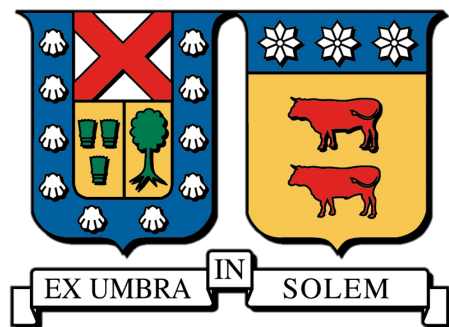




UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
VALPARAÍSO - CHILE

Elementos finitos tiempo-espacio para ecuaciones de onda

Tesis presentada por:

Roberto González

*Como requisito para optar al título profesional de Ingeniería Civil
Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María.*

Director de Tesis:

Dr. Michael Karkulik

Junio, 2025



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título; ☐ Tesis de Postgrado;

Título del trabajo: Elementos finitos tiempo-espacio para ecuaciones de onda

Nombre del candidato(a): Roberto Andrés González Fuentes

Carrera / Grado: Ingeniería Civil Matemática / Ingeniero Civil Matemático

Campus: Casa Central Valparaíso ; Departamento: Departamento de Matemática

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Michael Karkulik, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente DEJO CONSTANCIA que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL

☒ El trabajo NO contiene información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo CONTIENE información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (embargo) por:

☐ 6 meses; ☐ 12 meses; ☐ 2 años; ☐ 3 años; ☐ 5 años; ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 31/07/2025 ; Firma: _____

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: _____ ; Firma:

Este formulario debe ser insertado como página 2 de la memoria o tesis, completado y firmado por



estudiante y profesor(a) antes de la entrega en portal PRISMA de Biblioteca USM.

TÍTULO DE LA TESIS:

Elementos finitos tiempo-espacio para ecuaciones de onda.

AUTOR:

ROBERTO GONZÁLEZ

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniería Civil Matemática de la Universidad Técnica Federico Santa María.

COMISIÓN DE TESIS:

Integrantes

Firma

Dr. Michael Karkulik

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

Dr. Thomas Führer

Pontificia Universidad Católica de Chile, Chile.

Dr. Alberto Mercado

Universidad Técnica Federico Santa María, Chile.

Valparaíso, Junio 2025.

ABSTRACT

En esta memoria aproximaremos numéricamente la ecuación de onda usando un método de elementos finitos tipo *Mínimos cuadrados*, en el espacio tiempo. Para esto presentaremos preliminares matemáticos necesarios para el análisis del problema, mostraremos resultados existentes para la ecuación de onda escalar, obtendremos nuevos resultados para su formulación como sistema de primer orden, planteando su existencia y unicidad en espacios adecuados, así como densidad de funciones suaves en esos espacios. Por último, plantearemos el método numérico y haremos experimentos computacionales.

AGRADECIMIENTOS

Quiero expresar mi agradecimiento a la universidad, así como a sus profesores y funcionarios, por el apoyo brindado durante mi formación. En particular, extendiendo mi sincero agradecimiento a mi profesor guía, Michael Karkulik, por introducirme a la investigación y por su constante apoyo durante el desarrollo de esta memoria.

Extendiendo mi agradecimiento a los profesores Alberto Mercado y Thomas Führer, gracias por formar parte de la comisión evaluadora de este trabajo.

Agradezco a Michael Karkulik y Thomas Führer por la colaboración que hizo posible la realización del primer artículo científico en el que tuve el honor de participar, el cual constituye la base de esta memoria.

Finalmente, quiero expresar mi profunda gratitud a mi familia y amigos, quienes han estado a mi lado apoyándome y acompañándome.

Índice general

Abstract	4
Agradecimientos	5
1. Introducción	1
1.1. Acerca de la ecuación de onda	1
2. Preliminares	3
2.1. Características del dominio	3
2.2. Espacios de Lebesgue	4
2.3. Espacios de Sobolev	4
2.4. Espacio $H(\text{div})$	5
2.5. Elementos finitos	5
2.6. Interpoladores	6
2.7. Espacio de Sobolev–Bochner	7
3. Ecuación de onda	13
4. Sistema de primer orden	16
4.0.1. Resultados principales	18
4.0.2. Análisis del operador asociado a la ecuación onda de primer grado	19
4.0.3. Demostración del Teorema 4.0.2	24

5. Solución numérica	26
5.0.1. Formulación Mínimos cuadrados y discretización	26
5.0.2. Estimador de error a posteriori y algoritmo adaptativo	28
5.1. Ejemplos numéricos	29
5.1.1. Solución suave para $d = 1$	29
5.1.2. Pulso gaussiano para $d = 1$	29
5.1.3. Solución que no cumple con las condiciones de borde inicialmente, con $d = 1$	31
5.1.4. Solución suave para $d = 2$	31
5.1.5. pulso gaussiano para $d = 2$	34
5.1.6. Solución que no tiene condiciones de borde cero inicialmente, con $d = 2$	34
6. Conclusión	36
Bibliografía	38

Capítulo 1

Introducción

1.1. Acerca de la ecuación de onda

La ecuación de onda en una dimensión fue planteada por primera vez por d'Alembert, al estudiar el problema de una cuerda vibrante. La analizó en su forma de EDP de segundo orden, es decir:

$$u_{tt} = u_{xx} \text{ en } (0, T) \times (0, a)$$

con T el tiempo máximo a considerar y a el largo de la cuerda, complementada además con condiciones iniciales y de borde adecuadas.

Con el tiempo la ecuación de onda se extendió a dominios más generales $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ y con diferentes tipos de condiciones de borde e iniciales, un caso es:

$$\begin{aligned}\partial_{tt}u - \Delta_{\mathbf{x}}u &= f \text{ en } (0, T) \times \Omega, \\ u(0, \cdot) &= u_0 \text{ en } \Omega, \\ u'(0, \cdot) &= u_1 \text{ en } \Omega, \\ u &= 0 \text{ en } \partial(0, T) \times \Omega.\end{aligned}$$

Esta ecuación tiene diversas aplicaciones, por ejemplo, en acústica. En esta memoria, buscamos resolver numéricamente el siguiente problema equivalente, tomando $v = u'$ y $\sigma = \nabla u$:

Ecuación de onda escalar (formulación de primer orden) *Dados un dominio politopal Lipschitz $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ y un intervalo de tiempo $J = (0, T)$, buscamos funciones*

$v : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ y $\boldsymbol{\sigma} : J \times \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$ que cumplan el siguiente sistema de ecuaciones diferenciales parciales:

$$\partial_t v - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} = f \quad \text{en } J \times \Omega, \quad (1.1a)$$

$$\partial_t \boldsymbol{\sigma} - \nabla_{\mathbf{x}} v = \mathbf{g} \quad \text{en } J \times \Omega, \quad (1.1b)$$

$$v(0, \cdot) = v_0 \quad \text{in } \Omega, \quad (1.1c)$$

$$\boldsymbol{\sigma}(0, \cdot) = \boldsymbol{\sigma}_0 \quad \text{en } \Omega, \quad (1.1d)$$

con f , $\mathbf{g}$, v_0 , $\boldsymbol{\sigma}_0$ como datos, y con condiciones de borde adecuadas.

Por su importancia y simplicidad, existen una gran variedad de métodos para aproximar numéricamente esta ecuación. En esta ocasión, lo resolveremos usando un método de elementos finitos tipo *Mínimos cuadrados*, en el espacio-tiempo.

Para esto procederemos con los siguientes pasos:

- Primero presentaremos preliminares matemáticos que son pertinentes para abordar de manera adecuada el problema.
- Estudiaremos, como problema auxiliar, la ecuación de onda escalar, en su formulación de segundo orden.
- Mostraremos como el problema de primer orden está bien puesto en espacios convenientes.
- Plantearemos el método numérico, presentaremos cotas a posteriori y haremos experimentos numéricos.

Capítulo 2

Preliminares

2.1. Características del dominio

Definición 2.1.1. Sea Ω un subconjunto abierto de $\mathbb{R}^d$. Diremos que su frontera $\partial\Omega$ es Lipschitz (o que es un dominio Lipschitz fuerte), si para cada $x \in \partial\Omega$ existe una vecindad V de x y $(a_1, \dots, a_d) \in \mathbb{R}^d$, con $a_j \neq 0$ para $j = 1, \dots, d$, tal que

(a) V es un hipercubo:

$$V = \{(y_1, \dots, y_m) \in \mathbb{R}^m \mid -a_i < y_i < a_i, 1 \leq i \leq m\}.$$

(b) Existe una función Lipschitz $\phi : V' \rightarrow \mathbb{R}$ con

$$V' = \{(y_1, \dots, y_{m-1}) \in \mathbb{R}^m \mid -a_i < y_i < a_i, 1 \leq i \leq m-1\},$$

tal que

- $|\phi(y')| \leq a_n/2$ para todo $y' = (y_1, \dots, y_{m-1}) \in V'$.
- $\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V \mid y_n < \phi(y')\}$.
- $\partial\Omega \cap V = \{y = (y', y_n) \in V \mid y_n = \phi(y')\}$.

Definición 2.1.2. Sea $\Omega \subset \mathbb{R}^d$ un conjunto abierto. Diremos que $\bar{\Omega}$ es una subvariedad Lipschitz con frontera (o dominio Lipschitz débil) si para cada $x \in \partial\Omega$ existe una vecindad V de $x \in \mathbb{R}^d$ y una función $\psi : V \rightarrow \mathbb{R}^d$ tal que:

- ψ es inyectiva.
- Tanto ψ como ψ^{-1} (definida sobre $\psi(V)$) son Lipschitz.
- $\Omega \cap V = \{y \in \Omega \mid \psi_n(y) < 0\}$, donde $\psi_n(y)$ es la n -ésima componente de $\psi(y)$.

Del Teorema 1.2.1.5 de [Grisvard \(2011\)](#) obtenemos el siguiente resultado:

Proposición 2.1.1. los dominios Lipschitz fuertes son dominios Lipschitz débiles.

De aquí en adelante $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ es un dominio Lipschitz fuerte poligonal.

2.2. Espacios de Lebesgue

Definimos a $L^p(\Omega)$ como el conjunto de funciones medibles tales que $\int_{\Omega} f^p dx < +\infty$. Entre estos espacio, el espacio $L^2(\Omega)$, en particular, es un espacio de Hilbert, con producto interno $(u, v)_{\Omega} = \int_{\Omega} uv dx$ y norma inducida $\|v\|_{\Omega} := \sqrt{(v, v)_{\Omega}}$.

2.3. Espacios de Sobolev

Sean $u, v \in L^1_{\text{loc}}(\Omega)$ y $\alpha \in \mathbb{N}_0^d$, diremos que v es la $\alpha^{\text{ésima}}$ -derivada débil de u , denotada por $D^{\alpha} = v$ si se cumple que

$$\int_{\Omega} u D^{\alpha} \phi dx = (-1)^{|\alpha|} \int_{\Omega} v \phi dx,$$

para todas las funciones $\phi \in C_c^{\infty}(\Omega)$, con $|\alpha| = \alpha_1 + \dots + \alpha_d$.

Para $m \in \mathbb{N}_0$ y $p \in [1, \infty]$, definimos el espacio $W^{m,p}(\Omega)$ por

$$W^{m,p}(\Omega) := \{v \in L^p(\Omega) \mid \forall |\alpha| \leq m : D^{\alpha} v \in L^p(\Omega)\},$$

en particular, $H^m(\Omega) = W^{m,2}(\Omega)$. Podemos asociar a este espacio la seminorma $|v|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha|=m} \|D^{\alpha} v\|_{L^p(\Omega)}$ y la norma $\|v\|_{W^{m,p}(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} \|D^{\alpha} v\|_{L^p(\Omega)}$.

Notemos que H^m es un espacio de Hilbert, con el producto interno $(u, v)_{H^m(\Omega)} := \sum_{|\alpha| \leq m} (D^{\alpha} u, D^{\alpha} v)_{\Omega}$ y norma inducida $\|v\|_{H^m(\Omega)} = \sqrt{(v, v)_{H^m(\Omega)}}$. Además, definimos $H_0^1(\Omega) := \overline{C_0^{\infty}(\Omega)}^{H^1}$.

2.4. Espacio $H(\text{div})$

Definimos el espacio $H(\text{div}, \Omega)$ por

$$H(\text{div}, \Omega) := \{v \in L^2(\Omega)^d \mid \text{div } v \in L^2(\Omega)^d\},$$

que es un espacio de Hilbert equipado con la norma

$$\|v\|_{H(\text{div}, \Omega)} := \{\|v\|_{L^2(\Omega)}^2 + \|\text{div } v\|_{L^2(\Omega)}^2\}^{1/2}.$$

2.5. Elementos finitos

Sea $d \geq 1$, $n_{sh} \geq 1$ y el conjunto $\mathcal{N} := \{1 : n_{sh}\}$. Un elemento finito corresponde a una tripleta (K, P, Σ) donde

- K es un poliedro en $\mathbb{R}^n$ o la imagen de un poliedro por un difeomorfismo suave. Más generalmente podría ser la cerradura de un dominio Lipschitz en $\mathbb{R}^d$. K es no trivial, es decir, su interior es no vacío.
- P es un espacio vectorial, de dimensión finita, de funciones $p : K \rightarrow \mathbb{R}^q$ para algún entero $q \geq 1$. $P \neq 0$. Los miembros de P son funciones polinomiales, tal vez compuestas por un difeomorfismo suave.
- Σ es un conjunto de n_{sh} formas lineales de P a $\mathbb{R}$, $\Sigma := \{f_i\}_{i \in \mathcal{N}}$, tal que la función $\Phi_\Sigma : P \rightarrow \mathbb{R}^{n_{sh}}$ definida por $\Phi_\Sigma(p) := (f_i(p))_{i \in \mathcal{N}}$ es un isomorfismo. Las formas lineales f_i son los grados de libertad.

Sea (K, P, Σ) un elemento finito escalar ($q = 1$ en la definición anterior). Si existen puntos $\{a_i\}_{i \in \mathcal{N}} \in K$ tal que para todo $i \in \mathcal{N}$,

$$f_i(p) := p(a_i), \quad \forall p \in P,$$

a la tripleta (K, P, Σ) se le conoce como elemento finito de Lagrange para el caso escalar. Los puntos $\{a_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ son nodos, y las funciones $\{\theta_i\}_{i \in \mathcal{N}}$ dadas por

$$\theta_i(a_j) := \delta_{ij}, \quad \forall i, j \in \mathcal{N},$$

forman una base nodal de P asociada a los nodos $\{a_i\}_{i \in \mathcal{N}}$.

Notemos que elementos de Lagrange de orden s nos referiremos a aquellos tales que P son los polinomios de orden s sobre K .

Un ejemplo concreto de elemento finito de Lagrange es el siguiente: Sea K un simplex en $\mathbb{R}^d$ con vertices $\{z_i\}_{i \in \{0:d\}}$. Sea $k \geq 1$, P igual a los polinomios de grado k de d variables, y $\mathcal{A}_{k,d} := \{\alpha \in \mathbb{N}^d \mid |\alpha| \leq k\}$. Tomamos $n_{sh} := \binom{k+d}{d}$ y consideramos el conjunto de nodos $\{a_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}_{k,d}}$ que cumplen $a_\alpha - z_0 := \sum_{i \in \{1:d\}} \frac{\alpha_i}{k} (z_i - z_0)$. Sean $\Sigma := \{f_\alpha\}_{\alpha \in \mathcal{A}_{k,d}}$ las formas lineales en P que obedecen $f_\alpha(p) := p(a_\alpha)$ para todo $\alpha \in \mathcal{A}_{k,d}$. Luego, (K, P, Σ) es un elemento finito de Lagrange, la demostración se encuentra en ([Ern y Guermond, 2021a](#), Proposition 7.12).

2.6. Interpoladores

Definición 2.6.1. Una subdivisión de un dominio U es una colección finita de dominios $\{K_i\}$ tal que

- $\text{int } K_i \cap \text{int } K_j = \emptyset$ si $i \neq j$.
- $\cup K_i = \overline{\Omega}$.

Definición 2.6.2. Sea B_T la mayor bola contenida en un conjunto T , diremos que una familia de subdivisiones $\{\mathcal{T}^h\}$ es ρ -no degenerada si existe un $\rho > 0$ tal que para todo $T \in \{\mathcal{T}^h\}$ y para todo $h \in (0, 1]$ se cumple

$$\text{diam} B_T \geq \rho \text{diam} T.$$

Ahora, sobre mallas ρ -no degeneradas, y un dominio politopal Lipschitz $U \subset \mathbb{R}^{d+1}$, construyamos el operador de [Scott y Zhang \(1990\)](#). Para esto, a cada nodo a_i de Lagrange de $\{\mathcal{T}^h\}$ le asignaremos un conjunto σ_i , por casos:

1. Si a_i esta en el interior del dominio del elemento K , luego $\sigma_i = K$.
2. Si a_i está al interior de una cara F , luego $\sigma_i = F$.
3. Para otros nodos que estén sobre un $(d-1)$ -simplex uno puede asignar una cara $\sigma_i = F$ que contenga al nodo a_i , salvo si a_i está en la frontera y está en la intersección de múltiples caras, en este caso, uno elige una en la frontera, $F \subset \partial U$.

Vamos a anotar n_i el número de nodos de Lagrange sobre σ_i . Denotaremos los nodos en σ_i por $\{a_{i,j}\}_{j=1}^{n_i}$, en particular $a_{i,1} = a_i$, y denotaremos la base nodal asociada a σ_i por $\{\phi_{i,j}\}_{j=1}^{n_i}$, definimos la base L^2 -dual $\{\psi_{i,j}\}$:

$$\int_{\sigma_i} \psi_{i,j}(x) \phi_{i,k}(x) dx = \delta_{jk}, \quad j, k = 1, \dots, n_i,$$

por simplicidad, $\psi_i = \psi_{i,1}$.

Ahora, definiremos el operador interpolación por

$$\mathcal{I}v = \sum_{i=1}^n \phi_i(x) \int_{\sigma_i} \psi_i(\xi) v(\xi) d\xi,$$

donde ϕ_i es función de la base nodal global.

Notemos que, siendo γ_i caras en la frontera de U , dado $\gamma = \bigcup_l \gamma_l \subset \partial U$, podemos elegir los σ_i de manera adecuada tal que $v|_\gamma = 0 \Rightarrow \mathcal{I}v|_\gamma = 0$.

Proposición 2.6.1. *Supongamos que se usan elementos de Lagrange de orden $m - 1$, que $\{\mathcal{T}^h\}$ es ρ -no degenerado y que k y p cumplen que*

$$l \geq 1 \text{ si } p = 1, \text{ y } k > 1/p \text{ en otro caso.}$$

Sea $v \in W^{k,p}(U)$, con $0 \leq s \leq k \leq m$ y $1 \leq p \leq \infty$, luego:

$$\left(\sum_{K \in \mathcal{T}^h} \|v - \mathcal{I}^h v\|_{W^{s,p}(K)}^p \right)^{1/p} \leq h^{k-s} |v|_{W^{k,p}(U)}.$$

Demostración. [Scott y Zhang \(1990\)](#). □

2.7. Espacio de Sobolev–Bochner

Definición 2.7.1. *Sea X un espacio de Hilbert, fijamos un espacio de medida (S, A, μ) para una función μ -simple $\sum_{i=1}^M \mathbf{1}_{A_n} \otimes x_n$, y definimos*

$$\int_S f d\mu := \sum_{n=1}^M \mu(A_n) x_n.$$

Definición 2.7.2. *Una función fuertemente μ -medible $f : S \rightarrow X$ es Bochner-integrable con respecto a μ si existe una secuencia de funciones μ -simples $f_n : S \rightarrow X$ tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_S \|f - f_n\| d\mu = 0,$$

y definimos por

$$\int_S f d\mu := \lim_{n \rightarrow \infty} \int_S f_n d\mu$$

a la integral de Bochner de f .

Proposición 2.7.1. *Una función fuertemente-medible $f : S \rightarrow X$ es Bochner-integrable con respecto a μ , si y solo si $\int_S \|f\| d\mu < \infty$.*

Demostración. (Hytönen et al., 2016, Proposition 1.2.2) □

Definimos el espacio de Lebesgue–Bochner $L^2(X)$ como el espacio de las funciones $f : (0, T) \rightarrow X$ que son fuertemente medibles con respecto a la medida de Lebesgue ds en $J = (0, t)$, y que tienen norma

$$\|f\|_{L^2(X)}^2 := \int_J \|f(s)\|_X^2 ds < \infty.$$

Para una función $f \in L^2(X)$ definimos $f' \in \mathcal{D}'(J; X)$ por

$$f'(\phi) = - \int_J f(s) \cdot \phi'(s) ds \in X; \forall \phi \in \mathcal{D}(J).$$

Definimos los espacios de Sobolev–Bochner $H^k(X)$ como las funciones en $L^2(X)$ tal que para todo $|\alpha| \leq k$ las derivadas débiles $f^{(\alpha)}$, pertenecen a $L^2(X)$, y dotamos a este espacio con la norma

$$\|f\|_{H^k(X)}^2 := \sum_{|\alpha| \leq k} \|f^{(\alpha)}\|_{L^2(X)}^2.$$

Además, para un espacio de funciones a reales U y un espacio de Banach X , denotamos el producto tensorial finito por

$$U \otimes X := \left\{ \sum_{j=1}^n \varphi_j v_j \mid n \in \mathbb{N}, \varphi_j \in U, v_j \in X \right\}.$$

La siguiente lista de resultados son conocidos, por ejemplo, de (Dautray y Lions, 1992, Ch. XVIII).

Lema 2.7.1. (i) *La inyección $H^1(X) \hookrightarrow C(\bar{J}; X)$ es continua, y*

$$f(t) - f(s) = \int_s^t f'(r) dr \quad \text{para todo } f \in H^1(X) \text{ y } s, t \in \bar{J}.$$

(ii) Sea $X \hookrightarrow H \hookrightarrow X'$ una tripleta de Gelfand. Luego, el embedding $L^2(X) \cap H^1(X') \hookrightarrow C(\bar{J}; H)$ es continuo.

(iii) Para $f \in L^2(X)$ y $\varphi \in X'$ se tiene $\varphi(\int_J f ds) = \int_J \varphi(f) ds$.

(iv) Para $X \hookrightarrow H$ continuo y denso, el espacio $C^\infty(\bar{J}; X)$ es denso en $L^2(X) \cap H^1(H)$.

(v) El espacio $\mathcal{D}(J) \otimes X$ es denso en $L^2(X)$.

(vi) Sea $X \hookrightarrow H \hookrightarrow X'$ una tripleta de Gelfand. Para $u, v \in L^2(X) \cap H^1(X')$ la fórmula de integración por partes

$$\int_0^T \langle u', v \rangle_{X' \times X} + \langle v', u \rangle_{X' \times X} ds = (u(T), v(T))_H - (u(0), v(0))_H$$

se cumple.

Lema 2.7.2. Para $X \hookrightarrow H$ continuo y $\tilde{X}$ denso en X , el espacio $C^\infty(\bar{J}) \otimes \tilde{X}$ es denso en $L^2(X) \cap H^1(H)$.

Demostración. Por el Lema 2.7.1 (iv), el espacio $C^\infty(\bar{J}; X)$ es denso en $L^2(X) \cap H^1(H)$, por lo tanto, $H^1(X)$ es denso en $L^2(X) \cap H^1(H)$. Sería suficiente probar que $C^\infty(\bar{J}) \otimes \tilde{X}$ es denso en $H^1(X)$. Sea $u \in H^1(X)$ dado y $\varepsilon > 0$. Como $\mathcal{D}(J) \otimes X$ es denso en $L^2(X)$ (Lema 2.7.1 (v)) entonces existe $n \in \mathbb{N}$, $\varphi_j \in \mathcal{D}(J)$, $v_j \in X$, $j = 1, \dots, n$ tal que

$$\|u' - \psi_\varepsilon\|_{L^2(X)} < \varepsilon, \quad \psi_\varepsilon = \sum_{j=1}^n \varphi_j v_j.$$

Notamos que $u(t) = u(0) + \int_0^t u'(s) ds$ y definimos

$$u_\varepsilon(t) = u(0) + \sum_{j=1}^n \int_0^t \varphi_j(s) ds v_j.$$

Tomamos $\phi_j(t) = \int_0^t \varphi_j(s) ds$, $\phi_{n+1}(t) = 1$, $v_{n+1} = u(0)$. Luego, $u_\varepsilon = \sum_{j=1}^{n+1} \phi_j v_j \in C^\infty(\bar{J}) \otimes X$. Además, $u'_\varepsilon = \psi_\varepsilon$ y $u_\varepsilon(0) = u(0)$. Lo anterior sumado a aplicar una estimación de Hölder en el tiempo nos da

$$\|u - u_\varepsilon\|_{L^2(X)} + \|u' - u'_\varepsilon\|_{L^2(X)} \leq C\varepsilon,$$

donde $C > 0$ es independiente de ε . Concluimos que $C^\infty(\bar{J}) \otimes X$ es denso en $H^1(X)$. Como $\tilde{X}$ es denso en X podemos reemplazar en la demostración, $v_j \in X$ por $v_j \in \tilde{X}$ suficientemente cercano. $\square$

Lema 2.7.3. Para $u \in H^1(H_0^1(\Omega))$ y $v \in H^1(H^{-1}(\Omega))$ la fórmula de integración por partes

$$\begin{aligned} & \langle u(T), v(T) \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} - \langle u(0), v(0) \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \\ &= \int_0^T \langle u, \partial_t v \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} + \langle \partial_t u, v \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} ds \end{aligned}$$

se cumple.

Demostración. Ambos lados constituyen una forma bilineal continua en $H^1(H_0^1(\Omega)) \times H^1(H^{-1}(\Omega))$. Para $u \in H^1(H_0^1(\Omega))$ y $v \in H^1(L^2(\Omega))$ tenemos

$$\begin{aligned} & \langle u(T), v(T) \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} - \langle u(0), v(0) \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \\ &= \int_0^T \langle u, \partial_t v \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} + \langle \partial_t u, v \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} ds \\ &= (u(T), v(T))_{L^2(\Omega)} - (u(0), v(0))_{L^2(\Omega)} - \int_0^T (u, \partial_t v)_{L^2(\Omega)} + (\partial_t u, v)_{L^2(\Omega)} ds = 0. \end{aligned}$$

La última identidad es consecuencia del Lema 2.7.1 (vi) con $X = H = L^2(\Omega)$. Del Lema 2.7.2 con $X = H = H^{-1}(\Omega)$ y $\tilde{X} = L^2(\Omega)$, el espacio $H^1(L^2(\Omega))$ es denso en $H^1(H^{-1}(\Omega))$, con lo que se concluye el resultado. $\square$

Ahora, podemos demostrar el siguiente resultado:

Lema 2.7.4. Sea $u \in L^2(H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega))$ y $v \in L^2(Q) \cap H^1(H^{-1}(\Omega))$:

(i) si $u(0), u(T) \in H_0^1(\Omega)$, luego

$$\begin{aligned} & \langle u(T), v(T) \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} - \langle u(0), v(0) \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \\ &= \int_0^T (\partial_t u, v)_{L^2(\Omega)} + \langle u, \partial_t v \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} ds. \end{aligned}$$

(ii) Si $v(0), v(T) \in L^2(\Omega)$, luego

$$(u(T), v(T))_{L^2(\Omega)} - (u(0), v(0))_{L^2(\Omega)} = \int_0^T (\partial_t u, v)_{L^2(\Omega)} + \langle u, \partial_t v \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} ds.$$

Demostración. Para demostrar (i), notemos que para $u \in L^2(H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega))$ fijo con $u(0), u(T) \in H_0^1(\Omega)$, ambos lados de la integración por partes son operadores

lineales continuos de v en el espacio $L^2(Q) \cap H^1(H^{-1}(\Omega))$. Para $v \in H^1(L^2(\Omega))$ se tiene

$$\begin{aligned} & \langle u(T), v(T) \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} - \langle u(0), v(0) \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \\ & - \int_0^T (\partial_t u, v)_Q + \langle u, \partial_t v \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} ds \\ & = (u(T), v(T))_{L^2(\Omega)} - (u(0), v(0))_{L^2(\Omega)} - \int_0^T (\partial_t u, v)_{L^2(\Omega)} + (u, \partial_t v)_{L^2(\Omega)} ds = 0, \end{aligned}$$

donde la última identidad se obtiene del Lema 2.7.1 (vi) con $X = H = L^2(\Omega)$. Del Lema 2.7.2 con $X = L^2(\Omega)$, $H = H^{-1}(\Omega)$ y $\tilde{X} = L^2(\Omega)$, el espacio $H^1(L^2(\Omega))$ es denso en $L^2(Q) \cap H^1(H^{-1}(\Omega))$, con lo que se concluye el resultado.

Para demostrar (ii), notar que para $v \in L^2(Q) \cap H^1(H^{-1}(\Omega))$ fijo con $v(0), v(T) \in L^2(\Omega)$, ambos lados de la integración por partes son funcionales lineales continuos de u en el espacio $L^2(H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega))$. Para $u \in H^1(H_0^1(\Omega))$ tenemos

$$\begin{aligned} & (u(T), v(T))_\Omega - (u(0), v(0))_\Omega - \int_0^T (\partial_t u, v)_{L^2(\Omega)} + \langle u, \partial_t v \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} ds \\ & = \langle u(T), v(T) \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} - \langle u(0), v(0) \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \\ & - \int_0^T \langle u, \partial_t v \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} + \langle \partial_t u, v \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} ds = 0, \end{aligned}$$

donde la última identidad es consecuencia del Lema 2.7.3. Del Lema 2.7.2 con $X = H_0^1(\Omega)$, $H = L^2(\Omega)$ y $\tilde{X} = H_0^1(\Omega)$, se obtiene que $H^1(H_0^1(\Omega))$ es denso en $L^2(H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega))$, con lo que se demuestra lo que se quería. $\square$

Lema 2.7.5. *La función $\{f' \mid f \in L^2(Q)\} \rightarrow \mathcal{D}'(Q)$, $f' \mapsto \partial_t f$ es inyectiva.*

Lema 2.7.6. *Sea $L : X \rightarrow Y$ un operador lineal y acotado entre los espacios de Banach X e Y , y sea $u \in H^1(X)$. Luego,*

$$(i) \quad (Lu)(t) = L(u(t)) \text{ para todo } t \in \overline{J},$$

$$(ii) \quad Lu \in H^1(Y) \text{ y } (Lu)' = L(u').$$

Demostración. La primera afirmación se sigue de la definición y el Lema 2.7.1, (ii). La segunda afirmación se sigue de (Ern y Guermond, 2021b, Lemma 64.34). $\square$

Tenemos el siguiente resultado (ver (Berggren y Hägg, 2021, Theorem 4.5)):

Lema 2.7.7. Sean X, Y, Z espacios de Banach con la inyección continua $Z \hookrightarrow Y$. Sea $T : X \rightarrow Y$ lineal acotado. Luego, $W := \{x \in X \mid Tx \in Z\}$ es un espacio de Banach con la norma

$$\|w\|_W^2 := \|w\|_X^2 + \|Tw\|_Z^2.$$

Capítulo 3

Ecuación de onda

Mostraremos resultados relacionados con la ecuación de onda en su forma de segundo orden, en primer lugar:

Teorema 3.0.1 (([Lions y Magenes, 1972](#), Ch. 3, Thm. 8.1)). Sean $f \in L^2(L^2(\Omega))$, $g_0 \in H_0^1(\Omega)$, $g_1 \in L^2(\Omega)$ dados. Existe una única función $u \in L^2(H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega)) \cap H^2(H^{-1}(\Omega))$ tal que para todo $v \in L^2(H_0^1(\Omega))$ se tiene

$$\int_0^T \langle \partial_{tt}u(s) - \Delta_{\mathbf{x}}u(s), v(s) \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} ds = \int_0^T (f(s), v(s))_{\Omega} ds \quad (3.1)$$
$$u(0) = g_0, \quad \partial_t u(0) = g_1.$$

además, $u \in C(\bar{J}; H_0^1(\Omega)) \cap C^1(\bar{J}; L_2(\Omega))$ y

$$\begin{aligned} & \|u\|_{L^\infty(H_0^1(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L^\infty(L^2(\Omega))} + \|\partial_{tt}u\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} \\ & \lesssim \|f\|_{L^2(Q)} + \|g_0\|_{H^1(\Omega)} + \|g_1\|_{L^2(\Omega)}. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Ahora tenemos un resultado similar a ([Evans, 2010](#), Section 7.2), pero, en esta ocasión con Ω un dominio Lipschitz.

Lema 3.0.1. Supón que $u \in L^2(H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega)) \cap H^2(H^{-1}(\Omega))$ es la única solución débil a la ecuación de onda (3.1) con $f \in H^1(L^2(\Omega))$ y con condiciones iniciales $u(0) = 0$, $\partial_t u(0) = 0$. Luego, además de (3.2) tenemos que con $g_0 = 0$, $g_1 = 0$ se tiene $\partial_t u \in L^\infty(H_0^1(\Omega))$, $\partial_{tt}u \in L^\infty(L^2(\Omega))$ y

$$\|\nabla_{\mathbf{x}} \partial_t u\|_{L^\infty(L^2(\Omega))} + \|\partial_{tt}u\|_{L^\infty(L^2(\Omega))} \lesssim \|\partial_t f\|_{L^2(Q)} + \|f(0)\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración. Sea $u_m: [0, T] \rightarrow H_0^1(\Omega)$ dado por

$$u_m(t) = \sum_{j=1}^m d_j^m(t) w_j,$$

donde $(w_j)_{j \in \mathbb{N}}$ es un sistema ortonormal completo en $L^2(\Omega)$, es decir, $(w_j, w_k)_\Omega = \delta_{jk}$ y además es ortogonal en $H_0^1(\Omega)$, es decir, $(\nabla_{\mathbf{x}} w_j, \nabla_{\mathbf{x}} w_k)_\Omega = 0$ para $j \neq k$.

Los coeficientes d_j^m están dados por la ec. de onda,

$$(\partial_{tt} u_m(t), w_j)_\Omega + (\nabla_{\mathbf{x}} u_m(t), \nabla_{\mathbf{x}} w_j)_\Omega = (f(t), w_j)_\Omega \quad (3.3)$$

con $d_j^m(0) = 0$, $(d_j^m)'(0) = 0$, para $j = 1, \dots, m$, ver (Evans, 2010, Section 7.2). En (Evans, 2010, Section 7.2.2) se demuestra que existe una subsucesión que converge de manera débil a la solución variacional u de (3.1).

Siguiendo los argumentos de (Evans, 2010, Section 7.2, Theorem 5) tenemos que

$$\|\partial_{tt} u_m(t)\|_\Omega^2 + \|\nabla_{\mathbf{x}} \partial_t u_m(t)\|_\Omega^2 \lesssim \|\partial_t f\|_Q^2 + \|\nabla_{\mathbf{x}} \partial_t u_m(0)\|_\Omega^2 + \|\partial_{tt} u_m(0)\|_\Omega^2.$$

Queda acotar $\|\nabla_{\mathbf{x}} \partial_t u_m(0)\|_\Omega$ y $\|\partial_{tt} u_m(0)\|_\Omega$, para el primero notamos que $(d_j^m)'(0) = 0$, y por lo tanto, $\partial_t u_m(0) = 0$. Para el segundo, evaluamos (3.3) en $t = 0$ y obtenemos que

$$(\partial_{tt} u_m(0), v)_\Omega = (f(0), v)_\Omega - (\nabla_{\mathbf{x}} u_m(0), \nabla_{\mathbf{x}} v)_\Omega \quad \forall v \in \text{span}\{w_j : j = 1, \dots, m\}.$$

Como $u_m(0) = 0$ concluimos que $\|\partial_{tt} u_m(0)\|_\Omega = (f(0), \partial_{tt} u_m(0))_\Omega$, por lo que por Cauchy-Schwarz $\|\partial_{tt} u_m(0)\| \leq \|f(0)\|$. Juntando las estimaciones y pasando el límite $m \rightarrow \infty$ obtenemos el resultado esperado. $\square$

Procediendo de manera similar a (Lions y Magenes, 1972, Ch. 3, Sec. 9), podemos usar el Teorema 3.0.1 para definir el espacio

$$\mathcal{X} = \{\varphi = (\partial_{tt} - \Delta_{\mathbf{x}})^{-1} g \mid g \in L^2(L^2(\Omega)), \varphi(T) = \partial_t \varphi(T) = 0\}.$$

A continuación, a partir de (Lions y Magenes, 1972, Ch. 3, Sec. 9, Thm. 9.3, Thm. 9.4, Remarks 9.5 y 9.11) tenemos lo siguiente:

Teorema 3.0.2 (Ecuación de la onda Ultradébil). *Sea $f \in L^2(H^{-1}(\Omega))$, $g_0 \in L^2(\Omega)$, y $g_1 \in H^{-1}(\Omega)$. Existe una única función $u \in L^2(L^2(\Omega)) \cap H^1(H^{-1}(\Omega))$ tal que*

$$\begin{aligned} & \int_0^T (u(s), \partial_{tt} \varphi(s) - \Delta_{\mathbf{x}} \varphi(s))_\Omega ds \\ &= \int_0^T \langle f(s), \varphi(s) \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} ds + \langle g_1, \varphi(0) \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} - (g_0, \partial_t \varphi(0))_\Omega, \end{aligned}$$

para todo $\varphi \in \mathcal{X}$. Se tiene

$$\|u\|_{L^\infty(L^2(\Omega))} + \|\partial_t u\|_{L^\infty(H^{-1}(\Omega))} \lesssim \|f\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} + \|g_0\|_{L^2(\Omega)} + \|g_1\|_{H^{-1}(\Omega)}.$$

Además, $u \in C(\bar{J}; L^2(\Omega)) \cap C^1(\bar{J}; H^{-1}(\Omega))$ con $u(0) = g_0$, $\partial_t u(0) = g_1$.

Capítulo 4

Sistema de primer orden

Definimos el siguiente sub-espacio $L^2(Q)^{1+d}$,

$$\begin{aligned}\tilde{V} &:= \{(v, \boldsymbol{\sigma}) \in L^2(Q)^{1+d} \mid \mathcal{A}_0(v, \boldsymbol{\sigma}) \in L^2(Q)^{1+d}\} \\ &= \{(v, \boldsymbol{\sigma}) \in L^2(Q)^{1+d} \mid \operatorname{div}_{t,\mathbf{x}}(v, -\boldsymbol{\sigma}) \in L^2(Q), \partial_t \boldsymbol{\sigma} - \nabla_{\mathbf{x}} v \in \mathbf{L}^2(Q)\}.\end{aligned}$$

Sea $\|\cdot\|_{\tilde{V}}$ la norma de grafo asociada a $\tilde{V}$, i.e., for $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in \tilde{V}$,

$$\|(v, \boldsymbol{\sigma})\|_{\tilde{V}}^2 := \|(v, \boldsymbol{\sigma})\|_{L^2(Q) \times L^2(Q)}^2 + \|\operatorname{div}_{t,\mathbf{x}}(v, -\boldsymbol{\sigma})\|_{L^2(Q)}^2 + \|\partial_t \boldsymbol{\sigma} - \nabla_{\mathbf{x}} v\|_{\mathbf{L}^2(Q)}^2.$$

Tenemos directamente:, cf. [Jensen \(2006\)](#).

Lema 4.0.1. *El espacio $(\tilde{V}, \|\cdot\|_{\tilde{V}})$ es un espacio de Hilbert.*

Para poder definir condiciones iniciales, necesitamos un operador de traza adecuado para el espacio, que nos dará el siguiente lema:

Lema 4.0.2. *La estimación*

$$\|\partial_t v\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} + \|\partial_t \boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(\mathbf{H}^{-1}(\Omega))} \lesssim \|(v, \boldsymbol{\sigma})\|_{\tilde{V}}$$

funciona para todo $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in \tilde{V}$. En particular, el operador de traza:

$$\gamma_0: \begin{cases} \tilde{V} & \rightarrow H^{-1}(\Omega) \times \mathbf{H}^{-1}(\Omega), \\ (v, \boldsymbol{\sigma}) & \mapsto (v(0), \boldsymbol{\sigma}(0)) \end{cases}$$

es un operador lineal acotado bien definido.

Demostración. Seguimos argumentos similares a los de (Antonić *et al.*, 2013, Lemma 2) resp. (Gantner y Stevenson, 2021, Lemma 2.1). Sean $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in \tilde{V}$ dados. Primero, notemos que $\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} \in L^2(H^{-1}(\Omega))$ con

$$\|\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} \leq \|\boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(Q)}.$$

Como $\operatorname{div}_{t,\mathbf{x}}(v, -\boldsymbol{\sigma}) \in L^2(Q)$ obtenemos que $\partial_t v \in L^2(H^{-1}(\Omega))$ con

$$\begin{aligned} \|\partial_t v\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} &\leq \|\operatorname{div}_{t,\mathbf{x}}(v, -\boldsymbol{\sigma})\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} + \|\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} \\ &\leq \|\operatorname{div}_{t,\mathbf{x}}(v, -\boldsymbol{\sigma})\|_{L^2(Q)} + \|\boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(Q)} \lesssim \|(v, \boldsymbol{\sigma})\|_{\tilde{V}}. \end{aligned}$$

El Lemma 2.7.1 implica que $v \in C(\bar{J}; H^{-1}(\Omega))$, por lo tanto, $v(t) \in H^{-1}(\Omega)$ con

$$\|v(t)\|_{H^{-1}(\Omega)} \lesssim \|v\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} + \|\partial_t v\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} \lesssim \|(v, \boldsymbol{\sigma})\|_{\tilde{V}}.$$

Queda demostrar estimaciones similares para $\partial_t \boldsymbol{\sigma}$. Siguen argumentos parecidos a los anteriores. $\square$

Para incorporar las condiciones iniciales, definimos el siguiente espacio:

$$V := \left\{ (v, \boldsymbol{\sigma}) \in \tilde{V} \mid \gamma_0(v, \boldsymbol{\sigma}) \in L^2(\Omega) \times L^2(\Omega) \right\}$$

con la norma de grafo $\|(v, \boldsymbol{\sigma})\|_V^2 = \|(v, \boldsymbol{\sigma})\|_{\tilde{V}}^2 + \|(v(0), \boldsymbol{\sigma}(0))\|_{L^2(\Omega) \times L^2(\Omega)}^2$.

Lema 4.0.3. *El espacio $(V, \|\cdot\|_V)$ es un espacio de Hilbert.*

Ahora, incluiremos las condiciones de borde Dirichlet. Para esto necesitaremos el siguiente espacio:

$$Y = \left\{ \varphi \in H^1(H_0^1(\Omega)) \cap H^2(L^2(\Omega)) \cap L^2(H(\Delta_{\mathbf{x}}; \Omega)) \mid \varphi(T) = 0, \partial_t \varphi(T) = 0 \right\},$$

donde $L^2(H(\Delta_{\mathbf{x}}; \Omega)) = \{v \in L^2(Q) \mid \Delta_{\mathbf{x}} v \in L^2(Q)\}$, equipado con la norma

$$\|\varphi\|_Y^2 := \|\nabla_{\mathbf{x}} \varphi\|_Q^2 + \|\nabla_{\mathbf{x}} \partial_t \varphi\|_Q^2 + \|\Delta_{\mathbf{x}} \varphi\|_Q^2 + \|\partial_{tt} \varphi\|_Q^2.$$

Definimos el operador $D: V \rightarrow Y'$ para $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in V$, $\varphi \in Y$ con

$$D(v, \boldsymbol{\sigma})(\varphi) = (\partial_t \boldsymbol{\sigma} - \nabla_{\mathbf{x}} v, \nabla_{\mathbf{x}} \varphi)_Q + (\boldsymbol{\sigma}, \nabla_{\mathbf{x}} \partial_t \varphi)_Q - (v, \Delta_{\mathbf{x}} \varphi)_Q + (\boldsymbol{\sigma}(0), \nabla_{\mathbf{x}} \varphi(0))_{\Omega}.$$

Notamos que D es continuo, i.e., $\|D(v, \boldsymbol{\sigma})\|_{Y'} \lesssim \|(v, \boldsymbol{\sigma})\|_V$ para cada $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in V$, por lo que

$$V_0 := \ker D$$

es un subespacio cerrado de V , en particular, es Hilbert.

Este operador D está asociado a condiciones de borde Dirichlet, como podemos apreciar del siguiente lema.

Lema 4.0.4. *Sea $(v, \sigma) \in \tilde{V}$ con $v \in L^2(H^1(\Omega))$. Luego, $(v, \sigma) \in \ker D$ si y solo si $v \in L^2(H_0^1(\Omega))$.*

Demostración. Notemos que $(v, \sigma) \in \tilde{V}$ y $v \in L^2(H^1(\Omega))$ implican que $\partial_t \sigma \in \mathbf{L}^2(Q)$, por lo que, $\sigma \in H^1(\mathbf{L}^2(\Omega))$. Usando integración por partes, con $\nabla_{\mathbf{x}} \varphi(T) = 0$ obtenemos

$$D(v, \sigma)(\varphi) = \int_0^T (-\nabla_{\mathbf{x}} v, \nabla_{\mathbf{x}} \varphi)_{\Omega} - (v, \Delta_{\mathbf{x}} \varphi)_{\Omega} ds = \int_0^T -\langle v, \nabla_{\mathbf{x}} \varphi \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \rangle_{\partial\Omega} ds.$$

Aquí, $\nabla_{\mathbf{x}} \varphi \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{x}}$ corresponde a la derivada normal de φ en la frontera $J \times \partial\Omega$. Supongamos que $v \in L^2(H_0^1(\Omega))$, luego, $D(v, \sigma)(\varphi) = 0$ para todo $\varphi \in Y$ por la última identidad. Ahora, probemos la otra dirección de la equivalencia, supongamos que $D(v, \sigma)(\varphi) = 0$ para todo $\varphi \in Y$, es decir:

$$\int_0^T \langle v, \nabla_{\mathbf{x}} \varphi \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{x}} \rangle_{\partial\Omega} ds = 0 \quad \forall \varphi \in Y.$$

Como Ω es un dominio poligonal existen conjuntos abiertos disjuntos a pares $\Gamma_1, \dots, \Gamma_n \subseteq \partial\Omega$ tal que $\bigcup_{j=1}^n \bar{\Gamma}_j = \partial\Omega$. Fijemos j y sea $\phi \in \mathcal{D}(\Gamma_j)$. Tenemos que existe $\psi \in H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega)$ con $\nabla_{\mathbf{x}} \psi \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{x}} = \phi$ en Γ_j y $\nabla_{\mathbf{x}} \psi \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{x}} = 0$ en Γ_k , $k \neq j$. Tomando un $\mu \in \mathcal{D}(J)$ arbitrario, tenemos que, usando $\varphi = \mu\psi \in Y$ tal que $\nabla_{\mathbf{x}} \varphi \cdot \mathbf{n}_{\mathbf{x}} = \mu\phi$,

$$\int_0^T \langle v, \mu\phi \rangle_{\Gamma_j} ds = 0 \quad \forall \mu \in \mathcal{D}(J), \phi \in \mathcal{D}(\Gamma_j).$$

Por la densidad $\mathcal{D}(J) \otimes \mathcal{D}(\Gamma_j)$ en $L^2(L^2(\Gamma_j))$ concluimos que $v|_{J \times \Gamma_j} = 0$. Esto se cumple para todo $j = 1, \dots, n$, con lo que concluimos la demostración. $\square$

4.0.1. Resultados principales

El primer resultado principal es:

Teorema 4.0.1. *El operador $\mathcal{A}: V_0 \rightarrow L^2(Q) \times \mathbf{L}^2(Q) \times L^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega)$ es un isomorfismo. En particular,*

$$\|(v, \sigma)\|_{L^2(Q) \times L^2(Q)}^2 \lesssim \|\mathcal{A}(v, \sigma)\|_{L^2(Q)^{1+d} \times L^2(\Omega)^{1+d}} \quad \forall (v, \sigma) \in V_0.$$

Demostración. El operador $\mathcal{A}$ es lineal y continuo. Combinando los Lemas 4.0.5, 4.0.6, 4.0.7 y 4.0.8 de abajo se concluye que $\mathcal{A}$ es biyectivo. Como consecuencia del *Open Mapping Theorem* de Banach, tenemos que la inversa de $\mathcal{A}$ es continua. $\square$

El segundo resultado principal nos señala que las funciones suaves con condiciones Dirichlet homogéneas son densas en V_0 . La demostración estará en la sección 4.0.3.

Teorema 4.0.2. *El espacio $\mathbf{C}^\infty := \{(v, \boldsymbol{\sigma}) \in C^\infty(\overline{Q})^{1+d} \mid v|_{J \times \partial\Omega} = 0\}$ es denso en V_0 .*

4.0.2. Análisis del operador asociado a la ecuación onda de primer grado

A través de los siguientes tres lemas demostraremos que el operador $\mathcal{A}$ es sobreyectivo.

Lema 4.0.5. *Sean $f \in L^2(Q)$, $u_0 \in H_0^1(\Omega)$, $u_1 \in L^2(\Omega)$ dados. Existen $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in V_0$ tal que*

$$\mathcal{A}(v, \boldsymbol{\sigma}) = (f, 0, u_1, \nabla_{\mathbf{x}} u_0)$$

y

$$\|(v, \boldsymbol{\sigma})\|_V \lesssim \|f\|_{L^2(Q)} + \|\nabla_{\mathbf{x}} u_0\|_{L^2(\Omega)} + \|u_1\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración. Primero, sea $u \in L^2(H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega)) \cap H^2(H^{-1}(\Omega))$ la única solución a la ecuación de onda (3.1), sean $(v, \boldsymbol{\sigma}) = (\partial_t u, \nabla_{\mathbf{x}} u) \in L^2(L^2(\Omega)) \times L^2(\mathbf{L}^2(\Omega))$. Tenemos que $\operatorname{div}_{t,\mathbf{x}}(v, -\boldsymbol{\sigma}) \in L^2(Q)$ y $\partial_t \boldsymbol{\sigma} = \nabla_{\mathbf{x}} v \in L^2(\mathbf{H}^{-1}(\Omega))$. A continuación, notamos que $v(0) = \partial_t u(0) = u_1 \in L^2(\Omega)$ y por el Lema 2.7.6 (i), $\boldsymbol{\sigma}(0) = (\nabla_{\mathbf{x}} u)(0) = \nabla_{\mathbf{x}}(u(0)) = \nabla_{\mathbf{x}} u_0 \in L^2(\Omega)$. Concluimos que $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in V$. Falta demostrar que $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in \ker D$. Sea $\varphi \in Y$ arbitrario. Usando $\boldsymbol{\sigma} = \nabla_{\mathbf{x}} u$, $v = \partial_t u$, $\partial_t \boldsymbol{\sigma} - \nabla_{\mathbf{x}} v = 0$ obtenemos

$$D(v, \boldsymbol{\sigma})(\varphi) = \int_0^T (\nabla_{\mathbf{x}} u, \partial_t \nabla_{\mathbf{x}} \varphi)_\Omega - (\partial_t u, \Delta_{\mathbf{x}} \varphi)_\Omega ds + (\boldsymbol{\sigma}(0), \nabla_{\mathbf{x}} \varphi(0))_\Omega. \quad (4.1)$$

Tenemos que $\partial_t \varphi \in L^2(H_0^1(\Omega))$ y $\Delta_{\mathbf{x}} \varphi \in L^2(Q)$. Por lo tanto, $\Delta_{\mathbf{x}} \partial_t \varphi = \partial_t \Delta_{\mathbf{x}} \varphi \in L^2(H^{-1}(\Omega))$ y $\Delta_{\mathbf{x}} \varphi(t) \in H^{-1}(\Omega)$ para todo $t \in \overline{J}$. Además, $u(0) \in H_0^1(\Omega)$ y $u(T) \in H_0^1(\Omega)$. Con lo anterior, se tendrá la siguiente integración por partes:

$$\int_0^T (\partial_t u, \Delta_{\mathbf{x}} \varphi)_\Omega ds = \int_0^T (\nabla_{\mathbf{x}} u, \partial_t \nabla_{\mathbf{x}} \varphi)_\Omega ds + (\nabla_{\mathbf{x}} u(0), \nabla_{\mathbf{x}} \varphi(0))_\Omega. \quad (4.2)$$

Combinando (4.1) y (4.2) y usando que $\nabla_{\mathbf{x}} u(0) = \boldsymbol{\sigma}(0)$ concluimos $D(v, \boldsymbol{\sigma})(\varphi) = 0$ para todo $\varphi \in Y$ con lo que $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in V_0$.

El resultado de estabilidad es consecuencia de la estabilidad de (3.1) con $v = \partial_t u$, $\boldsymbol{\sigma} = \nabla_{\mathbf{x}} u$. $\square$

Lema 4.0.6. *Sea $\mathbf{g} \in L^2(\nabla_{\mathbf{x}}(H_0^1(\Omega)))$ dado. Existe $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in V_0$ tal que*

$$\mathcal{A}(v, \boldsymbol{\sigma}) = (0, \mathbf{g}, 0, 0) \quad y \quad \|(v, \boldsymbol{\sigma})\|_V \lesssim \|\mathbf{g}\|_{L^2(Q)}.$$

Demostración. Sea $f = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{g} \in L^2(H^{-1}(\Omega))$, $g_0 = 0$, $g_1 = 0$ y $u \in L^2(Q) \cap H^1(H^{-1}(\Omega))$, la solución ultradébil que nos entrega el Teorema 3.0.2. Además, tomemos a $\boldsymbol{\sigma} \in L^2(\nabla_{\mathbf{x}} H_0^1(\Omega))$ como el único elemento tal que $\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} = \partial_t u$. Tenemos que $(v, \boldsymbol{\sigma}) := (u, \boldsymbol{\sigma}) \in L^2(Q)^{1+d}$, y también que $\partial_t v - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} = 0 \in L^2(L^2(\Omega))$. A continuación, demostremos que $\partial_t \boldsymbol{\sigma} - \nabla_{\mathbf{x}} v = \mathbf{g} \in L^2(L^2(\Omega))$, que por densidad de $\mathcal{D}(J) \otimes \mathcal{D}(\Omega)^d \subset L^2(L^2(\Omega))$ y linealidad, se reduce a demostrar que para todo $\varphi \in \mathcal{D}(J)$ y $\boldsymbol{\xi} \in \mathcal{D}(\Omega)^d$ se tiene

$$\int_J (\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi})_{\Omega} \varphi \, ds = \int_J -(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi})_{\Omega} \partial_t \varphi + (v, \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\xi})_{\Omega} \varphi \, ds.$$

Teniendo $\boldsymbol{\xi} = \Pi_{\nabla_{\mathbf{x}} H_0^1(\Omega)} \boldsymbol{\xi} + \Pi_{\nabla_{\mathbf{x}} H_0^1(\Omega)^{\perp}} \boldsymbol{\xi} =: \boldsymbol{\xi}_0 + \boldsymbol{\xi}_{\perp}$, y notando que $\mathbf{g}, \boldsymbol{\sigma} \in L^2(\nabla_{\mathbf{x}} H_0^1(\Omega))$, que implica que $(\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}_{\perp}) = 0 = (\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}_{\perp})$ y $\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\xi}_{\perp} = 0$, nos quedaría demostrar que:

$$\int_J (\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}_0)_{\Omega} \varphi \, ds = \int_J -(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}_0)_{\Omega} \partial_t \varphi + (v, \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\xi}_0)_{\Omega} \varphi \, ds. \quad (4.3)$$

Tomemos $\chi \in H_0^1(\Omega)$ tal que $\nabla_{\mathbf{x}} \chi = \Pi_{\nabla_{\mathbf{x}} H_0^1(\Omega)} \boldsymbol{\xi}$ y notemos que $\phi := \varphi \chi$ cumple

$$\partial_{tt} \phi = \partial_{tt} \varphi \chi \in L^2(L^2(\Omega)) \text{ y } \Delta_{\mathbf{x}} \phi = \varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \Pi_{\nabla_{\mathbf{x}} H_0^1(\Omega)} \boldsymbol{\xi} = \varphi \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\xi} \in L^2(L^2(\Omega)).$$

Concluimos que $\varphi \in \mathcal{X}$. Como v resuelve la ec. de onda ultradébil:

$$\begin{aligned} - \int_0^T (v, \partial_{tt} \varphi - \Delta_{\mathbf{x}} \varphi)_{\Omega} \, ds &= - \int_0^T \langle \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{g}, \varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} \, ds \\ &= \int_0^T (\mathbf{g}, \nabla_{\mathbf{x}} \varphi)_{\Omega} \, ds = \int_0^T (\mathbf{g}, \boldsymbol{\xi}_0)_{\Omega} \phi \, ds. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned}
 - \int_0^T (v, \partial_{tt}\varphi - \Delta_{\mathbf{x}}\varphi)_{\Omega} ds &= \int_0^T \langle \partial_t\phi\chi, \partial_tv \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} + (v, \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\xi})_{\Omega} \phi ds \\
 &= \int_0^T \langle \chi, \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} \rangle_{H_0^1(\Omega) \times H^{-1}(\Omega)} \partial_t\phi + (v, \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\xi})_{\Omega} \phi ds \\
 &= \int_0^T -(\nabla_{\mathbf{x}}\chi, \boldsymbol{\sigma})_{\Omega} \partial_t\phi + (v, \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\xi})_{\Omega} \phi ds \\
 &= \int_0^T -(\boldsymbol{\sigma}, \boldsymbol{\xi}_0)_{\Omega} \partial_t\phi + (v, \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\xi}_0)_{\Omega} \phi ds,
 \end{aligned} \tag{4.5}$$

donde usamos la integración por partes del Lemma 2.7.4 (ii) en la primera identidad. Combinando (4.4) y (4.5) probamos que (4.3), y por lo tanto, $\partial_t\boldsymbol{\sigma} - \nabla_{\mathbf{x}}v = \mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(Q)$.

Ahora, estudiemos las condiciones iniciales. El Teorema 3.0.2 nos da $v(0) = 0 \in L^2(\Omega)$, y el Lema 4.0.2 nos demuestra adicionalmente que $\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}(0) = \partial_t u(0) = 0$. Además, como $\boldsymbol{\sigma}(0)$ es gradiente de una función $H_0^1(\Omega)$, concluimos que $\boldsymbol{\sigma}(0) = 0$. Nos queda demostrar que $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in V_0$. Sea $\varphi \in Y$ dado. Por el Lemma 2.7.6 (ii), $\partial_t \nabla_{\mathbf{x}}\varphi = \nabla_{\mathbf{x}}\partial_t\varphi$, y por la definición de $\boldsymbol{\sigma}$ tenemos que

$$\begin{aligned}
 \int_0^T (\boldsymbol{\sigma}, \nabla_{\mathbf{x}}\partial_t\varphi)_{\Omega} ds &= - \int_0^T \langle \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}, \partial_t\varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} ds \\
 &= - \int_0^T \langle \partial_tv, \partial_t\varphi \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} ds.
 \end{aligned}$$

Por el Teorema 3.0.2 se cumple $v \in L^2(Q) \cap H^1(H^{-1}(\Omega))$ con $v(0), v(T) \in L^2(\Omega)$. Por la definición del espacio Y obtenemos $\partial_t\varphi \in L^2(H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega))$. Luego podemos aplicar el Lema 2.7.4 (ii) y como $v(0) = 0$ and $\partial_tv(T) = 0$ obtenemos que

$$\int_0^T (\boldsymbol{\sigma}, \nabla_{\mathbf{x}}\partial_t\varphi)_{\Omega} ds = \int_0^T (v, \partial_{tt}\varphi)_{\Omega} ds. \tag{4.6}$$

Notamos que $Y \subset \mathcal{X}$. Como v cumple la ecuación ultradébil del Teorema 3.0.2, llegamos a que

$$\int_0^T (v, \partial_{tt}\varphi - \Delta_{\mathbf{x}}\varphi)_{\Omega} ds = \int_0^T -(\mathbf{g}, \nabla_{\mathbf{x}}\varphi)_{\Omega} ds.$$

Combinando lo anterior con (4.6), $\partial_t\boldsymbol{\sigma} - \nabla_{\mathbf{x}}v = \mathbf{g}$ y $\boldsymbol{\sigma}(0) = 0$ podemos concluir que

$$\begin{aligned}
 D(v, \boldsymbol{\sigma})(\varphi) &= \int_0^T (\mathbf{g}, \nabla_{\mathbf{x}}\varphi)_{\Omega} + (\boldsymbol{\sigma}, \nabla_{\mathbf{x}}\partial_t\varphi)_{\Omega} - (v, \Delta_{\mathbf{x}}\varphi)_{\Omega} ds \\
 &= \int_0^T (\mathbf{g}, \nabla_{\mathbf{x}}\varphi)_{\Omega} + (v, \partial_{tt}\varphi - \Delta_{\mathbf{x}}\varphi)_{\Omega} ds = 0.
 \end{aligned}$$

Esto demuestra que $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in V_0$. Por la estabilidad de la ec. de onda ultradébil y que $\|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{L}^2(Q)} \approx \|\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))}$, tenemos

$$\begin{aligned} \|v\|_{L^2(Q)} + \|\boldsymbol{\sigma}\|_{\mathbf{L}^2(Q)} &\approx \|u\|_{L^2(Q)} + \|\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} = \|u\|_{L^2(Q)} + \|\partial_t u\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} \\ &\lesssim \|\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{g}\|_{L^2(H^{-1}(\Omega))} \approx \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}, \end{aligned}$$

con lo que obtenemos $\|(v, \boldsymbol{\sigma})\|_V \lesssim \|\mathbf{g}\|_{\mathbf{L}^2(Q)}$, lo que termina la demostración. $\square$

Lema 4.0.7. *Sea $\mathbf{g}^\perp \in L^2(\nabla_{\mathbf{x}} H_0^1(\Omega)^\perp)$ y $\boldsymbol{\sigma}_0^\perp \in \nabla_{\mathbf{x}} H_0^1(\Omega)^\perp$ dados. Existe $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in V_0$ tal que*

$$\mathcal{A}(v, \boldsymbol{\sigma}) = (0, \mathbf{g}^\perp, 0, \boldsymbol{\sigma}_0^\perp) \quad \text{y} \quad \|(v, \boldsymbol{\sigma})\|_V \lesssim \|\mathbf{g}^\perp\|_{L^2(Q)} + \|\boldsymbol{\sigma}_0^\perp\|_{L^2(\Omega)}.$$

Demostración. Tomemos $v := 0$ y $\boldsymbol{\sigma}(t) := \boldsymbol{\sigma}_0^\perp + \int_0^t \mathbf{g}^\perp(s) ds$. Luego, como $\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}_0^\perp = 0$ y $\operatorname{div}_{\mathbf{x}} \mathbf{g}^\perp = 0$, se tiene $\partial_t v - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} = \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} = 0$. Además, $\partial_t \boldsymbol{\sigma} - \nabla_{\mathbf{x}} v = \partial_t \boldsymbol{\sigma} = \mathbf{g}^\perp$. También, $v(0) = 0 \in L^2(\Omega)$ y $\boldsymbol{\sigma}(0) = \boldsymbol{\sigma}_0^\perp \in \mathbf{L}^2(\Omega)$. Faltaría demostrar que $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in V_0$. Sea $\varphi \in Y$ dado. Usando que $\nabla_{\mathbf{x}} \varphi(T) = 0$ obtenemos por integración por partes que

$$D(u, \boldsymbol{\sigma})(\varphi) = \int_0^T (\partial_t \boldsymbol{\sigma}, \nabla_{\mathbf{x}} \varphi)_\Omega + (\boldsymbol{\sigma}, \partial_t \nabla_{\mathbf{x}} \varphi)_\Omega ds + (\boldsymbol{\sigma}(0), \nabla_{\mathbf{x}} \varphi(0))_\Omega = 0.$$

Por lo tanto, $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in V_0$. Finalmente, los resultados de estabilidad se obtienen de acotar la integral de forma conveniente y que $v = 0$. $\square$

A través del siguiente resultado obtenemos que $\mathcal{A}$ es también inyectiva.

Lema 4.0.8. *Si $\mathcal{A}(v, \boldsymbol{\sigma}) = 0$ para algún $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in V_0$, luego $(v, \boldsymbol{\sigma}) = 0$.*

Demostración. Sean $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in V_0$ dados que cumplen $\mathcal{A}(v, \boldsymbol{\sigma}) = 0$, i.e.,

$$\begin{aligned} \partial_t v - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} &= 0, \\ \partial_t \boldsymbol{\sigma} - \nabla_{\mathbf{x}} v &= 0, \\ v(0) &= 0, \\ \boldsymbol{\sigma}(0) &= 0. \end{aligned}$$

A continuación demostraremos que $(v, \boldsymbol{\sigma})$ satisface la ec. de onda ultradébil con condiciones de borde Dirichlet y que por lo tanto, $(v, \boldsymbol{\sigma}) = 0$ por el Teorema 3.0.2. Sea

$\varphi \in \mathcal{X}$ con $\Delta_{\mathbf{x}}\varphi \in L^2(Q)$. tomemos $g := \partial_{tt}\varphi - \Delta_{\mathbf{x}}\varphi$ y sean $g_n \in C_0^\infty(Q)$ una secuencia con $g_n \rightarrow g$ en $L^2(Q)$. Tomemos $\varphi_n \in \mathcal{X}$ la única solución de la ec. de onda

$$\begin{aligned}\partial_{tt}\varphi_n - \Delta_{\mathbf{x}}\varphi_n &= g_n \quad \text{en } \Omega, \\ \varphi_n|_{(0,T) \times \partial\Omega} &= 0, \\ \varphi_n(T) &= 0 = \partial_t\varphi_n(T).\end{aligned}$$

Por las estimaciones de regularidad, ver Lema 3.0.1, obtenemos que

$$\partial_t\varphi_n \in L^\infty(H_0^1(\Omega)), \quad \partial_{tt}\varphi_n \in L^\infty(L^2(\Omega)). \quad (4.7)$$

En particular, $\partial_{tt}\varphi_n \in L^2(Q)$, por lo tanto, $\Delta_{\mathbf{x}}\varphi_n = \partial_{tt}\varphi_n - g_n \in L^2(Q)$. Tenemos que $\varphi_n \in Y$.

Como $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in \ker D$, $\partial_t\boldsymbol{\sigma} - \nabla_{\mathbf{x}}v = 0$, $\boldsymbol{\sigma}(0) = 0$ se cumple que

$$0 = D(v, \boldsymbol{\sigma})(\varphi_n) = \int_0^T (\nabla_{\mathbf{x}}\partial_t\varphi_n, \boldsymbol{\sigma})_\Omega - (\Delta_{\mathbf{x}}\varphi_n, v)_\Omega ds. \quad (4.8)$$

Queda por analizar el primer término del lado derecho. Primero, como $\partial_tv - \operatorname{div}_{\mathbf{x}}\boldsymbol{\sigma} = 0$, tenemos que

$$\int_0^T (\boldsymbol{\sigma}, \nabla_{\mathbf{x}}\partial_t\varphi_n)_\Omega ds = - \int_0^T \langle \partial_tv, \partial_t\varphi_n \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} ds. \quad (4.9)$$

Luego usamos el lemma 2.7.4 (i). Para esto, notamos que $v \in L^2(Q) \cap H^1(H^{-1}(\Omega))$ por la definición de V_0 y el Lema 4.0.2, y $\partial_t\varphi_n \in L^2(H_0^1(\Omega)) \cap H^1(L^2(\Omega))$ con $\partial_t\varphi_n(0) \in H_0^1(\Omega)$ por (4.7). Teniendo en cuenta que $v(0) = 0$ y $\partial_t\varphi_n(T) = 0$, obtenemos

$$- \int_0^T \langle \partial_tv, \partial_t\varphi_n \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} ds = \int_0^T (v, \partial_{tt}\varphi_n)_\Omega ds. \quad (4.10)$$

Usando (4.8), (4.9) y (4.10) obtenemos

$$\int_0^T (v, \partial_{tt}\varphi_n - \Delta_{\mathbf{x}}\varphi_n)_\Omega ds = \int_0^T (\boldsymbol{\sigma}, \nabla_{\mathbf{x}}\partial_t\varphi_n)_\Omega - (v, \Delta_{\mathbf{x}}\varphi_n)_\Omega ds = 0.$$

Tomando el límite $n \rightarrow \infty$ concluimos que

$$\int_0^T (v, \partial_{tt}\varphi - \Delta_{\mathbf{x}}\varphi)_\Omega ds = 0 \quad \text{for all } \varphi \in \mathcal{X} \text{ with } \Delta_{\mathbf{x}}\varphi \in L^2(Q).$$

Por el Teorema 3.0.2 tenemos que $v = 0$. Finalmente, $\partial_t\boldsymbol{\sigma} = \nabla_{\mathbf{x}}v = 0$ junto a $\boldsymbol{\sigma}(0) = 0$ implican que $\boldsymbol{\sigma} = 0$, por lo tanto, $(v, \boldsymbol{\sigma}) = 0$ con lo que se obtiene lo que se quería. $\square$

4.0.3. Demostración del Teorema 4.0.2

Similarmente a la definición del espacio V podemos usar el Lema 4.0.2 para definir el operador de traza γ_T al tiempo final T , y los espacios

$$V_T := \left\{ (v, \boldsymbol{\sigma}) \in \tilde{V} \mid \gamma_T(v, \boldsymbol{\sigma}) \in L^2(\Omega) \times \mathbf{L}^2(\Omega) \right\},$$

$$Y_T := \left\{ \varphi \in H^1(H_0^1(\Omega)) \cap H^2(L^2(\Omega)) \cap L^2(H(\Delta_{\mathbf{x}}; \Omega)) \mid \varphi(0) = 0, \partial_t \varphi(0) = 0 \right\},$$

con V_T y Y_T equipado con las normas vectoriales respectivas. Luego, definimos el operador lineal acotado $D_T: V_T \rightarrow Y_T'$ por

$$D_T(v, \boldsymbol{\sigma})(\varphi) = (\partial_t \boldsymbol{\sigma} - \nabla_{\mathbf{x}} v, \nabla_{\mathbf{x}} \varphi)_Q + (\boldsymbol{\sigma}, \nabla_{\mathbf{x}} \partial_t \varphi)_Q - (v, \Delta_{\mathbf{x}} \varphi)_Q - (\boldsymbol{\sigma}(T), \nabla_{\mathbf{x}} \varphi(T))_{\Omega}$$

para $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in V_T$, $\varphi \in Y_T$.

Demostración del Teorema 4.0.2. Vamos a probar un resultado ligeramente distinto: sea $H_{J \times \partial\Omega}^1(Q)$ el espacio de las funciones $H^1(Q)$ que son cero en $J \times \partial\Omega \subset \partial Q$. Vamos a demostrar que $W := H_{J \times \partial\Omega}^1(Q) \times (L^2(\mathbf{H}(\text{div}_{\mathbf{x}}; \Omega)) \cap H^1(\mathbf{L}^2(\Omega)))$ es denso en V_0 . Notemos que tenemos la inyección continua $W \hookrightarrow V_0$, y las densidades

$$\begin{aligned} \{v \in C^\infty(\overline{Q}) \mid v|_{J \times \partial\Omega} = 0\} & \quad \text{en} \quad H_{J \times \partial\Omega}^1(Q), \\ C^\infty(\overline{J}) \otimes C^\infty(\overline{\Omega})^d & \quad \text{en} \quad L^2(\mathbf{H}(\text{div}_{\mathbf{x}}; \Omega)) \cap H^1(\mathbf{L}^2(\Omega)), \end{aligned}$$

donde la segunda densidad surge del Lema 2.7.2 (ii) y la densidad de $C^\infty(\overline{\Omega})^d$ en $\mathbf{H}(\text{div}_{\mathbf{x}}; \Omega)$. Por lo tanto solo es necesario probar que W es denso en V_0 .

La densidad de W es equivalente a probar que para cada $\ell \in (V_0)'$ con $\ell((v, \boldsymbol{\sigma})) = 0$ para todo $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in W$ se cumple que $\ell = 0$. Sea $\ell \in (V_0)'$ dado. Usando la representación de Riesz y el Teorema 4.0.1 tenemos que existe un único $(w, \boldsymbol{\chi}) \in V_0$ tal que

$$\ell((v, \boldsymbol{\sigma})) = (\mathcal{A}_0(w, \boldsymbol{\chi}), \mathcal{A}_0(v, \boldsymbol{\sigma}))_Q + ((w(0), \boldsymbol{\chi}(0)), (v(0), \boldsymbol{\sigma}(0)))_{\Omega} \quad (4.11)$$

para todo $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in V_0$.

Suponemos que $\ell((v, \boldsymbol{\sigma})) = 0$ para todo $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in W$. Tomemos $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in \mathcal{D}(Q)^{1+d}$ y $(u, \boldsymbol{\tau}) = \mathcal{A}_0(w, \boldsymbol{\chi}) \in L^2(\Omega)^{1+d}$. La definición de derivada débil implica que

$$0 = \ell((v, \boldsymbol{\sigma})) = ((u, \boldsymbol{\tau}), \mathcal{A}_0(v, \boldsymbol{\sigma}))_Q = -\langle \mathcal{A}_0(u, \boldsymbol{\tau}), (v, \boldsymbol{\sigma}) \rangle_{\mathcal{D}'(Q) \times \mathcal{D}(Q)}.$$

por lo tanto, $L^2(Q)^{1+d} \ni \mathcal{A}_0(u, \boldsymbol{\tau}) = 0$. esto significa que $(u, \boldsymbol{\tau}) \in \tilde{V}$.

Ahora probemos que $(u(T), \boldsymbol{\tau}(T)) = 0$. Para eso tomemos $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in [C^\infty(\bar{J}) \otimes \mathcal{D}(\Omega)]^{1+d} \subset \mathbf{C}^\infty \subset W$ con $(v(0), \boldsymbol{\sigma}(0)) = 0$ y notemos que $(u, \boldsymbol{\tau}) \in (L^2(Q) \times H^1(H^{-1}(\Omega)))^{1+d}$. Aplicando la integración por partes del Lema 2.7.4(i) obtenemos

$$\begin{aligned}
 & \langle \gamma_T(u, \boldsymbol{\tau}), (v(T), \boldsymbol{\sigma}(T)) \rangle_{(H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega))^{1+d}} \\
 &= \int_0^T \langle \partial_t(u, \boldsymbol{\tau}), (v, \boldsymbol{\sigma}) \rangle_{(H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega))^{1+d}} + ((u, \boldsymbol{\tau}), \partial_t(v, \boldsymbol{\sigma}))_\Omega ds \\
 &= (\mathcal{A}_0(u, \boldsymbol{\tau}), (v, \boldsymbol{\sigma}))_Q + ((u, \boldsymbol{\tau}), \mathcal{A}_0(v, \boldsymbol{\sigma}))_Q \\
 &\quad + \int_0^T \langle \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\tau}, v \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} + \langle \nabla_{\mathbf{x}} u, \boldsymbol{\sigma} \rangle_{H^{-1}(\Omega) \times H_0^1(\Omega)} ds \\
 &\quad + (u, \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma})_Q + (\boldsymbol{\tau}, \nabla_{\mathbf{x}} v)_Q \\
 &= (\mathcal{A}_0(u, \boldsymbol{\tau}), (v, \boldsymbol{\sigma}))_Q + ((u, \boldsymbol{\tau}), \mathcal{A}_0(v, \boldsymbol{\sigma}))_Q = 0 + \ell(v, \boldsymbol{\sigma}) = 0,
 \end{aligned}$$

donde hemos usado la definición de los operadores $\nabla_{\mathbf{x}}(\cdot)$, $\operatorname{div}_{\mathbf{x}}(\cdot)$ como distribuciones y que $\mathcal{A}_0(u, \boldsymbol{\tau}) = 0$. Concluimos que $\gamma_T(u, \boldsymbol{\tau}) = 0$ o equivalentemente $u(T) = 0$ y $\boldsymbol{\tau}(T) = 0$.

Ahora demostremos que $(u, \boldsymbol{\tau}) \in \ker D_T$. Tomemos $\varphi \in Y_T$ y notemos que $(0, \nabla_{\mathbf{x}} \varphi) \in W$. Luego, usando que $((u, \boldsymbol{\tau}), \mathcal{A}_0(0, \nabla_{\mathbf{x}} \varphi))_Q = \ell(0, \nabla_{\mathbf{x}} \varphi) = 0$ (por (4.11)) y $\boldsymbol{\tau}(T) = 0$, $\mathcal{A}(u, \boldsymbol{\tau}) = 0$ deducimos

$$\begin{aligned}
 D_T(u, \boldsymbol{\tau})(\varphi) &= (\partial_t \boldsymbol{\tau} - \nabla_{\mathbf{x}} u, \nabla_{\mathbf{x}} \varphi)_Q + (\boldsymbol{\tau}, \partial_t \nabla_{\mathbf{x}} \varphi)_Q - (u, \Delta_{\mathbf{x}} \varphi)_Q - (\boldsymbol{\tau}(T), \nabla_{\mathbf{x}} \varphi(T))_\Omega \\
 &= 0 + ((u, \boldsymbol{\tau}), \mathcal{A}(0, \nabla_{\mathbf{x}} \varphi))_Q + 0 = \ell(0, \nabla_{\mathbf{x}} \varphi) = 0.
 \end{aligned}$$

Esto prueba que $D_T(u, \boldsymbol{\tau})(\nabla_{\mathbf{x}} \varphi) = 0$ para todo $\varphi \in Y_T$.

Para concluir notamos que $(u, \boldsymbol{\tau}) \in \tilde{V}$ con $u(T) = 0$, $\boldsymbol{\tau}(T) = 0$ y $(u, \boldsymbol{\tau}) \in \ker D_T$. Argumentando como en 4.0.8 (intercambiando condiciones iniciales y finales) tenemos $(u, \boldsymbol{\tau}) = 0$, y, por lo tanto, $\mathcal{A}_0(w, \boldsymbol{\chi}) = (u, \boldsymbol{\tau}) = 0$. Luego,

$$\begin{aligned}
 0 = \ell((v, \boldsymbol{\sigma})) &= (\mathcal{A}_0(w, \boldsymbol{\chi}), \mathcal{A}_0(v, \boldsymbol{\sigma}))_Q + ((w(0), \boldsymbol{\chi}(0)), (v(0), \boldsymbol{\sigma}(0)))_\Omega \\
 &= ((w(0), \boldsymbol{\chi}(0)), (v(0), \boldsymbol{\sigma}(0)))_\Omega \quad \forall (v, \boldsymbol{\sigma}) \in [C^\infty(\bar{J}) \otimes \mathcal{D}(\Omega)]^{1+d} \subset \mathbf{C}^\infty.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto, $(w(0), \boldsymbol{\chi}(0)) = 0$. Esto junto a que $\mathcal{A}_0(w, \boldsymbol{\chi}) = 0$ y (4.11) prueba que $\ell = 0$ lo que termina la demostración. $\square$

Capítulo 5

Solución numérica

Ahora, formularemos un método de elementos finitos a partir del Teorema 4.0.1. Luego, discutiremos un algoritmo adaptativo y veremos algunos experimentos numéricos.

5.0.1. Formulación Mínimos cuadrados y discretización

dado $f \in L^2(Q)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(Q)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$, $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$, definiremos el funcional (cuadrático) $G: U \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\begin{aligned} G(v, \boldsymbol{\sigma}; f, \mathbf{g}, v_0, \boldsymbol{\sigma}_0) &= \|\mathcal{A}(v, \boldsymbol{\sigma}) - (f, \mathbf{g}, v_0, \boldsymbol{\sigma}_0)\|_{L^2(Q)^{1+d} \times L^2(\Omega)^{1+d}}^2 \\ &= \|\partial_t v - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} - f\|_Q^2 + \|\partial_t \boldsymbol{\sigma} - \nabla_{\mathbf{x}} v - \mathbf{g}\|_Q^2 \\ &\quad + \|v(0) - v_0\|_{\Omega}^2 + \|\boldsymbol{\sigma}(0) - \boldsymbol{\sigma}_0\|_{\Omega}^2. \end{aligned}$$

Notemos que la solución de la ecuación de onda de primer grado, i.e, $\mathcal{A}(v, \boldsymbol{\sigma}) = (f, \mathbf{g}, v_0, \boldsymbol{\sigma}_0)$ es un minimizador de G . Además, el Teorema 4.0.1 implica la equivalencia de normas

$$G(v, \boldsymbol{\sigma}; 0, 0, 0, 0) \approx \|(v, \boldsymbol{\sigma})\|_V^2 \quad \forall (v, \boldsymbol{\sigma}) \in V_0. \quad (5.1)$$

Sea $V_h \subseteq V_0$ un sub-espacio cerrado, consideremos el problema de minimización

$$(v_h, \boldsymbol{\sigma}_h) = \arg \min_{(w, \boldsymbol{\chi}) \in V_h} G(v_h, \boldsymbol{\sigma}_h; f, \mathbf{g}, v_0, \boldsymbol{\sigma}_0). \quad (5.2)$$

Introduciendo la forma bilineal $a: V_0 \times V_0 \rightarrow \mathbb{R}$, y el funcional lineal acotado $F: V_0 \rightarrow \mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} a(v, \boldsymbol{\sigma}; w, \boldsymbol{\chi}) &= (\partial_t v - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma}, \partial_t w - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\chi})_Q + (\partial_t \boldsymbol{\sigma} - \nabla_{\mathbf{x}} v, \partial_t \boldsymbol{\chi} - \nabla_{\mathbf{x}} w)_Q \\ &\quad + (v(0), w(0))_{\Omega} + (\boldsymbol{\sigma}(0), \boldsymbol{\chi}(0))_{\Omega}, \\ F(v, \boldsymbol{\sigma}) &= (f, \partial_t w - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\chi})_Q + (\mathbf{g}, \partial_t \boldsymbol{\chi} - \nabla_{\mathbf{x}} w)_Q \\ &\quad + (v_0, w(0))_{\Omega} + (\boldsymbol{\sigma}_0, \boldsymbol{\chi}(0))_{\Omega} \end{aligned}$$

para cada $(v, \boldsymbol{\sigma}), (w, \boldsymbol{\chi}) \in V_0$, tendremos que la ecuaciones Euler–Lagrange para el problema (5.2) son: Encontrar $(v_h, \boldsymbol{\sigma}_h) \in V_h$ tal que

$$a(v_h, \boldsymbol{\sigma}_h; w_h, \boldsymbol{\chi}_h) = F(w_h, \boldsymbol{\chi}_h) \quad \forall (w_h, \boldsymbol{\chi}_h) \in V_h. \quad (5.3)$$

Teniendo en cuenta la equivalencia de norma (5.1), la teoría de elementos finitos Mínimos cuadrados, ver, en particular, (Bochev y Gunzburger, 2009, Chapter 3, Theorem 2.5) se obtiene el siguiente resultado.

Teorema 5.0.1. *Sea $f \in L^2(Q)$, $\mathbf{g} \in \mathbf{L}^2(Q)$, $v_0 \in L^2(\Omega)$, $\boldsymbol{\sigma}_0 \in \mathbf{L}^2(\Omega)$ dado. Los problemas (5.2) y (5.3) son equivalentes y admiten una solución única $(v_h, \boldsymbol{\sigma}_h) \in V_h$.*

Sea $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in V_0$ la solución única de

$$\mathcal{A}(v, \boldsymbol{\sigma}) = (f, \mathbf{g}, v_0, \boldsymbol{\sigma}_0).$$

Entonces, existe una constante $C > 0$ solo dependiendo de la constante de equivalencia de normas, de (5.1) tal que

$$\|(v, \boldsymbol{\sigma}) - (v_h, \boldsymbol{\sigma}_h)\|_V \leq C \min_{(w_h, \boldsymbol{\chi}_h) \in V_h} \|(v, \boldsymbol{\sigma}) - (w_h, \boldsymbol{\chi}_h)\|_V.$$

En esta ocasión usaremos una discretización en el espacio-tiempo con polinomios a trozos que son globalmente continuos.

Sea $\mathcal{T}$ la descomposición de $Q = J \times \Omega$ en simplices abiertos de $\mathbb{R}^{1+d}$ que sea ρ -no degenerado. Sea $h_{\mathcal{T}} \in L^{\infty}(Q)$ la función dada por $h_{\mathcal{T}}|_T = \operatorname{diam}(T)$. Sea $P^p(T)$ el espacio de polinomios de grado $\leq p \in \mathbb{N}_0$ en $T \in \mathcal{T}$ y definamos

$$\begin{aligned} P^p(\mathcal{T}) &= \{v \in L^2(Q) \mid v|_T \in P^p(T) \forall T \in \mathcal{T}\}, \quad S^p(\mathcal{T}) = P^p(\mathcal{T}) \cap H^1(Q), \\ S_{\Gamma}^p(\mathcal{T}) &= S^p(\mathcal{T}) \cap H_{J \times \partial\Omega}^1(Q) \quad \text{y} \quad V_{\mathcal{T},p} = S_{\Gamma}^p(\mathcal{T}) \times [S^p(\mathcal{T})]^d. \end{aligned}$$

Por el Lema 4.0.4 tendremos que $V_{\mathcal{T},p} \subset V_0$. El método LSFEM para la ecuación de onda estará dado por (5.3) con $V_h = V_{\mathcal{T},p}$.

Una consecuencia del Teorema 5.0.1 y de la Proposición 2.6.1, es lo siguiente

Corolario 5.0.1. Sean $p \in \mathbb{N}$ y $V_h = V_{\mathcal{T},p}$. Usando la notación del Teorema 5.0.1, suponga que la solución exacta cumple $(v, \boldsymbol{\sigma}) \in H^{p+1}(Q)^{1+d}$. Luego,

$$\|(v, \boldsymbol{\sigma}) - (v_h, \boldsymbol{\sigma}_h)\|_V \lesssim \|h_{\mathcal{T}}\|_{L^\infty(Q)}^p \|(v, \boldsymbol{\sigma})\|_{H^{p+1}(Q)^{1+d}}.$$

Demostración. Notamos que para cualquier $(w, \boldsymbol{\chi}) \in H^1(Q)^{d+1}$ usando la desigualdad triangular y el teorema de la traza en $H^1(Q)$, se obtiene

$$\begin{aligned} \|(w, \boldsymbol{\chi})\|_V^2 &= \|(w, \boldsymbol{\chi})\|_{L^2(Q)^{1+d}}^2 + \|\mathcal{A}_0(w, \boldsymbol{\chi})\|_{L^2(Q)^{1+d}}^2 + \|\gamma_0(w, \boldsymbol{\chi})\|_{L^2(\Omega)^{1+d}}^2 \\ &\lesssim \|(w, \boldsymbol{\chi})\|_{H^1(Q)^{1+d}}^2 + \|\gamma_0(w, \boldsymbol{\chi})\|_{L^2(\Omega)^{1+d}}^2 \lesssim \|(w, \boldsymbol{\chi})\|_{H^1(Q)^{1+d}}^2. \end{aligned}$$

con el Teorema 5.0.1 obtenemos

$$\begin{aligned} \|(v, \boldsymbol{\sigma}) - (v_h, \boldsymbol{\sigma}_h)\|_V &\lesssim \min_{(w_h, \boldsymbol{\chi}_h) \in V_h} \|(v, \boldsymbol{\sigma}) - (v_h, \boldsymbol{\sigma}_h)\|_{H^1(Q)^{1+d}} \\ &\leq \|(v, \boldsymbol{\sigma}) - \mathcal{I}_{\mathcal{T}}(v, \boldsymbol{\sigma})\|_{H^1(Q)^{1+d}}. \end{aligned}$$

con $\mathcal{I}_{\mathcal{T}}(v, \boldsymbol{\sigma})$ el quasi-interpolador Scott–Zhang aplicado sobre cada componente de $(v, \boldsymbol{\sigma})$, notamos que podemos construirlo de tal manera que conserve las condiciones homogéneas, luego obtenemos el resultado de la Proposición 2.6.1. $\square$

5.0.2. Estimador de error a posteriori y algoritmo adaptativo

Sea $(v_{\mathcal{T}}, \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{T}})$ una solución de (5.3) con $V_h = V_{\mathcal{T},p}$. Definimos para cada $T \in \mathcal{T}$ un indicador de error dado por

$$\begin{aligned} \eta_T^2 &= \|\partial_t v - \operatorname{div}_{\mathbf{x}} \boldsymbol{\sigma} - f\|_T^2 + \|\partial_t \boldsymbol{\sigma} - \nabla_{\mathbf{x}} v - \mathbf{g}\|_T^2 \\ &\quad + \|v(0) - v_0\|_{\partial T \cap \Omega}^2 + \|\boldsymbol{\sigma}(0) - \boldsymbol{\sigma}_0\|_{\partial T \cap \Omega}^2 \end{aligned}$$

y un estimador global dado por $\eta_{\mathcal{T}} = \sqrt{\sum_{T \in \mathcal{T}} \eta_T^2}$.

Usando que $\mathcal{A}(v, \boldsymbol{\sigma}) = (f, \mathbf{g}, v_0, \boldsymbol{\sigma}_0)$ y el Teorema 4.0.1 obtenemos

$$\eta_{\mathcal{T}}^2 = \|\mathcal{A}(v_{\mathcal{T}} - v, \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{T}} - \boldsymbol{\sigma})\|_{L^2(Q)^{1+d} \times L^2(\Omega)^{1+d}}^2 \approx \|(v, \boldsymbol{\sigma}) - (v_{\mathcal{T}}, \boldsymbol{\sigma}_{\mathcal{T}})\|_V^2.$$

esto significa que el estimador $\eta_{\mathcal{T}}$ es eficiente y confiable.

Consideremos el siguiente loop adaptativo común:

- **Resolver** el problema (5.3),

- **Estimar** (calcular los indicadores de error η_T),
- **Marcar** elementos de $\mathcal{T}$ para refinamiento,
- **Refinar** por lo menos todos los elementos marcados para obtener una nueva malla $\mathcal{T}$.

El paso de marcado es realizado a través del siguiente criterio: dado un parámetro $\theta \in (0, 1)$, encontrar el (menor) conjunto de elementos marcados $\mathcal{M} \subset \mathcal{T}$ que cumplen

$$\theta \eta_{\mathcal{T}}^2 \leq \sum_{T \in \mathcal{M}} \eta_T^2.$$

5.1. Ejemplos numéricos

A continuación vamos a ver algunos ejemplos para dimensión $d = 1$ y $d = 2$. El método LSFEM fue implementado en NETGEN/NGSOLVE [Schöberl \(2014\)](#). La implementación se puede encontrar en el siguiente link github.com/tofuuhh/LSQwave.

Para todos los experimentos se usó como dominio el cubo de $(1 + d)$ dimensiones $Q = J \times \Omega = (0, 1) \times (0, 1)^d$, y se utilizó el parámetro $\theta = \frac{1}{4}$ para los experimentos del algoritmo adaptativo.

5.1.1. Solución suave para $d = 1$

Consideremos $u(t, x) = \frac{1}{2}t^2 \sin(\pi x)$. Luego, $v = \partial_t u$, $\sigma = \partial_x u$ resuelve la ec. de onda de primer grado con $f = \partial_{tt} u - \partial_{xx} u$, $\mathbf{g} = v_0 = \sigma_0 = 0$. Para una secuencia de mallas uniformemente refinadas Q , el Corolario 5.0.1 da predicciones alineadas con los resultados, ver Figura 5.1.

5.1.2. Pulso gaussiano para $d = 1$

Consideramos un ejemplo similar al que aparece en ([Gopalakrishnan y Sepúlveda, 2019](#), Section 6.4). En particular tomamos como datos:

$$f = 0 = \mathbf{g}, \quad v_0 = 2\kappa(x - \mu)e^{-\kappa(x - \mu)^2}, \quad \sigma_0 = -v_0$$

con $\kappa = 1000$, $\mu = 0.2$.

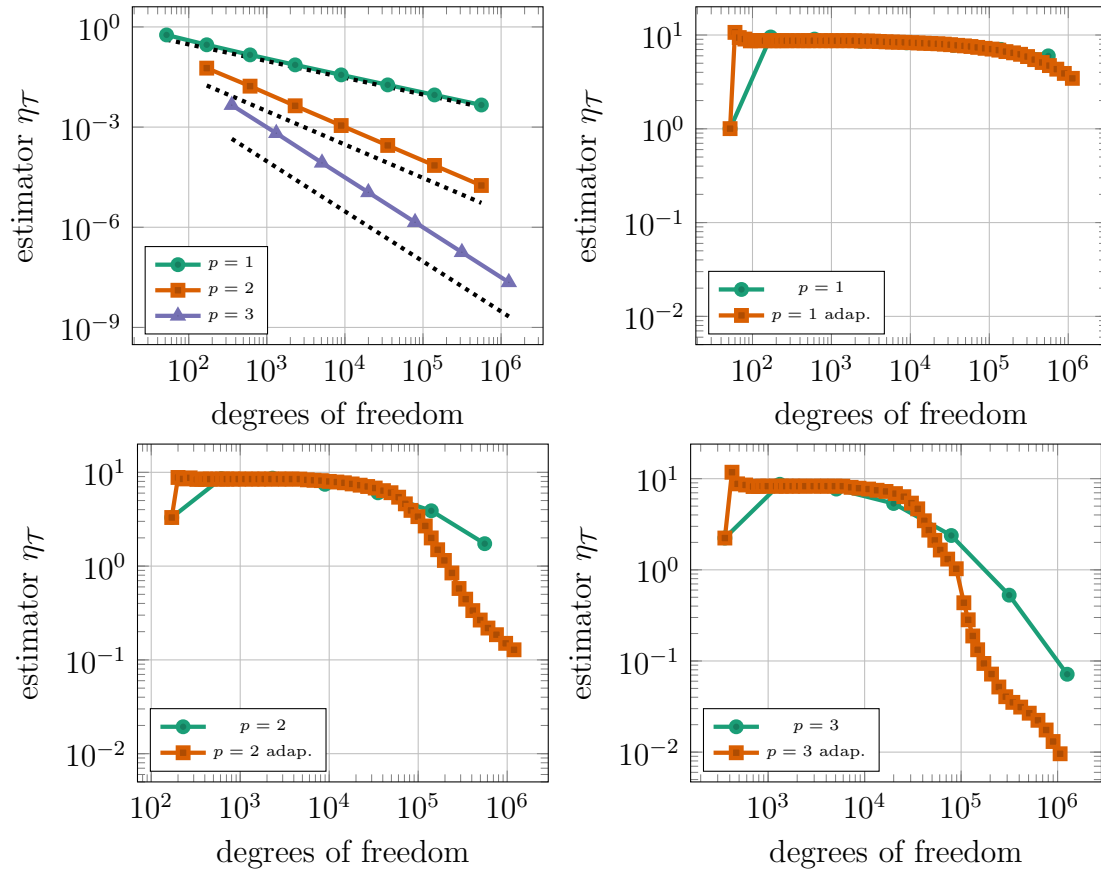


Figura 5.1: Superior Izquierda: solución suave y $d = 1$. La línea punteada corresponde a $\mathcal{O}(\dim(V_{T,p})^{-p/2})$. El resto: pulso para $d = 1$ con refinamiento uniforme y adaptativo.

Una solución exacta no es conocida. Comparamos los resultados en una secuencia de mallas refinadas de manera uniforme y una secuencia de mallas refinadas de manera adaptativa para $p = 1, 2, 3$. La Figura 5.1 muestra los resultados. Para $p = 1$ existe una fase pre-asintótica larga para ambos métodos. Para $p = 2, 3$ la convergencia es más rápida, especialmente usando el algoritmo adaptativo, eso si, es difícil identificar el orden de convergencia.

5.1.3. Solución que no cumple con las condiciones de borde inicialmente, con $d = 1$

Consideramos $f = 0 = \mathbf{g} = \boldsymbol{\sigma}_0$, $v_0 = 1$. La solución $(v, \boldsymbol{\sigma})$ es constante a trozos en los triángulos

$$T_1 = \triangle(z_1, z_2, z_5), T_2 = \triangle(z_2, z_3, z_5), T_3 = \triangle(z_3, z_4, z_5), T_4 = \triangle(z_4, z_1, z_5),$$

donde $z_1 = (0, 0)$, $z_2 = (1, 0)$, $z_3 = (1, 1)$, $z_4 = (0, 1)$, y $z_5 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$. En particular,

$$v(t, x) = \begin{cases} -1 & (t, x) \in T_2, \\ 1 & (t, x) \in T_4, \\ 0 & \text{en otro caso,} \end{cases} \quad \boldsymbol{\sigma}(t, x) = \begin{cases} 1 & (t, x) \in T_1, \\ -1 & (t, x) \in T_3, \\ 0 & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

Debido a los saltos de la solución, uno espera convergencia más lenta. Esto se observa en la Figura 5.2 para una secuencia de mallas uniformemente refinadas. El método adaptativo mejora la convergencia después de la fase pre-asintótica, pero no se obtiene velocidades optimales de convergencia, con respecto al orden de p .

En la Figura 5.2 vemos la componente v de la solución para un malla refinada de manera adaptativa. Se observa mayor refinamiento a lo largo de las características $t = x$, $t = 1 - x$.

5.1.4. Solución suave para $d = 2$

Consideramos $u(t, x) = \frac{1}{2}t^2 \sin(\pi x) \sin(\pi y)$. Luego, $v = \partial_t u$, $\boldsymbol{\sigma} = \partial_x u$ son solución de la ec. de onda de primer orden con datos $f = \partial_{tt} u - \Delta_x u$, $\mathbf{g} = v_0 = \boldsymbol{\sigma}_0 = 0$.

En una secuencia de mallas con refinamiento uniforme se obtienen resultados que concuerdan con las predicciones del Corolario 5.0.1. Ver la Figura 5.3.

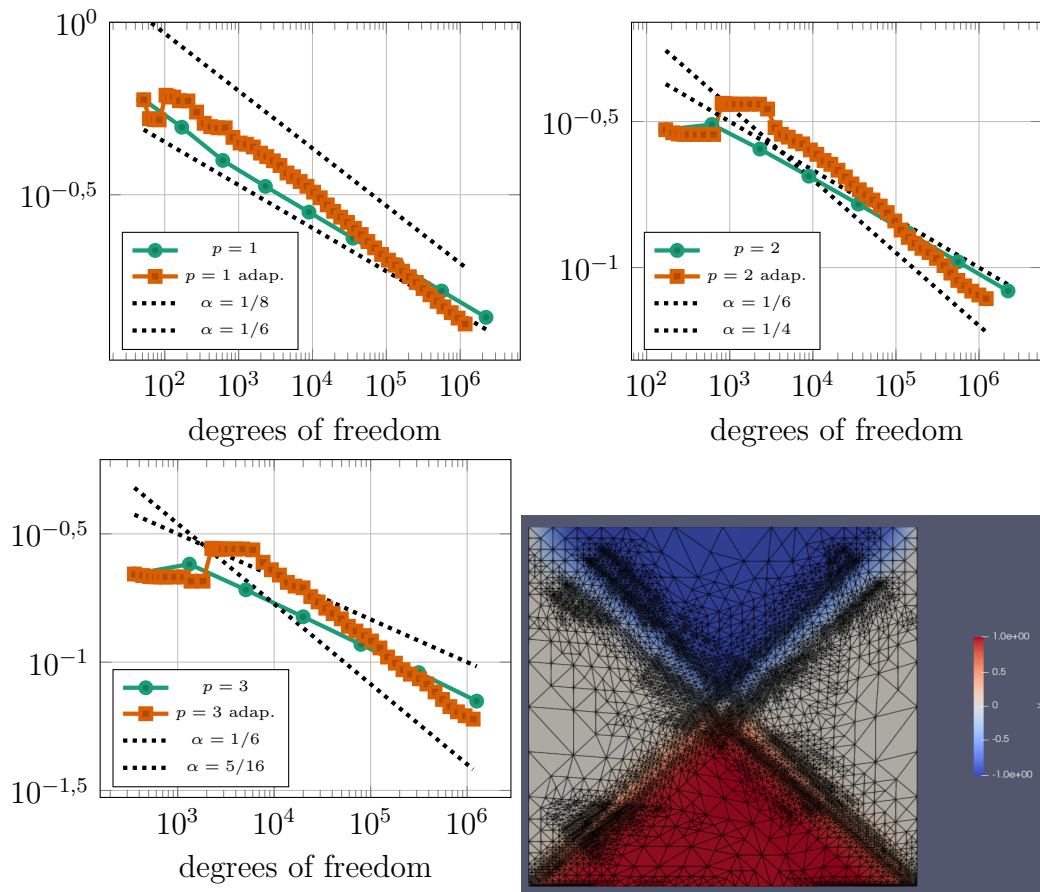


Figura 5.2: Estimadores para el ejemplo de la sección 5.1.3. la línea discontinua indica $\mathcal{O}(\dim(V_{\mathcal{T},p})^{-\alpha})$. El gráfico inferior derecho representa la solución en una malla con 56160 elementos para $p = 1$. El eje horizontal corresponde al dominio espacial $\Omega = (0, 1)$.

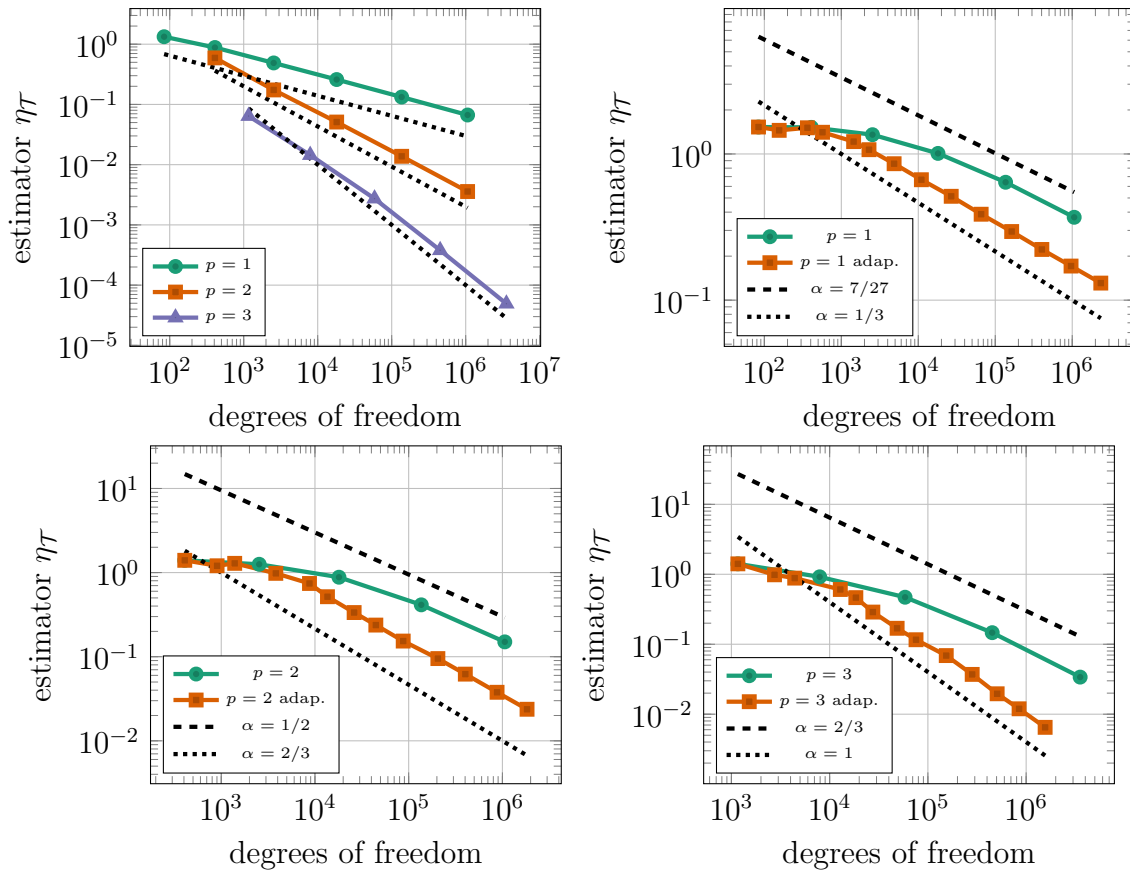


Figura 5.3: Arriba a la izquierda: Solución suave y $d = 2$. La línea punteada corresponde a $\mathcal{O}(\dim(V_{\mathcal{T},p})^{-p/3})$. Otros gráficos: Pulso con $d = 2$ con refinamiento uniforme y adaptativo. La línea punteada corresponde a $\mathcal{O}(\dim(V_{\mathcal{T},p})^{-\alpha})$.

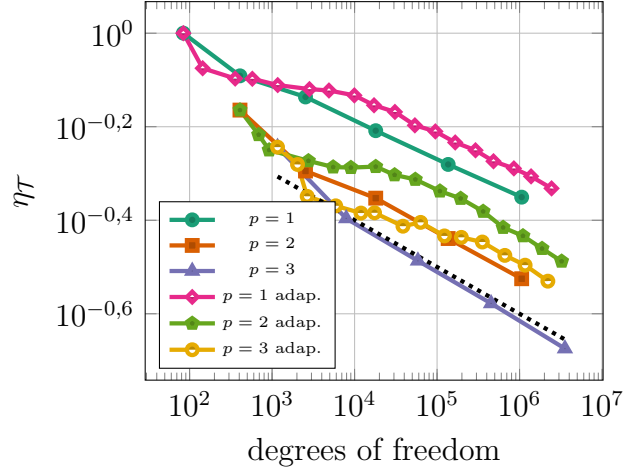


Figura 5.4: Estimador para una secuencia de mallas refinadas de manera uniforme y adaptativa, del ejemplo de la sección 5.1.6. La línea discontinua representa $\mathcal{O}(\#\text{dof}^{-0,1})$.

5.1.5. pulso gaussiano para $d = 2$

Consideramos un pulso definido de manera similar a ([Gopalakrishnan y Sepúlveda, 2019](#), Sección 6.6) dado por

$$v_0(x, y) = -e^{-200((x-0,2)^2+(y-0,2)^2)}, \quad \sigma_0(x, y) = -v_0(x, y) \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

$$f(t, x, y) = 0, \quad \mathbf{g}(t, x, y) = 400e^{-200((x-0,2-t)^2+(y-0,2-t)^2)} \begin{pmatrix} y - 0,2 - t \\ x - 0,2 - t \end{pmatrix}.$$

La Figura 5.3 (gráfico derecho) muestra el error del estimador para mallas con refinamiento uniforme y adaptativo. Las adaptatividad ayuda a obtener mejores velocidades de convergencia. Puede ser un fenómeno pre-asintótico.

5.1.6. Solución que no tiene condiciones de borde cero inicialmente, con $d = 2$

Tomamos $f = \mathbf{g} = \sigma_0 = 0$ y $v_0 = 1$. Claramente v_0 no cumple con las condiciones de borde, i.e., $v_0 \notin H_0^1(\Omega)$.

La Figura 5.4 muestra el estimador de error en una secuencia de mallas refinadas de manera uniforme y adaptativa. Obtenemos una convergencia reducida de $\mathcal{O}(\#\text{dof}^{-0,1})$

que no se ve mejorada por el algoritmo adaptativo. La razón de esta menor convergencia está dada por las condiciones iniciales que no cumple con condiciones de borde cero, y la elección del espacio de aproximación, resultados similares han sido observados para LSFEM en problemas parabólicos, ver [Führer y Karkulik \(2021\)](#). En el caso de los problemas parabólicos, se pudo mejorar la convergencia con nuevos elementos finitos, en [Gantner y Stevenson \(2022\)](#).

Capítulo 6

Conclusión

En esta memoria, hemos podido analizar una formulación de primer orden de la ecuación de onda, en donde:

- Se han introducido preliminares teóricos para el análisis del problema.
- Se ha encontrado una traza adecuada para el problema, y se define un espacio apropiado V_0 .
- Se ha conectado la formulación ultra-débil de la ecuación de onda, con la formulación de primer orden.
- Se ha demostrado existencia y unicidad del problema en V_0
- Se ha demostrado la densidad de las funciones suaves en el espacio V_0
- Se obtienen cotas a priori para un método de elementos finitos tipo mínimos cuadrados
- Se muestran experimentos computacionales, tanto en mallas uniformes como con mallas adaptativas.

Destacamos también que lo realizado en este trabajo trae nuevas preguntas, por ejemplo:

- ¿Cuál es un espacio adecuado para el problema Dirichlet no homogéneo?
- ¿Se pueden fabricar elementos finitos para mejorar la convergencia del método adaptativo?

- ¿Se puede extender el análisis a problemas relacionados, por ejemplo, el de la elastodinámica?

En resumen, hemos aportado en la comprensión de la ecuación de onda en su formulación de primer orden, y también hemos sentado bases para extender estos análisis para nuevos problemas.

Bibliografía

- Antonić, N., Burazin, K., y Vrdoljak, M. (2013). Heat equation as a Friedrichs system. *J. Math. Anal. Appl.*, 404(2):537–553.
- Berggren, M. y Hägg, L. (2021). Well-posed variational formulations of Friedrichs-type systems. *J. Differential Equations*, 292:90–131.
- Bochev, P. B. y Gunzburger, M. D. (2009). *Least-squares finite element methods*, volumen 166 de *Applied Mathematical Sciences*. Springer, New York.
- Dautray, R. y Lions, J.-L. (1992). *Mathematical analysis and numerical methods for science and technology. Vol. 5*. Springer-Verlag, Berlin. Evolution problems. I, With the collaboration of Michel Artola, Michel Cessenat and Hélène Lanchon, Translated from the French by Alan Craig.
- Ern, A. y Guermond, J.-L. (2021a). *Finite Elements I: Approximation and Interpolation*. Springer International Publishing.
- Ern, A. y Guermond, J.-L. ([2021] ©2021b). *Finite elements III—first-order and time-dependent PDEs*, volumen 74 de *Texts in Applied Mathematics*. Springer, Cham.
- Evans, L. C. (2010). *Partial differential equations*, volumen 19 de *Graduate Studies in Mathematics*. American Mathematical Society, Providence, RI, second edición.
- Führer, T. y Karkulik, M. (2021). Space-time least-squares finite elements for parabolic equations. *Comput. Math. Appl.*, 92:27–36.
- Gantner, G. y Stevenson, R. (2021). Further results on a space-time FOSLS formulation of parabolic PDEs. *ESAIM Math. Model. Numer. Anal.*, 55(1):283–299.
- Gantner, G. y Stevenson, R. (2022). Improved rates for a space-time fosls of parabolic pdes. arXiv:2208.10824.

- Gopalakrishnan, J. y Sepúlveda, P. ([2019] ©2019). A space-time DPG method for the wave equation in multiple dimensions. En *Space-time methods—applications to partial differential equations*, volumen 25 de *Radon Ser. Comput. Appl. Math.*, pp. 117–139. De Gruyter, Berlin.
- Grisvard, P. (2011). *Elliptic Problems in Nonsmooth Domains*. Society for Industrial and Applied Mathematics.
- Hytönen, T., van Neerven, J., Veraar, M., y Weis, L. (2016). *Analysis in Banach Spaces*. Springer International Publishing.
- Jensen, M. (2006). Remarks on duality in graph spaces of first-order linear operators. *PAMM*, 6(1):31–34.
- Lions, J.-L. y Magenes, E. (1972). *Non-homogeneous boundary value problems and applications. Vol. I*. Die Grundlehren der mathematischen Wissenschaften, Band 181. Springer-Verlag, New York-Heidelberg. Translated from the French by P. Kenneth.
- Schöberl, J. (2014). C++11 implementation of finite elements in ngsolve. Technical report, Technische Universität Wien.
- Scott, L. R. y Zhang, S. (1990). Finite element interpolation of nonsmooth functions satisfying boundary conditions. *Mathematics of Computation*, 54(190):483–493.