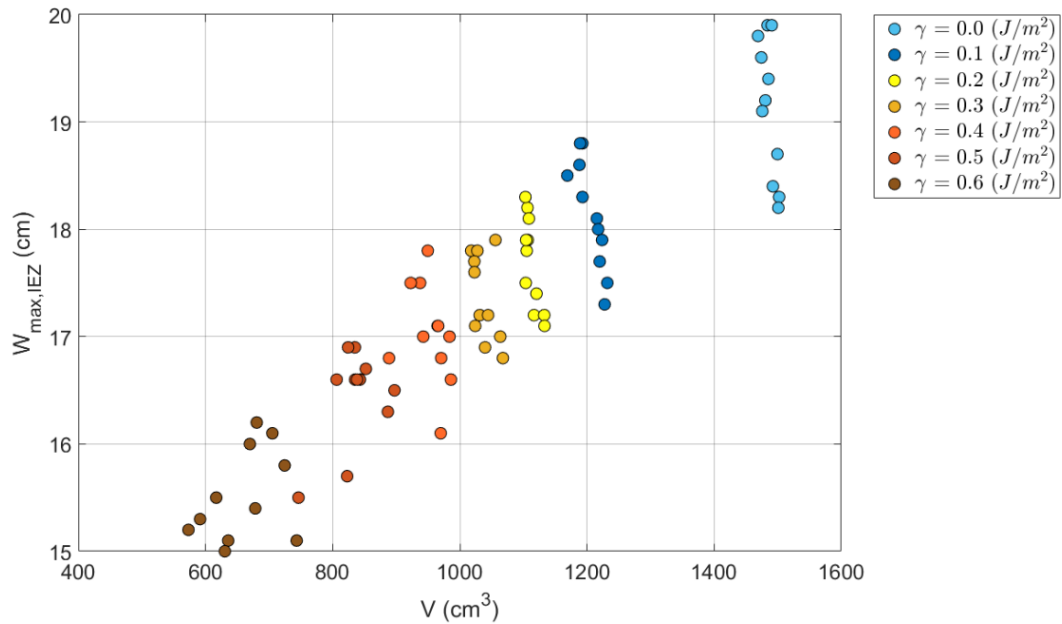


Figura 4.27: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: energía superficial.

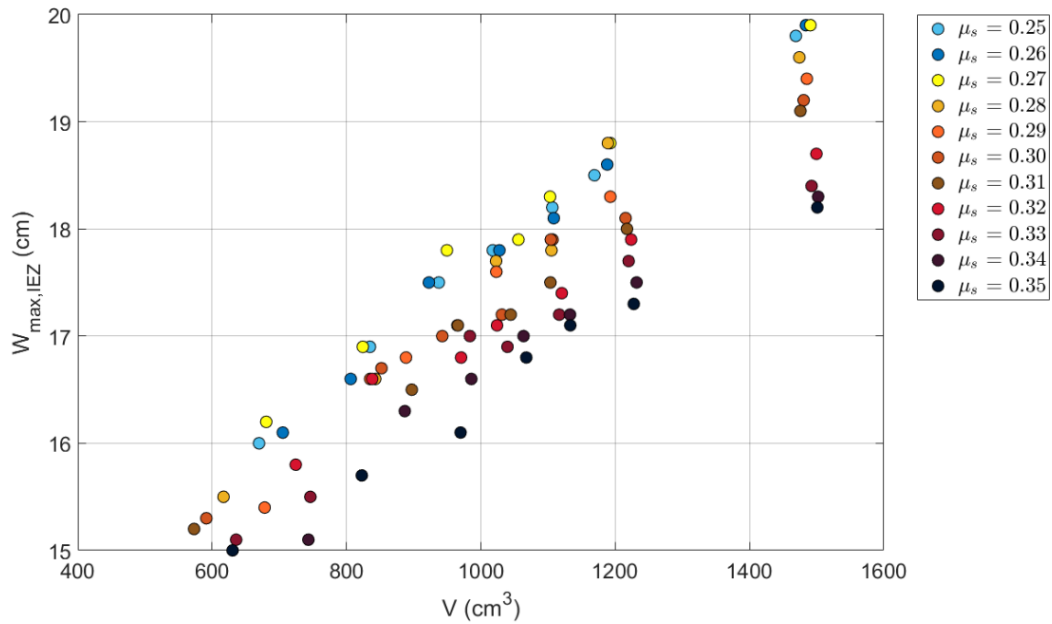


Figura 4.28: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.

En ese mismo contexto, considerando además la **figura 4.21 y 4.23** y la **figura 4.22 y 4.24** respectivamente, se realiza un par de gráficos que presentan la relación de la razón entre el alto

y ancho máximo para la IEZ con respecto al coeficiente de fricción estático y a la energía superficial considerando una extracción continua. El primero de ellos se muestra en la **figura 4.29**, donde se permite observar como la razón entre el alto y ancho máximo es mayor para valores altos del coeficiente de fricción estático. Esto sucede teniendo en cuenta que la altura máxima de la IEZ es directamente proporcional a μ_s y el ancho máximo de la IEZ es inversamente proporcional a μ_s . Lo anterior sucede para la **figura 4.29** y **4.30** ya que ese incremento observado se debe a que el aumento en la dimensión vertical es siempre mayor a la dimensión horizontal entre cada simulación. Por cierto, esto se puede comprobar observando la **tabla 7-4** ubicada en anexos. Por ende, la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ es directamente proporcional a μ_s , considerando el rango estudiado.

Por otro lado, el segundo gráfico es presentado en la **figura 4.30**, en conjunto con la **figura 4.29**, donde se aprecia como la razón entre el alto y ancho máximo es mayor para los valores bajos de energía superficial. De este modo, es posible decir que razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ es inversamente proporcional a γ .

Por otro lado, para profundizar aún más en lo dicho anteriormente, se dispone otro par de gráficos ubicados en la sección de anexos. Estos se identifican como la **figura 7.1** y **7.2**, y muestran la relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído considerando tanto la energía superficial como el coeficiente de fricción estático respectivamente.

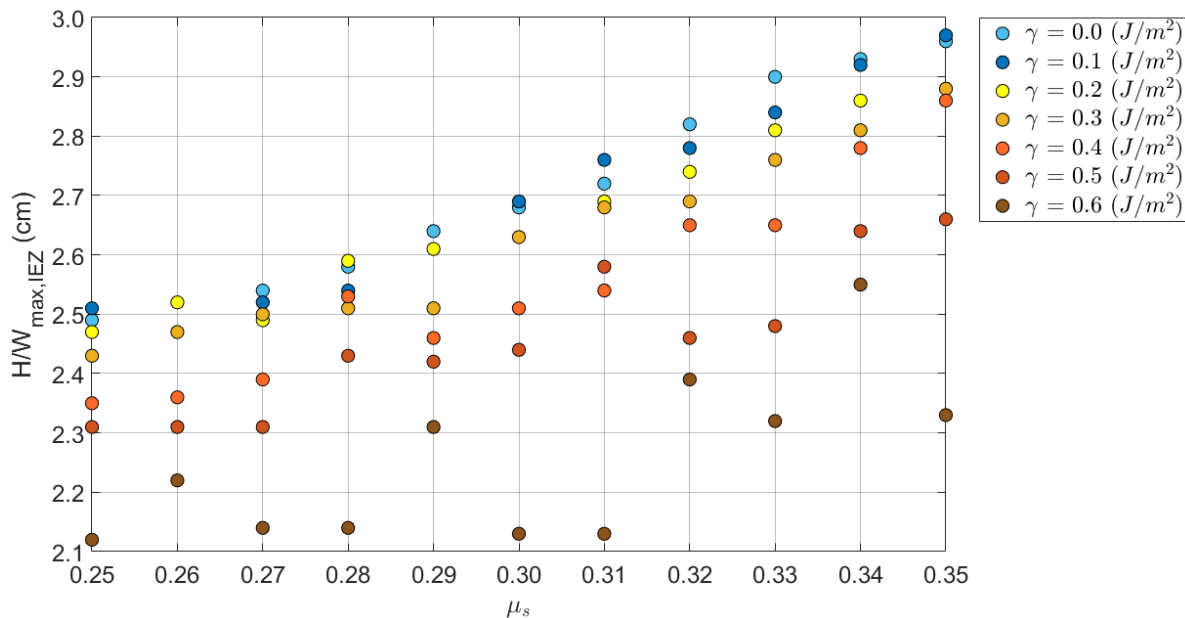


Figura 4.29: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al coeficiente de fricción estático considerando una extracción continua.

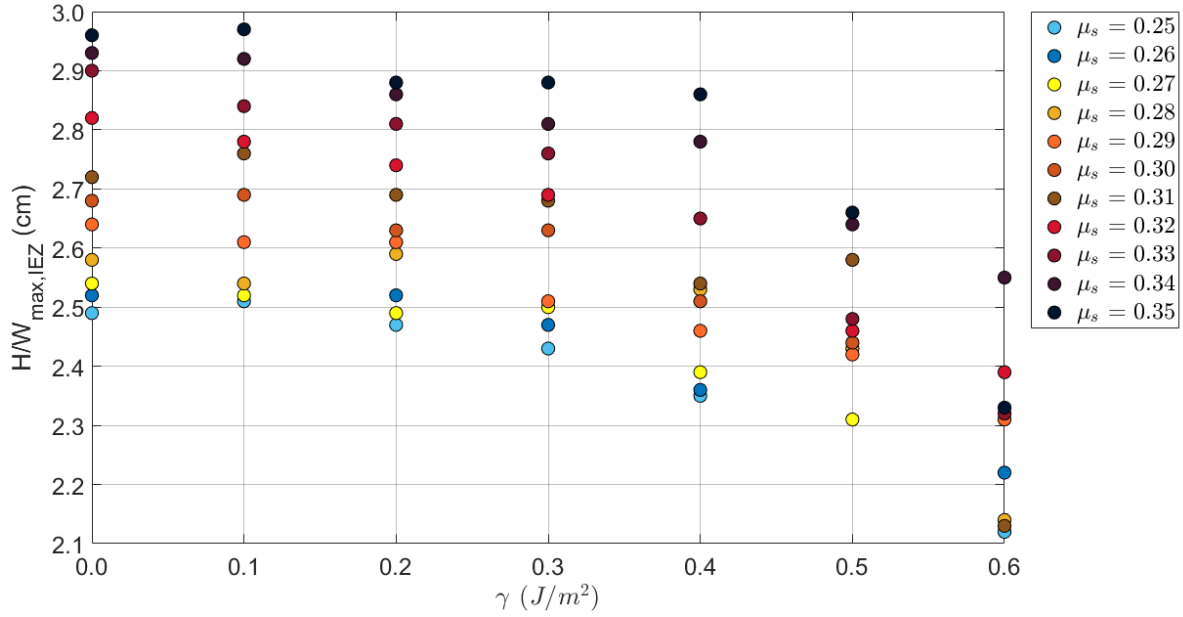


Figura 4.30: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto a la energía superficial considerando una extracción continua.

Finalmente, se construyen las dos últimas figuras para este caso. Ellas se presentan en la **figura 4.31** y **4.32**, y relacionan el ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua, tanto para el coeficiente de fricción estático como para la energía superficial. En la **figura 4.31** es posible evidenciar como dicha relación varía de forma significativa cuando μ_s lo hace. De la **figura 4.21** se puede ver como la altura máxima aumenta cuando μ_s también lo hace, donde por otro lado, desde la **figura 4.23** pasa lo contrario al observar como el ancho máximo aumenta cuando μ_s disminuye. Ahora bien, comparando la **figura 4.31** con los resultados obtenidos por Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45] se puede encontrar una forma o tendencia similar cuando μ_s varía.

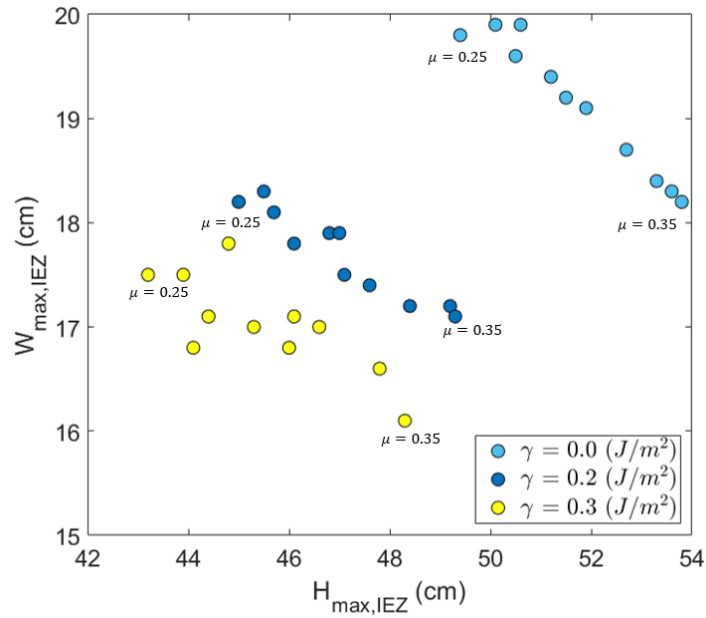


Figura 4.31: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua. Leyenda: energía superficial.

Ahora bien, en la **figura 4.32** se exhibe como también las dimensiones de la IEZ varían significativamente cuando γ lo hace. Desde la **figura 4.22** se puede verificar como la altura máxima disminuye cuando γ aumenta. De igual modo, desde la **figura 4.24** se observa como el ancho máximo disminuye cuando γ aumenta.

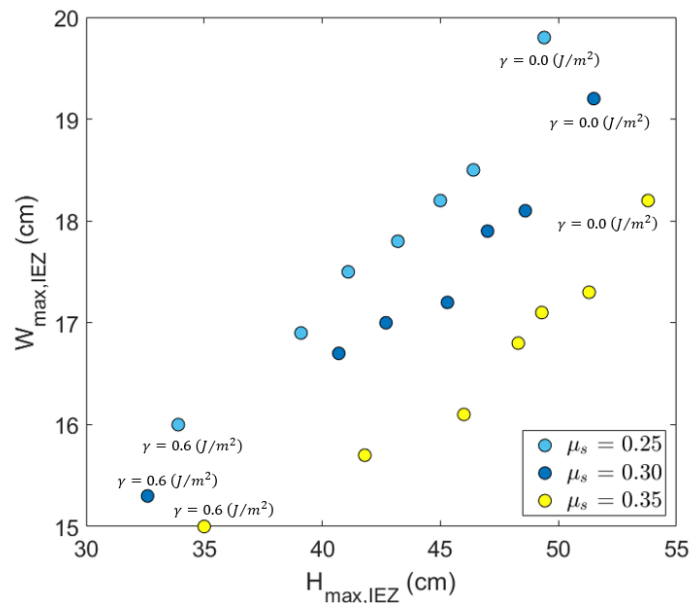


Figura 4.32: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.

Además, es posible ver en las **figuras 7.3 y 7.4** ubicadas en anexos, el espectro completo para estas dos variables, considerando la relación entre ambas dimensiones de la IEZ.

4.3.2 μ_s vs granulometría

Una pequeña parte de los datos recopilados y la granulometría utilizada en este caso se presentan en la sección de anexos, donde se identifican como la **tabla 7-5** y la **tabla 7-2** respectivamente.

En esa misma línea, se presentan también algunas de las diferentes IEZ de las simulaciones de extracción continua para el segundo caso. Al respecto, se muestran cuatro ilustraciones con una granulometría de 5 tamaños y distintos coeficientes de fricción estático.

Así, al observar la **figura 4.33** se puede identificar como poco a poco la altura de la IEZ incrementa cuando el μ_s también lo hace. Estos mismos hallazgos fueron encontrados por Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45], al observar que un incremento en μ_s implica un aumento de la altura de la IEZ. Esto se puede ver en la **figura 4.35** y **4.36**.

Además, observando nuevamente la **figura 4.33**, se nota muy levemente como el ancho de la IEZ disminuye cuando el μ_s incrementa. Otra vez es posible observar cómo μ_s impacta significativamente en la evolución y forma de la IEZ, generando un cuerpo más alto y menos ancho. Estos hallazgos fueron encontrados por Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45]. Lo anterior puede observarse en la **figura 4.37** y **4.38**.

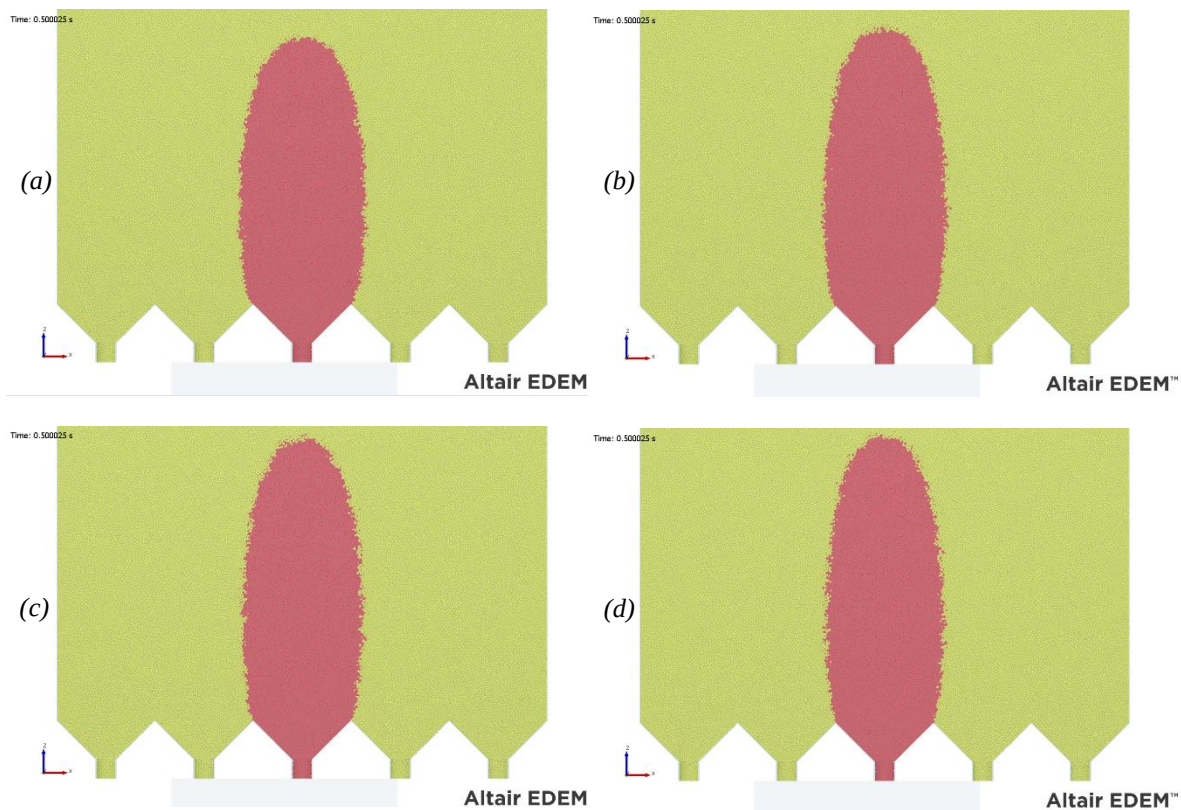


Figura 4.33: IEZ para una granulometría de 5 tamaños y distintos coeficientes de fricción estático.
(a) μ_s igual a 0.25. (b) μ_s igual a 0.28. (c) μ_s igual a 0.31. (d) μ_s igual a 0.34.

A continuación, se muestran tres ilustraciones con un coeficiente de fricción estático de 0.32 y distintos valores para la cantidad de tamaños (C_{tam}) o granulometría. Esto es posible observarlo en la **figura 4.34**, donde se puede identificar como la altura de la IEZ disminuye cuando la cantidad de tamaños aumenta. Lo propuesto anteriormente puede observarse en la **figura 4.35** y **4.36**.

Del mismo modo, al observar nuevamente la **figura 4.34**, se puede ver minuciosamente como el ancho de la IEZ disminuye cuando la cantidad de tamaños o granulometría incrementa. Lo anterior mencionado puede observarse en la **figura 4.37** y **4.38**.

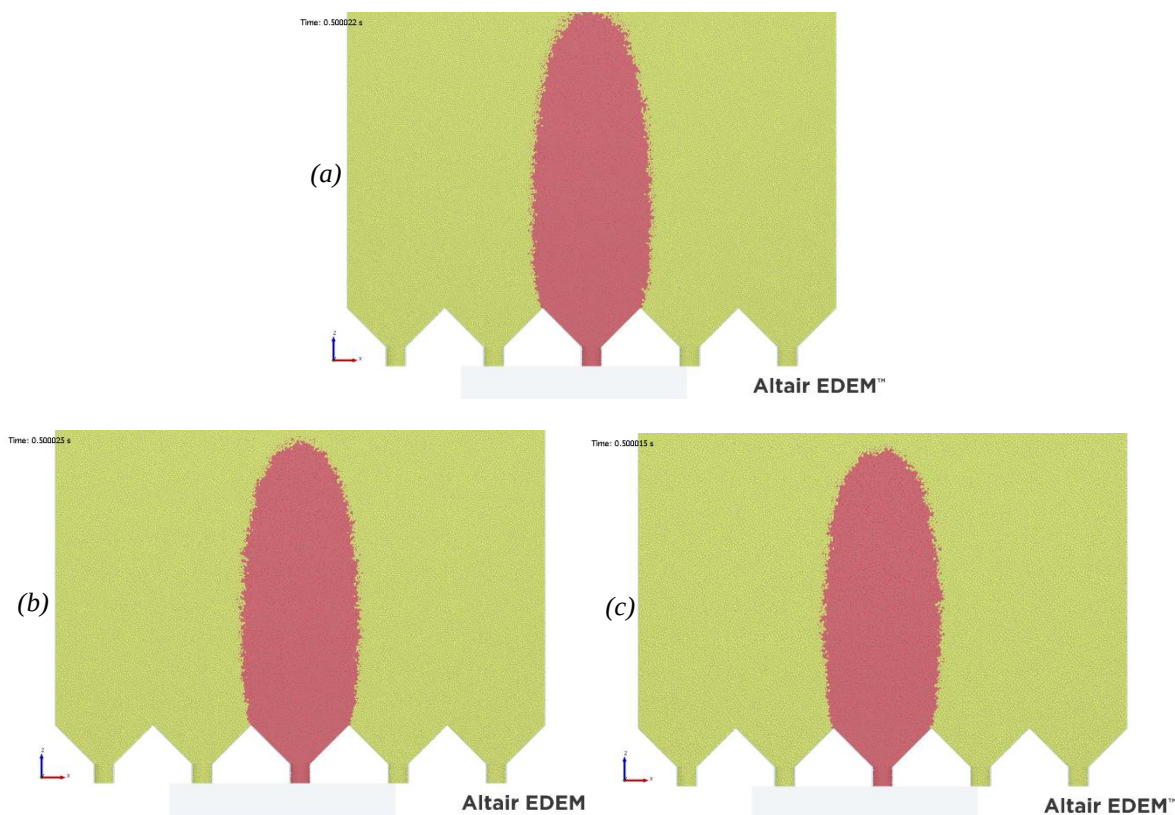


Figura 4.34: IEZ para un coeficiente de fricción estático de 0.32 y distinta granulometría o cantidad de tamaños. (a) C_{tam} igual a 3. (b) C_{tam} igual a 5. (c) C_{tam} igual a 7.

Al respecto, se generan dos gráficos que presentan la altura máxima de la IEZ teniendo en cuenta la cantidad de tamaños (C_{tam}) o granulometría y el coeficiente de fricción estático del material granular, respectivamente. En la **figura 4.35** y **4.36** se muestra como varía la altura máxima de la IEZ mientras la granulometría también lo hace. La tendencia es tener una menor altura máxima para la IEZ a medida que la cantidad de tamaños aumenta.

Nuevamente, en la **figura 4.35** y **4.36** se observa también como la altura máxima de la IEZ varía significativamente mientras el coeficiente de fricción también lo hace. Al igual que en el caso anterior, nuevamente la altura máxima de la IEZ es directamente proporcional a μ_s .

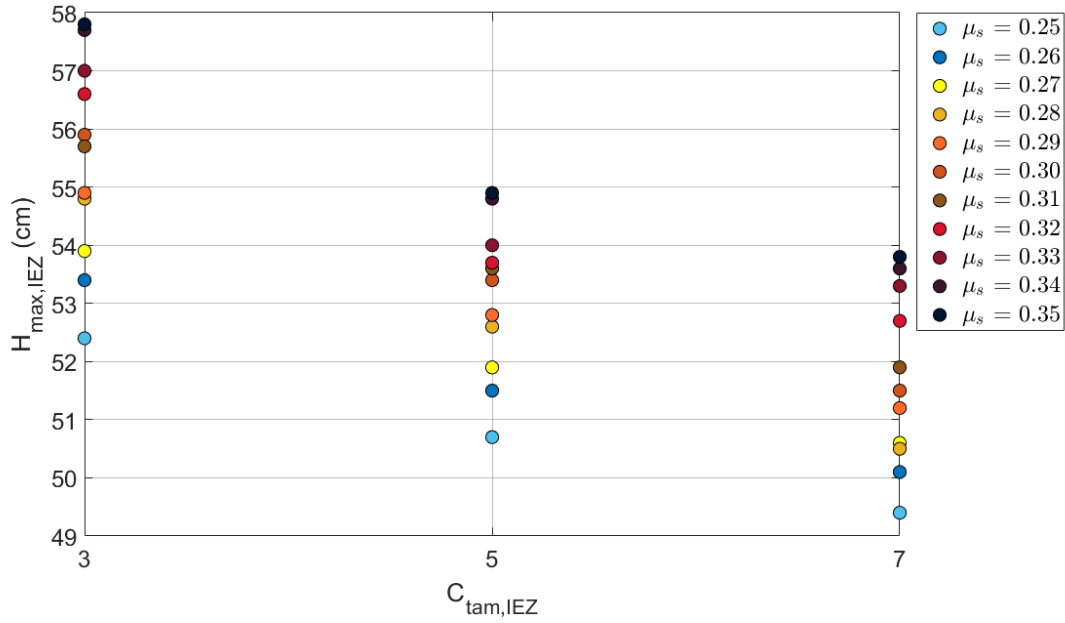


Figura 4.35: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto a la granulometría del mineral considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.

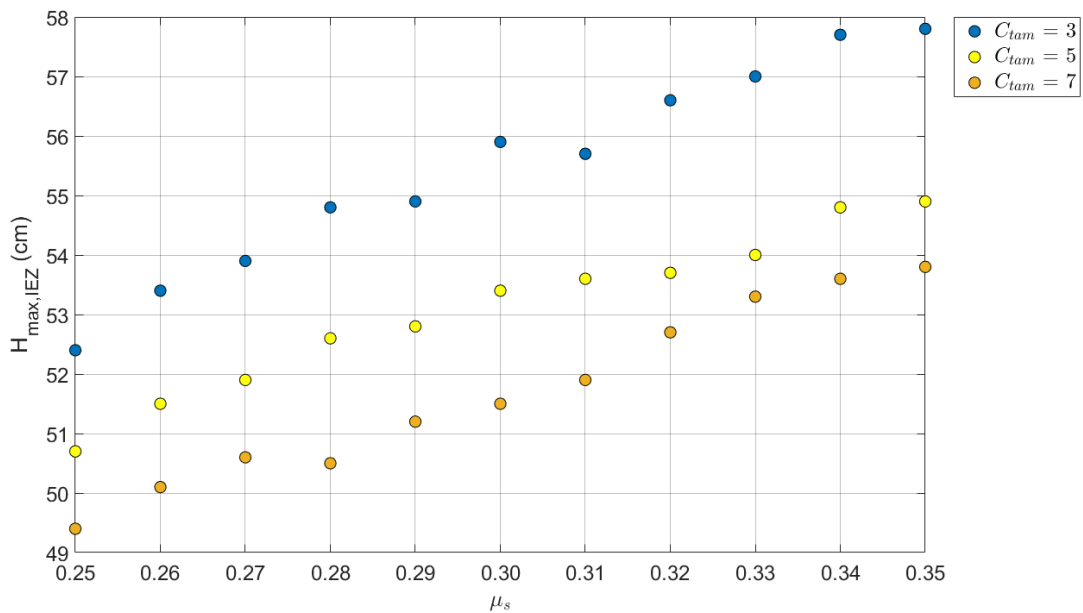


Figura 4.36: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al coeficiente de fricción estático considerando una extracción continua. Leyenda: Cantidad de tamaños.101010

Por otro lado, se presentan dos gráficos que presentan el ancho máximo de la IEZ teniendo en consideración la cantidad de tamaños (C_{tam}) o granulometría y el coeficiente de fricción estático del material granular, respectivamente. En la **figura 4.37** y **4.38** se observa como varía el ancho máximo de la IEZ mientras la granulometría también lo hace. De este modo, la tendencia es tener un menor ancho máximo para la IEZ a medida que la cantidad de tamaños aumenta. Aun así, esta influencia o variación es muy leve y no es tan clara.

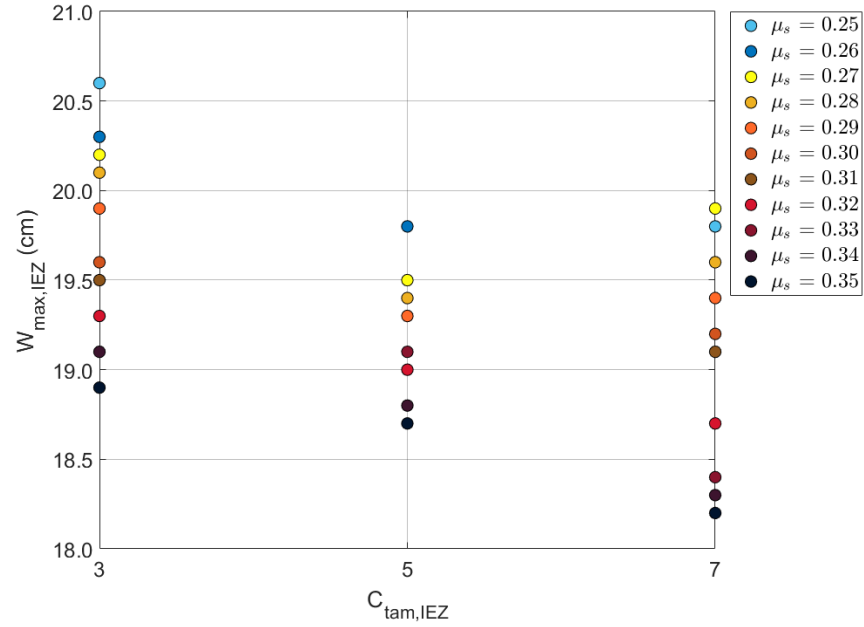


Figura 4.37: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la granulometría del mineral considerando una extracción continua.

En la **figura 4.37** y **4.38** se muestra también como el ancho máximo de la IEZ varía significativamente mientras el coeficiente de fricción también lo hace. A igual que en el caso anterior, nuevamente el ancho máximo de la IEZ es inversamente proporcional a μ_s .

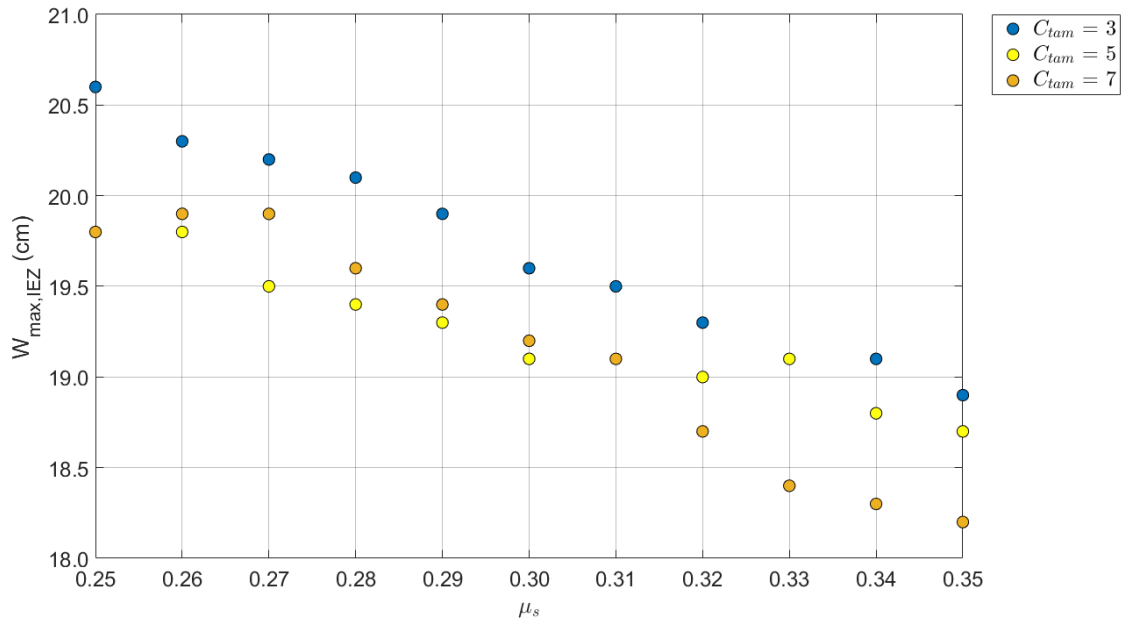


Figura 4.38: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al coeficiente de fricción estático considerando una extracción continua.

Por otro lado, se grafica la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando tanto la cantidad de tamaños (C_{tam}) o granulometría como el coeficiente de fricción

estático. En la **figura 4.39** y **4.40** se nota como aumenta el volumen extraído cuando la cantidad de tamaños disminuye.

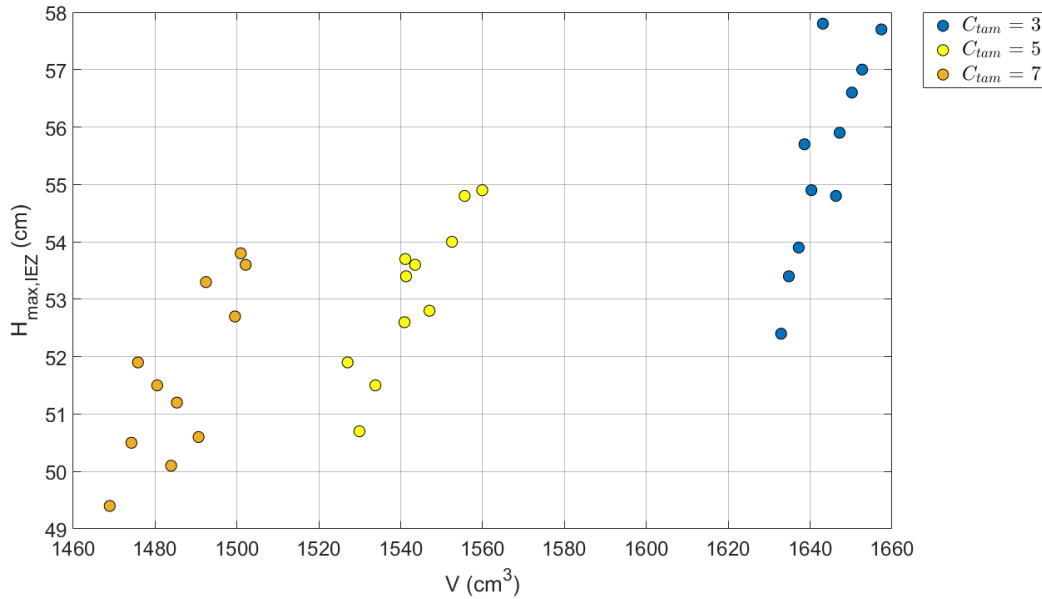


Figura 4.39: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: Cantidad de tamaños.

Ahora bien, en la **figura 4.39** y **4.40** puede observarse lo mismo comentado en el caso anterior, donde el volumen extraído, y por ende, la altura máxima de la IEZ, aumentan cuando μ_s también lo hace. Por ello, cuanto mayor sea el valor del coeficiente de fricción estático dentro del rango estudiado, mayor será el volumen extraído y la altura máxima de la IEZ.

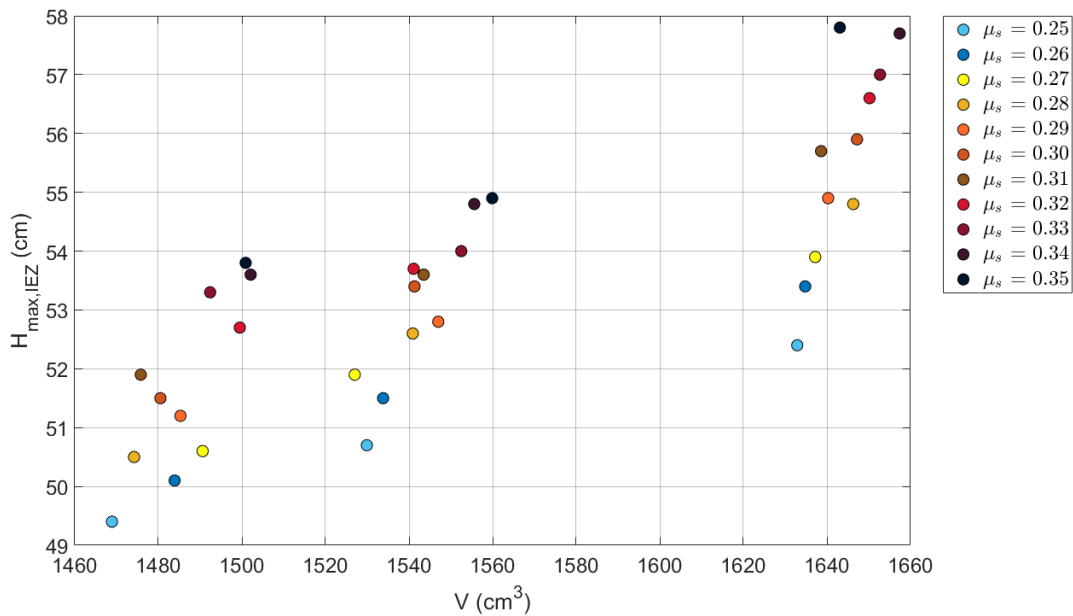


Figura 4.40: Relación de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.

Lo mismo hecho anteriormente se realiza para el ancho máximo de la IEZ. En la **figura 4.41 y 4.42** se grafica el ancho máximo de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando tanto la cantidad de tamaños (C_{tam}) o granulometría como el coeficiente de fricción estático. En la **figura 4.41 y 4.42** se identifica como aumenta minuciosamente el volumen extraído cuando la cantidad de tamaños disminuye.

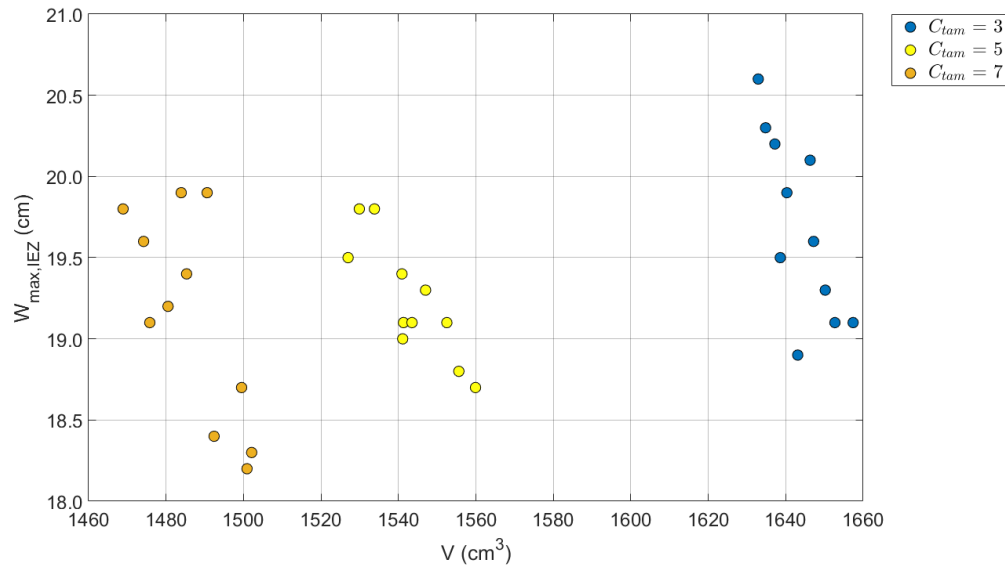


Figura 4.41: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: Cantidad de tamaños.

Además, en la **figura 4.41 y 4.42** se observa lo mismo comentado en el caso anterior, donde el ancho máximo de la IEZ aumenta cuando μ_s disminuye. Ahora bien, el volumen extraído aumenta ligeramente cuando μ_s también lo hace.

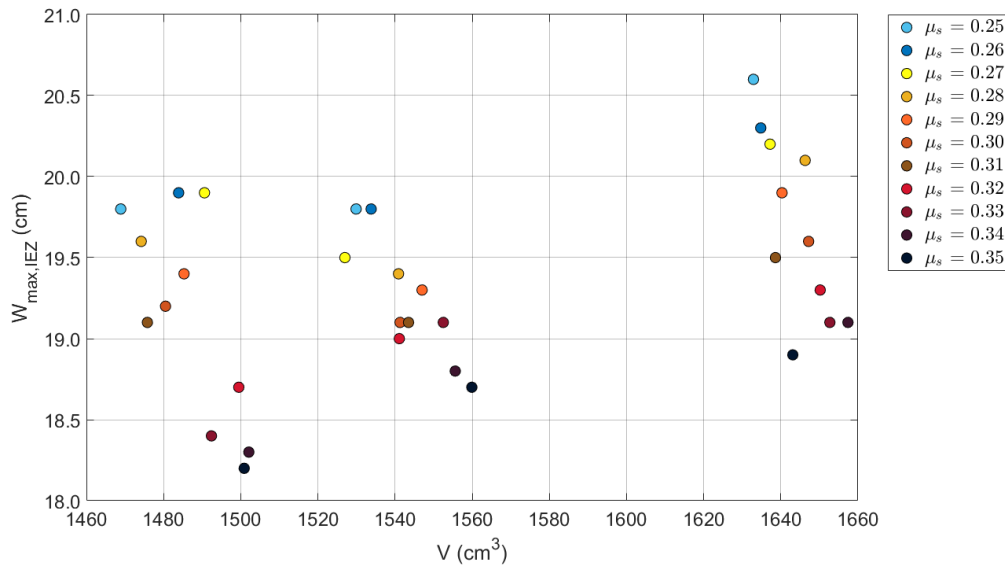


Figura 4.42: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.

En tal sentido, y considerando además la **figura 4.21 y 4.23** y la **figura 4.22 y 4.24** respectivamente, se realiza un par de gráficos que presentan la relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto a la cantidad de tamaños (C_{tam}) o granulometría y al coeficiente de fricción estático considerando una extracción continua. El primero de ellos se identifica en la **figura 4.43**, donde se aprecia como la razón entre el alto y ancho máximo es mayor para valores altos del coeficiente de fricción estático considerando el rango estudiado (también puede notarse mirando la **figura 4.44**). Esto también puede evidenciarse en el caso anterior, específicamente en la **figura 4.29**. Ahora bien, esto sucede teniendo en cuenta que la altura máxima de la IEZ es directamente proporcional a μ_s y el ancho máximo de la IEZ es inversamente proporcional a μ_s . Lo anterior sucede tanto para la **figura 4.29** como para la **figura 4.44**, ya que ese incremento observado se debe a que el aumento en la dimensión vertical es siempre mayor a la dimensión horizontal entre cada simulación. De hecho, esto se puede comprobar observando las **tabla 7-4 y tabla 7-5** ubicadas en anexos. En la **figura 4.44** se observa como el valor para la razón entre el alto y ancho máximo es mayor a medida que la cantidad de tamaños (C_{tam}) disminuye.

En tal sentido, para profundizar aún más en lo dicho anteriormente, se dispone otro par de gráficos ubicados en la sección de anexos. Estos se identifican como la **figura 7.5 y 7.6**, y muestran la relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído considerando tanto la cantidad de tamaños (C_{tam}) o granulometría como el coeficiente de fricción estático respectivamente.

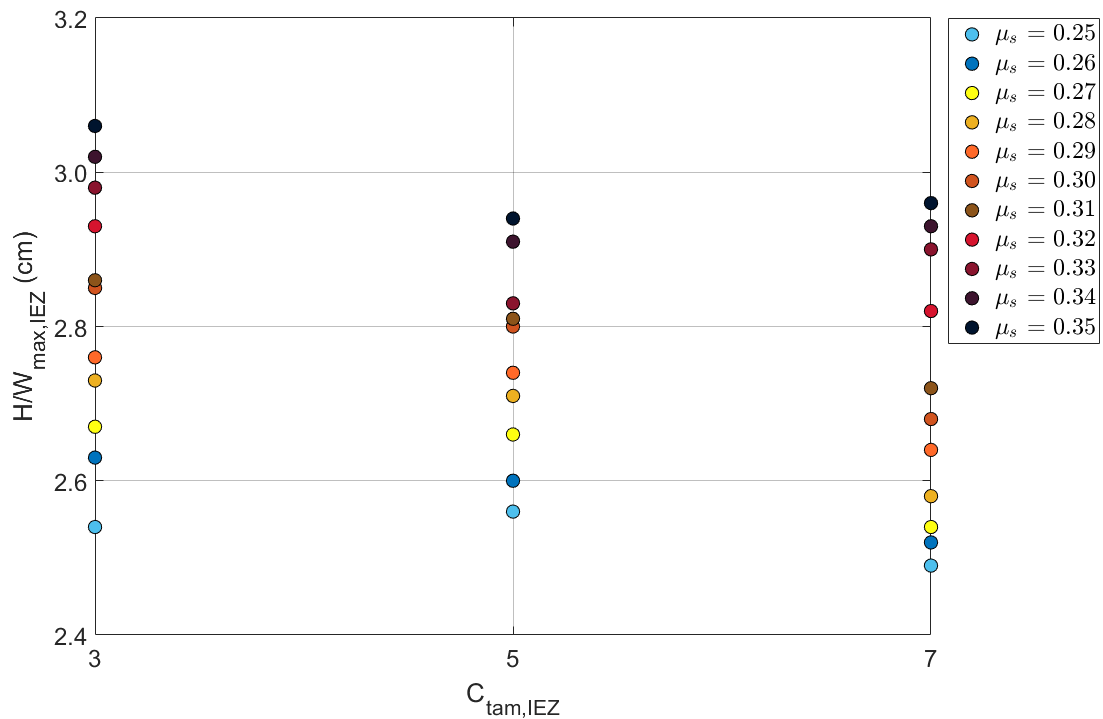


Figura 4.43: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto a la granulometría del mineral considerando una extracción continua.

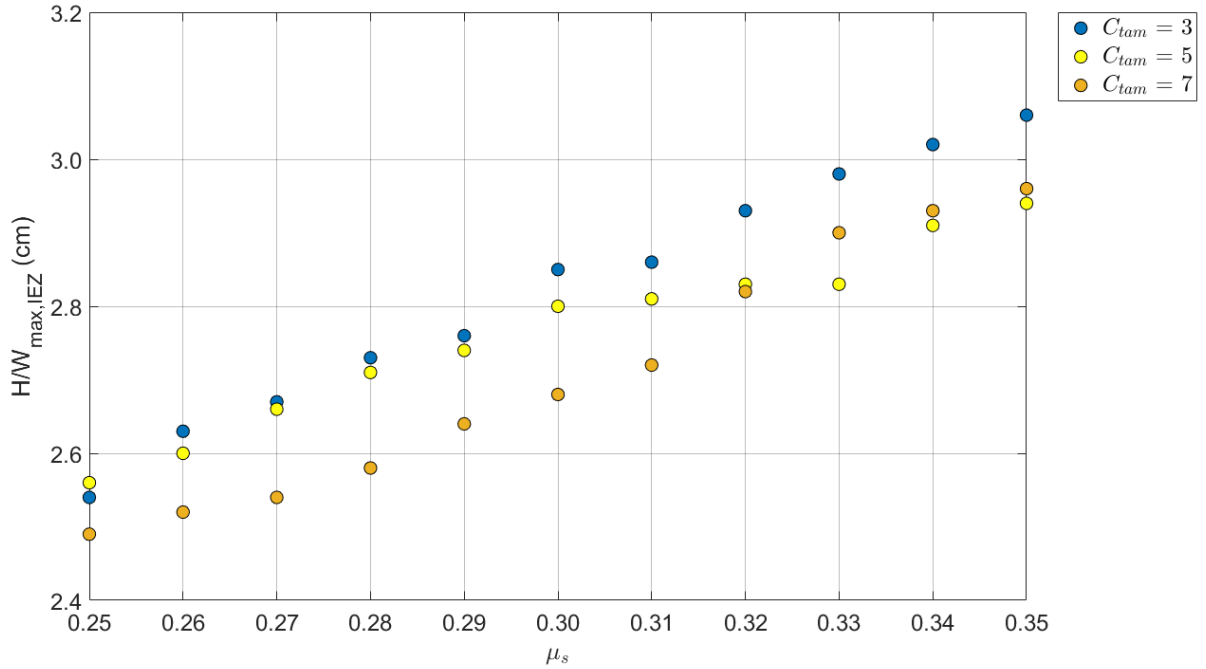


Figura 4.44: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al coeficiente de fricción estático considerando una extracción continua.

Para finalizar, se construyen las dos últimas figuras para este caso. Ellas se presentan en la **figura 4.45** y **4.46**, y relacionan el ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua, tanto para la cantidad de tamaños (C_{tam}) o granulometría como para el coeficiente de fricción estático. En la **figura 4.45** se muestra dicha relación comentada en base a la cantidad de tamaños (C_{tam}), donde se observa como estas dimensiones máximas aumentan ligeramente cuando la cantidad de tamaños disminuye. En la **figura 4.46** es posible evidenciar como dicha relación varía de forma significativa cuando μ_s lo hace. De la **figura 4.36** se puede ver como la altura máxima incrementa cuando μ_s también lo hace, donde por otro lado, desde la **figura 4.38** pasa lo contrario al observar como el ancho máximo aumenta cuando μ_s disminuye.

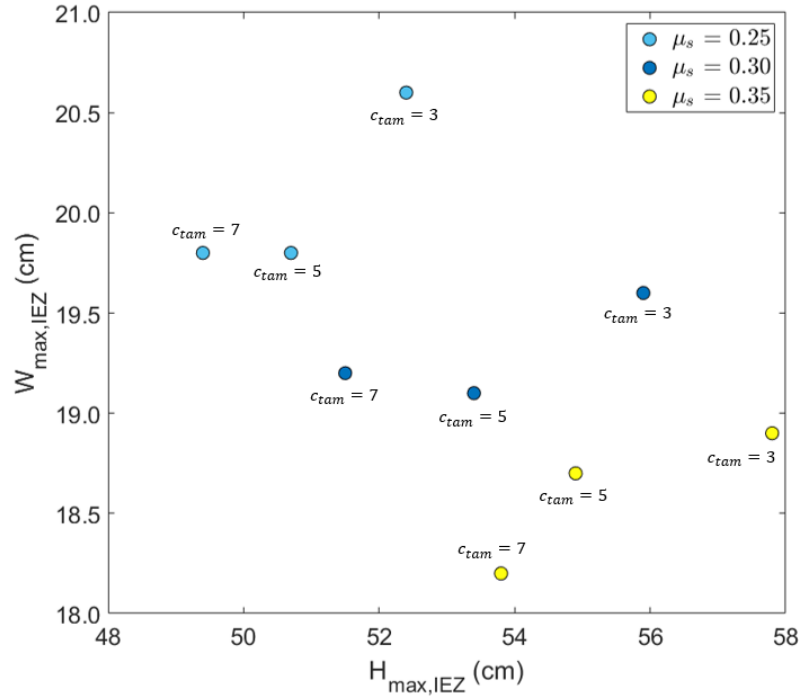


Figura 4.45: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua, caso 2. Leyenda: coeficiente de fricción estático.

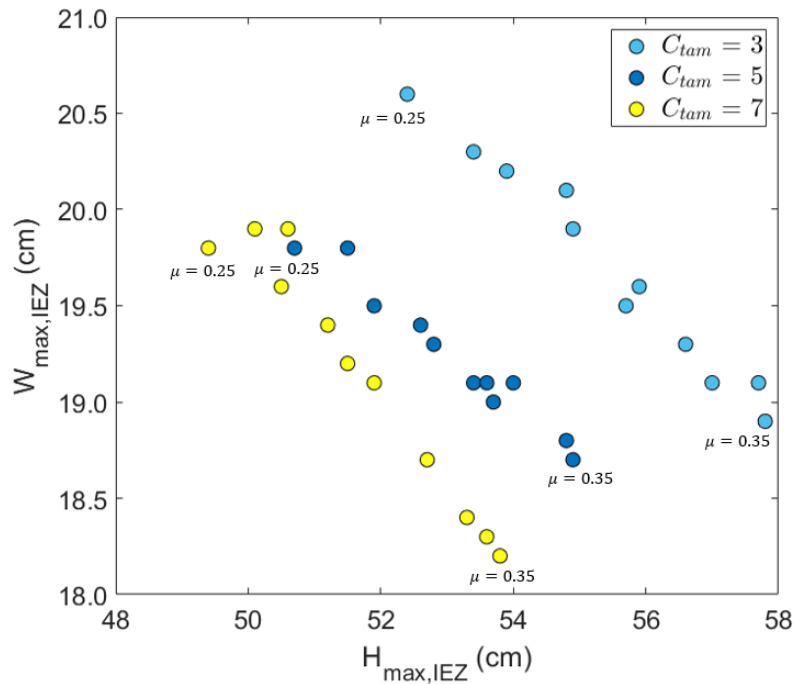


Figura 4.46: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua, caso 2. Leyenda: Cantidad de tamaños.

Además, es posible ver en las **figuras 7.7 y 7.8** ubicadas en la sección de anexos el espectro completo para estas dos variables, considerando la relación entre ambas dimensiones de la IEZ.

Cabe destacar que debe realizarse un estudio mucho más exhaustivo para la cantidad de tamaños (C_{tam}) o granulometría. Esto debido a que los resultados no fueron lo suficiente, tanto por la cantidad de simulaciones como por las tendencias encontradas.

4.4 μ_s en estudios previos

Respecto a los resultados obtenidos en cuanto al coeficiente de fricción estático (μ_s) durante este apartado, se procede a incorporar un set de datos de este estudio a los encontrados por Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45]. Cabe destacar que las simulaciones realizadas por Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45] ocupaban un ángulo de zanja (α) igual a 55° . En este estudio, dicho ángulo (α) es de 45° . Por ello se utiliza un marcador diferente (triángulo) para graficarlo en la **figura 4.47 y 4.48**.

Se procede a trabajar sobre la **figura 2.15** ubicada en la sección de antecedentes. El rango estudiado por estos autores era de extremo a extremo. El caso de la altura de la IEZ considera 8 valores distintos de μ_s entre 0.001 y 0.950. Entonces, se agrega una de las simulaciones continuas realizadas en este estudio. En la **figura 4.47** se añade una simulación con un μ_s de 0.300. Esta figura muestra la altura de la IEZ mientras se extrae el material granular. El set de datos identificado como μ_{sM} recae entre el set de datos de μ_s igual a 0.350 y 0.200. De ese modo, ambos estudios constan de una tendencia clara en cuanto a la altura de la IEZ mientras el material granular es extraído.

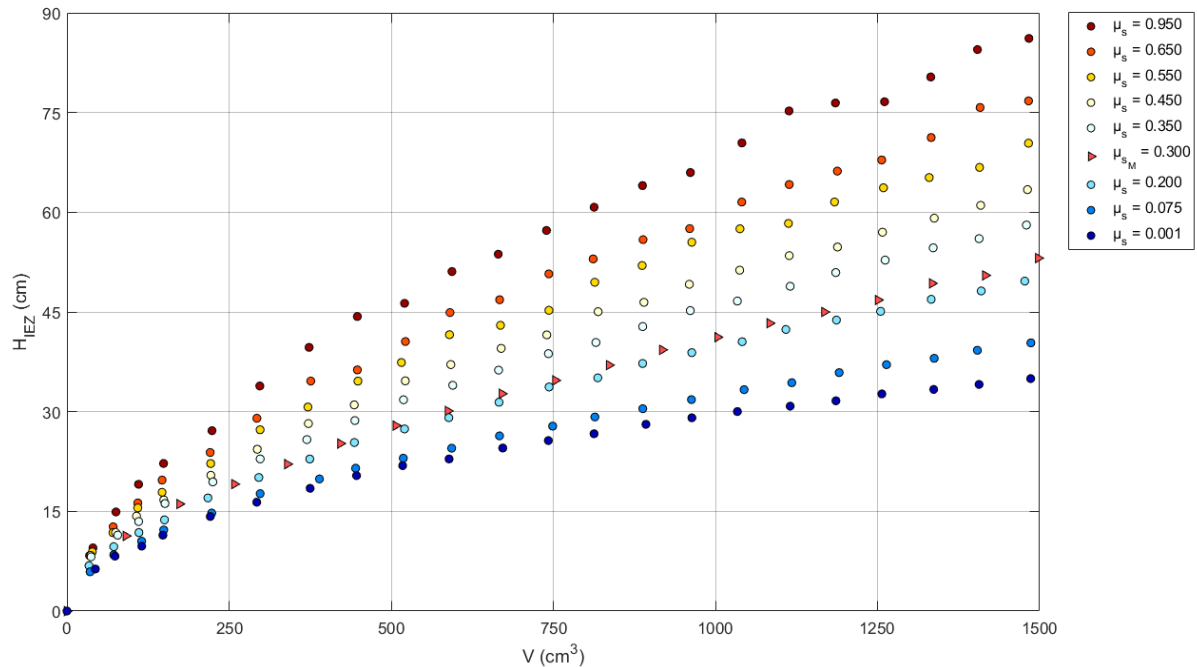


Figura 4.47: Evolución de la altura de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando el coeficiente de fricción estático. Sturla, Vivanco & Palma (2022); Moris & Palma (2023).

Ahora bien, en cuanto al ancho de la IEZ se consideran 7 valores distintos de μ_s entre 0.001 y 0.950. Luego, se agrega nuevamente una de las simulaciones continuas realizadas en este estudio.

En la **figura 4.48** se añade la simulación con un μ_s de 0.300. Esta figura muestra el ancho de la IEZ mientras se extrae el material granular. El set de datos identificado como μ_{sM} es cercano al set de datos encontrado por Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45] para este mismo valor de μ_s . Así, nuevamente ambos estudios constan de una tendencia clara en cuanto al ancho de la IEZ mientras el material granular es extraído.

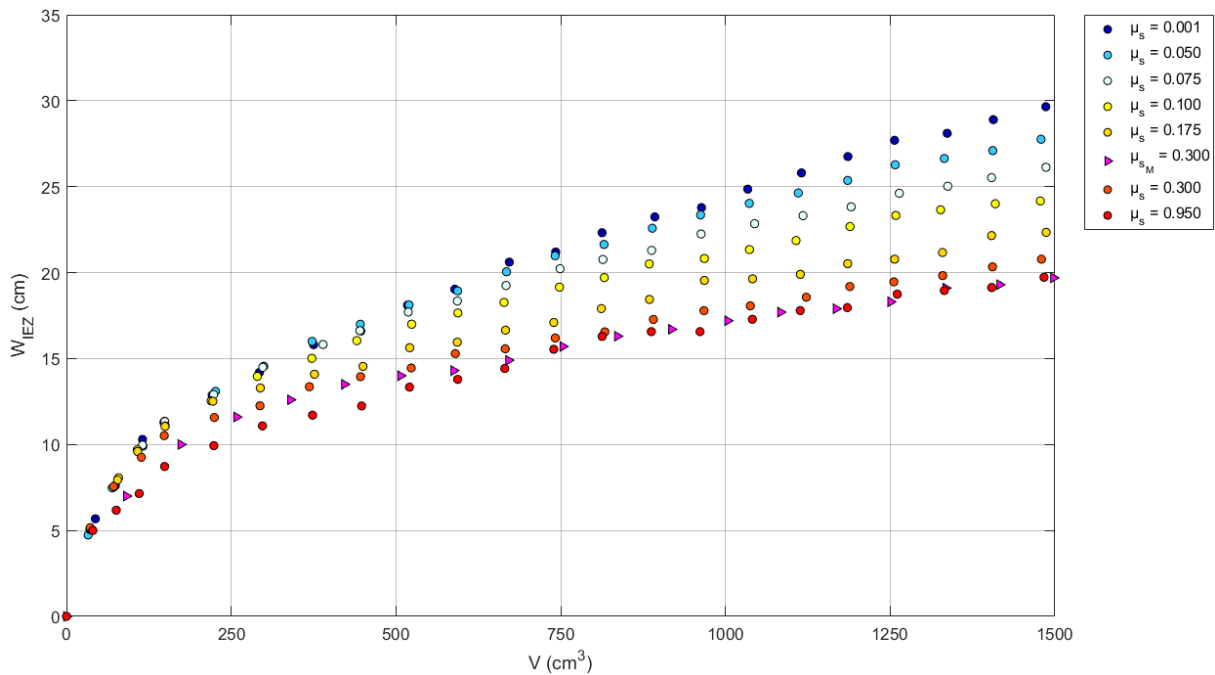


Figura 4.48: Evolución del ancho de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando el coeficiente de fricción estático. Sturla, Vivanco & Palma (2022); Moris & Palma (2023).

4.5 Extracción discreta versus continua

Antes que nada, al observar la **figura 4.50** y **4.52** es posible observar como las dimensiones de la IEZ aumenta continuamente con la masa o volumen extraído.

Por otra parte, se busca encontrar si existe algún cambio significativo en las dimensiones de la IEZ, como también en el volumen extraído, cuando se extrae el material granular de forma discreta o continua. En primer lugar, se muestra en la **figura 4.49** la altura de la IEZ con respecto al volumen de mineral mientras es extraído. Esto considerando una extracción discreta como también continua. Cabe mencionar que la gráfica de ambas extracciones contempla 18 segundos de simulación. La discreta corresponde a una simulación con 2 segundos de extracción y 2 segundos de reposo. Obviamente en la extracción continua fluye el material continuamente por los 18 segundos. Por ello, se puede observar en la **figura 4.49** como para los mismos segundos de simulación, la extracción discreta presenta un menor volumen extraído, en comparación a la extracción continua. Por último, es importante señalar que ambas simulaciones consideradas para este estudio tienen los mismos valores en cuanto a las propiedades del material granular.

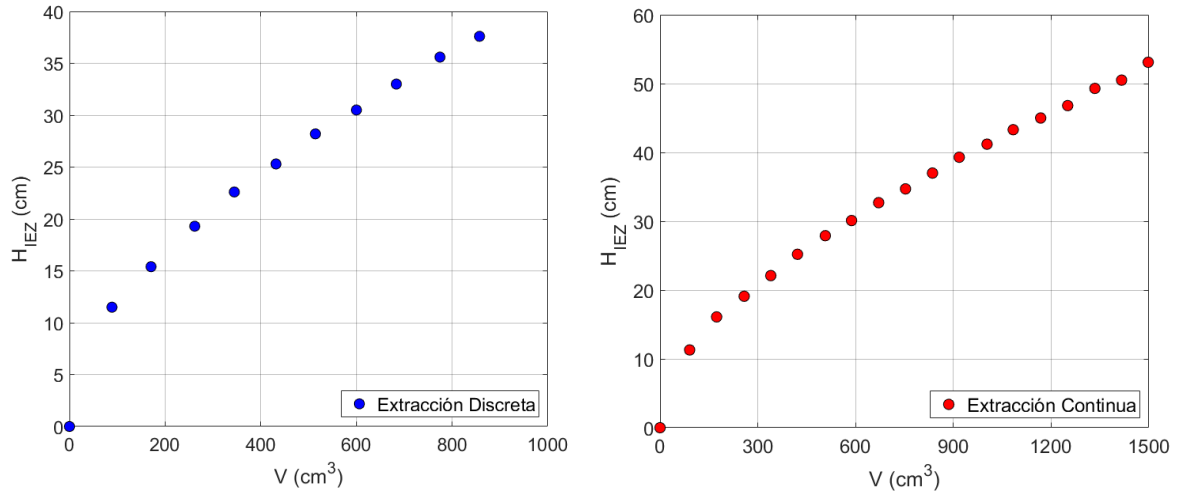


Figura 4.49: Evolución de la altura de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta y continua respectivamente.

En esa misma línea, se unen las dos graficas presentadas en la **figura 4.49** para mostrar visualmente lo dicho anteriormente. Esto se observa en la **figura 4.50**, donde es posible ver que existe el indicio donde el cambio no es significativo entre los dos diferentes tipos de extracción. Sucede que para un mismo volumen de extracción se tiene una misma altura para la IEZ aproximadamente. Considerando lo anterior, es factible ahorrar bastante costo computacional realizando solo extracciones continuas, cuando el enfoque del estudio no sea el tipo de extracción.

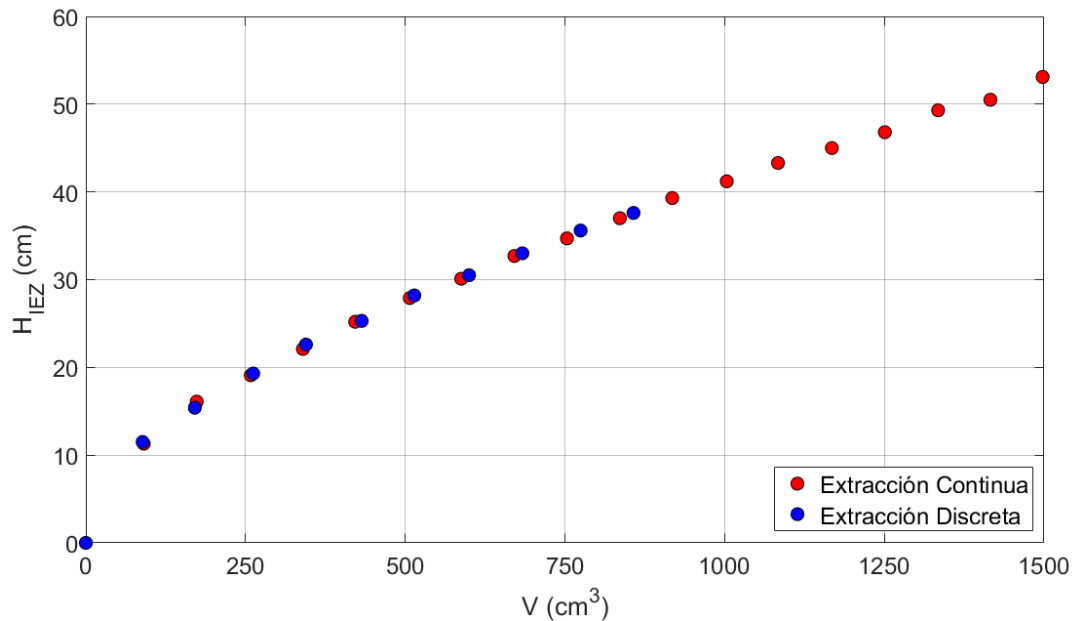


Figura 4.50: Evolución de la altura de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta y continua.

Por otra parte, se muestra en la **figura 4.51** el ancho de la IEZ con respecto al volumen de mineral mientras es extraído. Esto considerando una extracción discreta como también continua. Las

condiciones son las mismas vistas para la **figura 4.49** y **4.50**. Entonces, se observa en la **figura 4.51** como para los mismos segundos de simulación, la extracción discreta presenta un menor volumen extraído, en comparación a la extracción continua.

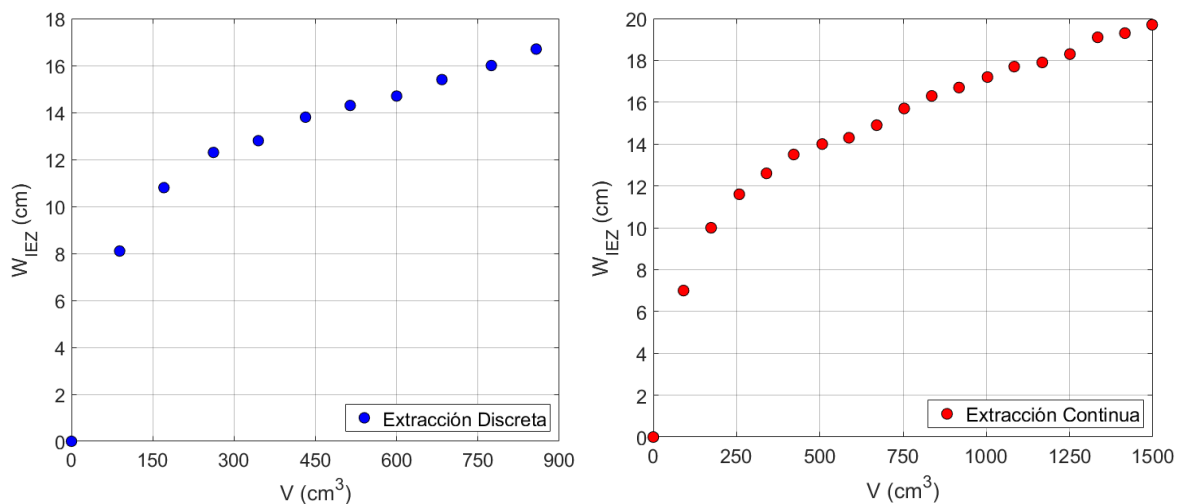


Figura 4.51: Evolución del ancho de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta y continua respectivamente.

De igual manera, se unen las dos graficas presentadas en la **figura 4.51** para visualizar lo dicho anteriormente. Esto se muestra en la **figura 4.52**, donde se puede ver nuevamente que existe un indicio donde el cambio no es significativo entre los dos diferentes tipos de extracción. En este caso, existe una pequeña desviación del ancho de la IEZ para ambas extracciones al comienzo de la evolución de la IEZ. Esto puede deberse al pequeño rango que barre el ancho de la IEZ para estas simulaciones. Aun así, para un mismo volumen de extracción se tiene casi un mismo ancho para la IEZ. Considerando lo anterior, nuevamente es posible ahorrar costo computacional realizando solo extracciones continuas, cuando el enfoque del estudio no sea el tipo de extracción.

Cabe destacar que lo encontrado es solo un indicio, ya que debe comprobarse a futuro si los segundos de reposo de cada simulación son necesarios para que el sistema completo de partículas se encuentre detenido, con una velocidad o movimiento cero. En la minería real, la energía cinética del material se disipa rápido, dejando el sistema estático. Aun así, mediante EDEM™ se puede confirmar lo anterior, realizando un histograma de velocidad vertical al momento de extraer material luego de un reposo en las extracciones discretas.

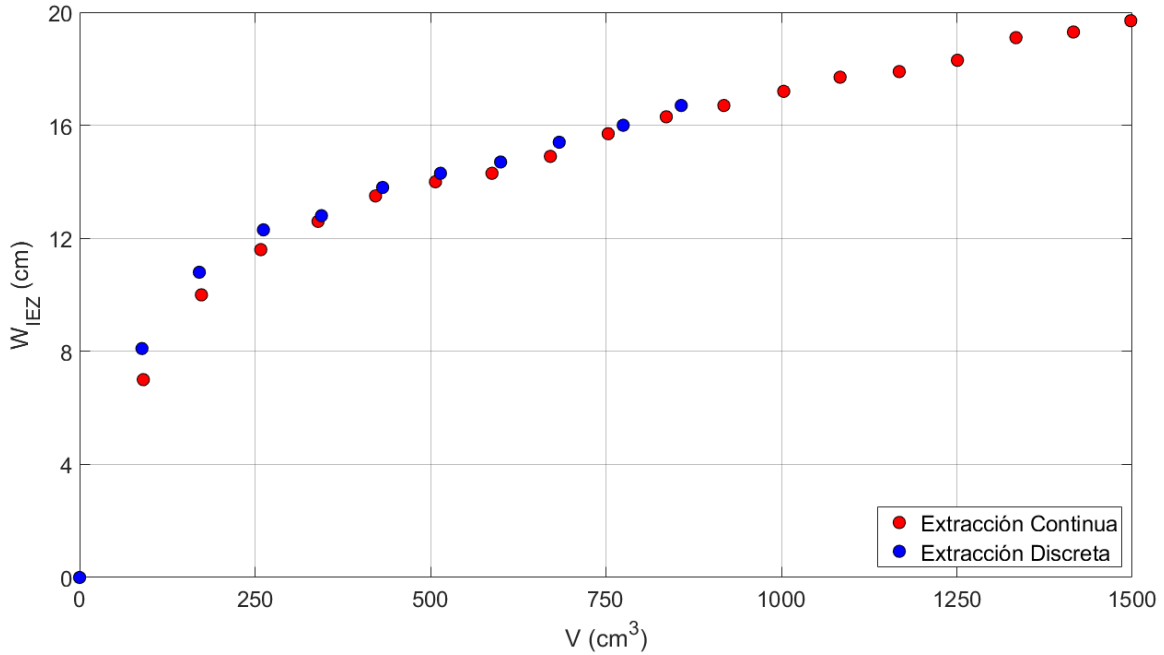


Figura 4.52: Evolución del ancho de la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción discreta y continua. Sturla, Vivanco & Palma (2022); Moris & Palma (2023).

4.6 Modelo Matemático

Para las simulaciones de extracción discreta se genera un modelo matemático propuesto 2D. Este busca predecir la altura y ancho máximo para un determinado volumen extraído. Para la construcción de este modelo se utiliza la herramienta *Cftool* de MATLAB™, donde se ajusta la mejor curva posible sobre los 100 datos correspondientes a esas 100 simulaciones de extracción discreta. En este caso se selecciona tanto la altura máxima como el ancho máximo para el eje y, mientras que para el eje x se considera el volumen extraído. Con esto, la función que mejor ajusta a este set de datos es una de tipo potencia. En ella, la variable independiente [$V \text{ (cm}^3\text{)}$] se eleva a una potencia constante (b) y se multiplica por un coeficiente (a). Tanto a como b corresponden a constantes numéricas. Las ecuaciones por la cual se rige este modelo se presentan a continuación.

$$H_{m\acute{a}x, \text{ IEZ (2D)}} (V) = aV^b \quad (4.1)$$

$$W_{m\acute{a}x, \text{ IEZ (2D)}} (V) = aV^b \quad (4.2)$$

Luego de encontrar la ecuación que mejor ajusta al set de datos, la herramienta *Cftool* entrega los valores de las constantes a y b, además del coeficiente de determinación (R^2) y el error cuadrático medio (RMSE). El R^2 también es conocido como "*bondad de ajuste*", el cual se representa con un valor entre 0.0 y 1.0. Entre más cercano a 1.0 sea, indica un mejor ajuste. Por otro lado, el RMSE es una medida de la diferencia entre los valores observados y los valores predichos en un modelo de regresión. Indica cuánto se desvían los valores predichos del valor real en promedio. Ahora bien, entre más bajo sea el valor del RMSE, mejor será la calidad del modelo propuesto ya que este mínimo valor indica una mejor capacidad predictiva del modelo.

A continuación se presentan los valores obtenidos para las constantes a y b , además de los valores del coeficiente de determinación y el error cuadrático medio. Todo lo anterior con respecto a la altura máxima de la IEZ y el correspondiente volumen extraído.

Tabla 4-1: Valores obtenidos para las constantes (a y b) asociadas al modelo matemático propuesto para la altura máxima de la IEZ.

	a	b
$H_{\max, \text{IEZ}} (2D)$	0.7313	0.5822

Tabla 4-2: Coeficiente de determinación y error cuadrático medio obtenidos para el modelo matemático propuesto para la altura máxima de la IEZ.

	R^2	RMSE
$H_{\max, \text{IEZ}} (2D)$	0.9989	0.2807

Este modelo propuesto para la altura máxima de la IEZ se presenta en la **figura 4.53** y **4.54**, donde se grafica considerando tanto el tiempo de extracción (t_{ext}) como el tiempo de reposo (t_{rep}), respectivamente.

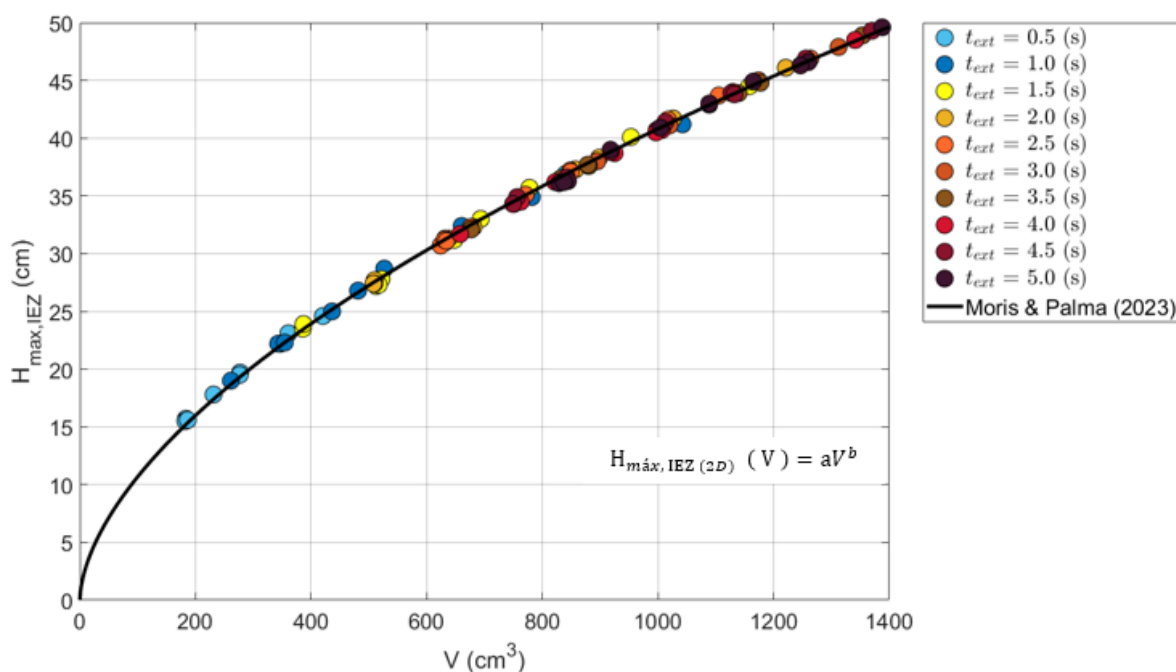


Figura 4.53: Evolución de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído y el modelo ajustado considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de extracción.

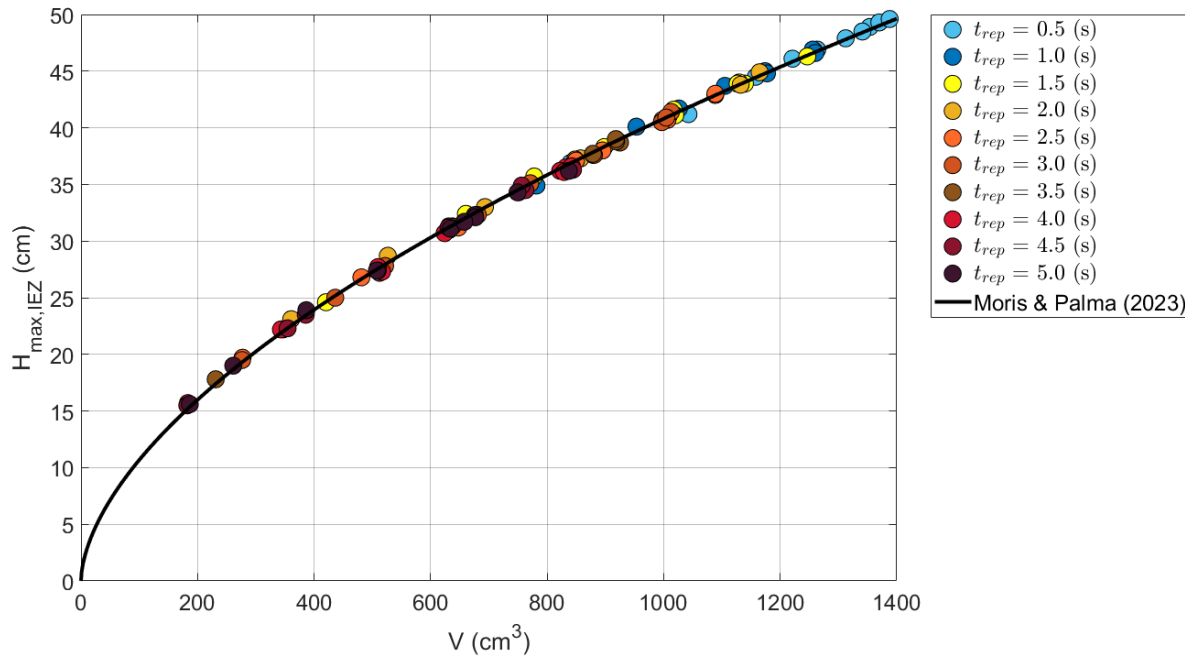


Figura 4.54: Evolución de la altura máxima de la IEZ con respecto al volumen extraído y el modelo ajustado considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.

De la misma forma, se realiza lo planteado anteriormente para el ancho máximo de la IEZ y su correspondiente volumen extraído. Ahora, se disponen los valores obtenidos tanto de las constantes, como del coeficiente de determinación y el error cuadrático medio.

Tabla 4-3: Valores obtenidos para las constantes (a y b) asociadas al modelo matemático propuesto para el ancho máximo de la IEZ.

	a	b
$W_{m\acute{a}x, IEZ (2D)}$	2.2270	0.2919

Tabla 4-4: Coeficiente de determinación y error cuadrático medio obtenidos para el modelo matemático propuesto para el ancho máximo de la IEZ.

	R^2	RMSE
$W_{m\acute{a}x, IEZ (2D)}$	0.9811	0.2769

El modelo propuesto para este caso se visualiza en la **figura 4.55** y **4.56**, donde se grafica considerando tanto el tiempo de extracción (t_{ext}) como el tiempo de reposo (t_{rep}), respectivamente.

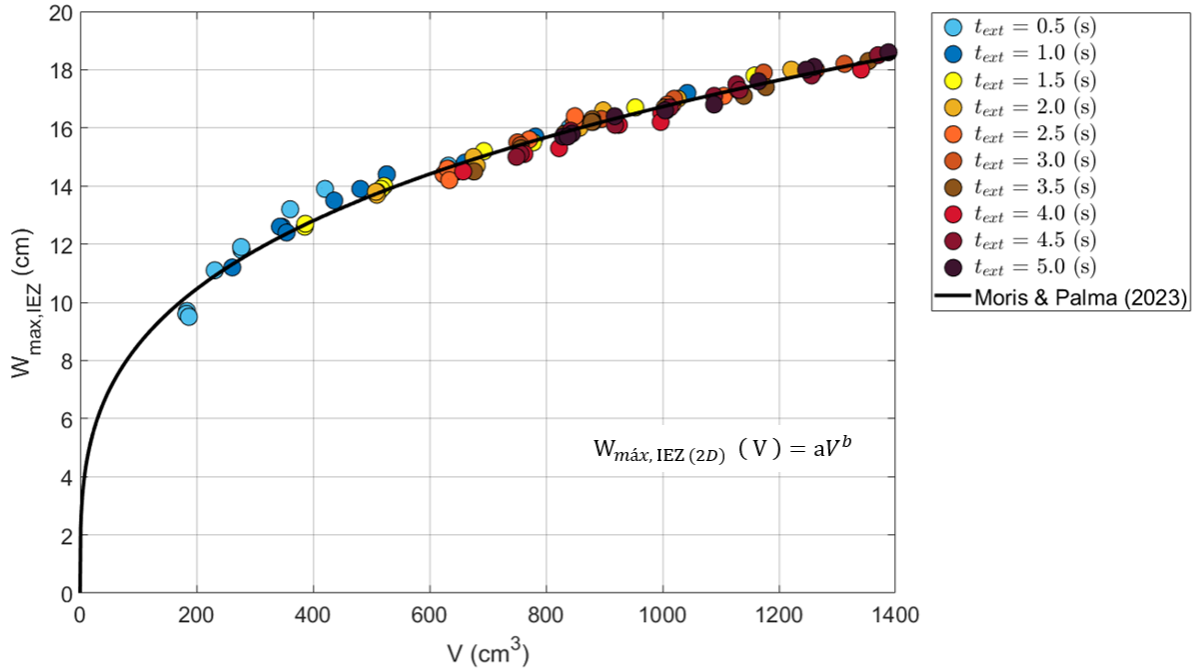


Figura 4.55: Evolución del ancho máximo de la IEZ con respecto al volumen extraído y el modelo ajustado considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de extracción.

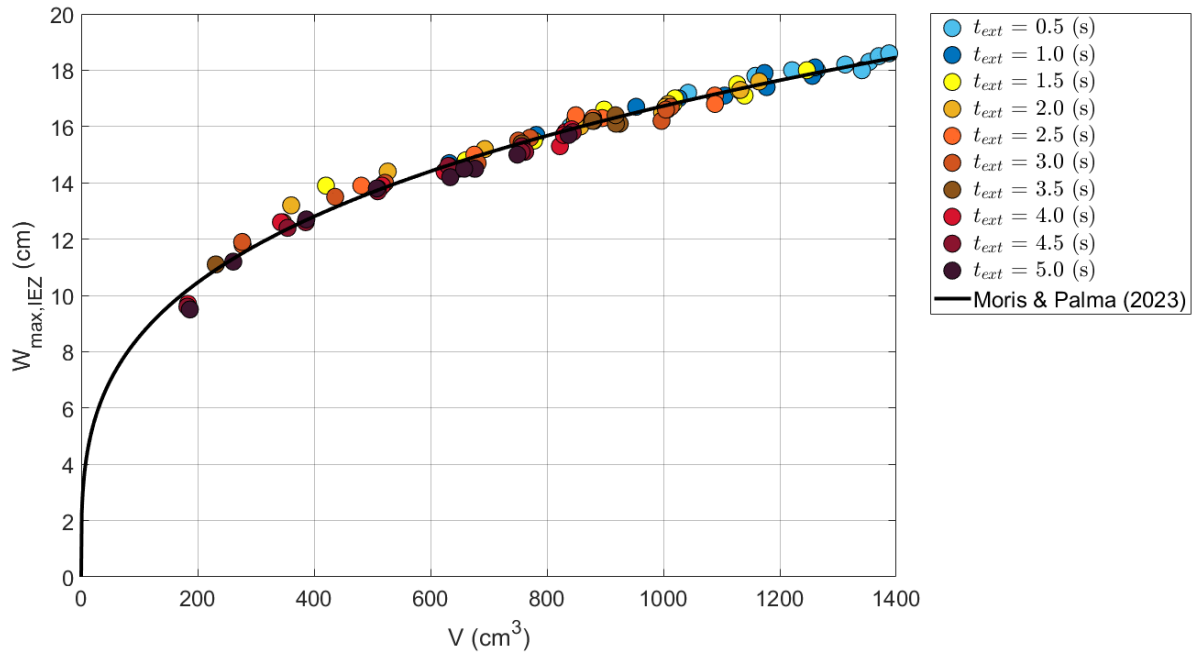


Figura 4.56: Evolución del ancho máximo de la IEZ con respecto al volumen extraído y el modelo ajustado considerando una extracción discreta. Leyenda: tiempo de reposo.

En definitiva, los valores del coeficiente de determinación (R^2) de ambos modelos es aproximadamente 1. Por lo cual, claramente estos ajustan de una muy buena manera al set de datos considerado. Del mismo modo, los valores del error cuadrático medio (RMSE) para ambos

modelos son de carácter bajo, cercanos a 0.2. Nuevamente, esto se traduce en tener una buena capacidad predictiva del modelo propuesto.

4.7 Modelos actuales de H_{IEZ} y W_{IEZ}

Considerando lo mostrado en el **apartado 4.1**, se genera otro par de gráficos comparativos para las dimensiones de la IEZ en función de la masa extraída. A los modelos presentados en la **figura 4.1** y **4.2**, se le agrega el modelo propuesto por Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45] y el set de datos considerado en el **apartado 4.5**. Las ecuaciones por las cuales se rigen estos modelos mencionados se encuentran en las **tablas 7-6** y **7-7** ubicadas en anexos.

Ahora bien, a estos dos gráficos se les realiza un normalizado en ambos ejes. Esto se debe a que una parte de los autores no extraen la misma cantidad de mineral que otros, por ello, se divide cada dimensión en el valor máximo y la masa extraída en el mayor valor obtenido. Entonces, se tiene un valor máximo de 1 tanto para el eje x como y. Finalmente, se muestran estos gráficos comparativos, los cuales se presentan en la **figura 4.57** y **4.58**. Se puede ver como en ambas figuras el set de datos añadidos sigue una tendencia similar a la curva propuesta por el modelo de Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45].

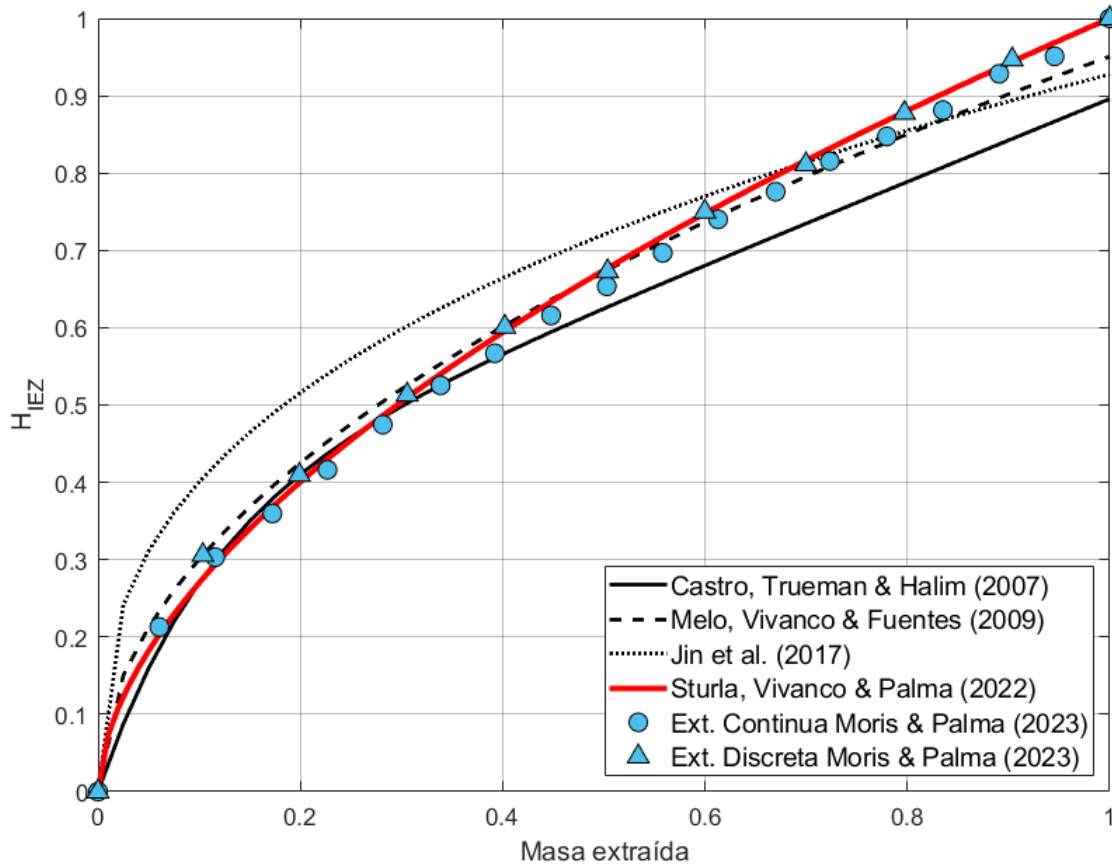


Figura 4.57: Comparación normalizada de modelos de distintos autores para la altura de la IEZ.

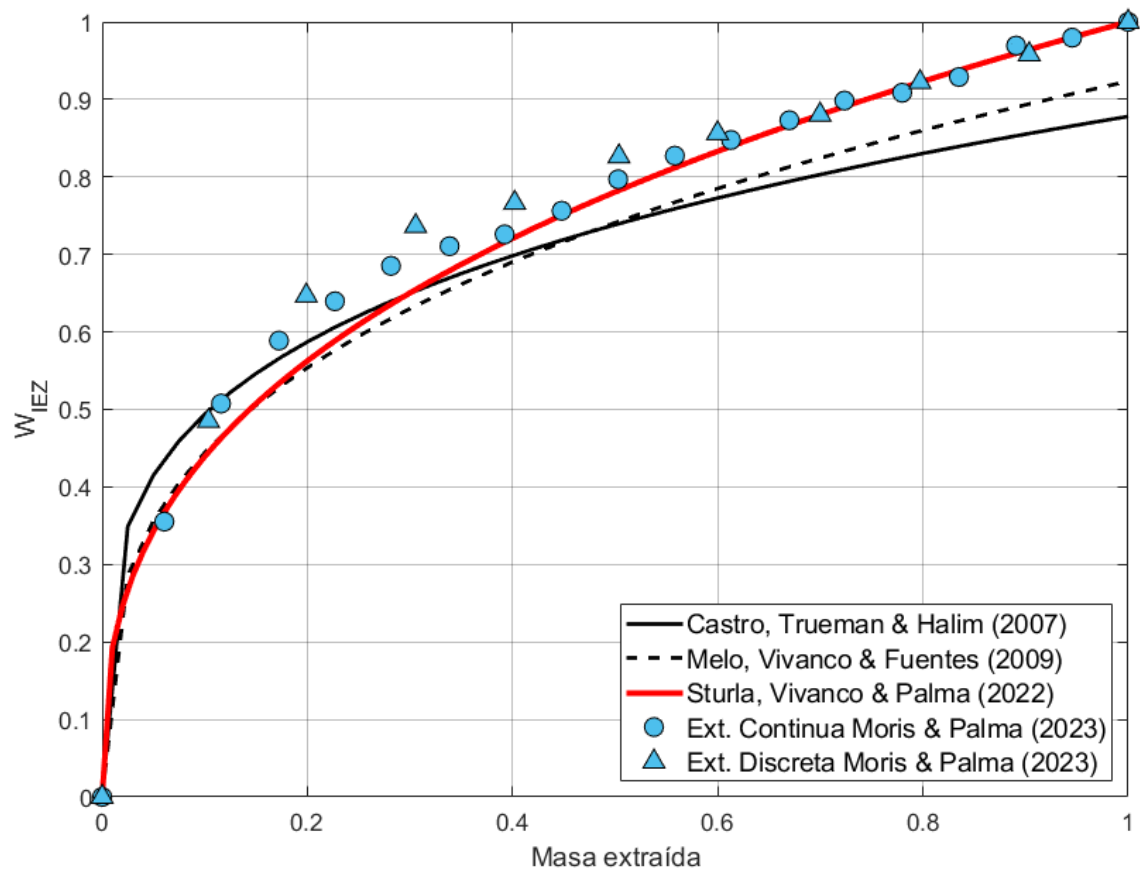


Figura 4.58: Comparación normalizada de modelos de distintos autores para el ancho de la IEZ.

Por último, se crea otro par de gráficos similares a los anteriores. A estos se les agrega un modelo para la extracción continua y extracción discreta. Mas que nada corresponden a modelos primitivos, ya que es necesario una mayor cantidad de simulaciones para comprobar la eficiencia de dichos modelos. Aun así, estos son presentados tanto en la **tabla 7-7** como en la **figura 7.9** y **7.10** ubicadas en anexos.

5. CONCLUSIONES

En el presente estudio se ha realizado el análisis de la IEZ considerando las propiedades del material granular y el tipo de extracción, donde se cumplieron los objetivos propuestos. Si bien, se ha encontrado como las dimensiones de la IEZ dependen fuertemente de la masa o volumen extraído, existen otros parámetros o propiedades del material granular que tienen también una gran influencia sobre estas dimensiones. Todo lo anterior se comprueba utilizando un software de modelamiento de elementos discretos (EDEMTM) y un software que consta de una plataforma de programación y cálculo numérico avanzado (MATLABTM).

Los resultados y análisis realizados muestran primeramente como las dimensiones de la IEZ aumentan continuamente con la masa o volumen extraído. De hecho, por lo mismo también es posible decir y confirmar como las dimensiones máximas de la IEZ también aumentan continuamente con la masa o volumen extraído. Debido a lo anterior, la relación entre el alto y el ancho máximo para la IEZ también lo hace. Por otra parte, es posible concluir como la altura máxima de la IEZ es directamente proporcional a μ_s , al observar que un incremento en el μ_s implica un aumento de la altura máxima de la IEZ. Por el contrario, se concluye que el ancho máximo de la IEZ es inversamente proporcional a μ_s , al ver como el ancho máximo de la IEZ disminuye cuando el μ_s incrementa. De hecho, según lo mencionado anteriormente, un aumento de μ_s significa obtener una IEZ más esbelta. Estos hallazgos fueron encontrados por Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45]. Así mismo, se encontró que la altura máxima de la IEZ es inversamente proporcional a γ . De hecho, esto fue encontrado por Sánchez, Castro & Palma (2019) [65], al observar que a mayor humedad en el material granular se tiene una menor altura en la IEZ. Esto implica también tener un elipsoide de la IEZ menos esbelto a medida que γ aumenta. De igual forma, se pudo observar que el ancho máximo de la IEZ es inversamente proporcional a γ . Lo anterior también fue hallado por Reyes & Palma (2021) [9], al observar que un incremento en el grado de cohesión implica una disminución del ancho de la IEZ. Por otro lado, se encontró en las simulaciones piloto para acotar el rango de γ , como aumentaba la presencia de colgaduras a medida que incrementaba el valor de γ en las simulaciones, específicamente desde energías superficiales mayores a $0.6 \text{ (J/m}^2\text{)}$. También, es posible decir que las dimensiones de la IEZ varían cuando la granulometría también lo hace. La tendencia es tener una menor altura y ancho máximo para la IEZ a medida que la cantidad de tamaños aumenta.

Por otra parte, se obtiene la misma tendencia encontrada por Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45] para la evolución de la altura y ancho de la IEZ con respecto al volumen extraído, considerando μ_s . Además, al estudiar las diferencias entre la extracción discreta y continua, es posible concluir que se ha encontrado un indicio donde el cambio no es significativo entre los dos diferentes tipos de extracción. Sucede que para una misma masa o volumen de extracción se tiene una misma altura y ancho para la IEZ. En vista de esto, es posible ahorrar bastante costo computacional realizando solo extracciones continuas, cuando el enfoque del estudio no sea el tipo de extracción.

Se propone un modelo matemático que predice la altura y ancho máximo a partir del volumen extraído en centímetros cúbicos (cm^3). Los valores del R^2 para ambos modelos son aproximadamente 1. Por otro lado, los valores para el RMSE son de carácter bajo. Debido a lo anterior, es posible afirmar que dicho modelo se ajusta de buena manera, teniendo una buena capacidad predictiva. Así también se realiza una comparativa normalizada para los modelos existentes. Estos buscan predecir la altura y ancho de IEZ en función de la masa extraída. Al agregar un set de datos de extracción continua y discreta, es posible ver como estos siguen una tendencia similar a la observada en el modelo de Sturla, Vivanco & Palma (2022) [45].

A partir de los resultados obtenidos, es factible proponer una calibración de la energía superficial (γ) con el contenido de agua o porcentaje de humedad. Por otro lado, se recomienda para trabajos futuros un modelamiento físico o experimental a escala, con el objetivo de lograr la validación de los resultados obtenidos numéricamente mediante software en este presente estudio.

Por último, se concluye que este trabajo corresponde a un granito de arena para la minería del futuro. Fue posible encontrar que las dimensiones de la IEZ y el comportamiento de los flujos granulares, no dependen tan solo de la masa o volumen extraído, si no también, de las diferentes propiedades del material granular y factores externos como la presencia de agua o humedad. Los modelos de Kvapil (1965) [57] y Laubscher (1994) [15] son utilizados actualmente en faenas mineras. Por ello, es de vital importancia actualizar o rediseñar dichos modelos debido a la antigüedad de estos. Es así como este estudio comprende tanto un pequeño avance, como también una gran simplificación de parámetros que influyen en el comportamiento del flujo granular dentro de la explotación minera subterránea mediante Block Caving.

6. REFERENCIAS

- [1] A. Jin et al. (2016). *A study on the draw laws of caved ore and rock using the discrete element method*, 59-70. Computers and Geotechnics.
- [2] A. Jin et al. (2017). Confirmation of the upside-down drop shape theory in gravity flow and development of a new empirical equation to calculate the shape. 91-98. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences.
- [3] A. Munjiza. (2004). The combined finite-discrete element method. John Wiley and Sons Ltd, London.
- [4] A. Rustan. (2000). Gravity flow of broken rock—what is known and unknown. 557–567. Brisbane: Proceedings of MassMin.
- [5] A. Sato & H. Tang. (2020). Analysis of Ore Pass Hang-Ups in Long Vertical Ore Passes by 3-D DEM. 9(1):1-11. Int J Min Eng Miner Process.
- [6] Altair EDEM. (2023). Altair EDEM Technical Manual. Obtenido de <https://www.altair.com/es/edem/>
- [7] Atlas Copco. (10 de 02 de 2018). Block Caving Mining Method. Black Diamond Drilling Services Australia PTY LTD. Obtenido de <https://www.youtube.com/watch?v=PFVUqy3a6WQ>
- [8] B. Andreotti. (2013). Granular Media: Between fluid and solid. England: Cambridge.
- [9] B. Reyes & S. Palma. (2021). Caracterización de elipsoides de extracción con material cohesivo en block/panel caving utilizando Rocky DEM. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil de Minas, Universidad Técnica Federico Santa María.
- [10] C. Alford. (1978). Computer simulation models of the gravity flow of ore in sublevel caving. University of Melbourne, Melbourne: Master Thesis, Engineering Department of Mining.
- [11] C. Orellana. (2021). Modelación computacional de material granular cohesivo y su aplicación en minería block/panel caving mediante software EDEM. Memoria de título, Universidad Técnica Federico Santa María.
- [12] Consejo minero. (2023). Cifras actualizadas de la minería. Obtenido de <https://consejominero.cl/mineria-en-chile/cifras-actualizadas-de-la-mineria/>
- [13] D. Elmo et al. (2014). An FEM-DEM numerical approach to simulate secondary fragmentation. 1623-1629. Kyoto: Proceedings of the 14th Int. Conference of IACMAG.
- [14] D. Garcés. (2015). Estudio de flujo gravitacional de material hundido por medio de trazadores inteligentes. Santiago de Chile: Universidad de Chile.
- [15] D. Laubscher. (1994). Cave mining - The state of the art. 94(10), 279-293. South African Institute of Mining and Metallurgy.
- [16] D. Peters. (1984). Physical modelling of the draw behaviour of broken rock in caving. 1-48. Q Colo School Mines.
- [17] Departamento de Química Física. (2020). Química Física III - Fenómenos de Superficie. Universidad de Valencia.

- [18] Dimec. (2022). Medios Granulares. Universidad Santiago de Chile. Obtenido de https://www.dimec.usach.cl/solidos_mediosgranulares/
- [19] E. Brown. (2003). Block caving geomechanics. Julius Kruttschnitt Mineral Research Centre, The University of Queensland.
- [20] E. Brown. (2007). *Block caving geomechanics*. Brisbane: The University of Queensland.
- [21] E. Riveros. (2018). Análisis de propiedades geotécnicas de algunas rocas comunes en Chile. Memoria para optar al título de Geólogo, Universidad de Chile.
- [22] F. Melo et al. (2007). Mechanical properties of axons. American Physical Society.
- [23] F. Melo, F. Vivanco & C. Fuentes. (2009). Calculated isolated extracted and movement zones compared to scaled models for block caving. 731-737. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences.
- [24] F. Vivanco et al. (2011). The 3D shape of the loosening zone above multiple draw points in block caving through plasticity model with a dilation front. 406-411. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences.
- [25] G. Chitombo. (2010). Caving mining—16 years after Laubscher’s 1994 paper ‘Cave mining-state of the art’. 45-61. Proceedings of the 2nd International Symposium on Block and Sublevel Caving.
- [26] G. Flores . (2014). Future challenges and why cave mining must change. 23-52, 5-6. Santiago, Chile: 3rd international symposium on block and sublevel caving.
- [27] G. Hubert et al. (2000). Teleoperation at Freeport to reduce wet muck hazards. Brisbane, Australia: Proceedings of Massmin, Australasian Institute of Mining and Metallurgy, Melbourne.
- [28] H. Hamrin. (2001). Underground mining methods and applications. 3-14. Hustrulid, W.A. and Bullock, R.L. (eds.), Underground Mining Method.
- [29] H. Sun. (2019). A Study of Gravity Flow Based on the Upside-Down Drop Shape Theory and Considering Rock Shape and Breakage. Rock Mechanics and Rock Engineering.
- [30] H. Sun. (2020). A Numerical Based Approach to Calculate Ore Dilution Rates Using. Rock Mechanics and Rock Engineering.
- [31] H. Teufelsbauer et al. (2011). DEM simulation of impact force exerted by granular flow on rigid. Acta Geotech 6(3):119–133.
- [32] I. Janelid et al. (1966). Sublevel caving. 53-129. International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences.
- [33] J. Bergmark et al. (1975). The calculation of drift spacing and ring burden for sublevel caving. LKAB Memo # RU 76-16.
- [34] J. Caplan. (2018). Granular Collapses. Thesis, University of Cambridge.
- [35] J. Douglas. (1992). Block caving. En SME Mining Engineering Handbook. Society for Mining, Metallurgy and Exploration, Littleton, CO.
- [36] J. Durán. (2003). Sable, Poudres et Grains. Eyrolles Sciences. 181-185. París, Francia.

- [37] J. Fröström. (1970). Examination of equivalent model material for development and design of sublevel caving. *Master of Science thesis*. Stockholm: Royal Institute of Technology.
- [38] J. Hærvig et al. (2017). Sobre los modelos adhesivos JKR de contacto y rodadura para simulaciones de elementos discretos con rigidez de partículas reducida. 319:472–482. *Powder Technology*.
- [39] J. Morrissey. (2013). Modelado de elementos discretos de pellets de mineral de hierro para incluir los efectos de la humedad y los finos. Tesis doctoral. Edimburgo, Escocia: Universidad de Edimburgo.
- [40] J. Vallejos et al. (2017). Geotechnical characterization of ore related to mudrushes in block caving mining. 117(3), 275–284. *South African Institute of Mining and Metallurgy*.
- [41] K. Basaure. (2014). Caracterización geotécnica de mineral saturado de mina Diablo regimiento, Codelco, División El Teniente. Memoria para optar al título de Ingeniero Civil de Minas, Universidad de Chile.
- [42] K. Johnson et al. (Sept de 1971). Surface Energy and the Contact of Elastic Solids. 324(1558):301–313. *Proceedings of the Royal Society of London. Series A, Mathematical and Physical Sciences*.
- [43] M. Carr et al. (2016). Investigación comparativa sobre el modelado de comportamientos de materiales húmedos y pegajosos con un modelo de cohesión JKR simplificado y un modelo de cohesión de puente líquido en DEM. 40–49. *ICBMH - 12.ª Conferencia internacional sobre almacenamiento, manejo y transporte de materiales a granel*.
- [44] M. Kuchta. (2002). A revised form of the Bergmark-Roos equation for describing the gravity flow of broken rock. 11:349–360. *Miner Resour Eng*.
- [45] M. Sturla, F. Vivanco & S. Palma. (2022). Influencia de parámetros físicos del material granular y del diseño de bateas de extracción en el flujo gravitacional en minería de Block Caving. Santiago, Chile: Universidad Técnica Federico Santa María.
- [46] M. Vivanco & F. Melo. (2013). Characterization of Extracts from Winery by Products with Antifungal Activity against Botrytis cinerea.
- [47] N. Tanaka et al. (2001). Numerical and experimental studies for the impact of projectiles on granular materials. 263–270. *Handbook of Conveying and Handling of Particulate Solids*.
- [48] P. Cundall . (1979). A discrete numerical model for granular assemblies. 47–65. *Geotechnique*.
- [49] P. Yashar. (2013). Mathematical programming for sequence optimization in block cave mining. University of Alberta, Edmonton: Ph.D Thesis.
- [50] R. Castro. (2006). Study of the mechanisms of gravity flow for block. Ph.D Thesis, University of Queensland, Brisbane.
- [51] R. Castro et al. (2009). Development of a gravity flow numerical model for the evaluation of drawpoint spacing for block/panel caving. 109(7):393–400. *J South Afr Inst Min Metall*.
- [52] R. Castro et al. (2016). Experimental quantification of hang-up for block caving applications. (85), 1–9. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*.

- [53] R. Castro et al. (Abril de 2023). The influence of drawbell geometry on hang-ups during ore extraction. *Mining, Metallurgy & Exploration*.
- [54] R. Castro, R. Trueman & A. Halim. (2007). A study of isolated draw zones in block caving mines by means of a large 3D physical model. 860-870. University of Queensland, Australia: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*.
- [55] R. Chen. (1997). *Theory of Thermoluminescence and Related Phenomena*. Singapore: World Scientific.
- [56] R. Gómez et al. (2017). A Comminution Model for Secondary Fragmentation Assessment for Block Caving. 50, 3073-3084. *Rock Mechanics and Rock Engineering*.
- [57] R. Kvapil. (1965). Gravity flow of granular materials in hoppers and bins in mines. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*.
- [58] R. Nedderman & U. Tuzun. (1979). A kinematic model for the flow of granular materials. Department of Chemical Engineering, University of Cambridge, Pembroke Street, Cambridge Gt. Britain.
- [59] R. Nedderman. (2005). *Statics and kinematics of granular materials*, 2nd edn. University Press, Cambridge .
- [60] R. Verdugo et al. (2004). Geotechnical analysis of gravity flow during block caving. 195–200. Santiago: *Proceedings of MassMin*.
- [61] R. Xia et al. (2019). Medida y calibración de los parámetros de elementos discretos del carbón húmedo a granel. 142:84–95. *Medición: Revista de la Confederación Internacional de Medición*.
- [62] S. López. (2016). Estudio experimental de colgaduras, memoria para optar al título de Ingeniero Civil. Universidad de Chile.
- [63] S. Palma et al. (2019). Universal laws for air velocities in airblast events during block caving. *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*.
- [64] T. Heslop. (2000). Block caving–controllable risks and fatal flaws. 280-291. Brisbane: *MassMin Proceedings of Brisbane*.
- [65] V. Sánchez, R. Castro & S. Palma. (2019). Gravity flow characterization of fine granular material for Block Caving. Santiago, Chile: *International Journal of Rock Mechanics and Mining Sciences*.
- [66] W. Hancock. (2013). Gravity flow of rock in caving mines: numerical modeling of isolated, interactive and non-ideal draw. Ph.D Thesis, University of Queensland, Brisbane.
- [67] W. Mullins. (1972). On the Concept of Ideology in Political Science. *The American Political Science Review*. American Political Science Association.

7. ANEXOS

7.1 Anexo A

Ajuste de la distribución granulométrica

La distribución granulométrica utilizada para la extracciones discretas y el caso 1 de las extracciones continuas se obtiene a partir de granulometrías medidas en muestras de la faena perteneciente a Codelco, El Teniente. Ahora bien, estas son escaladas a tamaño laboratorio por Basaure (2014) [41]. Por otra parte, se ajustan dichas granulometrías mediante el método Gates Gaudin Schuhmann (GGS), donde finalmente se ajusta nuevamente en base a las capacidades computacionales desechando valores extremos, escogiendo alternadamente entre el pasante acumulado correspondiente al 80% hasta el 20%. Es así, como la granulometría utilizada se presenta en la **tabla 7-1**.

Tabla 7-1: Distribución granulométrica utilizada por Basaure (2014) y Sturla, Vivanco & Palma (2022).

Malla	Pasante Acumulado (%)				P _a (%)	R GGS (mm)	R Partícula (mm)	Retenido (%)
	Diámetro (mm)	Radio (mm)	Muestra 1	Muestra 2	Muestra 3	Promedio		
75.0	37.5	100.0	100.0	100.0	98.0	99.3	29.6413	100
63.0	31.5	100.0	100.0	100.0	95.9	98.6	24.5410	95
50.0	25.0	98.0	99.5	99.5	93.0	96.8	20.1119	90
37.5	18.75	94.0	97.7	97.7	85.7	92.5	16.2956	85
25.0	12.5	82.8	94.0	94.0	75.5	84.1	13.0361	80
19.0	9.5	74.0	90.0	90.0	69.8	77.9	10.2794	75
12.5	6.25	62.7	81.4	81.4	60.4	68.2	7.9738	70
9.5	4.75	55.0	74.6	74.6	54.2	61.3	6.0699	65
4.75	2.375	39.8	62.8	62.8	44.8	49.1	4.5208	60
2.36	1.18	29.8	52.7	52.7	36.7	39.7	3.2818	55
20	1.00	27.6	50.5	50.5	35.0	37.7	2.3106	50
0.60	0.30	19.1	37.6	37.6	25.7	27.5	1.5678	45
0.425	0.2125	17.4	34.2	34.2	23.5	25.0	1.0162	40
0.300	0.1500	15.9	31.5	31.5	21.6	23.0	0.6216	35
0.150	0.0750	13.5	26.6	26.6	18.0	19.4	0.3524	30
0.075	0.0375	11.5	22.5	22.5	14.8	16.3	0.1801	25
0.001	0.0005	0.0	0.1	0.1	0.2	0.1	0.0792	20
							0.0275	15
							0.0062	10
							0.0005	5
							0.0000	0



Por otro lado, se presenta la granulometría utilizada para estudiar el impacto de ella en las dimensiones de la IEZ. Esta se construye eliminando los valores extremos de la granulometría anterior, comenzando desde la de 7 tamaños. En cuanto al porcentaje correspondiente, se sigue el mismo patrón de la granulometría original, se privilegia tener un mayor porcentaje de partículas finas respecto a las gruesas. Así, se presentan las granulometrías para el caso 2 de las extracciones continuas en la **tabla 7-2**.

Tabla 7-2: Dimensión y distribución de partículas para el estudio de la influencia de la granulometría del mineral.

Distribución Polidispersa (3 tamaños)	Distribución Polidispersa (5 tamaños)	Distribución Polidispersa (7 tamaños)
1.90 (mm) → 35 %	2.15 (mm) → 30 %	2.40 (mm) → 20 %
1.65 (mm) → 25 %	1.90 (mm) → 10 %	2.15 (mm) → 10 %
1.40 (mm) → 45 %	1.65 (mm) → 10 %	1.90 (mm) → 10 %
	1.40 (mm) → 10 %	1.65 (mm) → 10 %
	1.15 (mm) → 40 %	1.40 (mm) → 10 %
		1.15 (mm) → 10 %
		0.90 (mm) → 30 %

7.2 Anexo B

Extracto de recopilación de datos correspondiente a las extracciones discretas

Tabla 7-3: Extracto de la recopilación de datos perteneciente a la extracción discreta.

Tiempo de reposo [s]	Tiempo de extracción [s]	Tiempo de simulación total [s]	Tiempo de simulación considerado [s]	Tiempo efectivo considerado [s]	Masa extraída [kg]	Volumen extraído [cm ³]	Masa no extraída [kg]	Masa total [kg]	Ángulo actual [°]	IEZ h _{máx} [cm]	IEZ w _{máx} [cm]	IEZ h/w máx
0.5	0.5	20	18.5	18	2.268830	840.3	34.1508	36.42	90	36.9	16.0	2.31
	1.0	21	18.5	18	2.814860	1042.5	33.6048	36.42	90	41.2	17.2	2.40
	1.5	21	18.5	18	3.126720	1158.0	33.2929	36.42	90	44.5	17.8	2.50
	2.0	21	18.5	18	3.296580	1221.0	33.1235	36.42	90	46.1	18.0	2.56
	2.5	21	18.5	18	3.411500	1263.5	33.0082	36.42	90	46.9	18.0	2.61
	3.0	22	18.5	18	3.543220	1312.3	32.8773	36.42	90	47.9	18.2	2.63
	3.5	21	18.5	18	3.654750	1353.6	32.7657	36.42	90	48.9	18.3	2.67
	4.0	19	18.5	18	3.620750	1341.0	32.7989	36.42	90	48.5	18.0	2.69
	4.5	21	18.5	18	3.699080	1370.0	32.7214	36.42	90	49.3	18.5	2.66
	5.0	23	18.5	18	3.747040	1387.8	32.6728	36.42	90	49.6	18.6	2.67
	0.5	21	18.5	18	1.707080	632.3	34.7128	36.42	90	31.0	14.7	2.11
	1.0	22	18.5	18	2.110620	781.7	34.3090	36.42	90	34.9	15.7	2.22
	1.5	21.5	18.5	18	2.573550	953.2	33.8460	36.42	90	40.1	16.7	2.40
	2.0	22	18.5	18	2.770730	1026.2	33.6489	36.42	90	41.7	17.0	2.45
	2.5	21.5	18.5	18	2.983750	1105.1	33.4366	36.42	90	43.7	17.1	2.56
1.0	3.0	21.5	18.5	18	3.169030	1173.7	33.2509	36.42	90	45.0	17.9	2.51
	3.5	19.5	18.5	18	3.178660	1177.3	33.2410	36.42	90	44.8	17.4	2.57
	4.0	21.5	18.5	18	3.396990	1258.1	33.0228	36.42	90	46.8	17.9	2.61
	4.5	21	18.5	18	3.390750	1255.8	33.0290	36.42	90	46.9	17.8	2.63
	5.0	19.5	18.5	18	3.402870	1260.3	33.0168	36.42	90	46.6	18.1	2.57

Extracto de recopilación de datos correspondiente a la extracción continuas (caso 1)

Tabla 7-4: Extracto de la recopilación de datos perteneciente a la extracción continua, energía superficial versus coeficiente de fricción.

Energía superficial [J/m ²]	Coefficiente de fricción	Tiempo de simulación total [s]	Tiempo de simulación considerado [s]	Tiempo efectivo considerado [s]	Masa extraída [kg]	Volumen extraído [cm ³]	Masa no extraída [kg]	Masa total[kg]	Ángulo actual [°]	IEZ hmáx [cm]	IEZ w máx [cm]	IEZ h/w máx
0.0	0.25	20	18.5	18	3.966010	1468.9	32.4539	36.42	90	49.4	19.8	2.49
	0.26	20	18.5	18	4.006560	1483.9	32.4138	36.42	90	50.1	19.9	2.52
	0.27	20	18.5	18	4.024660	1490.6	32.3954	36.42	90	50.6	19.9	2.54
	0.28	20	18.5	18	3.980470	1474.2	32.4395	36.42	90	50.5	19.6	2.58
	0.29	20	18.5	18	4.010330	1485.3	32.4098	36.42	90	51.2	19.4	2.64
	0.30	20	18.5	18	3.997380	1480.5	32.4227	36.42	90	51.5	19.2	2.68
	0.31	20	18.5	18	3.984640	1475.8	32.4352	36.42	90	51.9	19.1	2.72
	0.32	20	18.5	18	4.048650	1499.5	32.3712	36.42	90	52.7	18.7	2.82
	0.33	20	18.5	18	4.029490	1492.4	32.3904	36.42	90	53.3	18.4	2.90
	0.34	20	18.5	18	4.055780	1502.1	32.3640	36.42	90	53.6	18.3	2.93
	0.35	20	18.5	18	4.052320	1500.9	32.3680	36.42	90	53.8	18.2	2.96
0.1	0.25	20	18.5	18	3.156480	1169.1	33.2632	36.42	90	46.4	18.5	2.51
	0.26	20	18.5	18	3.207900	1188.1	33.2121	36.42	90	46.8	18.6	2.52
	0.27	20	18.5	18	3.220260	1192.7	33.2001	36.42	90	47.4	18.8	2.52
	0.28	20	18.5	18	3.210540	1189.1	33.2097	36.42	90	47.7	18.8	2.54
	0.29	20	18.5	18	3.220530	1192.8	33.1994	36.42	90	47.8	18.3	2.61
	0.30	20	18.5	18	3.281830	1215.5	33.1379	36.42	90	48.6	18.1	2.69
	0.31	20	18.5	18	3.287430	1217.6	33.1327	36.42	90	49.6	18.0	2.76
	0.32	20	18.5	18	3.303890	1223.7	33.1162	36.42	90	49.8	17.9	2.78
	0.33	20	18.5	18	3.294100	1220.0	33.1263	36.42	90	50.3	17.7	2.84
	0.34	20	18.5	18	3.326000	1231.9	33.0940	36.42	90	51.1	17.5	2.92
	0.35	20	18.5	18	3.314880	1227.7	33.1052	36.42	90	51.3	17.3	2.97

Extracto de recopilación de datos correspondiente a la extracción continuas (caso 2)

Tabla 7-5: Extracto de la recopilación de datos perteneciente a la extracción continua, granulometría versus coeficiente de fricción estático.

Granulometría	Coefficiente de fricción	Tiempo de simulación total [s]	Tiempo de simulación considerado [s]	Tiempo efectivo considerado [s]	Masa extraída [kg]	Volumen extraído [cm³]	Masa no extraída [kg]	Masa total[kg]	Ángulo actual [°]	IEZ hmáx [cm]	IEZ wmáx [cm]	IEZ h/w máx
3	0.25	20	18.5	18	4.408730	1632.9	32.0115	36.42	90	52.4	20.6	2.54
	0.26	20	18.5	18	4.414090	1634.8	32.0063	36.42	90	53.4	20.3	2.63
	0.27	20	18.5	18	4.420370	1637.2	32.0000	36.42	90	53.9	20.2	2.67
	0.28	20	18.5	18	4.445010	1646.3	31.9755	36.42	90	54.8	20.1	2.73
	0.29	20	18.5	18	4.428810	1640.3	31.9917	36.42	90	54.9	19.9	2.76
	0.30	20	18.5	18	4.447500	1647.2	31.9727	36.42	90	55.9	19.6	2.85
	0.31	20	18.5	18	4.424200	1638.6	31.9960	36.42	90	55.7	19.5	2.86
	0.32	20	18.5	18	4.455530	1650.2	31.9644	36.42	90	56.6	19.3	2.93
	0.33	20	18.5	18	4.462230	1652.7	31.9580	36.42	90	57.0	19.1	2.98
	0.34	20	18.5	18	4.474930	1657.4	31.9455	36.42	90	57.7	19.1	3.02
	0.35	20	18.5	18	4.436260	1643.1	31.9839	36.42	90	57.8	18.9	3.06
	0.25	20	18.5	18	4.130700	1529.9	32.2892	36.42	90	50.7	19.8	2.56
	0.26	20	18.5	18	4.141170	1533.8	32.2791	36.42	90	51.5	19.8	2.60
	0.27	20	18.5	18	4.122870	1527.0	32.2972	36.42	90	51.9	19.5	2.66
	0.28	20	18.5	18	4.160500	1540.9	32.2601	36.42	90	52.6	19.4	2.71
5	0.29	20	18.5	18	4.177030	1547.0	32.2430	36.42	90	52.8	19.3	2.74
	0.30	20	18.5	18	4.161530	1541.3	32.2587	36.42	90	53.4	19.1	2.80
	0.31	20	18.5	18	4.167490	1543.5	32.2526	36.42	90	53.6	19.1	2.81
	0.32	20	18.5	18	4.161060	1541.1	32.2591	36.42	90	53.7	19.0	2.83
	0.33	20	18.5	18	4.191760	1552.5	32.2283	36.42	90	54.0	19.1	2.83
	0.34	20	18.5	18	4.200100	1555.6	32.2199	36.42	90	54.8	18.8	2.91
	0.35	20	18.5	18	4.211800	1559.9	32.2082	36.42	90	54.9	18.7	2.94

7.3 Anexo C

Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído para μ_s y γ .

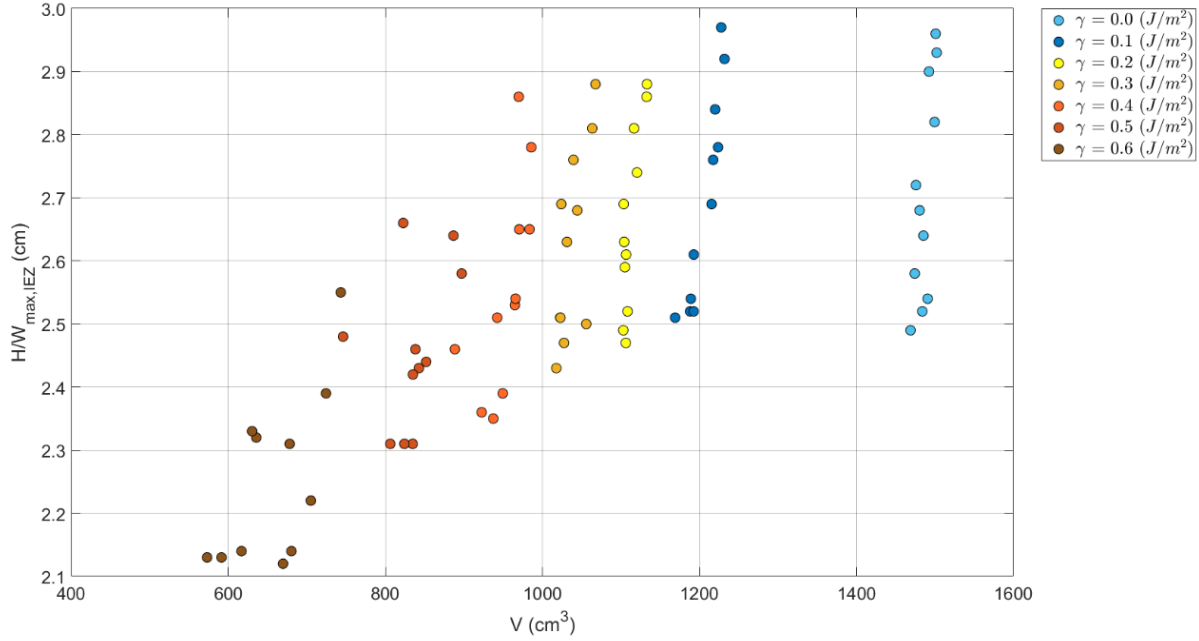


Figura 7.1: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: energía superficial.

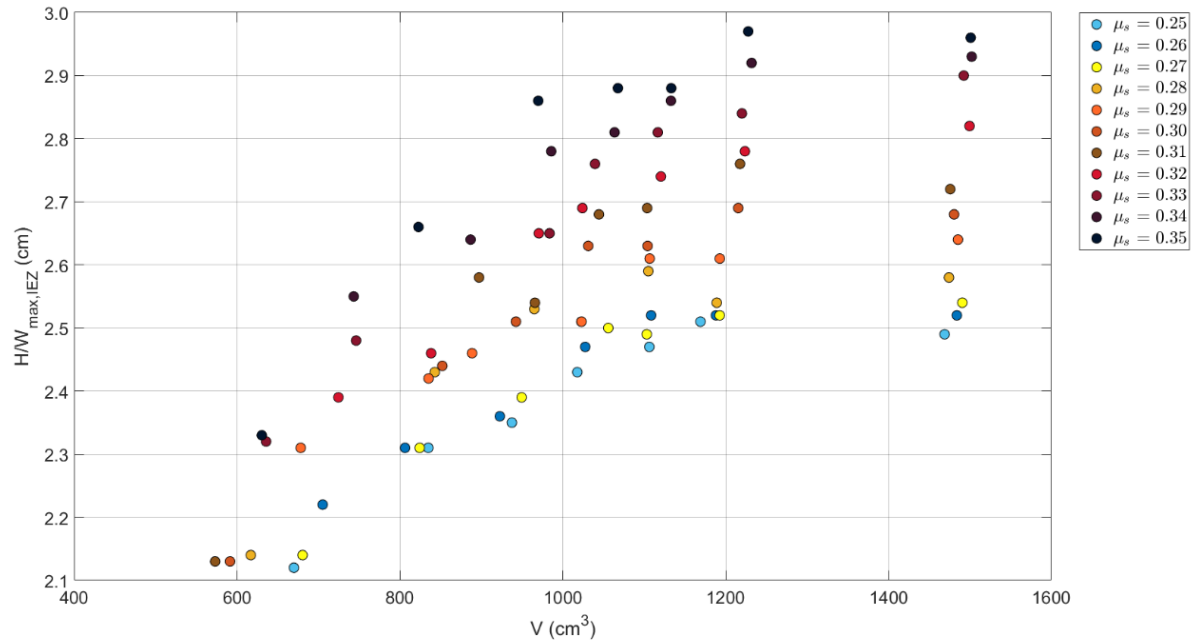


Figura 7.2: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.

Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando μ_s y γ .

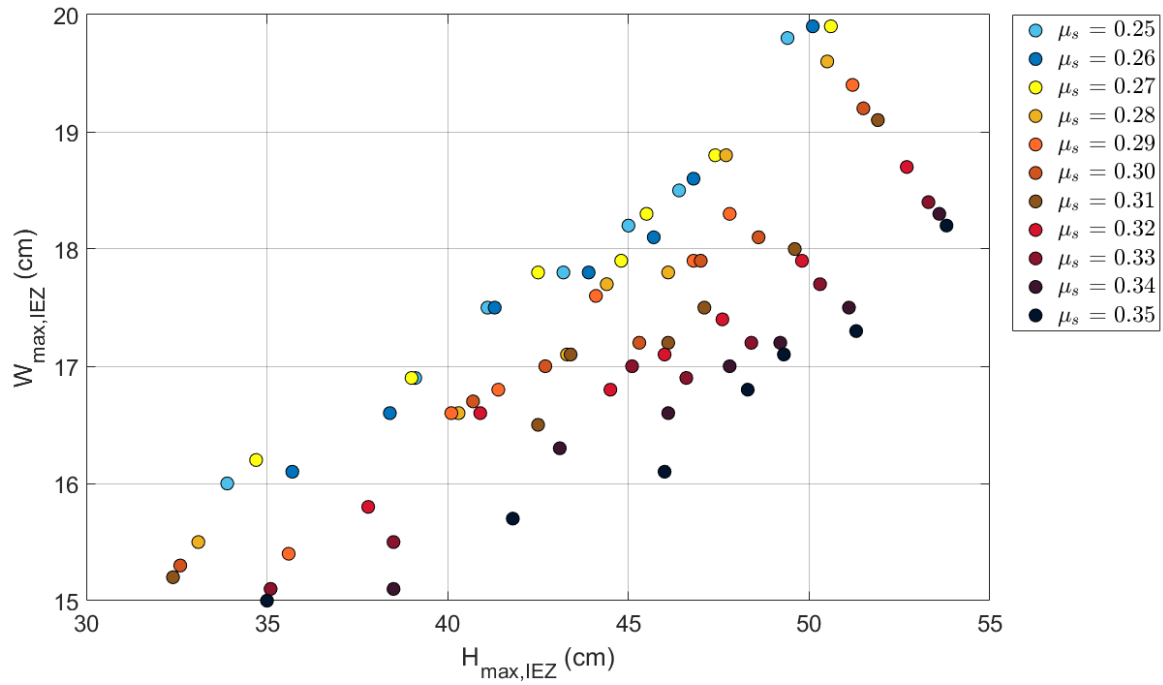


Figura 7.3: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático completo.

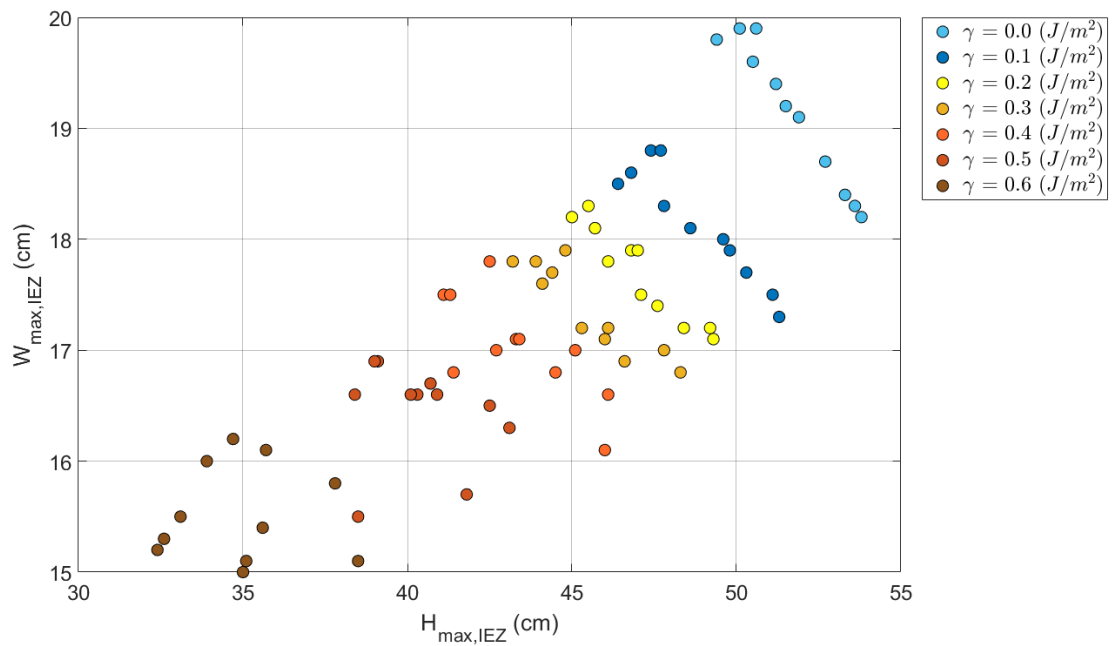


Figura 7.4: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.

Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído para μ_s y la granulometría del material.

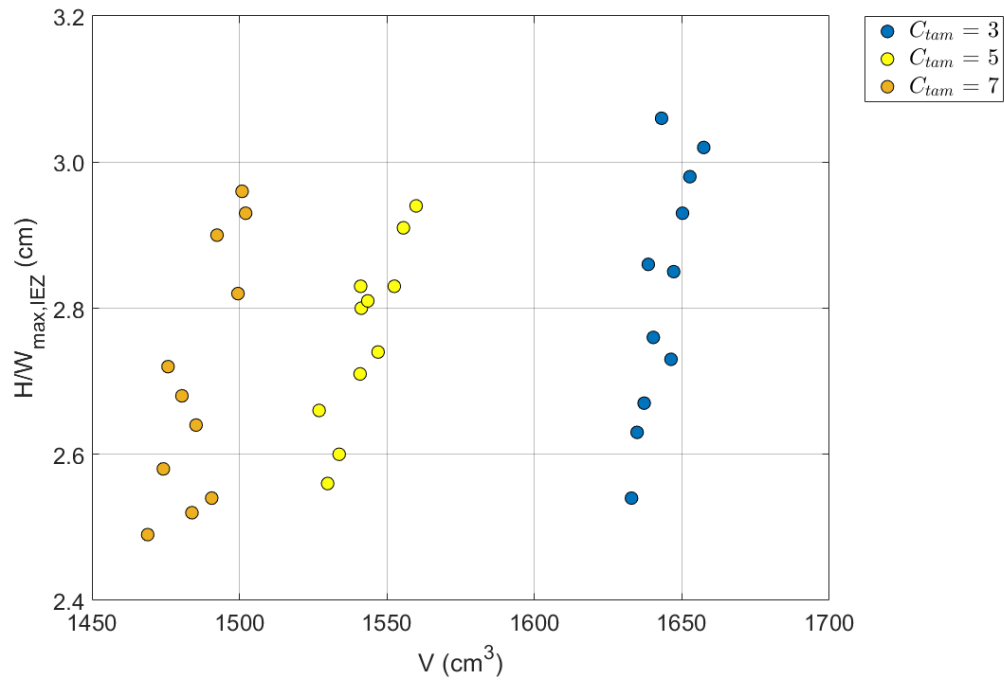


Figura 7.5: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: Cantidad de tamaños.

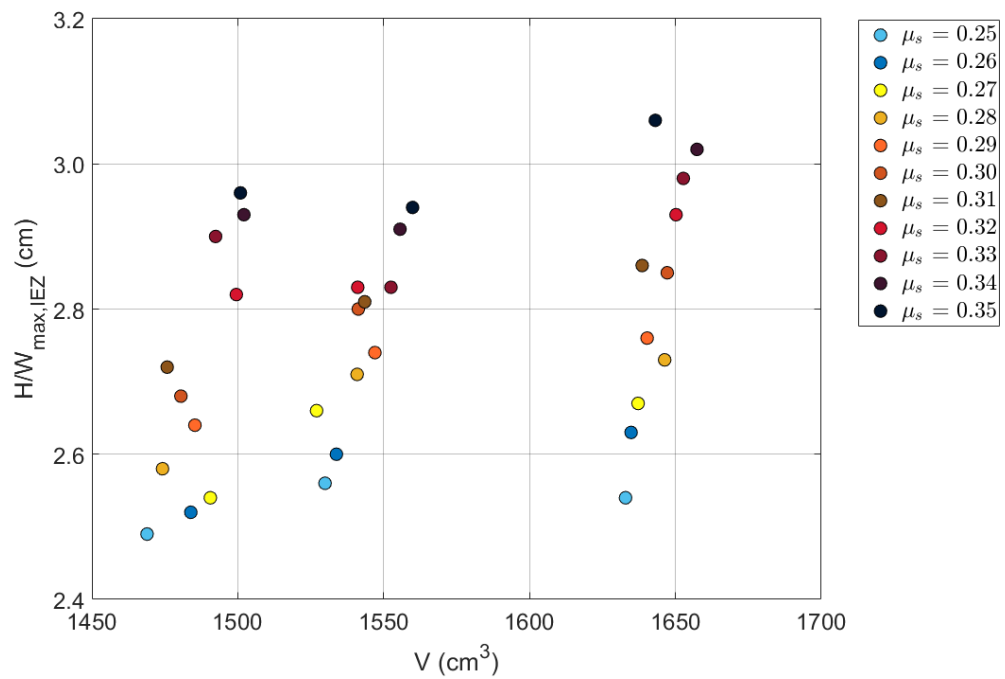


Figura 7.6: Relación de la razón entre el alto y ancho máximo para la IEZ con respecto al volumen extraído considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático.

Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando μ_s y la granulometría del material.

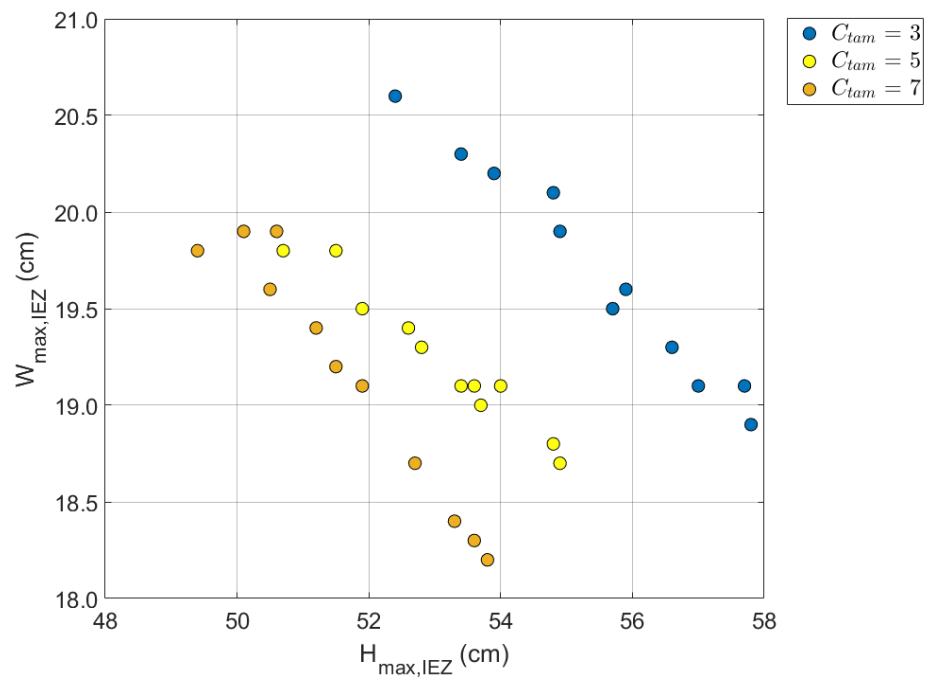


Figura 7.7: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua. Leyenda: Cantidad de tamaños completos.

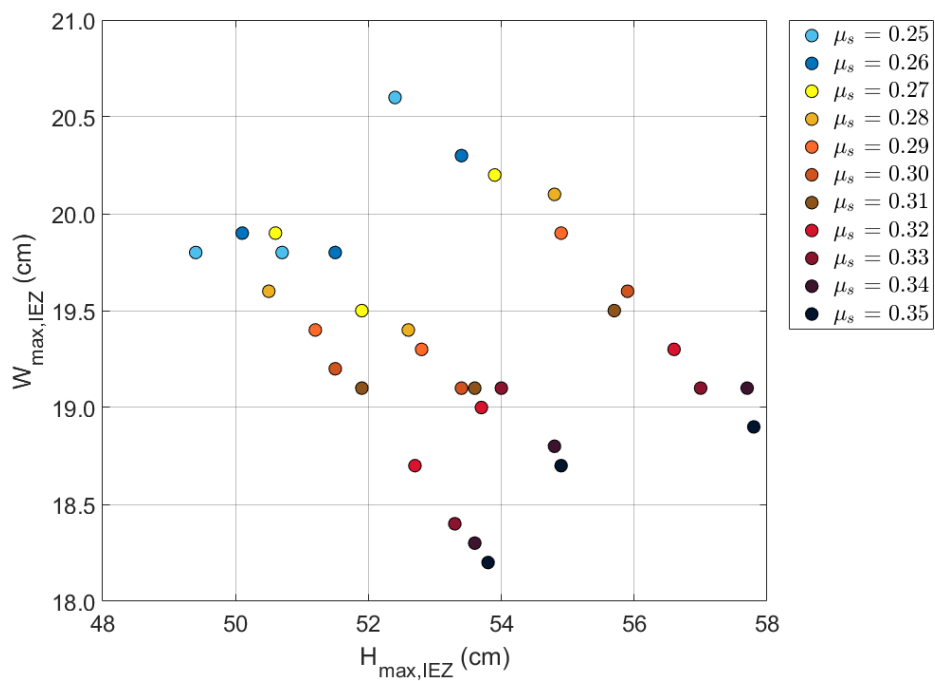


Figura 7.8: Relación del ancho máximo de la IEZ con respecto a la altura máxima de la IEZ considerando una extracción continua. Leyenda: coeficiente de fricción estático completo.

7.4 Anexo D

Coefficiente de determinación (R^2)

Este parámetro es calculado automáticamente por el software MATLAB. Aun así, este se calcula mediante la siguiente ecuación.

$$R^2 = \frac{\sigma_{XY}^2}{\sigma_X^2 \sigma_Y^2} \quad (7.1)$$

Ahora bien, σ_{XY} corresponde a la covarianza de las variables X e Y, mientras que σ_X y σ_Y son la varianza de la variable X e Y, respectivamente.

Error cuadrático medio (RMSE)

De igual manera, este valor es calculado automáticamente por el software MATLAB. Aun así, este se calcula mediante la siguiente ecuación.

$$RMSE = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^n (y_j - \hat{y}_j)^2}{n}} \quad (7.2)$$

Ahora bien, y_j es el valor del modelo, $\hat{y}_j$ es el valor de la simulación y n es el número de valores a comparar entre los resultados obtenidos de las simulaciones y los del modelo propuesto.

7.5 Anexo E

Modelos actuales

Se confecciona una tabla resumen de los modelos actuales que predicen la altura y ancho de la IEZ. Estos se presentan en la **tabla 7-6**. Por otro lado, en la **tabla 7-7** se añaden dos modelos propuestos en este estudio, estos se encuentran en una fase primitiva debido a la poca cantidad de datos utilizados para la construcción de estos. De igual manera, son presentados en la **tabla 7-7**.

Tabla 7-6: Modelos de H_{IEZ} e W_{IEZ} de distintos autores hasta la fecha.

	H_{IEZ}	W_{IEZ}
(Castro, Trueman & Halim, 2007)	$h_0 \left(1 - e^{-\frac{m}{m_0}}\right) + c \cdot m$	$W_0 \left(1 - \beta e^{-\frac{m}{m_1} - (1 - \beta) e^{-\frac{m}{m_2}}}\right)$
(Melo, Vivanco & Fuentes, 2007; 2009)	$\left[\frac{3S}{4\sqrt{\pi D_p}}\right]^{\frac{2}{3}}$	$2 \left(\frac{6D_p}{e}\right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{3S}{4\sqrt{\pi D_p}}\right]^{\frac{1}{3}}$
(Jin et al, 2017)	$\left(\frac{m}{k_1}\right)^{\frac{1}{k_2}}$	$2 \sqrt{\left(\frac{m}{k_1}\right)^{\frac{1}{k_2}} \left(\frac{1}{\exp\left(\frac{1}{k_2 - 1}\right)}\right)^{\frac{k_2 - 1}{k_2}} \frac{k_1 k_2^2}{(k_2 - 1) \pi \gamma}}$
(Sturla, Vivanco & Palma, 2022)	$\varphi = (a_3 + \mu_s)^{a_4} (1 - a_5 [\mu_r - 0.1]^2) \left(1 + a_6 \left[\frac{\alpha}{55} - 1\right]\right)$ $a_1 V^{a_2} \cdot \varphi (\mu_s, \mu_r, \alpha)$	$\psi = (b_3 + (1 - \mu_s)^{b_4}) (1 - b_5 [\mu_r - 0.1]) \left(1 - b_6 \left[\frac{\alpha}{55} - 1\right]\right)$ $b_1 V^{b_2} \cdot \psi (\mu_s, \mu_r, \alpha)$

Tabla 7-7: Modelos de H_{IEZ} e W_{IEZ} de distintos autores hasta la fecha. Considerando el modelo de extracción discreta y continua.

	H_{IEZ}	W_{IEZ}
(Castro, Trueman & Halim, 2007)	$h_0(1 - e^{-\frac{m}{m_h}}) + c \cdot m$	$W_0(1 - \beta e^{-\frac{m}{m_1}} - (1 - \beta)e^{-\frac{m}{m_2}})$
(Melo, Vivanco & Fuentes, 2007; 2009)	$\left[\frac{3S}{4\sqrt{\pi D_p}} \right]^{\frac{2}{3}}$	$2 \left(\frac{6D_p}{e} \right)^{\frac{1}{2}} \left[\frac{3S}{4\sqrt{\pi D_p}} \right]^{\frac{1}{3}}$
(Jin et al, 2017)	$\left(\frac{m}{k_1} \right)^{\frac{1}{k_2}}$	$\sqrt[k_2-1]{\left(\frac{\left(\frac{m}{k_1} \right)^{\frac{1}{k_2}}}{\exp\left(\frac{1}{k_2-1} \right)} \right)} \frac{k_1 k_2^2}{(k_2-1)\pi\gamma}$
(Sturla, Vivanco & Palma, 2022)	$a_1 V^{a_2} \cdot \varphi(\mu_s, \mu_r, \alpha)$ $\varphi = (a_3 + \mu_s)^{a_4} (1 - a_5 [\mu_r - 0.1]^2) (1 + a_6 [\frac{\alpha}{55} - 1])$	$b_1 V^{b_2} \cdot \psi(\mu_s, \mu_r, \alpha)$ $\psi = (b_3 + (1 - \mu_s)^{b_4}) (1 - b_5 [\mu_r - 0.1]) (1 - b_6 [\frac{\alpha}{55} - 1])$
Continua - (Moris & Palma, 2023)	$23.82 \cdot \exp(5.417 \cdot 10^{-4} \cdot V) - 22.62 \cdot \exp(-4.091 \cdot 10^{-3} \cdot V)$	$12.06 \cdot \exp(3.383 \cdot 10^{-4} \cdot V) - 11.98 \cdot \exp(-8.274 \cdot 10^{-3} \cdot V)$
Discreta - (Moris & Palma, 2023)	$18.13 \cdot \exp(8.727 \cdot 10^{-4} \cdot V) - 17.68 \cdot \exp(-6.919 \cdot 10^{-3} \cdot V)$	$11.10 \cdot \exp(4.783 \cdot 10^{-4} \cdot V) - 11.09 \cdot \exp(-1.288 \cdot 10^{-2} \cdot V)$

Comparativa normalizada de modelos actuales

Se genera un par de gráficos comparativos y normalizados para las dimensiones de la IEZ en función de la masa extraída. La diferencia es que este par tiene además los modelos de extracción continua y discreta.

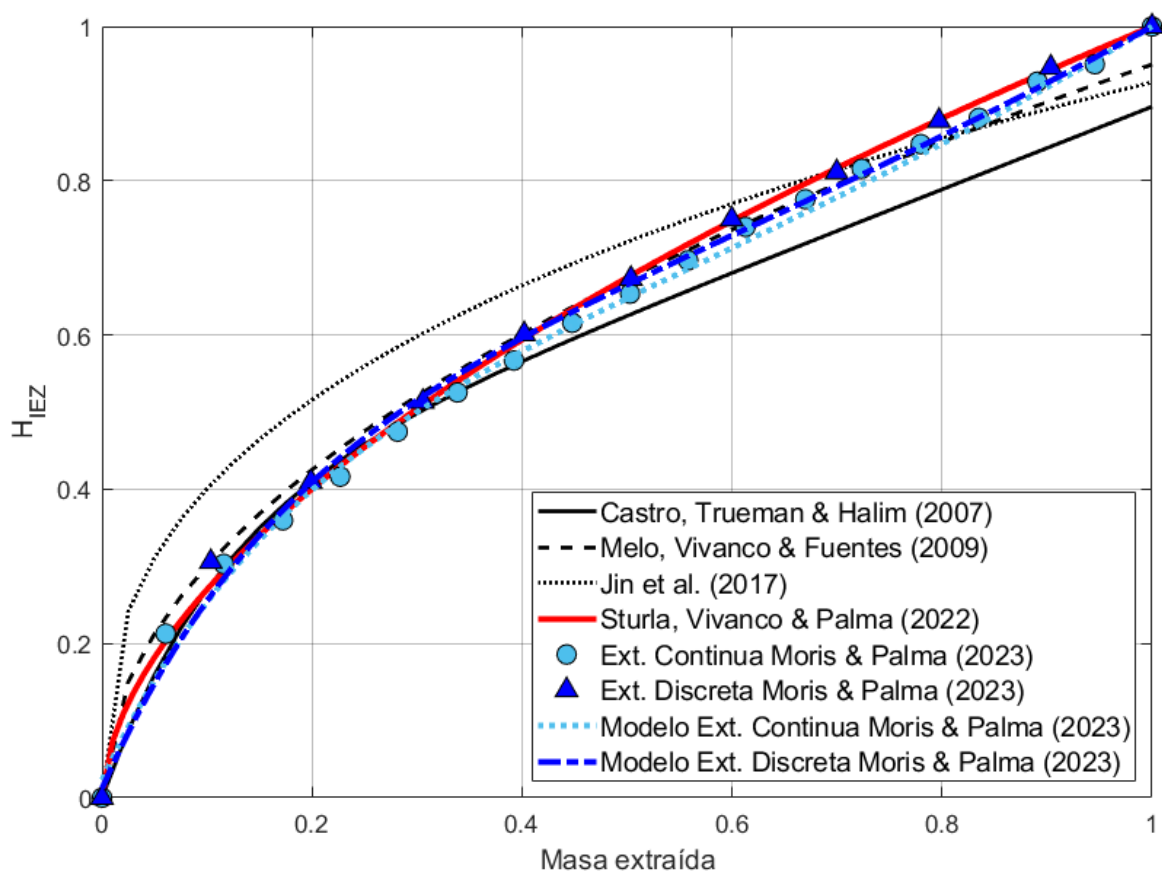


Figura 7.9: Comparación normalizada de modelos de distintos autores para la altura de la IEZ. Incluye los modelos generados en este estudio.

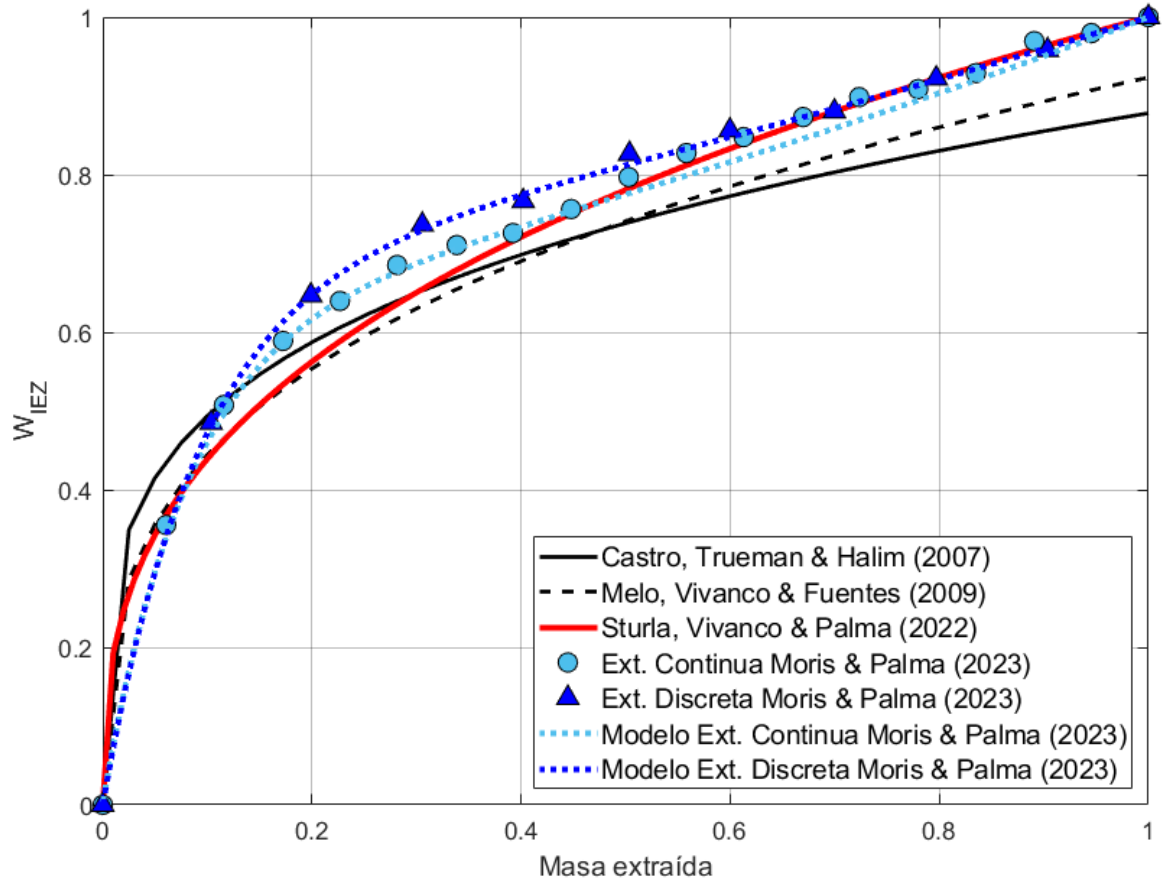


Figura 7.10: Comparación normalizada de modelos de distintos autores para el ancho de la IEZ. Incluye los modelos generados en este estudio.