



UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE FÍSICA
VALPARAÍSO, CHILE

OSCILACIÓN DE NEUTRINOS EN MATERIA DE DENSIDAD VARIABLE

TESIS PARA OPTAR AL GRADO DE
LICENCIADO EN FÍSICA

AUTOR:
VICENTE ANDRÉS PIÑONES GÓMEZ

PROFESOR GUÍA:
DR. CLAUDIO DIB VENTURELLI

MIEMBROS DE LA COMISIÓN:
DR. ALFONSO ZERWEKH ARROYO
DRA. CAROLINA ARBELÁEZ RODRÍGUEZ

Resumen

El fenómeno de oscilación de neutrinos ha sido ampliamente analizado tanto en el ámbito experimental como en el teórico. En un principio, los cálculos teóricos del flujo de neutrinos solares contemplaban únicamente la propagación del neutrino a través del vacío, ignorando la posible interacción con la materia. El experimento de Homestake fue el primero en medir el flujo de neutrinos solares de altas energías (mayores a 1[MeV]), y se obtuvieron resultados con una reducción de casi un tercio respecto a los valores esperados. Este hecho fue conocido como el problema de los neutrinos solares. El experimento de Homestake es sensible únicamente a los neutrinos del Boro-8, que son una fracción muy menor del flujo total de neutrinos, que podría estar estimado con errores. Debido a esto, se llevaron a cabo los experimentos de SAGE y GALLEX que midieron el flujo de neutrinos pp (con energías menores a 1[MeV]), que es más abundante y seguro de predecir. El déficit mejoró, de un 30 % a 50 %, pero siguió existiendo. Posteriormente, el experimento Super-Kamiokande volvió a medir el déficit aproximado del 50 %. La explicación que se dio al problema de los neutrinos solares es que no mantienen su sabor fijo, sino que oscilan de sabor en su camino a la Tierra. Para ello, los neutrinos deben tener masa y además los estados de masa deben ser mezclas de los estados de sabor. Este fenómeno lleva el nombre de oscilación de neutrinos. Finalmente, los experimentos llevados a cabo en SNO confirmaron la idea de la oscilación al medir el flujo total de neutrinos solares. Sin embargo, para la explicación de todos los datos experimentales es necesario no sólo considerar la oscilación de los neutrinos en sí, sino además la alteración de las oscilaciones cuando los neutrinos se propagan en la materia, en este caso el interior del Sol.

El presente trabajo se basa en un desarrollo completo y detallado de todo el formalismo teórico necesario para solucionar el problema de los neutrinos solares. Para ello, se parte entendiendo que un estado de sabor determinado es una superposición de los estados de masa. Luego, se desarrolla la expresión de evolución para los estados de sabor de neutrinos que se propagan en el vacío. Dicho cálculo es utilizado como base en la expresión de evolución para los estados de sabor en medios materiales, llegando así al conocido efecto MSW.

El problema con este efecto es que si la densidad de electrones del medio no es uniforme, considera un Hamiltoniano no diagonal en la ecuación de evolución, por lo que, se introduce la aproximación adiabática y la aproximación no adiabática. Ambas aproximaciones distan del tipo de medio que describen. Las probabilidades de llegada de los neutrinos solares son descritas exitosamente por medio de la aproximación adiabática, con parámetros de oscilación $\sin^2 2\theta = 0,85$ y $\Delta m^2 = 7,4 \times 10^{-17} [\text{MeV}^2]$.

Dedicado a mi madre y a mi hermano

*“Deberías disfrutar de los pequeños desvíos. Disfrútalos mucho.
Porque, de ese modo, encontrarás aquello que es más importante que lo que querías.”
-Último diálogo HxH (2011)*

*Y especialmente dedicado a Mauricio
(me dediqué a estudiar física)*

Agradecimientos

En primer lugar, le quiero agradecer a mi madre y a mi hermano por su incondicional y constante apoyo, con el que he podido cumplir cada una de las metas y objetivos que me he propuesto. Sin lugar a dudas, el pilar fundamental de todo este proceso ha sido mi madre, quien con su enorme esfuerzo, cariño y dedicación absoluta, me otorgó la posibilidad de estudiar lo que yo quería, apoyándome en todo momento que lo necesitaba y motivándome a siempre ser una mejor versión de mí. También, quería agradecer a mis abuelas por entregarme todo su incondicional y constante cariño, además de estar siempre en los momentos que las necesitaba.

De igual forma, quiero expresar mi más profunda gratitud al profesor Dr. Claudio Dib, quien me ha guiado a lo largo de este proceso. Quiero agradecerle todos los innumerables momentos que nos sentamos a estudiar en su oficina, estando siempre dispuesto a resolver cualquier tipo de duda y motivándome constantemente a seguir aprendiendo más física.

Por último, pero no menos importante, le quería agradecer a todos mis amigos por acompañarme en cada día de este proceso, por siempre estar dispuestos a escucharme y aconsejarme en todo lo que necesitaba. A esos amigos que me acompañaban con un café para discutir y darme ideas sobre mi trabajo. Agradezco especialmente a Benjamín por esas largas tardes en que caminábamos por las pintorescas y curiosas calles de Viña del Mar y Valparaíso, mientras hablábamos *sutilmente* de física y matemáticas.

Tabla de Contenido

1. Introducción	1
1.1. Modelo Estándar y la masa de los neutrinos	1
1.2. Problema de los neutrinos solares	2
2. Formalismo teórico	3
2.1. Neutrinos como estados de masa y sabor	3
2.2. Evolución de los estados de sabor en el vacío	4
2.3. Evolución de los estados de sabor en la materia	6
2.4. Efecto MSW	8
2.4.1. Aproximación adiabática	10
2.4.2. Comportamiento del ángulo de mezcla y de los estados de masa	14
2.4.3. Aproximación no adiabática	16
3. Resolución del problema de los neutrinos solares	20
3.1. Cadena pp en flujo de neutrinos solares	20
3.2. Problema en la detección de neutrinos solares	22
3.3. Explicación de los datos de neutrinos solares usando oscilaciones y efecto MSW . . .	23

4. Conclusión	28
Bibliografía	32
Apéndice A. Hamiltoniano en la base de Sabor	33
Apéndice B. Hamiltoniano en la base de Sabor en términos de los ángulos de mezcla en la materia (o efectivos)	36
Apéndice C. Hamiltoniano en la base de Sabor en términos de las derivada del ángulo de mezcla en materia	41

Capítulo 1

Introducción

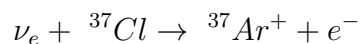
1.1. Modelo Estándar y la masa de los neutrinos

El Modelo Estándar de la física de partículas es una teoría cuántica de campos orientada en describir la estructura fundamental de la materia. Esto lo hace por medio de ‘cuantos’ asociados a campos (que surgen desde la excitación de estos últimos). Así mismo, los ‘cuantos’ representan entes elementales e irreducibles, por lo que, se les apodó con el nombre de partículas, y su dinámica queda determinada por las cuatro interacciones fundamentales (interacción electromagnética, nuclear fuerte, nuclear débil y gravitatoria). Si bien, el Modelo Estándar ha logrado predecir y explicar gran parte de los fenómenos subatómicos, esta teoría no se encuentra exenta de limitaciones, siendo uno de estos casos, la explicación de la masa de los neutrinos.

En primera instancia, los neutrinos se consideraban partículas sin masa y con carga eléctrica neutra. Sin embargo, los experimentos que medían el flujo de neutrinos solares, entregaban datos que no correspondían al comportamiento teórico esperado (e.g. el experimento en Homestake), por lo que, se consideraron las ideas propuestas por Mikheyev, Smirnov y Wolfenstein [24, 25]. Lo anterior, conllevó un replanteamiento en el entendimiento de los neutrinos, considerando cambios en las probabilidades de medición para los distintos sabores de estas partículas. Este fenómeno lleva el nombre de oscilación de neutrinos. Por su parte, una medición precisa de la masa de los neutrinos resulta en un desafío experimental significativo. Esto se debe a que su interacción débil con la materia (i.e. una interacción casi nula con toda la materia) los hace difíciles de detectar directamente. Aun así, los experimentos llevados a cabo en los grandes detectores subterráneos han proporcionado suficiente evidencia como para validar el fenómeno de oscilación de neutrinos.

1.2. Problema de los neutrinos solares

En la década de 1960, los astrofísicos Raymond Davis Jr. y John N. Bahcall llevaron a cabo un experimento en la mina de Homestake en Dakota del Sur [10]. El objetivo de este experimento consistía en contar la cantidad de neutrinos emitidos por los procesos de fusión nuclear al interior del Sol. Para esto, utilizaron un gran tanque lleno de tetracloroetileno, el cual, ubicaron bajo tierra (alrededor de unos 1478 metros) con el fin de evitar la interferencia que generan los rayos cósmicos. Se utilizó tetracloroetileno debido a que es altamente rico en cloro. Cuando un átomo de ^{37}Cl interactúa con un neutrino electrónico se produce un isótopo radiactivo de ^{37}Ar que posteriormente puede ser extraído y contabilizado. La reacción anterior viene dada por



La energía necesaria (mínima) para que ocurra este proceso es de 0,814 [MeV], lo que permite medir neutrinos solares de altas energías (provenientes del proceso del ^8B), que es una fracción muy pequeña del flujo total.

Sin embargo, cuando Davis comparó sus mediciones (asociadas a las cantidades de Argón que se producía) con las predicciones teóricas de la cantidad de neutrinos que debería haber detectado, encontró que solo estaba observando alrededor de un tercio de la cantidad esperada. Esta discrepancia entre la teoría y la medición experimental se convirtió en el problema de los neutrinos solares. Se consideró que el flujo de neutrinos solares podía ser sensible a altas energías, por lo que, los experimentos de SAGE y GALLEX midieron el flujo de neutrinos solares de baja energía (menores a 1[MeV]), obteniendo un déficit aproximado del 50 %. Para solucionar esto, se propuso que los neutrinos poseen estados de masa que son combinaciones de estados de sabor. En base a lo anterior, los neutrinos adquieren la capacidad de oscilar de un sabor a otro a medida que se propagan en el espacio (ya sea a través del vacío o por un medio material).

La oscilación de neutrinos resuelve el problema de los neutrinos solares, ya que implica que los neutrinos electrónicos (que son el tipo de neutrino que era capaz de detectar el experimento de Davis) podrían haber cambiado a otros tipos de neutrinos a medida que se propagaban hacia la Tierra. Experimentos posteriores, como los realizados en el Observatorio de Neutrinos de Sudbury (o SNO por sus siglas en inglés) en Canadá, validaron experimentalmente el fenómeno de la oscilación de neutrinos y proporcionaron mediciones más precisas de la cantidad de neutrinos solares que llegan a la Tierra.

Capítulo 2

Formalismo teórico

2.1. Neutrinos como estados de masa y sabor

La oscilación de neutrinos es un fenómeno cuántico basado en que los estados de sabor de los neutrinos pueden ser descritos en términos (de una combinación lineal ortogonal) de otros estados, llamados estados de masa (o estados físicos) [18]. La esencia de todo este fenómeno recae en el hecho de que los estados de sabor oscilan entre sí, es decir, la probabilidad de medir un cierto sabor leptónico cambia a medida que el neutrino se propaga, ya sea, en el vacío o en un medio material.

Un estado general (en un tiempo t) del neutrino $|\nu(t)\rangle$ puede ser descrito en términos de una combinación lineal de los estados de sabor $|\nu_\alpha\rangle$

$$|\nu(t)\rangle = \sum_{\alpha} C_{\alpha}(t) |\nu_{\alpha}\rangle \quad (2.1)$$

De igual manera, los estados de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ pueden ser descritos en términos de una combinación lineal de los estados de masa $|\nu_i\rangle$

$$|\nu_{\alpha}\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i\rangle \quad (2.2)$$

donde α representa los posibles sabores leptónicos, i los posibles estados de masa y $U_{\alpha i}^*$ corresponde al elemento αi de una cierta matriz $\mathbf{U}$. Dicho parámetro (o elemento) es libre y depende únicamente de los datos experimentales, por ende, la matriz $\mathbf{U}$ puede tomar cualquier parametrización. Usualmente, se considera que la matriz $\mathbf{U}$ tiene la forma de una matriz de rotación.

Si consideramos una oscilación entre únicamente dos sabores leptónicos, la matriz $\mathbf{U}$ queda

$$\mathbf{U} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \quad (2.3)$$

donde θ es conocido como el ángulo de mezcla en el vacío.

2.2. Evolución de los estados de sabor en el vacío

Si bien, la ecuación (2.2) establece como es la relación entre los estados de sabor y los estados de masa, esto no dice mucho sobre la oscilación de neutrinos (o sobre cómo evolucionan los estados de sabor), dado que, el fenómeno ocurre cuando existe una propagación del neutrino en el espacio, es decir, cuando el estado general $|\nu_\alpha\rangle$ es una función del tiempo $|\nu_\alpha(t)\rangle$ (o de la posición). La expresión (2.2) carece de dependencia temporal. Para solucionar este problema, se considera que la relación (2.2) también es válida cuando los estados evolucionan en el tiempo, quedando así

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* |\nu_i(t)\rangle \quad (2.4)$$

El estado $|\nu_\alpha(t)\rangle$ debería permitir la descripción del fenómeno de la oscilación de neutrinos, por ende, debe quedar expresado en términos de elementos conocidos. Es así, que el problema ahora recae en determinar una expresión para $|\nu_i(t)\rangle$. Para esto, se parte planteando la ecuación de Schrödinger (ecuación de evolución temporal) sobre un estado general de masa (dependiente del tiempo) $|\nu_i(t)\rangle$ (considerando $\hbar = 1$)

$$i \frac{d}{dt} |\nu_i(t)\rangle = \mathcal{H}_0 |\nu_i(t)\rangle \quad (2.5)$$

donde $\mathcal{H}_0$ (por simpleza para este primer cálculo) corresponde al Hamiltoniano de la oscilación de neutrinos en el vacío. Además, se tiene que $\mathcal{H}_0$ es diagonal en la base de masa, cumpliéndose

$$\mathcal{H}_0 |\nu_i\rangle = E_i |\nu_i\rangle \quad (2.6)$$

Las ecuaciones (2.5) y (2.6) implican que los estados de masa evolucionan temporalmente como ondas planas, es decir, evolucionan con una fase del tipo $e^{-iE_i t}$, quedando así

$$|\nu_i(t)\rangle = e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \quad (2.7)$$

Al reemplazar la ecuación (2.7) en la ecuación (2.4)

$$|\nu_\alpha(t)\rangle = \sum_i U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} |\nu_i\rangle \quad (2.8)$$

La ecuación (2.2) permite escribir los estados de masa en términos de los estados de sabor

$$|\nu_i\rangle = \sum_{\eta} U_{\eta i} |\nu_{\eta}\rangle \quad (2.9)$$

Al reemplazar la ecuación (2.9) en la ecuación (2.8)

$$|\nu_{\alpha}(t)\rangle = \sum_{\eta} \left[\sum_i U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} U_{\eta i} \right] |\nu_{\eta}\rangle \quad (2.10)$$

Si se busca medir la evolución de $|\nu_{\alpha}(t)\rangle$ a un estado $|\nu_{\beta}\rangle$, se debe proyectar (10) sobre $\langle\nu_{\beta}|$

$$A(\alpha \rightarrow \beta; t) \equiv \langle\nu_{\beta}|\nu_{\alpha}(t)\rangle = \sum_{\eta} \left[\sum_i U_{\alpha i}^* e^{-iE_i t} U_{\eta i} \right] \langle\nu_{\beta}|\nu_{\eta}\rangle \quad (2.11)$$

donde $A(\alpha \rightarrow \beta; t)$ corresponde a la amplitud de probabilidad de que un estado $|\nu_{\alpha}\rangle$ transicione a un estado $|\nu_{\beta}\rangle$ en un cierto tiempo t . Además, se tiene que las bases de masa y sabor son ortonormales, implicando que $\langle\nu_{\beta}|\nu_{\eta}\rangle = \delta_{\beta\eta}$.

Para calcular la probabilidad de transición de un estado $|\nu_{\alpha}\rangle$ a un estado $|\nu_{\beta}\rangle$ en un tiempo cualquiera t (denotada por $P(\alpha \rightarrow \beta; t)$), basta con calcular el cuadrado de la amplitud de probabilidad

$$P(\alpha \rightarrow \beta; t) = \left| \sum_i U_{\alpha i}^* U_{\beta i} e^{-iE_i t} \right|^2 \quad (2.12)$$

Reemplazando con los elementos de la parametrización (2.3)

$$P(\alpha \rightarrow \beta; t) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{(E_2 - E_1)t}{2} \right) \quad (2.13)$$

Si bien, la expresión anterior es correcta, existe un argumento que todavía no se considera en el desarrollo. Este tiene relación con el hecho de que los neutrinos se encuentran en el marco del límite ultrarelativista, con ello, su momentum es mucho mayor en comparación a su masa ($p \gg m$). Lo anterior, permite expandir la relación de energía momentum (que por simplicidad será a segundo orden)

$$E_i \approx p + \frac{m_i^2}{2E} \quad (2.14)$$

Así mismo, el límite ultrarelativista valida la aproximación entre el tiempo que demora en propagarse el neutrino y la distancia que se propaga en el espacio

$$t \approx x \quad (2.15)$$

Al reemplazar las aproximaciones (2.14) y (2.15) en la probabilidad de transición (2.13)

$$P(\alpha \rightarrow \beta; x) = \sin^2 2\theta \sin^2 \left(\frac{\Delta m_{21}^2}{4E} x \right) \quad (2.16)$$

donde se define la diferencia cuadrada de las masas por $\Delta m_{21}^2 = m_2^2 - m_1^2$. Es importante destacar que la probabilidad de oscilación depende de la diferencia de las masas al cuadrado (además del ángulo de mezcla), y no del valor de las masas por separado.

2.3. Evolución de los estados de sabor en la materia

De momento, todo el desarrollo que se ha realizado es válido únicamente para neutrinos ultrarelativistas que se propagan en el vacío. Esto arrastra un problema consigo, ya que no se consideran los neutrinos que surgen y/o se propagan al interior de cuerpos densos (e.g. el Sol). El Modelo Estándar estipula que los neutrinos interactúan débilmente con la materia (acoplándose a los bosones W y Z), por ende, si se busca determinar la evolución temporal de estados de sabor para neutrinos que se propagan en materia, se debe agregar un término de interacción al Hamiltoniano, quedando

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I \quad (2.17)$$

donde $\mathcal{H}$ corresponde al Hamiltoniano total del sistema, $\mathcal{H}_0$ es el término asociado a la oscilación en el vacío y $\mathcal{H}_I$ es el término asociado a la interacción con la materia. Además, se tiene que la base de sabor diagonaliza a $\mathcal{H}_I$, con ello, se cumple la siguiente ecuación de autovalores

$$\mathcal{H}_I |\nu_\alpha\rangle = (V_{CC}\delta_{\alpha e} + V_{NC}) |\nu_\alpha\rangle \quad (2.18)$$

donde V_{CC} es un potencial asociado a la interacción de corrientes cargadas (acopladas al bosón W) y V_{NC} es un potencial asociado a la interacción de corrientes neutras (acopladas al bosón Z). Lo anterior, permite plantear la ecuación de Schrödinger para un estado general de sabor $|\nu_\alpha\rangle$

$$i \frac{d}{dt} |\nu_\alpha(t)\rangle = (\mathcal{H}_0 + \mathcal{H}_I) |\nu_\alpha(t)\rangle \quad (2.19)$$

Por su parte, la amplitud de probabilidad de que un estado $|\nu_\alpha\rangle$ transicione a un estado $|\nu_\beta\rangle$ en un cierto tiempo t (análogo a la oscilación en el vacío) viene dada por

$$\langle \nu_\beta | \nu_\alpha(t) \rangle \equiv \psi_{\alpha\beta}(t) \quad (2.20)$$

donde se ha empleado la notación de amplitud $\psi_{\alpha\beta}(t)$ por simpleza en la escritura del desarrollo. Así, la expresión de evolución temporal del estado de sabor $|\nu_\alpha\rangle$ transicionando a un estado $|\nu_\beta\rangle$ queda dada por

$$i \frac{d\psi_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \langle \nu_\beta | \mathcal{H}_0 | \nu_\alpha(t) \rangle + \langle \nu_\beta | \mathcal{H}_I | \nu_\alpha(t) \rangle \quad (2.21)$$

A pesar de que $\mathcal{H}_I$ es diagonal en la base de sabor, $\mathcal{H}_0$ no lo es (la ecuación (2.6) establece que $\mathcal{H}_0$ es diagonal en la base de masa), por ello, se debe considerar la relación (2.2) en el primer término de la derecha

$$i \frac{d\psi_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_i U_{\beta i} \langle \nu_i | \mathcal{H}_0 | \nu_\alpha(t) \rangle + \langle \nu_\beta | \mathcal{H}_I | \nu_\alpha(t) \rangle \quad (2.22)$$

Para que ambos términos del lado derecho den cuenta de la evolución temporal de un mismo estado de sabor, se introduce un operador de proyección en términos de un estado $|\nu_\eta\rangle$

$$i \frac{d\psi_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_i \sum_\eta U_{\beta i} \langle \nu_i | \mathcal{H}_0 | \nu_\eta \rangle \langle \nu_\eta | \nu_\alpha(t) \rangle + \sum_\eta \langle \nu_\beta | \mathcal{H}_I | \nu_\eta \rangle \langle \nu_\eta | \nu_\alpha(t) \rangle \quad (2.23)$$

Nuevamente, se considera (únicamente en el primer término del lado derecho) la relación (2.2) para expresar $|\nu_\eta\rangle$ en términos de un estado de masa $|\nu_k\rangle$

$$i \frac{d\psi_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_i \sum_\eta \sum_k U_{\beta i} \langle \nu_i | \mathcal{H}_0 | \nu_k \rangle \langle \nu_\eta | \nu_\alpha(t) \rangle U_{\eta k}^* + \sum_\eta \langle \nu_\beta | \mathcal{H}_I | \nu_\eta \rangle \langle \nu_\eta | \nu_\alpha(t) \rangle \quad (2.24)$$

Al aplicar las ecuaciones de autovalores (2.6) y (2.18), la ortonormalidad de la base de masa y la expresión de la amplitud de probabilidad en (2.20)

$$i \frac{d\psi_{\alpha\beta}(t)}{dt} = \sum_\eta \left[\sum_i U_{\beta i} E_i U_{\eta i}^* + (V_{CC} \delta_{\beta e} + V_{NC}) \delta_{\beta \eta} \right] \psi_{\alpha\eta}(t) \quad (2.25)$$

De manera análoga a la oscilación en el vacío, se aplican las aproximaciones del límite ultrarelativista

$$i \frac{d\psi_{\alpha\beta}(x)}{dx} = \sum_\eta \left[\sum_i U_{\beta i} \left(p + \frac{m_i^2}{2E} \right) U_{\eta i}^* + (V_{CC} \delta_{\beta e} + V_{NC}) \delta_{\beta \eta} \right] \psi_{\alpha\eta}(x) \quad (2.26)$$

Al desarrollar parte de la sumatoria se genera una expresión de la forma

$$i \frac{d\psi_{\alpha\beta}(x)}{dx} = \left(p + \frac{m_1^2}{2E} + V_{NC} \right) \psi_{\alpha\beta}(x) + \sum_\eta \left[\sum_i U_{\beta i} \frac{\Delta m_{i1}^2}{2E} U_{\eta i}^* + V_{CC} \delta_{\beta e} \delta_{\eta e} \right] \psi_{\alpha\eta}(x) \quad (2.27)$$

donde el primer término de la derecha da paso a una fase común, por lo que no afecta en la expresión final de la probabilidad y se puede despreciar, quedando así

$$i \frac{d\psi_{\alpha\beta}(x)}{dx} = \sum_\eta \left[\sum_i U_{\beta i} \frac{\Delta m_{i1}^2}{2E} U_{\eta i}^* + V_{CC} \delta_{\beta e} \delta_{\eta e} \right] \psi_{\alpha\eta}(x) \quad (2.28)$$

En base a lo anterior, se demuestra que la oscilación de neutrinos en la materia depende de la diferencia cuadrada de las masas (al igual que la oscilación en el vacío). La ecuación (2.25) puede ser escrita matricialmente por

$$i \frac{d}{dx} \psi_\alpha = \mathbf{H}_F \psi_\alpha \quad (2.29)$$

manteniéndose la estructura de una típica ecuación de Schrödinger, donde $\mathbf{H}_F$ corresponde al Hamiltoniano efectivo en la base de sabor, y está dado por

$$\mathbf{H}_F = \frac{1}{2E}(\mathbf{U}\mathbf{H}_M\mathbf{U}^T + \mathbf{A}) \quad (2.30)$$

donde las matrices de mezcla $\mathbf{U}$ y $\mathbf{U}^T$ quedan dadas por la parametrización (2.3), $\mathbf{H}_M$ corresponde al Hamiltoniano (diagonal) en la base de masa y $\mathbf{A}$ corresponde a la matriz de interacción con la materia

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_{CC} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (2.31)$$

con

$$A_{CC} \equiv 2EV_{CC} = 2\sqrt{2}EG_F N_e(x) \quad (2.32)$$

donde G_F corresponde a la constante de Fermi y $N_e(x)$ corresponde a la densidad de electrones en el medio. El término A_{CC} es el responsable de la interacción de los neutrinos electrónicos con los electrones, y da a entender que el fenómeno de la oscilación va a depender de la densidad (de electrones) del medio por el cual se propaga el neutrino.

2.4. Efecto MSW

A partir de la ecuación (2.30) se obtiene la expresión matricial del Hamiltoniano efectivo en la base de sabor $\mathbf{H}_F$ (revise el apéndice A para el desarrollo completo)

$$\mathbf{H}_F = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{CC}(x) & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC}(x) \end{pmatrix} \quad (2.33)$$

al reemplazarlo en la ecuación de evolución (2.29) resulta en la ecuación de Schrödinger para la base de sabor (considerando una oscilación entre sabor electrónico y muónico)

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{CC}(x) & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC}(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} \quad (2.34)$$

Es evidente que la base de sabor no diagonaliza al Hamiltoniano. Para solucionar esto, se aplica una transformación ortogonal en términos de nuevas matrices de mezcla (con parámetros variables asociados a la densidad de la materia por la que se propaga el neutrino)

$$\mathbf{H}_F = \mathbf{U}_M \mathbf{H}_M \mathbf{U}_M^T \quad (2.35)$$

De manera análoga a la parametrización en el vacío, la matriz $\mathbf{U}_M$ queda descrita por

$$\mathbf{U}_M = \begin{pmatrix} \cos \theta_M(x) & \sin \theta_M(x) \\ -\sin \theta_M(x) & \cos \theta_M(x) \end{pmatrix} \quad (2.36)$$

donde $\theta_M(x)$ corresponde a un parámetro que se conoce como ángulo de mezcla en la materia, y es una función que depende de la posición del neutrino (mientras se propaga a través de la materia). La ortogonalidad de las matrices $\mathbf{U}_M$ permite reescribir la ecuación (2.35) como

$$\mathbf{U}_M^T \mathbf{H}_F \mathbf{U}_M = \mathbf{H}_M \quad (2.37)$$

Por su parte, $\mathbf{H}_M$ corresponde a la matriz diagonal compuesta por los autovalores de $\mathbf{H}_F$

$$\mathbf{H}_M = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m_M^2(x) & 0 \\ 0 & \Delta m_M^2(x) \end{pmatrix} \quad (2.38)$$

considerando que $\Delta m_M^2(x) \equiv \sqrt{(\Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC}(x))^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2}$. Dicho parámetro corresponde a la diferencia cuadrada de las masas en la materia, y (al igual que θ_M) es una función que depende de la posición del neutrino.

Los autovalores de $\mathbf{H}_F$ permiten escribir los autovectores de $\mathbf{H}_F$. Estos vectores están condicionados por la parametrización (2.36), por ello, se obtienen las siguientes relaciones (revise el apéndice B para el desarrollo completo)

$$\cos 2\theta_M(x) = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta - A_{CC}}{\Delta m_M^2(x)} \quad (2.39)$$

$$\sin 2\theta_M(x) = \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{\Delta m_M^2(x)} \quad (2.40)$$

De hecho, la matriz $\mathbf{H}_F$ puede ser descrita únicamente en términos de parámetros que dependen de la densidad de materia por la que se propaga el neutrino

$$\mathbf{H}_F = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m_M^2 \cos 2\theta_M(x) & \Delta m_M^2 \sin 2\theta_M(x) \\ \Delta m_M^2 \sin 2\theta_M(x) & \Delta m_M^2 \cos 2\theta_M(x) \end{pmatrix} \quad (2.41)$$

Es importante mencionar que el punto de todo este desarrollo recae en determinar una base que permita diagonalizar la matriz $\mathbf{H}_F$ en la ecuación (2.34). Esto se reduce a observar la ecuación (2.37), debido a que, esta ecuación llama a plantear la relación entre estados de sabor y estados de masa

$$\begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_M(x) & \sin \theta_M(x) \\ -\sin \theta_M(x) & \cos \theta_M(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} \quad (2.42)$$

lo que es totalmente análogo a la relación (2.6), pero ahora, en un medio material. Al reemplazar (2.42) en la ecuación (2.34) y multiplicar por $\mathbf{U}_M^T$ al lado izquierdo

$$\mathbf{U}_M^T i \frac{d}{dx} \left[\mathbf{U}_M \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} \right] = \mathbf{U}_M^T \mathbf{H}_F \mathbf{U}_M \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} \quad (2.43)$$

se obtiene la matriz diagonal $\mathbf{H}_M$ en el lado derecho y una suma de derivadas en el lado izquierdo

$$\mathbf{U}_M^T i \left[\begin{pmatrix} \frac{d \cos \theta_M}{dx} & \frac{d \sin \theta_M}{dx} \\ -\frac{d \sin \theta_M}{dx} & \frac{d \cos \theta_M}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} + \mathbf{U}_M \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m_M^2 & 0 \\ 0 & \Delta m_M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} \quad (2.44)$$

El desarrollo de (2.44) da paso a la ecuación de evolución en la base de masa en la materia (revise el apéndice C para el desarrollo completo)

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m_M^2 & -4Ei \frac{d\theta_M}{dx} \\ 4Ei \frac{d\theta_M}{dx} & \Delta m_M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} \quad (2.45)$$

Si bien, el cambio de base permite diagonalizar el Hamiltoniano en la base de sabor, este también genera términos fuera de la diagonal (debido a la derivada de la nueva base). En primera instancia, los términos proporcionales a $d\theta_M(x)/dx$ no permiten determinar las evoluciones temporales de ϕ_{e1} y ϕ_{e2} (por separado), por ello, resulta conveniente (y necesario) realizar ciertas aproximaciones en el Hamiltoniano.

2.4.1. Aproximación adiabática

Los términos fuera de la diagonal del Hamiltoniano (2.45) generan transiciones entre los estados ϕ_{e1} y ϕ_{e2} , que serían los estados propios de masa si el medio fuera de densidad uniforme, $d\theta_M/dx = 0$. Lo anterior, implica que las evoluciones de los estados de masa en la materia se desacoplan (el Hamiltoniano en (2.45) se diagonaliza), llevando a una probabilidad de transición de la forma

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}^{\dot{\theta}_M=0} = \sin^2 2\theta_M \sin^2 \left(\frac{\Delta m_M^2 x}{4E} \right) \quad (2.46)$$

lo que tiene una estructura similar a la probabilidad de transición en el vacío. Así, resulta interesante definir un parámetro λ asociado a la longitud de onda de la oscilación $P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}^{\dot{\theta}_M=0}$

$$\lambda \sim \frac{E}{\Delta m_M^2} \quad (2.47)$$

Para el caso en que el medio tiene densidad no uniforme ($d\theta_M/dx \neq 0$), resulta conveniente definir un parámetro que relacione los términos de la diagonal con los términos fuera de la diagonal, que permita estimar si la tasa de variación del ángulo $d\theta_M/dx$ es suficientemente pequeña como para considerar

aproximadamente ϕ_{e1} y ϕ_{e2} como estados de masa y recuperar la expresión (2.46) para la probabilidad de transición. En base a lo anterior, se define usualmente el **parámetro de adiabaticidad** γ como la razón entre los elementos del Hamiltoniano

$$\gamma = \frac{\Delta m_M^2}{4E|d\theta_M(x)/dx|} \quad (2.48)$$

Para entender esta expresión, se puede definir $d\theta_M/dx = 1/L_C$, donde L_C es un largo característico que se mide, por ejemplo, en metro/radian, y nos da la escala de distancia a la cual el ángulo (o la densidad del medio) cambia apreciablemente. De este modo, el parámetro de adiabaticidad queda descrito en términos de L_C y λ

$$\gamma \sim \frac{L_C}{\lambda} \quad (2.49)$$

Si $\gamma \gg 1$ (a lo largo de toda la trayectoria del neutrino), nos encontramos en un régimen aproximadamente adiabático, en el que ocurren muchas oscilaciones antes de que el medio cambie significativamente. En ese régimen podemos aproximar ϕ_{e1} y ϕ_{e2} como los estados propios de masa e integrarlos separadamente con un número de onda suavemente variable. Ese es el régimen adiabático.

Por otro lado, si $\gamma \lesssim 1$, significa que el medio cambia antes de que siquiera se complete una oscilación. En tal caso el régimen es no-adiabático y la probabilidad de que haya transiciones entre ϕ_{e1} y ϕ_{e2} es considerable.

En el caso de la evolución adiabática, el cambio en el ángulo de mezcla es tan lento que el neutrino se propaga a través del medio sin *percibir* este cambio. El hecho de que el ángulo de mezcla cambie suavemente, implica que los términos proporcionales a $d\theta_M(x)/dx$ son despreciables (despreciando las transiciones entre los estados de masa) y se diagonaliza el Hamiltoniano en (2.45)

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m_M^2(x) & 0 \\ 0 & \Delta m_M^2(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{e1} \\ \phi_{e2} \end{pmatrix} \quad (2.50)$$

Al resolver (2.50) se encuentra la expresión para la evolución temporal de ϕ_{e1} y ϕ_{e2} (el desarrollo es análogo a lo obtenido en (2.7), la única diferencia recae en que el integrando ahora depende de x)

$$\phi_{e1}(x_f) = \phi_{e1}(0) \exp \left\{ i \int_0^{x_f} \frac{\Delta m_M^2(x')}{4E} dx' \right\} \quad (2.51)$$

$$\phi_{e2}(x_f) = \phi_{e2}(0) \exp \left\{ -i \int_0^{x_f} \frac{\Delta m_M^2(x')}{4E} dx' \right\} \quad (2.52)$$

Para determinar las constantes $\phi_{e1}(0)$ y $\phi_{e2}(0)$, se debe considerar que el sistema inicia (en $x = 0$) puramente con sabor electrónico, con ello, $\psi_{ee}(0) = 1$ y $\psi_{e\mu}(0) = 0$. Al reemplazar lo anterior en la relación (2.42)

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_M(0) & \sin \theta_M(0) \\ -\sin \theta_M(0) & \cos \theta_M(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_1(0) \\ \phi_2(0) \end{pmatrix} \quad (2.53)$$

Despejando las constantes

$$\begin{pmatrix} \phi_{e1}(0) \\ \phi_{e2}(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta_M^{(i)} \\ \sin \theta_M^{(i)} \end{pmatrix} \quad (2.54)$$

donde se han definido los cosenos y senos de los ángulos iniciales de mezcla en la materia por

$$\cos \theta_M(0) \equiv \cos \theta_M^{(i)} \quad (2.55)$$

$$\sin \theta_M(0) \equiv \sin \theta_M^{(i)} \quad (2.56)$$

Al reemplazar (2.54) en las ecuaciones de evolución (2.51) y (2.52)

$$\phi_{e1}(x_f) = \cos \theta_M^{(i)} \exp \left\{ i \int_0^{x_f} \frac{\Delta m_M^2(x')}{4E} dx' \right\} \quad (2.57)$$

$$\phi_{e2}(x_f) = \sin \theta_M^{(i)} \exp \left\{ -i \int_0^{x_f} \frac{\Delta m_M^2(x')}{4E} dx' \right\} \quad (2.58)$$

Desde la relación (2.42) se puede escribir la evolución de los estados de sabor (en la materia) por

$$\psi_{ee}(x_f) = \cos \theta_M(x_f) \phi_{e1}(x_f) + \sin \theta_M(x_f) \phi_{e2}(x_f) \quad (2.59)$$

$$\psi_{e\mu}(x_f) = -\sin \theta_M(x_f) \phi_{e1}(x_f) + \cos \theta_M(x_f) \phi_{e2}(x_f) \quad (2.60)$$

Reemplazando las expresiones de $\psi_{ee}(x_f)$ y $\psi_{e\mu}(x_f)$, y usando la notación de (2.54)

$$\psi_{ee}^f = \cos \theta_M^{(f)} \cos \theta_M^{(i)} \exp \left\{ i \int_0^{x_f} \frac{\Delta m_M^2(x')}{4E} dx' \right\} + \sin \theta_M^{(f)} \sin \theta_M^{(i)} \exp \left\{ -i \int_0^{x_f} \frac{\Delta m_M^2(x')}{4E} dx' \right\} \quad (2.61)$$

$$\psi_{e\mu}^f = \cos \theta_M^{(f)} \sin \theta_M^{(i)} \exp \left\{ -i \int_0^{x_f} \frac{\Delta m_M^2(x')}{4E} dx' \right\} - \sin \theta_M^{(f)} \cos \theta_M^{(i)} \exp \left\{ i \int_0^{x_f} \frac{\Delta m_M^2(x')}{4E} dx' \right\} \quad (2.62)$$

Al elevar al cuadrado (2.61) y (2.62) se obtienen las probabilidades de oscilación para la aproximación adiabática

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}^{Abiabetic} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_M^{(i)} \cos 2\theta_M^{(f)} + \frac{1}{2} \sin 2\theta_M^{(i)} \sin 2\theta_M^{(f)} \cos \left(\int_0^{x_f} \frac{\Delta m_M^2(x')}{2E} dx' \right) \quad (2.63)$$

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}^{Abiabetic} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta_M^{(i)} \cos 2\theta_M^{(f)} - \frac{1}{2} \sin 2\theta_M^{(i)} \sin 2\theta_M^{(f)} \cos \left(\int_0^{x_f} \frac{\Delta m_M^2(x')}{2E} dx' \right) \quad (2.64)$$

donde $\theta_M^{(f)}$ corresponde al ángulo de mezcla en el punto de detección. Este resultado es válido únicamente para medios que varíen suavemente su densidad de electrones. Además, para neutrinos que vengan de una estrella, la distancia entre la fuente de producción del neutrino y el detector es grande, lo que implica una pérdida de coherencia en las oscilaciones, por ello, la parte oscilatoria de las probabilidades de supervivencia y transición se promedia en 0, quedando así

$$\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e}^{Abiabetic} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_M^{(i)} \cos 2\theta_M^{(f)} \quad (2.65)$$

$$\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}^{Abiabetic} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta_M^{(i)} \cos 2\theta_M^{(f)} \quad (2.66)$$

donde $\theta_M^{(f)}$ es prácticamente el ángulo de mezcla en el vacío θ

$$\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e}^{Abiabetic} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2\theta_M^{(i)} \cos 2\theta \quad (2.67)$$

$$\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_\mu}^{Abiabetic} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos 2\theta_M^{(i)} \cos 2\theta \quad (2.68)$$

Estas probabilidades dependen únicamente de los parámetros de detección y producción.

2.4.2. Comportamiento del ángulo de mezcla y de los estados de masa

Si bien, en la sección anterior se logró determinar las probabilidades de supervivencia y transición en la materia, esto solo es válido para medios que varíen muy suavemente el ángulo de mezcla, conllevando a que los términos fuera de la diagonal (proporcionales a $d\theta_M/dx$) en (2.45) sean despreciables. De esta manera, si se busca encontrar las probabilidades de supervivencia y transición para un medio cualquiera (un medio que no necesariamente varíe suavemente el ángulo de mezcla), se debe tener en consideración el comportamiento del ángulo de mezcla en la materia. Desde las ecuaciones (2.39) y (2.40) se puede relacionar el comportamiento del ángulo de mezcla en la materia con la densidad de electrones del medio

$$\tan 2\theta_M(x) = \frac{\tan 2\theta}{1 - \frac{A_{CC}(x)}{\Delta m^2 \cos 2\theta}} \quad (2.69)$$

De manera inmediata, se puede notar que la expresión se maximiza cuando $A_{CC} = \Delta m^2 \cos 2\theta$. De hecho, al retomar la ecuación (2.32) se puede determinar la expresión de la densidad de electrones que maximiza (2.69) (denotada por N_e^R)

$$N_e^R = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta}{2\sqrt{2}EG_F} \quad (2.70)$$

Esta maximización se conoce en la literatura con el nombre de *resonancia*, y corresponde a la idea central del efecto MSW [24, 25]. En la región de resonancia (o simplemente resonancia) el ángulo de mezcla efectivo toma el valor de $\pi/4$ i.e. la mezcla se vuelve máxima, implicando así, una igual probabilidad de medir los dos sabores del neutrino. El paso del neutrino a través de la región de resonancia permite la posibilidad de una transición (total o parcial) entre los dos sabores (si la región de resonancia es lo suficientemente amplia).

La Figura 2.1 [18] muestra el comportamiento de un ángulo de mezcla efectivo pequeño (ver la ecuación (2.69)) con respecto a la densidad de electrones dividido en el número de Avogadro. Esta gráfica permite entender que para $N_e \ll N_e^R$, el ángulo de mezcla efectivo es casi igual al ángulo del vacío, $\theta_M \simeq \theta$, para $N_e \simeq N_e^R$ el ángulo de mezcla varía muy rápidamente con la densidad de electrones, tomando el valor de 45° en $N_e = N_e^R$, e incrementa rápidamente hacia 90° para $N_e > N_e^R$. Así mismo, el gráfico indica que la tasa de cambio del ángulo de mezcla es significativamente mayor en la región de resonancia, por lo que, en caso de que ocurran transiciones no adiabáticas entre los estados de masa, debe ser en esta región.

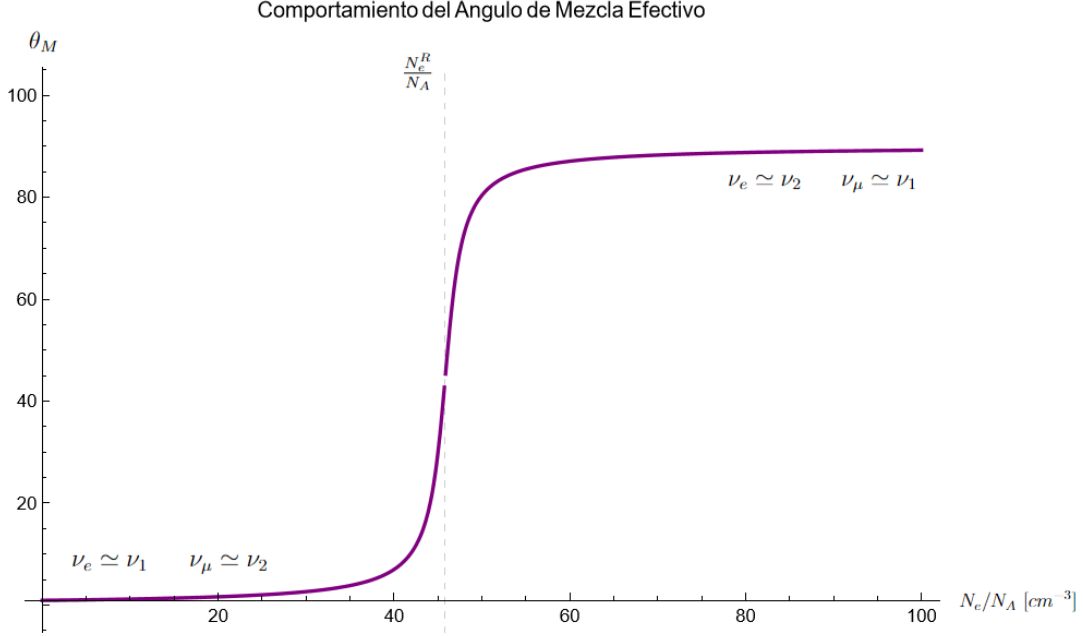


Figura 2.1: Comportamiento del ángulo de mezcla efectivo θ_M en función de la densidad de electrones N_e dividido por el número de Avogadro N_A , para $\Delta m^2 = 7 \times 10^{-6} [\text{eV}]^2$, $\sin^2 2\theta = 10^{-3}$ y $E = 1 [\text{MeV}]$. La línea punteada pasa por el valor de la densidad en la resonancia N_e^R (dividido en el número de Avogadro).

Por otro lado, el comportamiento de las masas cuadradas efectivas en la materia m_{M1}^2 y m_{M2}^2 , vienen dadas por

$$m_{M2,1}^2 = \frac{1}{2}(m_1^2 + m_2^2 + A_{CC} \pm \Delta m_M^2) \quad (2.71)$$

donde hemos extraído la fase común de la corriente neutra, pero dejamos explícita la contribución de la corriente cargada.

La Figura 2.2 [18] muestra el comportamiento de las masas cuadradas efectivas con respecto a la densidad de electrones dividido en el número de Avogadro. De igual manera, permite ver que la diferencia efectiva de masas cuadradas Δm_M^2 alcanza un valor mínimo en la resonancia. Lo anterior, provoca que los términos no diagonales en (2.45) proporcionales a $d\theta_M/dx$ sean comparables con Δm_M^2 , o dicho en otras palabras, la aproximación adiabática puede dejar de ser válida mientras el neutrino atraviesa la resonancia. Esto lleva nuevamente a la idea de posibles transiciones o *saltos* entre los estados de masa en la región de resonancia.

Además, permite entender cómo la presencia de la resonancia (para un ángulo de mezcla pequeño) puede inducir una completa transición de neutrinos electrónicos a neutrinos muónicos. Si los parámetros de mezcla son tales que $N_e \gg N_e^R$ en el centro del Sol, los neutrinos electrónicos producidos son casi puramente ν_2 (desde (2.69) se retoma que el ángulo de mezcla en el centro del Sol es casi

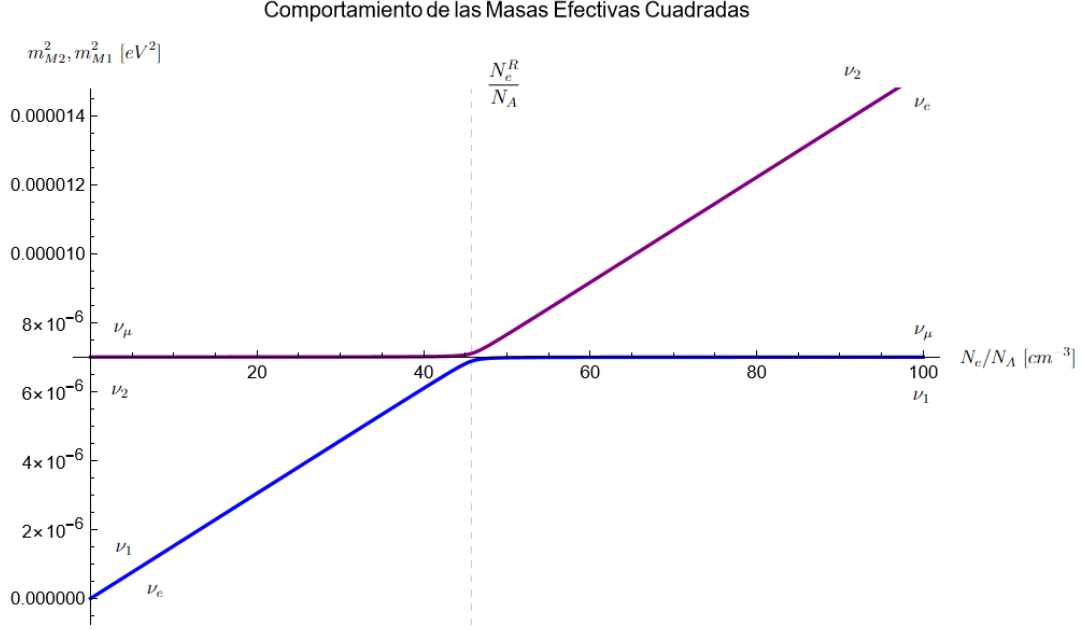


Figura 2.2: Comportamiento de las masas cuadradas efectivas m_{M2}^2 (curva de color morado) y m_{M1}^2 (curva de color azul) en función de la densidad de electrones N_e dividido por el número de Avogadro N_A , para $m_1 = 0$, $\Delta m^2 = 7 \times 10^{-6}[\text{eV}]^2$, $\sin^2 2\theta = 10^{-3}$ y $E = 1[\text{MeV}]$. La línea punteada pasa por el valor de la densidad en la resonancia N_e^R (dividido en el número de Avogadro).

$\pi/2$). A medida que el neutrino se propaga a través del Sol, cruza la resonancia en $N_e = N_e^R$, donde se minimiza Δm_{M}^2 . Si la resonancia se cruza adiabáticamente (se desprecian los términos fuera de la diagonal en el Hamiltoniano de (2.45)) el neutrino se mantiene en el estado ν_2 y escapa del Sol como $\nu_2 = \sin \theta \nu_e + \cos \theta \nu_\mu$, que para ángulos de mezcla pequeños es casi igual a ν_μ , dando paso a una transición casi total $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$.

2.4.3. Aproximación no adiabática

Si $\gamma \lesssim 1$ en una cierta región de la trayectoria del neutrino, se considera que el cruce por la resonancia es no adiabático. Lo anterior, se refiere a que el ángulo mezcla cambia significativamente (o bien, que su derivada es considerable) a medida que la probabilidad oscila. Este cambio brusco en el ángulo genera transiciones entre los estados de masa. Tal como se mencionó en la sección anterior, la región de resonancia es justamente donde se generan transiciones entre los estados de masa, por esto, dicha parte de la trayectoria es la que contempla la condición $\gamma \lesssim 1$ (formalmente se dice que el neutrino evoluciona cruzando no adiabáticamente la resonancia). Por ello, se debe considerar explícitamente la función de la densidad de electrones en el medio, ya que la región de resonancia queda determinada por esta función.

Observación. Si bien, todos los cálculos que se han realizado consideran la aproximación del límite ultrarelativista $t \approx x$, para este caso se pierde un poco el sentido físico de la posición y la densidad en dicha posición, por lo que, se retomará la ecuación de evolución en un sentido temporal.

Para tener consistencia con los desarrollos de la referencia [26], se invertirán los autovalores del Hamiltoniano en la base de sabor (2.38) (evidentemente, no varían los resultados previamente obtenidos), por lo que la evolución adiabática de los estados de masa viene dada por

$$\exp\left\{-i \int^t \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt\right\} |\nu_1\rangle \quad (2.72)$$

$$\exp\left\{i \int^t \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt\right\} |\nu_2\rangle \quad (2.73)$$

Ahora bien, el truco a la hora de calcular la aproximación no adiabática recae en utilizar los estados de la evolución adiabática como una nueva base, para la región donde no ocurren transiciones (lejos de la resonancia). A medida que el neutrino pasa por la resonancia, los estados adiabáticos se mezclan, pero cuando se aleja de esta región, el estado puede ser escrito como una combinación lineal de las evoluciones adiabáticas. Luego, un estado base producido en un tiempo t , que pasa a través de la resonancia en un tiempo t_r , y es detectado en un tiempo t' queda descrito por

$$\exp\left\{-i \int^t \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt\right\} |\nu_1\rangle \rightarrow a_1 \exp\left\{-i \int_{t_r}^{t'} \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt\right\} |\nu_1\rangle + a_2 \exp\left\{i \int_{t_r}^{t'} \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt\right\} |\nu_2\rangle \quad (2.74)$$

$$\exp\left\{i \int^t \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt\right\} |\nu_2\rangle \rightarrow -a_2^* \exp\left\{-i \int_{t_r}^{t'} \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt\right\} |\nu_1\rangle + a_1^* \exp\left\{i \int_{t_r}^{t'} \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt\right\} |\nu_2\rangle \quad (2.75)$$

donde a_1 y a_2 son números complejos, y cumplen $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$. Los factores de fase se seleccionan de tal manera que los coeficientes a_1 y a_2 son característicos de la transición en la región de resonancia y no se relacionan con los puntos de producción y detección del neutrino.

Luego, el cálculo de la amplitud de supervivencia (después de pasar por la resonancia) resulta análogo a lo realizado en la aproximación adiabática (salvo que ahora se considera la combinación lineal de las evoluciones de los estados de masa), quedando así

$$A_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = A_1(t) \exp\left\{-i \int_{t_r}^{t'} \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt\right\} + A_2(t) \exp\left\{i \int_{t_r}^{t'} \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt\right\} \quad (2.76)$$

con

$$A_1(t) = \cos \theta_0 \left[a_1 \cos \theta_M(t) \exp \left\{ i \int_{t_r}^t \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt \right\} - a_2^* \sin \theta_M(t) \exp \left\{ -i \int_{t_r}^t \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt \right\} \right] \quad (2.77)$$

$$A_2(t) = \cos \theta_0 \left[a_2 \cos \theta_M(t) \exp \left\{ i \int_{t_r}^t \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt \right\} + a_1^* \sin \theta_M(t) \exp \left\{ -i \int_{t_r}^t \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt \right\} \right] \quad (2.78)$$

De esta manera, la probabilidad de supervivencia viene dada por

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = \left[A_1(t) \exp \left\{ -i \int_{t_r}^{t'} \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt \right\} + A_2(t) \exp \left\{ i \int_{t_r}^{t'} \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt \right\} \right]^2 \quad (2.79)$$

Desarrollando el cuadrado

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = |A_1(t)|^2 + |A_2(t)|^2 + 2 |A_1(t) A_2(t)| \cos \left[\int_{t_r}^{t'} \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt + \Omega \right] \quad (2.80)$$

donde $\Omega = \arg(A_1^* A_2)$. El resultado anterior puede ser promediado sobre el punto de detección

$$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} (|a_1|^2 - |a_2|^2) \cos 2\theta_M \cos 2\theta - |a_1 a_2| \sin 2\theta_M \cos 2\theta \cos \left[\int_{t_r}^t \frac{\Delta m_M^2(t)}{4E} dt + \omega \right] \quad (2.81)$$

donde $\omega = \arg(a_1^* a_2)$. El término que contiene la integral corresponde a la parte oscilatoria de la probabilidad. Finalmente, se promedia sobre el punto de producción, quedando así

$$\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e}^{Non \text{ Abiabetic}} = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2} - P_{hop} \right) \cos 2\theta_M^{(i)} \cos 2\theta \quad (2.82)$$

donde se ha definido $P_{hop} \equiv |a_2|^2$ (utilizando la condición inicial $|a_1|^2 + |a_2|^2 = 1$), lo cual corresponde a la probabilidad de salto (o transición) de los estados de masa mientras el neutrino atraviesa la región de resonancia. Evidentemente, la expresión de la probabilidad de salto va a depender del tipo de densidad por la que esté pasando el neutrino. Además, si la densidad es lo suficiente suave como para no generar una transición entre los estados de masa, la probabilidad de salto se hace 0, recobrando así la expresión adiabática (2.67).

Una forma general de escribir la probabilidad de salto (en términos del tipo de densidad y del parámetro de adiabaticidad en la resonancia) viene dada por [18, 29, 22, 30, 23]

$$P_{hop} = \frac{\exp \left\{ -\frac{\pi \gamma_R F}{2} \right\} - \exp \left\{ -\frac{\pi \gamma_R F}{2 \sin^2 \theta} \right\}}{1 - \exp \left\{ -\frac{\pi \gamma_R F}{2 \sin^2 \theta} \right\}} \quad (2.83)$$

donde γ_R corresponde al parámetro de adiabaticidad en la resonancia

$$\gamma_R = \frac{\Delta m_M^2}{4E |d\theta_M(x)/dx|} \bigg|_{x=x_R} = \frac{\Delta m^2 \sin^2 2\theta}{2E \cos 2\theta |d \ln N_e/dx|_R} \quad (2.84)$$

Tabla 2.1: Comportamiento de parámetro F para los perfiles de densidad más usuales en el cálculo de las probabilidades de salto en la evolución no adiabática de neutrinos en materia.

Perfil de Densidad	Parámetro F	Referencias
$N_e \propto x$	1	[26, 19, 31, 28, 12, 23]
$N_e \propto 1/x$	$(1 - \tan^2 \theta)^2 / (1 + \tan^2 \theta)$	[23]
$N_e \propto e^{-x}$	$1 - \tan^2 \theta$	[29, 22, 30, 31, 34, 21, 20, 23, 12]

y el parámetro F depende de la forma de la densidad de neutrinos en el medio [18]. La Tabla 2.1 resume el comportamiento del parámetro F para los tipos de densidades más usuales:

Por otro lado, existe el llamado límite extremadamente no adiabático, el cual ocurre cuando el parámetro de adiabaticidad en la resonancia es muy pequeño $\gamma_R \ll 1$, cumpliéndose la condición

$$P_{hop}^{(\gamma_R \ll 1)} \simeq \cos^2 \theta \quad (2.85)$$

Al considerar un neutrino producido en un medio muy denso, en donde $\cos 2\theta_M^{(i)} \approx -1$, la probabilidad de supervivencia promedio (desde la ecuación (2.82)) viene dada por

$$\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e}^{(\gamma_R \ll 1)} \simeq 1 - \frac{1}{2} \sin^2 2\theta \quad (2.86)$$

donde se recupera la probabilidad de supervivencia en el vacío. Lo anterior, se debe a que el neutrino electrónico (producido casi puramente ν_2^M) pasa por una resonancia que no alcanza a generar transiciones en el sabor (por la rápida variación de la densidad).

Por último, es importante mencionar que la aplicación más importante del efecto MSW es en la transición de sabores de los neutrinos que se producen y propagan al interior del Sol.

Capítulo 3

Resolución del problema de los neutrinos solares

3.1. Cadena pp en flujo de neutrinos solares

Al interior del Sol se generan reacciones termonucleares, por lo que, no es de sorprender que sea una fuente abundante de neutrinos. El Modelo Solar Estándar (o por sus siglas en inglés SSM) ha sido un éxito a la hora de describir la composición y las energías de reacciones al interior del Sol. Además, el SSM entrega una detallada descripción sobre el comportamiento del flujo de los neutrinos solares. Las reacciones que generan los neutrinos ocurren a través de dos procesos principales, la cadena pp [5] y el ciclo CNO .

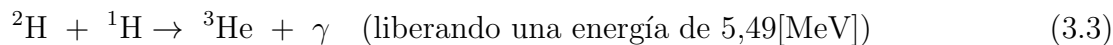
La cadena pp parte desde la fusión de dos núcleos de hidrógeno ^1H a deuterio ^2H , liberando un positrón y un neutrino electrónico



Los neutrinos que surgen de esta reacción portan energías menores a $0,42[\text{MeV}]$. Por otro lado, el positrón de la reacción se aniquila con un electrón y se liberan dos fotones



Luego, el deuterio ^2H se puede fusionar con un hidrógeno ^1H para producir un isótopo de ^3He



A partir de aquí, la reacción se subdivide en tres distintas ramas que resultan en la producción de un núcleo de ^4He . En la cadena *pp* I (con una frecuencia del 91 %) se fusionan dos núcleos de ^3He



En la cadena *pp* II (con una frecuencia del 9 %) reacciona un núcleo de ^4He producido en *pp* I



El 90 % de los neutrinos que se producen en *pp* II poseen energías de 0,861[MeV], mientras que el 10 % restante, poseen energías de 0,383[MeV]. Esto se debe a que el Li-7 formado puede quedar en su estado básico o en un nivel excitado, que decae después emitiendo un gamma.

En la cadena *pp* III (con una frecuencia del 0.1 %) reacciona el Helio-3 con Helio-4 como en *pp* II, pero el Be-7 captura un protón para formar Boro-8



Evidentemente, esta cadena no es la principal fuente de neutrinos solares, pero resulta muy importante, ya que estas reacciones producen neutrinos más energéticos (mayores a 10[MeV]).

Por último, resulta importante mencionar la reacción *pep*. Esta reacción es muy poco frecuente en comparación a *pp* (casi 1:400), ya que consta de la interacción simultánea entre tres partículas. La reacción *pep* (o reacción protón-electrón-protón) produce neutrinos con energías de 1,44[MeV] (más energéticos en comparación a *pp*).

Teniendo en cuenta todas las reacciones de la cadena *pp*, se puede estimar el flujo de neutrinos. Para esto, se divide la luminosidad solar con la energía liberada en la producción de los neutrinos, con ello, el flujo de neutrinos solares que llega a la Tierra por la cadena *pp* es de aproximadamente $6 \times 10^{10}[\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}]$.

3.2. Problema en la detección de neutrinos solares

Tal como se mencionó en el primer capítulo, uno de los primeros experimentos que buscaba medir el flujo de neutrinos solares, fue el que llevó a cabo Raymond Davis Jr. en la mina de Homestake en los años 1960. Por medio de la reacción de $\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow e^- + {}^{37}\text{Ar}^+$ se obtenía ${}^{37}\text{Ar}^+ + e^-$ y se medía la cantidad argón producido, y con ello se podía deducir la cantidad de neutrinos solares que habían sido detectados. Desde un comienzo, se observó un déficit de casi un tercio respecto al valor esperado. Este evento fue conocido como el problema de los neutrinos solares. En la Tabla 3.1 se encuentra un resumen de los datos medidos en Homestake y en experimentos posteriores donde aún se mantenía un déficit entre los valores experimentales y el modelo teórico (a excepción del último experimento que midió el flujo total de neutrinos solares):

Tabla 3.1: Resumen de los experimentos Homestake, SAGE, GALLEX + GNO, Super-Kamiokande y SNO en la forma de detección y comparación entre los valores teóricos y experimentales en el marco de la detección de neutrinos solares. La unidad SNU (Solar Neutrino Unit) corresponde a una captura por segundo por cada 10^{36} átomos de blanco.

Experimento	Forma de Detección	Valor Teórico	Valor Experimental
Homestake[7]	$\nu_e + {}^{37}\text{Cl} \rightarrow e^- + {}^{37}\text{Ar}^+$	$8,46^{+0,87}_{-0,88}$ SNU [27]	$2,56 \pm 0,16 \pm 0,16$ SNU [15]
SAGE[2]	$\nu_e + {}^{71}\text{Ga} \rightarrow e^- + {}^{71}\text{Ge}$	$127,9^{+8,1}_{-8,2}$ SNU [27]	$65,4^{+3,1+2,6}_{-3,0-2,8}$ SNU [3]
GALLEX + GNO[7]	$\nu_e + {}^{71}\text{Ga} \rightarrow e^- + {}^{71}\text{Ge}$	$127,9^{+8,1}_{-8,2}$ SNU[27]	$69,3 \pm 4,1 \pm 3,6$ SNU [8]
Super-Kamiokande[16]	$\nu_x + e^- \rightarrow \nu_x + e^-$	$(5,46 \pm 0,66) \times 10^6 [\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}]$ [35]	$(2,345 \pm 0,014 \pm 0,036) \times 10^6 [\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}]$ [4]
SNO+SK[17]	Múltiples Reacciones	$(5,46 \pm 0,66) \times 10^6 [\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}]$ [35]	$(5,25 \pm 0,16^{+0,11}_{-0,13}) \times 10^6 [\text{cm}^{-2}\text{s}^{-1}]$ [6]

La solución al problema de los neutrinos solares viene de considerar que los neutrinos poseen masa. Lo anterior, implica que los neutrinos transicionan (oscilan) de sabor a medida que se propagan, por lo que es esperable que la cantidad de neutrinos electrónicos producidos al interior del Sol sea diferente en comparación a la detectada en la Tierra. Además, la solución debe contemplar el efecto de la interacción de los neutrinos con la materia solar, ya que esta interacción genera cambios en las probabilidades de llegada de los neutrinos a la Tierra, por medio del mecanismo MSW [24, 25]. De esta manera, los datos se ajustan exitosamente a la teoría, y se modelan por medio de una evolución adiabática al interior del Sol (lo que será demostrado en la siguiente sección).

3.3. Explicación de los datos de neutrinos solares usando oscilaciones y efecto MSW

Los neutrinos solares son producidos en el núcleo del Sol, donde la densidad de electrones es alrededor de $10^{-7}[\text{MeV}^3]$. Para las reacciones de la cadena pp , la ramificación de pp II y la reacción pep los neutrinos producidos poseen energías no superiores a los 2[MeV], por lo que se conocen como “neutrinos de bajas energías”. Por otro lado, los neutrinos producidos por la ramificación de pp III poseen energías cercanas a los 10[MeV], por ello, se conocen como “neutrinos de altas energías”. La Tabla 3.2 detalla los datos de detección, energía, probabilidad de supervivencia y tipo de detector para neutrinos formados a partir de los distintos procesos:

Tabla 3.2: Resumen de detección, energía, probabilidad de supervivencia y tipo de error para neutrinos generados en las reacciones pp , ${}^7\text{Be}$, pep y ${}^8\text{B}$.

Reacción	Detector	Energía[MeV]	$P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$	Tipo de Error
pp	Borexino	$\approx 0,39$	$0,57 \pm 0,10$	Experimental
${}^7\text{Be}$	Borexino	0,862	$0,54 \pm 0,05$	Teórico
pep	Borexino	1,44	$0,42 \pm 0,11$	Experimental
${}^8\text{B}$	SNO	$\approx 7,40$	$0,35 \pm 0,09$	Experimental
${}^8\text{B}$	SNO	$\approx 8,00$	$0,34 \pm 0,08$	Experimental
${}^8\text{B}$	SNO	$\approx 9,50$	$0,33 \pm 0,09$	Experimental
${}^8\text{B}$	SNO+SK	$\approx 10,0$	$0,33 \pm 0,02$	Experimental

Por su parte, la Figura 3.1 muestra una gráfica de los datos experimentales de la probabilidad de supervivencia electrónica $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$ en función de las energías $E[\text{MeV}]$ con las que se producen los neutrinos solares.

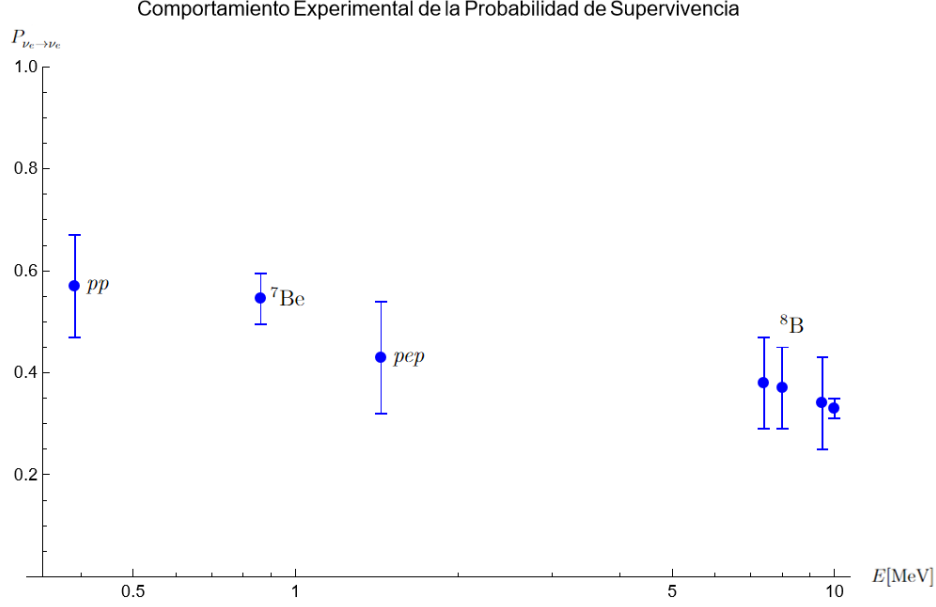


Figura 3.1: Comportamiento de los datos experimentales de la probabilidad de supervivencia electrónica $P_{\nu_e \rightarrow \nu_e}$ en función de las energías $E[\text{MeV}]$ (contando de izquierda a derecha) para neutrinos producidos en reacciones pp , ${}^7\text{Be}$, pep y ${}^8\text{B}$ (últimos cuatro puntos). Los datos se encuentran especificados en la Tabla 3.2

En primera instancia, se supondrá que el neutrino cruza no adiabáticamente la resonancia (inicialmente se desconoce la forma de evolución del neutrino), por lo que, la forma de evolución de los datos en la Figura 3.1 se debería modelar en base a la ecuación (2.82). La Figura 3.2 es una gráfica del comportamiento de las probabilidades de supervivencia versus las energías de los neutrinos. En el caso de un ángulo de mezcla relativamente *pequeño*, $\sin^2 2\theta = 0,005$ y tres posibles valores para la diferencia cuadrada de masa $\Delta m^2 = 7,4 \times 10^{-16}[\text{MeV}^2]$, $7,4 \times 10^{-17}[\text{MeV}^2]$ y $7,4 \times 10^{-18}[\text{MeV}^2]$.

La gráfica de la Figura 3.2 muestra que para neutrinos de bajas de energías la probabilidad de supervivencia es uno. Esto se debe a que los neutrinos de baja energía no cruzan la resonancia. Para energías más altas, los neutrinos producidos cruzan la resonancia en algún punto antes de salir del Sol, por lo que, el neutrino electrónico producido llega a la tierra como neutrino muónico. Por otro lado, para energías aún más grandes, la probabilidad de supervivencia vuelve a subir debido a las transiciones al cruzar la resonancia. Es importante notar que para valores mayores de Δm^2 , la energía donde comienza la transición (los valores donde aumenta la probabilidad de supervivencia) es también mayor. La no adiabaticidad aparece a altas energías porque para esos casos la longitud de onda de oscilación se hace mayor, y llega a ser comparable al largo característico L_C .

El hecho de que las probabilidades de supervivencia decrezcan a altas energías, permite concluir que el cruce de la resonancia es adiabático.

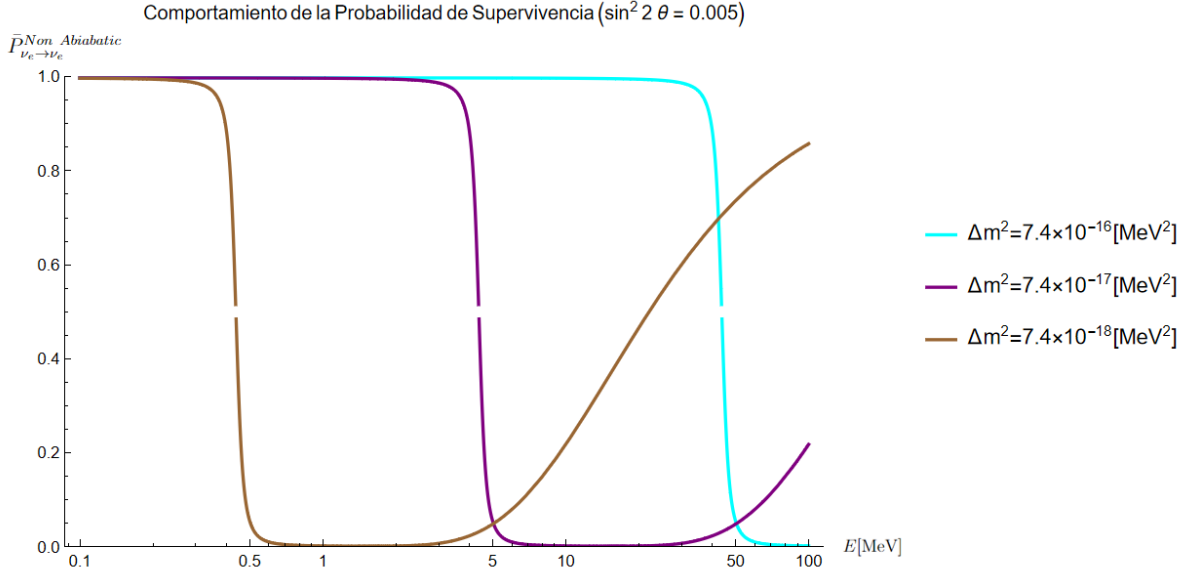


Figura 3.2: Gráficos teóricos de la probabilidad de supervivencia electrónica $\bar{P}_{\nu_e \rightarrow \nu_e}^{Non\ Abiatic}$ (descrita por la expresión (2.82)) en función de las energías E [MeV] de neutrinos, para los valores $N_e(0) = 5,1 \times 10^{-7} [\text{MeV}^3]$, $G_F = 1,166 \times 10^{-11} [\text{MeV}^{-2}]$, $\sin^2 2\theta = 0,005$, $\Delta m^2 = 7,4 \times 10^{-16} [\text{MeV}^2]$ (para la gráfica color cian), $\Delta m^2 = 7,4 \times 10^{-17} [\text{MeV}^2]$ (para la gráfica color morado) y $\Delta m^2 = 7,4 \times 10^{-18} [\text{MeV}^2]$ (para la gráfica color café).

Es necesario resaltar el hecho de que la *caída* de las probabilidades en la Figura 3.1 es menos pronunciada en comparación a la caída de la Figura 3.2. Lo anterior, permite concluir que $\sin^2 2\theta$ debe ser mucho más grande que 0,005. Es por esto, que la Figura 4.3 describe el comportamiento de las probabilidades de supervivencia versus las energías de los neutrinos, considerando un ángulo de mezcla $\sin^2 2\theta = 0,3$ y tres posibles valores para la diferencia cuadrada de masa $\Delta m^2 = 7,4 \times 10^{-16} [\text{MeV}^2]$, $7,4 \times 10^{-17} [\text{MeV}^2]$ y $7,4 \times 10^{-18} [\text{MeV}^2]$.

Aun cuando la caída de las probabilidades para $\sin^2 2\theta = 0,3$ es mucho menos pronunciada que en el gráfico de $\sin^2 2\theta = 0,005$, sigue sin ser suficiente para ajustarse a los datos de la Figura 3.1. De todas maneras, la Figura 3.3 es útil para darse cuenta que las transiciones adiabáticas con ángulos relativamente grandes no transforman completamente los neutrinos electrónicos en neutrinos muónicos, dicho en otras palabras, la probabilidad de supervivencia luego de pasar por la resonancia no es cero.

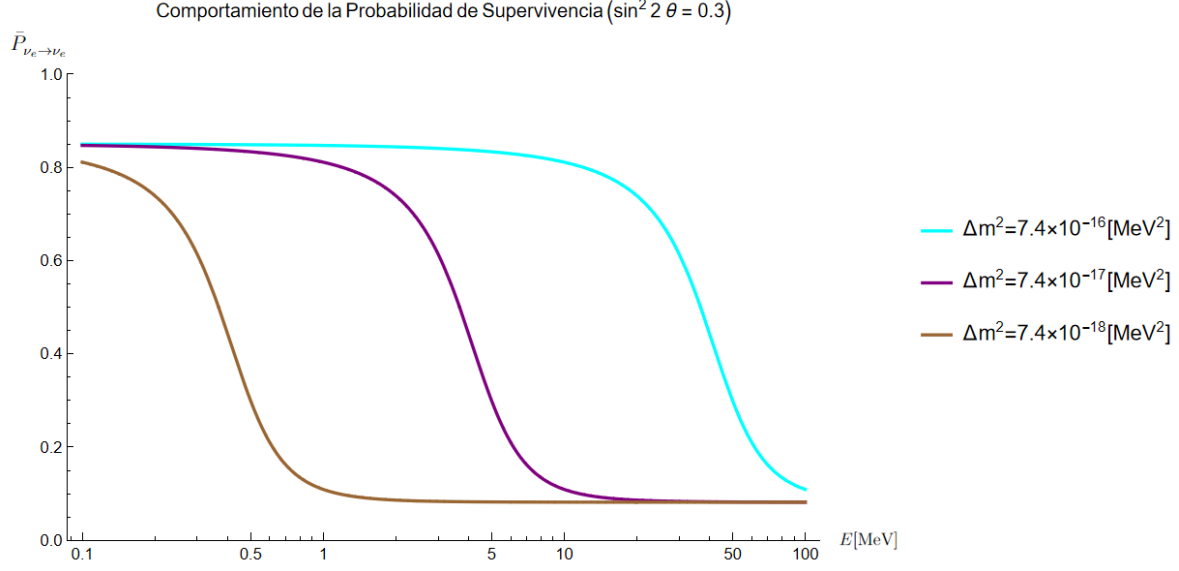


Figura 3.3: Gráficos teóricos de la probabilidad de supervivencia electrónica en función de las energías $E[\text{MeV}]$ de neutrinos, para los valores $N_e(0) = 5,1 \times 10^{-7}[\text{MeV}^3]$, $G_F = 1,166 \times 10^{-11}[\text{MeV}^{-2}]$, $\sin^2 2\theta = 0,3$, $\Delta m^2 = 7,4 \times 10^{-16}[\text{MeV}^2]$ (para la gráfica color cian), $\Delta m^2 = 7,4 \times 10^{-17}[\text{MeV}^2]$ (para la gráfica color morado) y $\Delta m^2 = 7,4 \times 10^{-18}[\text{MeV}^2]$ (para la gráfica color café).

Evidentemente, los datos de la Figura 3.3 requieren que el parámetro $\sin^2 2\theta$ sea mucho mayor a 0,3. El valor más acertado para $\sin^2 2\theta$ es 0,85 (en las referencias se suele llamar gran ángulo de mezcla). Además, el valor de Δm^2 que mejor se ajusta a los datos corresponde a $7,4 \times 10^{-17}[\text{MeV}^2]$. La Figura 3.4 describe el comportamiento de las probabilidades de supervivencia versus las energías de los neutrinos, y a su vez, permite corroborar los parámetros $\sin^2 2\theta$ y Δm^2 que mejor se ajustan a los datos experimentales.

Finalmente, la Figura 3.5 describe el comportamiento teórico de las probabilidades de supervivencia adiabáticas versus las energías de los neutrinos, y se ajusta a los datos experimentales de la Tabla 4.1.

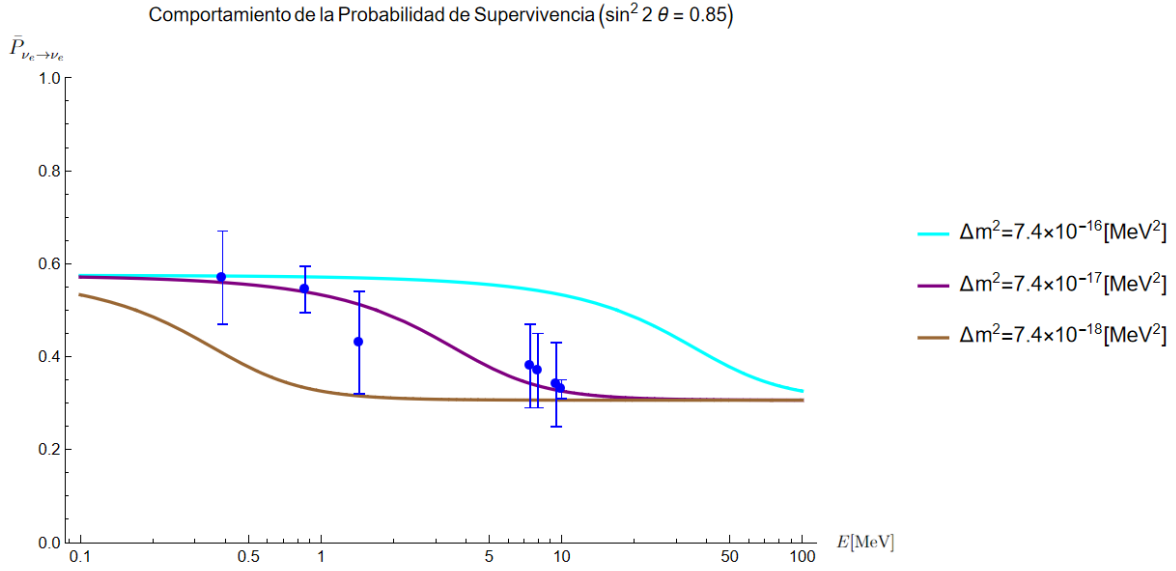


Figura 3.4: Gráficos teóricos de la probabilidad de supervivencia electrónica en función de la energía $E[\text{MeV}]$, para los valores $N_e(0) = 5,1 \times 10^{-7} [\text{MeV}^3]$, $G_F = 1,166 \times 10^{-11} [\text{MeV}^{-2}]$, $\sin^2 2\theta = 0,85$. Los puntos corresponden a los datos experimentales de la Tabla 4.1.

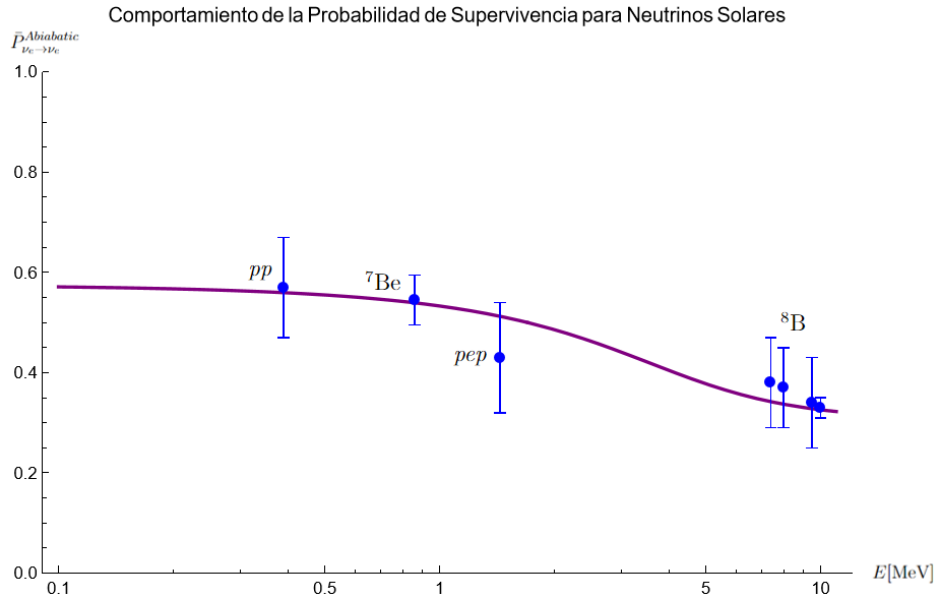


Figura 3.5: Gráfico teórico de la probabilidad de supervivencia adiabática de los neutrinos Solares. La gráfica teórica utiliza los parámetros de la solución del gran ángulo de mezcla ($\sin^2 2\theta = 0,85$ y $\Delta m^2 = 7,4 \times 10^{-17} [\text{MeV}^2]$). Los puntos (datos experimentales Tabla 4.1) corresponden a neutrinos producidos en reacciones pp , ${}^7\text{Be}$, pep y ${}^8\text{B}$ (últimos cuatro puntos).

Capítulo 4

Conclusión

Este trabajo desarrolla la explicación del problema de los neutrinos solares. Dicho problema consistía en que los experimentos mostraban un déficit del flujo de neutrinos solares (de sabor electrónico) respecto al flujo teórico esperado. En busca de una solución, se determinaron las probabilidades de supervivencia y transición contemplando únicamente la propagación del neutrino a través del vacío. La solución anterior no fue suficiente para explicar lo observado, ya que según el SSM, los neutrinos son producidos en el interior del Sol. En base a esto, se agrega un término asociado a la interacción débil de los neutrinos con la materia solar en el cálculo de las probabilidades. Este mecanismo es conocido como efecto MSW, y explica que surgen transiciones de $\nu_e \rightarrow \nu_\mu$ (dependientes de las energías) a medida que el neutrino se propaga a través del Sol.

Por su parte, el efecto MSW admite principalmente dos tipos de aproximaciones para la evolución de los neutrinos. La primera, se conoce como aproximación adiabática, y ocurre cuando el neutrino se propaga a través de medios que varían suavemente en su densidad de electrones, por lo que no generan transiciones entre estados de masa. La segunda, se conoce como aproximación no adiabática, y ocurre cuando el neutrino se propaga a través de medios en que la densidad varía bruscamente, generando transiciones entre los estados de masa. Estas dos aproximaciones son válidas en el marco de MSW, pero difieren del tipo de medio que describen. Los experimentos son consistentes con la forma de evolución adiabática con parámetros de oscilación $\sin^2 2\theta = 0,85$ y $\Delta m^2 = 7,4 \times 10^{-17} [\text{MeV}^2]$. La Figura 4.5 es una gráfica de las probabilidades teóricas, que se ajusta exitosamente a los datos de los experimentos de neutrinos solares [1, 9, 14, 13, 17].

Bibliografía

- [1] Comprehensive measurement of pp-chain solar neutrinos. *Nature*, 562(7728):505–510, 2018.
- [2] JN Abdurashitov, VN Gavrin, VV Gorbachev, PP Gurkina, TV Ibragimova, AV Kalikhov, NG Khairnasov, TV Knodel, IN Mirmov, AA Shikhin, et al. Measurement of the solar neutrino capture rate with gallium metal. iii. results for the 2002–2007 data-taking period. *Physical Review C*, 80(1):015807, 2009.
- [3] JN Abdurashitov, VN Gavrin, VV Gorbachev, PP Gurkina, TV Ibragimova, AV Kalikhov, NG Khairnasov, TV Knodel, IN Mirmov, AA Shikhin, et al. Measurement of the solar neutrino capture rate with gallium metal. iii. results for the 2002–2007 data-taking period. *Physical Review C*, 80(1):015807, 2009.
- [4] K Abe, Y Haga, Y Hayato, M Ikeda, K Iyogi, J Kameda, Y Kishimoto, Ll Marti, M Miura, S Moriyama, et al. Solar neutrino measurements in super-kamiokande-iv. *Physical Review D*, 94(5):052010, 2016.
- [5] Eric G Adelberger, A García, RG Hamish Robertson, KA Snover, AB Balantekin, K Heeger, MJ Ramsey-Musolf, D Bemmerer, A Junghans, CA Bertulani, et al. Solar fusion cross sections. ii. the p p chain and cno cycles. *Reviews of Modern Physics*, 83(1):195, 2011.
- [6] B Aharmim, SN Ahmed, AE Anthony, N Barros, EW Beier, Alain Bellerive, B Beltran, M Bergevin, SD Biller, K Boudjemline, et al. Combined analysis of all three phases of solar neutrino data from the sudbury neutrino observatory. *Physical Review C*, 88(2):025501, 2013.
- [7] Michael Altmann, M Balata, P Belli, E Bellotti, R Bernabei, E Burkert, C Cattadori, R Cerulli, Marco Chiarini, M Cribier, et al. Complete results for five years of gno solar neutrino observations. *Physics Letters B*, 616(3-4):174–190, 2005.
- [8] Michael Altmann, M Balata, P Belli, E Bellotti, R Bernabei, E Burkert, C Cattadori, R Cerulli, Marco Chiarini, M Cribier, et al. Complete results for five years of gno solar neutrino observations. *Physics Letters B*, 616(3-4):174–190, 2005.

- [9] C Arpesella, G Bellini, J Benziger, S Bonetti, B Caccianiga, Frank Calaprice, F Dalnoki-Veress, D d'Angelo, H de Kerret, A Derbin, et al. First real time detection of ^7Be solar neutrinos by borexino. *Physics Letters B*, 658(4):101–108, 2008.
- [10] John N Bahcall and Raymond Davis. Solar neutrinos: a scientific puzzle. In *Solar Neutrinos*, pages 141–144. CRC Press, 2018.
- [11] John N Bahcall, MH Pinsonneault, and Sarbani Basu. Solar models: Current epoch and time dependences, neutrinos, and helioseismological properties. *The Astrophysical Journal*, 555(2):990, 2001.
- [12] AB Balantekin. Exact solutions for matter-enhanced neutrino oscillations. *Physical Review D*, 58(1):013001, 1998.
- [13] G Bellini, J Benziger, S Bonetti, M Buizza Avanzini, B Caccianiga, L Cadonati, Frank Calaprice, C Carraro, A Chavarria, A Chepurnov, et al. Measurement of the solar ^8B neutrino rate with a liquid scintillator target and 3 mev energy threshold in the borexino detector. *Physical Review D*, 82(3):033006, 2010.
- [14] Gianpaolo Bellini, J Benziger, D Bick, S Bonetti, G Bonfini, D Bravo, M Buizza Avanzini, B Caccianiga, L Cadonati, F Calaprice, et al. First evidence of $p + e + p$ solar neutrinos by direct detection in borexino. *Physical Review Letters*, 108(5):051302, 2012.
- [15] Bruce T Cleveland, Timothy Daily, Raymond Davis Jr, James R Distel, Kenneth Lande, CK Lee, Paul S Wildenhain, and Jack Ullman. Measurement of the solar electron neutrino flux with the homestake chlorine detector. *The Astrophysical Journal*, 496(1):505, 1998.
- [16] Kamiokande Collaboration et al. Measurements of the solar neutrino flux from super-kamiokande's first 300 days. *arXiv preprint hep-ex/9805021*, 1998.
- [17] Sno Collaboration et al. Measurement of the rate of $\nu_e + d \rightarrow p + p + e^-$ interactions produced by ^8B solar neutrinos at the sudbury neutrino observatory. *arXiv preprint nucl-ex/0106015*, 2001.
- [18] Carlo Giunti and Chung W. Kim. *Fundamentals of Neutrino Physics and Astrophysics*. Oxford University Press, 03 2007.
- [19] WC Haxton. Analytic treatments of matter-enhanced solar-neutrino oscillations. *Physical Review D*, 35(8):2352, 1987.
- [20] Masatoshi Ito, Takao Kaneko, and Masami Nakagawa. On analytic solution of resonant mixing for solar neutrino oscillations. *Progress of Theoretical Physics*, 79(1):13–18, 1988.

- [21] Takao Kaneko. Analytic solution for resonant mixing of solar neutrinos. *Progress of Theoretical Physics (Kyoto)*, 78(3):532–534, 1987.
- [22] PI Krastev and ST Petcov. On the analytic description of two-neutrino transitions of solar neutrinos in the sun. *Physics Letters B*, 207(1):64–74, 1988.
- [23] Tzee-Ke Kuo and James Pantaleone. Nonadiabatic neutrino oscillations in matter. *Physical Review D*, 39(7):1930, 1989.
- [24] SP Mikheev and A Yuu Smirnov. Resonance enhancement of oscillations in matter and solar neutrino spectroscopy. *Sov. J. Nucl. Phys.(Engl. Transl.);(United States)*, 42(6), 1985.
- [25] SP Mikheyev and A You Smirnov. Resonant amplifications of ν -oscillations in matter and solar-neutrino spectroscopy. *Solar Neutrinos. The First Thirty Years*, page 310, 1994.
- [26] Stephen J Parke. Nonadiabatic level crossing in resonant neutrino oscillations. *Physical Review Letters*, 57(10):1275, 1986.
- [27] Carlos Pena-Garay and Aldo Serenelli. Solar neutrinos and the solar composition problem. *arXiv preprint arXiv:0811.2424*, 2008.
- [28] ST Petcov. On the non-adiabatic neutrino oscillations in matter. *Physics Letters B*, 191(3):299–303, 1987.
- [29] ST Petcov. Exact analytic description of two-neutrino oscillations in matter with exponentially varying density. *Physics Letters B*, 200(3):373–379, 1988.
- [30] ST Petcov. On the oscillations of solar neutrinos in the sun. *Physics Letters B*, 214(1):139–146, 1988.
- [31] Pierre Pizzochero. Nonadiabatic level crossing in neutrino oscillations for an exponential solar density profile. *Physical Review D*, 36(8):2293, 1987.
- [32] Bruno Pontecorvo. Inverse β processes and nonconservation of lepton charge. *Zhur. Eksptl'. i Teoret. Fiz.*, 34, 1958.
- [33] Bruno Pontecorvo. Mesonium and antimesonium. *Soviet Journal of Experimental and Theoretical Physics*, 6:429, 1958.
- [34] S Toshev. Exact analytical solution of the two-neutrino evolution equation in matter with exponentially varying density. *Physics Letters B*, 196(2):170–174, 1987.

- [35] Núria Vinyoles, Aldo M Serenelli, Francesco L Villante, Sarbani Basu, Johannes Bergström, MC Gonzalez-Garcia, Michele Maltoni, Carlos Peña-Garay, and Ningqiang Song. A new generation of standard solar models. *The Astrophysical Journal*, 835(2):202, 2017.

Apéndice A

Hamiltoniano en la base de Sabor

Para expresar el Hamiltoniano en la base de sabor debemos, se debe resolver la siguiente expresión

$$\mathbf{H}_F = \mathbf{U}\mathbf{H}_M\mathbf{U}^T + \mathbf{A} \quad (\text{A.1})$$

Reemplazando las matrices de mezcla, el hamiltoniano diagonal y la matriz de interacción

$$\mathbf{H}_F = \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E_1 & 0 \\ 0 & E_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{cc} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.2})$$

Notar que las energías (E_1 y E_2) se pueden expresar por

$$E_1 = \bar{E} - \frac{\Delta E}{2}$$

$$E_2 = \bar{E} + \frac{\Delta E}{2}$$

donde

$$\bar{E} = \frac{E_1 + E_2}{2}$$

$$\Delta E = E_2 - E_1$$

Así

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_F &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{E} - \frac{\Delta E}{2} & 0 \\ 0 & \bar{E} + \frac{\Delta E}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{cc} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \left[\begin{pmatrix} \bar{E} & 0 \\ 0 & \bar{E} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{\Delta E}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\Delta E}{2} \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A_{cc} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= \bar{E}[\mathbf{U}\mathbf{U}^T] + \frac{\Delta E}{2} \left[\mathbf{U} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}^T \right] + \begin{pmatrix} A_{cc} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Notar que la matriz $\mathbf{U}$ es ortogonal, quedando lo siguiente

$$\bar{E} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \bar{E} \begin{pmatrix} \cos \theta & \sin \theta \\ -\sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} = \bar{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Luego

$$\mathbf{H}_F = \bar{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\Delta E}{2} \left[\mathbf{U} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}^T \right] + \begin{pmatrix} A_{cc} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A.3})$$

Desarrollando el tercer término de la expresión anterior

$$\begin{pmatrix} A_{cc} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \frac{A_{cc}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{A_{cc}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Reemplazando la nueva expresión de la matriz de interacción

$$\mathbf{H}_F = \bar{E} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{A_{cc}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + \frac{\Delta E}{2} \left[\mathbf{U} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}^T \right] + \frac{A_{cc}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

El primer y segundo término generan una fase global, por lo que, pueden ser despreciados

$$\mathbf{H}_F = \frac{\Delta E}{2} \left[\mathbf{U} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \mathbf{U}^T \right] + \frac{A_{cc}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.4})$$

Desarrollando

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_F &= \frac{\Delta E}{2} \begin{pmatrix} -\cos \theta & \sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} + \frac{A_{cc}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \\ &= \frac{\Delta E}{2} \begin{pmatrix} -\cos^2 \theta + \sin^2 \theta & 2 \sin \theta \cos \theta \\ 2 \sin \theta \cos \theta & \cos^2 \theta - \sin^2 \theta \end{pmatrix} + \frac{A_{cc}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Al aplicar identidades trigonométricas y sumando las matrices

$$\mathbf{H}_F = \frac{\Delta E}{2} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} + \frac{A_{cc}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (\text{A.5})$$

Expandiendo las energías (E_1 y E_2) por Taylor

$$E_1 = E + 0 + \frac{m_1^2}{2E} + O[m_1^3] \approx E + \frac{m_1^2}{2E} \quad (\text{A.6})$$

$$E_2 = E + 0 + \frac{m_2^2}{2E} + O[m_2^3] \approx E + \frac{m_2^2}{2E} \quad (\text{A.7})$$

Luego

$$\Delta E = E_2 - E_1 = E + \frac{m_2^2}{2E} - \left(E + \frac{m_1^2}{2E} \right) = \frac{m_2^2 - m_1^2}{2E} = \frac{\Delta m^2}{2E} \quad (\text{A.8})$$

Así

$$\mathbf{H}_F = \frac{\Delta m^2}{4E} \begin{pmatrix} -\cos 2\theta & \sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{pmatrix} + \frac{A_{cc}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2 \cos 2\theta \end{pmatrix} + \frac{A_{cc}}{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Finalmente, se obtiene el Hamiltoniano en la base de sabor de la referencia [18]

$$\mathbf{H}_F = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{cc} & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2 \cos 2\theta - A_{cc} \end{pmatrix} \quad (\text{A.9})$$

Apéndice B

Hamiltoniano en la base de Sabor en términos de los ángulos de mezcla en la materia (o efectivos)

Para diagonalizar el Hamiltoniano en la base de sabor, se debe tener en cuenta la transformación ortogonal para matrices de la forma

$$\mathbf{H}_F = \mathbf{U}_M \mathbf{H}_M \mathbf{U}_M^T \quad (\text{B.1})$$

Tomando la matriz de mezcla con una parametrización de una matriz de rotación (con parámetros variables asociados a la materia)

$$\mathbf{U}_M = \begin{pmatrix} \cos \theta_M(x) & \sin \theta_M(x) \\ -\sin \theta_M(x) & \cos \theta_M(x) \end{pmatrix} \quad (\text{B.2})$$

Esto, permite escribir la relación

$$\mathbf{U}_M^T \mathbf{H}_F \mathbf{U}_M = \mathbf{H}_M \quad (\text{B.3})$$

Donde $\mathbf{H}_M$ se arma en base a los autovalores de $\mathbf{H}_F$, y $\mathbf{U}_M$ se arma en base a los autovectores de $\mathbf{H}_F$. Primero, se calculan los autovalores de $\mathbf{H}_F$

$$\det(\mathbf{H}_F - \lambda I) = 0 \quad (\text{B.4})$$

Así

$$\frac{1}{4E} \begin{vmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{cc} - \lambda & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2 \cos 2\theta - A_{cc} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (\text{B.5})$$

Realizando un cambio de variable de la forma

$$a = -\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{cc} \quad (\text{B.6})$$

$$b = \Delta m^2 \sin 2\theta \quad (\text{B.7})$$

Reemplazando en la expresión del determinante

$$\frac{1}{4E} \begin{vmatrix} a - \lambda & b \\ b & -a - \lambda \end{vmatrix} = 0$$

Resolviendo el determinante

$$\frac{1}{4E} [(a - \lambda)(-a - \lambda) - b^2] = 0$$

Despejando λ

$$\lambda = \pm \sqrt{a^2 + b^2}$$

Reemplazando con las expresiones para a y b

$$\lambda = \pm \sqrt{(-\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{cc})^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2}$$

La referencia [18] define toda la expresión de la raíz como la diferencia efectiva de masa al cuadrado

$$\Delta m_M^2 \equiv \sqrt{(-\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{cc})^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2} \quad (\text{B.8})$$

Así, se puede armar la matriz $\mathbf{H}_M$ (reincorporando el factor $1/4E$)

$$\mathbf{H}_M = \frac{1}{4E} \text{diag}(-\Delta m_M^2, \Delta m_M^2)$$

Antes de armar las matrices $\mathbf{U}_M$ y $\mathbf{U}_M^T$, se debe notar que debido a la parametrización que se está considerando, la suma de cada componente cuadrado de cada autovector debe ser 1, por ejemplo, si $\mathbf{V}_1$ es el primer autovector y sus componentes son v_1 y v_2 , entonces $v_1^2 + v_2^2 = 1$.

Al plantear la ecuación de los autovectores

$$(\mathbf{H}_F - \lambda_1 I) \mathbf{V}_1 = \vec{0} \quad (\text{B.9})$$

Donde λ_1 es el primer autovalor (que en este caso será tomado como $-\Delta m_M^2$) y $\mathbf{V}_1$ es el primer autovector (de componentes v_1 y v_2), quedando así

$$\left[\frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{cc} & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2 \cos 2\theta - A_{cc} \end{pmatrix} - [-\Delta m_M^2] \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right] \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.10})$$

Al desarrollar la parte izquierda de la expresi3n

$$\frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{cc} + \Delta m_M^2 & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2 \cos 2\theta - A_{cc} + \Delta m_M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad (\text{B.11})$$

Realizando nuevamente el cambio de variable

$$a = -\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{cc} \quad (\text{B.12})$$

$$b = \Delta m^2 \sin 2\theta \quad (\text{B.13})$$

La ecuaci3n (B.11) pasa a verse de la siguiente forma

$$\frac{1}{4E} \begin{pmatrix} a + \sqrt{a^2 + b^2} & b \\ b & -a + \sqrt{a^2 + b^2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{4E} & \frac{b}{4E} \\ \frac{b}{4E} & \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{4E} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Multiplicando las matrices

$$\begin{pmatrix} \frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{4E} v_1 + \frac{b}{4E} v_2 \\ \frac{b}{4E} v_1 + \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{4E} v_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Planteando un sistema de ecuaciones

$$\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{4E} v_1 + \frac{b}{4E} v_2 = 0$$

$$\frac{b}{4E} v_1 + \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{4E} v_2 = 0$$

Multiplicando la ecuaci3n de arriba por v_1 y la de abajo por $-v_2$

$$\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{4E} v_1^2 + \frac{b}{4E} v_2 v_1 = 0$$

$$-\frac{b}{4E} v_1 v_2 - \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{4E} v_2^2 = 0$$

Sumando las ecuaciones

$$\frac{a + \sqrt{a^2 + b^2}}{4E} v_1^2 - \frac{-a + \sqrt{a^2 + b^2}}{4E} v_2^2 = 0$$

Separando t3rminos (y simplificando $1/4E$)

$$a v_1^2 + \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right) v_1^2 + a v_2^2 - \left(\sqrt{a^2 + b^2} \right) v_2^2 = 0$$

Factorizando

$$a(v_1^2 + v_2^2) + \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)(v_1^2 - v_2^2) = 0$$

Recordar que v_1 y v_2 cumplen

$$v_1^2 + v_2^2 = 1 \rightarrow v_1^2 = 1 - v_2^2$$

Así

$$a + \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)(1 - v_2^2 - v_2^2) = 0 \rightarrow a + \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right) - 2\left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)v_2^2 = 0$$

Al despejar v_2^2 de la expresión anterior

$$v_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a + \left(\sqrt{a^2 + b^2}\right)}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right)$$

o bien

$$v_2^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} + 1 \right)$$

Al reemplazar las expresiones originales de a y b

$$(-\sin \theta_M)^2 = \frac{1}{2} \left(\frac{-\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{cc}}{\sqrt{(-\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{cc})^2 + (\Delta m^2 \sin 2\theta)^2}} + 1 \right) = \frac{1}{2} \frac{-\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{cc}}{\Delta m_M^2} + \frac{1}{2} \quad (\text{B.14})$$

Aplicando identidades trigonométricas para $(-\sin \theta_M)^2$

$$(-\sin \theta_M)^2 = \sin^2 \theta_M = \frac{1 - \cos 2\theta_M}{2} \quad (\text{B.15})$$

Al igualar las expresiones (B.14) y (B.15)

$$\frac{1}{2} - \frac{\cos 2\theta_M}{2} = \frac{1}{2} \frac{-\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{cc}}{\Delta m_M^2} + \frac{1}{2} \quad (\text{B.16})$$

Luego

$$\cos 2\theta_M = \frac{\Delta m^2 \cos 2\theta - A_{cc}}{\Delta m_M^2} \rightarrow \Delta m_M^2 \cos 2\theta_M = \Delta m^2 \cos 2\theta - A_{cc} \quad (\text{B.17})$$

Con lo anterior, resulta trivial despejar la expresión de $\sin 2\theta_M$, basta con tener en cuenta la siguiente identidad trigonométrica

$$\cos^2 2\theta_M + \sin^2 2\theta_M = 1$$

Retomando el cambio de variable de a y b

$$\cos 2\theta_M = \frac{-a}{\sqrt{a^2 + b^2}} \rightarrow \cos^2 2\theta_M = \frac{a^2}{a^2 + b^2} \quad (\text{B.18})$$

Así

$$\sin^2 2\theta_M = 1 - \frac{a^2}{a^2 + b^2} = \frac{a^2 + b^2 - a^2}{a^2 + b^2} = \frac{b^2}{a^2 + b^2} \quad (\text{B.19})$$

Reemplazando con las expresiones para a y b

$$\sin 2\theta_M = \frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{\Delta m^2 \sin 2\theta}{\Delta m_M^2} \rightarrow \Delta m_M^2 \sin 2\theta_M = \Delta m^2 \sin 2\theta \quad (\text{B.20})$$

Finalmente, se obtiene la expresión del Hamiltoniano en la base de sabor en términos de parámetros asociados a la materia

$$\mathbf{H}_F = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m_M^2 \cos 2\theta_M(x) & \Delta m_M^2 \sin 2\theta_M(x) \\ \Delta m_M^2 \sin 2\theta_M(x) & \Delta m_M^2 \cos 2\theta_M(x) \end{pmatrix} \quad (\text{B.21})$$

Apéndice C

Hamiltoniano en la base de Sabor en términos de las derivada del ángulo de mezcla en materia

Primero, se debe considerar la siguiente transformación para la base

$$\begin{pmatrix} \psi_{ee} \\ \psi_{e\mu} \end{pmatrix} \rightarrow \mathbf{U}_M \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \quad (\text{C.1})$$

Así

$$i \frac{d}{dt} \left[\mathbf{U}_M \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{cc} & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2 \cos 2\theta - A_{cc} \end{pmatrix} \mathbf{U}_M \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \quad (\text{C.2})$$

Al operar con $\mathbf{U}_M^T$ por el lado izquierdo

$$\mathbf{U}_M^T i \frac{d}{dt} \left[\mathbf{U}_M \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4E} \mathbf{U}_M^T \begin{pmatrix} -\Delta m^2 \cos 2\theta + A_{cc} & \Delta m^2 \sin 2\theta \\ \Delta m^2 \sin 2\theta & \Delta m^2 \cos 2\theta - A_{cc} \end{pmatrix} \mathbf{U}_M \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \quad (\text{C.3})$$

Al reemplazar en (C.3) con la transformación ortogonal $\mathbf{U}_M^T \mathbf{H}_F \mathbf{U}_M$

$$\mathbf{U}_M^T i \frac{d}{dt} \left[\mathbf{U}_M \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \right] = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m_M^2 & 0 \\ 0 & \Delta m_M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \quad (\text{C.4})$$

Desarrollando la derivada del lado izquierdo

$$\mathbf{U}_M^T i \frac{d}{dt} \left[\mathbf{U}_M \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \right] = i \mathbf{U}_M^T \left[\frac{d\mathbf{U}_M}{dt} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} + \mathbf{U}_M \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \right]$$

$$= i\mathbf{U}_M^T \frac{d\mathbf{U}_M}{dt} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} + i\mathbf{U}_M^T \mathbf{U}_M \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \quad (\text{C.5})$$

Por ortogonalidad de las matrices $\mathbf{U}_M^T \mathbf{U}_M = \mathbf{I}$, quedando

$$\mathbf{U}_M^T i \frac{d}{dt} \left[\mathbf{U}_M \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \right] = i\mathbf{U}_M^T \frac{d\mathbf{U}_M}{dt} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} + i \frac{d}{dt} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \quad (\text{C.6})$$

Dado que se trabaja en el marco del límite ultrarelativista

$$t \approx x$$

Entonces

$$\mathbf{U}_M^T i \frac{d}{dx} \left[\mathbf{U}_M \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \right] = i\mathbf{U}_M^T \frac{d\mathbf{U}_M}{dx} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} + i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix}$$

Para desarrollar el primer término del lado izquierdo, se debe recordar la parametrización de las matrices de rotación

$$\mathbf{U}_M = \begin{pmatrix} \cos \theta_M(x) & \sin \theta_M(x) \\ -\sin \theta_M(x) & \cos \theta_M(x) \end{pmatrix} \quad (\text{C.7})$$

$$\mathbf{U}_M^T = \begin{pmatrix} \cos \theta_M(x) & -\sin \theta_M(x) \\ \sin \theta_M(x) & \cos \theta_M(x) \end{pmatrix} \quad (\text{C.8})$$

Así

$$\begin{aligned} i\mathbf{U}_M^T \frac{d\mathbf{U}_M}{dx} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} &= i \begin{pmatrix} \cos \theta_M(x) & -\sin \theta_M(x) \\ \sin \theta_M(x) & \cos \theta_M(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{d \cos \theta_M(x)}{dx} & \frac{d \sin \theta_M(x)}{dx} \\ -\frac{d \sin \theta_M(x)}{dx} & \frac{d \cos \theta_M(x)}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \\ &= i \begin{pmatrix} \cos \theta_M(x) & -\sin \theta_M(x) \\ \sin \theta_M(x) & \cos \theta_M(x) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -\sin \theta_M(x) \frac{d\theta_M}{dx} & \cos \theta_M(x) \frac{d\theta_M}{dx} \\ -\cos \theta_M(x) \frac{d\theta_M}{dx} & -\sin \theta_M(x) \frac{d\theta_M}{dx} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \end{aligned} \quad (\text{C.9})$$

Multiplicando las matrices

$$\mathbf{U}_M^T \frac{d\mathbf{U}_M}{dx} = \begin{pmatrix} -\cos \theta_M \sin \theta_M \frac{d\theta_M}{dx} + \sin \theta_M \cos \theta_M \frac{d\theta_M}{dx} & \cos^2 \theta_M \frac{d\theta_M}{dx} + \sin^2 \theta_M \frac{d\theta_M}{dx} \\ -\sin^2 \theta_M \frac{d\theta_M}{dx} - \cos^2 \theta_M \frac{d\theta_M}{dx} & \cos \theta_M \sin \theta_M \frac{d\theta_M}{dx} - \sin \theta_M \cos \theta_M \frac{d\theta_M}{dx} \end{pmatrix}$$

Notamos que los términos de la diagonal principal son 0, y los términos fuera de la diagonal dependen únicamente de las derivadas espaciales del ángulo de mezcla efectivo

$$\mathbf{U}_M^T \frac{d\mathbf{U}_M}{dx} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{d\theta_M}{dx} \\ -\frac{d\theta_M}{dx} & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{C.10})$$

o bien

$$i\mathbf{U}_M^T \frac{d\mathbf{U}_M}{dx} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} 0 & \frac{d\theta_M}{dx} \\ -\frac{d\theta_M}{dx} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \quad (\text{C.11})$$

Con ello, la parte de la derivada en la ecuación de evolución temporal viene dada por

$$\mathbf{U}_M^T i \frac{d}{dx} \left[\mathbf{U}_M \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \right] = i \begin{pmatrix} 0 & \frac{d\theta_M}{dx} \\ -\frac{d\theta_M}{dx} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} + i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix}$$

Reemplazando en la expresión (C.4)

$$i \begin{pmatrix} 0 & \frac{d\theta_M}{dx} \\ -\frac{d\theta_M}{dx} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} + i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m_M^2 & 0 \\ 0 & \Delta m_M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \quad (\text{C.12})$$

Pasando el factor $1/4E$ al lado izquierdo e introduciendo las constantes al interior de las matrices

$$\begin{pmatrix} 0 & 4Ei \frac{d\theta_M}{dx} \\ -4Ei \frac{d\theta_M}{dx} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} + 4Ei \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta m_M^2 & 0 \\ 0 & \Delta m_M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \quad (\text{C.13})$$

Al pasar el primer término del lado izquierdo restando

$$4Ei \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\Delta m_M^2 & 0 \\ 0 & \Delta m_M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 0 & 4Ei \frac{d\theta_M}{dx} \\ -4Ei \frac{d\theta_M}{dx} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix}$$

Finalmente, se obtiene el Hamiltoniano en la base de sabor en términos de las derivadas del ángulo de mezcla en la materia

$$i \frac{d}{dx} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} = \frac{1}{4E} \begin{pmatrix} -\Delta m_M^2 & -4Ei \frac{d\theta_M}{dx} \\ 4Ei \frac{d\theta_M}{dx} & \Delta m_M^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \phi_{ee} \\ \phi_{e\mu} \end{pmatrix} \quad (\text{C.14})$$