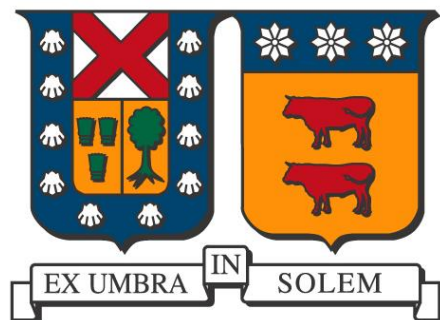


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA METALÚRGICA Y DE
MATERIALES
SANTIAGO DE CHILE



ESTUDIO DE DILUCIÓN EN BLOCK CAVING MEDIANTE MÉTODOS DE ELEMENTOS DISCRETOS

FERNANDO IGNACIO VARELA VELÁSQUEZ

Memoria para optar al Título profesional de
INGENIERO CIVIL DE MINAS

Profesor Guía:

Víctor Encina

Enero 2025

AGRADECIMIENTOS

Para todos mis cercanos, familiares, amigos, gracias por estar cuando los necesite.

Agradezco a mi padre y madre por educarme, criarme, mimarme y amarme (o eso espero).

Agradezco a la vida, me quedo con los buenos y los malos momentos, sin rencores.

Agradezco a todas las mascotas presentes en mi vida, espero algún día rencarnar como una mascota.

Agradezco a mis abuelos/abuelas que me brindaron su cariño y sabiduría.

Agradezco a mis tíos/tías que tuvieron que soportarme, con mención honorífica a mi tía Ala.

RESUMEN

En este trabajo se presenta un método para generar modelos diluidos en la planificación de explotaciones por *Block Caving*, basándose en la comprensión del flujo gravitacional mediante el uso de herramientas de modelación de Elementos Discretos (DEM). A través de este enfoque, se identifican las capas de cebolla como la diferencia de una ZEA *i* con su antecesor, revelando una configuración de capas anidadas que atraviesan los distintos estratos de la columna *in situ*.

El estudio se centra en la determinación de las leyes de diversas capas de cebolla, las cuales son representadas mediante bloques diluidos. Cada capa de cebolla atraviesa diferentes estratos de la columna *in situ*, lo que permite calcular su ley media mediante un promedio ponderado, utilizando las proporciones de material de cada estrato como ponderadores. Esto permite obtener una representación precisa de las leyes de las capas de cebollas extraídas, que se utilizan para representar bloques diluidos, los cuales son esenciales para la planificación de la extracción.

En las simulaciones realizadas en Ansys Rocky con el algoritmo DEM, se modeló una columna de extracción aislada a escala real con partículas esféricas de un solo tamaño y densidad, sin adhesión ni fragmentación. Se generaron 15 simulaciones, donde cada una presenta distintas configuraciones de posiciones de las partículas dentro de la columna de extracción. El contenedor cilíndrico simulado tiene dimensiones de 100 metros de alto con un diámetro de 30 metros, con una abertura central de 7 metros de diámetro (cerrada con un tapón), y un total de 146,470 partículas en promedio.

El estudio introduce una técnica para estimar la ley de estos bloques diluidos, distribuyendo las leyes por estratos cada 10 metros y utilizando coeficientes normalizados para calcular la proporción de partículas extraídas de cada estrato respecto al total. El trabajo presenta la tabla de ponderadores correspondiente a una columna dividida en 10 estratos o deciles.

ABSTRACT

This study presents a methodology for generating diluted models in Block Caving mine planning, based on the understanding of gravitational flow using Discrete Element Method (DEM) modeling tools. Through this approach, onion layers are identified as the difference between an IEZ i and its predecessor, revealing a nested layer configuration that traverses the various in situ column strata.

The research focuses on determining the grades of different onion layers, which are represented as diluted blocks. Each onion layer intersects multiple strata of the in situ column, allowing for the calculation of its average grade using a weighted average method, where the proportions of material from each stratum serve as weighting factors. This provides an accurate representation of the grades of the extracted onion layers, which are essential for modeling diluted blocks and optimizing extraction planning.

Simulations conducted in Ansys Rocky using the DEM algorithm modeled a full-scale isolated extraction column filled with spherical particles of uniform size and density, with no adhesion or fragmentation. A total of 15 simulations were performed, each featuring different particle configurations within the extraction column. The simulated cylindrical container measured 100 meters in height and 30 meters in diameter, with a central opening of 7 meters in diameter (initially sealed), and an average of 146,470 particles.

The study introduces a technique to estimate the grades of these diluted blocks by stratifying grades into 10-meter intervals and applying normalized coefficients to calculate the proportion of particles extracted from each stratum relative to the total. A table of weighting factors is provided for a column divided into 10 strata or deciles.

KEYWORDS: *Block Caving, DEM, Gravitational flow, IEZ, Extraction colum, Dilution, Grade, Onion layer.*

Tabla de contenido

1	INTRODUCCIÓN	9
1.1	Objetivos	10
1.1.1	Objetivo General	10
1.1.2	Objetivos Específicos.....	10
1.1.3	Alcances.....	10
2	MARCO TEORICO	10
2.1	Medio granular	10
2.2	<i>Block Caving</i>	11
2.3	Dilución.....	11
2.3.1	Modelo dilución de Laubscher para <i>Block Caving</i>	12
2.4	Flujo Gravitacional	16
2.4.1	Fragmentación.....	17
2.4.2	Zonas de Extracción y Movimiento	19
2.4.3	Modelo Cinemático	26
2.4.4	Interacción de Flujos.....	28
2.5	Método de elementos discretos.....	36
2.5.1	Modelo de Contacto.....	37
3	METODOLOGÍA	38
4	DESARROLLO	39
4.1	Diseño Experimental.....	40
4.2	Obtención de ZEA	44
4.3	Extracción y procesamiento de datos	46
5	RESULTADOS Y ANALISIS.....	47
6	CONCLUSIONES	55
7	RECOMENDACIONES	56
8	BIBLIOGRAFÍA.....	57

Lista de figuras

Figura 1: (a) Método de Block Caving para diferentes tiempos de extracción. (b) Vista de un punto (drawpoint) y una batea de extracción (drawbell). (c) Extracción del mineral desde un punto de extracción por un LHD (Sturla, 2022).

Figura 2: Altura de interacción (HIZ) (Laubscher, 1994).

Figura 3: Factor de control de tiraje (Laubscher, 1994).

Figura 4: Modelo esquemático de curvas de mezcla utilizadas en el modelo de Laubscher (Arriagada, 2015).

Figura 5: Esquema de un Block Caving en propagación (Gómez, 2019).

Figura 6: Mapa Conceptual fragmentación (Laubscher, 2000).

Figura 7: Ilustración de teoría de elipsoides de Kvapil, relación entre ZMA y ZEA (Kvapil, 2008).

Figura 8: Cuerpos de extracción en función de distribución de tamaño del medio granular (Kvapil, 2008).

Figura 9: Relacion entre ancho y alto de la ZEA para distintas categorías de mineral (Kvapil, 2008).

Figura 10: Altura ZEA en función de la masa extraída acumulada, experimento 18 mm-WD (Castro, 2007).

Figura 11: Ancho ZEA en función de la masa extraída acumulada, experimento 18 mm-WD (Castro, 2007).

Figura 12: Dimensiones de la ZEA para distintas masas de mineral extraído (Jin, 2017).

Figura 13: Frente de dilatación y movimiento de partículas debido a la extracción de mineral (Melo, 2009).

Figura 14: Ilustración teoría de Laubscher para interacción de flujo gravitacional (Laubscher, 2000).

Figura 15: Mecanismo de difusión de vacíos, zona de mezcla intermedia y flujo masico (Laubscher, 2000).

Figura 16: Interacción de ZMA a distintos espaciamientos (Vivanco, 2011).

Figura 17: Interacción de ZMA a distintos espaciamientos y volumen extraído, las figuras de la izquierda equivalen a un 20% y las de la derecha a un 80% (Vivanco, 2013).

Figura 18: Secciones verticales del modelo de extracción para una subsección para distintas secuencias de extracción.

Figura 19: La capa de cebolla está representada por la diferencia de partículas entre una ZEA “i” con su antecesora.

Figura 20: Dimensiones y secciones del contenedor

Figura 21: Dimensiones y secciones de la caja.

Figura 22: Dimensiones y secciones del tapón.

Figura 23: Ilustración de la simulación a tiempo 0.

Figura 24: Taggening, las partículas rojas son las que se extrajeron hasta el segundo 350, por otro lado, las azules corresponden a las que no se extraen a ese tiempo.

Figura 25: Divisions Tagging, categorización de las partículas por estratos cada 10 metros.

Figura 26: Conversión de capas de cebolla a bloques diluidos.

Figura 27: Columna in situ y columna distribuida por deciles.

Figura 28: Anexo diagrama típico algoritmo DEM.

Figura 29: Sección transversal ZEA simulación 3.

Figura 30: Alto de la IEZ v/s Ancho de la ZEA promedio.

Figura 31: Alto y ancho de la IEZ v/s volumen extraído.

Figura 32: Tiraje promedio.

Lista de tablas

Tabla 1: Parámetros físicos.

Tabla 2: Magnitudes de las propiedades del material.

Tabla 3: Ubicación puntos semillas, partículas generadas y fracción volumétrica.

Tabla 4: Formato matrices de datos.

Tabla 5: Número de partículas extraídas totales de cada estrato de ley para cada capa de cebolla.

Tabla 6: Desviación estándar para partículas extraídas por estratos.

Tabla 7: Errores estándar partículas extraídas por estratos.

Tabla 8: Coeficientes normalizados para cada capa de cebolla.

Tabla 9: Desviación estándar para coeficientes normalizados.

Tabla 10: Error estándar coeficientes normalizados.

Tabla 11: Altura de bloques para cada capa de cebolla.

Tabla 12: Estimación de ley y masa para el ejemplo.

Tabla 13: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 1.

Tabla 14: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 2.

Tabla 15: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 3.

Tabla 16: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 4.

Tabla 17: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 5.

Tabla 18: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 6.

Tabla 19: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 7.

Tabla 20: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 8.

Tabla 21: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 9.

Tabla 22: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 10.

Tabla 23: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 11.

Tabla 24: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 12.

Tabla 25: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 13.

Tabla 26: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 14.

Tabla 27: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 15.

1 INTRODUCCIÓN

Los métodos de extracción subterránea como *Block/Panel Caving* se caracterizan por ser técnicas que permiten alcanzar altos valores de producción y recuperación, a cambio de costos operativos que se podrían considerar bajos al ser comparados con otras metodologías. Su aplicación es ideal para yacimientos tipo pórfido, con alto tonelaje y bajas leyes; consiste en provocar el descenso controlado del mineral que colapsa bajo su propio peso luego de ser socavado. El material fracturado se almacena en estructuras denominadas bateas, desde donde es extraído y posteriormente transportado a superficie para ser procesado (Reyes, 2021).

Uno de los aspectos claves en *Block Caving* es el control de la entrada de dilución durante el proceso de extracción del mineral quebrado. El flujo gravitacional de este mineral quebrado controla la cantidad de material valioso recuperado y el grado en que se diluye por el estéril. La cantidad de mineral recuperado y el estéril extraído tienen un enorme impacto en la economía minera. Además, el flujo de roca fracturada también determina el espaciamiento y por tanto, el número de puntos de extracción necesario (Halim, 2006).

Debido a la elevada inversión de capital inicial de un *Block Caving* y a su falta de flexibilidad, es fundamental para el éxito de las minas de *caving* conseguir un nivel económicamente aceptable de recuperación de mineral y de contenido de dilución cuando están en funcionamiento. La recuperación de mineral y la dilución en una operación de *Block Caving* están fuertemente determinadas por el diseño y el rendimiento del nivel de producción y las características de flujo del mineral y el material de desecho (Castro, 2007).

Se ha demostrado que a medida que el material fracturado va siendo extraído, este va formando lo que se conoce como zonas de extracción (ZEA) y movimiento (ZMA), cuya propagación y geometría determinarán las condiciones de trabajo bajo las cuales se operará dentro de la obra subterránea (Jin, 2017).

Por otro lado, la dilución es una parte integral de una operación minera de hundimiento y su comportamiento posee implicancias relevantes en todas las etapas de un proyecto minero subterráneo. Los modelos de dilución existentes han sido construidos sin la consideración de parámetros que pueden definir su entrada y comportamiento posterior, tales como la propagación del *caving* o la ubicación de la dilución (Paredes, 2012).

El objetivo de este trabajo consiste en realizar una simulación que replique el fenómeno físico de flujo gravitacional de material granular en una columna de extracción aislada con el fin de estudiar la dilución. Esta simulación se lleva a cabo mediante modelos computacionales 3D en el software *Ansys Rocky*, basado en la técnica numérica del método de los elementos discretos (DEM) que resuelve las interacciones entre partículas a través de sus puntos de contacto.

1.1 Objetivos

1.1.1 Objetivo General

- Estudiar la dilución en *Block Caving* mediante una simulación DEM.

1.1.2 Objetivos Específicos

- Configurar una simulación DEM que describa el flujo gravitacional en *Block Caving*.
- Generar un modelo de dilución para obtener la ley de una mezcla extraída.

1.1.3 Alcances

- Estudio teórico mediante simulación numérica, las limitaciones presentes en la simulación son:
 - Proceso de extracción continuo.
 - Partículas esféricas con tamaño único.
 - No se considera adhesión de partículas, tampoco fragmentación secundaria.
 - No se incluye diseño de bateas.

2 MARCO TEORICO

2.1 Medio granular

Se denomina medio granular a un conjunto de partículas macroscópicas rígidas y suaves, de tamaños mayores a $100\ \mu m$, que presentan ciertos tipos de interacciones entre sí. Dentro de las interacciones más importantes de granos macroscópicos destacan las fuerzas de contacto, como puede ser la elasticidad, la fricción y la fuerza de gravedad.

Estos tipos de materiales son los más utilizados en el mundo después del agua, representan más del 50% de las ventas en el mundo (Duran, 1999).

Los medios granulares están presentes en la industria minera en las áreas de extracción, almacenamiento, transporte y procesamiento de minerales. A pesar de que estos tipos de materiales se utilizan ampliamente en la industria ingenieril, comprender los medios granulares sigue siendo un desafío.

Las dificultades asociadas con los medios granulares incluyen la complejidad de describir el movimiento de cada partícula debido a su gran cantidad, la insignificancia de las fluctuaciones térmicas, la falta de una clara separación de escalas entre lo microscópico y lo macroscópico, la complejidad en la interacción entre granos, la facilidad con la que disipan energía y su capacidad para exhibir diferentes estados de la materia ya sea sólido, líquido o gas.

Finalmente, para comprender el comportamiento de los medios granulares, es crucial definir relaciones físicas que los gobiernen, además la caracterización de estos materiales es de gran importancia, especialmente en el tema que nos convoca que es la industria minera, los métodos de *caving*.

2.2 Block Caving

Block Caving (Figura 1) corresponde a un método de explotación subterránea masiva a gran escala en que el cuerpo mineralizado se desprende naturalmente por la gravedad después del fracturamiento inicial del macizo rocoso conocido como socavamiento basal. Debido a la acción de la gravedad y los esfuerzos presentes en el macizo rocoso se va produciendo un quiebre continuo desde que se desprende el material in situ hasta que finalmente es extraído por el respectivo manejo de materiales.

Dentro de este procedimiento se crea un nivel de socavación en la base del depósito mineral, conocido como nivel de hundimiento, seguido por la construcción de un nivel de producción a cierta distancia por debajo de este, a continuación, se excavan bateas de extracción entre el nivel de hundimiento y el nivel de producción, creando aberturas específicas. Los puntos de extracción se sitúan en las bases de estas bateas, permitiendo la posterior extracción del material. Luego, se extrae una capa horizontal de mineral desde el nivel de hundimiento, lo que provoca el colapso ascendente del yacimiento mineral (socavación basal). El mineral fragmentado cae en las bateas y se extrae en el nivel de producción mediante equipos LHD. Con el retiro del mineral fragmentado de los puntos de extracción, el flujo resultante provoca la continua fractura y caída del macizo rocoso.

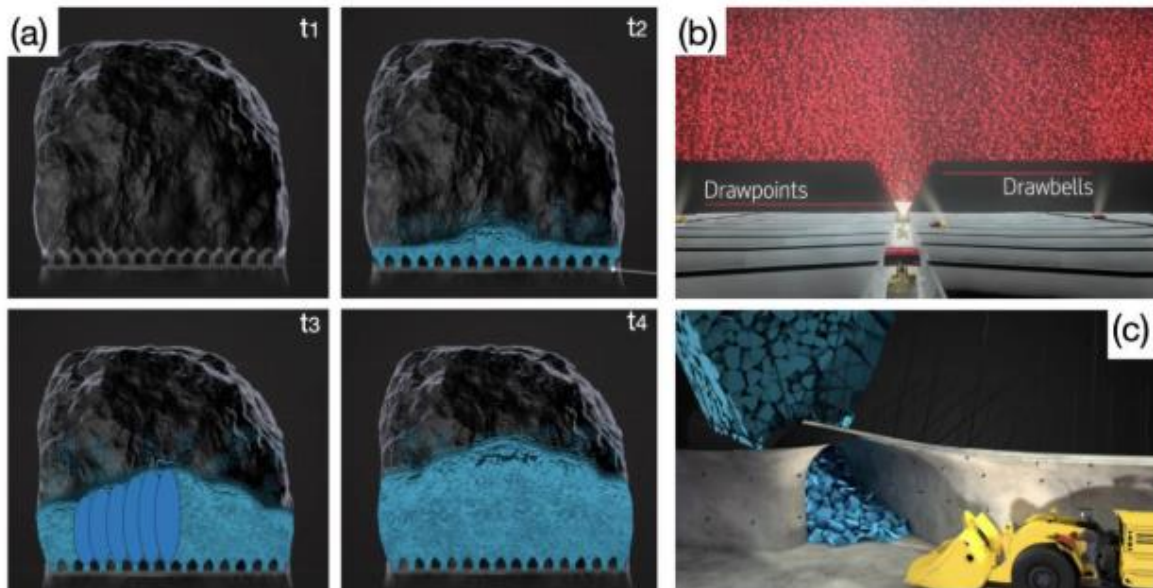


Figura 1: (a) Método de Block Caving para diferentes tiempos de extracción. (b) Vista de un punto (drawpoint) y una batea de extracción (drawbell). (c) Extracción del mineral desde un punto de extracción por un LHD (Sturla, 2022).

2.3 Dilución

El concepto dilución surge desde un punto de vista económico, que identifica a todo el material que se extrae junto con el mineral cuyo valor no paga por sí solo sus costos de extracción.

En la minería la dilución es una parte importante cuyo objetivo es controlarla, ya sea minimizando el contenido total o aceptar su entrada hasta cierto punto de maximizar la recuperación del mineral.

Para medir la dilución en una operación de extracción minera se utiliza la siguiente ecuación.

$$Dilucion \% = \frac{\text{material diluyente extraído}}{\text{mineral total extraído}} \times 100 \quad (2.1)$$

Según Laubscher los siguientes parámetros afectan en la dilución para los métodos de *caving*:

- Razón volumen de mineral y área de contacto mineral-diluyente, mientras mayor sea la razón, menor será el contenido de dilución.
- Disposición y forma de la interfaz mineral-diluyente, mientras más irregular e inclinada sea la interfaz, mayor será el contenido de dilución comparado con el caso de una interfaz lateral vertical y de geometría regular.
- Diferencia en la fragmentación entre mineral y diluyente, si la fragmentación del diluyente es más fina que el del mineral, existirá un mayor contenido de dilución y más temprana será la entrada del material diluyente al punto de extracción.
- Interacción de los elipsoides de extracción, a mayor interacción entre elipsoides de extracción menor será la dilución y viceversa
- Diferencia de densidades entre mineral y estéril, mientras el mineral contenga una densidad mayor que el estéril, menor será la dilución y viceversa.

2.3.1 Modelo dilución de Laubscher para *Block Caving*

Laubscher propone dos modelos, el primero sirve para estimar el punto de entrada de dilución en un punto de extracción (PED, punto de entrada de dilución), el cual, es calculado mediante la estimación de la altura de interacción (HIZ), el esponjamiento que alcance el material en la columna de extracción (S) y la desviación estándar de los tonelajes extraídos del punto con respecto a sus vecinos. El segundo corresponde a un modelo volumétrico de mezcla basado en observaciones empíricas y que considera como dato de entrada el PED.

El modelo que propone para calcular el PED es el siguiente:

$$PED \% = \frac{H_C \cdot S - HIZ}{H_C \cdot S} \cdot DCF \cdot 100 \quad (2.2)$$

H_C , corresponde a la altura medida desde el punto de extracción hasta la interfaz mineral/diluyente.

S , denominado al esponjamiento alcanzado en la columna, corresponde al aumento relativo del volumen que experimenta la roca debido a su fragmentación, los valores utilizados son de 1.16 para fragmentación fina, 1.12 para fragmentación media y 1.08 para fragmentación gruesa.

HIZ, denominada altura de la interacción corresponde a la altura desde la cual se producirá interacción entre los elipsoides de extracción. Esta altura es función de la diferencia en la calidad de roca, medida a través de la diferencia entre RMR del diluyente y mineral, además el espaciamiento de los puntos de extracción a través del ápex mayor. En la Figura 2 se ilustra como relacionar estas variables para obtener la HIZ.

DCF, factor de control de tiraje corresponde a una medida para la diferencia de extracción entre un punto de extracción y sus vecinos. Este índice se calcula mediante la desviación estándar de los tonelajes extraídos entre un punto de extracción y sus vecinos a una escala de extracción mensual. La Figura 3 ilustra un gráfico propuesto por Laubscher para el cálculo del DCF y un ejemplo.

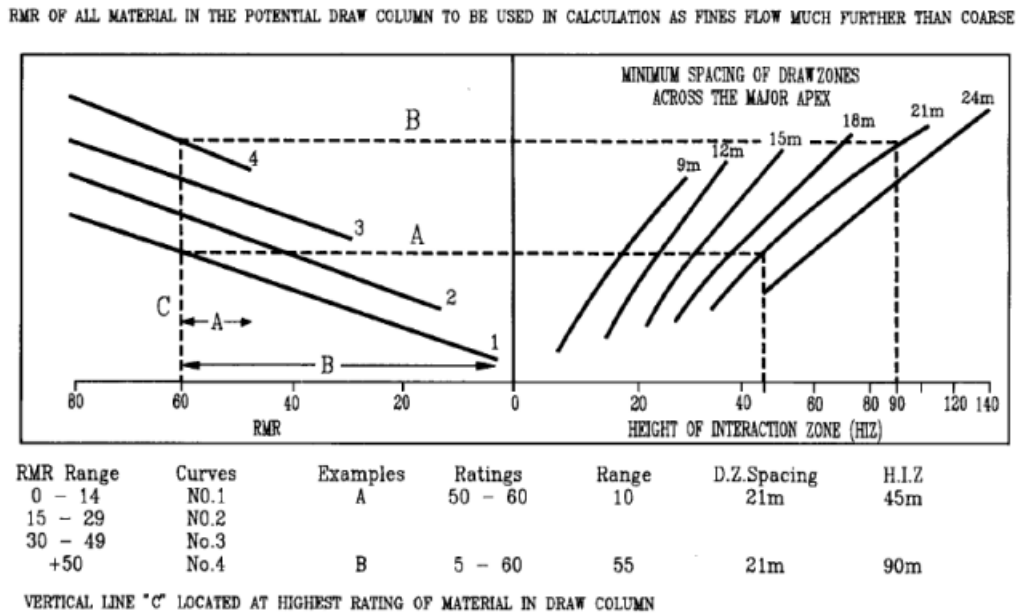


Figura 2: Altura de interacción (HIZ) (Laubscher, 1994).

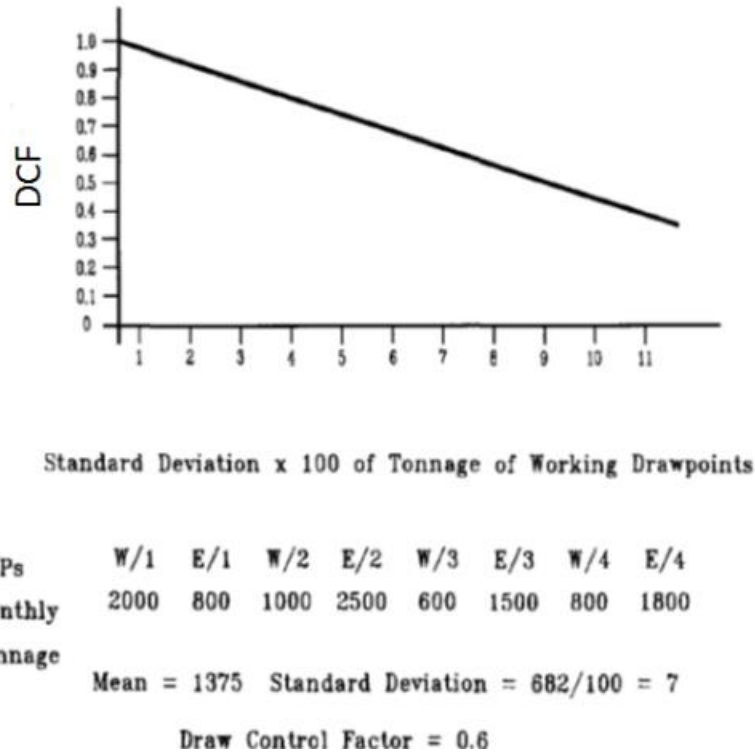


Figura 3: Factor de control de tiraje (Laubscher, 1994).

El cálculo del PED introducido por Laubscher resulta una aproximación determinista basada en reglas empíricas que no considera aspectos relevantes como la forma de la fuente de material diluyente y su ubicación espacial, ni la estrategia global de apertura de puntos que tendrá la explotación. Así, asume que, bajo ciertas condiciones de calidades de roca, alturas de columna, geometría del nivel de producción y control de tiraje, un punto de extracción tendrá el mismo punto de entrada de la dilución independiente de la dirección de avance de la extracción y la potencial dilución lateral que pudiera afectar (Paredes, 2012).

Una vez definido el PED, Laubscher (1994) propone un modelo volumétrico de mezcla este opera de la siguiente manera:

- Se considera una columna de extracción aislada de mineral, formada por tajadas o segmentos de altura h y un volumen V , cuyas leyes y densidades se designan por l_i y d_i respectivamente, como se muestra en la Figura 4. La base de la columna corresponde al nivel de hundimiento y corresponde al 0% de extracción, el 100% corresponde a la interfaz mineral/estéril.
- Con el valor del PED se genera una línea horizontal representada en la Figura 4 como el segmento AB. Luego, se traza una recta desde A, interceptando el punto medio del interfaz mineral/estéril (punto M), esta recta final definirá el contacto mineral/estéril.
- Una vez que se ha elaborado el gráfico, se determina la ley puntual y la ley promedio para cualquier porcentaje de extracción. Para calcular la ley puntual en un porcentaje de extracción específico, se traza una línea horizontal a la altura correspondiente a

ese porcentaje, y esta línea interceptará diferentes líneas de contacto entre los bancos, que serán ponderadas según las leyes de los bancos implicados. En el cálculo de la ley promedio extraíble, se sigue el mismo procedimiento, pero en este caso se utiliza como ponderador el área correspondiente a cada banco que se encuentra debajo de la horizontal.

Es importante considerar que – en las aproximaciones del modelo volumétrico – las curvas son empíricas y no se derivan del flujo gravitacional. El modelo no incluye la fragmentación en altura ni su variación a lo largo del tiempo, lo que impide que se realicen cambios en el PED a medida que avanza el tiempo.

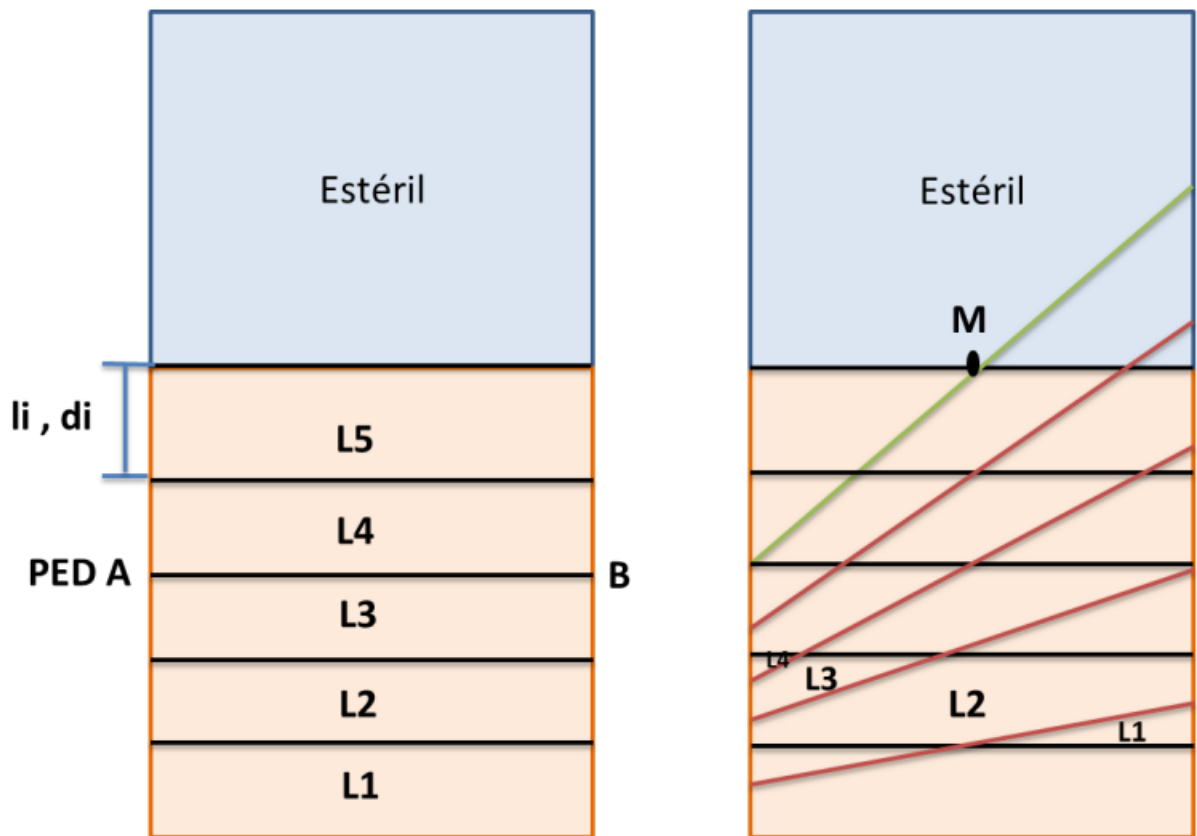


Figura 4: Modelo esquemático de curvas de mezcla utilizadas en el modelo de Laubscher (Arriagada, 2015).

2.4 Flujo Gravitacional

El descenso del material granular producto de la acción de gravedad se define como flujo gravitacional (Kvapil, 2008). Esta dinámica es la que se encuentra presente en los métodos de *caving*.

El estudio de flujos gravitacionales comienza en el siglo XX, donde se experimentaba con contenedores o silos llenados con arena principalmente.

Se destacan 3 tipos de modelos para experimentos físicos:

- Tipo A: Modelo clásico de flujo gravitacional, este consiste en un modelo 2D relleno con arena de forma vertical y contemplaba una abertura en el centro, además se realizaba un arreglo de líneas coloreadas horizontales para poder evidenciar el movimiento de las partículas cuando la abertura se abría.
- Tipo B: Modelo 2D con relleno arbitrario, a diferencia del modelo tipo A, este modelo se rellenaba de una forma horizontal, además de generar un patrón totalmente diferente y más complejo, denominado patrón de panal cuadrado.
- Tipo C: Modelo y ensayos 3D: El material granular se rellena en capas horizontales, donde a lo largo de cada capa se colocan marcadores, donde cada uno de estos tiene un número que identifica su ubicación espacial.

Gracias a estos tipos de modelos se logró generar una base experimental para el flujo gravitacional en contenedores y silos. Principalmente en este tipo de experimentos se estudian las zonas de flujo ZMA e ZEA, y como también estos cuerpos interactúan debido a la extracción en puntos vecinos.

Hoy en día existen 3 principales métodos para estudiar los flujos gravitacionales de medios granulares, los cuales son análisis experimentales (in situ o contenedores), teóricos y numéricos.

Los experimentos in situ pueden representar la realidad, no obstante, son más laboriosos debido a que consumen mayor tiempo, costos y son complejos de gestionar, además los resultados mediante este tipo de investigaciones no se pueden globalizar o no son transferible fácilmente (Jin, 2016). Es debido a esto que los modelos de extracción son los más aplicados en la práctica, que son los que se mencionaron anteriormente.

La teoría existente de los flujos gravitacionales se basa principalmente en la teoría del elipsoide de extracción y la teoría de extracción aleatoria de un medio. Las teorías del elipsoide o cuerpos de extracción se utilizaron para explicar el flujo gravitacional en “*bunkers*” y silos, donde esta fue utilizada en la minería durante mucho tiempo, hasta el día de hoy. Por otro lado, la teoría de extracción aleatoria de un medio ve las partículas como un medio continuo, utiliza la teoría de la probabilidad para deducir la ecuación de densidad de probabilidad del movimiento de las partículas con el fin de estudiar las reglas de movimiento de las partículas, lo cual es muy eficiente y proporciona resultados consistentes con los resultados de los modelos experimentales (Jin, 2016).

Por último, los métodos de análisis numéricos pueden realizarse con FDM (método de diferencias finitas), FEM (método de elementos finitos), DEM (métodos de elementos discretos) o CA (células autómatas), para construir modelos de extracción numérica y analizar los problemas prácticos de la extracción. Estos métodos son convenientes y rápidos, de gran maniobrabilidad y repetibilidad, además contienen una perspectiva de aplicación amplia. Sin embargo, estos modelos numéricos aún deben probarse mediante modelos experimentales o pruebas a escala real (Jin, 2016).

2.4.1 Fragmentación

La fragmentación debe ser uno de los elementos más valiosos dentro de la minería del *caving*, ya que, es el elemento esencial para el pronóstico del flujo gravitacional. Según Laubscher la fragmentación influye en los siguientes parámetros o variables:

- Espaciamiento entre puntos de extracción.
- Dilución.
- Control de la extracción.
- Productividad en el punto de extracción.

En los métodos de *caving* existen 3 tipos o niveles diferente de fragmentación (Figura 5): la fragmentación in-situ, primaria y secundaria, secuencialmente. La fragmentación in situ corresponde aquella presente naturalmente en el macizo rocoso como un conjunto de discontinuidades. Posteriormente, durante el proceso de desprendimiento o desplome se observa la fragmentación primaria, originada por el desprendimiento de bloques desde el techo (“*cave back*”) por efecto de la relajación de los esfuerzos inducidos al generarse un área sin soporte. Finalmente, la fragmentación secundaria es generada en la columna de extracción, asociada al movimiento de bloques a través de la columna hasta llegar al punto de extracción.

Los parámetros necesarios para el cálculo de la fragmentación primaria y los factores que determinan la fragmentación secundaria en función de la operación del *caving* se muestra en la Figura 6.

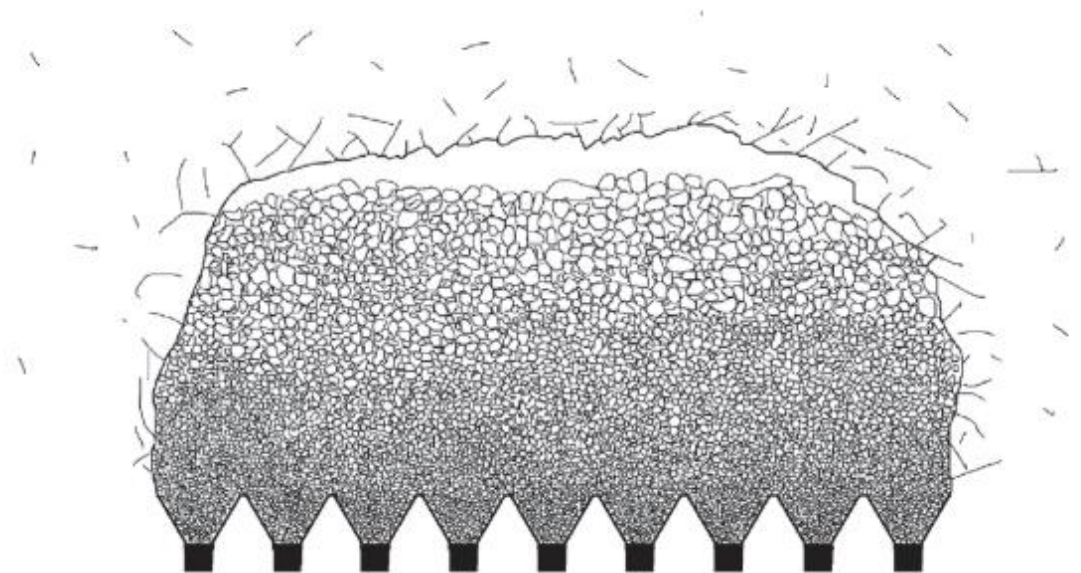


Figura 5: Esquema de un Block Caving en propagación (Gómez, 2019).

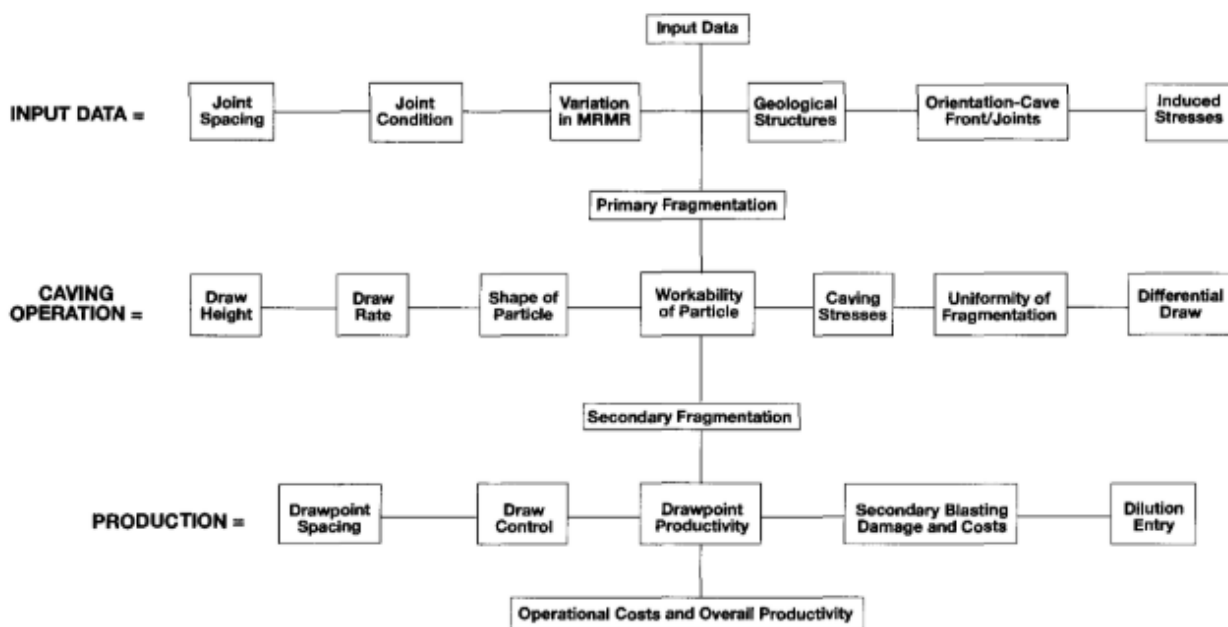


Figura 6: Mapa Conceptual fragmentación (Laubscher, 2000).

2.4.2 Zonas de Extracción y Movimiento

Kvapil (1965) propuso la existencia de dos zonas o formas geométricas distintas dentro del flujo gravitacional, que caracterizan al material extraído y al material desplazado o una zona con aumento de su porosidad como resultado de la extracción. La primera zona la denomino zona de extracción aislada (ZEA), mientras que la segunda la designo como zona de movimiento aislada (ZMA) (Figura 7). Cabe mencionar que esta definición es aceptada ampliamente por investigadores y se sigue utilizando, no obstante, existe un debate de la forma específica de estas zonas.

Señalo que ambas zonas pueden ser representadas geoméricamente por elipsoides en revolución y destaca que la altura de la ZMA es 2.5 veces mayor que la ZEA.

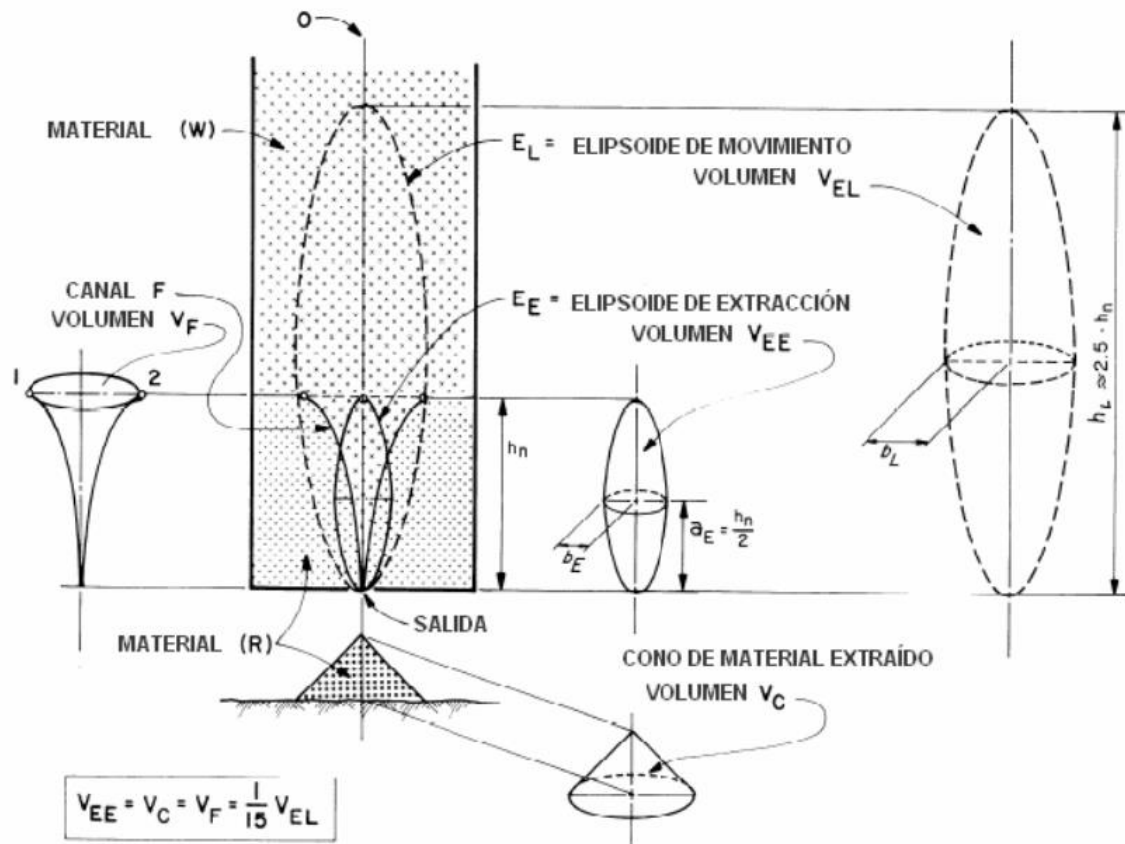


Figura 7: Ilustración de teoría de elipsoides de Kvapil, relación entre ZMA y ZEA (Kvapil, 2008).

Propuso también una dependencia del ancho del elipsoide de extracción con el tipo de material en cuestión, en la cual los materiales gruesos presentan mayores anchos y materiales más finos menores anchos.

Por otro lado, la forma del elipsoide de extracción puede ser definida por su excentricidad, donde la define de la siguiente manera:

$$\varepsilon = \frac{1}{a} \sqrt{(a^2 - b^2)} \quad (2.3)$$

Donde “a” corresponde al semi eje mayor y “b” a semi eje menor del elipsoide. Naturalmente, cuando mayor es la excentricidad más delgada es el elipsoide de extracción y menor su volumen (Kvapil, 2008) (Figura 8). Por otro lado, enfatizo que la excentricidad no solamente depende del tamaño de las partículas, fragmentos y la altura de extracción, sino que menciona algunos elementos que afectan la excentricidad como lo son:

- Forma de fragmentos.
- Rugosidad superficial de las partículas.
- Fricción entre partículas.
- Porcentaje de polvo.
- Porcentaje de finos, arena y arcilla.
- Contenido de humedad.
- Compresibilidad.
- Compactación.
- Plasticidad.
- Resistencia de los fragmentos.
- Esfuerzos.
- Tasa de descarga del material.

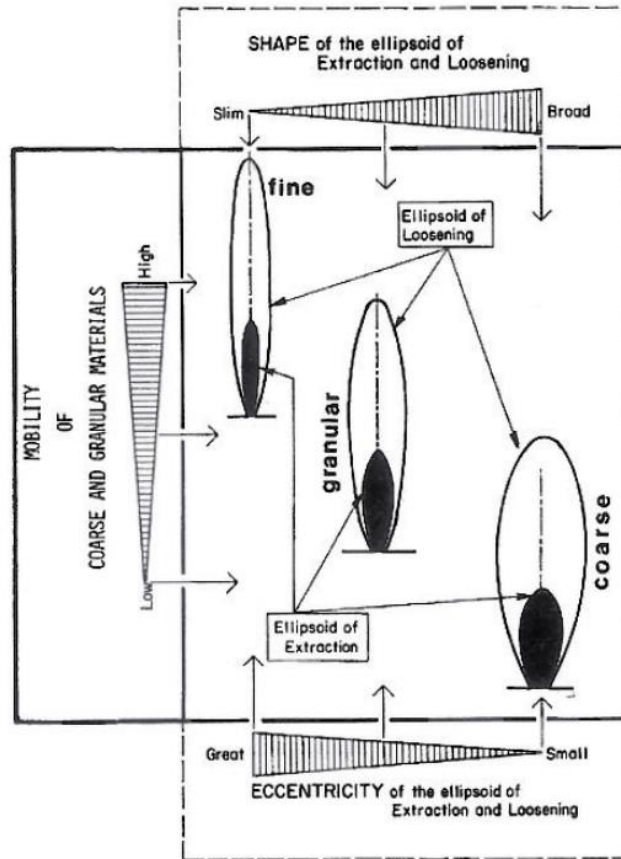


Figura 8: Cuerpos de extracción en función de distribución de tamaño del medio granular (Kvapil, 2008).

Kvapil notó que una vez alcanzada una cierta altura de extracción cambia la forma del elipsoide de extracción, específicamente este se transforma en una forma cilíndrica a la que denominó flujo másico, generando por consiguiente un ancho del ZEA constante. Con esta información genero un gráfico aproximado (Figura 9) que relaciona el ancho de un solo flujo gravitacional (extracción aislada) con su respectiva altura extraída, la cual indica que a partir de una altura del ZEA equivalente a 45 metros se genera el denominado flujo másico o “*Mass Flow*”. Al termino de flujo másico otros autores lo interpretan como el resultado del solapamiento de las zonas de extracción o interacción entre zonas de extracción generando una subsidencia ordenada y uniforme.

La Figura 9 relaciona el ancho y alto de la ZEA para distintas categorías de mineral, donde estas varían según su granulometría, las cuales se agrupan en bloques de 1 metro, 1.5 metros y todos los que superen los 2 metros. Sin embargo, este modelo carece de un respaldo real, ya que se ha observado que el tamaño y la forma del material grueso son variables. Por lo tanto, este modelo sólo puede utilizarse como una aproximación muy básica del comportamiento de los elipsoides.

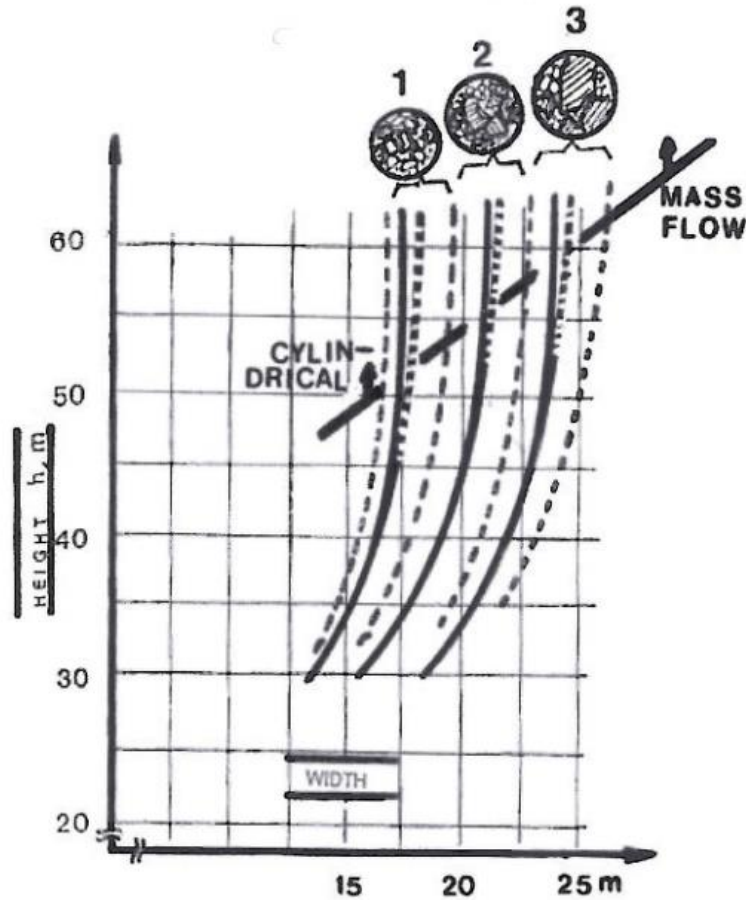


Figura 9: Relacion entre ancho y alto de la ZEA para distintas categorias de mineral (Kvapil, 2008).

Por otro lado, Castro (2007) junto con sus colaboradores desarrollaron experimentos en el modelo físico 3D más grande hasta la fecha, el cual consistió en la extracción de material no cohesivo desde un punto de extracción, cuyos principales resultados fueron los siguientes:

- ZMA es siempre más alta y ancha que ZEA.
- La geometría de ambas zonas se ajusta razonablemente bien al contorno de una elipse.
- El tamaño de partícula tiene una ligera influencia en las dimensiones de la ZEA, en cambio, en la ZMA no se tiene un efecto significativo.
- La distribución granulométrica y el tamaño de la abertura no afectan significativamente las dimensiones de ninguna de las zonas.
- Generan modelos que describen el ancho y alto para la ZEA como ZMA.

Con los resultados obtenidos establecieron un modelo que representa la tasa de crecimiento tanto de la altura y del ancho de la ZMA en función de la masa extraída. Respecto a la ZEA no describe un modelo matemático, no obstante, mencionaron que puede cumplir con la misma ecuación descrita para la ZMA solo que con otros órdenes de magnitud.

La evolución de la altura (H) de los elipsoides en función de la masa extraída establecen que este empZEAa con un crecimiento exponencial hasta alcanzar una evolución constante (Figura 10). Esta evolución viene representada por la siguiente ecuación:

$$H(m) = h_0 \left(1 - e^{\frac{-m}{m_h}} \right) + cm \quad (2.4)$$

Donde h_0 y m_h corresponden a la altura y masa del elipsoide en cuestión durante su crecimiento exponencial, y c corresponde a la tasa de crecimiento lineal.

Por el lado del ancho (W) de los elipsoides tanto ZMA como ZEA, incrementan a medida que se extrae el material (Figura 11). Respecto a la ZMA la tasa de expansión de su ancho decrece con la masa acumulada extraída, se observa que la expansión horizontal de la ZMA respecto a la masa extraída ocurre en dos etapas. La primera etapa ocurre cuando la ZMA está completamente contenida en los límites del modelo, y la segunda ocurre después de la llegada de la ZMA a la superficie (Castro, 2007). El modelo que describe el ancho (W) de la ZMA en función de la masa extraída m es la siguiente (Castro menciona que se puede ajustar un modelo similar para la ZEA):

$$W(m) = w_0 \left(1 - \beta e^{\frac{-m}{m_1}} - (1 - \beta) e^{\frac{-m}{m_2}} \right) \quad (2.5)$$

Donde w_0 es el ancho máximo luego de que la ZMA alcanza la superficie, β es una constante de ajuste adimensional y m_1, m_2 son las masas que identifican las dos etapas en la expansión del ancho de la ZMA, este modelo se logra apreciar en la Figura 11, donde se observan las dos etapas, la primera que presenta una velocidad de crecimiento a los primeros instantes de la extracción y finalmente la segunda etapa donde la velocidad de crecimiento disminuye.

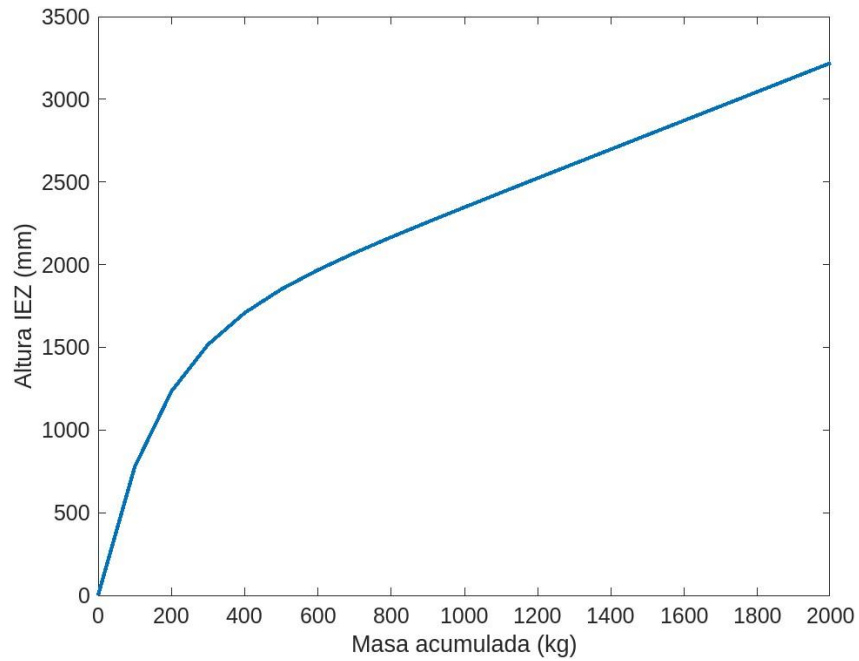


Figura 10: Altura ZEA en función de la masa extraída acumulada, experimento 18 mm-WD (Castro, 2007).

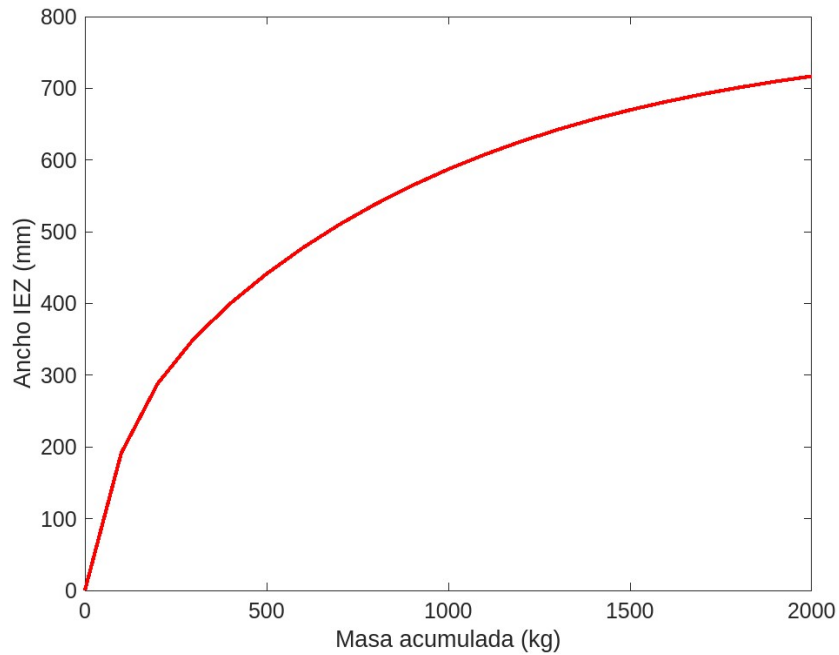


Figura 11: Ancho ZEA en función de la masa extraída acumulada, experimento 18 mm-WD (Castro, 2007).

Debido al debate existente en la forma específica de los cuerpos geométricos generados por la extracción aislada de un contenedor o silo Jin (2017) realizó un modelo físico 3D con el objetivo de demostrar la forma de gota invertida. Se basó en la teoría planteada inicialmente por Frostrom (1970), que consistía en que la forma de los cuerpos geométricos se asimila a una gota invertida.

El desarrollo de este experimento físico consistió en un contenedor 3D con una abertura situada en el centro inferior, idéntica a los modelos tipo C. Se va pesando cierta masa extraída y se registra su posición inicial dependiendo del código del marcador. Luego, interpoló valores con el objetivo de determinar una relación entre la altura y ancho de la geometría que se estuviera desarrollando.

Cabe recalcar que este experimento evalúa 3 variables, que son el ancho del punto de extracción, la granulometría y la altura de la columna de extracción. Cada variable contiene 3 distintos valores, generando así 9 realizaciones del experimento.

Se obtuvo como resultado una relación entre altura, ancho y masa extraída como se aprecia en la Figura 12. La forma no es equivalente a elipsoides estándar, más bien, posee una forma de gota de agua invertida.

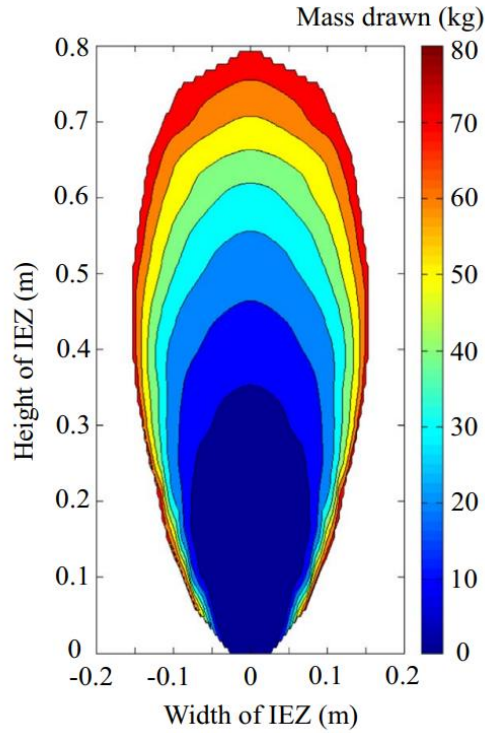


Figura 12: Dimensiones de la ZEA para distintas masas de mineral extraído (Jin, 2017).

Debido a esto, las ecuaciones descritas por Castro deben ser corregidas para describir esta geometría, donde las ecuaciones resultantes de este estudio son las siguientes:

$$y^2 = \frac{k_1 k_2^2}{\gamma \pi} z^{k_2-1} \ln \left(\frac{H_{max}}{z} \right) \quad (2.6)$$

$$y^2 + x^2 = \frac{k_1 k_2^2}{\gamma \pi} z^{k_2-1} \ln \left(\frac{H_{max}}{z} \right) \quad (2.7)$$

Donde x, y, z corresponden a las coordenadas cartesianas que definen las dimensiones de ancho, profundidad y altura de la ZEA respectivamente. H_{max} corresponde a la altura máxima de la ZEA, γ es el peso específico, k_1 y k_2 son constantes de ajuste que se obtiene al relacionar la altura de la ZEA y la masa extraída m, mencionar que cada k, es diferente según el número del experimento (1 al 9):

$$H_{IEZ} = k_1 m^{k_2} \quad (2.8)$$

2.4.3 Modelo Cinemático

Los modelos cinemáticos aplicados al Block Caving son aproximaciones teóricas o leyes constitutivas heurísticas diseñadas para describir los flujos del material extraído, provocada por la abertura en la parte inferior de un contenedor. Este modelo describe el movimiento de las partículas del material dentro del sistema, considerando su velocidad y trayectorias a lo largo del tiempo, utiliza los principios de la física para simular cómo las rocas y otros materiales se desplazan durante el proceso de extracción en un método de *caving*. El objetivo es predecir cómo se moverán los materiales a medida que se fracturan y caen, lo cual es esencial para comprender la eficiencia y la dinámica de la extracción.

Fue introducido por Litwiniszyn (1963) y Nedderman & Tüzün (1979). Luego al pasar los años Melo (2007-2009) incluyó en la teoría de los autores anteriores un cambio de densidad dentro del medio granular producto del avance de un frente de dilatación. Este surge como consecuencia de la extracción del mineral, el frente se propaga de forma ascendente generando un incremento en la porosidad. Esto permite el movimiento del mineral, afectando directamente a la ZMA, mientras la ZEA no se ve afectada (Melo, 2007-2009).

Con este avance realizado por Melo y colaboradores en 2009, presentaron modelos 2D y 3D para definir las variables ancho y alto para ambos cuerpos de extracción, es decir, ZMA e ZEA, considerando el efecto de la dilatación en los modelos cinemáticos de Nedderman & Tüzün.

El efecto de dilatación se puede apreciar en la Figura 13, Se genera a medida que se extrae material desde la abertura, provoca un incremento de la porosidad en la ZMA, genera una liberación de espacios vacíos produciendo un desplazamiento de material granular en

dirección descendente, el cual este se logra cuando el frente de dilatación alcanza a las partículas.

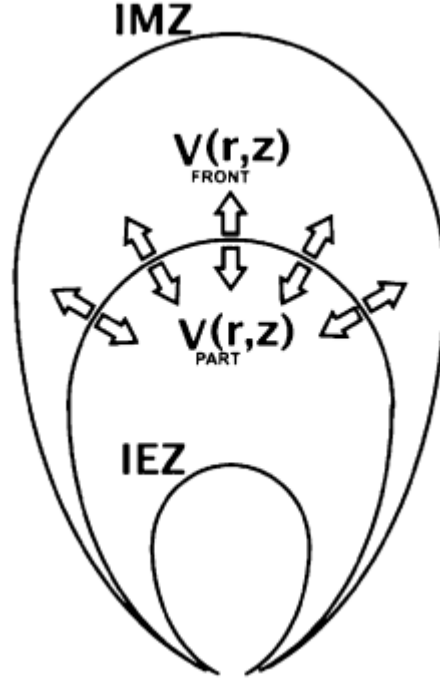


Figura 13: Frente de dilatación y movimiento de partículas debido a la extracción de mineral (Melo, 2009).

Existe una relación entre la velocidad en el frente de dilatación y la velocidad de las partículas la cual es la siguiente:

$$\vec{v}_f = \frac{\rho}{\Delta\rho} \vec{v}_p \quad (2.9)$$

Donde $\vec{v}_f$ es la velocidad del frente y $\vec{v}_p$ es la velocidad de las partículas. ρ es la densidad dentro de la ZMA, $\Delta\rho = \rho_0 - \rho$ es el cambio de densidad ocasionado por el desplazamiento del mineral y ρ_0 es la densidad fuera de la ZMA.

Finalmente lograron ecuaciones para calcular el alto y ancho de los cuerpos de extracción, para la ZEA son las siguientes:

$$H_{IEZ(2D)} = \left[\frac{3S}{4\sqrt{\pi D_p}} \right]^{2/3} \quad (2.10)$$

$$H_{IEZ(3D)} = \left[\frac{V}{2\pi D_p} \right]^{1/2} \quad (2.11)$$

$$W_{IEZ(2D)} = 2 \left[\frac{6D_p}{e} \right]^{1/2} \left[\frac{3S}{4\sqrt{\pi D_p}} \right]^{1/3} \quad (2.12)$$

$$W_{IEZ(3D)} = 2 \left[\frac{8D_p}{e} \right]^{1/2} \left[\frac{V}{2\pi D_p} \right]^{1/4} \quad (2.13)$$

D_p corresponde al coeficiente de difusión del medio granular, cuyo valor se calcula como $1/8$ del diámetro medio de partículas, S corresponde al área extraída, e es el número de Euler y V al volumen extraído.

Por otro lado, las ecuaciones para la ZMA son las siguientes:

$$H_{IMZ(2D)} = \left[\frac{\rho}{\Delta\rho} \right]^{2/3} \left[\frac{3S}{4\sqrt{\pi D_p}} \right]^{2/3} \quad (2.14)$$

$$H_{IMZ(3D)} = \left[\frac{\rho}{\Delta\rho} \right]^{1/2} \left[\frac{V}{2\pi D_p} \right]^{1/2} \quad (2.15)$$

$$W_{IMZ(2D)} = 2 \left[\frac{\rho}{\Delta\rho} \right]^{1/3} \left[\frac{6D_p}{e} \right]^{1/2} \left[\frac{3S}{4\sqrt{\pi D_p}} \right]^{1/3} \quad (2.16)$$

$$W_{IMZ(3D)} = 2 \left[\frac{\rho}{\Delta\rho} \right]^{1/4} \left[\frac{8D_p}{e} \right]^{1/2} \left[\frac{V}{2\pi D_p} \right]^{1/4} \quad (2.17)$$

2.4.4 Interacción de Flujos

En los diseños de Block Caving son varios puntos de extracción en los que se está extrayendo mineral. Es debido a esto que debe existir un marco teórico de cómo estos cuerpos de extracción vecinos interactúan. La importancia en el estudio de la interacción de los flujos entre puntos de extracción es generar un espaciamiento óptimo entre puntos de extracción de forma de maximizar la recuperación del mineral y de minimizar la dilución.

El nivel de interacción de flujos va a depender del espaciamiento entre los puntos de extracción. Si los puntos están suficientemente cerca, estos interactúan generando un flujo masivo o tiraje interactivo. Por otro lado, si los puntos están lejanos se trata de un tiraje aislado, generando una zona pasiva entre los puntos de extracción (Kvapil, 2008).

Laubscher desarrolló teorías o mecanismos que se generan en el proceso de extracción debido a la interacción de flujos granulares. Estos acercamientos los generó mediante experimentación física en modelos de arena, mediante observaciones y datos de minas subterráneas, principalmente definió la teoría de interacción de flujos gravitacionales y la teoría de difusión de vacíos.

Menciona que los puntos de extracción se pueden separar hasta 1.5 veces el ancho del ZMA para conseguir una extracción uniforme y además conseguir una interacción.

También menciona que el efecto de la interacción de los flujos genera que el ancho de los cuerpos de extracción se ensanchan, cuyo mecanismo detrás de este ensanchamiento lo describió como la falla del pilar roto entre ZMA. Esta falla es causada por el incremento de los esfuerzos verticales y el decrecimiento de los esfuerzos laterales en el pilar, el cual induce el movimiento lateral del material roto dentro del pilar. Esta afirmación es corroborada por el material fino que es encontrado en las zonas de extracción. Este mecanismo genera una tasa uniforme denominado flujo másico, como se muestra en la Figura 14. Además, define HIZ como la altura de la zona de interacción, que la interpreta a la altura donde se divide la zona de flujo másico que se encuentra en las zonas más altas y la zona de interacción que se encuentran en las zonas más bajas.

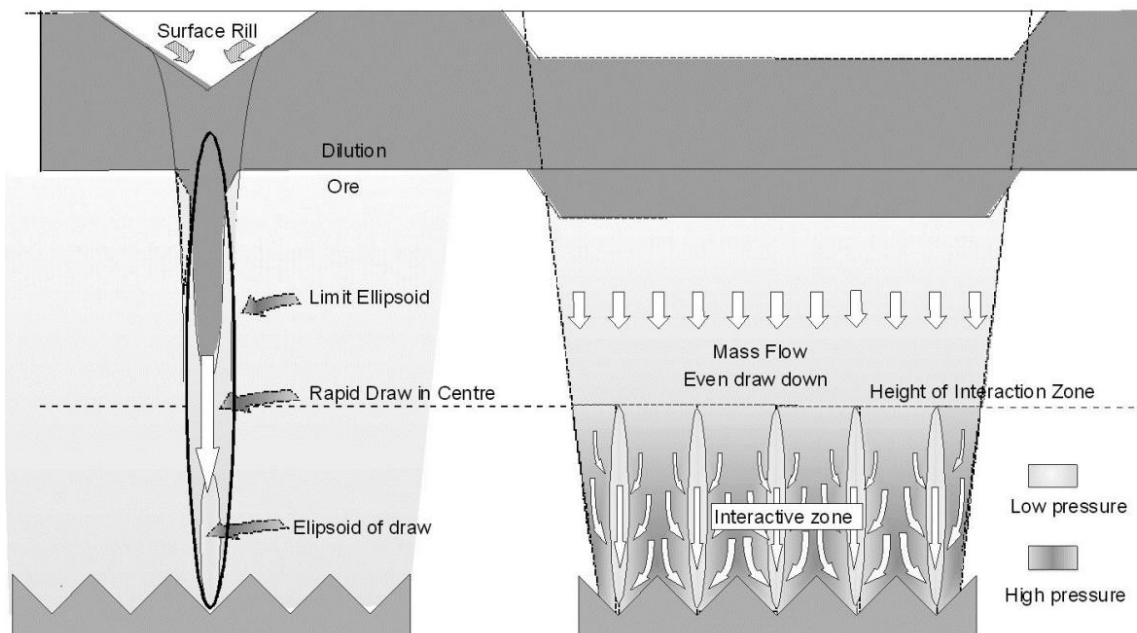


Figura 14: Ilustración teoría de Laubscher para interacción de flujo gravitacional (Laubscher, 2000).

Por otro lado, la teoría de difusión de vacíos (Figura 15), describe el comportamiento dinámico de los vacíos que se forman y evolucionan durante el proceso de extracción. La teoría se basa en la creación de vacíos transitorios que se generan por encima del punto de extracción, estos vacíos no son permanente; colapsan y se reforman continuamente, moviéndose hacia arriba a medida que el material cae y se asienta. Durante este colapso, los vacíos pueden ser parcialmente rellenos con material fino o suelto proveniente de los lados o de arriba. Este proceso de reformación y relleno tiende a fragmentar los vacíos grandes en partes más pequeñas y estables. A medida que se crean múltiples vacíos en diferentes puntos de extracción, estos vacíos pueden desestabilizar los adyacentes, fomentando el flujo vertical del material y convirtiendo el mecanismo de extracción en un flujo masivo más uniforme, en lugar de un flujo controlado por vacíos individuales.

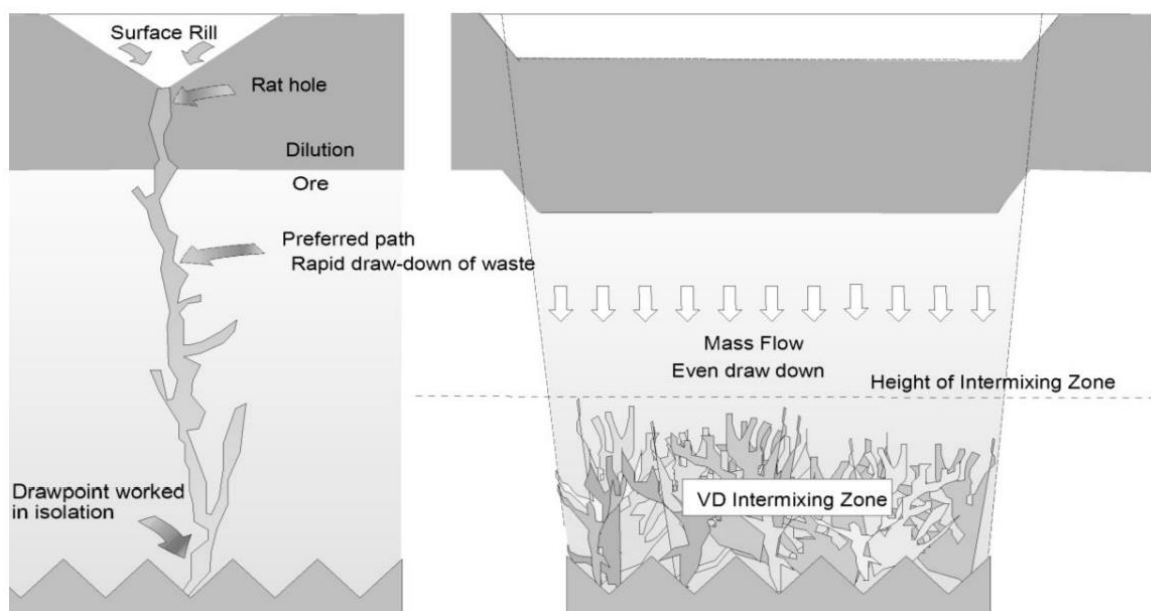


Figura 15: Mecanismo de difusión de vacíos, zona de mezcla intermedia y flujo masivo (Laubscher, 2000).

Trueman (2008) utiliza el mismo modelo físico de Castro con el fin de estudiar la interacción de los flujos utilizando material granular (grava), sus resultados contrarrestaron lo propuesto por Laubscher ya que, no se generó interacción a distancias de 1,2 veces el ancho de la ZMA. Además, argumentó que la diferencia de los resultados se debe a los esfuerzos presentes en el material inmóvil entre los puntos de extracción, específicamente las tensiones máximas percibidas, las cuales en los experimentos fueron de 1,3 veces la carga inicial, a diferencia del modelo de arena de Laubscher, cuya carga máxima fue de 1,9 veces la carga inicial. Agregó también que existe un menor esfuerzo requerido para producir cizallamiento o corte en la arena, lo que facilitó a colapsar una mayor cantidad de material entre ZMA.

Halim (2006) en su tesis de doctorado estudió mediante experimentación física, con el modelo físico utilizado por Castro y Trueman, la interacción de flujos para diferentes espaciamientos.

Los resultados los obtuvo configurando el modelo físico según él lo estime conveniente, primero genera una extracción aislada para obtener tanto las dimensiones del ZEA y ZMA, para luego configurar los puntos de extracción espaciados a cierta distancia del ancho de la ZEA y del ZMA. Los resultados y conclusiones obtenidos fueron los siguientes:

- La ZMA es 1,4 veces más ancha que la ZEA para una misma masa extraída, cuando la ZMA alcanza la superficie es aproximadamente 2,4 veces más alta que la ZEA.
- Las zonas de extracción aparentemente no incrementan su ancho cuando ocurre interacción en el flujo cuando el espaciamiento es una distancia entre 1 a 1,5 veces el ancho de la ZEA, incluso cuando existe superposición de las ZMA.
- De la misma forma las ZMA aparentemente no incrementan su ancho, no se observa “Mass Flow” cuando los puntos de extracción están espaciados una distancia mayor al ancho de la zona de movimiento.
- Cuando los puntos de extracción están espaciados una distancia menor que el ancho de la ZEA, las zonas de extracción adyacentes con extracción concurrente simplemente se encuentran y forman un plano límite por encima de la mitad del espaciamiento.
- Cuando los puntos de extracción están espaciados a distancias inferiores del ancho de la ZEA, existe un mayor grado de solapamiento entre las zonas de extracción adyacentes. Produce que los anchos de estas zonas combinadas se reduzcan, para una altura de extracción dada, también produce un aumento en la altura para la zona de extracción combinada, para cierto material extraído, reduce la cantidad de material extraído para cada punto de extracción individual. Sin embargo, aumenta en la altura de la zona de extracción combinada para cierta cantidad de material extraído.
- Los puntos de extracción deben estar espaciados de modo que las zonas de movimiento se solapen antes de llegar a la superficie. Esto se logra con un espaciamiento menor al ancho de la ZEA para una altura de extracción requerida. De esta forma se reduce la pérdida de mineral.
- Para la determinación de un espaciamiento óptimo es necesario generar análisis económicos, como puede ser el flujo de caja, VAN y/o ROR. El espaciamiento ideal varía de una mina a otra ya que los parámetros necesarios para realizar un análisis de flujo de caja también varían dependiendo de factores directamente de la mina como puede ser parámetros geológicos, geográficos, geotécnicos, sociales y políticos.

Por otro lado, otros autores estudiaron la interacción de flujos mediante el modelo de plasticidad. Utiliza los esfuerzos presentes en el sistema para poder generar un campo de velocidad del medio, de esta forma Vivanco, Watt y Melo (2011) propusieron un modelo de plasticidad que representa la velocidad de propagación del ZMA en función del frente de dilatación del material almacenado.

En el estudio se evaluaron diferentes grados de interacción para una extracción simultánea, utilizando el modelo plástico incluyendo el frente de dilatación para espaciamientos

variables. De este estudio se desprendió que la evolución de cada ZMA se desarrolla como tiraje aislado cuando las aberturas están muy distanciadas. Por otro lado, cuando este distanciamiento es menor, los flujos comienzan a deformarse. Además, a medida que las distancias entre aberturas disminuyen se aprecia un aumento de la altura de la ZMA.

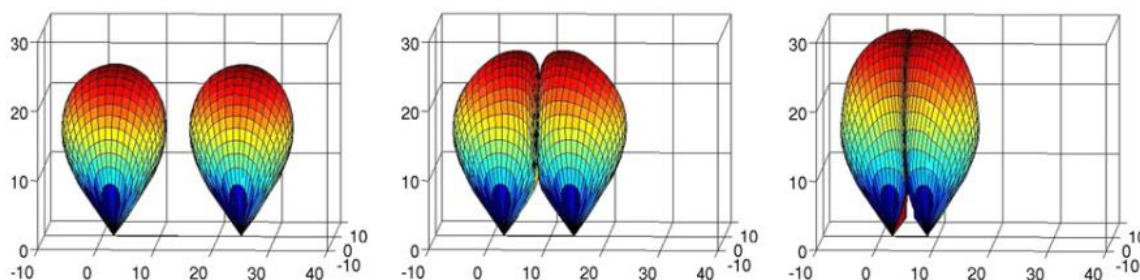


Figura 16: Interacción de ZMA a distintos espaciamientos (Vivanco, 2011).

Posterior a este último estudio Vivanco y Melo (2013) estudiaron la interacción de los flujos para una extracción alternada, llegando a desarrollar un modelo cinemático que describe el desplazamiento del material dentro de la ZMA. Esto lo logran mediante las siguientes suposiciones: se tienen 2 aberturas denominados “a” y “b” ubicadas a un cierto espaciamiento, ambas cerradas en el tiempo $t = 0$, luego para un tiempo t se inicia la extracción de solamente la apertura “a”, que luego se cierra y se procede a extraer de la apertura “b”. El modelo planteado por los autores se puede apreciar en anexos.

Con este modelo lograron evaluar cómo se desarrolla la interacción de flujos para ciertos espaciamientos – incluyendo una extracción alternada – con el supuesto de que la masa o volumen extraído de la apertura “b” es solamente el 20% de la masa o volumen extraído de la apertura “a”. Observaron que para ese material extraído, las líneas de flujo sobre cada apertura no se ven alteradas, a no ser, que las distancias entre ZMA sean pequeñas para que interactúen.

También, utilizaron el mismo procedimiento, pero para este caso cambiaron la cantidad de masa o volumen extraído en la apertura “b”. En esta ocasión utilizan un 80% del volumen extraído en “a”, observaron que en caso de que haya una interacción entre ZMA, se encuentra una mayor distorsión de las líneas de flujo, alterando la altura máxima de la ZMA.

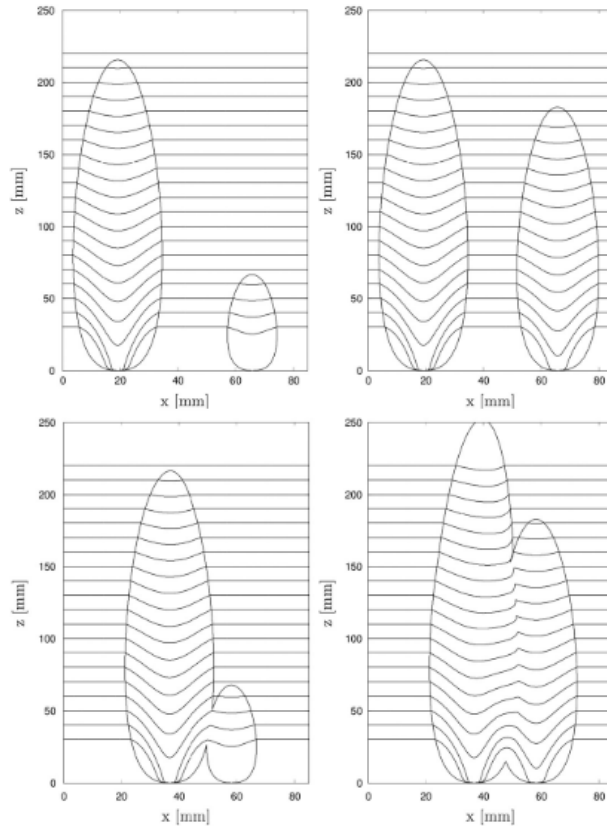


Figura 17: Interacción de ZMA a distintos espaciamientos y volumen extraído, las figuras de la izquierda equivalen a un 20% y las de la derecha a un 80% (Vivanco, 2013).

La modificación del límite de una ZMA – debido a las extracciones de material de un punto de extracción vecino – podría tener efectos negativos significativos, ya que la dilución situada inicialmente lejos de un punto de extracción. En explotación podría ser transportada a las proximidades de su apertura y acabar contaminándola. A la inversa, la interacción podría ser beneficiosa al reubicar el mineral más cerca de la región de influencia de un punto de extracción que eventualmente podría recuperarse (Vivanco, 2013).

Otro autor que estudió las leyes de extracción de mineral hundido es Jin (2016) que estudia la ZEA tanto por DEM como por experimentos físicos.

En primera instancia evalúo el efecto en la ZEA variables. Estas son el tamaño de partícula, el tamaño de la abertura y la altura de la columna. Los experimentos los realizó tanto en un modelo físico como también en DEM, donde llegan a las mismas conclusiones: estas variables no tienen efecto en las dimensiones de la ZEA.

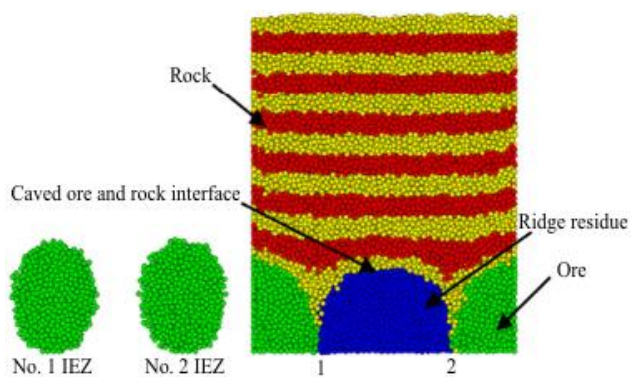
Por otro lado, validado el uso de DEM, utiliza a este mismo para ver el efecto del espaciamiento entre puntos de extracción y la interacción de las ZEA, utilizando tanto extracción simultánea como alternada.

Para la extracción simultánea observó que para una distancia en la que no se produzca interacción entre ZEA's, cada uno de estos se desarrolla de manera independiente. En cambio, cuando esta distancia decrece – por ende se produce interacción – se observa una distorsión en los costados de los ZEA's (Reyes, 2021) (Figura 18, incisos a y b).

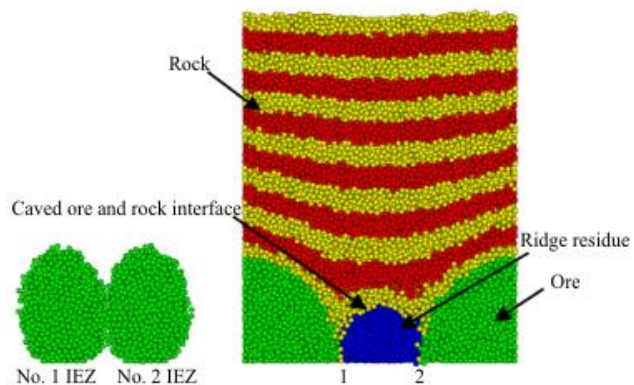
Para la extracción alternada observó que, al igual que para una extracción simultánea, la evolución de cada ZEA no presenta alteraciones para distancias en que no se produzca interacción. Sin embargo, esto se evidencia cuando el distanciamiento entre los puntos decrece lo suficiente. Dado que se observa una clara deformación en el ZEA formado por la segunda extracción, el cual adquiere un volumen evidentemente menor respecto al primero (Reyes, 2021) (Figura 18, incisos e y f).

Algunas conclusiones son:

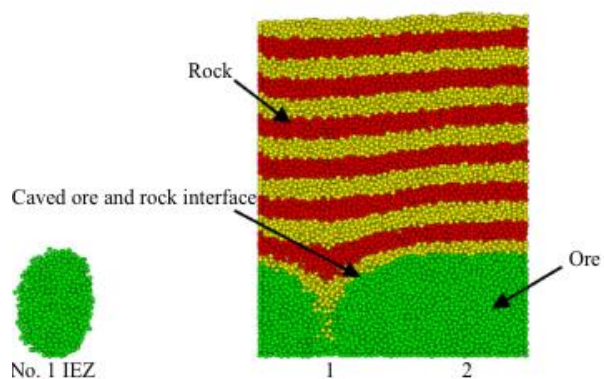
- Independientemente de si los minerales se extrajeron de manera simultánea o alternada, la altura de la interfaz entre el material estéril y el mineral es aproximadamente la misma cuando no hay interacción entre las ZEA. Sin embargo, cuando estas zonas interceptan, la altura de la interfaz es siempre menor que en el caso en que están aisladas.
- La secuencia de extracción simultánea resultó en una menor pérdida de mineral en comparación con la secuencia alternada.
- El uso de herramientas de simulación por elementos discretos (DEM) puede mitigar algunas de las limitaciones de las pruebas físicas, como los largos tiempos de experimentación o la dificultad para replicar condiciones entre diferentes pruebas. Con la calibración adecuada, estas herramientas pueden ser empleadas de manera efectiva para estudiar las características de flujo y los mecanismos de migración de minerales.



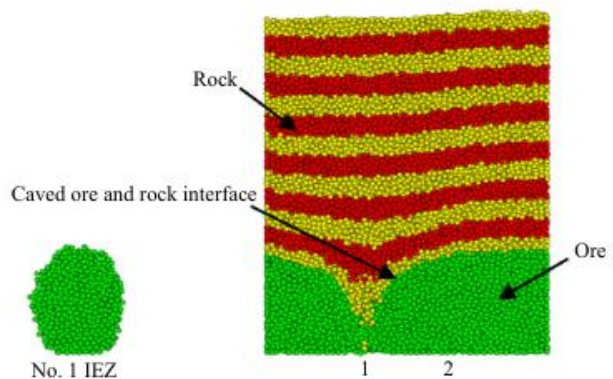
(a) Draw end of test 3 in simultaneous draw mode



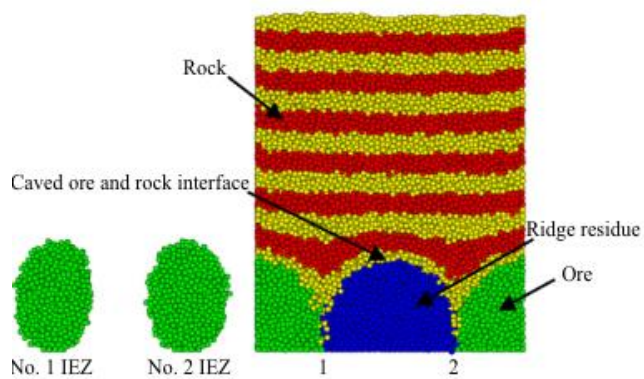
(b) Draw end of test 7 in simultaneous draw mode



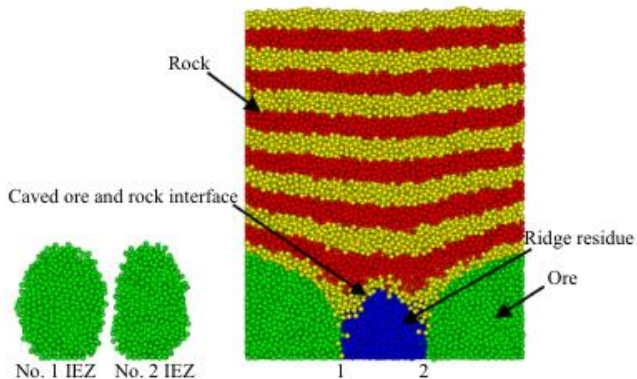
(c) A draw moment of test 3 in consecutive draw mode



(d) A draw moment of test 7 in consecutive draw mode



(e) Draw end of test 3 in consecutive draw mode



(f) Draw end of test 7 in consecutive draw mode

Figura 18: Secciones verticales del modelo de extracción para una subsección para distintas secuencias de extracción.

2.5 Método de elementos discretos

El método de elementos discretos (DEM), es una técnica numérica para predecir el comportamiento de los medios granulares, hace referencia a una gran colección de partículas. El flujo de los medios granulares puede ser bastante complejo, ya que se sabe que estos flujos presentan comportamientos similares a la de los sólidos, fluidos o ambos (DEM TECHNICAL MANUAL, 2023).

DEM es un método que no incluye mallado y además no resuelve las ecuaciones de continuidad de movimiento. Por lo tanto, no se necesita una ley constitutiva de tensión v/s deformación para el material. En su lugar, se puede obtener una relación tensión-deformación como salida del modelo DEM. En anexos se muestra el algoritmo que se genera en los DEM.

Las ecuaciones de movimiento de cada partícula individual se integran numéricamente con el tiempo. Para este proceso, es necesario conocer la fuerza total sobre una partícula. La fuerza total es la resultante de las fuerzas de contacto (entre partículas y el medio) y las fuerzas del cuerpo. Las fuerzas corporales típicas son la gravedad (peso), el fluido y otras fuerzas, como electrostáticas, electromagnéticas, etc. (DEM TECHNICAL MANUAL, 2023).

Rocky es un paquete de software desarrollado por ESSS Rocky, S.L. que evoluciona muy activamente, con muchos modelos nuevos implementados casi mensualmente.

En resumen DEM es una técnica numérica utilizada para simular el comportamiento de sistemas de partículas discretas, tales como granos, rocas y materiales granulares. En el DEM, cada partícula se modela como un elemento independiente con propiedades físicas específicas, como masa, tamaño y forma. Las interacciones entre las partículas se rigen por leyes de contacto que determinan las fuerzas normales y tangenciales.

Para simular el movimiento de las partículas DEM aplica las ecuaciones de movimiento de Newton. En cada paso de tiempo, se calculan las fuerzas de contacto entre las partículas y estas fuerzas se utilizan para determinar sus respectivas aceleraciones. A continuación, las aceleraciones se integran para obtener las velocidades y las posiciones de las partículas en el siguiente instante de tiempo. Este proceso iterativo se repite durante toda la simulación, permitiendo estudiar el comportamiento dinámico del sistema de partículas bajo diversas condiciones.

2.5.1 Modelo de Contacto

Las fuerzas de contacto en cualquier código DEM (incluido Rocky) constan de las dos partes:

- Fuerzas normales al plano de contacto
- Fuerzas tangentes al plano de contacto

En el caso de partículas esféricas, el plano de contacto es perpendicular a la línea que une los centros de dos esferas. En el caso de contacto entre partículas y la frontera, la línea une el centro de una esfera y el punto más cercano de un triángulo que constituye una frontera. En el caso de partículas no redondas, el algoritmo para determinar un plano de contacto es más complejo.

Un modelo de fuerza normal para una simulación DEM tiene dos requisitos principales. En primer lugar, la fuerza debe ser repulsiva. En segundo lugar, el modelo de fuerza de contacto normal tiene que permitir una disipación de energía significativa, ya que un medio granular es un sistema extremadamente disipativo. Se han propuesto varios modelos para estos fines. En anexos se puede informar a mayor profundidad del modelo de contacto utilizado.

Por otro lado, las fuerzas tangentes al plano de contacto actúan paralelamente al plano. Son responsables de la fricción y el deslizamiento entre las partículas. Las fuerzas tangenciales juegan un papel crucial en la simulación del comportamiento de los materiales granulares, ya que afectan la transferencia de momento y la disipación de energía debido a la fricción. En anexos también se puede informar sobre el modelo utilizado para calcular los componentes tangenciales de la fuerza de contacto.

3 METODOLOGÍA

Para el desarrollo de este trabajo, se siguieron los siguientes pasos:

1. Estudio
 - a. *Block Caving*.
 - b. *Workshop Ansys Rocky*.
2. Diseño
 - a. Columna de extracción aislada.
 - b. Caja donde caen las partículas.
 - c. Tapón.
3. Importación del diseño
 - a. Se importan los diseños realizados en *AutoCAD* al software *Ansys Rocky*.
4. Configuración de la simulación
 - a. Se agregan los parámetros solicitados por *Rocky* para generar la simulación, algunos de estos parámetros son densidad, dirección de gravedad, valor de la gravedad, modelos de contacto, interacción entre partículas, ubicación punto semilla, entre otros.
 - b. Se configura el tiempo total de la simulación, su paso y se comienza con el cálculo de la simulación. En total se realizan 15 simulaciones, donde estas difieren en la ubicación del punto semilla, por ende, en la configuración de las posiciones de las partículas dentro de la columna.
5. Extracción y procesamiento de datos
 - a. Se extrae la información referente a las distintas ZEA de las 15 simulaciones, específicamente se extrae una matriz de 5 columnas, siendo estas el ID de la partícula, las coordenadas en 3D y una variable “n” que categoriza a las partículas por estratos de leyes cada 10 m.
 - b. Se procesa la matriz con el fin de obtener una nueva matriz que represente la capa de cebolla, donde esta es la resta entre una ZEA i con una ZEA $i-1$.
6. Resultados y análisis
 - a. Se obtiene la contabilización de las partículas extraídas según procedencia de estrato para cada simulación.
 - b. Se obtienen coeficientes normalizados que representan la división entre las partículas totales de un estrato sobre las partículas totales extraídas para cada simulación.
 - c. Se generan matrices promedios para la contabilización de partículas como para los coeficientes normalizados, con sus desviaciones y errores estándar.
 - d. Con los resultados obtenidos es posible estimar la ley de una capa de cebolla como también identificar la entrada de dilución y calcular la dilución.
 - e. Se presenta una técnica para estimar convertir las capas de cebollas en bloques diluidos.
7. Conclusiones

4 DESARROLLO

El desarrollo de este trabajo consiste en ejecutar diversas simulaciones de elementos discretos para representar el flujo gravitacional en *Block Caving*, con el fin de estudiar la dilución presente en las masas extraídas. Para llevar a cabo esto, se diseñó un modelo físico donde se realizará la simulación DEM, configurando los parámetros del medio granular, la física involucrada y los tiempos de simulación. Se realizaron 15 simulaciones donde se varía la ubicación del punto semilla para representar diferentes posiciones de las partículas en la columna, con el fin de obtener distintos escenarios.

Para obtener la dilución o ley presente en una masa extraída, es necesario clasificar las partículas según leyes específicas. En este caso, se distribuyeron las leyes cada 10 metros de elevación - denominados estratos -, lo que permite identificar la ley asociada a cada partícula.

Por otro lado, es necesario cuantificar las capas de cebolla, definidas como la diferencia entre una ZEA n y una ZEA $n-1$, que representan las posiciones iniciales de lo que realmente se va a extraer, como se muestra en Figura 19. De esta manera, los datos que se deben extraer de la simulación son las ZEA para distintas masas extraídas, con el objetivo de procesarlas y obtener las capas de cebolla.

Para lograr lo mencionado, se utilizan dos herramientas incluidas en *Ansys Rocky*:

1. *Tagging*: Esta herramienta servirá para obtener las ZEA a diversas masas extraídas.
2. *Division Tagging*: Esta permitirá categorizar las partículas por elevaciones y, por ende, por leyes.

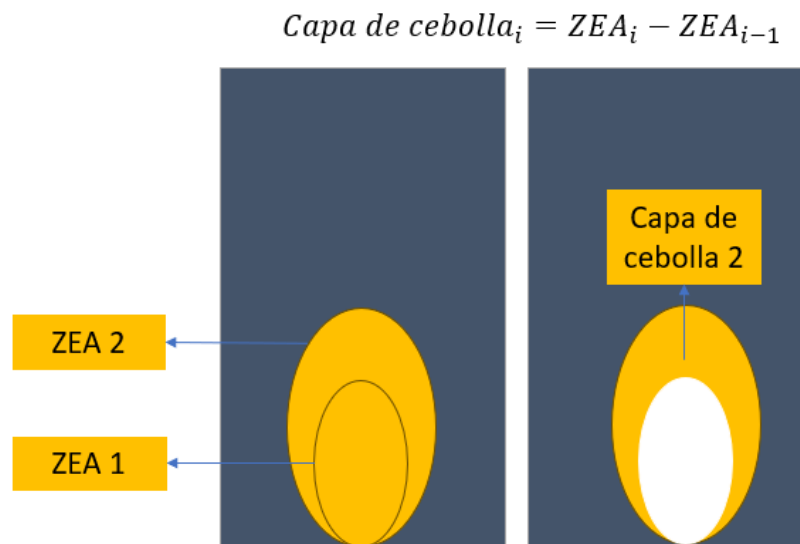


Figura 19: La capa de cebolla está representada por la diferencia de partículas entre una ZEA “i” con su antecesora.

4.1 Diseño Experimental

El diseño experimental se centra en un modelo físico el cual consiste en una columna de extracción aislada cilíndrica con dimensiones de 30 m de diámetro y 100 m de alto, el cual presenta una abertura circular de 7 m, que inicialmente se encuentra cerrado por un tapón cilíndrico, de 10 m de largo y 7 metros de diámetro. Luego de llenar la columna de partículas se retira el tapón, generando el escurrimiento de las partículas hacia un cajón receptor ubicado debajo de la columna, cuyas dimensiones son 50 m x 50 m x 80 m.

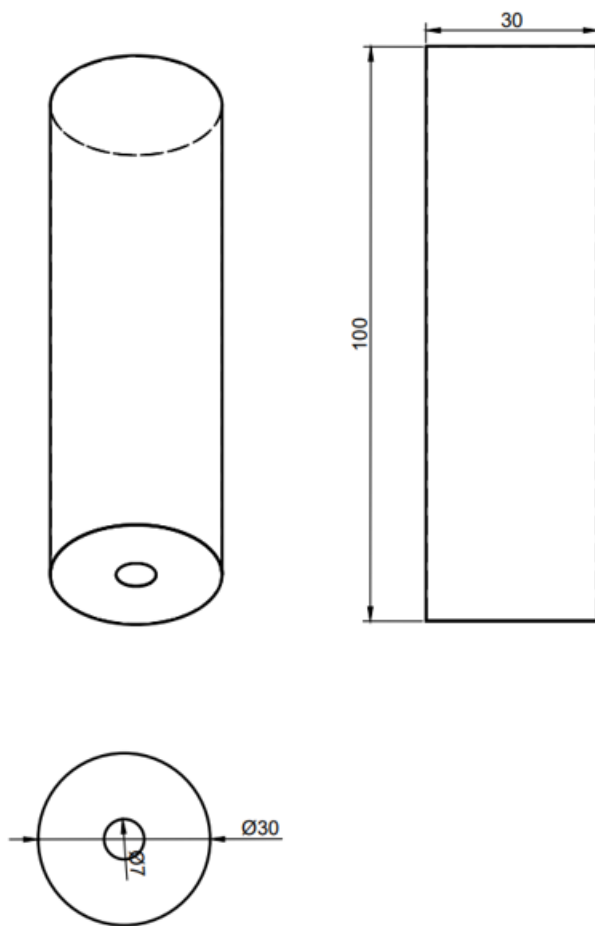


Figura 20: Dimensiones y secciones del contenedor.

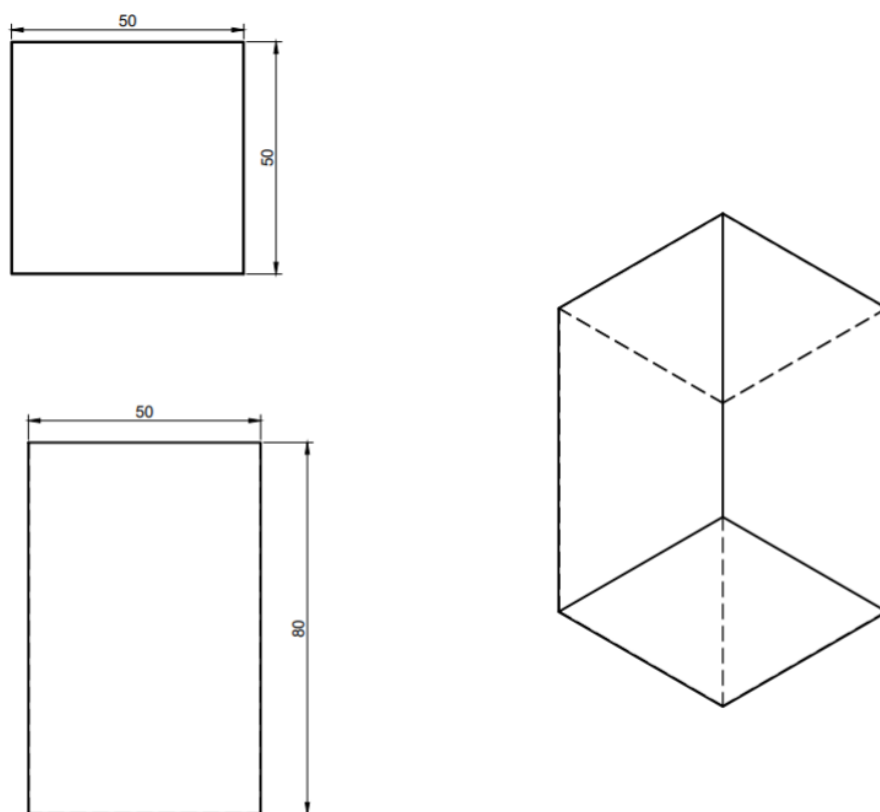


Figura 21: Dimensiones y secciones de la caja.

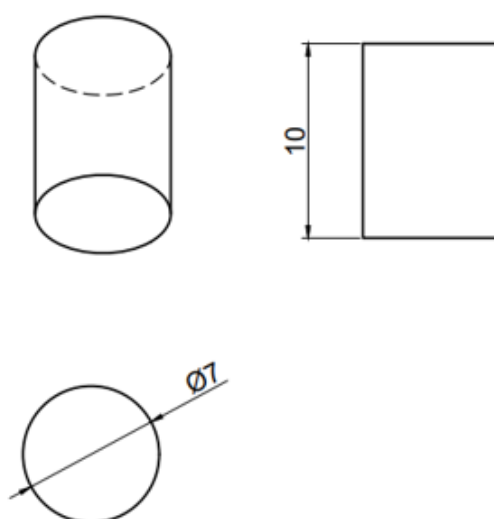


Figura 22: Dimensiones y secciones del tapón.

Una vez realizado los diseños, se importan al simulador y se configuran todos los parámetros que definen a la simulación. En concreto, la física involucrada, los materiales, sus interacciones, tamaño y forma de las partículas y los tiempos de simulación.

En la Tabla 1 se presentan los parámetros y valores para definir la física de la simulación. En anexo se encuentra más información sobre los modelos de fuerza.

Tabla 1: Parámetros físicos.

Parámetro	Valor
Gravedad $\frac{m}{s^2}$	$-9.81 \vec{k}$
Fuerza normal	<i>Hertian Spring Dashpot</i>
Fuerza tangencial	Mindlin-Deresiewicz.
Fuerza adhesiva	Deshabilitada.
Modelo resistencia de rodadura	Tipo C, <i>Linear Spring Rolling Limit</i> .

El material granular utilizado en este experimento equivale a rocas tobálicas cuyas propiedades geomecánicas fueron definidas por Riveros (2018). En la Tabla 2 se presentan los parámetros y valores presentes en las propiedades del material, donde estas propiedades estarán aplicadas a partículas ubicadas dentro de la columna de extracción, estas son esféricas de 0.8 metros de diámetro.

Respecto a los valores de coeficientes de fricción, rodadura y restitución, estos son recomendados por el software.

Tabla 2: Magnitudes de las propiedades del material.

Propiedad	Valor
Densidad $\frac{kg}{m^3}$	2750
Densidad aparente $\frac{kg}{m^3}$	1528
Módulo de Young Pa	$1.62 \cdot 10^{10}$
Coeficiente de Poisson	0.46
Coeficiente de fricción estático y dinámico	0.7
Coeficiente de rodadura	0.3
Coeficiente de restitución	0.3

Por otro lado, con el fin de estudiar cómo afecta las diferentes distribuciones de posiciones in situ del material extraído en los resultados, se ocuparon 15 puntos semillas, el cual representa un punto en donde se generarán las partículas que se acomodaran en la columna de extracción, de esta forma, se obtienen distintos escenarios de distribuciones espaciales de las partículas. Los puntos semillas utilizados están en la Tabla 3.

En promedio se generan 146,470 partículas con una fracción volumétrica de 0.556.

Tabla 3: Ubicación puntos semillas, partículas generadas y fracción volumétrica.

N° simulación	Ubicación punto semilla (X, Y, Z)	Partículas generadas	Fracción volumétrica
1	(-15,-15,50)	146,470	0.556
2	(-15,-15,62.5)	146,436	0.555
3	(-15,-15,87.5)	146,393	0.555
4	(-15,-15,37.5)	146,404	0.555
5	(-15, -15,12.5)	146,441	0.555
6	(-22.5,-15,50)	146,499	0.556
7	(-22.5,-15,62.5)	146,398	0.555
8	(-22.5,-15,87.5)	146,509	0.556
9	(-22.5,-15,37.5)	146,545	0.556
10	(-22.5,-15,12.5)	146,506	0.556
11	(-7.5,-15,50)	146,454	0.555
12	(-7.5,-15,62.5)	146,509	0.556
13	(-7.5,-15,87.5)	146,509	0.556
14	(-7.5,-15,37.5)	146,535	0.556
15	(-7.5,-15,12.5)	146,444	0.555

Una vez configurada la simulación, comienza el proceso experimental, el cual consiste en completar la columna de extracción aislada con las partículas definidas anteriormente. Cabe recalcar que la columna se encuentra inicialmente tapada. Una vez llena la columna, se destapa y comienza el escurrimiento de las partículas al cajón receptor. La simulación termina al segundo 350.

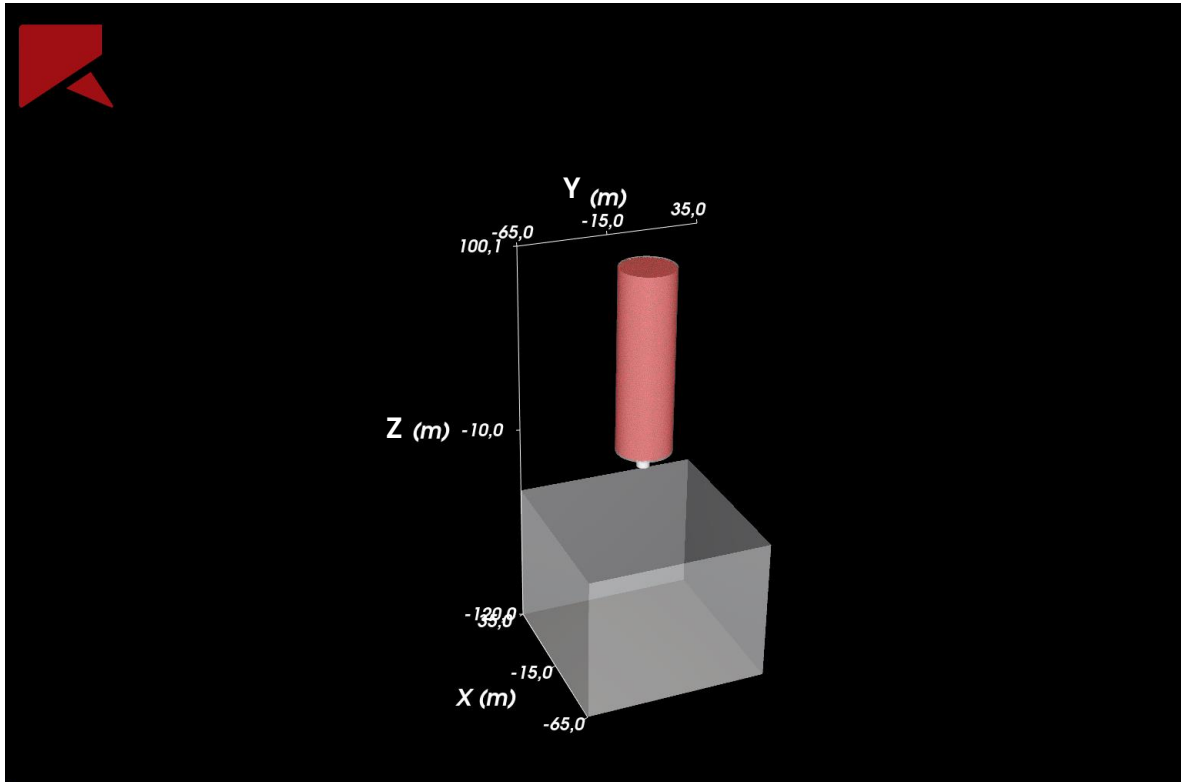


Figura 23: Ilustración de la simulación a tiempo 0.

4.2 Obtención de ZEA

Finalizada la simulación, se utiliza la herramienta *Tagging*, que en castellano significa etiquetamiento. Su función es identificar las partículas que fueron extraídas de la columna en determinado tiempo y que reposan en la caja receptora. Esta herramienta es necesaria para obtener diferentes ZEA para distintas masas extraídas. Se utilizaron 10 *Tagging* (10 ZEA) cada 35 seg, hasta llegar a los 350 seg, con esto se obtendrán las ZEA referentes a la masa extraída para cada tiempo.

Una vez realizado el cálculo de la herramienta de etiquetado, es posible observar la ZEA devolviendo el tiempo a 0. Así con la leyenda de cualquier etiquetado se puede ver representada la ZEA (ver Figura 24).

También se utiliza la herramienta *Divisions Tagging*, que se traduce a división de etiquetamientos. Funciona de forma similar a la anterior, solo que puede realizar más etiquetamientos. Se genera solamente un *Divisions Tagging* aplicado en la columna de extracción. Esta herramienta categoriza a las partículas cada 10 metros de elevación, así se generan 10 estratos para las partículas como se ve en la Figura 25. El propósito de esto es representar estas divisiones como distintos estratos de leyes. De este modo para una cierta masa extraída se podrá identificar de qué estratos provienen las partículas, de esta forma es posible calcular la ley.

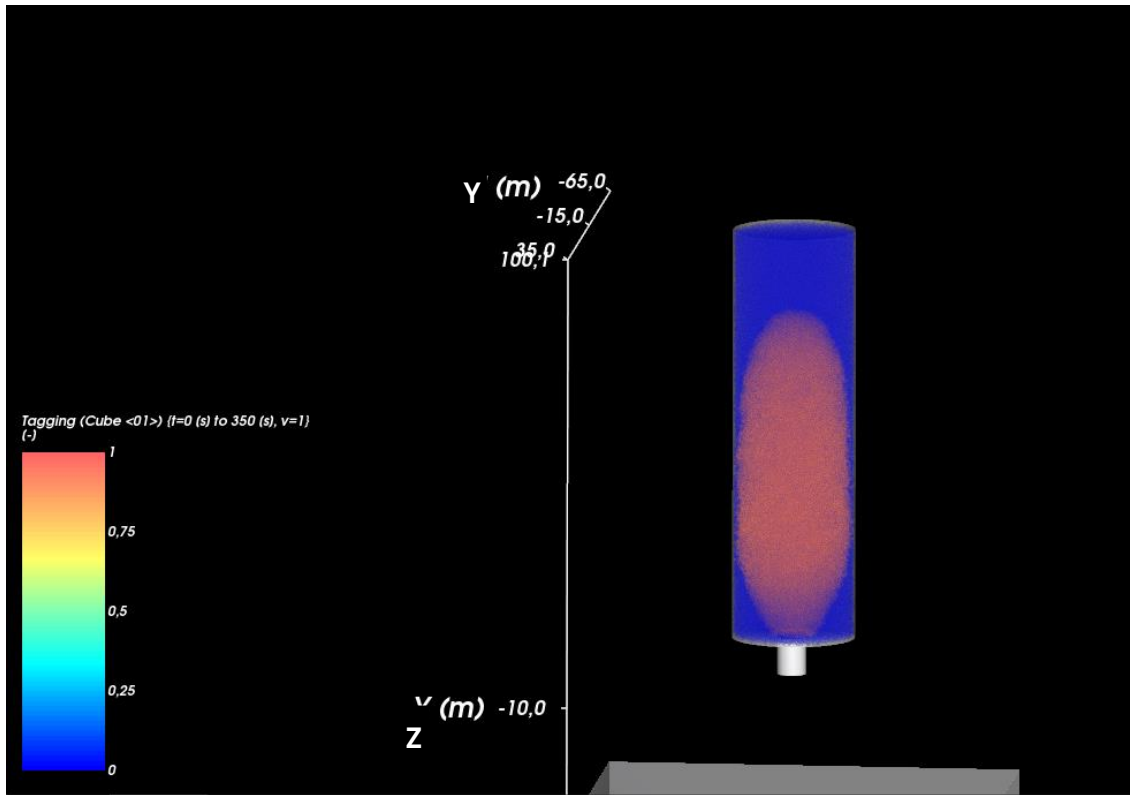


Figura 24: Tagging, las partículas rojas son las que se extrajeron hasta el segundo 350, por otro lado, las azules corresponden a las que no se extraen a ese tiempo.

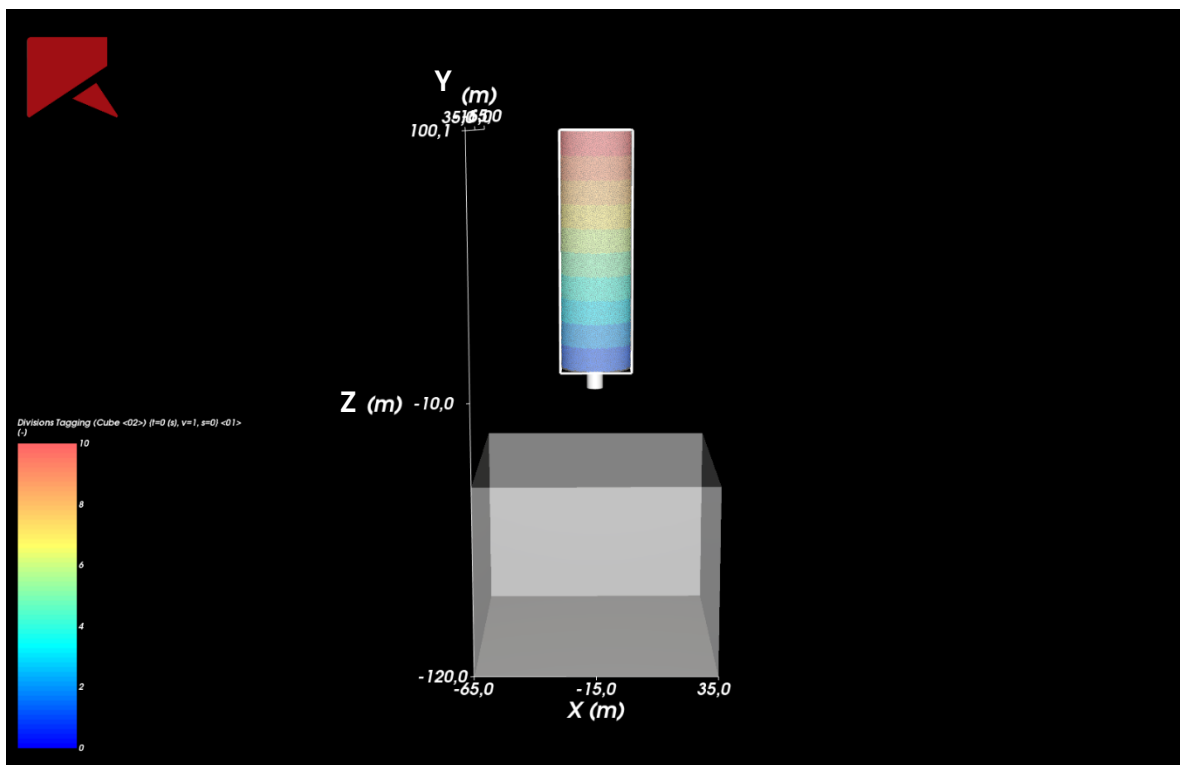


Figura 25: Divisions Tagging, categorización de las partículas por estratos cada 10 metros.

4.3 Extracción y procesamiento de datos

Para la extracción de los datos correspondientes a las ZEA se sigue el siguiente procedimiento:

1. Se extraen los datos referentes a todas las posiciones de las partículas en el tiempo 0, como también a la categoría a la que pertenece la partícula según el *División Tagging*.
2. Luego se procede a obtener las ID de las partículas extraídas para cada ZEA. Esto se logra graficando el ID de las partículas v/s cada *Tagging* (10 etiquetamientos).
3. Finalmente se genera una matriz para cada ZEA, donde este contiene 5 columnas, las cuales son la ID de la partícula, las coordenadas X, Y e Z y la última columna contiene la categoría respecto al estrato que fue extraída, en total se obtienen 10 matrices para cada simulación.

A continuación, se procesaron las matrices de las ZEA para obtener las capas de cebolla. Mencionar que para la capa de cebolla 1 es evidente que equivale a la ZEA 1, no obstante, para la capa de cebolla 2 es necesario quitar las partículas ya extraídas por la ZEA 1. Por esto, a la matriz de la ZEA 2 se le quitan las partículas de la ZEA 1, así se obtiene la capa de cebolla 2, el procedimiento es el mismo para las siguientes capas de cebolla.

Ya procesadas las matrices, se obtiene una nueva y final matriz que contiene información sobre las partículas presentes en las capas de cebolla. Esta matriz contiene 5 columnas, el ID de la partícula, las coordenadas X, Y, Z y finalmente la categoría n.

Tanto las matrices de ZEA como capas de cebolla presentan el mismo formato, el cual es el siguiente:

Tabla 4: Formato matrices de datos.

ID de la partícula	Coordenada en X	Coordenada en Y	Coordenada en Z	Categorización por cota “n”
--------------------	-----------------	-----------------	-----------------	-----------------------------

5 RESULTADOS Y ANALISIS

Para todas las simulaciones se logró cuantificar la cantidad de partículas totales de cada estrato de ley para cada capa de cebolla extraída. Con esto es posible calcular la ley de la capa de cebolla con la siguiente ecuación:

$$LCC_j[\%] = \frac{\sum_{i=1}^k n_{i,j} \cdot l_i}{n_{t,j}} \cdot 100 = \frac{\sum_{i=1}^k n_{i,j} \cdot l_i}{\sum_{i=1}^k n_{i,j}} \cdot 100 \quad (4.1)$$

Donde LCC_j corresponde a la ley de la capa de cebolla para la extracción “j”, $n_{i,j}$, corresponde al número total de partículas extraídas del estrato de ley “i” para la extracción “j”, n_t corresponde al número total de partículas extraídas, l_i corresponde a la ley del estrato “i” e k , corresponde a la cantidad de estratos (en este caso 10).

Mediante el conteo de partículas extraídas para cada estrato de ley se obtiene como resultado la Tabla 5, la cual engloba todas las simulaciones mediante el promedio, específicamente esta tabla contiene la información de cada capa de cebolla con su respectiva cantidad de partículas totales extraídas para cada estrato de ley y también las partículas extraídas totales. En anexos se presentan los resultados de cada simulación, que se utilizaron para generar la Tabla 5. Por otro lado, la Tabla 6 y la Tabla 7 contienen información respecto a la desviación y el error estándar respectivamente para los valores de la Tabla 5.

Tabla 5: Número de partículas extraídas totales de cada estrato de ley para cada capa de cebolla.

Capa de cebolla	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_t
1	2785	4180	1098	0	0	0	0	0	0	0	8063
2	378	1873	4789	1243	0	0	0	0	0	0	8283
3	258	1260	3010	3818	88	0	0	0	0	0	8433
4	190	789	1711	3762	2050	0	0	0	0	0	8501
5	156	609	956	2159	4135	248	0	0	0	0	8263
6	127	420	571	1153	3307	2676	0	0	0	0	8254
7	112	362	409	627	1831	4329	653	0	0	0	8322
8	101	273	292	379	926	2889	3486	3	0	0	8349
9	94	233	214	261	518	1471	4033	1530	0	0	8354
10	78	189	156	166	318	757	2318	4255	183	0	8420

Tabla 6: Desviación estándar para partículas extraídas por estratos.

Capa de cebolla	σn_1	σn_2	σn_3	σn_4	σn_5	σn_6	σn_7	σn_8	σn_9	σn_{10}	σn_t
1	118	115	210	0	0	0	0	0	0	0	193
2	48	111	253	241	0	0	0	0	0	0	196
3	42	100	147	255	78	0	0	0	0	0	331
4	28	90	139	209	220	0	0	0	0	0	285
5	31	72	83	131	183	105	0	0	0	0	255
6	20	44	72	91	208	253	0	0	0	0	169
7	29	58	53	59	141	155	256	0	0	0	181
8	25	52	44	53	88	166	284	5	0	0	245
9	17	31	40	33	46	105	244	260	0	0	311
10	9	25	24	24	39	50	141	249	97	0	290

Tabla 7: Errores estándar partículas extraídas por estratos.

Capa de cebolla	$EE n_1$	$EE n_2$	$EE n_3$	$EE n_4$	$EE n_5$	$EE n_6$	$EE n_7$	$EE n_8$	$EE n_9$	$EE n_{10}$	$EE n_t$
1	31	30	54	0	0	0	0	0	0	0	50
2	12	29	65	62	0	0	0	0	0	0	51
3	11	26	38	66	20	0	0	0	0	0	86
4	7	23	36	54	57	0	0	0	0	0	74
5	8	19	21	34	47	27	0	0	0	0	66
6	5	11	19	24	54	65	0	0	0	0	44
7	7	15	14	15	36	40	66	0	0	0	47
8	7	13	11	14	23	43	73	1	0	0	63
9	5	8	10	8	12	27	63	67	0	0	80
10	2	6	6	6	10	13	36	64	25	0	75

Es posible simplificar la ecuación 4.1, introduciendo el denominador en el numerador quedando de la siguiente manera:

$$LCC_j[\%] = \sum_{i=1}^k \eta_{i,j} * l_i \quad (4.2)$$

Donde $\eta_{i,j}$, representa coeficientes normalizados de una extracción “j” para un estrato “i”, este coeficiente este se calcula de la siguiente manera:

$$\eta_{i,j} = \frac{n_{i,j}}{n_{t,j}} \quad (4.3)$$

De esta forma se obtiene la Tabla 8 que muestra todos los coeficientes normalizados promedios para una extracción “j” y un estrato “i”, además en la Tabla 9 y en la Tabla 10 se encuentran la desviación y error estándar respectivamente.

Tabla 8: Coeficientes normalizados para cada capa de cebolla.

Capa de cebolla	η_1	η_2	η_3	η_4	η_5	η_6	η_7	η_8	η_9	η_{10}
1	0.35	0.52	0.14	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.05	0.22	0.58	0.15	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.03	0.15	0.35	0.46	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.02	0.10	0.20	0.43	0.24	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.02	0.07	0.12	0.27	0.49	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00
6	0.02	0.05	0.07	0.14	0.40	0.32	0.00	0.00	0.00	0.00
7	0.01	0.04	0.05	0.08	0.22	0.52	0.08	0.00	0.00	0.00
8	0.01	0.03	0.04	0.05	0.12	0.35	0.41	0.00	0.00	0.00
9	0.01	0.03	0.03	0.03	0.06	0.18	0.48	0.18	0.00	0.00
10	0.01	0.02	0.02	0.02	0.04	0.09	0.28	0.50	0.02	0.00

Tabla 9: Desviación estándar para coeficientes normalizados.

Capa de cebolla	$\sigma\eta_1$	$\sigma\eta_2$	$\sigma\eta_3$	$\sigma\eta_4$	$\sigma\eta_5$	$\sigma\eta_6$	$\sigma\eta_7$	$\sigma\eta_8$	$\sigma\eta_9$	$\sigma\eta_{10}$
1	0.02	0.01	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
2	0.01	0.01	0.03	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
3	0.00	0.01	0.02	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
4	0.00	0.01	0.02	0.02	0.02	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00
5	0.00	0.01	0.01	0.01	0.02	0.01	0.00	0.00	0.00	0.00
6	0.00	0.01	0.01	0.01	0.02	0.03	0.00	0.00	0.00	0.00
7	0.00	0.01	0.01	0.01	0.02	0.02	0.03	0.00	0.00	0.00
8	0.00	0.01	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.00	0.00	0.00
9	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.01	0.02	0.03	0.00	0.00
10	0.00	0.00	0.00	0.00	0.00	0.01	0.02	0.02	0.01	0.00

Tabla 10: Error estándar coeficientes normalizados.

Capa de cebolla	$EE\eta_1$	$EE\eta_2$	$EE\eta_3$	$EE\eta_4$	$EE\eta_5$	$EE\eta_6$	$EE\eta_7$	$EE\eta_8$	$EE\eta_9$	$EE\eta_{10}$
1	0.004	0.003	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
2	0.001	0.003	0.007	0.007	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
3	0.001	0.002	0.004	0.006	0.002	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
4	0.001	0.003	0.004	0.004	0.006	0.000	0.000	0.000	0.000	0.000
5	0.001	0.002	0.002	0.004	0.005	0.003	0.000	0.000	0.000	0.000
6	0.001	0.001	0.002	0.003	0.006	0.008	0.000	0.000	0.000	0.000
7	0.001	0.002	0.002	0.002	0.004	0.004	0.008	0.000	0.000	0.000
8	0.001	0.002	0.001	0.001	0.003	0.005	0.008	0.000	0.000	0.000
9	0.001	0.001	0.001	0.001	0.001	0.003	0.006	0.008	0.000	0.000
10	0.000	0.001	0.001	0.001	0.001	0.002	0.005	0.004	0.003	0.000

Los resultados aparte de ser útiles para el cálculo de la ley de la capa de cebolla extraída, también es posible detectar la entrada de la dilución y calcular la dilución.

Por ejemplo, asumamos que el interfaz mineral/estéril se encuentra en la cota 60 m, la entrada de la dilución estará presente en la extracción número 7, donde el contenido de dilución es del 8%. Notar que para la extracción 10 la dilución será del 80%.

Por otro lado, es posible representar estas secuencias de capas de cebollas como una secuencia por bloques diluidos, como se muestra en la Figura 26.

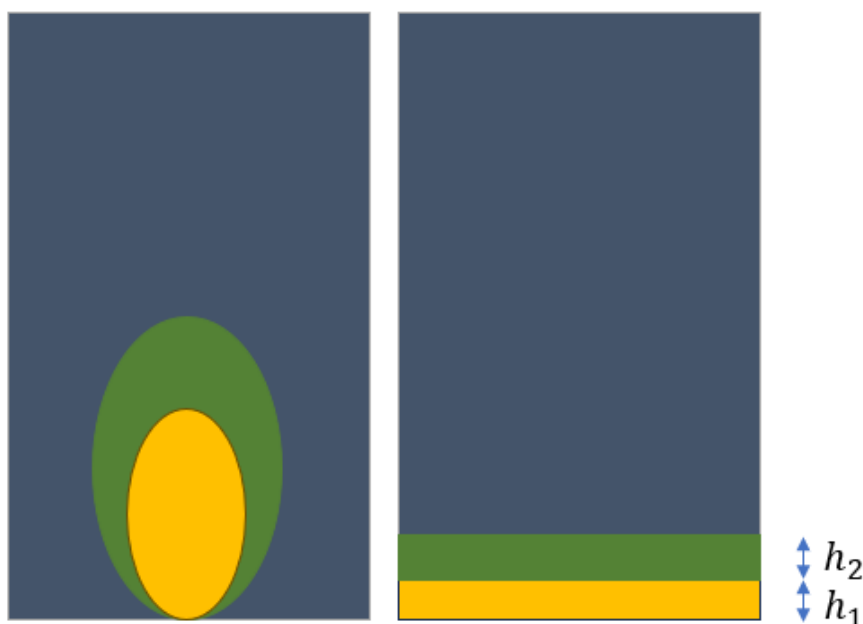


Figura 26: Conversión de capas de cebolla a bloques diluidos.

Para poder representar las capas de cebollas en bloques diluidos se utiliza la siguiente ecuación:

$$\phi \times h_i \times A = V_i \quad (4.4)$$

Donde ϕ corresponde a la fracción volumétrica, h corresponde a la altura del bloque, A corresponde al área de la sección transversal de la columna y V corresponde al volumen total de la capa de cebolla. Despejando el valor h de la ecuación se obtiene lo siguiente:

$$h_i = \frac{V_i}{\phi \times A} \quad (4.5)$$

Por otro lado, es posible calcular la masa total de cada bloque multiplicando la ecuación (4.4) por la densidad aparente, quedando de la siguiente forma:

$$\rho_a \times \phi \times h_i \times A = M_i \quad (4.6)$$

Donde ρ_a corresponde a la densidad aparente y M corresponde a la masa extraída del bloque diluido.

En la Tabla 11 se presenta la altura de bloque para cada capa de cebolla.

Tabla 11: Altura de bloques para cada capa de cebolla.

N° de Extracción	Volumen m^3	Altura de bloque m	Masa kt
1	2161	5.4	3.3
2	2221	5.6	3.4
3	2261	5.7	3.5
4	2279	5.7	3.5
5	2215	5.5	3.4
6	2213	5.5	3.4
7	2231	5.6	3.4
8	2238	5.6	3.4
9	2239	5.6	3.4
10	2257	5.6	3.4

El proceso para aplicar la estimación de dilución y ley para cualquier columna de extracción es el siguiente:

1. Dividir la columna in situ en 10 deciles y calcular la ley promedio ponderado.
2. Calcular la ley de cada capa de cebolla/bloque diluido extraída/o.

Utilizar la ecuación (4.2) ocupando los valores de los coeficientes la Tabla 8 y las leyes de los deciles.

3. Ajustar altura de bloque

Se obtiene multiplicando el valor de la altura de bloque para cada capa de cebolla con un factor, este factor es el siguiente:

$$\text{Factor altura de bloque} = \frac{\text{Volumen de un decil de la columna simulada}}{\text{Volumen de un decil para la columna a estimar}}$$

Como mencion, estos volúmenes pueden ser considerados como cubos o como cilindros.

4. Cálculo de las masas extraídas para cada bloque diluido.

Utilizar ecuación (4.6) para cada bloque diluido.

5. Compilación de los datos, numero de extracción, ley, altura de bloque y masa.

Para demostrar la aplicabilidad de la estimación de dilución y ley, se realiza un ejemplo para una columna de extracción de 15 x 15 x 200 m. Esta columna está compuesta por 20 bloques de 15 x 15 x 10 m, donde la distribución de leyes se muestra en la Figura 27.

Paso 1: Dividir la columna en deciles, de manera que los 20 bloques se transformen en 10 deciles con leyes específicas cada uno, donde las leyes por deciles se encuentran en la Figura 27. De esta forma cada decil tendrá dimensiones de 15 x 15 x 20 m.

Columna in situ	Columna distribuida por deciles
0,80	1
1,20	0,65
1,00	0,75
0,30	1,25
1,00	0,8
0,50	0,7
0,90	1,3
1,60	1,1
1,00	0,95
0,60	1,1
0,90	
0,50	
1,30	
1,30	
1,20	
1,00	
0,90	
1,00	
0,80	
1,40	

Figura 27: Columna in situ y columna distribuida por deciles.

Paso 2: Cálculo de la ley para bloques o capas de cebollas.

Para determinar la ley de cada capa de cebolla extraída o bloque se ocupa la ecuación (4.2), utilizando la matriz de coeficientes normalizados predefinida para 10 capas de cebolla y las leyes de los deciles.

Paso 3: Ajuste de altura de bloque.

Primero es necesario obtener el factor a utilizar, en este caso es 2, el cual se calcula como el volumen de los deciles de la simulación (30x30x10) y el volumen de los deciles de la columna a estimar (15x15x20) o mediante los volúmenes totales.

Una vez calculado el factor se aplica multiplicando a las alturas de la Tabla 11.

Paso 4: Calculo de la masa extraída a través de los bloques.

Se obtiene multiplicando la altura del bloque por la sección transversal de la columna a estimar (15x15) por la fracción volumétrica y por la densidad aparente.

Paso 5: Compilación de los resultados.

Tabla 12: Estimación de ley y masa para el ejemplo.

Número de extracción	Ley %	Altura bloque h m	Masa kt
Extracción 1	1.02	10.81	6.49
Extracción 2	1.10	11.10	6.67
Extracción 3	1.17	11.30	6.79
Extracción 4	1.08	11.39	6.84
Extracción 5	0.94	11.07	6.65
Extracción 6	0.87	11.06	6.64
Extracción 7	0.88	11.15	6.70
Extracción 8	1.01	11.19	6.72
Extracción 9	1.03	11.20	6.72
Extracción 10	0.92	11.28	6.78

6 CONCLUSIONES

En este estudio se simuló el fenómeno físico de flujo gravitacional en *Block Caving* utilizando *Ansys Rocky* y el método DEM. Esta simulación permitió cuantificar las Zonas de Extracción Aisladas (ZEA) y, a partir de ellas, definir las capas de cebolla. Estas capas representan la diferencia entre una ZEA i y la ZEA $i-1$, lo que corresponde a una secuencia de extracción. En este caso, cada secuencia está compuesta por 8,324 partículas promedio.

Se desarrolló una técnica innovadora para estimar la ley de las capas de cebolla extraídas mediante coeficientes normalizados. Estos coeficientes se derivan del conteo de partículas extraídas por estrato y del total de partículas extraídas. Esta metodología permite calcular la ley de las capas de cebolla extraídas para cualquier columna de extracción y detectar la entrada de dilución en función de la altura del interfaz mineral/estéril.

Además, se presentó una perspectiva complementaria más alineada con las prácticas mineras. Aunque las capas de cebolla describen el flujo teórico del material, en minería se extraen bloques. Para abordar esta diferencia, se desarrolló un método que transforma las capas de cebolla en bloques diluidos. Este proceso considera parámetros como la fracción volumétrica, la densidad aparente y la sección transversal de la columna, lo que permite calcular la altura, masa y ley de cada bloque diluido. Esto facilita una representación más práctica y útil para las operaciones mineras.

Es importante señalar que los resultados de este estudio están sujetos a las simplificaciones inherentes al modelo DEM empleado. Aunque se lograron simular las dinámicas de flujo gravitacional y modelar la dilución en *Block Caving*, estas simplificaciones no reflejan completamente las condiciones reales de la minería subterránea. Limitaciones como el uso de partículas esféricas, propiedades uniformes y un número reducido de puntos de extracción estuvieron condicionadas por la carga computacional disponible. La inclusión de propiedades más realistas, como formas irregulares, granulometrías más complejas y parámetros ajustados para reflejar la heterogeneidad del material, podría mejorar significativamente la precisión y robustez del modelo desarrollado.

7 RECOMENDACIONES

A continuación, se presentan sugerencias y proyecciones orientadas a futuras investigaciones, enfocadas en mejorar la simulación DEM utilizada para el estudio de la dilución en *Block Caving*. Estas recomendaciones buscan aumentar la representatividad y robustez del modelo de estimación de dilución.

1. Sobre las propiedades de las partículas: Se recomienda incluir partículas con formas irregulares y distribuciones granulométricas variadas, lo que permitiría evaluar cómo la heterogeneidad del material influye en la dilución. Además, se sugiere incorporar fenómenos de fragmentación y adhesión entre partículas, que representan dinámicas comunes en entornos mineros reales.
2. Diseño de bateas y aumento cantidad puntos de extracción: Se sugiere incorporar un diseño de bateas en la columna de extracción para representar de manera más realista las condiciones operativas en minería subterránea. Aunque su principal propósito es mejorar la representatividad del modelo, también podría tener un impacto en los resultados al modificar las dinámicas del flujo y la interacción entre los puntos de extracción. Adicionalmente, aumentar la cantidad de puntos de extracción permitiría estudiar cómo la interacción entre estos influye en la dilución.
3. Secuencia de extracción: Se recomienda investigar el impacto de secuencias de extracción, principalmente discretas. Estas variaciones podrían ofrecer información relevante sobre el comportamiento de la dilución en escenarios más cercanos a la operación minera real.
4. Análisis de sensibilidad: Llevar a cabo un análisis de sensibilidad para identificar los parámetros que tienen mayor influencia en los resultados.

8 BIBLIOGRAFÍA

- Aibing Jin, H. S. (2016). A study on the draw laws of caved ore and rock using the discrete element method. *ELSEVIER, Computers and Geotechnics*, 6.
- Aibing Jin, H. S. (2017). Confirmation of the upside-down drop shape theory in gravity flow and development of a new empirical equation to calculate the shape. *ELSEVIER, International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 8.
- Ansys. (2023). *DEM TECHNICAL MANUAL*. Rocky.
- Arenas, F. d. (2015). *Secuenciamiento optimizado considerando regla de mezcla*. Santiago de Chile: Universidad de Chile.
- Castro, R. (2012). Determination of drawpoint spacing in panel caving: a case study at the El Teniente Mine. *The Journal of The Southern African Institute of Mining and Metallurgy*.
- Duran, J. (1999). *Sables, poudres et grains*. Francia, París: Eyrolles Sciences.
- F. Melo, F. V. (2007). On drawbody shapes: From Bergmark–Roos to kinematic models. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 10.
- F. Melo, F. V. (2008). Kinematic model for quasi static granular displacements in block caving: Dilatancy effects on drawbody shapes. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 12.
- F. Melo, F. V. (2009). Calculated isolated extracted and movement zones compared to scaled models for block caving. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 7.
- F. Vivanco, F. M. (2013). The effect of rock decompaction on the interaction of movement zones in underground mining. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 8.
- F. Vivanco, T. W. (2011). The 3D shape of the loosening zone above multiple draw points in block caving through plasticity model with a dilation front. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 6.
- Halim, A. (2006). *3D large scale physical modelling for studying interactive drawing and drawpoint spacing in Block Caving Mines*. The University of Queensland: JKRCM.
- Hao Sun, A. J. (2020). A Numerical Based Approach to Calculate Ore Dilution Rates Using Rolling Resistance Model and Upside-Down Drop Shape Theory. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 14.
- Heslop, T. (2010). *Understanding the flow of caved ore and its influence on ore recoveries and dilution in a block cave*. Perth, Australia: Caving 2010.

- Kvapill, R. (2008). *Gravity Flow in Sublevel and Panel Caving - a Common Sense Approach*. Luleå, Sweden: Massmin, Luleå University of Technology.
- Laubscher, D. (1994). Cave mining-the state of the art. *The Journal of the South African Institute of Mining and Metallurgy*, 15.
- Laubscher, D. (2000). *A Practical Manual On Block Caving*. The international Block Caving Study (ICS).
- Olivier Pouliquen, Y. F. (2011). *Granular Media: Between Fluid and Solid*. Cambridge UK.
- Paredes, P. S. (2012). *Mecanismos de entrada de dilución en Minas de Block/Panel Caving*. Santiago de Chile.
- Puigpinos, R. E. (2022). *Gravity flow and fragmentation modeling in block caving*. Santiago de Chile: Universidad de Chile facultad de ciencias físicas y matemáticas, departamento de Ingeniería de Minas.
- R. Castro, R. T. (2007). *A study of isolated draw zones in block caving mines by means of a large 3D physical model*. JKMR, University of Queensland, Australia: ELSEVIER.
- R. Trueman, R. C. (2008). Study of multiple draw-zone interaction in block caving mines by means of a large 3D physical model. *International Journal of Rock Mechanics & Mining Sciences*, 8.
- René Gómez, E. L. (2019). *Una opción para el paso a la minería subterránea masiva: la actual metodología aplicada en Chile del "block caving"*. Santiago de Chile: Boletín Geológico y Minero.
- Reyes, B. (2021). *Caracterización de elipsoides de extracción con material cohesivo en Block/Panel Caving utilizando Rocky DEM*. Santiago de Chile.
- Rivero, E. S. (2018). *Análisis de propiedades geotécnicas de algunas rocas comunes en Chile*. Santiago de Chile.
- Sturla, M. (2022). *Influencia de parámetros físicos del material granular y del diseño de bateas de extracción en el flujo gravitacional en minería de block caving*. Santiago de Chile.
- Uribe, I. A. (2021). *Modelamiento de esfuerzos verticales a través de autómatas celulares en minera de block/panel caving*. Concepción.

9 ANEXOS

Vivanco, Watt y Melo (2011).

Modelo plástico propuesto para la ZMA para varios puntos de extracción para una extracción simultanea es el siguiente:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \left[\frac{\rho}{\Delta\rho} \right] \sum_k v_{0k} \vec{x}_{DK} \cdot \vec{x}_{DK} \frac{\vec{x} - \vec{x}_{0k}}{((\vec{x} - \vec{x}_{0k}) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_{0k}))^{3/2}} \times \cos \left[\frac{\pi}{2\theta_{Gk}} \cos^{-1} \left(\frac{z}{(\vec{x} - \vec{x}_{0k}) \cdot (\vec{x} - \vec{x}_{0k})} \right) \right]$$

$\frac{d\vec{x}}{dt}$: Velocidad de propagación del medio granular.

$\Delta\rho = \rho_0 - \rho$: cambio de densidad ocasionado por el desplazamiento del medio granular.

ρ_0 : Densidad fuera del ZMA.

ρ : Densidad dentro de la ZMA.

v_{0k} : Velocidad vertical del medio granular extraído en el centro del punto de extracción k.

$\vec{x}_{DK} \cdot \vec{x}_{DK} = r_{DK}^2$

$\vec{x}_{0k}$: Ubicación del punto de extracción k.

θ_{Gk} : Angulo de deslizamiento del material del punto de extracción k.

z: Altura de propagación del ZMA.

Vivanco y Melo (2013).

Mediante el modelo cinemático y el concepto de frente de dilatación llegan a una ecuación que representa la ZMA, la cual es la siguiente:

$$\frac{4}{3} \sqrt{\pi D_p} z^{3/2} \exp \left(\frac{[x - x_0]^2}{4 D_p z} \right) = \frac{\rho}{\rho_0} Q_0 t$$

D_p : Coeficiente de difusión.

x, z : Conjunto solución que define los límites de la ZMA.

x_0 : Centro del punto de extracción.

t : Tiempo de extracción.

Q_0 : Tasa de flujo seccional.

Según los autores, al extraer una determinada cantidad de material, cualquier partícula que se encuentre dentro de los límites definidos por esta ecuación debería sufrir un cambio de posición. Cuyo desplazamiento horizontal y vertical los describe como:

$$x = x_0 + \left[\left(1 + \frac{\rho}{\Delta\rho} \right) - \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{4\pi D_p z_S^3}} \exp\left(-\frac{[x_S - x_0]^2}{4D_p z_S} \right) Q_0 T \right]^{1/3} (x_S - x_0)$$

$$z = \left[\left(1 + \frac{\rho}{\Delta\rho} \right) z_S^{3/2} - \frac{3}{4} \frac{1}{\sqrt{4\pi D_p}} \exp\left(-\frac{[x_S - x_0]^2}{4D_p z_S} \right) Q_0 T \right]^{2/3}$$

x_S, z_S : Posiciones originales de la partícula en cuestión.

El siguiente paso es conocer las condiciones bajo las cuales se debería producir la interacción entre diferentes flujos. Para esto, plantea un escenario en que se desarrolla una extracción alternada. La cual inicia desde una abertura “a” y, una vez que esta finaliza y se cierra, continúa desde una abertura “b”. Bajo esta lógica, la interacción entre ambos ZMA, en caso de existir, se debería producir dado un determinado número de extracciones M_b^* . Siendo el punto de interacción una coordenada (x^*, z^*) . Las ecuaciones que proponen para determinar estos parámetros son:

$$M_b^* = \left[\frac{Q_a}{Q_b} M_a \exp\left(\frac{6u^*}{1 - u^*} \right) \right]$$

$$x^* = \left(\frac{x_a + x_b}{2} \right) + \left(\frac{x_b - x_a}{2} \right) (\sqrt{9 + C^2} - 3)$$

$$z^* = \frac{1}{6D_p} \left(\frac{x_b - x_a}{2} \right)^2 \frac{1}{C^2} (\sqrt{9 + C^2} - 3)^2$$

Donde u^* y C son soluciones de las siguientes ecuaciones:

$$(1 - u^2) \exp\left(\frac{1 + u}{1 - u} \right) = 6D_p z^{3/2} \exp\left(\frac{[x - x_a]^2}{4D_p z} \right)$$

$$u^* = \frac{(\sqrt{9 + C^2} - 3)}{C}$$

En caso de que se produzca interacción, el material removido por el punto “a” sufrirá un nuevo desplazamiento descrito por la siguiente ecuación:

$$x = x_b - (x_b - x_s) \left[1 + \frac{\rho}{\Delta\rho} \frac{3}{4\sqrt{\pi D_P z_S^3}} \exp\left(-\frac{[x_b - x_s]^2}{4D_P z_S}\right) (Q_0 M_b - Q_b M_b^*) \right]^{1/3}$$

$$z = \left[z_S^3 + \frac{\rho}{\Delta\rho} \frac{3}{4\sqrt{\pi D_P}} \exp\left(-\frac{[x_b - x_s]}{4D_P z_S}\right) (Q_0 M_b - Q_b M_b^*) \right]^{1/3}$$

Modelo fuerza normal: *Hertzian spring-dashpot model*

Este modelo es similar al modelo lineal *spring-dashpot*, con la diferencia principal de que, en el modelo hertziano, los componentes *elastic and damping* de la fuerza normal son funciones no lineales de la superposición. La parte elástica se basa en la teoría clásica del contacto desarrollada por Hertz a finales del siglo XIX.

La forma del modelo hertziano de muelle y amortiguador aplicado en Rocky puede escribirse como:

$$F_n = \bar{K}_H s_n^{3/2} + \bar{C}_H s_n^{1/4} \dot{s}_n$$

Donde el coeficiente de rigidez (*stiffness*) $\bar{K}_H$ se define como:

$$\bar{K}_H = \frac{4}{3} E^* \sqrt{R^*}$$

Donde:

- E^* es el módulo de Young reducido, definido por la expresión:

$$\frac{1}{E^*} = \frac{1 - \nu_1^2}{E_1} + \frac{1 - \nu_2^2}{E_2}$$

E_1, E_2 son los módulos de Young de las dos partículas en contacto o de la partícula y la frontera, según el tipo de contacto. Además ν_1, ν_2 son las respectivas relaciones de Poisson.

- R^* es el radio efectivo o equivalente, definido por la expresión:

$$\frac{1}{R^*} = \begin{cases} \frac{2}{L_1} + \frac{2}{L_2} & \text{para choques partícula - partícula} \\ \frac{2}{L} & \text{para choques partícula - frontera} \end{cases}$$

Donde L_1, L_2 son los tamaños de las partículas en contacto en una colisión partícula-partícula, mientras que L es el tamaño de la partícula en una colisión partícula-frontera.

Según Tsuji el coeficiente *damping* o amortiguador para el modelo hertziano en Rocky se define de la siguiente forma:

$$\bar{C}_H = 2\eta_H \sqrt{m^* \bar{K}_H}$$

Donde m^* es la masa efectiva definida como:

$$\frac{1}{m^*} = \begin{cases} \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} & \text{para contacto particulla - particulla} \\ \frac{1}{m} & \text{para contacto particula - frontera} \end{cases}$$

η_H es la tasa de amortiguamiento para el modelo Hertzian *spring-dashpot*.

Antypov & Elliott demostraron que, considerando transformaciones de variables apropiadas, la solución para una ecuación de movimiento basada en el modelo Hertziano puede ser mapeada en la solución de una ecuación equivalente basada en el modelo lineal *spring-dashpot*. Esa equivalencia sólo es posible si el coeficiente de amortiguación para el modelo hertziano se define como:

$$\eta_H = \frac{\sqrt{5}}{2} \eta$$

Donde η es la misma relación que el modelo lineal *spring-dashpot*. En Rocky, el valor de η se determina resolviendo la siguiente ecuación:

$$\varepsilon = \begin{cases} \exp \left[-\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \left(\pi - \tan^{-1} \frac{2\eta\sqrt{1-\eta^2}}{1-2\eta^2} \right) \right] & \text{si } 0 \leq \eta < \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \exp \left[-\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \tan^{-1} \frac{2\eta\sqrt{1-\eta^2}}{2\eta^2-1} \right] & \text{si } \frac{1}{\sqrt{2}} \leq \eta \leq 1 \\ \exp \left[-\frac{\eta}{\sqrt{1-\eta^2}} \ln \frac{\eta + \sqrt{\eta^2-1}}{\eta - \sqrt{\eta^2-1}} \right] & \text{si } \eta > 1 \end{cases}$$

Donde ε es el coeficiente de restitución.

Modelo fuerza tangencial: Mindlin-Deresiewicz

La fuerza tangencial de este modelo está definida como la siguiente expresión:

$$\mathbf{F}_\tau = -\mu F_n \left(1 - \zeta^{3/2}\right) \frac{\mathbf{s}_\tau}{|\mathbf{s}_\tau|} + \eta_\tau \sqrt{\frac{6\mu m^* F_n}{s_{\tau,max}}} \zeta^{1/4} \dot{\mathbf{s}}_\tau$$
$$\zeta = 1 - \frac{\min(|\mathbf{s}_\tau|, s_{\tau,max})}{s_{\tau,max}}$$

Donde:

- μ es el coeficiente de fricción, que se calcula de la siguiente manera:

$$\mu = \begin{cases} \mu_s & \text{si no se produce deslizamiento en el contacto} \\ \mu_d & \text{si se produce deslizamiento en el contacto} \end{cases}$$

Donde μ_s, μ_d son los coeficientes de fricción estático y dinámico respectivamente. Estas tratan de propiedades que el usuario puede definir en el correspondiente panel del editor de interacción de materiales en Rocky.

- F_n es la fuerza normal.
- $\mathbf{s}_\tau$ es el desplazamiento relativo tangencial en el contacto.
- $\dot{\mathbf{s}}_\tau$ es la componente tangencial de la velocidad relativa en el contacto.
- $s_{\tau,max}$ el desplazamiento tangencial relativo máximo a partir del cual las partículas comienzan a deslizarse.
- m^* es la masa efectiva.
- η_τ es el coeficiente de amortiguación tangencial, que se estima en Rocky de la siguiente forma:

$$\eta_\tau = -\frac{\ln \varepsilon}{\sqrt{\ln^2 \varepsilon + \pi^2}}$$

Donde ε es el coeficiente de restitución para la interacción de los materiales respectivos.

El valor del desplazamiento tangencial relativo máximo se determina en Rocky mediante la expresión:

$$s_{\tau,max} = \mu \left(\frac{1 - v_1}{2 - v_1} + \frac{1 - v_2}{2 - v_2} \right)^{-1} s_n$$

Donde:

- v_1, v_2 son las relaciones de Poisson de las dos partículas o de la partícula y la frontera, según el tipo de contacto.
- s_n es el solapamiento normal.

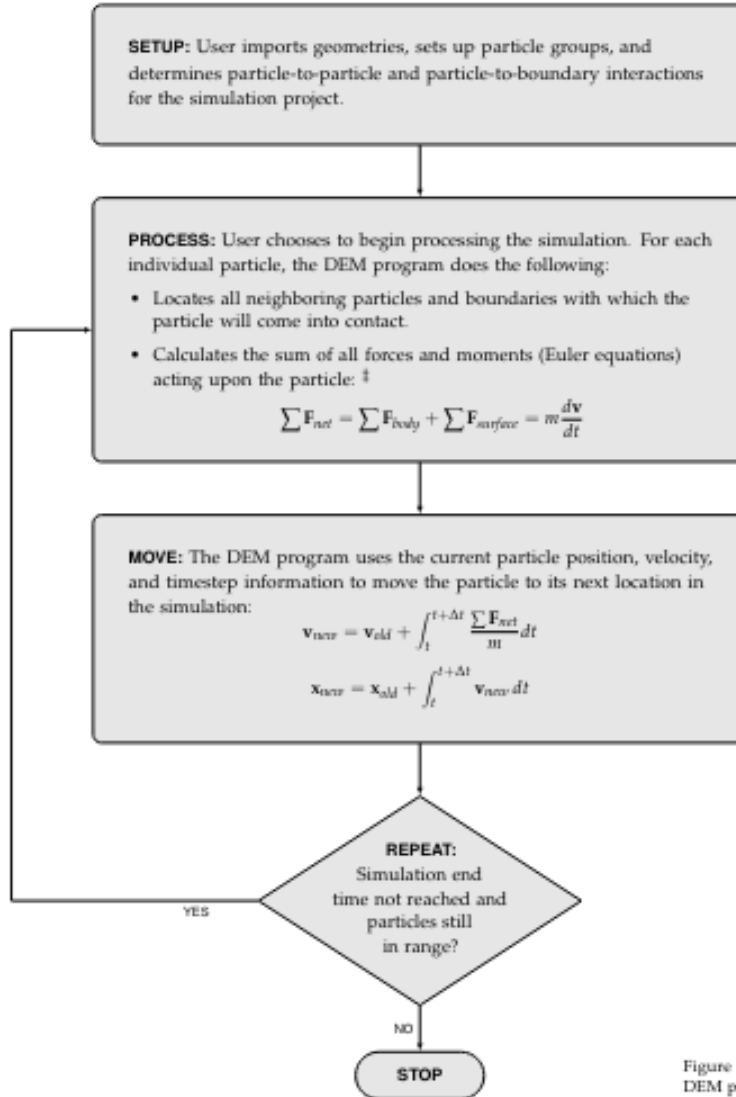


Figure 1.1: Schematic algorithm of a DEM program. As usual, F is force, m is mass, t is time, v is velocity and x is position. ‡ The Euler equations of motion are not shown in the diagram for simplicity.

Figura 28: Anexo diagrama típico algoritmo DEM.

Tabla 13: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 1.

Capa de cebolla	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_t
1	2824	4162	810	0	0	0	0	0	0	0	7796
2	347	1794	4982	1092	0	0	0	0	0	0	8215
3	263	1338	3083	3856	22	0	0	0	0	0	8562
4	141	762	1729	3796	1999	0	0	0	0	0	8427
5	158	648	1028	2057	3922	305	0	0	0	0	8118
6	142	488	623	1132	3237	2332	0	0	0	0	7954
7	177	528	503	698	1951	3993	361	0	0	0	8211
8	145	379	319	377	1106	2940	2958	0	0	0	8224
9	115	261	197	266	519	1598	4236	976	0	0	8168
10	68	197	112	179	286	795	2563	3919	13	0	8132

Tabla 14: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 2.

Capa de cebolla	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_t
1	2627	4093	1283	0	0	0	0	0	0	0	8003
2	404	1842	4859	1201	0	0	0	0	0	0	8306
3	244	1254	3225	3802	33	0	0	0	0	0	8558
4	182	810	1669	3533	1964	0	0	0	0	0	8158
5	149	583	890	2331	4039	150	0	0	0	0	8142
6	114	403	517	1243	3294	2767	0	0	0	0	8338
7	102	358	310	612	1807	4301	746	0	0	0	8236
8	54	196	211	364	918	2928	3307	1	0	0	7979
9	92	224	172	287	574	1450	3946	1312	0	0	8057
10	78	178	167	198	373	833	2282	4243	144	0	8496

Tabla 15: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 3.

Capa de cebolla	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_t
1	2732	4242	1150	0	0	0	0	0	0	0	8124
2	365	1789	4858	1185	0	0	0	0	0	0	8197
3	315	1317	3012	4054	104	0	0	0	0	0	8802
4	199	738	1456	3612	2373	0	0	0	0	0	8378
5	148	579	927	1981	4301	381	0	0	0	0	8317
6	140	465	584	1184	3057	2855	0	0	0	0	8285
7	153	413	404	492	1507	4281	1077	0	0	0	8327
8	131	245	288	415	954	2629	3681	12	0	0	8355
9	107	260	269	288	574	1526	3765	1874	0	0	8663

10	69	193	150	179	326	726	2112	4284	257	0	8296
----	----	-----	-----	-----	-----	-----	------	------	-----	---	------

Tabla 16: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 4.

Capa de cebolla	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_t
1	2870	4228	1061	0	0	0	0	0	0	0	8159
2	412	1849	4777	1195	0	0	0	0	0	0	8233
3	238	1364	3023	3480	1	0	0	0	0	0	8106
4	243	984	1928	3889	1569	0	0	0	0	0	8613
5	208	668	984	2313	3999	90	0	0	0	0	8262
6	135	405	572	1185	3583	2324		0	0	0	8204
7	79	295	386	626	2061	4493	432	0	0	0	8372
8	77	204	247	321	927	3064	3290	0	0	0	8130
9	75	202	174	233	519	1508	4117	1346	0	0	8174
10	69	173	148	170	368	805	2543	4120	161	0	8557

Tabla 17: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 5.

Capa de cebolla	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_t
1	3018	4333	801	0	0	0	0	0	0	0	8152
2	420	1933	4878	942	0	0	0	0	0	0	8173
3	220	1098	2944	3983	85	0	0	0	0	0	8330
4	162	824	1829	3997	2198	0	0	0	0	0	9010
5	133	520	920	2014	4303	331	0	0	0	0	8221
6	140	415	665	1082	3145	2660	0	0	0	0	8107
7	87	345	443	663	1917	4629	680	0	0	0	8764
8	80	291	275	337	860	2740	4013	9	0	0	8605
9	69	226	221	262	476	1365	4040	1853	0	0	8512
10	70	221	156	166	335	758	2212	4753	298	0	8969

Tabla 18: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 6.

Capa de cebolla	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_t
1	2683	4225	1248	0	0	0	0	0	0	0	8156
2	347	2049	5195	1112	0	0	0	0	0	0	8703
3	236	1244	2801	4322	102	0	0	0	0	0	8705
4	157	727	1448	3976	2176	0	0	0	0	0	8484
5	181	703	995	2184	4320	252	0	0	0	0	8635
6	118	418	551	1030	3304	2921	0	0	0	0	8342

7	101	334	436	584	1759	4321	702	0	0	0	8237
8	96	304	288	322	784	2836	3686	2	0	0	8318
9	109	211	179	192	477	1426	4189	1866	0	0	8649
10	91	159	147	133	277	645	2260	4435	324	0	8471

Tabla 19: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 7.

Capa de cebolla	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_t
1	2710	4122	1209	0	0	0	0	0	0	0	8041
2	377	1844	4678	1350	0	0	0	0	0	0	8249
3	217	1113	2848	3597	43	0	0	0	0	0	7818
4	182	765	1881	3697	2063	0	0	0	0	0	8588
5	165	691	1108	2363	4105	223	0	0	0	0	8655
6	109	385	521	1203	3359	2804	0	0	0	0	8381
7	112	331	387	623	1772	4300	762	0	0	0	8287
8	85	272	321	421	913	2859	3624	1	0	0	8496
9	80	223	199	246	532	1367	3637	1583	0	0	7867
10	91	222	168	147	333	789	2220	3944	108	0	8022

Tabla 20: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 8.

Capa de cebolla	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_t
1	2794	4034	1221	0	0	0	0	0	0	0	8049
2	519	1885	4085	1867	0	0	0	0	0	0	8356
3	286	1348	3140	3450	313	0	0	0	0	0	8537
4	220	705	1744	3596	2054	0	0	0	0	0	8319
5	175	477	799	2030	4090	253	0	0	0	0	7824
6	110	382	533	1166	3479	2745	0	0	0	0	8415
7	124	290	404	716	1872	4311	462	0	0	0	8179
8	99	292	383	475	947	3114	3330	0	0	0	8640
9	89	259	299	317	472	1530	4333	1428	0	0	8727
10	83	166	203	155	242	705	2353	4345	159	0	8411

Tabla 21: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 9.

Capa de cebolla	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_t
1	2600	3977	1289	0	0	0	0	0	0	0	7866
2	364	1753	4492	1249	0	0	0	0	0	0	7858
3	292	1189	2901	3503	14	0	0	0	0	0	7899
4	175	942	1824	3804	1757	0	0	0	0	0	8502
5	124	596	1040	2264	3804	65	0	0	0	0	7893
6	116	464	685	1216	3563	2288	0	0	0	0	8332
7	118	364	370	720	1989	4323	407	0	0	0	8291
8	95	272	277	412	1073	3046	2944	0	0	0	8119
9	72	213	179	279	566	1667	4527	1309	0	0	8812
10	70	168	162	186	270	838	2522	4246	75	0	8537

Tabla 22: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 10.

Capa de cebolla	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_t
1	2858	4280	1009	0	0	0	0	0	0	0	8147
2	326	1703	4781	1237	0	0	0	0	0	0	8047
3	222	1165	2824	3883	146	0	0	0	0	0	8240
4	216	974	1751	3595	2097	0	0	0	0	0	8633
5	172	607	999	2127	3809	275	0	0	0	0	7989
6	131	511	611	1253	3441	2536	0	0	0	0	8483
7	97	306	461	669	1821	4174	673	0	0	0	8201
8	125	346	356	477	1034	2871	3401	1	0	0	8611
9	106	297	256	303	589	1627	4035	1274	0	0	8487
10	83	190	141	164	304	747	2360	3743	38	0	7770

Tabla 23: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 11.

Capa de cebolla	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_t
1	2849	4200	926	0	0	0	0	0	0	0	7975
2	383	2069	4984	1128	0	0	0	0	0	0	8564
3	261	1167	2787	4129	123	0	0	0	0	0	8467
4	177	764	1591	3625	2429	0	0	0	0	0	8586
5	115	460	935	2266	4300	483	0	0	0	0	8559
6	152	460	624	1043	2812	2975	0	0	0	0	8066
7	142	343	354	647	1602	4041	1262	0	0	0	8391

8	141	279	352	402	956	2625	3431	15	0	0	8201
9	106	239	251	262	527	1421	3750	1764	0	0	8320
10	84	160	178	150	312	749	2271	4096	206	0	8206

Tabla 24: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 12.

Capa de cebolla	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_t
1	2883	3998	920	0	0	0	0	0	0	0	7801
2	335	1781	4802	1330	0	0	0	0	0	0	8248
3	253	1216	2929	3989	136	0	0	0	0	0	8523
4	208	868	1601	3175	1871	0	0	0	0	0	7723
5	160	618	1054	2344	4130	215	0	0	0	0	8521
6	121	503	768	1352	3422	2114	0	0	0	0	8280
7	70	340	470	687	1847	4331	457	0	0	0	8202
8	110	369	314	358	1011	3073	3139	0	0	0	8374
9	126	287	267	290	546	1601	4349	1457	0	0	8923
10	81	230	132	144	256	744	2365	4400	195	0	8547

Tabla 25: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 13.

Capa de cebolla	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_t
1	2699	4077	1223	0	0	0	0	0	0	0	7999
2	378	1802	4744	1345	0	0	0	0	0	0	8269
3	204	1175	2989	3777	53	0	0	0	0	0	8198
4	170	817	1751	3546	1885	0	0	0	0	0	8169
5	118	571	935	2216	4058	241	0	0	0	0	8139
6	113	434	518	1139	3218	2615	0	0	0	0	8037
7	99	329	364	651	1915	4233	594	0	0	0	8185
8	87	278	307	443	1087	3107	3569	0	0	0	8878
9	89	268	209	269	638	1555	4096	1602	0	0	8726
10	82	194	147	185	329	732	2147	4054	286	0	8156

Tabla 26: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 14.

Capa de cebolla	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_t
1	2696	4344	1563	0	0	0	0	0	0	0	8603
2	349	1728	4634	1610	0	0	0	0	0	0	8321
3	261	1122	2670	3651	144	0	0	0	0	0	7848
4	215	892	1744	3516	1959	0	0	0	0	0	8326
5	213	662	999	2323	3827	258	0	0	0	0	8282
6	170	468	573	1108	3329	2676	0	0	0	0	8324
7	126	358	445	640	1854	4342	927	0	0	0	8692
8	86	268	271	323	996	2783	3413	2	0	0	8142
9	95	228	196	220	543	1334	3893	1669	0	0	8178
10	63	155	106	146	284	769	2173	4214	249	0	8159

Tabla 27: Contabilización de partículas extraídas por estratos para la simulación 15.

Capa de cebolla	n_1	n_2	n_3	n_4	n_5	n_6	n_7	n_8	n_9	n_{10}	n_t
1	2930	4191	938	0	0	0	0	0	0	0	8059
2	342	1976	4919	910	0	0	0	0	0	0	8147
3	363	1409	3037	3942	55	0	0	0	0	0	8806
4	199	886	1708	3579	2009	0	0	0	0	0	8381
5	123	591	836	2188	4190	239	0	0	0	0	8167
6	93	379	538	1308	3548	2683	0	0	0	0	8549
7	91	312	345	712	1771	4200	744	0	0	0	8175
8	105	254	308	419	915	3054	3276	0	0	0	8331
9	74	198	201	247	501	1589	4096	1405	0	0	8311
10	92	164	155	224	342	737	2323	3977	82	0	8096

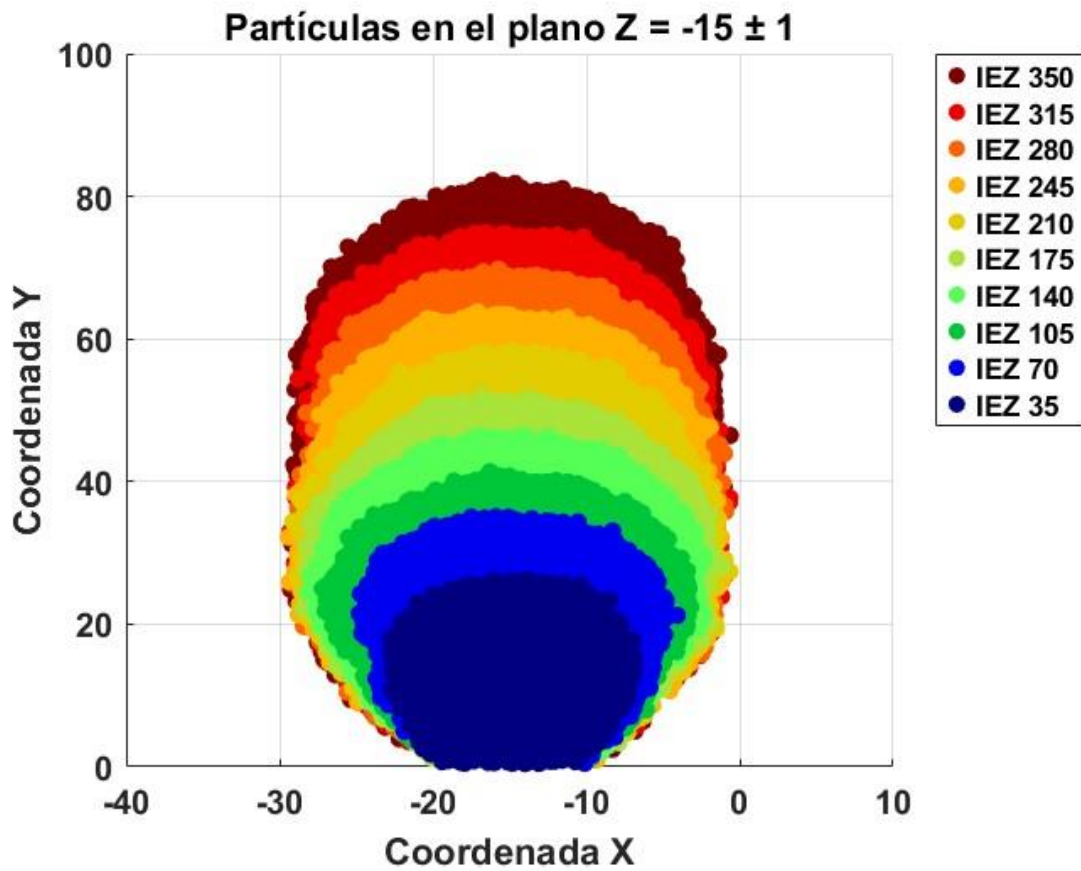


Figura 29: Sección transversal ZEA simulación 3.

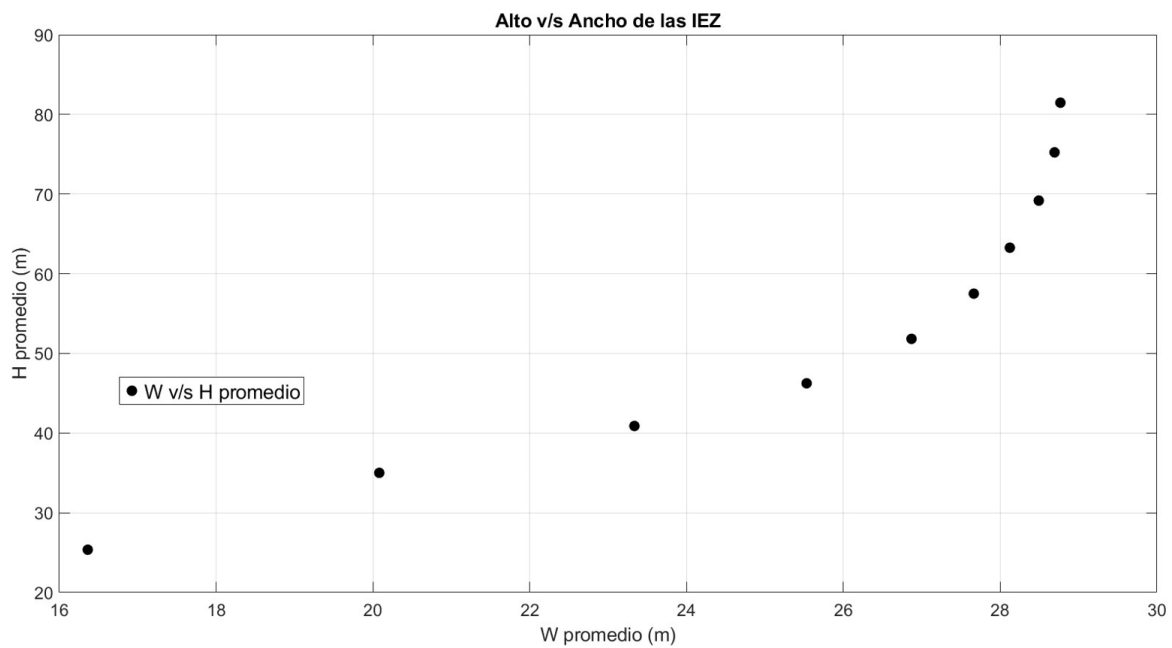


Figura 30: Alto de la IEZ v/s Ancho de la ZEA promedio.

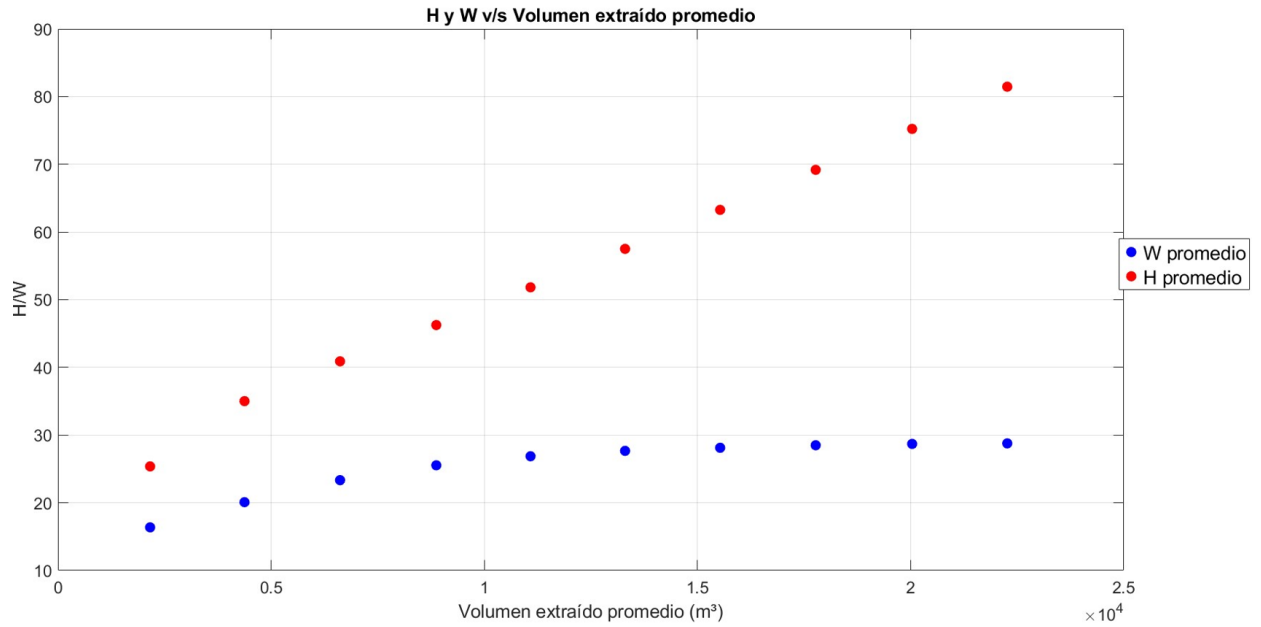


Figura 31: Alto y ancho de la IEZ v/s volumen extraído.

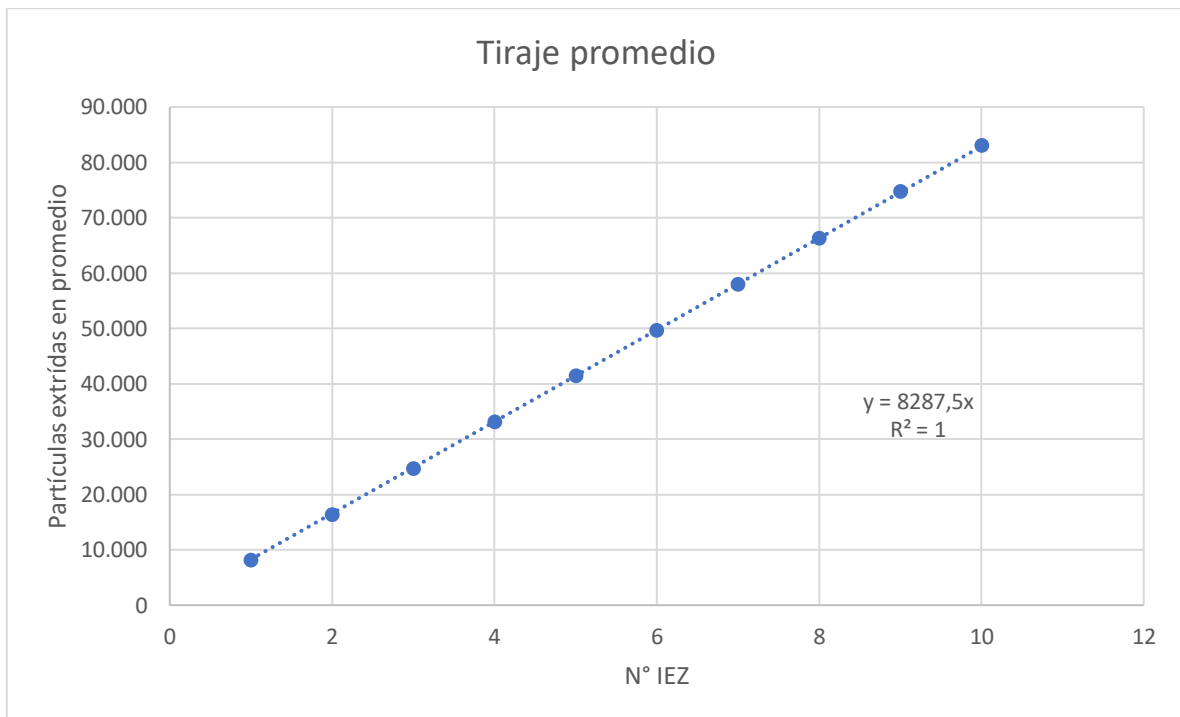


Figura 32: Tiraje promedio.