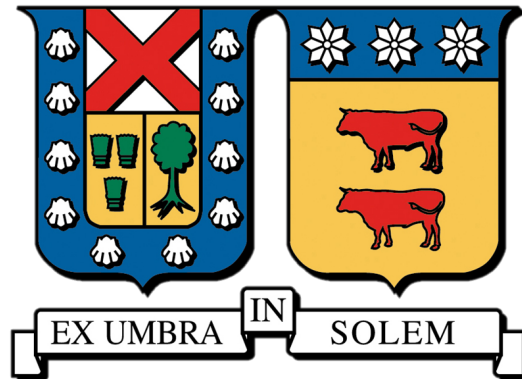


**UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA**

DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA MECÁNICA

VALPARAÍSO-CHILE



DISEÑO DE PRÓTESIS TRANSTIBIAL UTILIZANDO  
MATERIALES COMPUESTOS E IMPRESIÓN 3D POR  
SINTERIZACIÓN SELECTIVA POR LÁSER

**ILAN RODRIGO ROJAS ANDANA**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL MECÁNICO

PROFESOR GUÍA: DR. ING. ALEJANDRO PACHECO SANJUÁN

PROFESOR CO-REFERENTE: ING. RAFAEL MENA YANSSEN

OCTUBRE-2023

# Resumen

Resulta indudable que la amputación de una extremidad inferior afecta negativamente la calidad de vida de la persona. De acuerdo a datos del Servicio Nacional de Discapacidad cerca de un 1% de la población adulta chilena presenta una ausencia o amputación de alguna de las extremidades [CENADIS \(2022\)](#). El objetivo general de este trabajo es proponer el diseño de una unidad de pie de prótesis transtibial fabricada mediante el uso de materiales compuestos e impresión 3D por sinterización selectiva por láser que se encuentre en capacidades de cumplir las pruebas exigidas por la normativa ISO 10328. La prótesis a diseñar contempla un nivel de carga P5, el cual corresponde a una masa corporal máxima de 100 [kg].

La normativa para la validación de prótesis contempla tres pruebas principales: una prueba de carga estática, una prueba de carga última estática, y por último una de resistencia a fatiga. Primero, se comienza definiendo el diseño de la prótesis considerando para ello 2 posibles propuestas, junto a la adición o no de una división a lo largo del cuerpo principal. Se opta por una configuración de un cuerpo principal de PA-12 de dimensiones 300 x 106 x 128 [mm] de largo ancho y alto respectivamente, geometría que en la zona de tobillo posee un plano angulado en 45° para la conexión con un adaptador SACH de geometría personalizada de acero. Mientras que para el laminado, se establece una forma de ballesta, el cual propicia de rigidez y absorción de energía a la prótesis. Para los laminados, se establecen 3 configuraciones distintas T800H {[0/90]<sub>3s</sub>}<sub>3</sub>, T800H{[45/90/ - 45/0]<sub>2s</sub>}<sub>2</sub> y T800H{[0/60/ - 60]<sub>3s</sub>}<sub>3</sub> todos con un espesor total de 6[mm].

En cuanto al ensamble del sistema, este considera a grandes rasgos el cuerpo principal de PA-12 de 806[cm<sup>3</sup>], los laminados descritos y el adaptador de pie-inferior a 45° personalizado, el cual presenta una cabeza cuadrada en la parte superior para unirse a piezas comerciales, dentro de dichas piezas comerciales se tiene el pilón estructural con adaptador hembra de 30 [mm] de diámetro, la abrazadera hembra para la parte superior y el adaptador de encaje, todos los componentes comerciales son de la marca Ottobock, y se encuentran certificados para un nivel "P5 de la normativa ISO 10328. El modelo CAD del ensamble es exportado al software de elementos finitos ANSYS para las simulaciones de las distintas pruebas establecidas en la normativa.

Se comienza con la prueba última estática en antepié, donde se obtiene que la prótesis cumple la prueba para el nivel superior e inferior de carga y los resultados no varían según los distintos

laminados. En la simulación de antepié se obtiene que para los niveles superior e inferior de carga existe volumen bajo falla en el cuerpo de PA-12 y los laminados de carbono. Al analizar los resultados, se escoge como laminado la configuración con orientación  $\{[0/60/-60]_{3s}\}_3$ , puesto que se concluye que éste es el que menor porcentaje de volumen en falla de material presenta, teniendo para nivel inferior de carga última estática un 0,0006 % y 0,1370 % de volumen relativo de falla en el cuerpo de PA-12 y el laminado de fibra de carbono, respectivamente. Concluyéndose que ambos representan un volumen relativo pequeño ante una posible falla por fractura.

Para la misma prueba estática última, se continua con un análisis de confiabilidad del cuerpo de PA-12. Para ello se modela la resistencia del material como una distribución normal, mientras que los esfuerzos para nivel superior e inferior se modelan mediante una distribución de Weibull. Se obtiene una confiabilidad del cuerpo de PA-12 de  $\mathcal{R} = 99,93131\%$  y  $\mathcal{R} = 99,55978\%$  para los niveles superior e inferior de carga en antepié respectivamente.

Por último se se analiza la carga a fatiga exigida por la normativa. Para ello se modelan las fuerzas como onda sinusoidal según lo dictaminado por la norma. Para el laminado, se observa que los esfuerzos se distribuyen en cada lámina preferentemente siguiendo las direcciones de las fibras, es por ello que se analiza el comportamiento a fatiga del material compuesto mediante los esfuerzos en dirección de las fibras. Se analizan los valores de esfuerzo medio y alternante de las 6 primeras y 6 últimas capas del laminado con la herramienta de diagramas de vida constante de Kawai para un laminado unidireccional, obteniéndose que la totalidad del laminado se encuentra en cumplimiento de la carga para fatiga.

Basado en los análisis desarrollados bajo carga estática y dinámica se concluye que la prótesis diseñada cumple en totalidad las exigencias de la normativa ISO 10328:2016 para su posible certificación.

**Palabras clave:**Manufactura aditiva, impresión 3D, impresión SLS, prótesis transtibial, normativa ISO 10328:2016, criterio de falla de Tsai-Wu, diagramas de vida constate de Kawai, laminado de fibra de carbono, Ansys ACP, materiales compuestos.

# Abstract

It is undeniable that the amputation of a lower limb negatively affects a person's quality of life. According to data from the National Disability Service, about 1 % of the Chilean adult population has an absence or amputation of one or more limbs [CENADIS \(2022\)](#). The general objective of this work is to propose the design of a transtibial prosthetic foot unit manufactured using composite materials and 3D printing by selective laser sintering, capable of meeting the tests required by ISO 10328 regulations. The designed prosthesis considers a load level P5, corresponding to a maximum body mass of 100 [kg].

The regulations for prosthetic validation include three main tests: a static load test, a ultimate static load test, and finally a fatigue resistance test. The design of the prosthesis begins by considering two possible proposals, along with the addition or absence of a division along the main body. A configuration is chosen with a main body of PA-12 with dimensions of 300 x 106 x 128 mm in length, width, and height respectively. The ankle area has a 45° angled plane for connection to a custom steel SACH adapter. For the lamination, a spring shape is established, providing rigidity and energy absorption to the prosthesis. Three different configurations of laminates are established: T800H  $\{[0/90]_{3s}\}_3$ , T800H  $\{[45/90/-45/0]_{2s}\}_2$ , and T800H  $\{[0/60/-60]_{3s}\}_3$ , all with a total thickness of 6 mm.

Regarding the system assembly, it broadly includes the main PA-12 body of 806  $cm^3$ , the described laminates, and the custom 45° lower foot adapter, which has a square head at the top for attaching to commercial pieces. Among these commercial pieces are the structural pylon with a 30 mm diameter female adapter, the female clamp for the top, and the snap adapter. All commercial components are from the Ottobock brand and are certified for a "P5" level according to ISO 10328 regulations. The CAD model of the assembly is exported to the ANSYS finite element software for simulations of the various tests established in the regulations.

The ultimate static test in the forefoot is simulated, where it is found that the prosthesis passes the test for both upper and lower load levels, and the results do not vary between different laminates. In the forefoot simulation, it is found that for both upper and lower load levels, there is volume under failure in the PA-12 body and carbon fiber laminates. Analyzing the results, the  $\{[0/60/-60]_{3s}\}_3$  orientation is chosen as the laminate since it has the lowest percentage of material

failure volume. For the lower level of static ultimate load, it has a 0.0006 % and 0.1370 % relative volume of failure in the PA-12 body and carbon fiber laminate, respectively. It is concluded that both represent a small relative volume in the face of a possible fracture failure.

For the same ultimate static test, a reliability analysis of the PA-12 body is conducted. The material strength is modeled as a normal distribution, while the stresses for upper and lower levels are modeled using a Weibull distribution. The reliability of the PA-12 body is obtained as  $\mathcal{R} = 99,93131\%$  and  $\mathcal{R} = 99,55978\%$  for the upper and lower forefoot load levels, respectively.

Finally, the fatigue load required by the regulation is analyzed. The forces are modeled as a sinusoidal wave as dictated by the standard. For the laminate, it is observed that stresses are distributed in each layer following the fiber directions. The fatigue behavior of the composite material is analyzed through stresses in the fiber direction. The mean and alternating stress values of the first 6 and last 6 layers of the unidirectional laminate are analyzed using the Kawai constant life diagrams tool, obtaining that the entire laminate complies with the fatigue load.

Based on the analyses under static and dynamic loads, it is concluded that the designed prosthesis fully meets the requirements of ISO 10328:2016 for possible certification.

**Keywords:** Additive manufacturing, 3D printing, SLS printing, transtibial prosthesis, ISO 10328:2016 regulations, Tsai-Wu failure criterion, Kawai constant life diagrams, carbon fiber laminate, Ansys ACP, composite materials.

# Agradecimientos

Primero que todo, me gustaría agradecer a mis padres Karen y Carlos, por haberme apoyado de manera incondicional desde incluso los años previos a mi entrada a esta universidad, los recuerdos de todos los viajes a comienzo y fin de año desde La Serena a Valparaíso y viceversa siempre permanecerán en mí.

A mi hermana Kineret que siempre tiene algo que contar para sacarte una sonrisa y alegrarte el día, y mi hermana Aixa que, en el fondo, sigue siendo la bebe de la familia.

A mi lela, Angela por todas sus enseñanzas y por ese amor y cariño incondicional de abuela, muchas gracias por ser un pilar fundamental para mis todos estos años.

A mis amigos, Andrés, Cristóbal, Fernando, Javier, Joaquín, Tomás y Valentina sin quienes definitivamente mi estadía en la universidad no hubiese sido la misma, siempre recordaré esas maratones de estudio los primeros años, y todos los planes que solíamos hacer como grupo.

Al Profesor Alejandro Pacheco, no me cabe duda de que sin su ayuda e infinita disposición este trabajo no hubiese sido posible, gracias profesor por todos esos consejos y guía en todo este proceso, como a su vez agradezco el confiarme sus ayudantías por tantos semestres y creer en mis capacidades.

Por último, agradecer a todas las personas, que han aportado con un granito de arena en mi formación por la senda de esta bonita carrera.

*Ilan Rodrigo Rojas Andana*

# Índice General

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Justificación del tema . . . . .	1
<b>2. Objetivos</b>	<b>2</b>
2.1. Objetivos específicos . . . . .	2
<b>3. Marco Teórico</b>	<b>3</b>
3.1. Manufactura aditiva y tipos de impresión 3D . . . . .	3
3.1.1. Deposición de material fundido - FDM . . . . .	4
3.1.2. Estereolitografía – SLA . . . . .	5
3.1.3. Sinterización selectiva por láser – SLS . . . . .	5
3.2. Propiedades mecánicas de la poliamida 12 . . . . .	6
3.3. Normativa . . . . .	8
3.3.1. Normativa ISO 10328:2016 . . . . .	8
3.3.2. Niveles de carga . . . . .	9
3.3.3. Sistema de coordenadas de unidades tobillo - pie . . . . .	9
3.3.4. Posicionamiento de prótesis y valores de carga . . . . .	10
3.3.5. Certificación de una prótesis . . . . .	12
3.4. Estado del arte . . . . .	14
3.4.1. Optimización topológica de prótesis transtibial . . . . .	14
3.4.2. Prótesis por impresión multi jet (MJF) . . . . .	17
3.5. Consideraciones de elasticidad . . . . .	19
3.5.1. Notación de Voigt . . . . .	19
3.5.2. Tensor de deformación . . . . .	20
3.5.3. Material anisotrópico . . . . .	20
3.5.4. Material monoclinico . . . . .	21
3.5.5. Material ortótropo . . . . .	22
3.5.6. Material transversalmente isotrópico . . . . .	23

3.6.	Teoría clásica de placas (CPT) . . . . .	24
3.6.1.	Suposiciones en teoría de placas . . . . .	25
3.6.2.	Relaciones de deformación y curvaturas . . . . .	25
3.6.3.	Esfuerzos en CPT . . . . .	27
3.6.4.	Variación de esfuerzos a lo largo de una placa . . . . .	30
3.6.5.	Ecuación de deflexión de placas . . . . .	31
3.7.	Teoría de materiales compuestos . . . . .	32
3.7.1.	Sistema de coordenadas . . . . .	32
3.7.2.	Teoría de la deformación por cortante de 1 <sup>er</sup> orden (FSDT) . . . . .	32
3.7.3.	Esfuerzos en FSDT . . . . .	36
3.7.4.	Obtención de $\bar{Q}_{ij}$ . . . . .	37
3.7.5.	Nomenclatura de laminados compuestos . . . . .	38
3.8.	Criterios de falla de Tsai - Wu . . . . .	39
3.8.1.	Coefficientes de interacción . . . . .	41
3.9.	Diagramas de vida constante de Kawai . . . . .	45
3.10.	Confiabilidad de un material . . . . .	49
3.10.1.	Representación gráfica de confiabilidad . . . . .	52
<b>4.</b>	<b>Metodología</b>	<b>53</b>
<b>5.</b>	<b>Desarrollo</b>	<b>55</b>
5.1.	Propuestas de diseño . . . . .	55
5.2.	Ensamble y componentes . . . . .	56
5.2.1.	Cuerpo principal impreso en 3D - SLS . . . . .	56
5.2.2.	Laminado de fibra de carbono . . . . .	57
5.2.3.	Adaptador de pie - inferior . . . . .	58
5.2.4.	Componentes estructurales comerciales . . . . .	59
5.2.5.	Ensamble del sistema . . . . .	61
5.3.	Mallado del modelo . . . . .	62
5.3.1.	Mallado cuerpo PA-12 . . . . .	62
5.3.2.	Mallado fleje laminado de carbono . . . . .	64
5.4.	Restricciones y consideraciones de simulación . . . . .	65
5.5.	Prueba de resistencia última estática . . . . .	66
5.5.1.	Prueba de resistencia última estática sobre retropié . . . . .	66
5.5.2.	Prueba de resistencia última estática sobre antepié . . . . .	67
5.5.3.	Análisis de prueba última estática . . . . .	88
5.5.4.	Análisis de confiabilidad . . . . .	89

5.6. Prueba de resistencia a la fatiga . . . . .	90
5.6.1. Resultados fleje laminado $\{[0/60/-60]_{2s}\}_3$ . . . . .	91
<b>6. Conclusiones y Recomendaciones</b>	<b>95</b>

# Índice de Tablas

3.1. Niveles de carga <a href="#">ISO 10328 (2016)</a> . . . . .	9
3.2. Ángulos de carga para pruebas - niveles P3,P4 y P5. . . . .	11
3.3. Propiedades mecánicas de PA 12 en <a href="#">De Vivo Nicoloso et al. (2021)</a> . . . . .	15
3.4. Coeficientes criterio de Tsai-Wu para material isotrópico transversal. . . . .	44
3.5. Constantes de los laminados carbono epoxi T800H-#3631 [+45/90/-45/0] <sub>3S</sub> , T800H- #3631 [0/+60/-60] <sub>2S</sub> y T800H-#2500 [0/90] <sub>3S</sub> . . . . .	48
3.6. Constantes de laminado unidireccional carbono/epoxi T700S/2592 <a href="#">Kawai and Teranuma (2012)</a> . . . . .	49
5.1. Propiedades de laminas de carbono-epoxi. . . . .	58
5.2. Listado de elementos del ensamblaje. . . . .	62
5.3. Métricas principales mallados A y B. . . . .	64
5.4. Métricas mallado de laminados. . . . .	64
5.5. Fuerzas de prueba última estática para nivel P5. . . . .	66
5.6. Tabla de frecuencias para prueba última estática sobre talón en cuerpo PA-12 . . .	67
5.7. Tabla de frecuencias para prueba última estática en laminado {[45/90/ - 45/0] <sub>2s</sub> } <sub>2</sub> . . . . .	70
5.8. Elementos bajo falla y volumen relativo porcentual para prueba estática en laminado [45/90/-45/0] <sub>2S</sub> . . . . .	71
5.9. Tabla de frecuencias para factores de seguridad - prueba última estática en laminado {[45/90/ - 45/0] <sub>2s</sub> } <sub>2</sub> . . . . .	73
5.10. Elementos bajo falla y volumen relativo porcentual para prueba estática en laminado {[45/90/ - 45/0] <sub>2s</sub> } <sub>2</sub> . . . . .	74
5.11. Tabla de frecuencias para prueba última estática en laminado {[0/60/ - 60] <sub>2S</sub> } <sub>2</sub> . . .	77
5.12. Elementos bajo falla y volumen relativo porcentual para prueba estática en laminado {[0/60/ - 60] <sub>2S</sub> } <sub>2</sub> . . . . .	78
5.13. Tabla de frecuencias para factores de seguridad - prueba última estática en laminado [0/60/-60] <sub>2S</sub> . . . . .	80

5.14. Elementos bajo falla y volumen relativo porcentual para prueba estática en laminado [0/60/-60] <sub>2S</sub> . . . . .	81
5.15. Tabla de frecuencias para prueba última estática en laminado {[0/90] <sub>3S</sub> } <sub>3</sub> . . . . .	84
5.16. Elementos bajo falla y volumen relativo porcentual para prueba estática en laminado [0/90] <sub>3S</sub> . . . . .	85
5.17. Tabla de frecuencias para factores de seguridad - prueba última estática en laminado {[0/90] <sub>3S</sub> } <sub>3</sub> . . . . .	87
5.18. Elementos bajo falla y volumen relativo porcentual para prueba estática en laminado {[0/90] <sub>3S</sub> } <sub>3</sub> . . . . .	88
5.19. Principales resultados obtenidos en prueba última estática sobre antepié para niveles superior e inferior de carga. . . . .	88
5.20. Fuerzas cíclicas para nivel P5. . . . .	91

# Índice de Figuras

3.1. Esquema de impresión FDM. . . . .	4
3.2. Esquema de impresión SLA. . . . .	5
3.3. Esquema de impresión SLS. . . . .	6
3.4. Orientaciones y curvas de esfuerzo deformación PA-12 <a href="#">Lammens et al. (2017)</a> . . . . .	7
3.5. Curva S-N para probeta con muesca <a href="#">Van Hooreweder and Kruth (2014)</a> . . . . .	8
3.6. Ejes de pie según <a href="#">ISO 10328 (2016)</a> . . . . .	10
3.7. Posición de la prótesis en bancos de prueba. . . . .	11
3.8. Fuerzas de ensayo para dispositivos tobillo-pie y unidades de pie - <a href="#">ISO 10328 (2016)</a> . . . . .	12
3.9. Parámetros de carga para prueba a fatiga - <a href="#">ISO 10328 (2016)</a> . . . . .	12
3.10. Ciclos de carga posibles para la prueba cíclica- <a href="#">ISO 10328 (2016)</a> . . . . .	14
3.11. Proceso de elaboración de socket personalizado <a href="#">De Vivo Nicoloso et al. (2021)</a> . . . . .	15
3.12. Pylon obtenido mediante optimización topológica <a href="#">De Vivo Nicoloso et al. (2021)</a> . . . . .	16
3.13. Unidad pie-tobillo obtenida mediante optimización topológica <a href="#">De Vivo Nicoloso et al. (2021)</a> . . . . .	16
3.14. Prótesis monoblock personalizada impresa en PA-12 <a href="#">De Vivo Nicoloso et al. (2021)</a> . . . . .	17
3.15. Partes prótesis ESAR genérica <a href="#">Kathrotiya et al. (2023)</a> . . . . .	18
3.16. Conceptos en base a pie ESAR <a href="#">Kathrotiya et al. (2023)</a> . . . . .	18
3.17. Prótesis de pie elaborada por MFJ <a href="#">Kathrotiya et al. (2023)</a> . . . . .	19
3.18. Análisis de elemento 2D con deformación normal y cortante <a href="#">Ugural (2017)</a> . . . . .	20
3.19. Plano de simetría x-y. . . . .	21
3.20. Caso de 3 planos de simetría ortogonales. . . . .	22
3.21. Eje de simetría Z . . . . .	23
3.22. Ejemplo de placa. . . . .	24
3.23. Placa antes y después de la deformación - CPT. <a href="#">Ugural (2017)</a> . . . . .	25
3.24. Curvatura xy <a href="#">Ugural (2017)</a> . . . . .	27
3.25. Distribución de esfuerzos en una placa <a href="#">Ugural (2017)</a> . . . . .	29
3.26. Diagrama de cuerpo libre de placa <a href="#">Ugural (2017)</a> . . . . .	30

3.27. Distribución de esfuerzos en una placa. . . . .	32
3.28. Placa antes y después de la deformación - FSDT. . . . .	33
3.29. Geometría de un laminado de N láminas <a href="#">Barbero (2017b)</a> . . . . .	35
3.30. Ejemplos de apilamiento en laminados . . . . .	39
3.31. Material con isotropía transversal en plano 2-3. . . . .	41
3.32. Equivalencia de estado tensión-compresión y cortante (a) <a href="#">Tsai and Wu (1971)</a> Círculo de Mohr de la situación (b). . . . .	43
3.33. Esquemático de diagrama CFL típico <a href="#">Kawai (2010)</a> . En rojo la línea crítica. . . . .	46
3.34. Diagramas CFL para distintos laminados carbono/epoxi <a href="#">Kawai and Koizumi (2007)</a>	48
3.35. Diagrama CFL para laminado carbono/epoxi unidireccional <a href="#">Kawai and Teranuma (2012)</a> . . . . .	49
3.36. Interferencia entre funciones densidad de probabilidad de esfuerzo y resistencia <a href="#">Kapur and Lamberson (1977)</a> . . . . .	50
3.37. Detalle de interferencia entre funciones densidad de probabilidad de esfuerzo y resistencia <a href="#">Kapur and Lamberson (1977)</a> . . . . .	51
3.38. Gráfico de G en función de H <a href="#">Kapur and Lamberson (1977)</a> . . . . .	52
5.1. Bocetos iniciales de propuestas de prótesis. . . . .	55
5.2. Prótesis comercial modelo Taleo Side Flex de la marca Ottobock con división del cuerpo principal. . . . .	56
5.3. Cuerpo principal PA-12 . . . . .	57
5.4. Laminado carbono-epoxi. . . . .	58
5.5. Adaptador de pie inferior. . . . .	59
5.6. Pilón con adaptador hembra y par apriete necesario <a href="#">Ottobock (2014)</a> . . . . .	60
5.7. Abrazadera hembra y par apriete necesario <a href="#">Ottobock (2014)</a> . . . . .	60
5.8. Adaptador de encaje comercial. . . . .	61
5.9. Renderizado de diseño de prótesis transtibial. . . . .	61
5.10. Mallado A. . . . .	63
5.11. Mallado B. . . . .	63
5.12. Mallado laminado $\{[0/90]_{3S}\}_3$ . . . . .	65
5.13. Mallado laminado $\{[0/60/-60]_{2S}\}_2$ . . . . .	65
5.14. Restricción y cargas para simulación. . . . .	66
5.15. Esfuerzo de von Mises sobre cuerpo principal en prueba de talón. . . . .	67
5.16. Resultados de esfuerzos sobre cuerpo PA-12 para nivel superior de $F_{2su}$ en prueba con laminado $\{[45/90/-45/0]_{2S}\}_2 - \sigma_{max} = 57,97[MPa]$ . . . . .	68
5.17. Resultados de esfuerzos sobre cuerpo PA-12 para nivel inferior de $F_{2su}$ en prueba con laminado $\{[45/90/-45/0]_{2S}\}_2 - \sigma_{max} = 56,48[MPa]$ . . . . .	69

5.18. Histograma comparativo frecuencia - esfuerzo para prueba última estática en laminado $\{[45/90/ - 45/0]_{2s}\}_2$ . . . . .	70
5.19. Componente plástica de la deformación unitaria en elementos sobre fluencia para prueba $F_{2su}$ con laminado $\{[45/90/ - 45/0]_{2s}\}_2$ . . . . .	71
5.20. Factores de seguridad sobre laminado de carbono $\{[45/90/ - 45/0]_{2s}\}_2$ para nivel superior $F_{2su} - FS_{min} = 0,65[-]$ . . . . .	72
5.21. Factores de seguridad sobre laminado de carbono $\{[45/90/ - 45/0]_{2s}\}_2$ para nivel inferior $F_{2su} - FS_{min} = 0,76[-]$ . . . . .	72
5.22. Histograma comparativo frecuencia - factor de seguridad en laminado $\{[45/90/ - 45/0]_{2s}\}_2$ para prueba última estática. . . . .	73
5.23. Resultados de esfuerzos sobre cuerpo PA-12 para nivel superior de $F_{2su}$ en prueba con laminado $\{[0/60/ - 60]_{2S}\}_2 - \sigma_{max} = 57,69[MPa]$ . . . . .	75
5.24. Resultados de esfuerzos sobre cuerpo PA-12 para nivel inferior $F_{2su}$ en prueba con laminado $\{[0/60/ - 60]_{2S}\}_2 - \sigma_{max} = 55,19[MPa]$ . . . . .	76
5.25. Histograma comparativo frecuencia - esfuerzo para prueba última estática en laminado $\{[0/60/ - 60]_{2S}\}_2$ . . . . .	77
5.26. Componente plástica de la deformación unitaria en elementos sobre fluencia para prueba $F_{2su}$ con laminado $\{[0/60/ - 60]_{2S}\}_2$ . . . . .	78
5.27. Factores de seguridad sobre laminado de carbono $\{[0/60/ - 60]_{2S}\}_2$ para nivel superior $F_{2su} - FS_{min} = 0,67[-]$ . . . . .	79
5.28. Factores de seguridad de laminado de carbono $\{[0/60/ - 60]_{2S}\}_2$ para nivel inferior $F_{2su} - FS_{min} = 0,85[-]$ . . . . .	79
5.29. Histograma comparativo frecuencia - factor de seguridad en laminado $[0/60/-60]_{2S}$ para prueba última estática. . . . .	80
5.30. Resultados de esfuerzos sobre cuerpo PA-12 para nivel superior de $F_{2su}$ en prueba con laminado $\{[0/90]_{3S}\}_3 - \sigma_{max} = 57,81[MPa]$ . . . . .	82
5.31. Resultados de esfuerzos sobre cuerpo PA-12 para nivel inferior $F_{2su}$ n prueba con laminado $\{[0/90]_{3S}\}_3 - \sigma_{max} = 56,43[MPa]$ . . . . .	83
5.32. Histograma comparativo frecuencia - esfuerzo para prueba última estática en laminado $\{[0/90]_{3S}\}_3$ . . . . .	84
5.33. Componente plástica de la deformación unitaria en elementos sobre fluencia para prueba $F_{2su}$ con laminado $\{[0/90]_{3S}\}_3$ . . . . .	85
5.34. Factores de seguridad sobre laminado de carbono $\{[0/90]_{3S}\}_3$ para nivel superior $F_{2su} - FS_{min} = 0,67[-]$ . . . . .	86
5.35. Factores de seguridad sobre laminado de carbono $\{[0/90]_{3S}\}_3$ para nivel inferior $F_{2su} - FS_{min} = 0,85[-]$ . . . . .	86

5.36. Histograma comparativo frecuencia - factor de seguridad en laminado $\{[0/90]_{3S}\}_3$ para prueba última estática. . . . .	87
5.37. Deflexión máxima en unidad pie-tobillo para los distintos laminados en prueba última estática sobre antepié. . . . .	89
5.38. Funciones densidad de probabilidad esfuerzo - resistencia para ensayo último estático $F_{2su}$ nivel superior e inferior. . . . .	90
5.39. Valores de fuerzas en talón $F_{1c}$ y antepié $F_{2c}$ para simulación. . . . .	91
5.40. Elemento crítico del laminado. . . . .	92
5.41. Historia de carga para elemento crítico del laminado en ejes locales. . . . .	92
5.42. Variación de los esfuerzos principales respecto a $\sigma_{p1}$ . . . . .	93
5.43. Diagrama CFL para laminas unidireccionales carbono-epoxi T700S. . . . .	94

# Nomenclatura

## Mayúsculas

- $C_{ij}$  — Constante elástica del material [-].
- $E$  — Módulo de Young del material [GPa].
- $F_1$  — Fuerza sobre el talon [N].
- $F_2$  — Fuerza sobre antepié [N].
- $F_i$  — Coeficiente criterio de Tsai-Wu [-].
- $F_{ij}$  — Coeficiente de acoplamiento criterio de Tsai-Wu [-].
- $G$  — Módulo de rigidez del material [GPa].
- $G^*$  — Constante de laminado [-].
- $Q$  — Matriz de transformación para simetrías en el material.
- $R$  — Relación de esfuerzos [-].
- $S$  — Resistencia al corte del material en dirección del subíndice [MPa].
- $S_u$  — Resistencia de fluencia del material [MPa].
- $S_y$  — Resistencia última del material [MPa].
- $X$  — Resistencia del material en la dirección local 1 [MPa].
- $Y$  — Resistencia del material en la dirección local 2 [MPa].
- $Z$  — Resistencia del material en la dirección local 3 [MPa].

## Minúsculas

- $a$  — Constante de laminado [-].
- $n$  — Constante de laminado [-].
- $f, o, u$  — Componentes de ejes prótesis de pie [-].
- $x, y, z$  — Componentes ejes globales de referencia [-].

## Letras griegas

$\alpha$	—	Ángulo de inclinación de fuerza sobre talón en equipos de prueba [°].
$\beta$	—	Ángulo de inclinación de fuerza sobre antepié en equipos de prueba [°].
$\gamma$	—	Ángulo de giro del eje longitudinal del pie en equipos de prueba [°].
$\epsilon$	—	Deformación unitaria [-].
$\theta$	—	Ángulo de lamina [°].
$\kappa$	—	Referente a curvatura [-].
$\sigma$	—	Esfuerzo normal [MPa].
$\tau$	—	Esfuerzo cortante [MPa].
$\chi$	—	Relación crítica de esfuerzos [-].
$\psi_\chi$	—	Relación de resistencia a la fatiga asociada a la relación de esfuerzos críticos [-].

## Subíndices

$a$	—	Referente a componente alternante.
$C$	—	Referente a resistencia a compresión.
$ca$	—	Referente fuerza cíclica en prueba a fatiga.
$c - mean$	—	Referente fuerza promedio en prueba a fatiga.
$m$	—	Referente al componente medio.
$sp$	—	Referente a fuerza estática de prueba.
$su - lowerlevel$	—	Referente al nivel inferior de fuerza estática última.
$su - upperlevel$	—	Referente al nivel superior de fuerza estática última.
$T$	—	Referente a resistencia a tracción.
1	—	Referente a dirección longitudinal en eje local.
2	—	Referente a dirección transversal en eje local
3	—	Referente a dirección transversal a plano 1-2 en eje local

## Acrónimos y siglas

ABS	—	<i>Acrylonitrile Butadiene Styrene.</i>
CAD	—	<i>Computer Aided Design.</i>
CFL	—	<i>Constant Fatigue Life.</i>
ESAR	—	<i>Energy Storing and Return Prosthetic.</i>
FDM	—	<i>Fused Deposition Modeling.</i>
ISO	—	<i>International Organization for Standardization.</i>
MI	—	Moldeo por inyección.
PA-12	—	Poliamida 12.
PLA	—	<i>Polyactic Acid.</i>
SACH	—	<i>Solid Ankle Cushioned Heel.</i>
SLA	—	<i>Stereolithography .</i>
SLS	—	<i>Selective Laser Sintering.</i>
S-N	—	<i>Stress-Number of Cycles.</i>
3D	—	Tridimensional.

# Capítulo 1

## Introducción

Resulta indudable que la amputación de una extremidad inferior afecta negativamente la calidad de vida de una persona. De acuerdo a datos del Servicio Nacional de Discapacidad cerca de un 1% de la población adulta chilena presenta una ausencia o amputación de alguna de las extremidades [CENADIS \(2022\)](#). Por otro lado, son más de 4000 las personas en Chile que año a año ven mermado su quehacer diario producto de una amputación bajo rodilla, requiriendo una prótesis transtibial que permita en parte recuperar la movilidad del paciente.

El uso de una prótesis repercute de forma positiva en el día a día y la psicología del paciente, otorgando independencia y calidad de vida al usuario. Sin embargo, los costos de estos aditamentos en muchos casos resulta ser prohibitivo, sin considerar los gastos asociados a los especialistas tratantes a los que debe recurrir el paciente cada vez que necesite ajustar su prótesis. Resulta importante entonces, la búsqueda de una solución personalizada y económica que permita el correcto quehacer diario del paciente. Para lo anterior se puede hacer uso de las nuevas tecnologías de manufactura aditiva de impresión 3D en conjunto a materiales compuestos, los cuales permiten el desarrollo de geometría complejas con bajos tiempos de fabricación y altas prestaciones mecánicas.

### 1.1. Justificación del tema

El presente trabajo de investigación y diseño continúa la línea de estudio sobre el comportamiento de prótesis de pie fabricadas mediante métodos de manufactura aditiva desarrollado por el Departamento de Ingeniería Mecánica de la Universidad Técnica Federico Santa María. El estudio previo al trabajo contempla el análisis de una unidad de pie para prótesis transtibial comercial elaborada mediante impresión 3D por sinterización selectiva por láser (SLS), lo anterior analizado mediante normativa ISO:10328 ([Hermosilla \(2021\)](#)).

# Capítulo 2

## Objetivos

El objetivo general de este proyecto es proponer un diseño de unidad de pie para prótesis transtibial fabricada mediante el uso de materiales laminados compuestos e impresión 3D por sinterización selectiva láser. El análisis será realizado a través de modelos computacionales de elementos finitos en combinación con teorías de falla estática y a cargas de fatiga para materiales compuestos. Se busca que el diseño propuesto esté en capacidad de soportar las cargas estáticas y cíclicas indicadas por la normativa ISO:10328.

### 2.1. Objetivos específicos

Como objetivos específicos para este trabajo, se proponen:

- Llevar a cabo una investigación bibliográfica referente a dispositivos protésicos y métodos de fabricación basados en manufactura aditiva.
- Estudiar la normativa internacional aplicable a unidades de prótesis tobillo – pie, en específico la normativa ISO-10328.
- Estudiar el comportamiento y las propiedades mecánicas de materiales utilizados en la sinterización selectiva por láser y compuestos laminados basados en fibras de carbono.
- Realizar un modelo CAD del diseño propuesto y determinar su estado de esfuerzo/deformación mediante modelos de elementos finitos bajo los distintos niveles de carga establecidos por la norma.
- Desarrollar un análisis de confiabilidad y de fatiga bajo condiciones normadas que simulen una situación real de marcha.

# Capítulo 3

## Marco Teórico

### 3.1. Manufactura aditiva y tipos de impresión 3D

En los últimos años la manufactura aditiva ha ganado terreno frente a la manufactura clásica con desprendimiento de viruta. Este tipo de procesos han permitido la creación de elementos con optimización topológica o diseño generativo puesto que facilitan la creación de geometrías complejas difícilmente alcanzables mediante los métodos tradicionales. Por otro, lado estas tecnologías han propiciado la facilidad de fabricar prototipos visuales o funcionales según el tipo de impresión, resultando de alta utilidad al momento de diseñar un producto. Si bien la manufactura aditiva mediante impresión 3D se puede aplicar casi con cualquier material, las aplicaciones más usuales corresponden polímeros termoplásticos, los cuales son utilizados por su versatilidad y costo. Dentro de los más comunes encontramos:

- Ácido poliáctico (PLA)
- Poliamidas (PA)
- Alcohol de polivinilo (PVA)
- Acrilonitrilo butadieno estireno (ABS)

La manufactura mediante impresión 3D puede llevarse a cabo a través distintas y variadas tecnologías, las cuales van acorde con la aplicación buscada, ya sea desde el prototipado básico, hasta el permitir un modelo funcional, o bien un acabado superficial básico y rugoso, hasta uno de alta calidad. Dentro de las tecnologías más comunes se encuentra la deposición de material fundido, FDM por sus siglas en inglés, la adición selectiva por láser o estereolitografía (SLA) o la sinterización selectiva por láser SLS.

### 3.1.1. Deposición de material fundido - FDM

El método de impresión 3D por deposición de material fundido, también conocido como FDM (Fused Deposition Modeling), es una técnica de impresión 3D ampliamente utilizada debido a su bajo costo y facilidad de operación. En este método, se agrega material fundido capa por capa utilizando un extrusor controlado por computadora. El material fundido se deposita sobre una plataforma de impresión en un patrón determinado, que se construye en capas hasta que se completa el objeto final.

Si se compara este tipo de impresión con otros métodos como la estereolitografía (SLA) o el sinterizado selectivo por láser (SLS), una de las desventajas principales es el deficiente acabado superficial del material impreso [Kluska et al. \(2018\)](#), junto a las bajas propiedades mecánicas que vienen estrechamente relacionadas a la simetría ortotrópica dada por la deposición por capas [Casavola et al. \(2016\)](#).

Los materiales más comunes utilizados en la impresión FDM son el acrilonitrilo butadieno estireno (ABS) y el ácido poliláctico (PLA), aunque existen otros materiales disponibles como el policarbonato (PC), el nylon (PA) y el polietileno tereftalato glicol (PETG). También es posible imprimir objetos en múltiples colores utilizando filamentos de diferentes tonalidades o mediante la aplicación de pintura después de la impresión. A pesar de sus limitaciones, la impresión FDM es una técnica valiosa y popular para la producción de prototipos, piezas de uso final y piezas de repuesto. Es una de las tecnologías de impresión 3D más accesibles y versátiles, y puede ser utilizada en una amplia variedad de industrias y aplicaciones.

La figura 3.1 muestra los componentes básicos de esta tecnología.

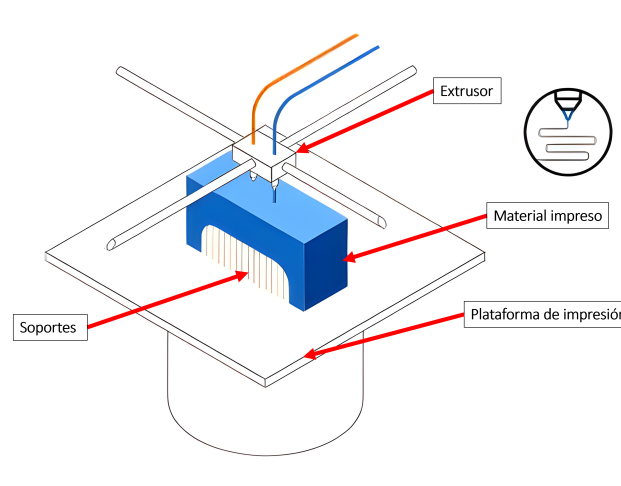


Figura 3.1: Esquema de impresión FDM.

### 3.1.2. Estereolitografía – SLA

La SLA es una tecnología con amplia utilización en la industria. El principio de operación en este caso difiere respecto a FDM. La adición selectiva por láser o estereolitografía es una técnica para la manufactura aditiva capa a capa, cuyo principio de funcionamiento radica en un láser que apunta hacia una resina fotosensible, el cual induce la polimerización de este líquido para transformarlo en un polímero sólido.

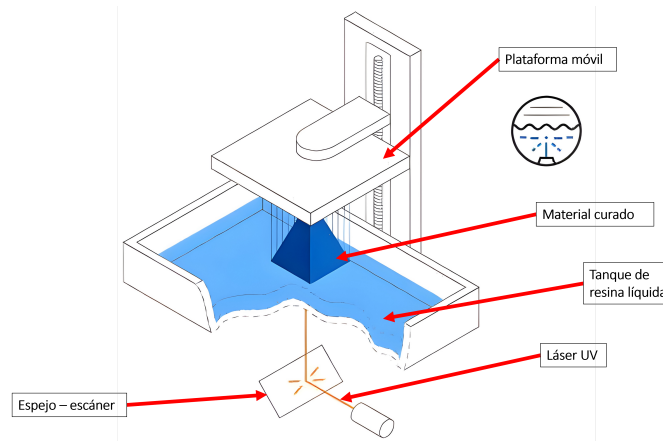


Figura 3.2: Esquema de impresión SLA.

Las principales ventajas de SLA son el poder realizar prototipos funcionales, junto con el buen acabado superficial que se logra mediante este proceso.

Mientras que las desventajas corresponden al laborioso post-procesado que debe realizarse a la impresión para que alcance el acabado superficial óptimo.

La figura 3.2 muestra los componentes básicos de una impresión mediante SLA.

### 3.1.3. Sinterización selectiva por láser – SLS

El proceso de sinterizado selectivo por láser SLS (Selective Laser Sintering), corresponde a una técnica de manufactura aditiva de impresión 3D con un margen de aplicación mucho más especializado respecto a los métodos anteriores. En este método se comienza con una fina capa de material en formato de polvo la cuál es colocada en una plataforma de construcción, dicho polvo es impactado por un láser de alta potencia el cual funde el polímero en las zonas donde se requiera extrusión de acuerdo con el modelo 3D a imprimir. Una vez la capa ha sido formada, la plataforma se mueve hacia abajo y una fina capa de polvo se extiende sobre la capa recién creada repitiendo el proceso hasta la extrusión completa de la pieza.

Dentro de sus principales desventajas se encuentra la alta inversión inicial que debe realizarse para contar con el equipamiento capaz de imprimir de esta forma. Sin embargo, lo anterior se ve amortizado cuando se analizan los costes de producción en masa, los cuales son comparativamente más bajos respecto a otros métodos propiciando su uso en producciones en serie [Kluska et al. \(2018\)](#).

Por otro lado, dentro de las principales ventajas de este método se encuentra la ausencia de soportes para imprimir lo cual supone un importante ahorro en material de impresión. Adicionalmente, y más importante, los elementos impresos mediante esta tecnología tienen excelentes propiedades mecánicas, resultando en material isotrópicos [Mehdipour et al. \(2021\)](#).

Dentro de los materiales comúnmente utilizados en SLS se encuentran la poliamida 11 y 12 (PA-11 – PA-12) junto con la Alumida que corresponde a polvo de nylon más aluminio.

La figura 3.3 muestra de forma gráfica los principales componentes de estas impresoras.

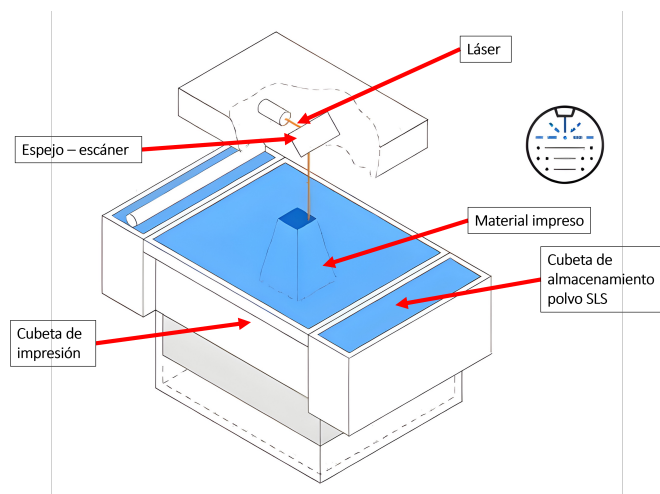
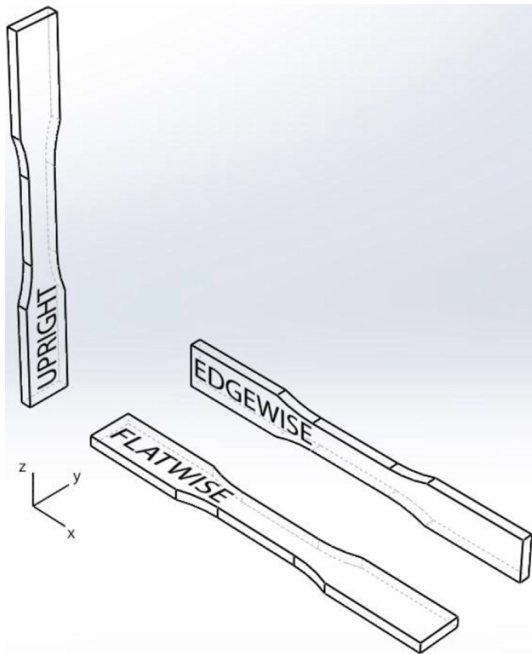


Figura 3.3: Esquema de impresión SLS.

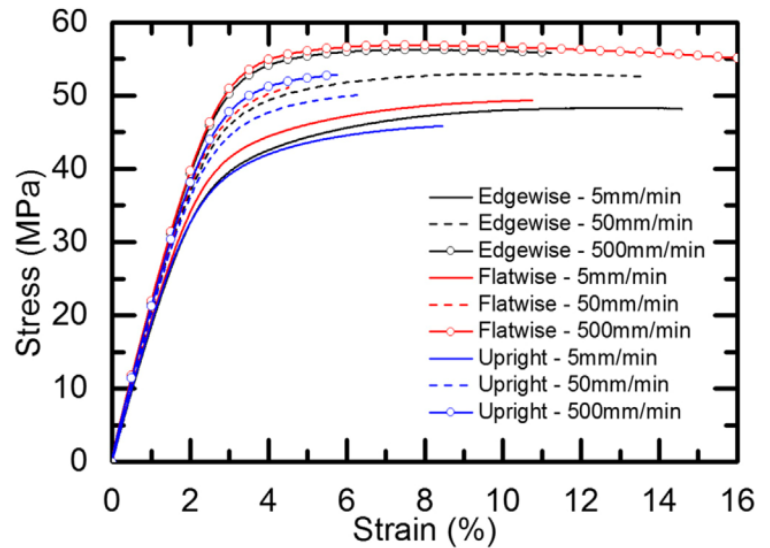
## 3.2. Propiedades mecánicas de la poliamida 12

La PA-12, también conocida como Nylon 12, es un polímero termoplástico que pertenece a la familia de las poliamidas. Es un material sintético que se utiliza en una variedad de aplicaciones debido a sus propiedades mecánicas (resistencia a la abrasión, rigidez), físicas (baja densidad) y químicas (resistencia a ambientes corrosivos). Sus propiedades mecánicas en aplicaciones de sinterizado por láser han sido estudiadas por [Lammens et al. \(2017\)](#) para diferentes velocidades de deformación y orientaciones de impresión, donde se concluyó que el material presenta un comportamiento isotrópico dentro del rango elástico y una tendencia anisotrópica en el rango plástico.

En las figuras 3.4(a) y 3.4(b) se observan las orientaciones de las probetas analizadas junto a las curvas de esfuerzo deformación obtenidas mediante pruebas de tensión uniaxial:



(a) Orientaciones de probetas.



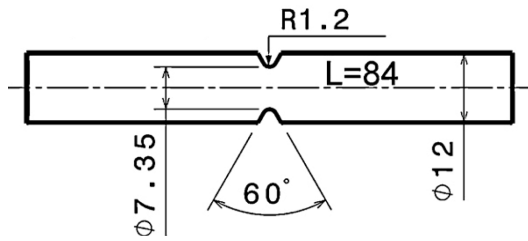
(b) Gráfico esfuerzo - deformación PA-12.

Figura 3.4: Orientaciones y curvas de esfuerzo deformación PA-12 [Lammens et al. \(2017\)](#).

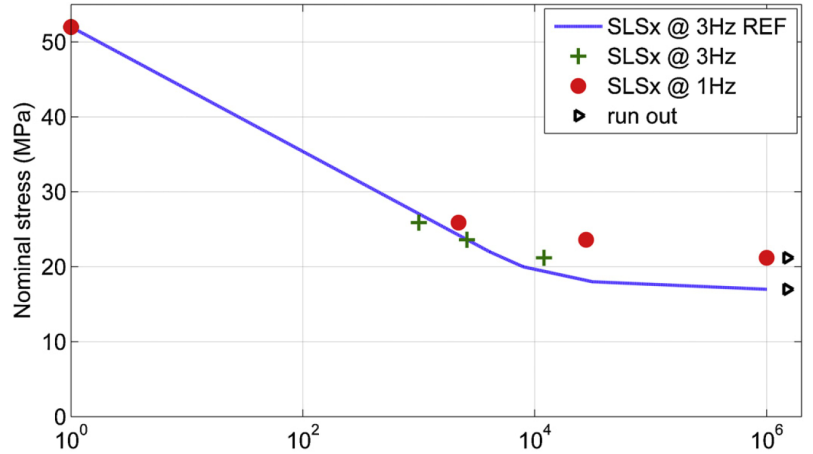
Las propiedades de módulo de Young, coeficiente de Poisson y esfuerzo último para las probetas del tipo planas (flatwise) a una velocidad de deformación de 50[mm/min] de acuerdo a [Lammens et al. \(2017\)](#) son  $E = 2070[MPa]$ ;  $\nu = 0,395[-]$  y  $S_u = 53,22[MPa]$  respectivamente.

De acuerdo a [Lindberg et al. \(2018\)](#), las propiedades mecánicas del PA-12 pueden ser modeladas en software de elementos finitos como un material elasto plástico con endurecimiento isotrópico.

Por otra parte, el comportamiento a fatiga de la PA-12 ha sido descrito por [Van Hooreweder and Kruth \(2014\)](#), donde se comparan el comportamiento de probetas planas y con muesca en régimen de alto ciclaje para materiales impresos mediante sinterizado por láser (SLS) y moldeo por inyección (MI). Las figuras 3.5(a) y 3.5(b) muestran la probeta con muesca analizada y la curva S-N de la poliamida 12 respectivamente para MI y SLS impreso en distintas orientaciones.



(a) Probeta con muesca.



(b) Curva S-N PA-12.

Figura 3.5: Curva S-N para probeta con muesca [Van Hooreweder and Kruth \(2014\)](#).

### 3.3. Normativa

#### 3.3.1. Normativa ISO 10328:2016

Una de las normativas internacionales que rigen los parámetros de diseño para una prótesis de extremidad inferior corresponde a:

- *Prótesis: Ensayo estructural de las prótesis de miembros inferiores. Requisitos y métodos de ensayo (ISO 10328:2016)*

Esta normativa detalla los procedimientos a seguir en los ensayos de resistencia estática y cíclica de las prótesis de miembros inferiores, que normalmente producen cargas combinadas mediante la aplicación de una fuerza de ensayo única. Las cargas combinadas en la probeta corresponden a los valores máximos de los componentes de carga, que normalmente se producen en diferentes momentos durante la postura de marcha. [ISO 10328 \(2016\)](#). Los ensayos descritos en la norma son:

- Ensayos principales estáticos y cíclicos aplicables a todos los componentes.
- Ensayos estáticos y cíclicos independientes de los conjuntos de tobillo-pie y de las unidades de pie, que se aplican a todos los conjuntos de tobillo-pie como componentes individuales, incluyendo las unidades de tobillo o sus fijaciones y todas las unidades de pie como componentes individuales.
- Ensayo estático independiente de resistencia a la rotura en la flexión máxima de la rodilla, sobre las articulaciones de rodilla y los componentes asociados, que se aplican a todas las

unidades de rodilla o conjuntos de rodilla-tibia y componentes adyacentes que normalmente proporcionan la detención de la flexión en las prótesis completas.

- Ensayos independientes estáticos y cíclicos sobre los mecanismos de bloqueo de la rodilla, que se aplican a todos los mecanismos que bloquean la articulación de la rodilla en la posición extendida de la unidad de rodilla o del conjunto de rodilla-tibia.

### 3.3.2. Niveles de carga

La norma estandariza los ensayos a los cuales debe someterse una estructura protésica inferior acorde a la máxima masa corporal del usuario, dividiendo para ello las cargas en 6 niveles.

Tabla 3.1: Niveles de carga [ISO 10328 \(2016\)](#).

Nivel de carga	Masa corporal máxima [kg]
P3	60
P4	80
P5	100
P6	125
P7	150
P8	175

### 3.3.3. Sistema de coordenadas de unidades tobillo - pie

Acorde a la figura 3.6, la normativa [ISO 10328 \(2016\)](#) establece el sistema de referencia para unidades protésicas de pie definiendo los ejes  $f, o, u$ ; donde:

- El eje  $u$  se define en el plano sagital del pie, extendiéndose por el centro efectivo de las articulaciones de tobillo y rodilla, su sentido positivo se define en dirección proximal.
- El eje  $o$  es perpendicular al eje  $u$  y paralelo a al eje de la rodilla, este eje se construye dentro del plano transversal del pie y su sentido positivo es en dirección lateral.
- Por último, el eje  $f$  es perpendicular tanto a  $u$  como a  $o$ , manteniéndose en el plano anatómico transversal y con sentido positivo en dirección anterior.

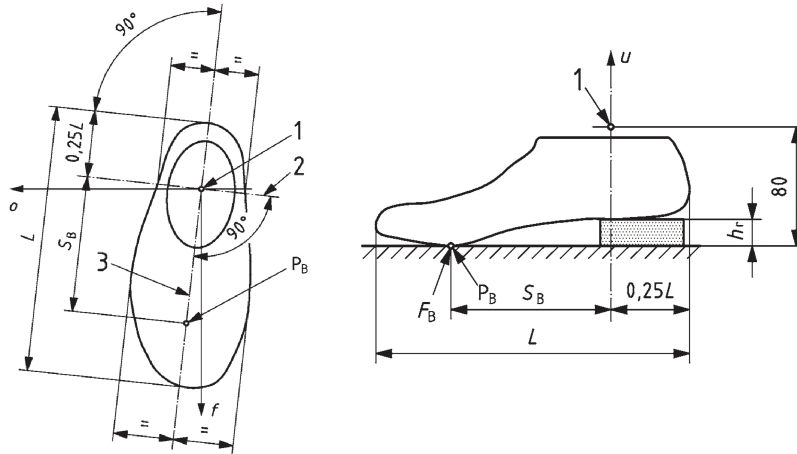


Figura 3.6: Ejes de pie según ISO 10328 (2016).

Con relación al eje  $f$ , acorde a la norma y a la figura 3.7, este se ubicará un ángulo  $\gamma$  respecto a la longitudinal del pie, este eje longitudinal pasa por el centro de la zona más ancha del antepié y equidista a los bordes del pie. Por otra parte, el centro efectivo de la articulación de tobillo siguiendo los planos anatómicos se encuentra en la intersección entre el plano transversal a 80[mm] de altura respecto la base del pie y el plano frontal a 1/4 de la longitud total del pie medida desde la parte posterior.

### 3.3.4. Posicionamiento de prótesis y valores de carga

Las muestras de ensayo de un dispositivo tobillo-pie o de una unidad de pie se alinearán dentro del sistema de coordenadas apropiado descritos en la sección 10.5.2 de la normativa. En la figura 3.7 se muestra el posicionamiento de la prótesis en los bancos de prueba, donde las fuerza sobre el antepié  $F_1$  se aplica a un ángulo  $\beta$  de la vertical, mientras que para la fuerza sobre el talón se aplica una fuerza  $F_2$  aplicada a un ángulo  $\alpha$  de la vertical.

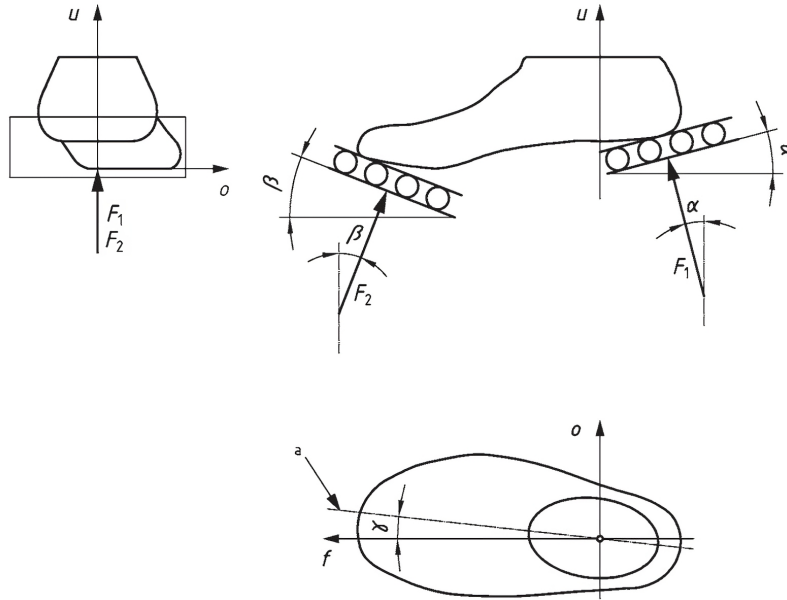


Figura 3.7: Posición de la prótesis en bancos de prueba.

Los valores de los ángulos para los niveles P3,P4 y P5, se muestran en la tabla 3.2

Tabla 3.2: Ángulos de carga para pruebas - niveles P3,P4 y P5.

Ángulo	Grados
$\alpha$	15°
$\beta$	20°
$\gamma$	7°

En cuanto a los valores de cargas, estos se muestran en la figura 3.9, donde se observan las distintas sollicitaciones que debe soportar la prótesis tanto para las pruebas bajo carga estática como a fatiga. Así mismo, se enumera la cantidad de ciclos que debe soportar el dispositivo.

Test procedure and test load			Unit	Test loading level ( $P_x$ ) and test loading condition ( $F_{1x}, F_{2x}$ )					
				P5		P4		P3	
				Heel loading, $F_{1x}$	Fore-foot loading, $F_{2x}$	Heel loading, $F_{1x}$	Fore-foot loading, $F_{2x}$	Heel loading, $F_{1x}$	Fore-foot loading, $F_{2x}$
Static test procedure	Proof test force	$F_{1sp}, F_{2sp}$	N	2 240	2 240	2 065	2 065	1 610	1 610
	Ultimate static test force	$F_{1su}, \text{lower level}, F_{2su}, \text{lower level}$	N	3 360	3 360	3 098	3 098	2 415	2 415
		$F_{1su}, \text{upper level}, F_{2su}, \text{upper level}$	N	4 480	4 480	4 130	4 130	3 220	3 220
Cyclic test procedure	Minimum test force	$F_{1cmin}, F_{2cmin}$	N	50					
	Cyclic range	$F_{1cr}, F_{2cr}$	N	1 280	1 280	1 180	1 180	920	920
	Maximum test force	$F_{1cmax}, F_{2cmax}$ $F_{xcmax} = F_{xcmin} + F_{xcr}$	N	1 330	1 330	1 230	1 230	970	970
	Mean test force	$F_{1cmean}, F_{2cmean}$ $F_{xcmean} = 0,5 (F_{xcmin} + F_{xcmax})$	N	690	690	640	640	510	510
	Cyclic amplitude	$F_{1ca}, F_{2ca}$ $F_{xca} = 0,5 F_{xcr}$	N	640	640	590	590	460	460
	Final static force	$F_{1fin}, F_{2fin}$ $F_{xfin} = F_{xsp}$	N	2 240	2 240	2 065	2 065	1 610	1 610
	Prescribed number of cycles		1	$2 \times 10^6$					

Figura 3.8: Fuerzas de ensayo para dispositivos tobillo-pie y unidades de pie - ISO 10328 (2016).

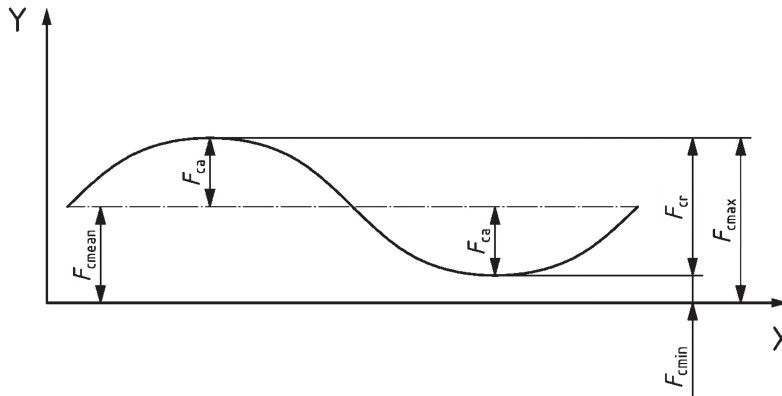


Figura 3.9: Parámetros de carga para prueba a fatiga - ISO 10328 (2016).

### 3.3.5. Certificación de una prótesis

Una prótesis recibe la certificación ISO 10328:2016 cuando cumple de manera satisfactoria 3 diferentes pruebas:

1. **Prueba de fuerza estática:** Se debe comenzar aplicando una fuerza sobre el talón con

un incremento de 100 a 250 [N/s], hasta lograr el valor de fuerza  $F_{1sp}$ , magnitud que debe mantenerse por  $30 \pm 3$ [s], una vez se cumple el tiempo debe reducirse la fuerza a cero. El mismo procedimiento aplica para la misma muestra sobre el antepié, donde se debe alcanzar el valor de  $F_{2sp}$ . Una vez se cumplen ambos requisitos, se considera como cumplida la prueba estática.

2. **Prueba de fuerza última estática:** En esta prueba, se comienza aplicando la fuerza sobre el talón, con un incremento que varía de 100 a 250[N/s], la fuerza se aumenta hasta que la muestra falle o se alcance el valor de  $F_{1su-upper-level}$ . El mismo procedimiento aplica para una muestra diferente sobre el antepié, donde esta vez debe alcanzarse el valor  $F_{2su-upper-level}$ .

La prueba se considera como cumplida si:

- Ambas muestras llegan a  $F_{su-upper-level}$  sin presentar fallas.
- Ambas muestras llegan a  $F_{su-lower-level}$  sin presentar fallas, solo en caso de haber fallado al intentar llegar a  $F_{su-upperlevel}$ .

3. **Prueba cíclica a fatiga:** Consiste en la aplicación de manera alternada de fuerzas sobre el talón y antepié para una misma muestra de prueba. La prueba comienza aplicando una fuerza máxima de prueba  $F_{1cmax}$  sobre el talón para luego una vez retirada dicha carga, aplicar la carga respectiva máxima de prueba  $F_{2cmax}$  sobre el antepié.

Posterior se da comienzo a la prueba cíclica en si, aplicando las cargas  $F_{1c}(t)$  y  $F_{2c}(t)$  sobre talón y antepié respectivamente en una frecuencia que va desde los 0,5[Hz] a los 3[Hz], el patrón de carga se mantiene hasta lograr la cifra de  $2 \cdot 10^6$  ciclos. Durante el desarrollo de esta prueba, es permitido el cambiar componentes o piezas de la prótesis que normalmente debiesen ser reemplazadas en uso normal. El historial de cargas debe seguir una estructura del tipo  $F_{1c}(t) = F_{1c,mean} + F_{1ca} \sin(\omega t)$ , mientras que  $F_{2c}(t) = F_{2c,mean} + F_{2ca} \sin(\omega t - \pi)$ , con la finalidad de desfazar una onda  $180^\circ$  de la otra.

Por último, la prueba finaliza con una carga  $F_{1fin}$  o  $F_{2fin}$  sobre el talón y antepié respectivamente con incrementos de 100 a 250 [N/s] manteniendo los valores de carga por  $30 \pm 3$  [s]. Si dos muestras cumplen los pasos anterior, se considera que la prótesis cumple la prueba de fatiga.

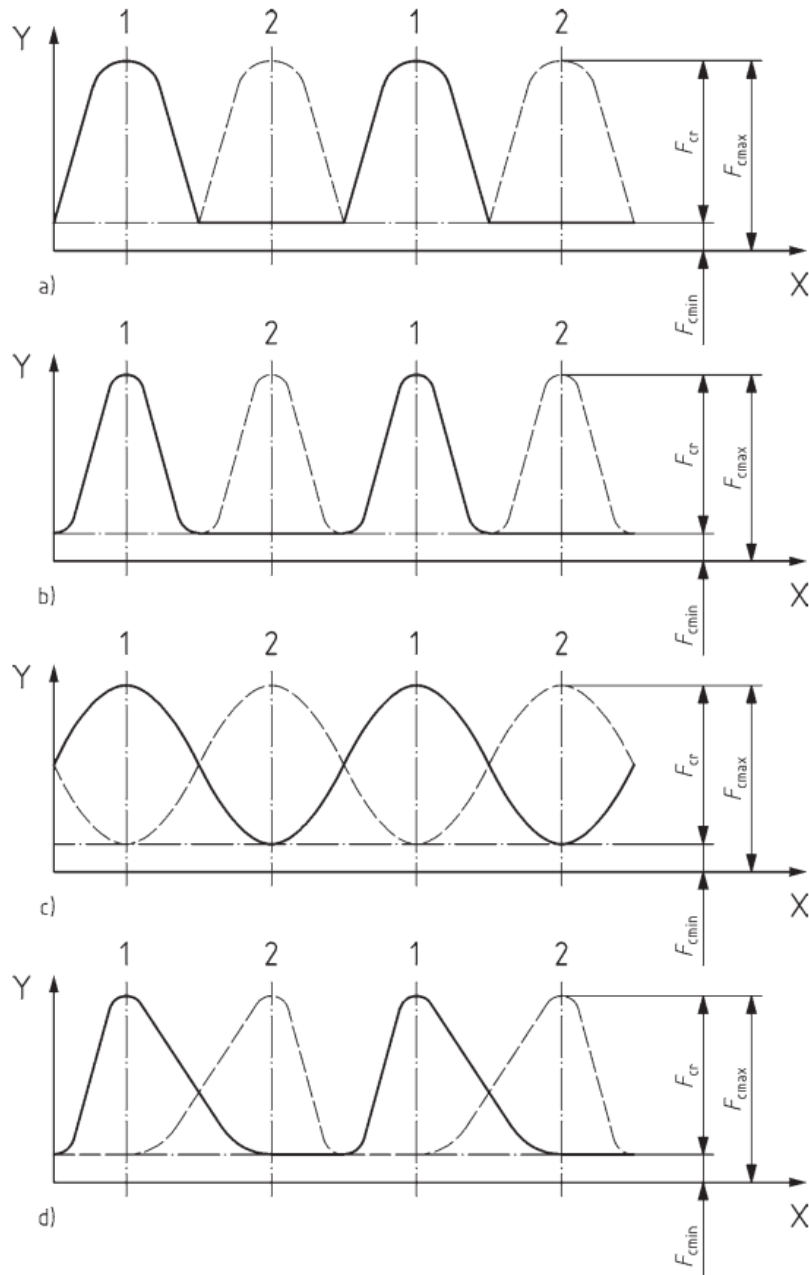


Figura 3.10: Ciclos de carga posibles para la prueba cíclica- [ISO 10328 \(2016\)](#)

### 3.4. Estado del arte

#### 3.4.1. Optimización topológica de prótesis transtibial

Uno de los problemas de las prótesis actuales radica en el hecho de que los pacientes deben someterse a reiteradas visitas a especialistas ortopédicos con la finalidad de ir ajustando paula-

tinamente los elementos de la prótesis con tal de buscar el bienestar del paciente. Una solución a lo anterior es el empleo un flujo de trabajo basado en fotogrametría de la pierna dañada del paciente que permita elaborar mediante impresión 3D un dispositivo monoblock completamente personalizado para el individuo, resultando en una menor tasa de idas al especialista ortopédico [De Vivo Nicoloso et al. \(2021\)](#).

El flujo de trabajo comienza con la obtención de la geometría del remanente de la pierna del paciente mediante técnicas de fotogrametría, donde se escanea la pierna del individuo con el liner puesto con la finalidad de lograr una superficie suave de escaneo, dicha información propicia la elaboración de un socket personalizado para el paciente.

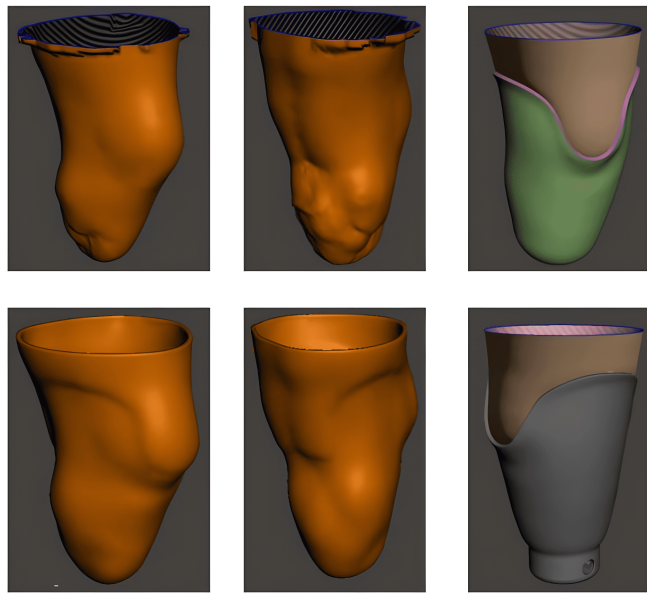


Figura 3.11: Proceso de elaboración de socket personalizado [De Vivo Nicoloso et al. \(2021\)](#).

Con respecto al pylon que une el socket con la unidad de pie, esta se diseña de forma generativa considerando las condiciones de carga descritas en la norma ISO 10328:2006, para el nivel P5 de dicha versión de la norma, el el pylon debe ser capaz de resistir una carga de prueba de 1395[N] mientras que una carga última estática de 3220[N]. Para el diseño del este componente se toma como material la poliamida 12 (Nylon 12), las propiedades consideradas se muestran en la tabla 3.3:

E [Gpa]	$S_y$ [MPa]	$\nu$ [-]
1,4	60	0,41

Tabla 3.3: Propiedades mecánicas de PA 12 en [De Vivo Nicoloso et al. \(2021\)](#).

De izquierda a derecha, la figura 3.12 muestra el escaneo del miembro sano del cual se obtiene

el volumen para realizar el diseño generativo, el resultado de dicha optimización topológica y una versión más suave de este resultado.

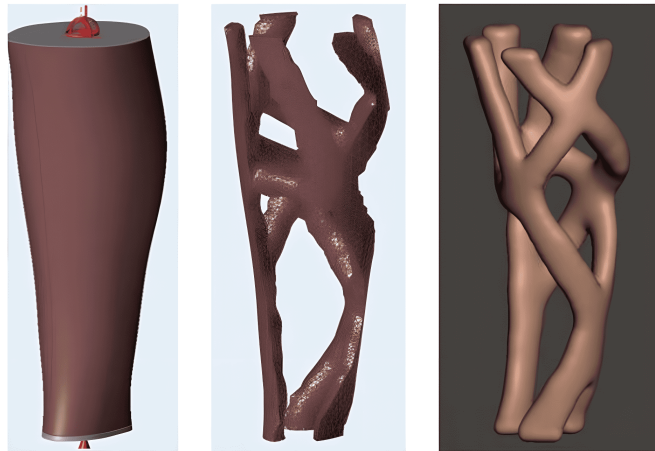


Figura 3.12: Pylon obtenido mediante optimización topológica [De Vivo Nicoloso et al. \(2021\)](#).

Por otra parte, el dispositivo pie-tobillo se diseña tomando en cuenta las cargas comunicadas por la norma ISO 10328:2006, que, para esta parte define que la prótesis debe resistir en el antepié una fuerza estática de 2240[N]. El diseño de la unidad de pie y el pilón estructural se realizan utilizando PA-12 como material y el empleo de la optimización topológica.

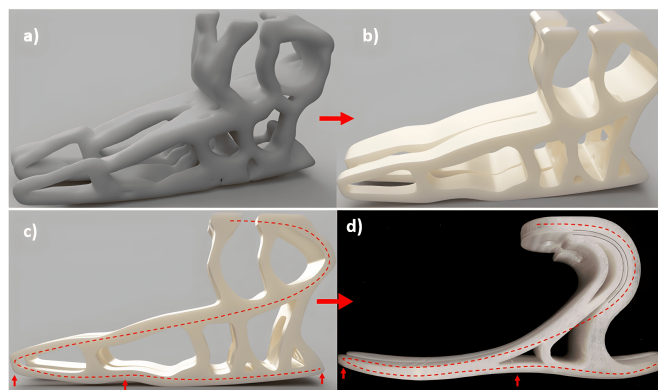


Figura 3.13: Unidad pie-tobillo obtenida mediante optimización topológica [De Vivo Nicoloso et al. \(2021\)](#).

La prótesis monoblock permite reducir en promedio el costo de la prótesis de 10310[USD] a 550[USD] , mientras que el tiempo requerido para la producción de esta se ve reducido desde un promedio de 14 días a unas 16 horas.



Figura 3.14: Prótesis monoblock personalizada impresa en PA-12 [De Vivo Nicoloso et al. \(2021\)](#).

### 3.4.2. Prótesis por impresión multi jet (MJF)

En este estudio se opta por la tecnología de impresión MJF para la fabricación de la solución protésica propuesta. La bibliografía sobre pies protésicos impresos en 3D sugiere que la delaminación de las capas y la anisotropía del material son las principales causas de falla. El método de impresión multi jet no presenta problemas de delaminación de capas y proporciona una distribución del material casi isotrópica en la pieza impresa, lo que le confiere una mayor resistencia a la rotura. [Kathrotiya et al. \(2023\)](#).

Como bases de diseño se consideran:

- Adaptabilidad del dispositivo.
- Proveer de soporte y estabilidad al usuario.
- Comodidad y respuesta a diversos escenarios de carga.
- Que sea de bajo peso.
- Accesibilidad mediante su bajo costo.

El material empleado en la prótesis corresponde a PA-12, con propiedades de densidad  $\rho = 1,01[g/cm^3]$ , modulo de elasticidad  $E = 1700[MPa]$ , modulo de Poisson  $\nu = 0,394[-]$  y una resistencia última de  $S_u = 48[MPa]$ . En cuanto al concepto de diseño de la unidad pie-tóbillo se basa en los dispositivos de respuesta dinámica ESAR por sus siglas en inglés (Energy storing and return prosthetic). Diseño que se caracteriza por componerse de una placa principal, y una placa S. En la figura 3.15 se muestra las partes genéricas de estas prótesis.

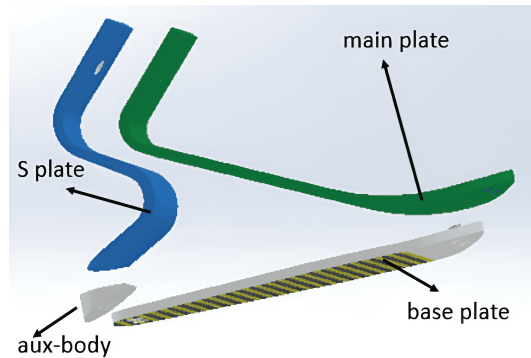


Figura 3.15: Partes prótesis ESAR genérica [Kathrotiya et al. \(2023\)](#).

De donde diferentes conceptos son elaborados en base al pie ESAR. Estos diseños son sometidos al nivel de carga P5 descrito por la normativa ISO 10328, es decir una fuerza de 2240[N] en el antepié. Al comparar los resultados y mediante una matriz de decisión, se opta por el concepto (d) de la figura

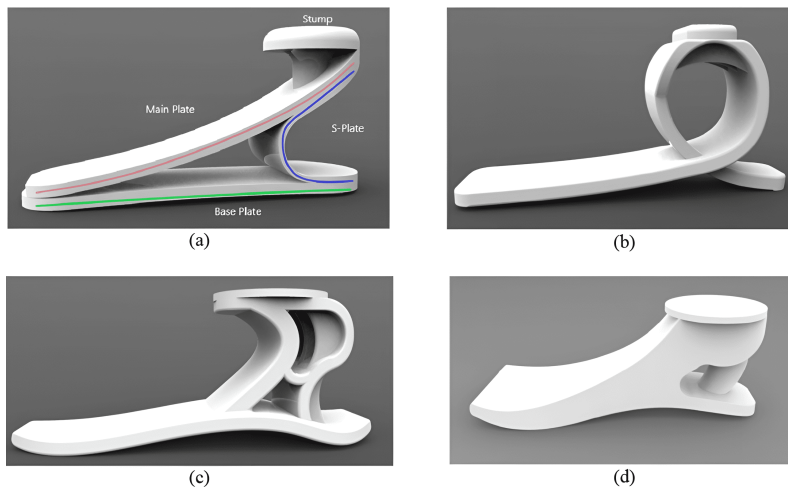


Figura 3.16: Conceptos en base a pie ESAR [Kathrotiya et al. \(2023\)](#).

Por último, con la finalidad de optimizar el peso, a la prótesis se le aplican distintas variantes de estructura reticular, resultando en que la versión con menor deformación de acuerdo a ensayos ISO

10328 corresponde a un reticulado octagonal 10x10 1mm 2,5D. La figura 3.17 muestra la unidad pie-tobillo reticulada.

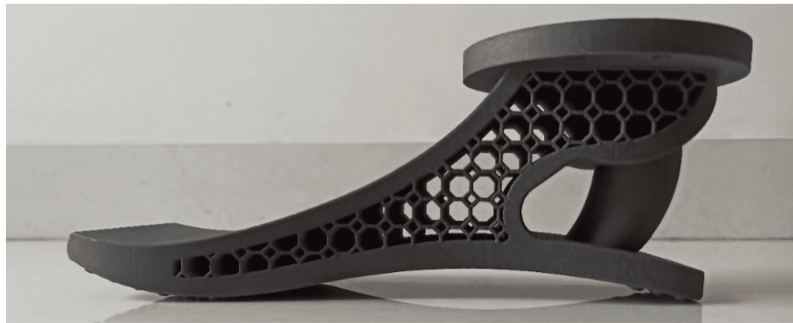


Figura 3.17: Prótesis de pie elaborada por MFJ [Kathrotiya et al. \(2023\)](#).

### 3.5. Consideraciones de elasticidad

Dada la anisotropía presente en los materiales compuestos, antes de introducir dichos materiales, resulta importante mencionar algunos conceptos básicos utilizados en teoría de elasticidad.

#### 3.5.1. Notación de Voigt

Corresponde a una convención de nomenclatura comúnmente utilizada en las áreas de mecánica de materiales para denotar las componentes de un tensor de segundo orden simétrico, pudiendo representarse mediante un vector.

Sea el tensor de esfuerzos:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_{xx} & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_{yy} & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_{zz} \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

El cual dada su simetría puede ser reducido al vector de 6 variables en notación de Voigt, como se muestra a continuación:

$$\boldsymbol{\sigma} = (\sigma_{xx}, \sigma_{yy}, \sigma_{zz}, \sigma_{yz}, \sigma_{xz}, \sigma_{xy}) = (\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6)$$

Por otro lado, la regla mnemotécnica asociada a esta notación es la siguiente:

$$\boldsymbol{\sigma} = \begin{bmatrix} \sigma_x^1 & \sigma_{xy}^6 & \sigma_{xz}^5 \\ \cdot & \sigma_{yy}^2 & \sigma_{yz}^4 \\ \cdot & \cdot & \sigma_{zz}^3 \end{bmatrix}$$

### 3.5.2. Tensor de deformación

Concepto ampliamente utilizado en la mecánica de materiales y elasticidad lineal, que corresponde a un tensor simétrico de segundo orden que describe la deformación que experimenta un sólido bajo una sollicitación de cargas dada.

Este tensor se utiliza en conjunto al de esfuerzos para describir el comportamiento mecánico de los materiales, lo anterior mediante la Ley de Hooke.

En aplicaciones de pequeñas deformaciones, se utiliza el tensor infinitesimal de Cauchy, el cuál se compone de:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} \quad (3.2)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} \quad (3.3)$$

La deducción de lo anterior se realiza mediante el análisis de un elemento diferencial de material, utilizando aproximaciones de Taylor como pasos intermedios. Para el caso 2D, la geometría a analizar se muestra en la figura 3.18.

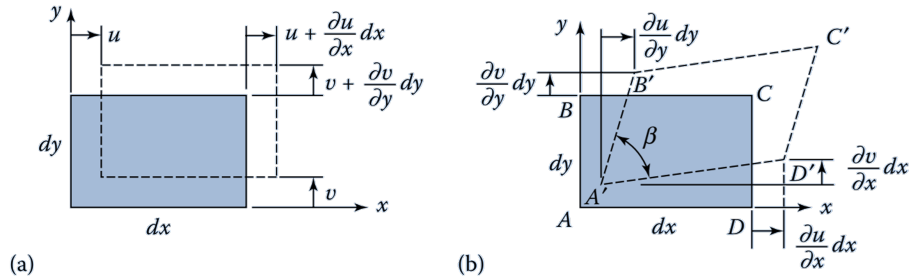


Figura 3.18: Análisis de elemento 2D con deformación normal y cortante Ugural (2017).

### 3.5.3. Material anisotrópico

Los materiales anisotrópicos son aquellos que presentan una respuesta mecánica diferente según la dirección de aplicación de la carga, lo cual se debe a la configuración molecular del material. Para describir el comportamiento de esta clase de materiales son necesarias 21 constantes elásticas. La Ley de Hooke para estos casos queda de la forma:

$$\begin{bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_z \\ \sigma_{yz} \\ \sigma_{zx} \\ \sigma_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & C_{14} & C_{15} & C_{16} \\ C_{21} & C_{22} & C_{23} & C_{24} & C_{25} & C_{26} \\ C_{31} & C_{32} & C_{33} & C_{34} & C_{35} & C_{36} \\ C_{41} & C_{42} & C_{43} & C_{44} & C_{45} & C_{46} \\ C_{51} & C_{52} & C_{53} & C_{54} & C_{55} & C_{56} \\ C_{61} & C_{62} & C_{63} & C_{64} & C_{65} & C_{66} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \epsilon_z \\ 2\epsilon_{yz} \\ 2\epsilon_{zx} \\ 2\epsilon_{xy} \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Sin embargo, en la igualdad anterior se observan 36 constantes elásticas del material, la reducción a 21 se obtiene al considerar que la matriz es simétrica, por tanto, se cumple la equivalencia:

$$C_{ij} = C_{ji}, \quad i, j = 1, 2, 3, 4, 5, 6. \quad (3.5)$$

### 3.5.4. Material monoclinico

Corresponden a un tipo de material anisotrópico en la cual una de sus tres dimensiones posee una simetría de reflexión de sus propiedades, es decir, las propiedades mecánicas en una dirección son iguales. Para el caso particular de simetría respecto al plano  $x - y$ , la matriz de transformación es de la forma:

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

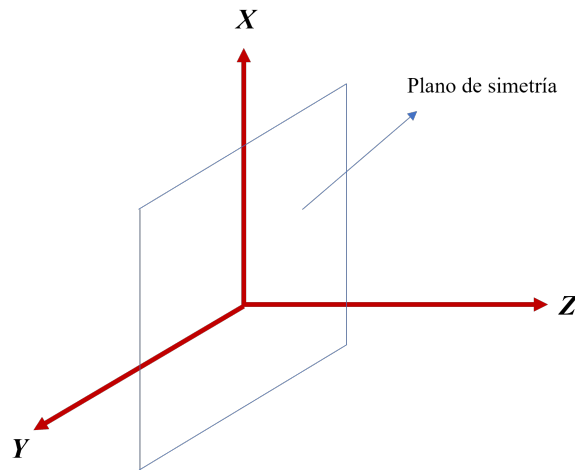


Figura 3.19: Plano de simetría x-y.

Bajo la transformación anterior, se establecen las siguientes igualdades de las constantes elásti-

cas:

$$C_{i4} = C_{i5} = C_{46} = C_{56} = 0; \quad i = 1, 2, 3$$

Así pues, la matriz de constantes elásticas que describen un material monoclinico con una simetría en el plano  $x - y$ , cumple la siguiente forma:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & C_{16} \\ \cdot & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & C_{26} \\ \cdot & \cdot & C_{33} & 0 & 0 & C_{36} \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & C_{45} & 0 \\ \cdot & -s- & \cdot & \cdot & C_{55} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

Quedando así el material definido con 13 constantes elásticas independientes [Sadd \(2021\)](#).

### 3.5.5. Material ortótropo

Si se continúa imponiendo simetrías, en este caso 3 planos de simetría ortogonales, se obtiene un material ortótropo. Dentro de este tipo de materiales se encuentra la madera o compuestos de fibras reforzados.

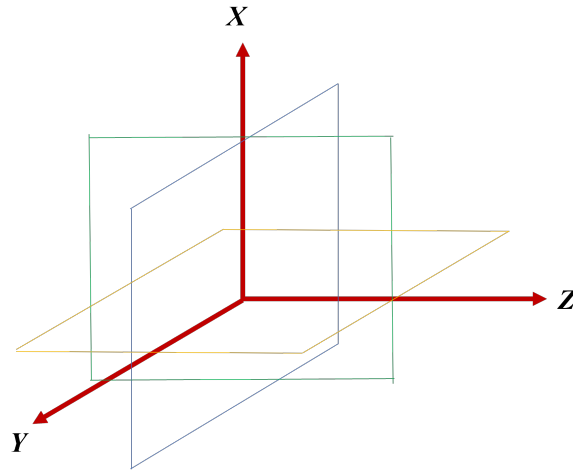


Figura 3.20: Caso de 3 planos de simetría ortogonales.

Al imponer las simetrías desde el caso monoclinico, se logran igualar las siguientes constantes elásticas:

$$C_{16} = C_{26} = C_{36} = C_{45} = 0$$

Con las consideraciones anteriores, la matriz de constantes elásticas queda reducida a:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & C_{22} & C_{23} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & 0 & 0 \\ \cdot & -s- & \cdot & \cdot & C_{55} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & C_{66} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

Quedando de esta forma un material ortótropo definido por 9 constantes elásticas independientes [Sadd \(2021\)](#).

### 3.5.6. Material transversalmente isotrópico

Finalmente, si se impone simetría respecto a un eje, nos encontramos con los llamados materiales transversalmente isotrópicos.

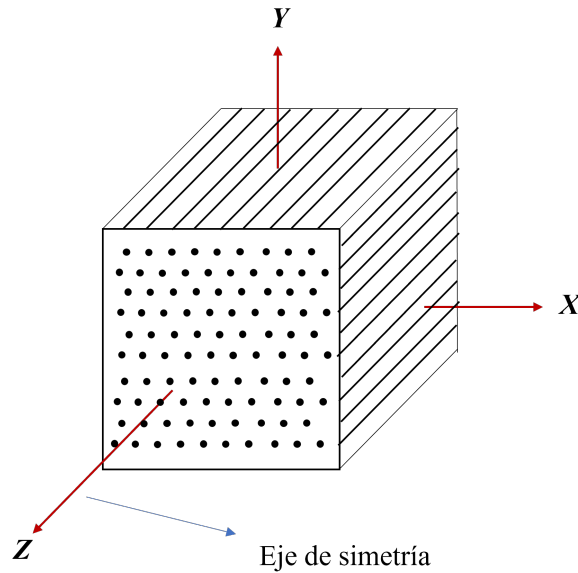


Figura 3.21: Eje de simetría Z

Por ejemplo, la transformación para una rotación  $\theta$  arbitraria respecto al eje Z, viene dada por:

$$Q_{ij} = \begin{bmatrix} \text{Cos}(\theta) & \text{Sin}(\theta) & 0 \\ -\text{Sin}(\theta) & \text{Cos}(\theta) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Para un caso de isotropía transversal respecto al plano basal  $x - y$ , la matriz de coeficientes de constantes elásticas queda como:

$$C_{ij} = \begin{bmatrix} C_{11} & C_{12} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & C_{22} & C_{13} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & C_{33} & 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & C_{44} & 0 & 0 \\ \cdot & -s- & \cdot & \cdot & C_{44} & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \frac{C_{11}-C_{12}}{2} \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

Quedando así, para este caso de isotropía transversal el material definido por tan solo 5 constantes elásticas independientes [Sadd \(2021\)](#).

### 3.6. Teoría clásica de placas (CPT)

Las placas corresponden a elementos tridimensionales planos cuyo espesor resulta ser muy pequeño comparado con sus dimensiones en las otras direcciones. Entre los ejemplos más comunes de placas tenemos las tapas de alcantarilla, tejados de edificios, blindaje de tanques, fuselajes de aviones, misiles, submarinos, etc. [Ugural \(2017\)](#). El estudio de estos elementos constituye la base del entendimiento de los materiales compuestos. Para el análisis de estos elementos se consideran pequeñas deflexiones.

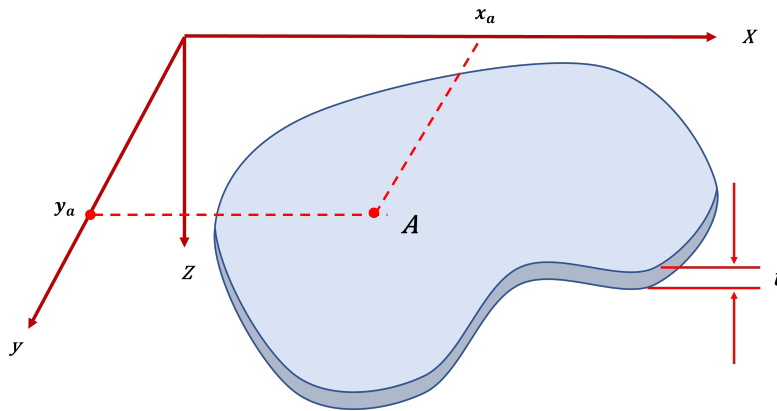


Figura 3.22: Ejemplo de placa.

La teoría clásica de placas, CPT por sus siglas en inglés (Classical plates theory) surge de los esfuerzos de diferentes matemáticos, científicos e ingenieros a través de los años con importantes nombres como Navier, Kirchhoff o Lévy quienes propiciaron el avance teórico de esta ciencia, mientras que Galerkin y Wahl aunaron esfuerzos en lograr aproximaciones numéricas para estos elementos.

### 3.6.1. Suposiciones en teoría de placas

Para efectos de estudio de estos cuerpos se considera una placa plana libre de carga, en donde el plano  $xy$  coincide con el plano medio de este, la deflexión en  $z$  es cero y las componentes de desplazamiento en un punto ocurren en las direcciones  $x, y, z$  y son denotadas por  $u, v, w$  respectivamente.

Las suposiciones principales de la teoría de Kirchhoff-Lóve de placas son:

1. La deflexión del plano medio es pequeña comparado con el espesor de la placa.
2. EL plano medio se mantiene neutro a la deformación.
3. El plano ( $mn$ ) inicialmente normal al plano medio se mantiene normal a este después de la deformación.
4. El esfuerzo  $\sigma_z$  normal al plano medio es pequeño comparado con las otras componentes de esfuerzo, por lo cual puede ser ignorado.

Lo anterior son las hipótesis de Kirchhoff para placas y corresponden a la extensión de la teoría de Euler - Bernoulli de vigas en 1D.

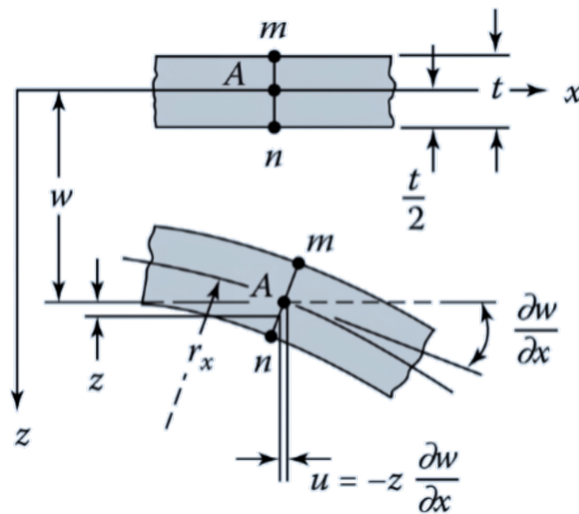


Figura 3.23: Placa antes y después de la deformación - CPT. Ugural (2017)

### 3.6.2. Relaciones de deformación y curvaturas

Bajo las hipótesis de Kirchhoff, las relaciones del tensor de deformación se reducen a:

$$\epsilon_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad \epsilon_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad \gamma_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \quad (3.9)$$

$$\epsilon_{zz} = \frac{\partial w}{\partial z} = 0, \quad \gamma_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} = 0, \quad \gamma_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0 \quad (3.10)$$

Si integramos la expresión de  $\epsilon_z$ , se obtiene que el campo desplazamiento en dirección  $w$ , no tiene dependencia de la dirección  $z$ , es decir:

$$w = w(x, y) \quad (3.11)$$

Sabiendo lo anterior, al integrar las expresiones para deformación por cortante en las direcciones  $yz$  y  $xz$  se obtiene:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial z} + u_0(x, y), \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} + v_0(x, y) \quad (3.12)$$

Donde  $u_0(x, y)$  y  $v_0(x, y)$  representan los valores de  $u$  y  $v$  en el plano medio respectivamente. Gracias al punto 2 de las hipótesis de Kirchhoff se puede decir que  $u_0 = v_0 = 0$ , por tanto, la ecuación anterior queda:

$$u = -z \frac{\partial w}{\partial z}, \quad v = -z \frac{\partial w}{\partial y} \quad (3.13)$$

Si sustituimos lo anterior en las expresiones de 3.9, se obtiene que:

$$\epsilon_x = -z \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \quad \epsilon_y = -z \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}, \quad \gamma_{xy} = -2z \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y}, \quad (3.14)$$

Podemos observar que para cualquier punto de una placa de espesor  $t$ , la deformación varía linealmente con la coordenada  $z$ .

Ahora bien, las expresiones recién vistas pueden ser reescritas en términos de la curvatura de la placa, las cuales corresponden al recíproco del radio de curvatura, estas pueden ser escritas como:

$$\frac{1}{r_x} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial x} \right) = \kappa_x \quad (3.15)$$

$$\frac{1}{r_y} = \frac{\partial}{\partial y} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \kappa_y \quad (3.16)$$

$$\frac{1}{r_{xy}} = \frac{\partial}{\partial x} \left( \frac{\partial w}{\partial y} \right) = \kappa_{xy} = \kappa_{yx} \quad (3.17)$$

La interpretación física de los radios de curvatura puede ser observada en la figura 3.6.1, mien-

tras que para  $r_{xy}$  la interpretación se muestra a continuación:

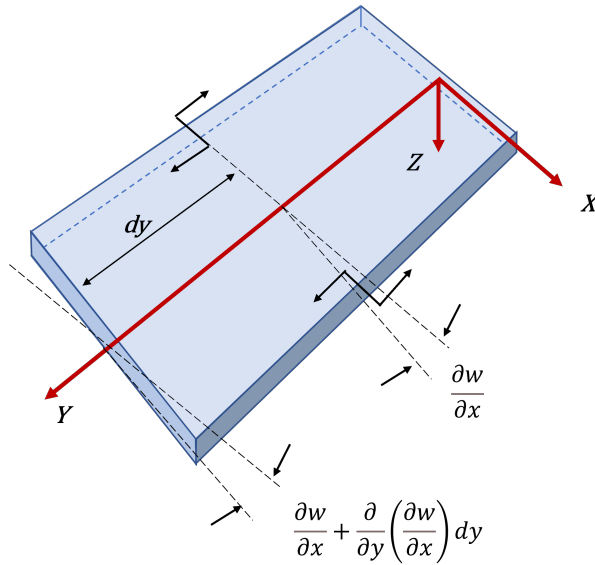


Figura 3.24: Curvatura xy Ugural (2017).

Es decir, la curvatura cruzada hace referencia a la torsión que experimenta la placa delgada. En base a lo anterior, al reemplazar en las relaciones de deformación 3.14, obtenemos:

$$\epsilon_x = -zk_x, \quad \epsilon_y = -zk_y, \quad \gamma_{xy} = -2zk_{xy} \quad (3.18)$$

### 3.6.3. Esfuerzos en CPT

La Ley de Hooke generalizada para un material isótropo elástico lineal homogéneo corresponde a:

$$\epsilon_x = \frac{1}{E}[\sigma_x - \nu(\sigma_y + \sigma_z)], \quad \gamma_{xy} = \frac{\tau_{xy}}{G} \quad (3.19)$$

$$\epsilon_y = \frac{1}{E}[\sigma_y - \nu(\sigma_x + \sigma_z)], \quad \gamma_{xz} = \frac{\tau_{xz}}{G} \quad (3.20)$$

$$\epsilon_z = \frac{1}{E}[\sigma_z - \nu(\sigma_x + \sigma_y)], \quad \gamma_{yz} = \frac{\tau_{yz}}{G} \quad (3.21)$$

Expresiones que son reducidas al aplicar las implicancias de las hipótesis de Kirchhoff  $\epsilon_z =$

$\gamma_{yz} = \gamma_{xz} = 0$  a:

$$\sigma_x = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_x + \nu\epsilon_y) \quad (3.22)$$

$$\sigma_y = \frac{E}{1 - \nu^2} (\epsilon_y + \nu\epsilon_x) \quad (3.23)$$

$$\tau_{xy} = G\gamma_{xy} \quad (3.24)$$

Estas a su vez pueden ser nuevamente reescritas considerando las curvaturas de la expresión 3.15, quedando:

$$\sigma_x = \frac{Ez}{1 - \nu^2} (\kappa_x + \nu\kappa_y) = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.25)$$

$$\sigma_y = \frac{Ez}{1 - \nu^2} (\kappa_y + \nu\kappa_x) = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.26)$$

$$\tau_{xy} = \frac{Ez}{1 - \nu^2} \kappa_{xy} = -\frac{Ez}{1 - \nu^2} \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.27)$$

De donde se observa que la distribución de los esfuerzos sigue un comportamiento lineal respecto a la coordenada  $z$  del sistema, es decir, el comportamiento es lineal a lo largo del espesor de la placa. Conforme a la acotación anterior, y considerando los distintos supuestos de esta teoría, podemos representar los esfuerzos en un elemento diferencial de placa como sigue:

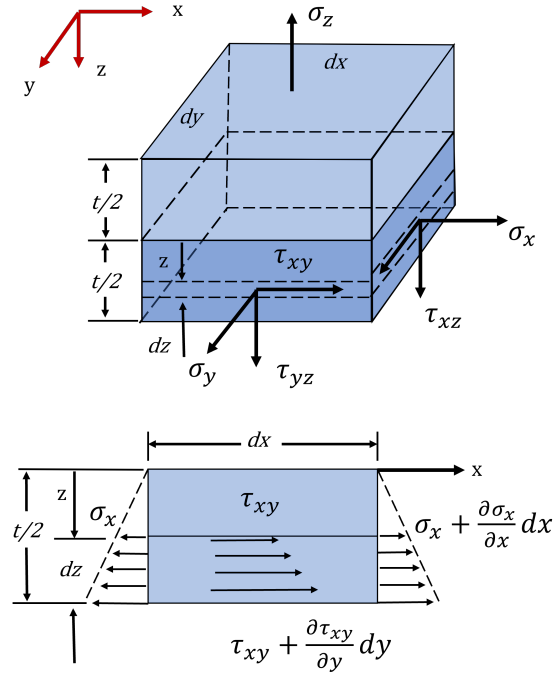


Figura 3.25: Distribución de esfuerzos en una placa Ugal (2017).

Los esfuerzos distribuidos a lo largo del espesor de la placa producen momentos flectores y de torsión, además de fuerzas por corte. Las resultantes de estas distribuciones por unidad de longitud son:

$$\int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dy dz = dy \int_{-t/2}^{t/2} z \sigma_x dz = M_x dy \quad (3.28)$$

De forma similar, el resto de las expresiones:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (3.29)$$

Por otra parte, para los cortantes:

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (3.30)$$

Al resolver y reemplazar las expresiones de los esfuerzos:

$$M_x = -D(\kappa_x + \nu\kappa_y) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} \right) \quad (3.31)$$

$$M_y = -D(\kappa_y + \nu\kappa_x) = -D \left( \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \nu \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} \right) \quad (3.32)$$

$$M_{xy} = -D(1 - \nu)\kappa_{xy} = -D(1 - \nu) \frac{\partial^2 w}{\partial x \partial y} \quad (3.33)$$

Donde:

$$D = \frac{Et^3}{12(1 - \nu^2)} \quad (3.34)$$

El cuál corresponde a la rigidez a la flexión de la placa.

### 3.6.4. Variación de esfuerzos a lo largo de una placa

Sea el siguiente DCL de una placa:

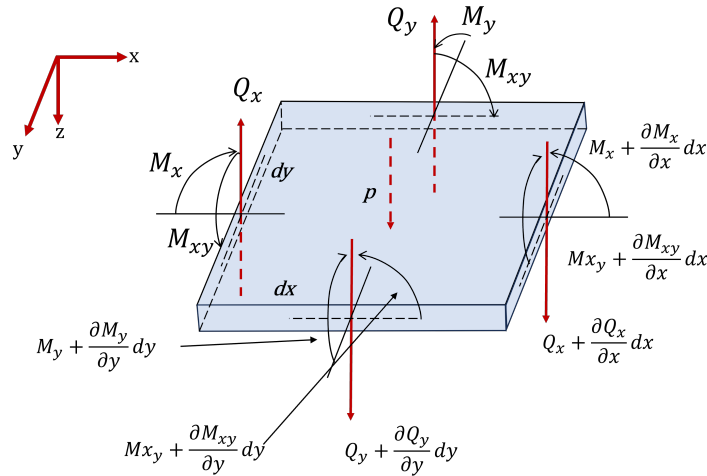


Figura 3.26: Diagrama de cuerpo libre de placa Ugural (2017).

Al realizar el equilibrio de la placa, se obtiene que:

$$\sum F_z = 0 : \quad \frac{\partial Q_x}{\partial x} + \frac{\partial Q_y}{\partial y} + p = 0 \quad (3.35)$$

$$\sum M_{e_j e-x} = 0 : \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial M_y}{\partial y} - Q_y = 0 \quad (3.36)$$

$$\sum M_{e_j e-x} = 0 : \quad \frac{\partial M_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial M_x}{\partial x} - Q_x = 0 \quad (3.37)$$

La estática es capaz de proporcionarnos 3 ecuaciones de equilibrio independiente, sin embargo, la cantidad de incógnitas referentes al equilibrio de la placa corresponde a 5 ( $M_x, M_y, M_{xy}, Q_x$  y  $Q_y$ ). Por tanto, se debe recurrir a la ecuación de deflexión de placas.

### 3.6.5. Ecuación de deflexión de placas

Para obtener la ecuación de deflexión, se deben despejar los valores de  $Q_x$  y  $Q_y$  de las ecuaciones de equilibrio de momentos en  $x$  e  $y$  respectivamente, para luego, reemplazar en la ecuación de equilibrio de fuerzas, con ello se obtiene la ecuación diferencial de equilibrio de placas.

$$\frac{\partial^2 M_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 M_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 M_y}{\partial y^2} = -p \quad (3.38)$$

La ecuación 3.38 puede ser reescrita en términos de curvaturas como:

$$\frac{\partial^2 \kappa_x}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 \kappa_{xy}}{\partial x \partial y} + \frac{\partial^2 \kappa_y}{\partial y^2} = \frac{p}{D} \quad (3.39)$$

Como a su vez, en términos de los desplazamientos:

$$\frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \frac{p}{D} \quad (3.40)$$

La ecuación 3.40 puede ser escrita de forma resumida en función el operador  $\nabla^4$ , el cual representa el operador bi-armónico como sigue:

$$\nabla^4 w = \frac{p}{D} \quad (3.41)$$

## 3.7. Teoría de materiales compuestos

Un material compuesto se forma por la combinación de dos o más materiales distintos para formar un nuevo material con propiedades mejoradas. Por ejemplo, las rocas se combinan con cemento para hacer hormigón, que es tan resistente como las rocas que contiene pero puede moldearse con más facilidad que la roca. Aunque las propiedades mejoradas del hormigón son la resistencia y la facilidad de fabricación, la mayoría de las propiedades físicas, químicas y de procesamiento pueden mejorarse mediante una combinación adecuada de materiales. Los materiales compuestos más comunes son los fabricados con fibras resistentes unidas por un aglutinante. Los materiales compuestos más antiguos son naturales. Por ejemplo, la madera está formada por fibras de celulosa en una matriz de lignina [Barbero \(2017a\)](#). Por otra parte, incluso los huesos humanos pueden ser considerados como un material compuesto, dado que su estructura consiste de fibras minerales con alto módulo de elasticidad incrustadas en una matriz orgánica permeada de poros llena de líquidos de bajo módulo de elasticidad [Piekarski \(1973\)](#).

### 3.7.1. Sistema de coordenadas

En teoría de materiales compuestos son dos los sistemas de coordenadas utilizados, uno referente al sistema de la lámina, el cual es un sistema local con ejes 1, 2 y 3, siendo la dirección 1 la paralela al sentido de las fibras, y por otra parte, se tiene el sistema coordinado del laminado, el cual representa el sistema global de referencia y es denotado por los ejes  $x, y, z$ .

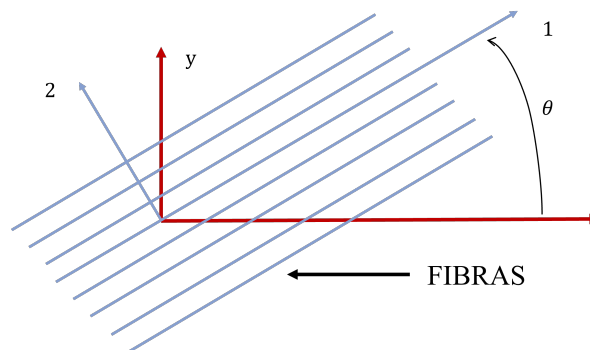


Figura 3.27: Distribución de esfuerzos en una placa.

### 3.7.2. Teoría de la deformación por cortante de 1<sup>er</sup> orden (FSDT)

Si bien la CPT es una muy buena aproximación para una placa isotrópica, la aproximación comienza a distanciarse de la realidad cuando se empiezan a considerar materiales con diferentes tipos de simetrías, o en su defecto, cuando se integran diferentes placas con distintas orientaciones para dar paso a un laminado. Es por ello que surge la teoría de la deformación por cortante de 1<sup>er</sup>

o "First-Order Shear Deformation Theory" (FSDT) correspondiente a una extensión de la teoría clásica de placas, esta teoría a diferencia de CPT, considera en su análisis los valores de  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$ , siendo una de las teorías de mayor extensión dentro de softwares comerciales de elementos finitos Barbero (2017b).

Los supuestos de FSDT son los siguientes:

1. La línea AD originalmente recta y perpendicular al plano neutro se mantiene recta. Lo anterior implica que  $\gamma_{xz}$  y  $\gamma_{yz}$  son constantes a lo largo del espesor.
2. El largo de AD se mantiene constante. Lo anterior implica que  $\epsilon_z \approx 0$ .

En este caso, la geometría de la deformación cambia ligeramente a:

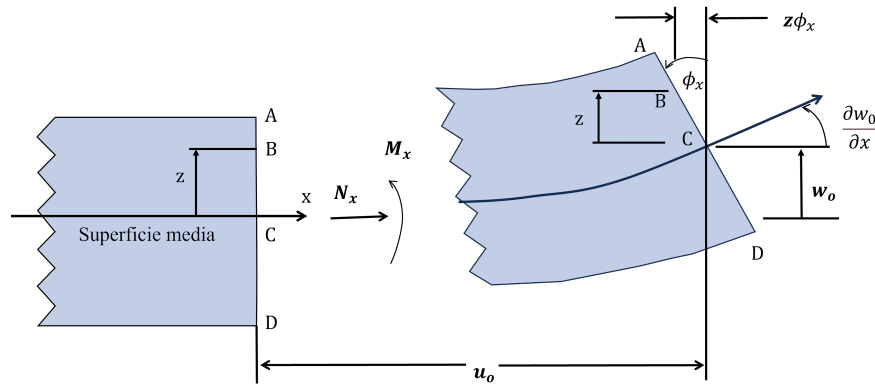


Figura 3.28: Placa antes y después de la deformación - FSDT.

Los desplazamientos para cualquier punto a lo largo del espesor corresponden a:

$$u(x, y, z) = u_0(x, y) - z\phi_x(x, y) \quad (3.42)$$

$$v(x, y, z) = v_0(x, y) - z\phi_y(x, y) \quad (3.43)$$

Sin embargo, tal como en CPT, el desplazamiento  $w$  no depende de la coordenada  $z$  resultando:

$$w(x, y, z) = w_0(x, y) \quad (3.44)$$

Con estas nuevas consideraciones, el tensor de deformaciones unitarias puede ser reescrito como:

$$\epsilon_x(x, y, z) = \frac{\partial u_0}{\partial x} - z \frac{\partial \phi_x}{\partial x} \quad (3.45)$$

$$\epsilon_y(x, y, z) = \frac{\partial v_0}{\partial y} - z \frac{\partial \phi_y}{\partial y} \quad (3.46)$$

$$\gamma_{xy}(x, y, z) = \frac{\partial u_0}{\partial y} + \frac{\partial v_0}{\partial x} - z \left( \frac{\partial \phi_x}{\partial y} + \frac{\partial \phi_y}{\partial x} \right) \quad (3.47)$$

$$\gamma_{yz}(x, y) = -\phi_y + \frac{\partial w_0}{\partial y} \quad (3.48)$$

$$\gamma_{xz}(x, y) = -\phi_x + \frac{\partial w_0}{\partial x} \quad (3.49)$$

Nótese que para el caso FSDT, tan solo la componente  $\epsilon_z$  es la que se mantiene en cero. De las tres primeras expresiones anteriores 3.45, se puede escribir:

$$\begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \gamma_{xy}^0 \end{Bmatrix} - z \begin{Bmatrix} \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.50)$$

Los valores  $\epsilon_x^0, \epsilon_y^0$  y  $\gamma_{xy}^0$  representan las deformaciones del plano medio, mientras que los valores  $\kappa_x, \kappa_y$  y  $\kappa_{xy}$  representan las curvaturas por flexión en los primeros dos casos y torsión en este último respectivamente. Por último, los valores  $\gamma_{yz}, \gamma_{xz}$  son las deformaciones transversales del laminado.

Ahora bien, tal como en CPT, los esfuerzos distribuidos a lo largo del espesor de la placa producen momentos flectores y de torsión, además de fuerzas normales y por corte. Los resultados de estas distribuciones por unidad de longitud corresponden a:

- Fuerzas normales (en plano laminado):

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} dz \quad (3.51)$$

- Fuerzas cortantes (fuera de plano laminado):

$$\begin{Bmatrix} Q_x \\ Q_y \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix} dz \quad (3.52)$$

- Momentos flectores-torsores:

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \int_{-t/2}^{t/2} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix} z dz \quad (3.53)$$

Sin embargo, es sabido que un laminado no lo compone una sola lámina, sino que un stack de estas, donde su distribución se muestra en la figura 3.29.

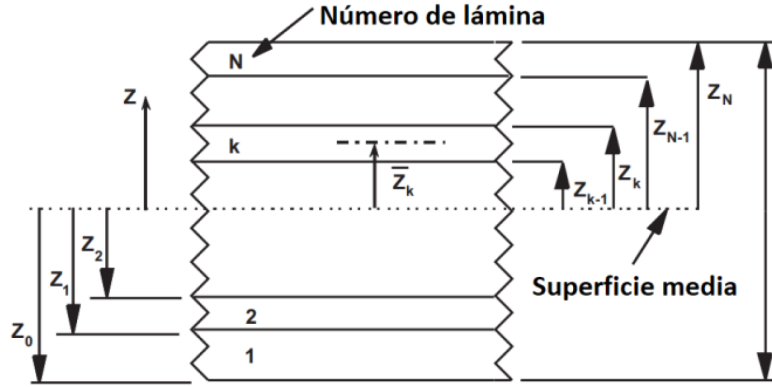


Figura 3.29: Geometría de un laminado de N láminas [Barbero \(2017b\)](#).

Por tanto, la versión de estas ecuaciones que consideran todas las láminas es de la forma:

- Fuerzas normales (en plano laminado):

$$\begin{Bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k dz \quad (3.54)$$

- Fuerzas cortantes (fuera de plano laminado):

$$\begin{Bmatrix} V_x \\ V_y \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \tau_{xz} \\ \tau_{yz} \end{Bmatrix}^k dz \quad (3.55)$$

- Momentos flectores - torsores

$$\begin{Bmatrix} M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{Bmatrix} = \sum_{k=1}^N \int_{z_{k-1}}^{z_k} \begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \tau_{xy} \end{Bmatrix}^k z dz \quad (3.56)$$

### 3.7.3. Esfuerzos en FSDT

En el plano coordenado de la  $k$  –ésima lámina, los esfuerzos son de la forma:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{11} & Q_{12} & 0 \\ Q_{12} & Q_{22} & 0 \\ 0 & 0 & Q_{66} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix}^k \quad (3.57)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} Q_{44} & 0 \\ 0 & Q_{55} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{Bmatrix}^k \quad (3.58)$$

Siendo  $Q$  las matrices de rigidez reducidas en el plano de la lámina, las cuales surgen de la matriz de constantes elásticas para un material transversalmente isotrópico. A modo de ejemplo:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_6 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1/\Delta & \nu_{12}E_2/\Delta & 0 \\ \nu_{12}E_2/\Delta & E_2/\Delta & 0 \\ 0 & 0 & G_{12} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \gamma_6 \end{Bmatrix} \quad (3.59)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_4 \\ \sigma_5 \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{23} & 0 \\ 0 & G_{13} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_4 \\ \gamma_5 \end{Bmatrix} \quad (3.60)$$

Siendo:

$$\Delta = 1 - \nu_{12}\nu_{21} = 1 - \nu_{12}^2 \frac{E_2}{E_1} \quad (3.61)$$

Sin embargo, las expresiones 3.59 solo tienen rango de validez para los ejes locales de una lámina. Para llevarlo a los ejes  $x, y$  del laminado, se debe realizar una rotación a los tensores, obteniéndose:

$$\begin{Bmatrix} \sigma_x \\ \sigma_y \\ \sigma_{xy} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \overline{Q_{11}} & \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{16}} \\ \overline{Q_{12}} & \overline{Q_{22}} & \overline{Q_{26}} \\ \overline{Q_{16}} & \overline{Q_{26}} & \overline{Q_{66}} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \epsilon_x \\ \epsilon_y \\ \gamma_{xy} \end{Bmatrix}^k \quad (3.62)$$

$$\begin{Bmatrix} \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} \end{Bmatrix}^k = \begin{bmatrix} \overline{Q_{44}^*} & \overline{Q_{45}^*} \\ \overline{Q_{45}^*} & \overline{Q_{55}^*} \end{bmatrix}^k \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix}^k \quad (3.63)$$

Reemplazando las expresiones de deformación de la ecuación 3.50 en la ecuación 3.62 y el resultado de esto en las ecuaciones de fuerzas internas 3.54, 3.55 y 3.56, se obtiene la expresión:

$$\begin{bmatrix} N_x \\ N_y \\ N_{xy} \\ M_x \\ M_y \\ M_{xy} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{16} & B_{11} & B_{12} & B_{16} \\ A_{12} & A_{22} & A_{26} & B_{12} & B_{22} & B_{26} \\ A_{16} & A_{26} & A_{66} & B_{16} & B_{26} & B_{66} \\ B_{11} & B_{12} & B_{16} & D_{11} & D_{12} & D_{16} \\ B_{11} & B_{22} & B_{26} & D_{11} & D_{22} & D_{26} \\ B_{16} & B_{26} & B_{66} & D_{16} & D_{26} & D_{66} \end{bmatrix} = \begin{Bmatrix} \epsilon_x^0 \\ \epsilon_y^0 \\ \epsilon_{xy}^0 \\ \kappa_x \\ \kappa_y \\ \kappa_{xy} \end{Bmatrix} \quad (3.64)$$

Donde:

$$\begin{aligned} A_{ij} &= \sum_{k=1}^N (\overline{Q_{ij}})_k (z_k - z_{k-1}) = \sum_{k=1}^N (\overline{Q_{ij}})_k t_k; & i, j = 1, 2, 6 \\ B_{ij} &= -\frac{1}{2} \sum_{k=1}^N (\overline{Q_{ij}})_k (z_k^2 - z_{k-1}^2) = -\sum_{k=1}^N (\overline{Q_{ij}})_k t_k \bar{z}_k; & i, j = 1, 2, 6 \\ D_{ij} &= -\frac{1}{3} \sum_{k=1}^N (\overline{Q_{ij}})_k (z_k^3 - z_{k-1}^3) = -\sum_{k=1}^N (\overline{Q_{ij}})_k (t_k \bar{z}_k^2 + t_k^3/12); & i, j = 1, 2, 6 \end{aligned} \quad (3.65)$$

Donde  $\bar{z}_k = (z_k + z_{k-1})/2$  corresponde a la coordenada del plano medio de la  $k$ -ésima lamina. De forma similar, para los componentes de cortante:

$$\begin{Bmatrix} V_y \\ V_x \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} H_{44} & H_{45} \\ H_{45} & H_{55} \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \gamma_{yz} \\ \gamma_{xz} \end{Bmatrix} \quad (3.66)$$

Donde:

$$H_{ij} = -\frac{5}{4} \sum_{k=1}^N (\overline{Q_{ij}^*})_k \left[ t_k - \frac{4}{t^2} (t_k \bar{z}_k^2 + t_k^3/12) \right]; \quad i, j = 4, 5 \quad (3.67)$$

### 3.7.4. Obtención de $\overline{Q_{ij}}$

La matriz de rigidez normal se obtiene al aplicar la matriz de transformación usual:

$$[T(\theta)] = \begin{bmatrix} m^2 & n^2 & 2mn \\ n^2 & m^2 & -2mn \\ -mn & mn & m^2 - n^2 \end{bmatrix} \quad (3.68)$$

Siendo:

$$m = \cos(\theta) \quad n = \sen(\theta) \quad (3.69)$$

Con lo anterior

$$[\overline{Q_{ij}}] = [T(\theta)][Q][T(-\theta)]^T \quad (3.70)$$

Por otro lado, para  $\overline{Q}_{ij}^*$ , la matriz de transformación es:

$$[a] = \begin{bmatrix} m & n \\ -n & m \end{bmatrix} \quad (3.71)$$

Dando la transformación:

$$[\overline{Q}_{ij}^*] = [a][Q^*][a]^T \quad (3.72)$$

### 3.7.5. Nomenclatura de laminados compuestos

Una forma de describir un apilamiento de láminas de un material compuesto es mediante las orientaciones relativas de las fibras en dichas láminas respecto al eje longitudinal del compuesto. Así pues y a modo de ejemplo un apilamiento que tenga por notación  $[0/45]$  quiere decir que posee dos capas, una primera lámina con las fibras orientadas a  $0^\circ$  y una segunda con fibras orientadas a  $45^\circ$  respecto a la longitudinal. Ahora bien, en base a lo anterior considere los siguientes ejemplos:

- $[0/45]_S$ :  
El subíndice  $S$  quiere decir que luego de la configuración  $[0/45]$  prosigue una simetría tipo espejo respecto a la última lámina. Si se expande la notación queda de la forma  $[0/45/45/0]$ . El ejemplo de este caso se observa en la figura 3.30(a).
- $[0/45]_{2S}$  :  
Cuando se tiene un número  $n$  por subíndice, denota que dicha configuración se repite  $n$  veces, posteriormente al ser acompañado por una  $S$  se procede a realizar una simetría de tipo espejo a lo obtenido. En este caso, la notación extendida es de la forma  $[0/45/0/45/45/0/45/0]$  compuesto por 8 láminas. El ejemplo de este caso se observa en la figura 3.30(b).
- $\{[0/45]_{2S}\}_2$ :  
Por último, si la configuración se agrupa por un paréntesis mayor como el del ejemplo, quiere decir que el apilamiento se repite  $n$  veces. En este caso la notación extendida sería  $[0/45/0/45/45/0/45/0/0/45/0/45/45/0/45/0]$  resultando en un total de 16 láminas. El ejemplo de este caso se observa en la figura 3.30(c).

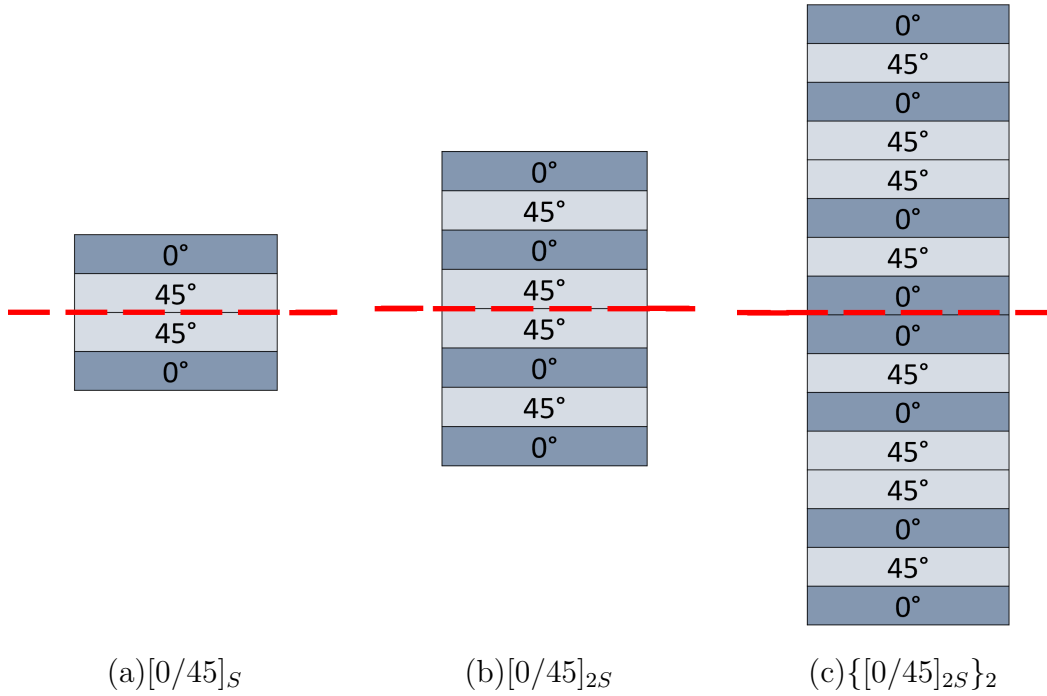


Figura 3.30: Ejemplos de apilamiento en laminados

### 3.8. Criterios de falla de Tsai - Wu

El criterio de Tsai-Wu corresponde a una teoría utilizada en la predicción de la falla en materiales compuestos bajo cargas de naturaleza multiaxial. El criterio en su desarrollo captura las propiedades del material que varían con la dirección (anisotropías) teniendo en cuenta las resistencias normales del material a tensión y compresión, como la resistencia al corte. La expresión generalizada de la superficie de falla del criterio sigue la forma (Tsai and Wu (1971)):

$$F_i \sigma_i + F_{ij} \sigma_i \sigma_j = 1 \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.73)$$

La ecuación 3.73 se encuentra en notación indexada, la cual puede expandirse obteniéndose:

$$\begin{aligned}
& F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3 + F_4\sigma_4 + F_5\sigma_5 + F_6\sigma_6 \\
& + F_{11}\sigma_1^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2F_{13}\sigma_1\sigma_3 + 2F_{14}\sigma_1\sigma_4 + 2F_{15}\sigma_1\sigma_5 + 2F_{16}\sigma_1\sigma_6 \\
& + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 + 2F_{24}\sigma_2\sigma_4 + 2F_{25}\sigma_2\sigma_5 + 2F_{26}\sigma_2\sigma_6 \\
& + F_{33}\sigma_3^2 + 2F_{34}\sigma_3\sigma_4 + 2F_{35}\sigma_3\sigma_5 + 2F_{36}\sigma_3\sigma_6 \\
& + F_{44}\sigma_4^2 + 2F_{45}\sigma_4\sigma_5 + 2F_{46}\sigma_4\sigma_6 \\
& + F_{55}\sigma_5^2 + 2F_{56}\sigma_5\sigma_6 \\
& + F_{66}\sigma_6^2 = 1 \quad (3.74)
\end{aligned}$$

Por tanto, la expresión general 3.73 de Tsai-Wu implica el cálculo de 27 coeficientes, 6 debido a  $F_i$  y 21 debido a los términos interactivos  $F_{ij}$  [Tsai and Wu \(1971\)](#).

Ahora bien, si el material presenta algún tipo de simetría, cabe la posibilidad de anular parte de los coeficientes, por ejemplo, para un material ortotrópico los valores  $F_4$ ,  $F_5$  y  $F_6$  son nulos. Por otra parte, el criterio para ésta simetría supone el desacoplamiento entre las resistencias normales y de corte, por lo que las componentes  $F_{16}$ ,  $F_{45}$ ,  $F_{56}$  y  $F_{64}$  son nulos. Bajo todas las consideraciones anteriores, la expresión 3.74 se reduce a:

$$\begin{aligned}
& F_1\sigma_1 + F_2\sigma_2 + F_3\sigma_3 \\
& + F_{11}\sigma_1^2 + 2F_{12}\sigma_1\sigma_2 + 2F_{13}\sigma_1\sigma_3 \\
& + F_{22}\sigma_2^2 + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 \\
& + F_{33}\sigma_3^2 \\
& + F_{44}\sigma_4^2 \\
& + F_{55}\sigma_5^2 \\
& + F_{66}\sigma_6^2 = 1 \quad (3.75)
\end{aligned}$$

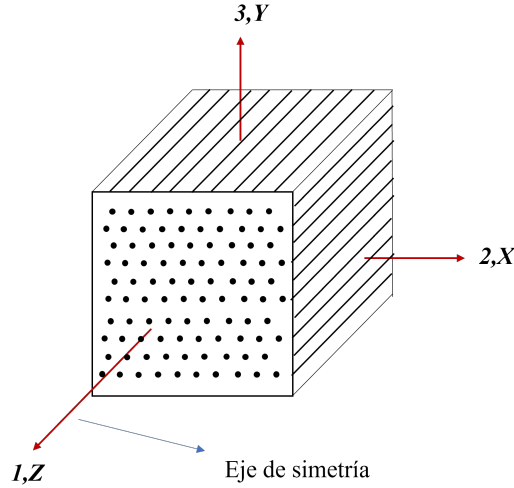


Figura 3.31: Material con isotropía transversal en plano 2-3.

Por último, para un material con isotropía transversal respecto al plano basal 2 – 3 como de la figura 3.31, se cumple la siguiente igualdad entre índices:

$$F_2 = F_3, \quad F_{12} = F_{13}, \quad F_{22} = F_{33}, \quad F_{55} = F_{66} \quad (3.76)$$

Con dichas consideraciones, el criterio de Tsai-Wu para un material isotrópico transversal se escribe como:

$$F_{11}\sigma_1^2 + F_{22}[\sigma_2^2 + \sigma_3^2] + F_{44}\sigma_4^2 + F_{66}[\sigma_5^2 + \sigma_6^2] + 2F_{12}[\sigma_1\sigma_2 + \sigma_1\sigma_3] + 2F_{23}\sigma_2\sigma_3 + F_1\sigma_1 + F_2[\sigma_2 + \sigma_3] = 1 \quad (3.77)$$

### 3.8.1. Coeficientes de interacción

Para determinar los coeficientes  $F_1, F_2, F_{11}, F_{22}, F_{44}, F_{66}, F_{12}$  y  $F_{23}$  se realizan distintos ensayos virtuales en direcciones convenientes al material teniendo en cuenta los 5 parámetros de resistencia del material, los cuales son:

- Las resistencias normal del material a tracción en dirección de las fibras  $X_T$  y en dirección perpendicular a ellas  $Y_T$ .
- Las resistencias a compresión del material en dirección de las fibras  $X_C$  y en dirección perpendicular a ellas  $Y_C$ .
- La resistencia al corte del material  $S$ .

Para la obtención de los coeficientes  $F_1$  y  $F_{11}$  se impone un ensayo a tracción en la dirección de las fibras, con un valor de esfuerzo igual a la resistencia a la tracción en la dirección mencionada:

$$\sigma_1 = X_T, \quad \sigma_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, 6 \quad (3.78)$$

La ecuación 3.77 se reduce a:

$$F_{11}X_T^2 + F_1X_T = 1 \quad (3.79)$$

Ahora bien, realizando el mismo ensayo pero a compresión:

$$\sigma_1 = -X_C, \quad \sigma_i = 0 \quad i = 1, 2, 3, \dots, 6 \quad (3.80)$$

El criterio de Tsai-Wu 3.77 se reduce a:

$$F_{11}X_C^2 - F_1X_C = 1 \quad (3.81)$$

Al resolver de forma simultánea las expresiones 3.79 y 3.81, se obtiene:

$$F_1 = \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}, \quad F_{11} = -\frac{1}{X_TX_C} \quad (3.82)$$

De forma similar, para los coeficientes  $F_2$  y  $F_{22}$  se realizan ensayos en dirección perpendicular a las fibras, obteniéndose:

$$F_2 = \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}, \quad F_{22} = -\frac{1}{Y_TY_C} \quad (3.83)$$

Por otra parte, para obtener el coeficiente  $F_{66}$  se realiza un ensayo de cortante, donde la falla se produce cuando:

$$\sigma_6 = S, \quad \sigma_i = 0, \quad i = 1, 2, \dots, 5 \quad (3.84)$$

Aplicando la expresión del criterio de Tsai-Wu 3.77:

$$F_{66}S^2 = 1 \quad (3.85)$$

De donde se observa que el valor de  $F_{66}$  es independiente del signo del cortante, el coeficiente entonces:

$$F_{66} = \frac{1}{S^2} \quad (3.86)$$

Para el coeficiente  $F_{44}$  se analiza la equivalencia entre un estado de esfuerzo de tensión - compresión y un estado de cortante puro, donde se producen la mismas tensiones de rotura, las figuras 3.32 ejemplifican los estados descritos junto a su círculo de Mohr.

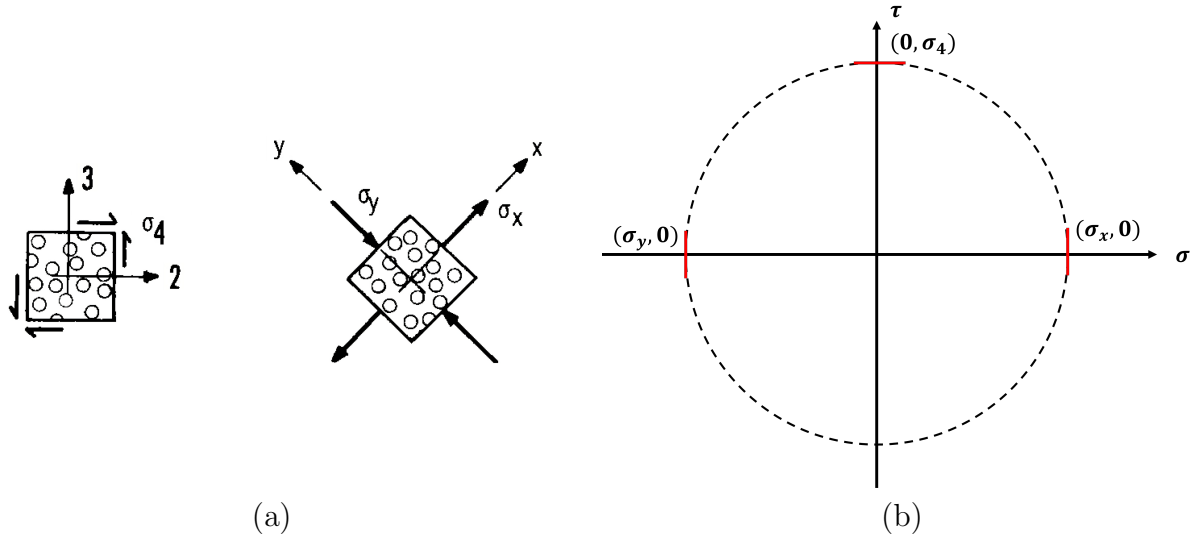


Figura 3.32: Equivalencia de estado tensión-compresión y cortante (a) [Tsai and Wu \(1971\)](#) Círculo de Mohr de la situación (b).

Para un estado de tensión-compresión en el plano 2-3 ( $\sigma_3 = -\sigma_2$ ) el criterio de Tsai-Wu en su ecuación 3.77 se reduce a:

$$2F_{22}\sigma_2^2 - 2F_{23}\sigma_2^2 = 1 \quad (3.87)$$

Por otro lado, para un estado de cortante puro, el criterio se reduce a:

$$F_{44}\sigma_4^2 = 1 \quad (3.88)$$

Al igualar las expresiones 3.87 y 3.88, se obtiene que:

$$F_{44} = 2(F_{22} - F_{23}) \quad (3.89)$$

Obtenidos los coeficientes anteriores, restan  $F_{12}$  y  $F_{23}$ , sin embargo estos no pueden ser obtenidos de manera sencilla mediante ensayos uniaxiales, ya que estos relacionan los esfuerzos  $\sigma_1 - \sigma_2$  y  $\sigma_2 - \sigma_3$  respectivamente. Para calcular dichos coeficientes se debe considerar:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_6 = \frac{U_T}{2}, \quad \sigma_i = 0, \quad i = 3, 4, 5 \quad (3.90)$$

Donde  $U_T$  denota la resistencia a la tracción del material para una muestra con las fibras orientadas a  $45^\circ$  respecto al eje de simetría. Este estado de esfuerzo es equivalente a un ensayo a tracción aplicado a  $45^\circ$  respecto al eje de simetría del material ([Tsai and Wu \(1971\)](#)). El criterio, queda:

$$\frac{U_T^2}{4}(F_{11} + F_{22} + 2F_{12} + F_{66}) + \frac{U_T}{2}(F_1 + F_2) = 1 \quad (3.91)$$

Reemplazando los valores de los coeficientes y despejando  $F_{12}$  de 3.91:

$$F_{12} = \frac{2}{U_T^2} \left[ 1 - \frac{U_T}{2} \left( \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} + \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) - \frac{U_T^2}{4} \left( \frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} + \frac{1}{S^2} \right) \right] \quad (3.92)$$

De forma similar en compresión:

$$\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_6 = \frac{-U_C}{2}, \quad \sigma_i = 0, \quad i = 3, 4, 5 \quad (3.93)$$

La expresión de Tsai-Wu, se reduce a:

$$\frac{U_C^2}{4} (F_{11} + F_{22} + 2F_{12} + F_{66}) - \frac{U_C}{2} (F_1 + F_2) = 1 \quad (3.94)$$

Nuevamente al despejar  $F_{12}$  y reemplazar los coeficientes por sus valores respectivos:

$$F_{12} = \frac{2}{U_C^2} \left[ 1 + \frac{U_C}{2} \left( \frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C} + \frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C} \right) - \frac{U_C^2}{4} \left( \frac{1}{X_T X_C} + \frac{1}{Y_T Y_C} + \frac{1}{S^2} \right) \right] \quad (3.95)$$

De ambos casos, se observa que  $F_{12}$  es un coeficiente que depende de las resistencias mecánicas del material. Tsai-Wu indica que la envolvente elipsoidal de falla debe mantenerse cerrada, por lo que incorpora la restricción a los coeficientes de interacción:

$$F_{ii}F_{jj} - F_{ij}^2 \geq 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \dots, 6 \quad (3.96)$$

Para  $i = 1$  y  $j = 2$  se tiene:

$$F_{11}F_{22} - F_{12}^2 \geq 0 \quad (3.97)$$

De esta forma, para cumplir con la condición de estabilidad, se adiciona el término adimensional  $F_{12}^*$ .

$$F_{12} = F_{12}^* \sqrt{F_{11}F_{22}}, \quad -1 \leq F_{12}^* \leq 1 \quad (3.98)$$

De manera análoga, para el coeficiente  $F_{23}$ , se obtiene:

$$F_{23} = F_{23}^* F_{22}, \quad -1 \leq F_{23}^* \leq 1 \quad (3.99)$$

En la tabla 3.4, se muestra un resumen de los valores que toman los coeficientes involucrados en el criterio de Tsai-Wu para un material con isotropía transversal:

Tabla 3.4: Coeficientes criterio de Tsai-Wu para material isotrópico transversal.

$F_{11}$	$F_1$	$F_{22}$	$F_2$	$F_{66}$	$F_{44}$	$F_{12}$	$F_{23}$
$\frac{1}{X_T X_C}$	$\frac{1}{X_T} - \frac{1}{X_C}$	$\frac{1}{Y_T Y_C}$	$\frac{1}{Y_T} - \frac{1}{Y_C}$	$\frac{1}{S^2}$	$2(F_{22} - F_{23})$	$F_{12}^* \sqrt{F_{11} F_{22}}$	$F_{23}^* F_{22}$

### 3.9. Diagramas de vida constante de Kawai

Una manera de estudiar la fatiga presente en un material compuesto es mediante los diagramas de vida constante de Kawai de dos segmentos, CFL por su sigla en inglés (Constant fatigue life) para laminados CFRP multidireccionales (Kawai and Koizumi (2007)). Para entender los diagramas CFL, primero se debe introducir el concepto de razón de esfuerzo  $R$  que relaciona el esfuerzo mínimo y máximo para una historia de carga en fatiga de la siguiente manera:

$$R = \frac{\sigma_{min}}{\sigma_{max}} \quad (3.100)$$

La relación de esfuerzos descrita en 3.100 resulta de importancia para inducir el término de relación crítica de esfuerzos como:

$$\chi = \frac{\sigma_C}{\sigma_T} \quad (3.101)$$

Dicha relación crítica representa un valor específico de la relación de esfuerzos  $R$ , donde  $\sigma_C$  corresponde a la resistencia a la compresión ( $\sigma_C < 0$ ) y  $\sigma_T$  la resistencia a tracción del material  $\sigma_T > 0$  del material. En particular, la importancia de este valor reside en que marca la transición entre un modo de falla T-T a C-C y viceversa. La figura 3.9 ejemplifica un gráfico típico CFL con su cambio de comportamiento en  $R = \chi$ .

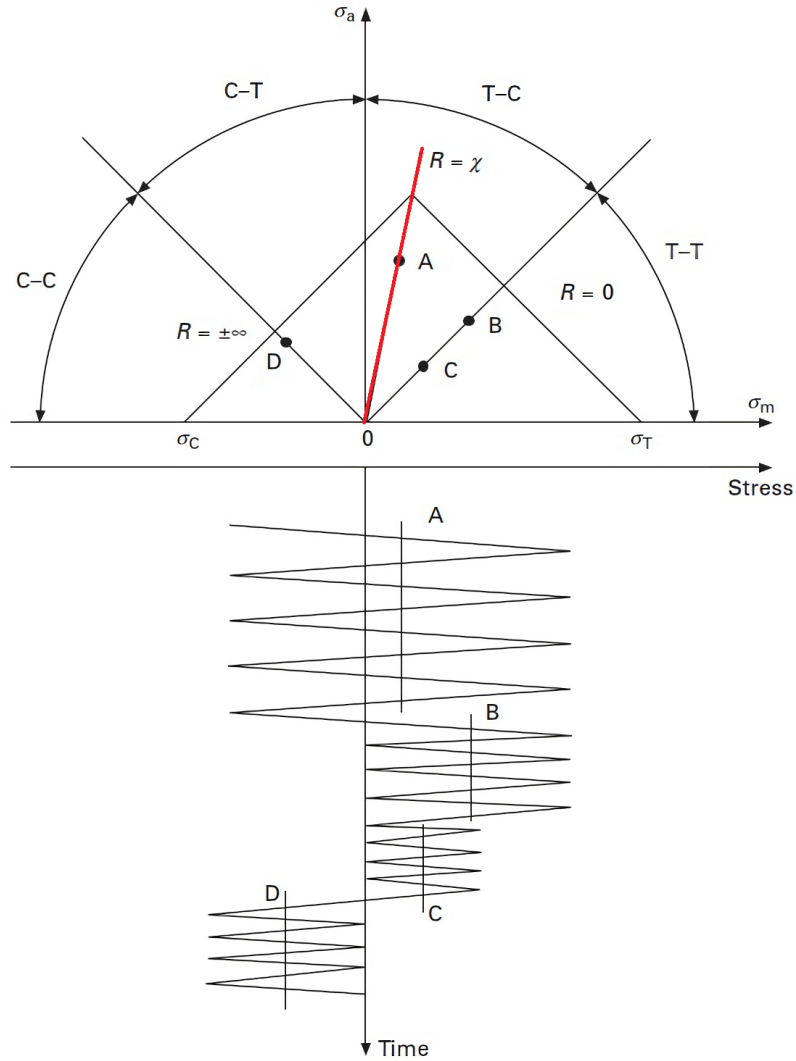


Figura 3.33: Esquemático de diagrama CFL típico Kawai (2010). En rojo la línea crítica.

La envolvente del diagrama CFL esta dominada por un carácter lineal para bajo ciclaje, este borde del gráfico representa la falla estática del material, mientras que al aumentar el ciclaje, la forma de la gráfica torna a una naturaleza del tipo no lineal. Este diagrama se compone de dos segmentos, los cuales se unen por un punto de una recta radial de pendiente constante llamada línea crítica, la cual se define como:

$$\frac{\sigma_a}{\sigma_m} = \frac{1 - \chi}{1 + \chi} \quad (3.102)$$

Por otra parte, para un valor de vida dado  $N_f$ , los valores de esfuerzo medio y alternante para

la relación crítica de esfuerzos, es decir,  $\sigma_m^\chi$  y  $\sigma_a^\chi$  respectivamente son:

$$\sigma_m^\chi = \frac{1}{2}(1 + \chi)\sigma_{max}^\chi \quad (3.103)$$

$$\sigma_a^\chi = \frac{1}{2}(1 - \chi)\sigma_{max}^\chi \quad (3.104)$$

Donde  $\sigma_{max}^\chi = (\sigma_a^\chi + \sigma_m^\chi)$  es el esfuerzo máximo a fatiga para un valor constante de vida bajo la relación crítica de esfuerzos.

La envolvente CFL para una vida dada, se construye bajo la función por partes:

$$-\frac{\sigma_a - \sigma_a^\chi}{\sigma_a^\chi} = \begin{cases} \left(\frac{\sigma_m - \sigma_m^\chi}{\sigma_T - \sigma_m^\chi}\right)^{2-\psi_\chi} & , \sigma_m^\chi \leq \sigma_m \leq \sigma_T \\ \left(\frac{\sigma_m - \sigma_m^\chi}{\sigma_C - \sigma_m^\chi}\right)^{2-\psi_\chi} & , \sigma_C^\chi \leq \sigma_m \leq \sigma_T \end{cases} \quad (3.105)$$

La variable  $\psi_\chi$  del exponente corresponde al coeficiente de resistencia a la fatiga para una carga cíclica en la relación crítica de esfuerzos, y se define como:

$$\psi_\chi = \frac{\sigma_{max}^\chi}{\sigma_B}, \quad (3.106)$$

donde  $\sigma_B < 0$  define el máximo de la envolvente de falla estática en el plano  $\sigma_m - \sigma_a$  y toma el valor de  $\sigma_T$  si  $\sigma_T \geq |\sigma_C|$ , o  $\sigma_C$  si  $|\sigma_C| \geq \sigma_T$  (Kawai and Koizumi (2007)).

En la figura 3.34 se muestran los diagramas de vida constante a fatiga desarrollados por Kawai and Koizumi (2007) para los laminados de carbono/epoxi T800H-#3631 y T800H-#2500 con distribución de laminas  $[+45/90/-45/0]_{3S}$ ,  $[0/+60/-60]_{2S}$  y  $[0/90]_{2S}$  respectivamente:

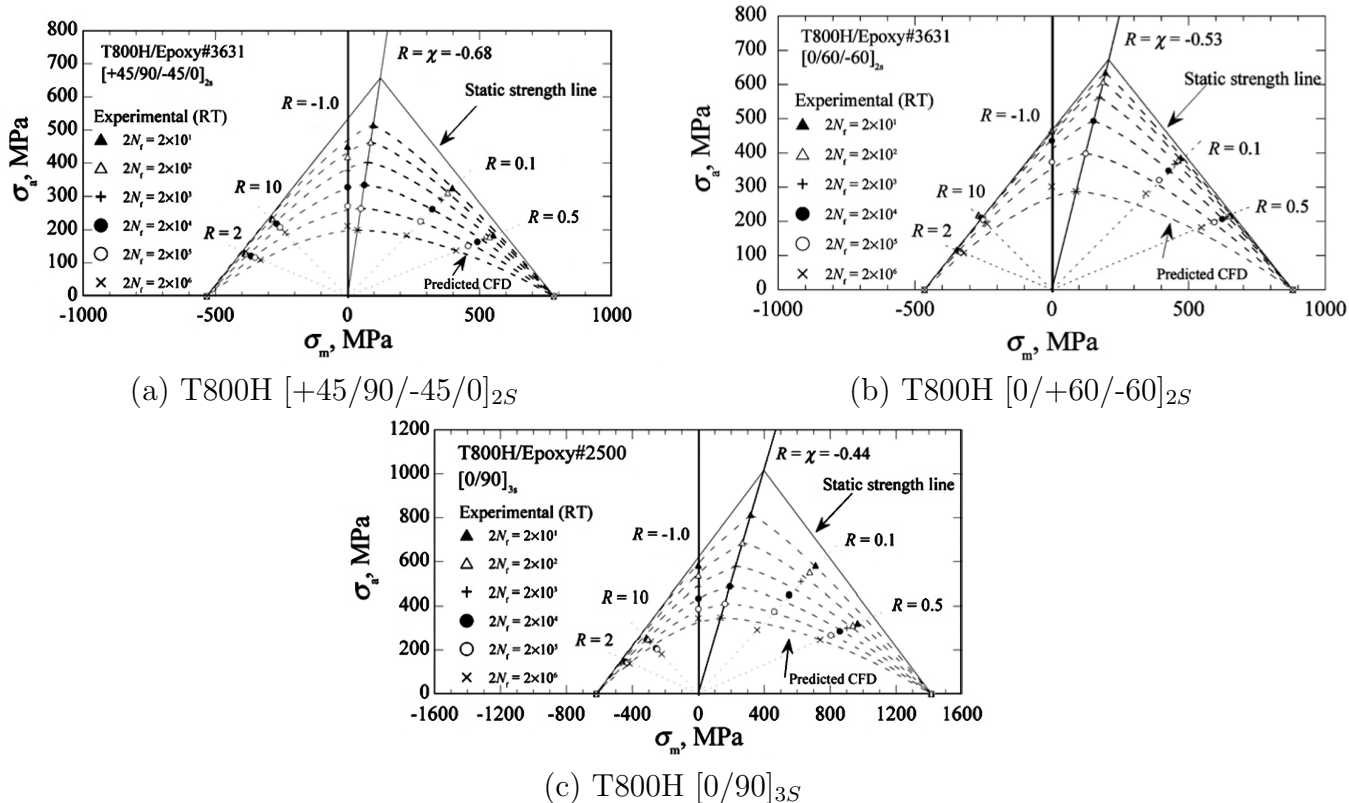


Figura 3.34: Diagramas CFL para distintos laminados carbono/epoxi [Kawai and Koizumi \(2007\)](#)

la relación S-N normalizada para la relación crítica de esfuerzos se aproxima mediante la siguiente función:

$$2N_f = \frac{2}{K^*} \frac{(1 - \psi_\chi)^a}{(\psi_\chi)^n} \quad (3.107)$$

donde  $K^*$ ,  $a$  y  $n$  son constantes del material que se obtienen al ajustar los datos de fatiga en la relación crítica de esfuerzos a la ecuación 3.107. La tabla 3.9 muestra las constantes para el laminado carbono/epoxi T800H-#3631 [+45/90/-45/0]<sub>3S</sub> como para el laminado T800H-#2500 [0/90]<sub>3S</sub>.

Tabla 3.5: Constantes de los laminados carbono epoxi T800H-#3631 [+45/90/-45/0]<sub>3S</sub>, T800H-#3631 [0/+60/-60]<sub>2S</sub> y T800H-#2500 [0/90]<sub>3S</sub>

	[+45/90/-45/0] <sub>3S</sub>	[0/90] <sub>2S</sub>	[0/+60/-60] <sub>2S</sub>
$K^*$	0,003	1,8	0,0006
$a$	1	0,01	1
$n$	8,5	13,5	9,2

Por otro lado, para un laminado unidireccional, la relación S-N normalizada presenta leves

cambios, siendo:

$$2N_f = \frac{1}{K^*} \frac{1}{(\psi_\chi)^n} \frac{\langle 1 - \psi_\chi \rangle^a}{\langle \psi_\chi - \psi_{\chi(L)} \rangle^b} \quad (3.108)$$

Donde los paréntesis angulares  $\langle \cdot \rangle$  denotan la función  $\langle x \rangle = \max\{0, x\}$ , mientras que  $K^*$ ,  $n$ ,  $a$ ,  $b$  y  $\psi_{\chi(L)}$  constantes del laminado unidireccional y se muestran en la tabla 3.6.

Constante	Magnitud
$\chi$ [-]	-0,43
$2K^*$ [-]	0,98
$n$ [-]	-3
$a$ [-]	0,6
$b$ [-]	5,3
$\psi_{\chi(L)}$ [-]	0,33

Tabla 3.6: Constantes de laminado unidireccional carbono/epoxi T700S/2592 [Kawai and Teranuma \(2012\)](#)

La curva CFL que muestra el comportamiento de estos laminados se observa en la figura 3.35.

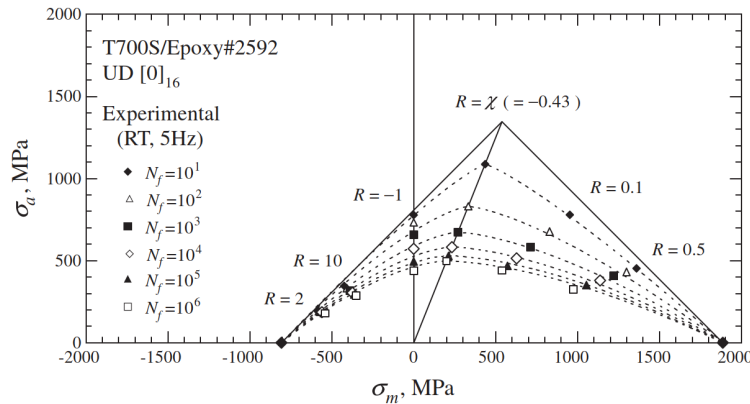


Figura 3.35: Diagrama CFL para laminado carbono/epoxi unidireccional [Kawai and Teranuma \(2012\)](#).

### 3.10. Confiabilidad de un material

Sean la función de densidad de probabilidad de esfuerzo  $f_s(\cdot)$  y de densidad de probabilidad de resistencia del material  $f_S(\cdot)$ . La confiabilidad se define como: [Kapur and Lamberson \(1977\)](#)

$$\mathcal{R} = P(S > s) = P(S - s > 0) \quad (3.109)$$

Una forma ilustrativa de visualizar la probabilidad de falla de un elemento es analizar la zona

donde ocurre la interferencia entre ambas funciones densidad de probabilidad  $f_s$  y  $f_S(\cdot)$ . Dicha zona se observa en la figura 3.36

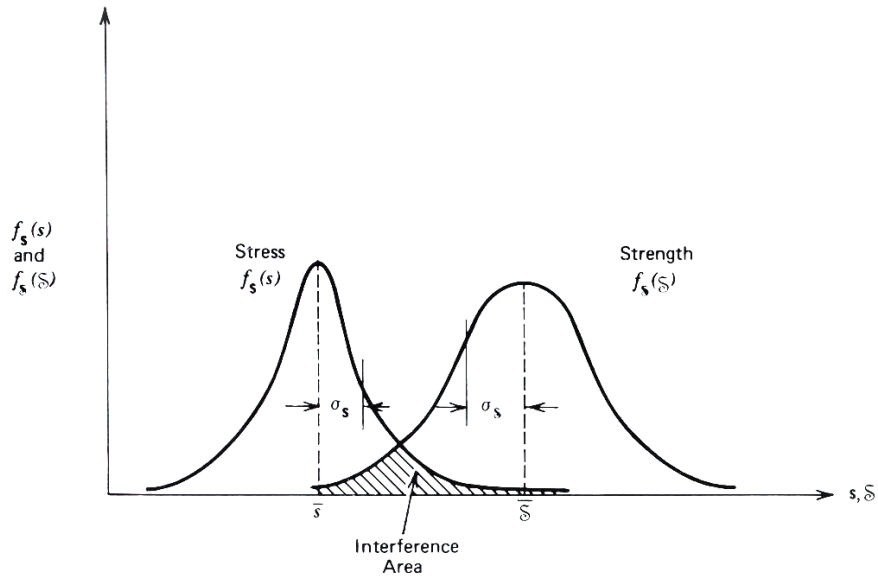


Figura 3.36: Interferencia entre funciones densidad de probabilidad de esfuerzo y resistencia [Kapur and Lamberson \(1977\)](#).

Si se considera un intervalo pequeño  $ds$  dentro de la zona de interferencia, la probabilidad de que un esfuerzo se encuentre en dicho intervalo corresponde al área descrita por el intervalo.

$$P\left(s_0 - \frac{ds}{2} \leq \mathbf{s} \leq s_0 + \frac{ds}{2}\right) = f_s(s_0) \cdot ds \quad (3.110)$$

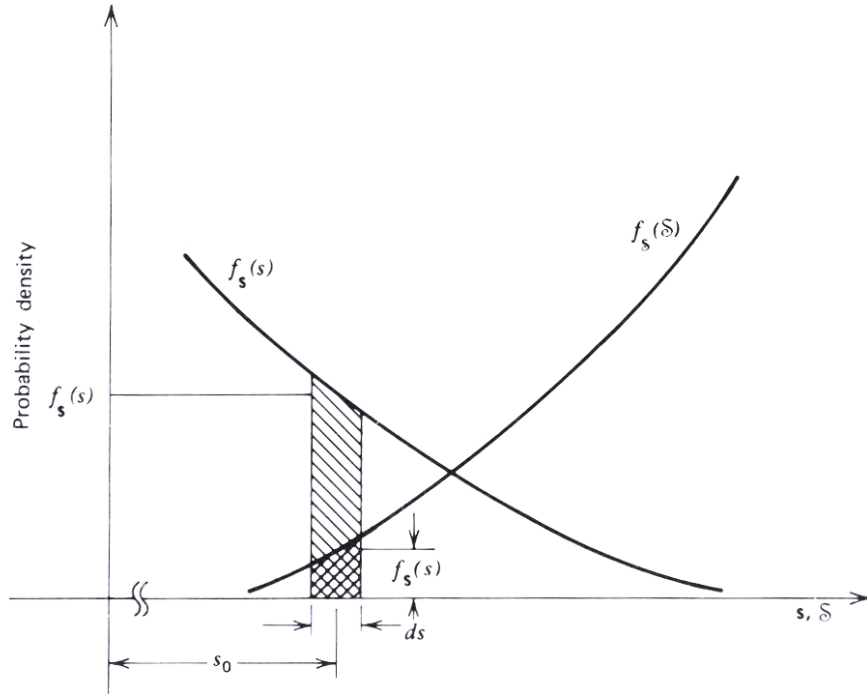


Figura 3.37: Detalle de interferencia entre funciones densidad de probabilidad de esfuerzo y resistencia [Kapur and Lamberson \(1977\)](#).

Ahora bien, la probabilidad de que la resistencia  $\mathcal{S}$  del material sea superior al esfuerzo  $s_0$  viene dada por la expresión:

$$P(\mathcal{S} > s_0) = \int_{s_0}^{\infty} f_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})d\mathcal{S} \quad (3.111)$$

Del mismo modo, suponiendo que tanto el esfuerzo como la resistencia son variables aleatorias independientes, la probabilidad de que el esfuerzo se encuentre dentro del intervalo  $ds$  y que la resistencia  $\mathcal{S}$  sea mayor al esfuerzo dado corresponde a:

$$f_s(s_0)ds \cdot \int_{s_0}^{\infty} f_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})d\mathcal{S} \quad (3.112)$$

Por tanto, la confiabilidad del componente corresponde a la probabilidad de que la resistencia  $\mathcal{S}$  sea mayor a las sollicitaciones de esfuerzos para todos los valores posibles, quedando la expresión de confiabilidad como:

$$\mathcal{R} = \int_{-\infty}^{\infty} f_s(s) \left[ \int_s^{\infty} f_{\mathcal{S}}(\mathcal{S})d\mathcal{S} \right] ds \quad (3.113)$$

### 3.10.1. Representación gráfica de confiabilidad

Una de las formas de determinar la confiabilidad de un material es cuando se tiene la suficiente información empírica [Kapur and Lamberson \(1977\)](#); para ello se debe considerar las siguientes funciones:

$$G = \int_s^{\infty} f_s(\mathcal{S})d\mathcal{S} = 1 - F_s(s) \quad (3.114)$$

$$H = \int_0^s f_s(u)du = F_s(s)$$

Siendo:

$$dH = f_s(s)ds \quad (3.115)$$

Donde  $F_s(s)$  y  $F_s(s)$  denotan las funciones de probabilidad acumulada de la resistencia del material y los esfuerzos respectivamente. Reemplazando las funciones en la ecuación 3.113, la confiabilidad puede ser expresada como:

$$\mathcal{R} = \int_0^1 GdH \quad (3.116)$$

Bajo este cambio de variables, el área bajo la curva  $G$  en función de  $H$  representa la confiabilidad  $\mathcal{R}$  del elemento.

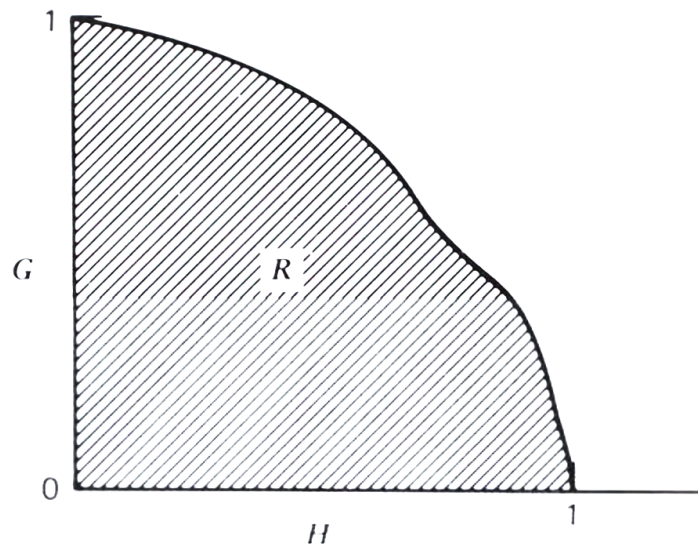


Figura 3.38: Gráfico de G en función de H [Kapur and Lamberson \(1977\)](#).

# Capítulo 4

## Metodología

La metodología a realizar en el desarrollo del trabajo contempla las siguientes etapas:

### 1. **Elaboración de la idea de diseño.**

Consiste en desarrollar un esquemático de la idea mediante boceto típico de las fases preliminares de diseño para continuar con un modelo CAD.

### 2. **Modelado del conjunto.**

Esta fase contempla la elaboración del CAD del cuerpo principal de la prótesis, así como los diferentes aditamentos que acompañan a esta con la finalidad de llegar a un ensamblaje tipo de prótesis transtibial.

### 3. **Análisis estático del conjunto.**

Se analiza la prótesis bajo las cargas estáticas descritas en la normativa ISO 10328:2016 mediante software comercial de elementos finitos ANSYS. El análisis contempla los niveles de carga última en sus cotas superior e inferior. Para una configuración de 3 laminados distintos se realiza:

- Determinación del esfuerzo equivalente de von-Mises para el cuerpo principal PA-12.
- Análisis de volumen bajo fluencia para la carga última en el cuerpo principal de PA12.
- Análisis del factor de seguridad mediante criterio de Tsai-Wu para el laminado.
- Análisis de volumen bajo falla para carga última en el laminado.
- Elección de la configuración que represente el menor volumen de cuerpo principal y laminado bajo fluencia y falla respectivamente .

### 4. **Análisis de confiabilidad:**

Para el laminado escogido en la etapa previa, se realiza un análisis de la confiabilidad del

cuerpo principal de PA-12 para los valores de carga última sobre antepié en su nivel superior e inferior. Para ello se modela la resistencia del material como una distribución normal, mientras que los esfuerzos equivalentes de von Mises se modelan con una distribución de Weibull.

#### 5. **Análisis a fatiga del conjunto.**

Se estudia el comportamiento del conjunto prótesis para carga cíclica según el laminado seleccionado en la etapa previa, para ello se desarrolla:

- Estudio del comportamiento a fatiga del laminado de carbono mediante el empleo de los diagramas CFL de Kawai.

#### 6. **Conclusiones:**

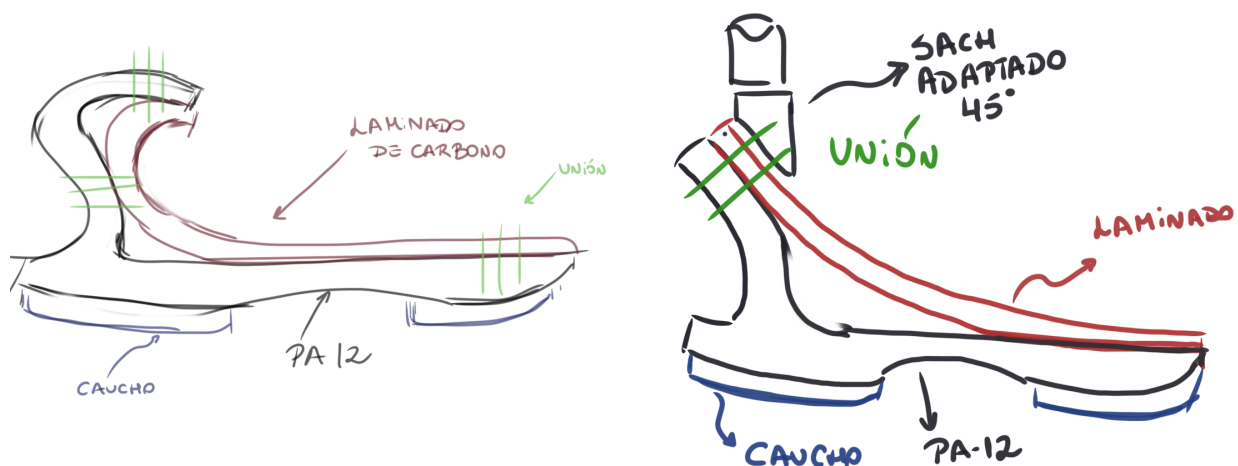
Finalmente, se re evalúan los principales resultados obtenidos de esfuerzos y deformación en la prueba estática, como de esfuerzos en la prueba a fatiga con la finalidad de validar el diseño propuesto bajo la normativa ISO 10328.

# Capítulo 5

## Desarrollo

### 5.1. Propuestas de diseño

Para el desarrollo del cuerpo impreso de la prótesis se proponen dos posibles modelos junto a dos posibles variantes entre ellos. Los modelos propuestos se observan en la figura 5.1.



(a) Propuesta A

(b) Propuesta B

Figura 5.1: Bocetos iniciales de propuestas de prótesis.

La propuesta A, se inspira fuertemente en los trabajos de [De Vivo Nicoloso et al. \(2021\)](#) y [Kathrotiya et al. \(2023\)](#), al considerar como base de diseño los principios de una prótesis del tipo ESAR, como a su vez la forma de una prótesis con optimización topológica. Por otro lado, en este diseño el laminado de fibra de carbono se sujeta debajo del adaptador tipo SACH y se curva de forma paralela al cuerpo impreso de la prótesis, resultando en un cuerpo mucho más plano en la

extensión de este. Por el contrario, la propuesta B sigue más los lineamientos de [Kathrotiya et al. \(2023\)](#) en la forma general de la unidad de pie, pero, agregando un laminado de carbono curvo que se une al adaptador SACH en 45° personalizado para de forma curvada tocar en el extremo del pie, creando así una especie de muelle o ballesta de fibra de carbono. Ambas propuestas consideran la adición de una suela de caucho antideslizante en la parte baja del pie. De forma adicional una de las variantes aplicables a los diseños de prótesis, es la división o no del cuerpo principal y de la fibra de carbono, modificación que es altamente utilizada en prótesis comerciales de grados de movilidad mayor, y por tanto, mayor coste. El beneficio de esta división es la adaptabilidad que logra la prótesis a terrenos accidentados al dividir a está en dos zonas independientes. La figura 5.2 muestra una prótesis comercial con esta adaptación.



Figura 5.2: Prótesis comercial modelo Taleo Side Flex de la marca Ottobock con división del cuerpo principal.

Dada las ventajas que representa la propuesta B sobre la A, se escoge esta para el desarrollo de la prótesis. En cuanto la división del cuerpo, se determina como no necesario debido que representa un importante concentrador de esfuerzos para un cuerpo de poliamida 12 con limitadas propiedades mecánicas.

## 5.2. Ensamble y componentes

### 5.2.1. Cuerpo principal impreso en 3D - SLS

La unidad tobillo-pie de la prótesis transtibial es elaborada en poliamida 12 mediante sinterizado selectivo por láser. Las dimensiones principales del diseño son 300 [mm] de largo, 120 [mm] de alto y 100 [mm] en su parte más ancha. Por otra parte, la masa del cuerpo principal corresponde a 860 [g], mientras que su volumen es de aproximadamente 806000 [mm<sup>3</sup>] o 806 [cm<sup>3</sup>]. Geométricamente consta de una abertura en la parte delantera donde el fleje de laminado carbono-epoxi

desliza de forma guiada. En la zona del tobillo se une a un adaptador tipo SACH angulado en 45° mediante 2 pernos allen M10x1,5 ISO 4762 de largo 60[mm].

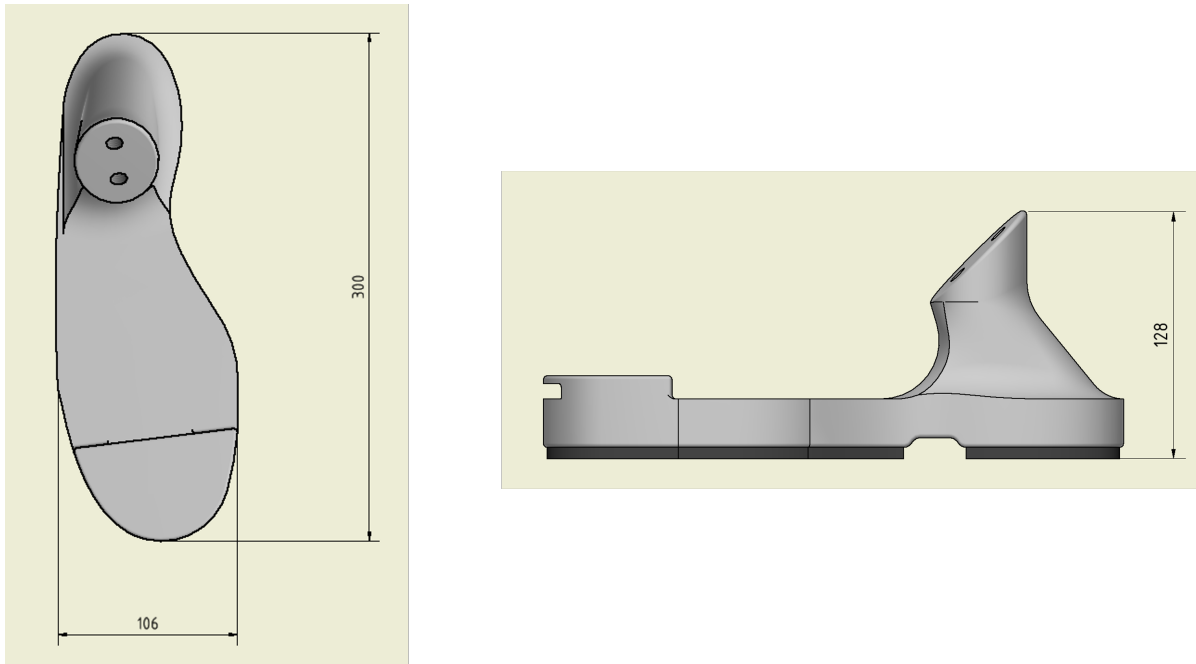


Figura 5.3: Cuerpo principal PA-12

### 5.2.2. Laminado de fibra de carbono

El cuerpo de laminado de carbono realiza la función de absorción y retorno de energía además de amortiguar la marcha y dotar de rigidez adicional al cuerpo principal de PA-12. La forma de arco de ballesta del laminado se justifica en parte por la geometría elegida para la unidad tobillo-pie. Las dimensiones principales son 264 [mm] de largo estirado y 50 [mm] de ancho. Los materiales tentativos de ésta son T800H/3631 en configuraciones  $\{[45/90/-45/0]_{2S}\}_2$ ,  $\{[0/60/-60]_{2S}\}_3$  y T800H/2500 en configuración  $\{[0/90]_{3S}\}_3$ , todos con un espesor total de 6[mm]. Las propiedades de la lámina que conforma estos laminados se muestran en la tabla 5.1, los cuales son datos obtenidos del listado de propiedades para materiales de ANSYS.

Tabla 5.1: Propiedades de laminas de carbono-epoxi.

Propiedad	Dirección	Magnitud
Densidad	-	1490 [ $kg/m^3$ ]
Modulo de Young	X	121 [ $GPa$ ]
	Y	8,6 [ $GPa$ ]
	Z	8,6 [ $GPa$ ]
Poisson	XY	0,27 [-]
	YZ	0,4 [-]
	XZ	0,27 [-]
Resistencia a la tracción	X	2231 [ $MPa$ ]
	Y	29 [ $MPa$ ]
	Z	29 [ $MPa$ ]
Resistencia a la compresión	X	1080 [ $MPa$ ]
	Y	100 [ $MPa$ ]
	Z	100 [ $MPa$ ]
Resistencia al corte	XY	60 [ $MPa$ ]
	YZ	32 [ $MPa$ ]
	XZ	60 [ $MPa$ ]

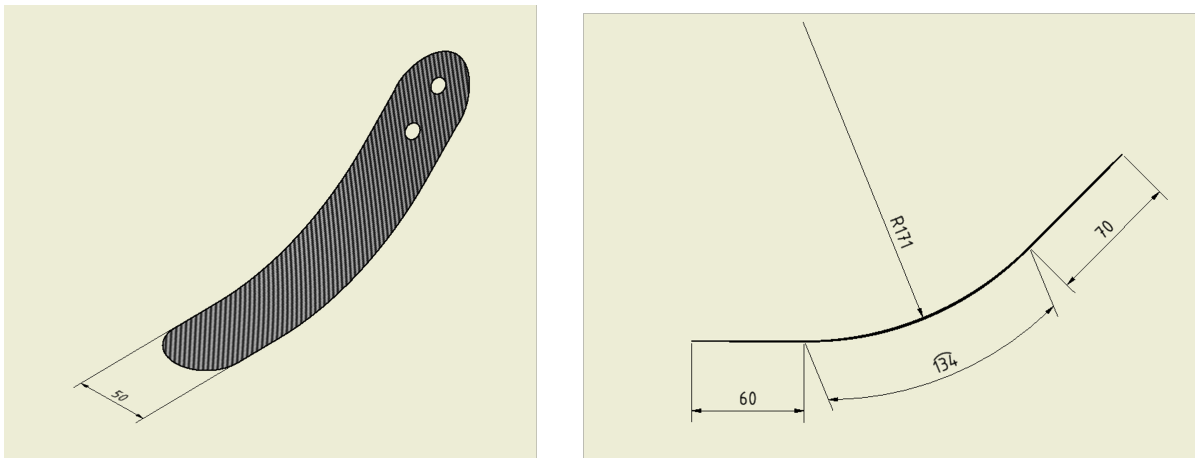


Figura 5.4: Laminado carbono-epoxi.

### 5.2.3. Adaptador de pie - inferior

El adaptador de pie inferior corresponde a uno de los elementos estructurales de la prótesis. En este caso corresponde a un adaptador de acero personalizado con un plano a  $45^\circ$  para unirse a la prótesis mediante los 2 pernos de tipo allen M10x1,5; mientras que por la parte superior presenta una cabeza cuadrada para unirse a un adaptador de tipo piramidal. El adaptador tiene un alto de 104 [mm] con un diámetro de 50 [mm]. La figura 5.5 muestra la forma del adaptador.



Figura 5.5: Adaptador de pie inferior.

#### 5.2.4. Componentes estructurales comerciales

El resto de componentes corresponde a elementos que pueden ser encontrados de forma comercial y pueden ser encontrados dentro de kits de prótesis transtibiales:

- **Pilón con adaptador hembra:** Se escoge el modelo 2R37 de la marca Ottobock. Este pilón estructural elaborado en titanio posee un diámetro de 30 [mm] con un espesor de pared de 1,1 [mm], presenta además en uno de sus extremos un conector piramidal tipo hembra que encaja directamente con el adaptador de pie inferior, el adaptador en si posee un peso de 160[g] y se encuentra certificada bajo la norma ISO 10328 para soportar un nivel de carga P5, es decir un peso máximo del usuario de 100 [kg]. Las figuras 5.6 muestran el adaptador en conjunto al par de apriete de que debe darse a los 4 prisioneros M8 largo 12[mm] DIN 913.

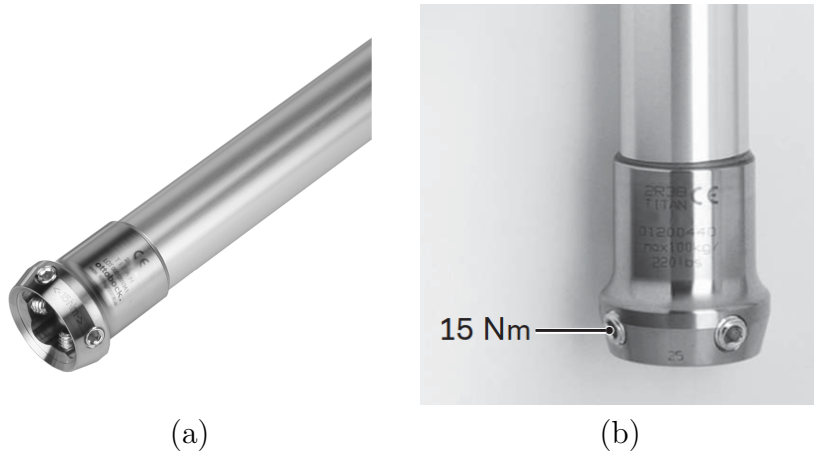


Figura 5.6: Pilón con adaptador hembra y par apriete necesario [Ottobock \(2014\)](#).

- Abrazadera hembra:** Para el adaptador superior se selecciona el modelo 4R52 de la marca Ottobock. Esta abrazadera está construida en titanio y posee un diámetro de 30[mm]. La abrazadera se encuentra certificada por la normativa ISO 10328 para soportar cargas de nivel P5. La figura 5.7 muestra el adaptador, junto al par de apriete necesario para los 4 prisioneros M8 largo 12[mm] DIN 913 y para el prisionero M4 largo 10 [mm] DIN 913.

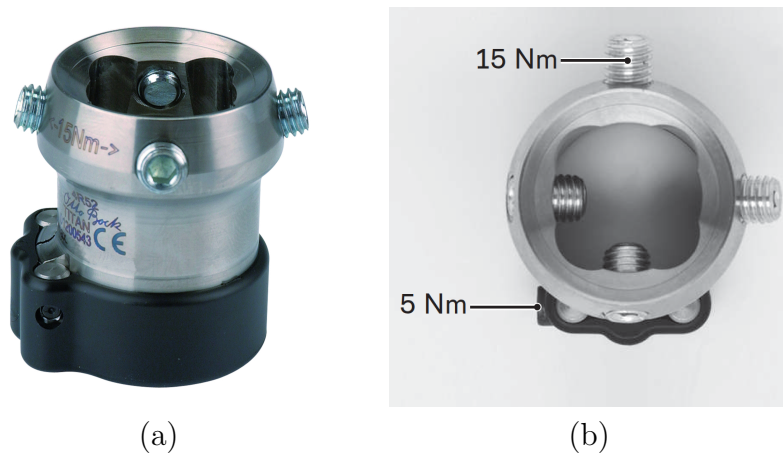


Figura 5.7: Abrazadera hembra y par apriete necesario [Ottobock \(2014\)](#).

- Adaptador de encaje:** Se escoge el anclaje de tres patillas modelo 4R41 de la marca Ottobock. Este componente se encuentra construido en acero inoxidable y es capaz de soportar cargas de nivel P6 de acuerdo a la normativa ISO 10328; es decir, un peso máximo del usuario de 125[kg].



Figura 5.8: Adaptador de encaje comercial.

### 5.2.5. Ensamble del sistema

Para el ensamble y modelado del sistema se emplea el software de diseño asistido por computador *Autodesk Inventor*. Un renderizado del ensamble se visualiza en la figura 5.9, mientras que el listado de elementos se muestra en la tabla 5.2. Notar que el ensamble es meramente representativo, y los componentes estructurales podrían variar según los requerimientos del paciente que utilice la prótesis.

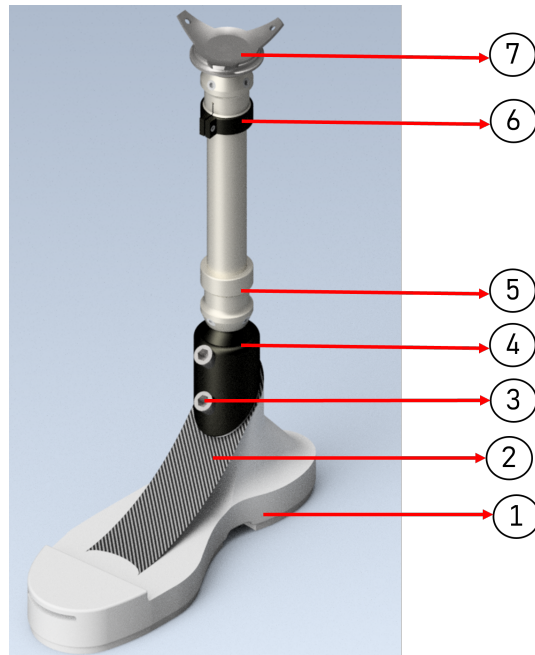


Figura 5.9: Renderizado de diseño de prótesis transtibial.

Tabla 5.2: Listado de elementos del ensamblaje.

N°	Elemento
1	Cuerpo principal PA-12
2	Laminado de carbono
3	Perno allen M10x1,5
4	Adaptador de pie - inferior
5	Pilón con adaptador hembra
6	Abrazadera hembra
7	Adaptador de encaje

### 5.3. Mallado del modelo

El mallado del modelo se realiza mediante el software de simulación *ANSYS Mechanical*. Dado que se comparan diferentes tipos de laminados y por temas de convergencia en simulaciones, se tienen mallados diferentes según el laminado a analizar.

#### 5.3.1. Mallado cuerpo PA-12

Para el cuerpo principal de nylon 12 se realizan dos mallados diferentes, uno para los laminados  $\{[0/90]_{3S}\}_3$  y  $\{[45/90/-45/0]_{2S}\}_2$ , el cual se denota como mallado A, y un segundo mallado para los análisis con laminado  $\{[0/60/-60]_{2S}\}_2$ , el cual se denota como mallado B. Así pues, la metodología para realizar los mallados es la siguiente:

- Mallado A:** Se establece que el tamaño mínimo de los elementos sea de 6[mm] mediante un body sizing, mientras que para las zonas de mayor concentración de esfuerzos, se establece un face sizing con una esfera de influencia que limita el tamaño de los elementos a 2 [mm] con una distancia afectada de 10[mm]. Por último en las zonas donde existen contactos entre el cuerpo PA-12 y el laminado se establece un face sizing de 4[mm]. Con las consideraciones anteriores, se obtiene un mallado de 55919 elementos con 90811 nodos. La figura 5.10 muestra el mallado A.

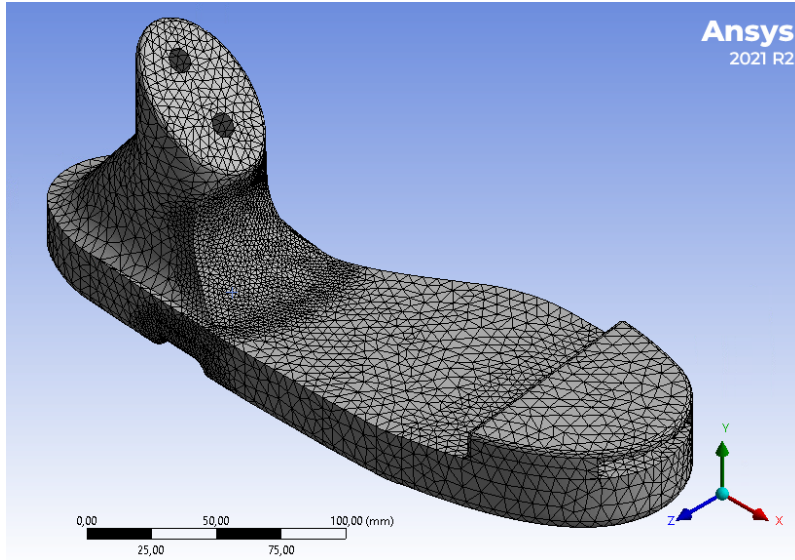


Figura 5.10: Mallado A.

- Mallado B:** Para este caso, se impone mediante un body sizing el tamaño mínimo de los elementos en 4,5[mm], mientras que para las zonas de mayor concentración de esfuerzos, se establece un face sizing de 2[mm] con una esfera de influencia que afecta a los elementos cercanos de 10[mm]. Por último se impone un tamaño de elemento de 2[mm] en zonas donde existen contactos entre distintos componentes del ensamble. Con las consideraciones anteriores, se obtiene un mallado de 101906 elementos con 156467 nodos. La figura 5.11 muestra el mallado B.

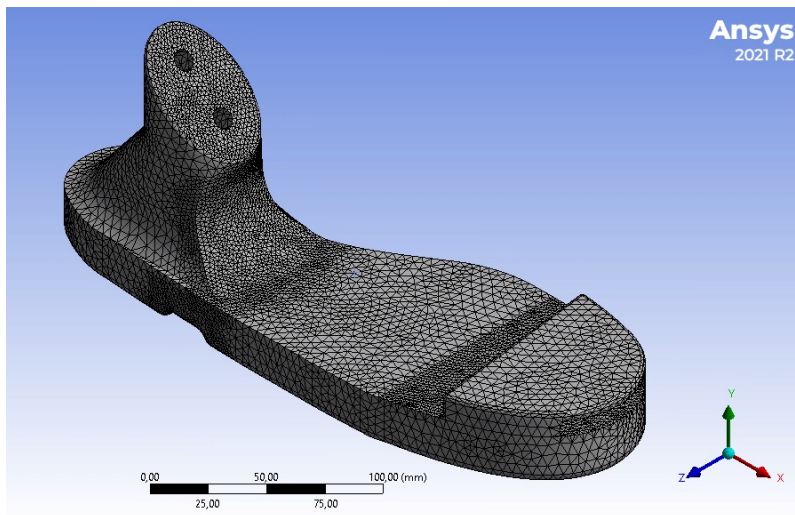


Figura 5.11: Mallado B.

Los mallados obtenidos se sintetizan en la tabla 5.3.

Tabla 5.3: Métricas principales mallados A y B.

Métrica	Malla A	Malla B
N° de elementos	55919	101906
N° de nodos	90811	156467

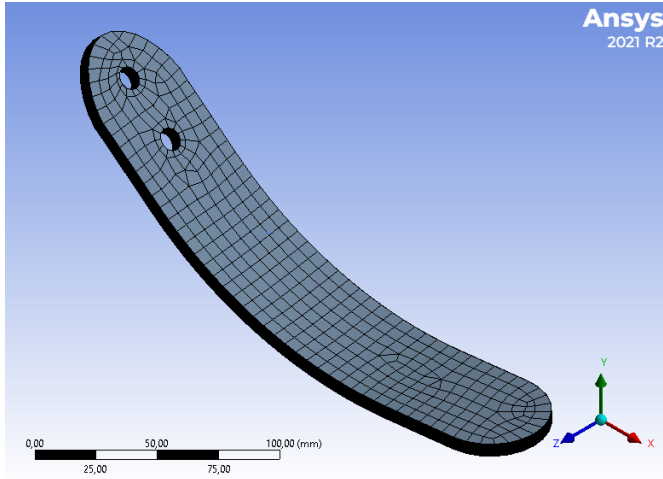
### 5.3.2. Mallado fleje laminado de carbono

La generación de datos referentes a los laminados pasa a la extensión de *ANSYS ACP* (ANSYS Composite Prepost) en conjunto de *ANSYS Mechanical*. En *Mechanical* se asigna el tamaño mínimo de los elementos presentes en el *Shell* que describe la superficie del laminado, mientras que en *ACP* se asignan las distintas capas que conforman el laminado, para así extruir y mallar el volumen del compuesto. Por tanto, para los laminados, la cantidad de elementos está estrechamente ligada a la cantidad de capas que conformen el laminado. Los resultados de mallado para este caso, se resumen en la tabla 5.4.

Tabla 5.4: Métricas mallado de laminados.

-	Propiedad lamina			Propiedad laminado			
	Tamaño elemento	Elementos	Nodos	Espesor total	N° de laminas	Elementos totales	Nodos totales
$\{[0/90]_{3S}\}_3$	6[mm]	383	438	6[mm]	36	13768	16206
$\{[45/90/ - 45/0]_{2S}\}_2$	6[mm]	383	438	6[mm]	32	12526	14454
$\{[0/60/ - 60]_{2S}\}_2$	3[mm]	1459	1563	6[mm]	36	52524	57831

De la tabla 5.4 resulta notoria la disparidad de la cantidad de nodos de un caso a otro. Esta diferencia se explica por la búsqueda de la mejor convergencia en el menor tiempo de cálculo. Las figuras 5.12 y 5.13 muestran los mallados para los laminados  $\{[0/90]_{3S}\}_3$  y  $\{[0/60/ - 60]_{2S}\}_2$  respectivamente.

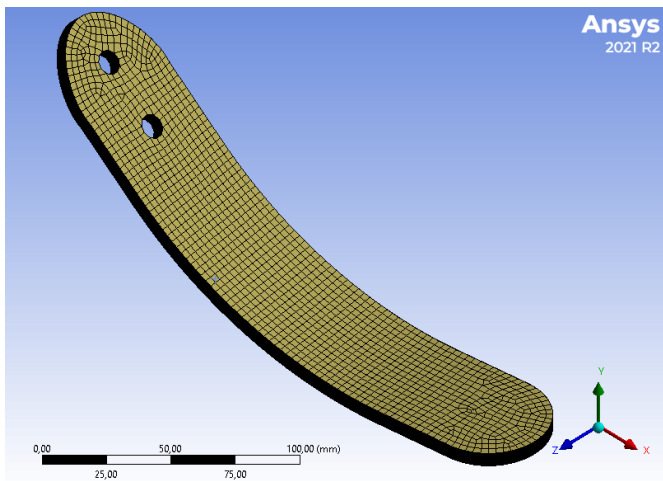


(a) Vista isométrica.

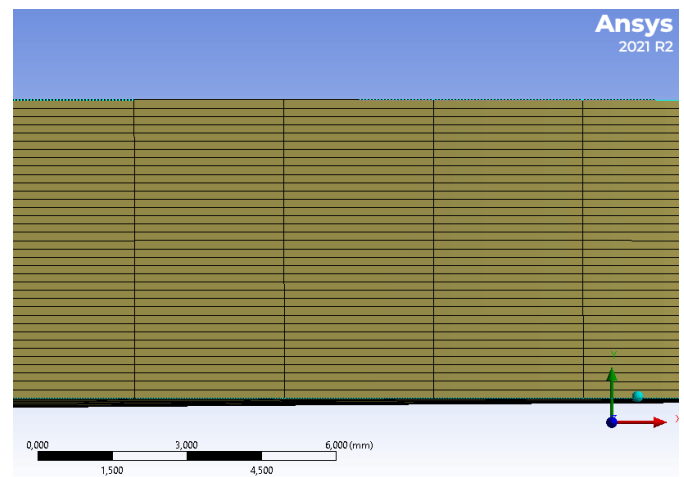


(b) Vista lateral

Figura 5.12: Mallado laminado  $\{[0/90]_{3S}\}_3$ .



(a) Vista isométrica.



(b) Vista lateral

Figura 5.13: Mallado laminado  $\{[0/60/-60]_{2S}\}_2$ .

## 5.4. Restricciones y consideraciones de simulación

Para las restricciones y cargas del modelo, se utiliza un modelo simplificado en Ansys, donde se modela como empotramiento fijo el extremo superior del pilón estructural de la prótesis. En cuanto a las cargas, estas son aplicadas en el talón o antepié de forma separada para las pruebas estáticas, o de forma alternada y cíclica en la prueba a fatiga. Por último, como parámetro, se considera la simulación de un modelo no lineal de grandes deformaciones, y el cuerpo de PA-12 se simula como un material elasto plástico bi lineal con endurecimiento isotrópico. La figura 5.14 muestra la restricción y las cargas principales.

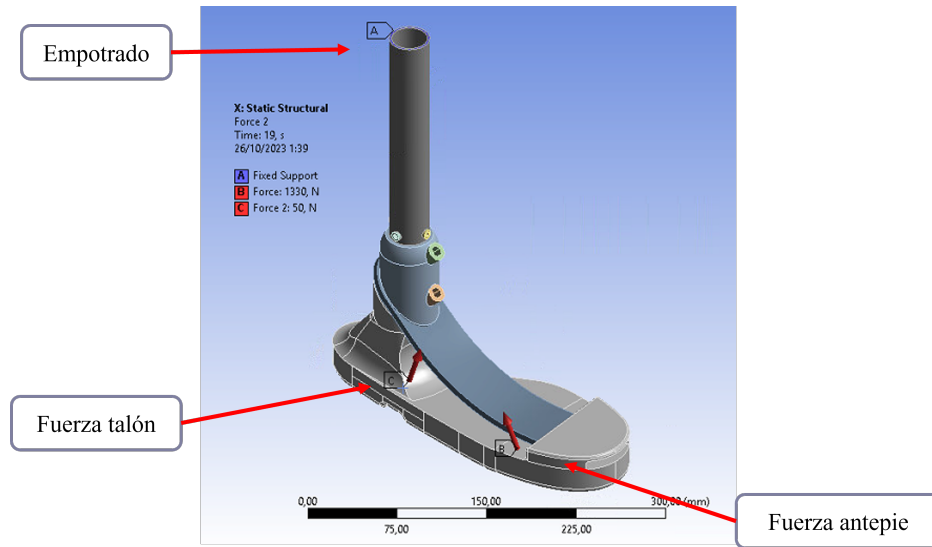


Figura 5.14: Restricción y cargas para simulación.

## 5.5. Prueba de resistencia última estática

Conforme a lo declarado por la normativa ISO 10328:2016 uno de las pruebas necesarias para certificar una unidad tobillo-pie es la de resistencia última estática. Para ello se somete de forma separada a la prótesis a las cargas  $F_{1su}$  en la zona del retropié o talón, y una carga  $F_{2su}$  en la zona del antepié. Estas cargas últimas estáticas a su vez se dividen en nivel superior e inferior (upper y lower level) para los cuales son válidas la pruebas. El valor de estas fuerzas para un nivel de carga P5 se muestra en la tabla 5.5.

Tabla 5.5: Fuerzas de prueba última estática para nivel P5.

Fuerza	[N]
$F_{1su-upperlevel}$	4480
$F_{1su-lowerlevel}$	3360
$F_{2su-upperlevel}$	4480
$F_{2su-lowerlevel}$	3360

### 5.5.1. Prueba de resistencia última estática sobre retropié

Sobre el talón, los resultados se mantienen con pequeñas variaciones respecto a la presencia o no de laminado. Dado lo anterior, para esta prueba se muestran solamente los resultados obtenidos de la unidad de pie sin laminado de fibra de carbono. La figura 5.15 muestra el esfuerzo equivalente de von Mises para el cuerpo principal de PA-12.

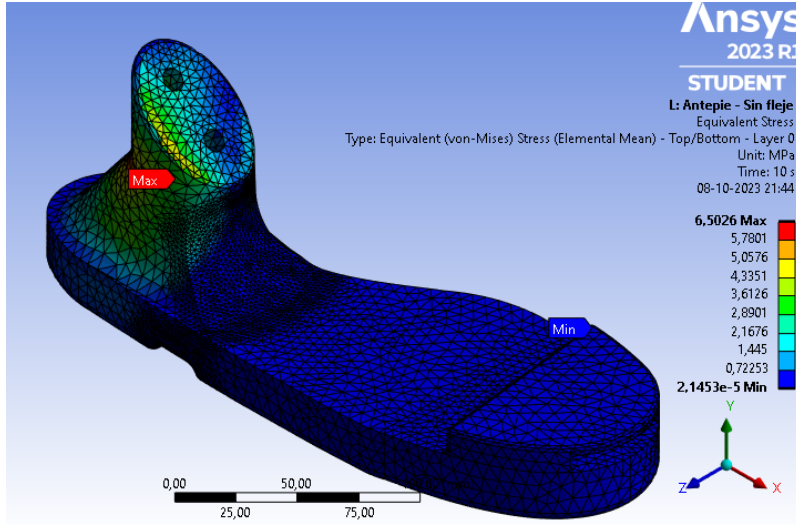


Figura 5.15: Esfuerzo de von Mises sobre cuerpo principal en prueba de talón.

La distribución de los esfuerzos se ordenan por intervalos y frecuencias en la tabla 5.6

Intervalo [MPa]	Frecuencia
[0-1)	39525
[1-2)	6942
[2-3)	1996
[3-4)	1092
[4-5)	239
[5-6)	44
+6	5

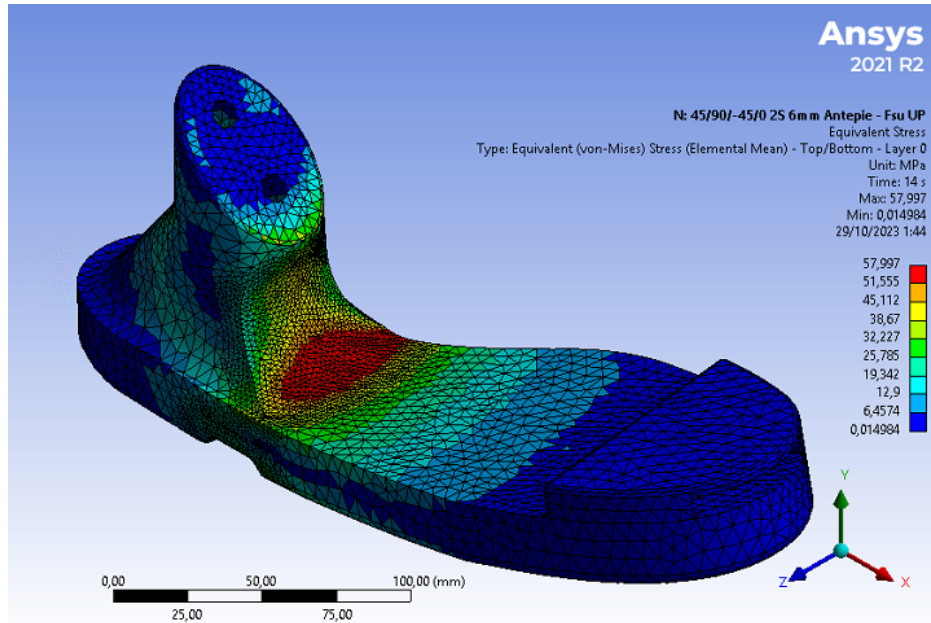
Tabla 5.6: Tabla de frecuencias para prueba última estática sobre talón en cuerpo PA-12

Se observa que para esta prueba los esfuerzos sobre el cuerpo son mucho menores a la resistencia del material, y por tanto, se cumple el apartado de fuerza última sobre talón de la normativa ISO 10328:2016.

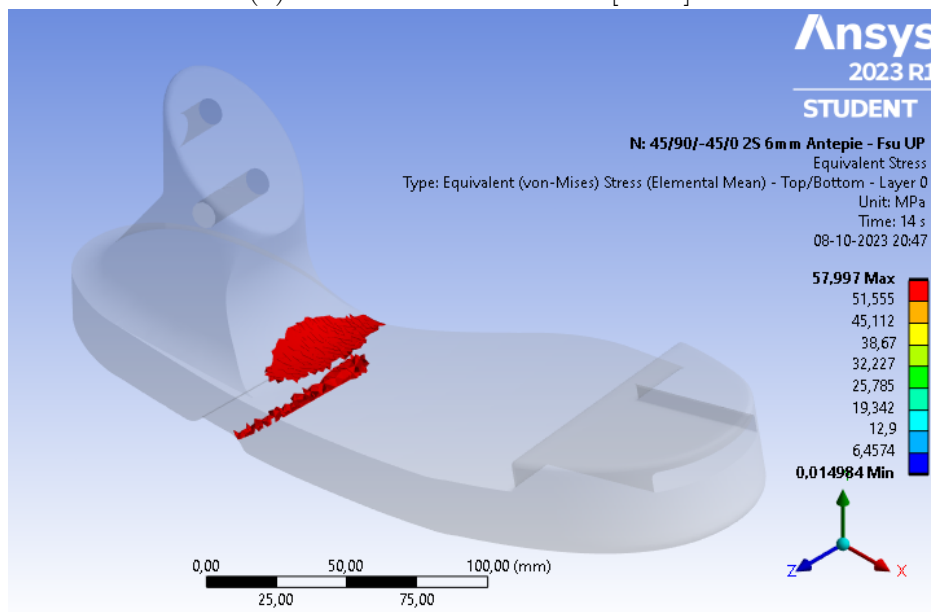
### 5.5.2. Prueba de resistencia última estática sobre antepié

- **Laminado**  $\{[45/90/-45/0]_{2s}\}_2$ :

Los resultados de esfuerzo equivalente de von Mises obtenidos junto a los elementos en falla ( $S_u = 53,22[MPa]$ ) sobre el cuerpo de PA-12 al realizar la prueba última estática tanto para el nivel superior como inferior se muestran en la figura 5.16 y 5.17 respectivamente.

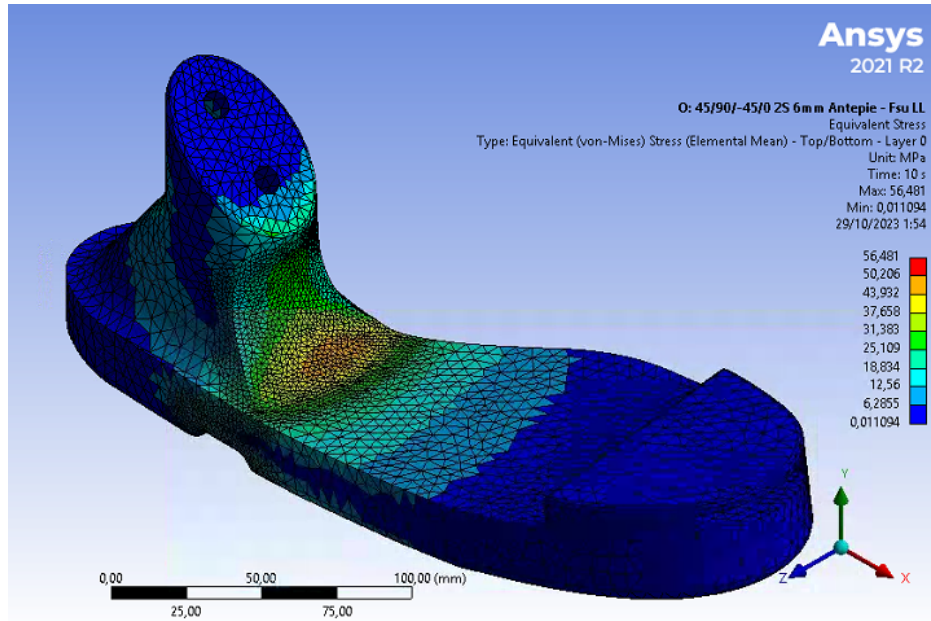


(a) Esfuerzo de von Mises [MPa].

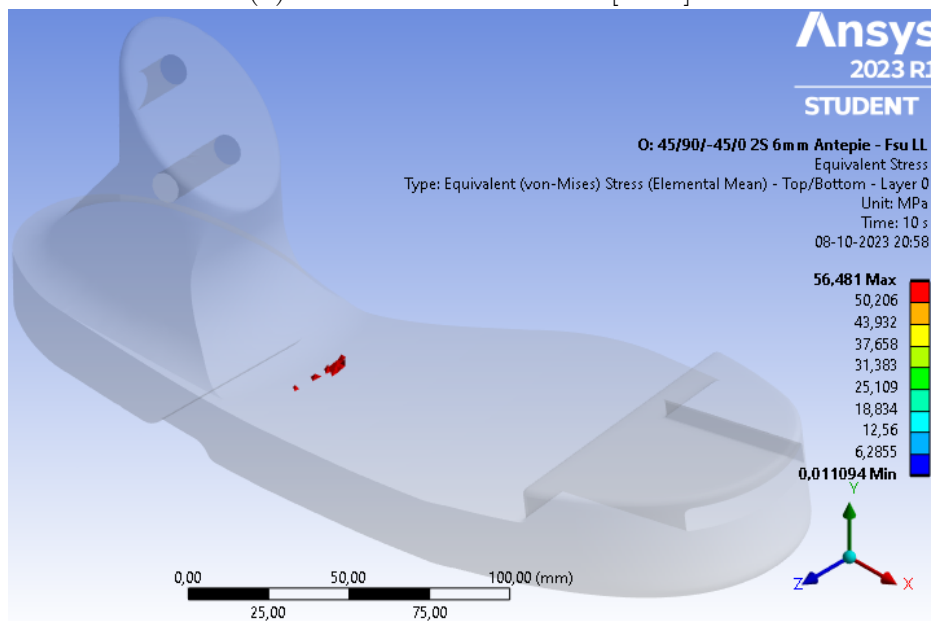


(b) Elementos bajo falla.

Figura 5.16: Resultados de esfuerzos sobre cuerpo PA-12 para nivel superior de  $F_{2su}$  en prueba con laminado  $\{[45/90/-45/0]_{2s}\}_2 - \sigma_{max} = 57,97[MPa]$ .



(a) Esfuerzo de von Mises [MPa].



(b) Elementos bajo falla.

Figura 5.17: Resultados de esfuerzos sobre cuerpo PA-12 para nivel inferior de  $F_{2su}$  en prueba con laminado  $\{[45/90/-45/0]_{2s}\}_2 - \sigma_{max} = 56,48[MPa]$ .

Se obtuvo un histograma que agrupa los esfuerzos de los elementos del cuerpo principal para ambos niveles de carga, lo cual permite obtener un estimativo de tendencia central de la prueba (ver figura 5.22 y la tabla 5.7).

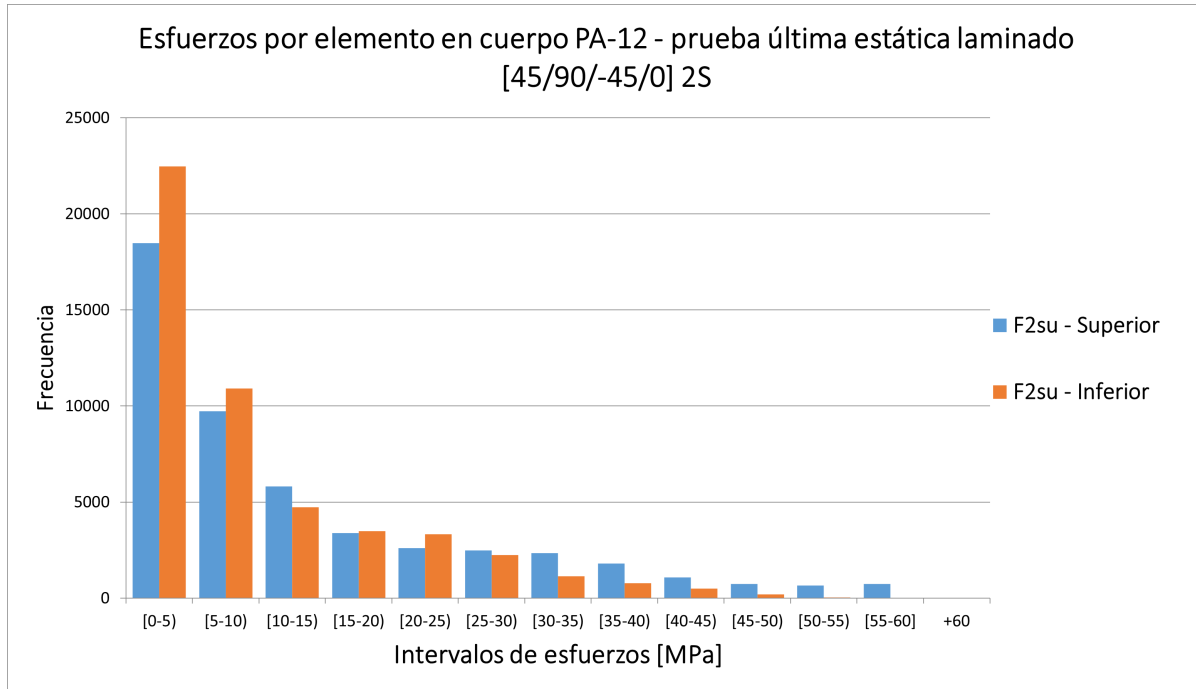


Figura 5.18: Histograma comparativo frecuencia - esfuerzo para prueba última estática en laminado  $\{[45/90/ - 45/0]_{2s}\}_2$ .

Tabla 5.7: Tabla de frecuencias para prueba última estática en laminado  $\{[45/90/ - 45/0]_{2s}\}_2$ .

Intervalo [MPa]	Frecuencia	
	Nivel superior	Nivel Inferior
[0-5)	18483	22473
[5-10)	9723	10909
[10-15)	5811	4726
[15-20)	3386	3485
[20-25)	2595	3317
[25-30)	2483	2252
[30-35)	2342	1149
[35-40)	1795	782
[40-45)	1075	505
[45-50)	741	192
[50-55)	668	45
[55-60]	741	8
+60	0	0

Resulta evidente que ciertos elementos del cuerpo principal se encuentran bajo falla estática. Estos elementos junto al volumen y al porcentaje del total del cuerpo que representan se muestran en la tabla 5.8

Tabla 5.8: Elementos bajo falla y volumen relativo porcentual para prueba estática en laminado  $[45/90/-45/0]_{2s}$ .

Item	Nivel superior	Nivel inferior
Elementos en falla	1006	19
Volumen en falla $[mm]^3$	1394,40	15,61
% de volumen total	0,1729 %	0,0019 %

Una manera de visualizar que tan severo es el daño al que se ven expuestos los elementos sobre fluencia, es analizando la deformación plástica una vez sobrepasado el límite elástico. Para el caso con laminado  $\{[45/90/-45/0]_{2s}\}_2$  la figura 5.19 muestra las deformaciones unitarias plásticas para la cota inferior y superior de carga sobre antepié.

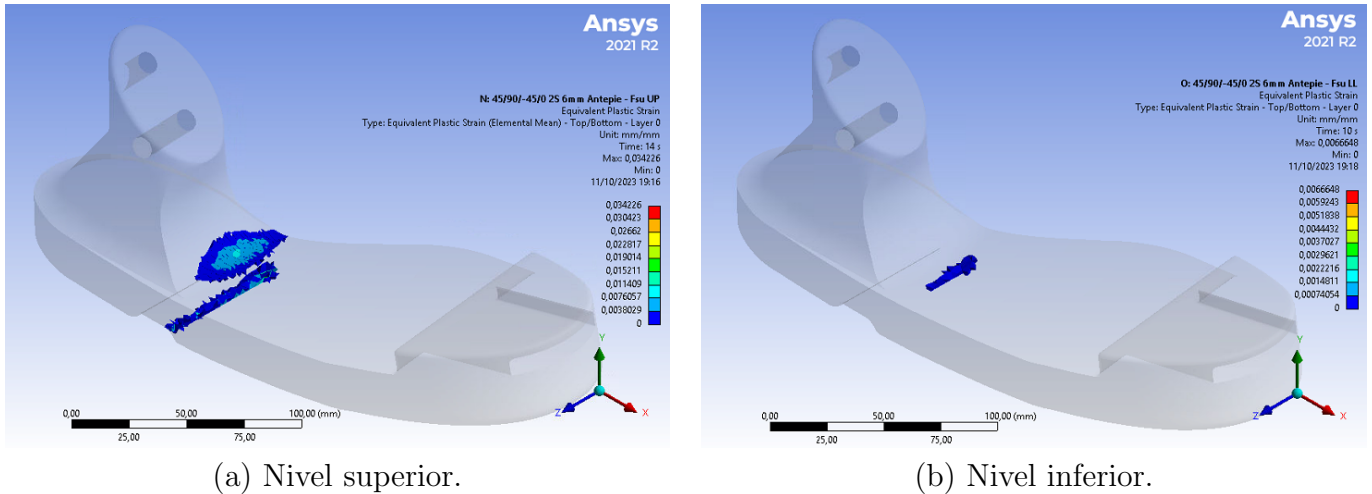
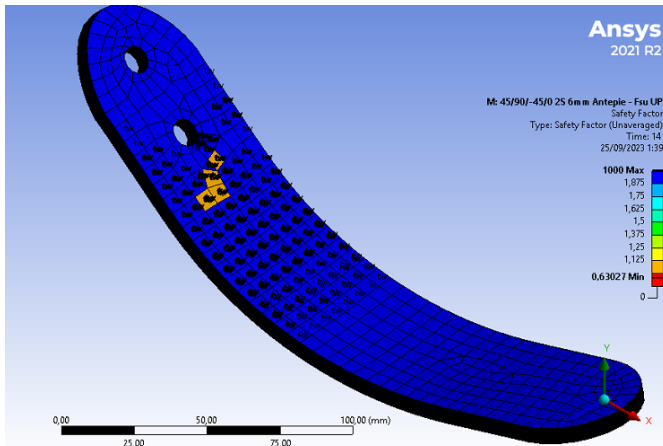


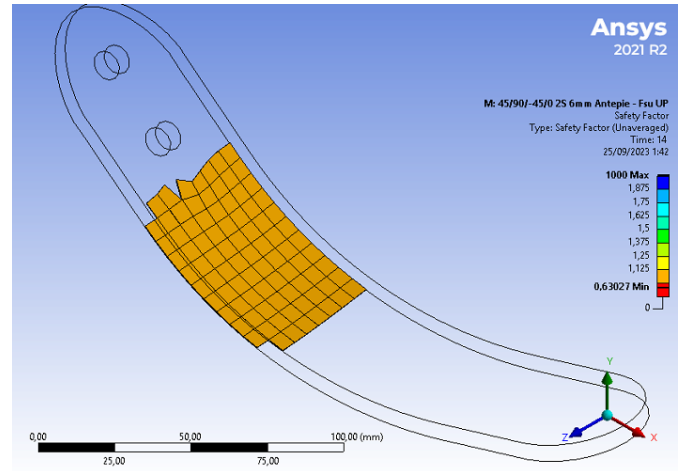
Figura 5.19: Componente plástica de la deformación unitaria en elementos sobre fluencia para prueba  $F_{2su}$  con laminado  $\{[45/90/-45/0]_{2s}\}_2$ .

Se tiene entonces, que la deformación plástica sobre el cuerpo de PA-12 es del orden de 3,4 % y 0,6 % para las cotas superior e inferior respectivamente..

Ahora bien, los factores de seguridad una vez aplicado el criterio de Tsai-Wu en el laminado para las cotas superior e inferior se muestran en la figura 5.20.

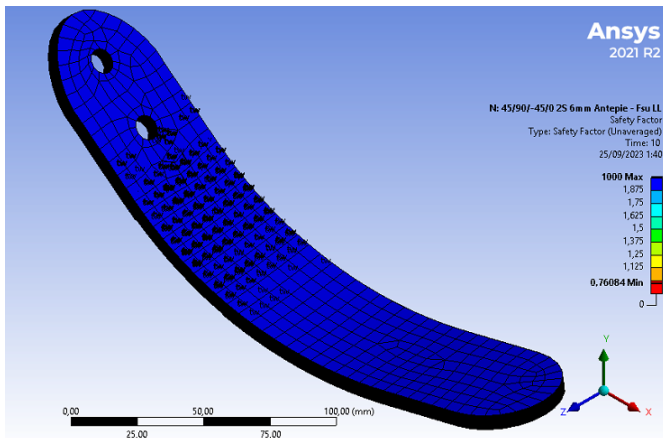


(a) Factor de seguridad con criterio de Tsai-Wu.

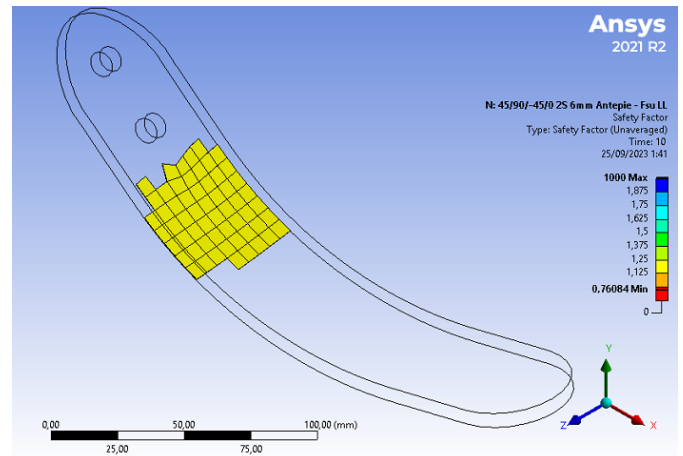


(b) Elementos bajo falla.

Figura 5.20: Factores de seguridad sobre laminado de carbono  $\{[45/90/-45/0]_{2s}\}_2$  para nivel superior  $F_{2su} - FS_{min} = 0,65[-]$ .



(a) Factor de seguridad con criterio de Tsai-Wu.



(b) Elementos bajo falla.

Figura 5.21: Factores de seguridad sobre laminado de carbono  $\{[45/90/-45/0]_{2s}\}_2$  para nivel inferior  $F_{2su} - FS_{min} = 0,76[-]$ .

Las figuras 5.20 y 5.21 se complementan con un histograma de frecuencias - factor de seguridad con su respectiva (ver figura 5.22 y tabla 5.9).

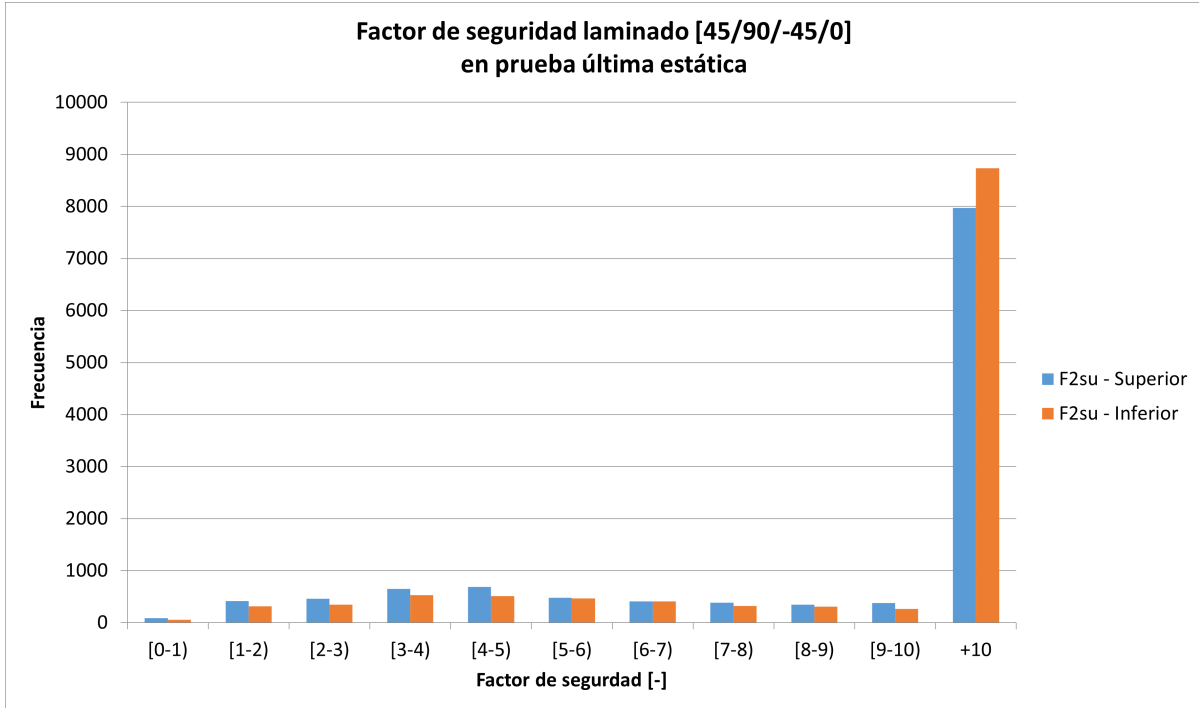


Figura 5.22: Histograma comparativo frecuencia - factor de seguridad en laminado  $\{[45/90/ - 45/0]_{2s}\}_2$  para prueba última estática.

Tabla 5.9: Tabla de frecuencias para factores de seguridad - prueba última estática en laminado  $\{[45/90/ - 45/0]_{2s}\}_2$ .

Intervalo FS [-]	Frecuencia	
	Nivel superior	Nivel Inferior
[0-1)	89	57
[1-2)	415	312
[2-3)	461	344
[3-4)	647	530
[4-5)	684	509
[5-6)	480	467
[6-7)	408	411
[7-8)	384	321
[8-9)	345	310
[9-10)	375	261
+10	7968	8734

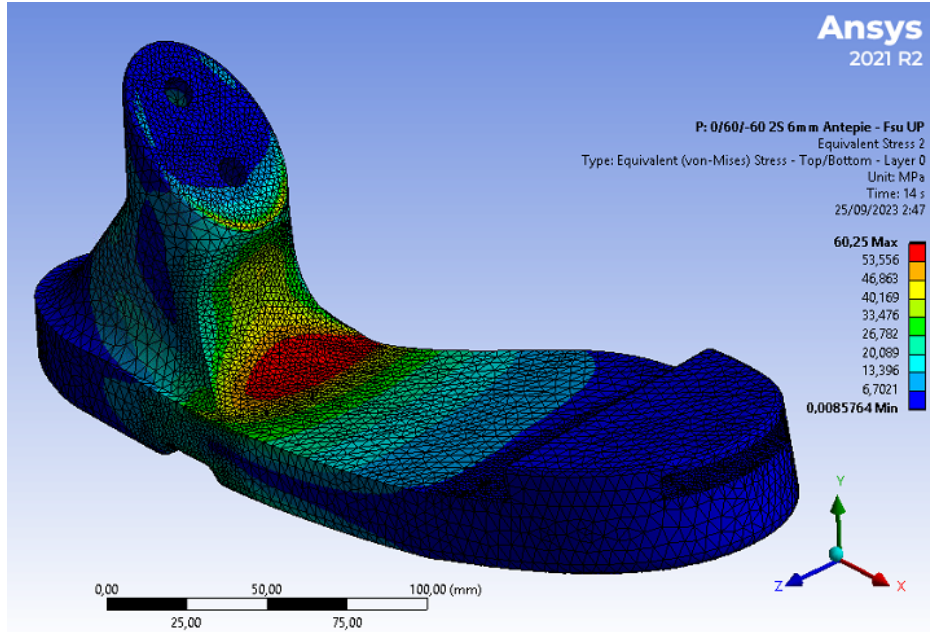
El volumen que se encuentra bajo el valor de 1 en factor de seguridad se muestra en la tabla 5.10

Tabla 5.10: Elementos bajo falla y volumen relativo porcentual para prueba estática en laminado  $\{[45/90/ - 45/0]_{2s}\}_2$ .

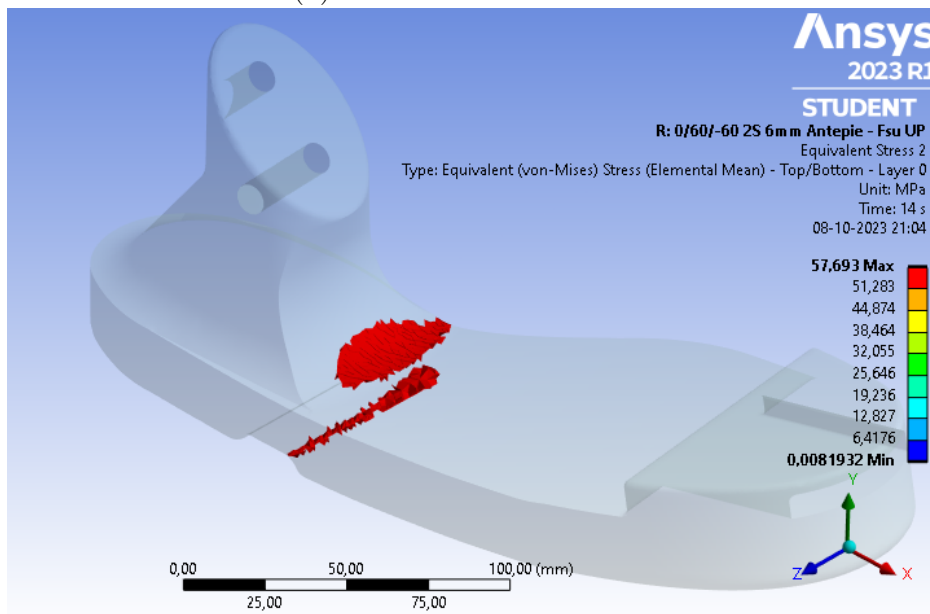
Item	Nivel superior	Nivel inferior
Elementos en falla	89	57
Volumen en falla $[mm]^3$	518,60	341,17
% de volumen total	0,7037 %	0,4629 %

■ **Laminado** $\{[0/60/ - 60]_{2s}\}_2$ :

Para este caso los resultados de esfuerzo equivalente de von Mises obtenidos junto a los elementos en falla sobre el cuerpo de PA-12 al realizar la prueba última estática tanto para el nivel superior como inferior se muestran en las figuras 5.23 y 5.24.

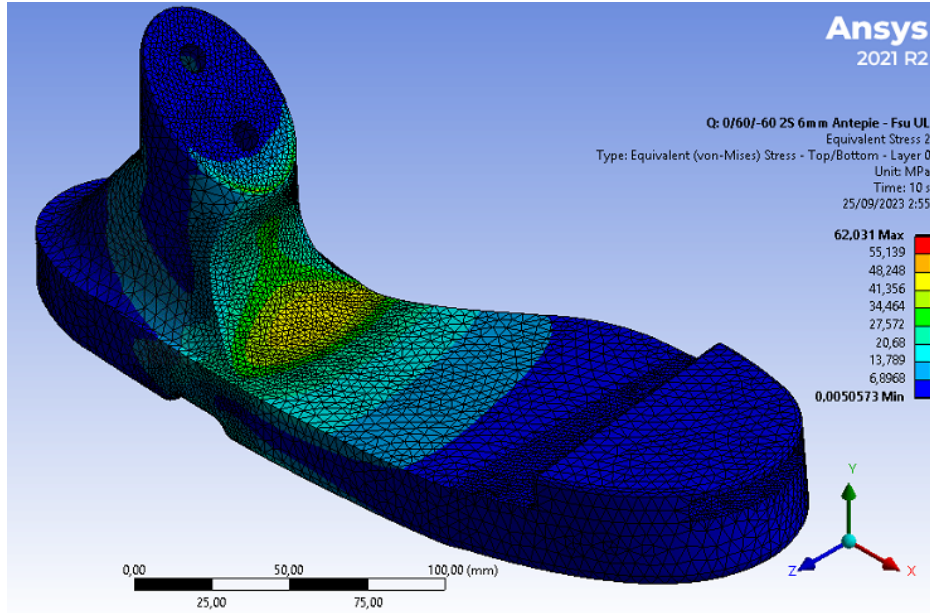


(a) Esfuerzo de von Mises.

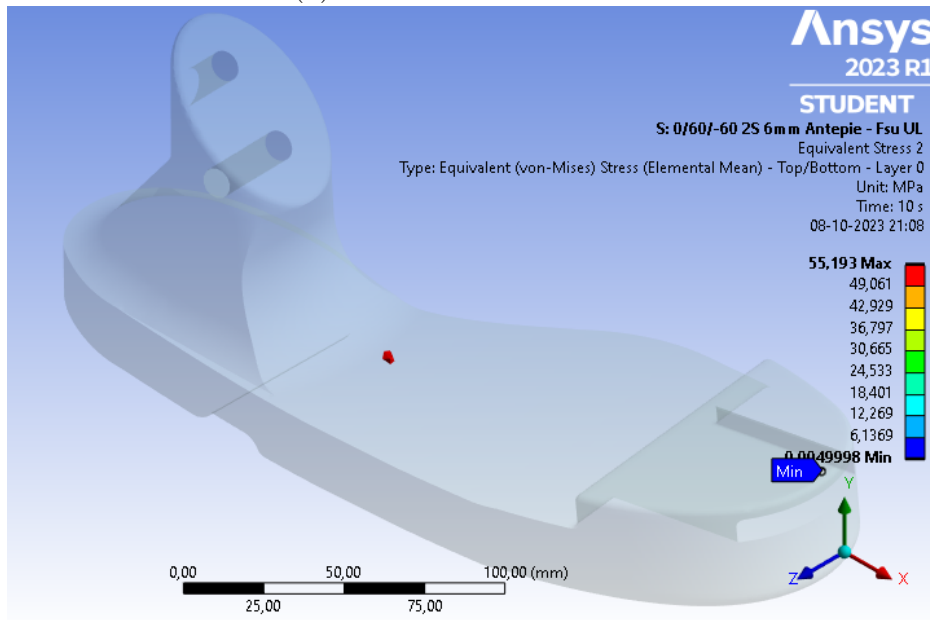


(b) Elementos bajo falla.

Figura 5.23: Resultados de esfuerzos sobre cuerpo PA-12 para nivel superior de  $F_{2su}$  en prueba con laminado  $\{[0/60/-60]_{2S}\}_2$  -  $\sigma_{max} = 57,69[MPa]$ .



(a) Esfuerzo de von Mises.



(b) Elementos bajo falla.

Figura 5.24: Resultados de esfuerzos sobre cuerpo PA-12 para nivel inferior  $F_{2su}$  en prueba con laminado  $\{[0/60/-60]_{2S}\}_2 - \sigma_{max} = 55,19[MPa]$ .

Tal como en el caso anterior, se muestra un histograma que agrupa los esfuerzos percibidos por los elementos del cuerpo principal para ambos niveles de carga, lo cual permite obtener un estimativo de tendencia central de la prueba (ver figura 5.25 y tabla 5.11).

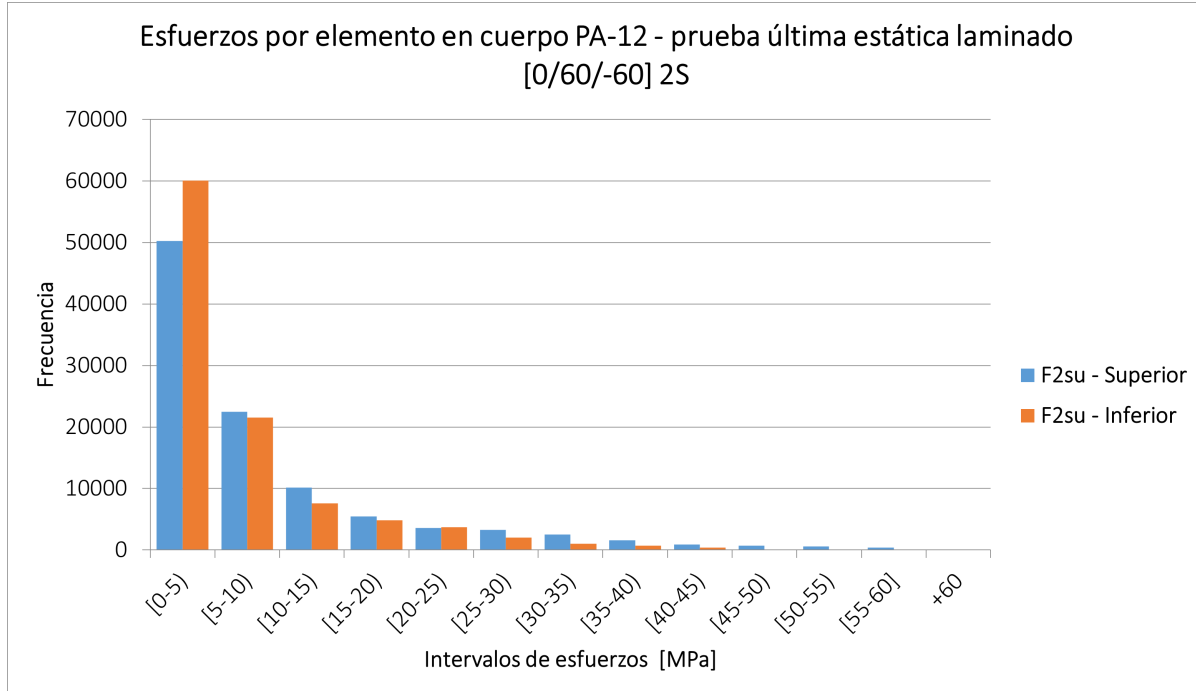


Figura 5.25: Histograma comparativo frecuencia - esfuerzo para prueba última estática en laminado  $\{[0/60/ - 60]_{2S}\}_2$ .

Tabla 5.11: Tabla de frecuencias para prueba última estática en laminado  $\{[0/60/ - 60]_{2S}\}_2$

Intervalo [MPa]	Frecuencia	
	Nivel superior	Nivel Inferior
[0-5)	50240	60039
[5-10)	22459	21558
[10-15)	10127	7596
[15-20)	5447	4838
[20-25)	3602	3717
[25-30)	3285	2001
[30-35)	2518	1019
[35-40)	1597	680
[40-45)	923	376
[45-50)	687	59
[50-55)	607	22
[55-60]	414	1
+60	0	0

Es claro notar que ciertos elementos del cuerpo principal se encuentran bajo falla estática, estos elementos junto al volumen y al porcentaje del total del cuerpo que representan se muestran en la tabla 5.8

Tabla 5.12: Elementos bajo falla y volumen relativo porcentual para prueba estática en laminado  $\{[0/60/-60]_{2S}\}_2$ .

Item	Nivel superior	Nivel inferior
Elementos en falla	671	7
Volumen en falla $[mm]^3$	871,02	5,11
% de volumen total	0,1080 %	0,0006 %

Tal cual como para el caso anterior, la forma de visualizar que tan severo es el daño sobre fluencia, es analizando la deformación plástica de los elementos una vez sobrepasan el límite elástico, para el caso con laminado  $\{[0/60/-60]_{2S}\}_2$  la figura 5.26 muestra las deformaciones unitarias plásticas para la cota inferior y superior de carga sobre antepié.

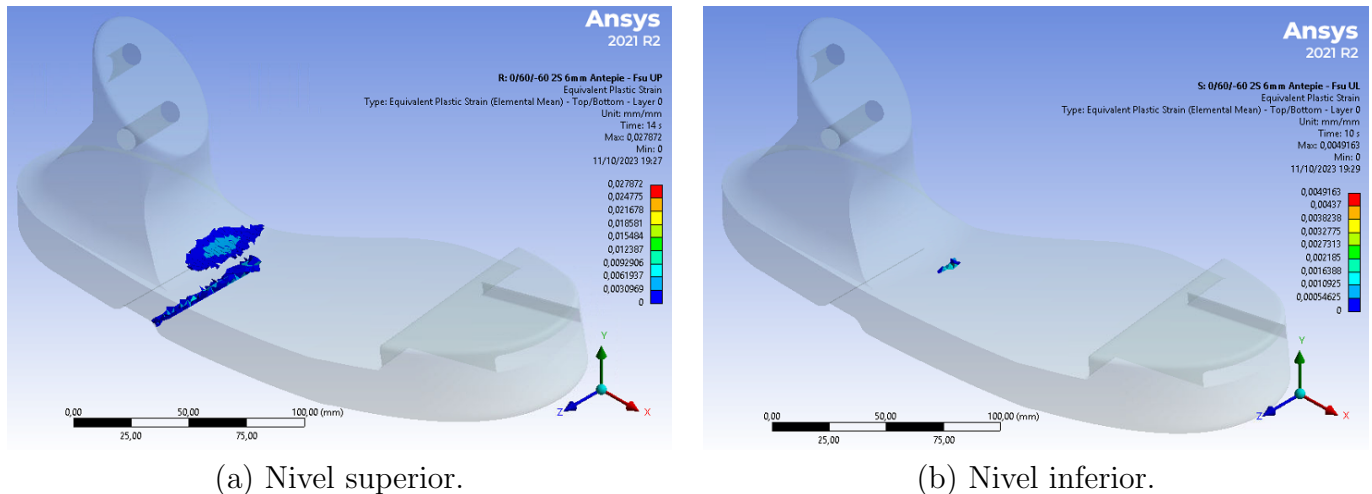
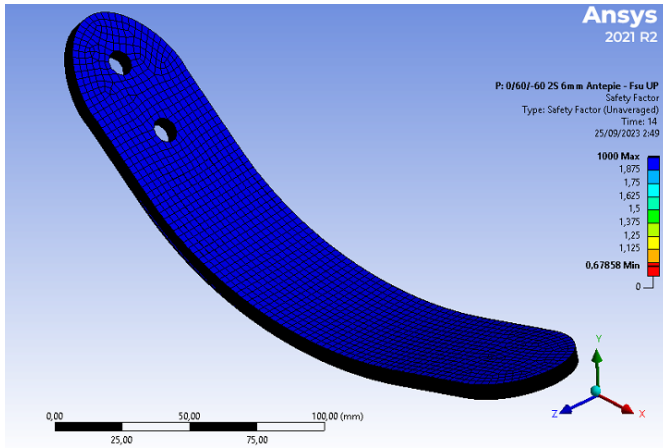


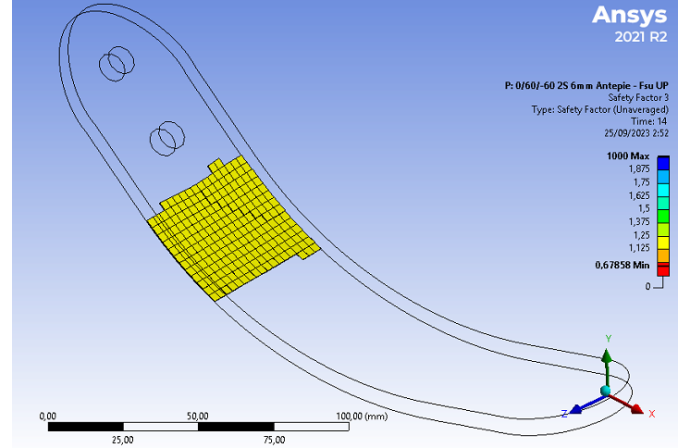
Figura 5.26: Componente plástica de la deformación unitaria en elementos sobre fluencia para prueba  $F_{2su}$  con laminado  $\{[0/60/-60]_{2S}\}_2$ .

La deformación unitaria plástica máxima sobre el cuerpo de PA-12 es del orden de 2,7% y 0,4% para la prueba estática última con cota superior e inferior respectivamente.

Con respecto a los factores de seguridad en el laminado, una vez aplicado el criterio de Tsai-Wu los valores para pruebas de carga última estática superior e inferior se muestran en las figuras 5.27 y 5.28.

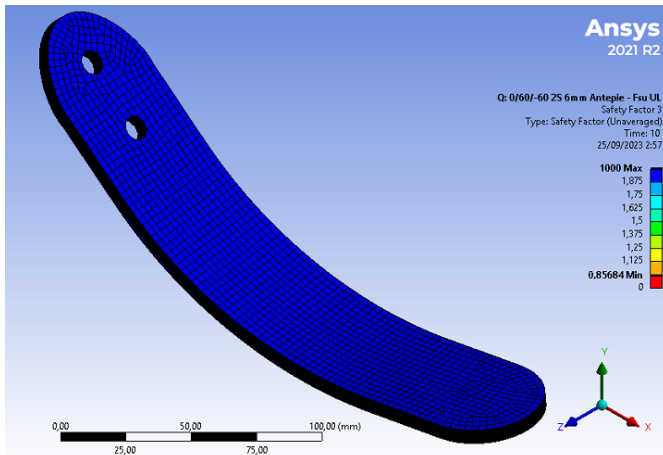


(a) Factor de seguridad con criterio de Tsai-Wu.

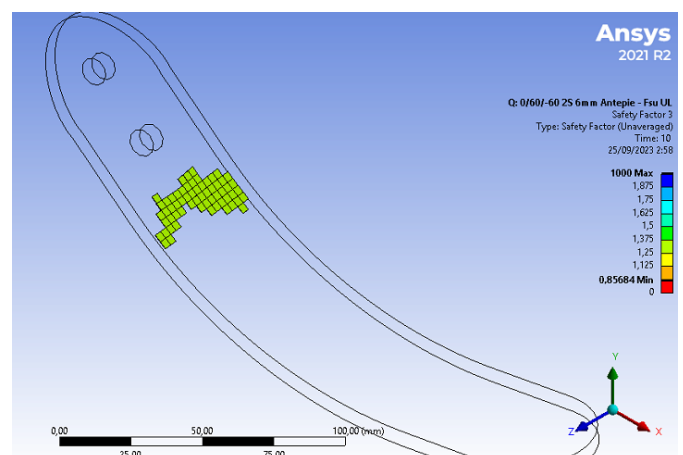


(b) Elementos bajo falla.

Figura 5.27: Factores de seguridad sobre laminado de carbono  $\{[0/60/-60]_{2S}\}_2$  para nivel superior  $F_{2su} - FS_{min} = 0,67[-]$ .



(a) Factor de seguridad con criterio de Tsai-Wu.



(b) Elementos bajo falla.

Figura 5.28: Factores de seguridad de laminado de carbono  $\{[0/60/-60]_{2S}\}_2$  para nivel inferior  $F_{2su} - FS_{min} = 0,85[-]$ .

El histograma de frecuencias - factor de seguridad de la figura 5.29 complementa la información entregada por las figuras 5.27 y 5.28.

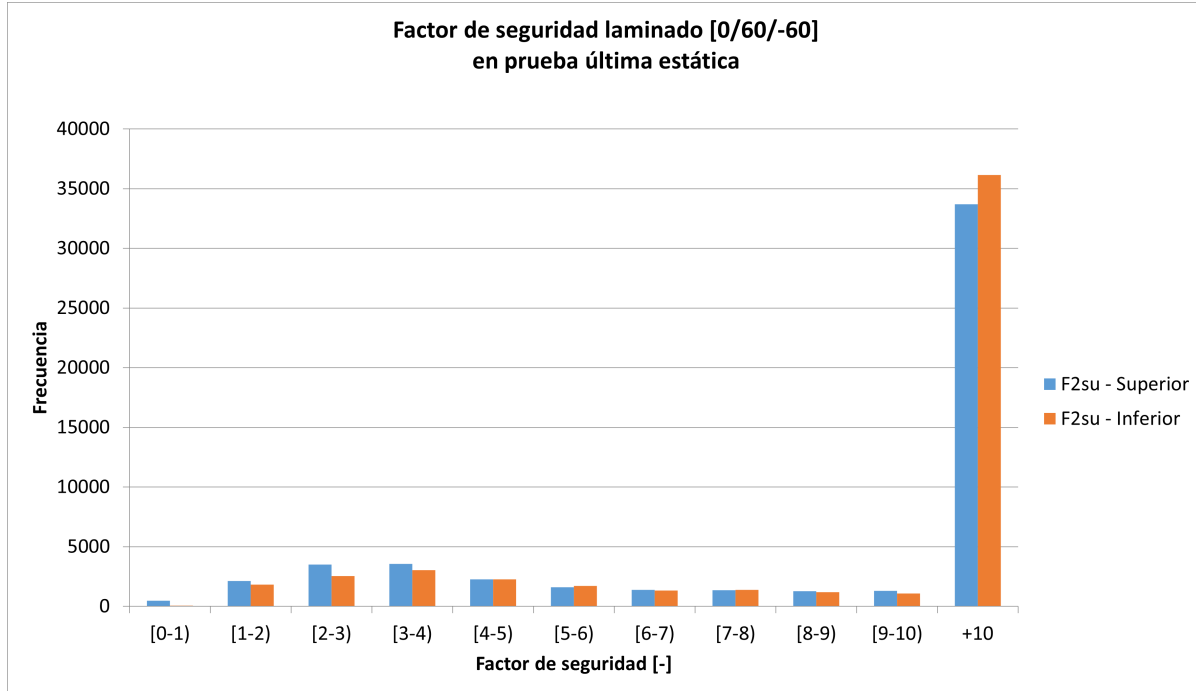


Figura 5.29: Histograma comparativo frecuencia - factor de seguridad en laminado  $[0/60/-60]_{2S}$  para prueba última estática.

Tabla 5.13: Tabla de frecuencias para factores de seguridad - prueba última estática en laminado  $[0/60/-60]_{2S}$ .

Intervalo FS	Frecuencia	
	Nivel superior	Nivel Inferior
[0-1)	467	70
[1-2)	2122	1818
[2-3)	3500	2550
[3-4)	3554	3022
[4-5)	2266	2260
[5-6)	1613	1703
[6-7)	1378	1335
[7-8)	1355	1370
[8-9)	1279	1189
[9-10)	1295	1069
+10	33695	36138

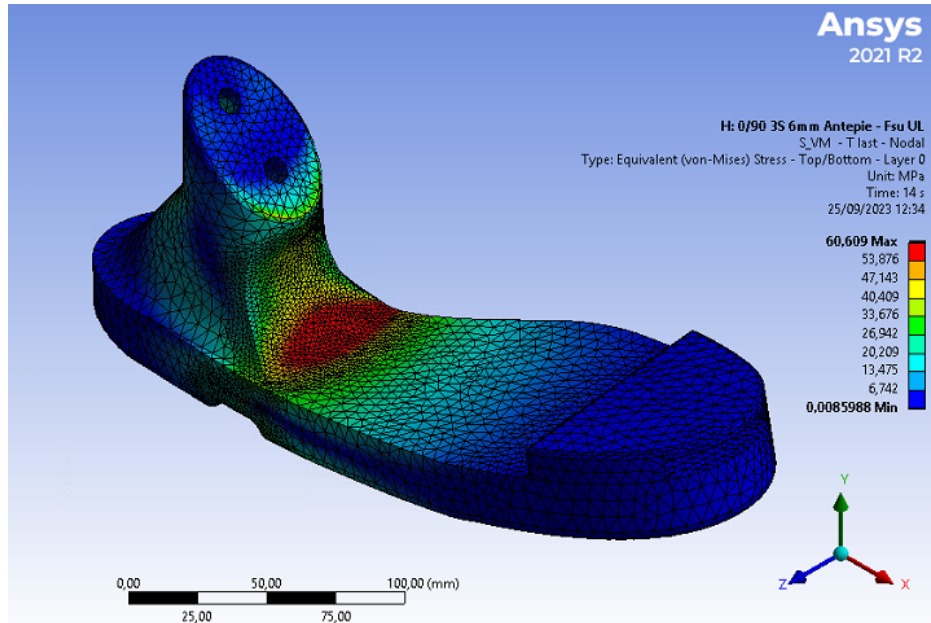
Así mismo, el volumen que se encuentra bajo el valor de 1 en factor de seguridad se muestra en la tabla 5.14

Tabla 5.14: Elementos bajo falla y volumen relativo porcentual para prueba estática en laminado  $[0/60/-60]_{2S}$ .

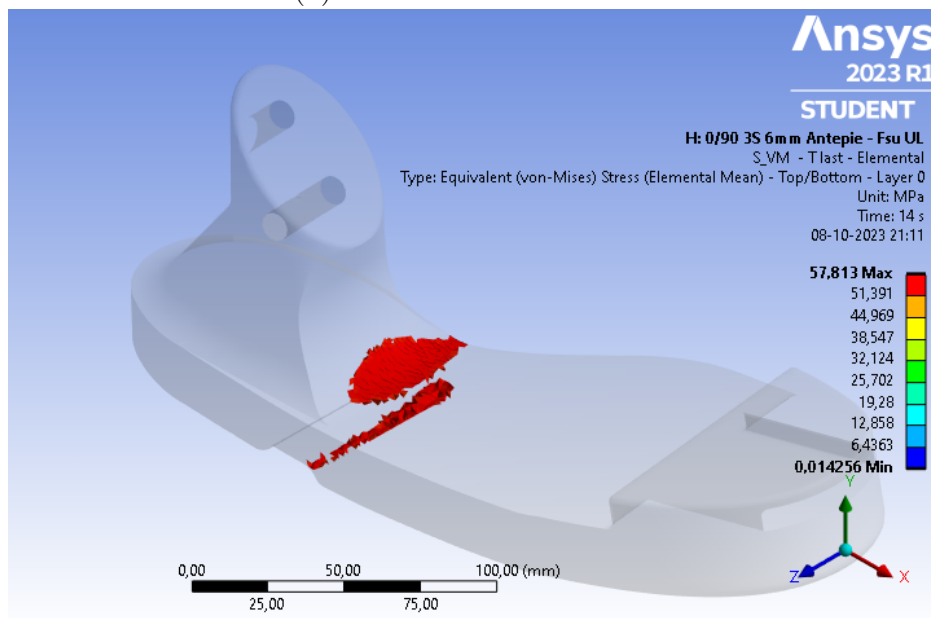
Item	Nivel superior	Nivel inferior
Elementos en falla	467	70
Volumen en falla $[mm]^3$	667,74	101,17
% de volumen total	0,9044 %	0,1370 %

■ **Laminado**  $\{[0/90]_{3S}\}_3$ :

Los resultados de esfuerzo equivalente de von Mises obtenidos junto a los elementos en falla sobre el cuerpo de PA-12 al realizar la prueba última estática tanto para el nivel superior como inferior se muestran en la figura 5.30 y 5.31, respectivamente.

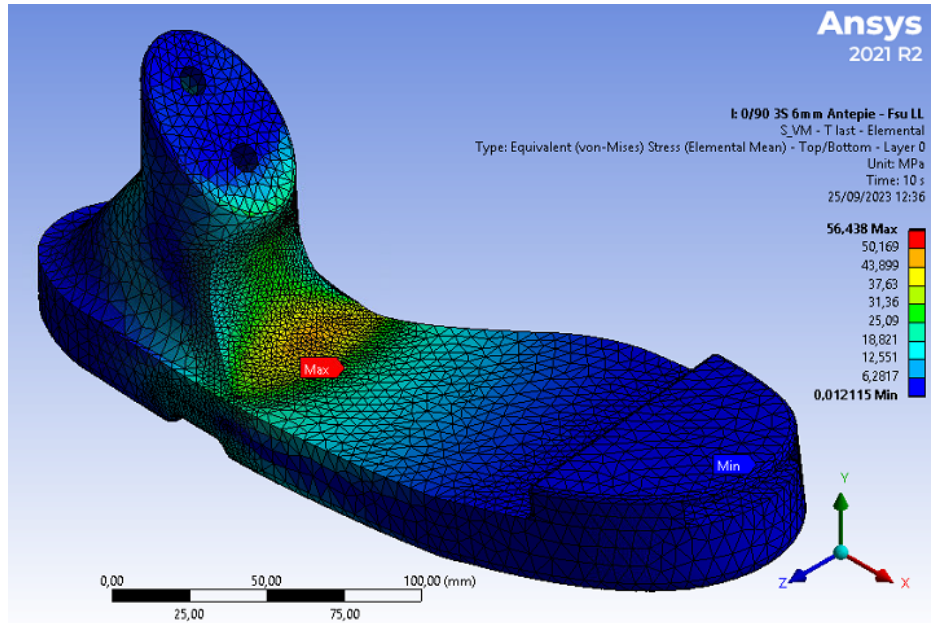


(a) Esfuerzo de von Mises.

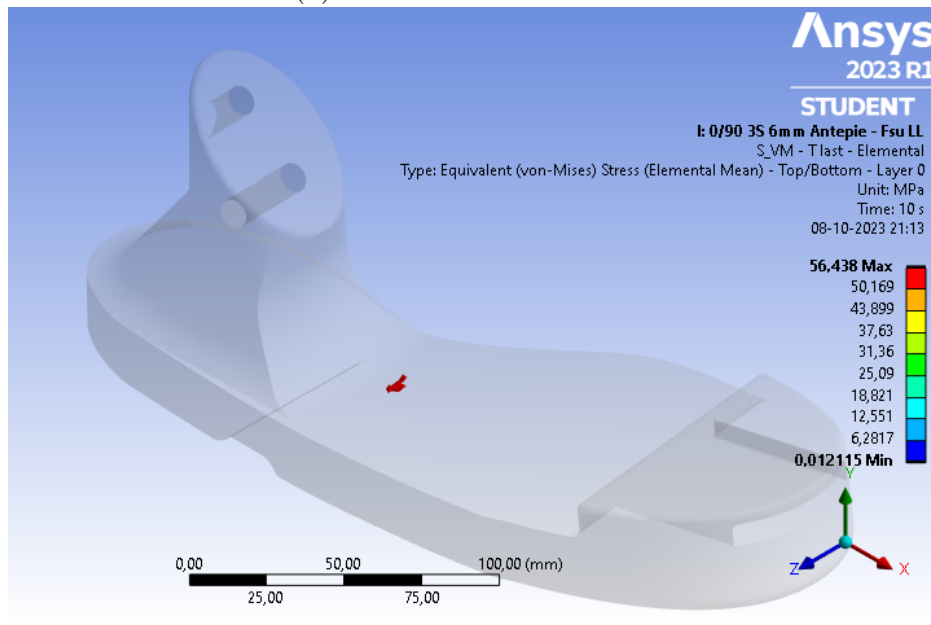


(b) Elementos bajo falla.

Figura 5.30: Resultados de esfuerzos sobre cuerpo PA-12 para nivel superior de  $F_{2su}$  en prueba con laminado  $\{[0/90]_{3S}\}_3 - \sigma_{max} = 57,81[MPa]$ .



(a) Esfuerzo de von Mises.



(b) Elementos bajo falla.

Figura 5.31: Resultados de esfuerzos sobre cuerpo PA-12 para nivel inferior  $F_{2su}$  n prueba con laminado  $\{[0/90]_{3S}\}_3 - \sigma_{max} = 56,43[MPa]$ .

Se muestra también un histograma que agrupa los esfuerzos percibidos por los elementos del cuerpo principal para ambos niveles de carga, lo cual permite obtener un estimativo de tendencia central de la prueba.

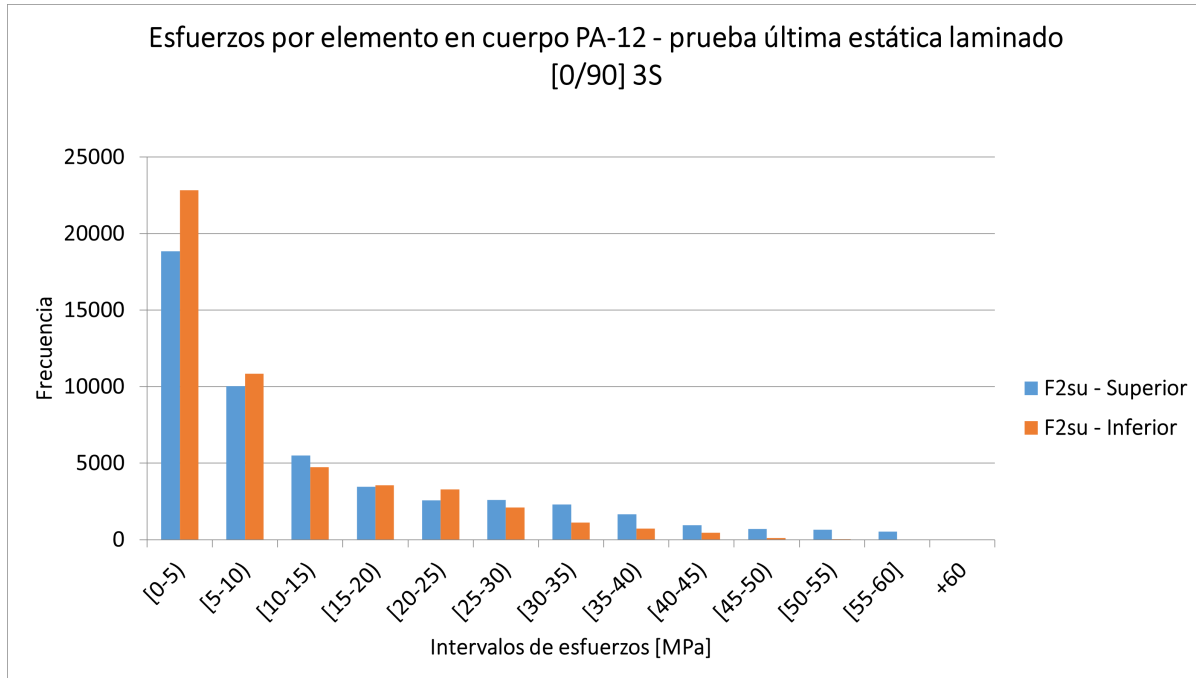


Figura 5.32: Histograma comparativo frecuencia - esfuerzo para prueba última estática en laminado  $\{[0/90]_{3S}\}_3$ .

Tabla 5.15: Tabla de frecuencias para prueba última estática en laminado  $\{[0/90]_{3S}\}_3$ .

Intervalo [MPa]	Frecuencia	
	Nivel superior	Nivel Inferior
[0-5)	18852	22845
[5-10)	10034	10844
[10-15)	5513	4740
[15-20)	3461	3570
[20-25)	2583	3285
[25-30)	2593	2104
[30-35)	2298	1113
[35-40)	1656	734
[40-45)	959	444
[45-50)	711	120
[50-55)	642	37
[55-60]	541	7
+60	0	0

Resulta evidente que ciertos elementos del cuerpo principal se encuentran bajo falla estática, estos elementos junto al volumen y al porcentaje del total del cuerpo que representan se muestran en la tabla 5.8

Tabla 5.16: Elementos bajo falla y volumen relativo porcentual para prueba estática en laminado  $[0/90]_{3S}$ .

Item	Nivel superior	Nivel inferior
Elementos en falla	810	12
Volumen en falla $[mm]^3$	1068,45	8,34
% de volumen total	0,1325 %	0,0010 %

De forma análoga a los casos anteriores, la deformación plástica de los elementos una vez sobrepasan el límite elástico, para el caso con laminado  $\{[0/90]_{3S}\}_3$  la figura 5.33 muestra las deformaciones unitarias plásticas para la cota inferior y superior de carga sobre antepié.

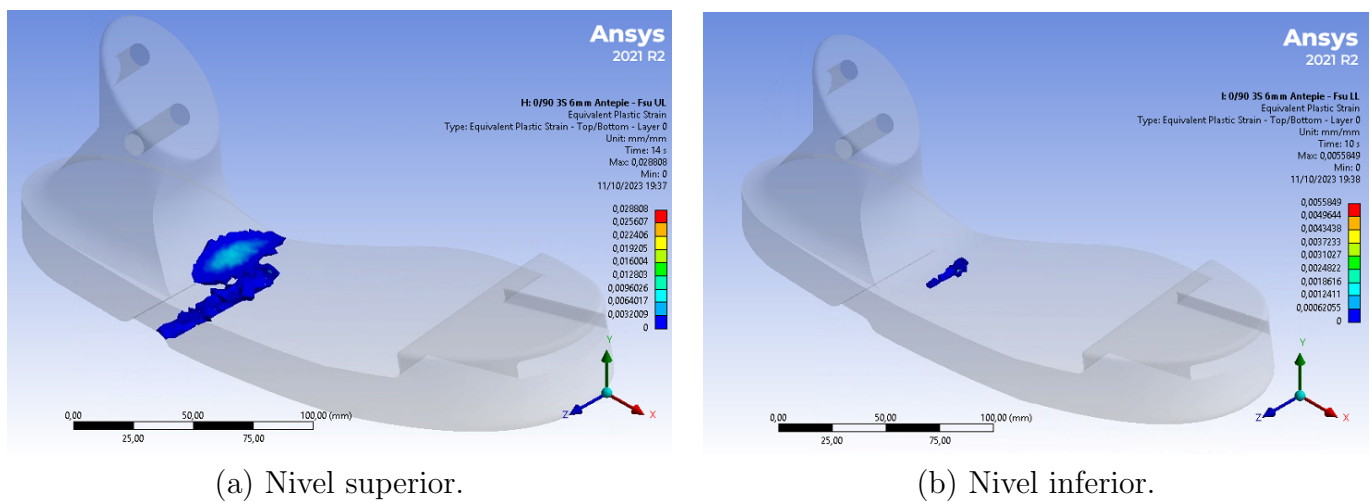
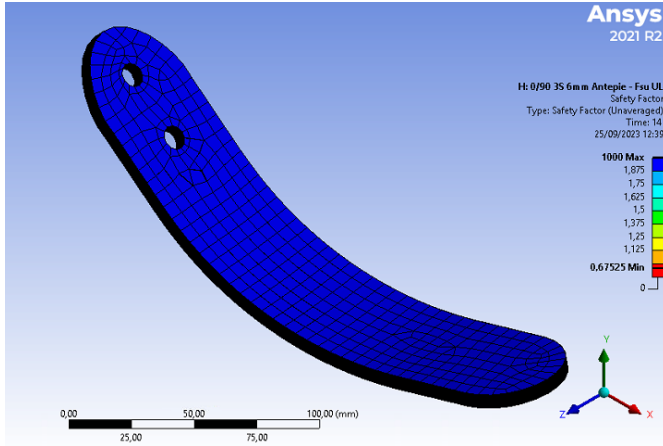


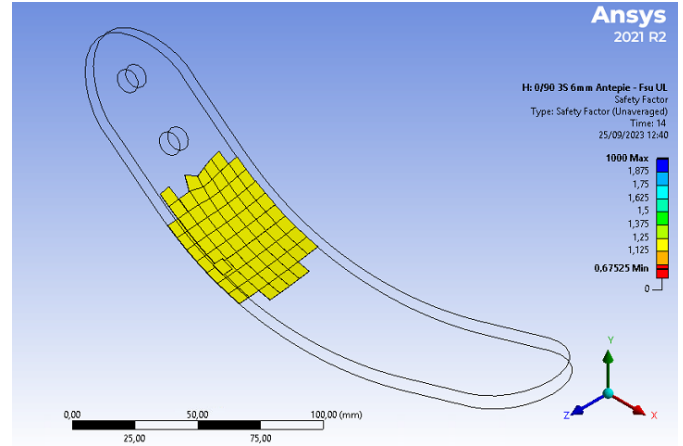
Figura 5.33: Componente plástica de la deformación unitaria en elementos sobre fluencia para prueba  $F_{2su}$  con laminado  $\{[0/90]_{3S}\}_3$ .

Se tiene entonces, que la deformación plástica máxima sobre el cuerpo de PA-12 es del orden de 2,8% y 0,5% para la prueba última estática de nivel superior e inferior respectivamente.

Los factores de seguridad una vez aplicado el criterio de Tsai-Wu en el laminado para las cotas superior e inferior se muestran en la figura 5.34.

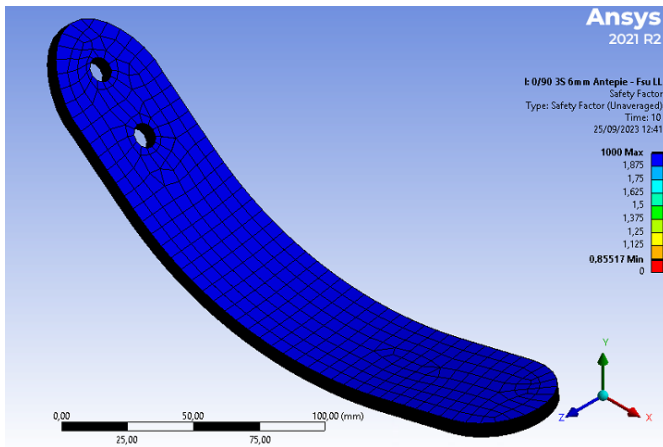


(a) Factor de seguridad con criterio de Tsai-Wu.

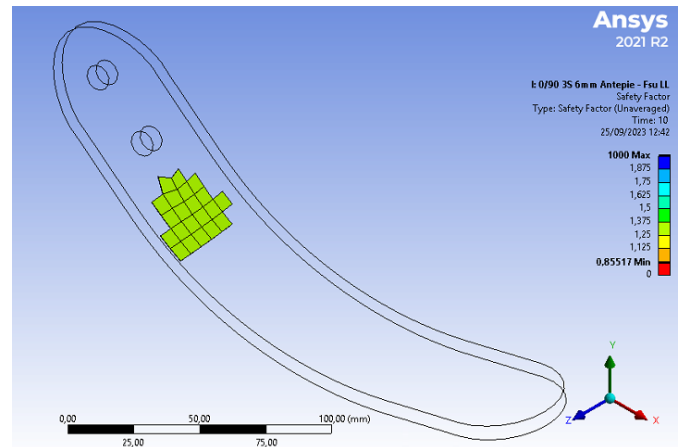


(b) Elementos bajo falla.

Figura 5.34: Factores de seguridad sobre laminado de carbono  $\{[0/90]_{3S}\}_3$  para nivel superior  $F_{2su}$  -  $FS_{min} = 0,67[-]$ .



(a) Factor de seguridad con criterio de Tsai-Wu.



(b) Elementos bajo falla.

Figura 5.35: Factores de seguridad sobre laminado de carbono  $\{[0/90]_{3S}\}_3$  para nivel inferior  $F_{2su}$  -  $FS_{min} = 0,85[-]$ .

Las figuras 5.34 y 5.35 se complementan con un histograma de frecuencias - factor de seguridad con su respectiva tabla (ver figura 5.36 y tabla 5.17).

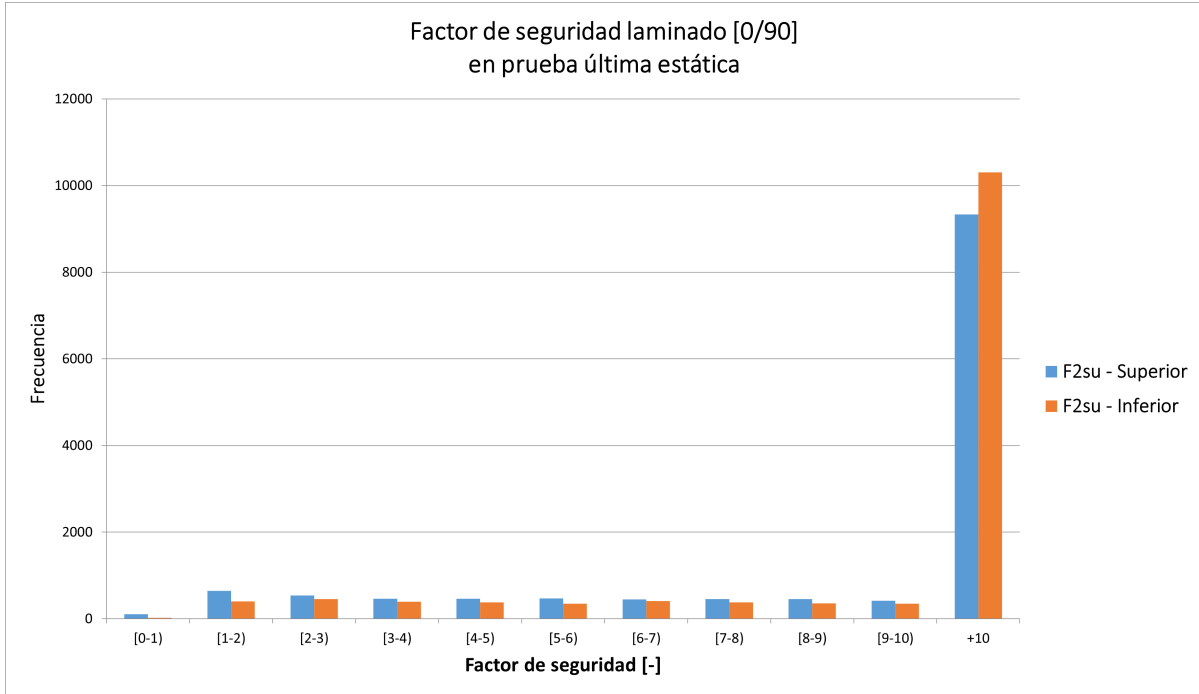


Figura 5.36: Histograma comparativo frecuencia - factor de seguridad en laminado  $\{[0/90]_{3S}\}_3$  para prueba última estática.

Tabla 5.17: Tabla de frecuencias para factores de seguridad - prueba última estática en laminado  $\{[0/90]_{3S}\}_3$ .

Intervalo FS	Frecuencia	
	Nivel superior	Nivel Inferior
[0-1)	104	21
[1-2)	642	400
[2-3)	538	455
[3-4)	461	391
[4-5)	461	380
[5-6)	468	349
[6-7)	450	405
[7-8)	458	380
[8-9)	457	353
[9-10)	416	349
+10	9333	10305

Así mismo, el volumen que se encuentra bajo el valor de 1 en factor de seguridad se muestra en la tabla 5.18

Tabla 5.18: Elementos bajo falla y volumen relativo porcentual para prueba estática en laminado  $\{[0/90]_{3s}\}_3$ .

Item	Nivel superior	Nivel inferior
Elementos en falla	104	21
Volumen en falla $[mm]^3$	569,94	118,77
% de volumen total	0,7733 %	0,1611 %

### 5.5.3. Análisis de prueba última estática

De los resultados observados en las pruebas de resistencia última estática se puede apreciar que la versión del ensayo para carga última en nivel superior sobre el talón es superada por el cuerpo de PA-12 para todos los laminados. Así mismo se observa que los factores de seguridad de los distintos laminados son mayores a 1 en todos los casos, por lo que la prótesis pasa la prueba para todas las configuraciones de laminados posibles. Por otro lado, respecto a al caso de carga última estática sobre el antepié, es posible notar que esta representa la prueba crítica y por tanto, la que mayor análisis debe recibir, para ello se condensan los principales resultados obtenidos para este ensayo en la tabla 5.19.

Tabla 5.19: Principales resultados obtenidos en prueba última estática sobre antepié para niveles superior e inferior de carga.

-	Nivel de carga $F_{2su}$	% de volumen en falla estática	
		Cuerpo PA-12	Laminado
$\{[0/45/-45/90]_{2s}\}_2$	Superior	0,1729 %	0,7037 %
	Inferior	0,0019 %	0,4629 %
$\{[0/60/-60]_{2s}\}_3$	Superior	0,1080 %	0,9044 %
	Inferior	0,0006 %	0,1370 %
$\{[0/90]_{3s}\}_3$	Superior	0,1325 %	0,7733 %
	Inferior	0,0010 %	0,1611 %

Así mismo, otro de los resultados a analizar corresponde a la deformación total de la punta de la unidad pie-tobillo con los distintos laminados, dicho resultado sirve de indicativo para visualizar la deflexión máxima del conjunto para los distintos casos. Lo anterior se muestra en la figura 5.37.

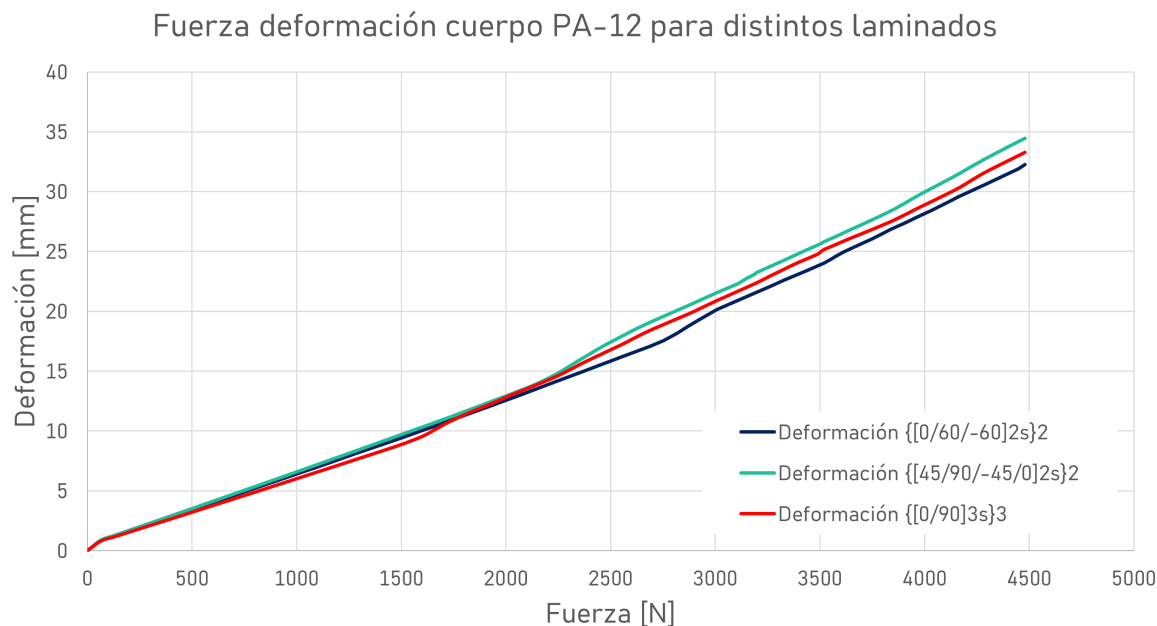


Figura 5.37: Deflexión máxima en unidad pie-tobillo para los distintos laminados en prueba última estática sobre antepié.

De la figura 5.37 se observa que efectivamente el comportamiento de la prótesis es no lineal, con una separación de las curvas en torno a los 2300[N] aproximadamente. Si bien los tres casos son muy parecidos, el laminado que otorga mayor rigidez al sistema es el  $\{[0/60/-60]_{2s}\}_2$ .

Conforme a los resultados obtenidos de la prueba estática, la combinación de laminado que resulta en el menor volumen de PA-12 afectado, así como el menor volumen de laminado bajo falla se da con la combinación  $\{[0/60/-60]_{2s}\}_3$ , por tanto, se escoge dicha configuración para el diseño, y la continuación de análisis de confiabilidad y prueba de fatiga. Cabe mencionar que si bien existe un porcentaje de elementos acumulando deformación plástica del orden del 0,5 % a 3,4 %; el volumen que representa es muy pequeño.

#### 5.5.4. Análisis de confiabilidad

A partir del laminado  $\{[0/60/-60]_{2s}\}_3$  escogido producto del análisis de resultados de prueba última estática es posible realizar un análisis de confiabilidad mediante las funciones de densidad de probabilidad de la resistencia y las cargas del material. Dichas funciones se consideran de la siguiente forma:

- **Resistencia del material:** La resistencia del material se puede considerar en base a los resultados de [Lammens et al. \(2017\)](#) como una distribución normal con promedio  $\mu = 53,22[MPa]$  con una desviación estándar de  $\sigma = 1,14[MPa]$ .

- **Esfuerzos de  $F_{2su-lower-level}$ :** La distribución de esfuerzos para el nivel inferior de carga puede ser considerado como una distribución de tipo Weibull con factor de escala  $\lambda = 0,8825[-]$  y de forma  $\alpha = 5,581365[-]$ .
- **Esfuerzos de  $F_{2su-upper-level}$ :** Por último, la distribución de esfuerzos para el nivel superior de carga de igual forma se puede tomar como una distribución de Weibull con parámetro de factor de escala  $\lambda = 0,8883$  y de forma  $\alpha = 7,899162[-]$ .

La figura 5.38 muestra las funciones densidad de probabilidad para los 3 casos listados.

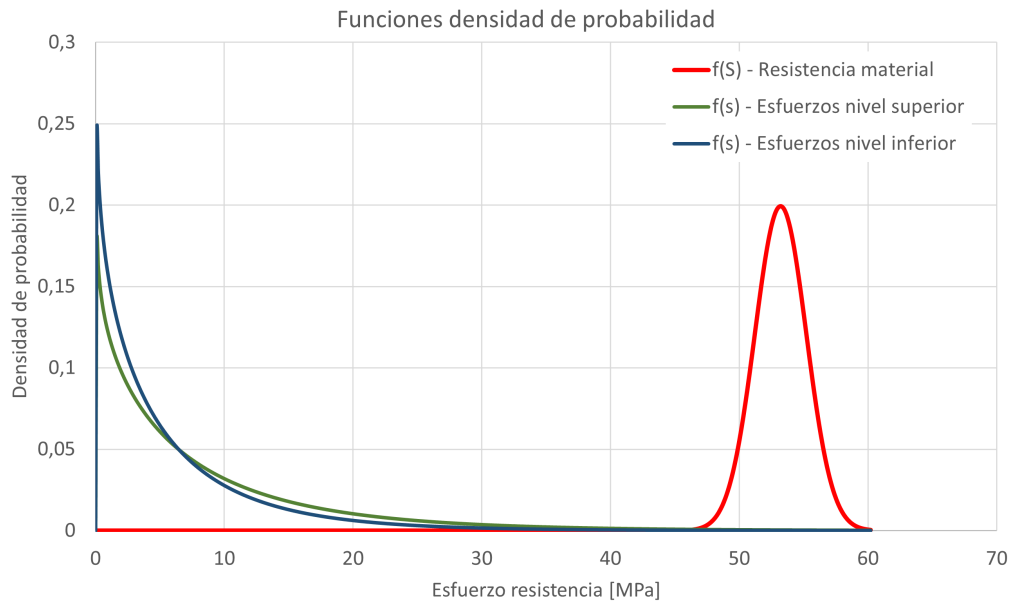


Figura 5.38: Funciones densidad de probabilidad esfuerzo - resistencia para ensayo último estático  $F_{2su}$  nivel superior e inferior.

De esta forma, con los parámetros de cada una de las distribuciones es posible obtener los valores de confiabilidad  $\mathcal{R}$ . Para el caso de  $F_{2su-lower-level}$  la intersección entre funciones de densidad ocurre en  $45,78[\text{MPa}]$ , de donde se obtiene una confiabilidad  $\mathcal{R} = 99,93131\%$ , junto a una probabilidad de falla del  $0,06868\%$ . Por otro lado, en el caso superior  $F_{2su-upper-level}$  las funciones de distribución intersecan en  $46,51[\text{MPa}]$  de donde se obtiene una confiabilidad  $\mathcal{R} = 99,55978\%$  mientras que la probabilidad de falla asociada a este caso es de  $0,44021\%$ .

## 5.6. Prueba de resistencia a la fatiga

Según lo expuesto en la normativa ISO 10328:2016 la prueba cíclica consiste en aplicar de forma alternada las fuerzas cíclicas sobre talón y antepié  $F_{1c}(t)$  y  $F_{2c}(t)$  respectivamente hasta lograr los

$2 \cdot 10^6$  ciclos. Los valores medios y alternos de las fuerzas para un nivel P5 se muestran en la tabla 5.20:

Tabla 5.20: Fuerzas cíclicas para nivel P5.

Fuerza	[N]
$F_{1cm}$	690
$F_{1ca}$	640
$F_{2cm}$	690
$F_{2ca}$	640

Para realizar la prueba a fatiga, se introducen las fuerzas cíclicas en forma sinusoidal como se muestra en el ciclo c) de la figura 3.3.5. Dichas fuerzas se ingresan en ANSYS distribuidas en 25 pasos de carga como se muestra en la figura 5.39.

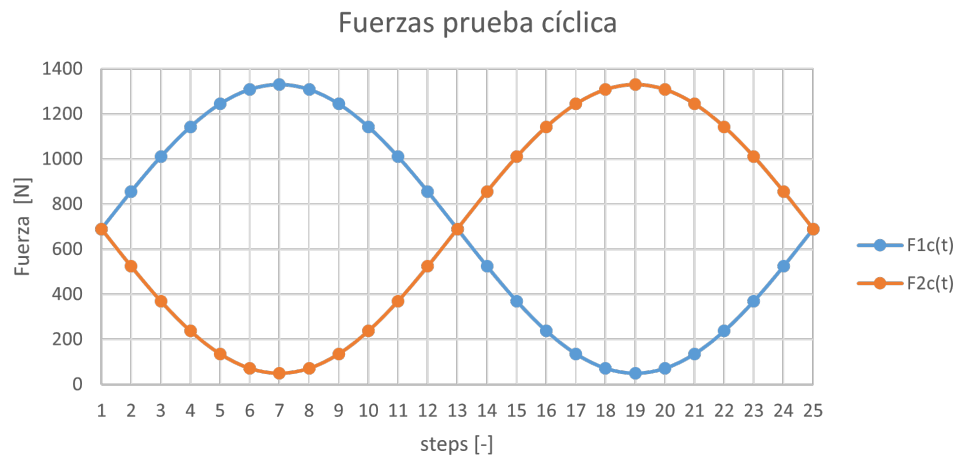
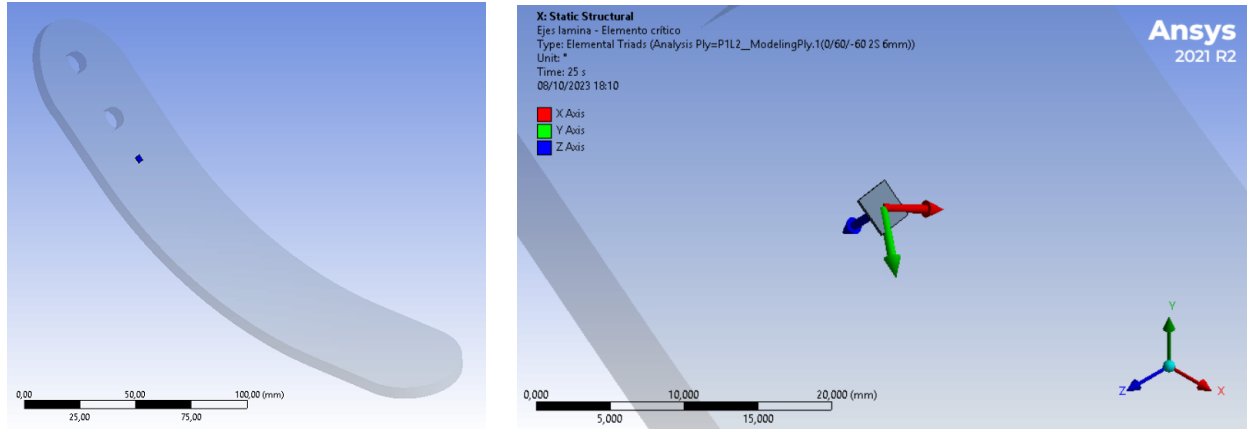


Figura 5.39: Valores de fuerzas en talón  $F_{1c}$  y antepié  $F_{2c}$  para simulación.

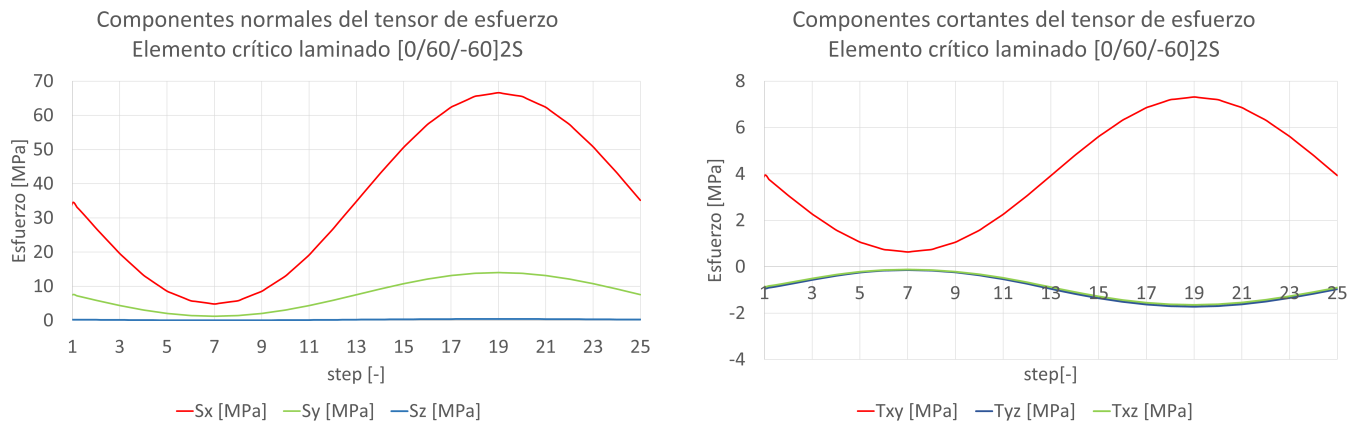
### 5.6.1. Resultados fleje laminado $\{[0/60/-60]_{2s}\}_3$

Para el laminado se analiza el elemento crítico resultante de la prueba estática última en ANSYS, obteniéndose el tensor de esfuerzo asociado al elemento para cada paso de carga en los ejes de la lámina que contiene a dicho elemento. La figura 5.40 muestra el elemento crítico y un detalle de este con los ejes locales de lámina, mientras que la figura 5.41 las componentes del tensor de esfuerzo en dichos ejes.



(a) Ubicación de elemento crítico. (b) Detalle del elemento crítico con ejes locales.

Figura 5.40: Elemento crítico del laminado.



(a) Componentes de esfuerzos normales.

(b) Componentes de esfuerzos cortantes.

Figura 5.41: Historia de carga para elemento crítico del laminado en ejes locales.

De los resultados del elemento crítico a fatiga, se puede observar que la mayor parte de los esfuerzos se orientan con las fibras siendo estos esfuerzos un orden de magnitud más grandes que el resto de componentes. En cuanto a la forma de la carga según los pasos de tiempos, se evidencia que este representa un esfuerzo fluctuante sinusoidal simple de carga con esfuerzos mínimos cuando la fuerza sobre talón  $F_{1c}$  es máxima, y esfuerzo máximo cuando la fuerza sobre antepié  $F_{2c}$  es máxima, por lo que no se hace necesario el uso de la herramienta de conteo de ciclos mediante el algoritmo de *rainflow counting*.

De acuerdo a lo recién observado, resulta plausible el análisis del compuesto a fatiga bajo el diagrama CFL unidireccional. Una forma de justificar el uso de esta herramienta es observando la variación de las componentes de esfuerzos principales a lo largo de los distintos pasos de carga y las relaciones  $\sigma_2/\sigma_1$  y  $\sigma_3/\sigma_1$  con la finalidad de ver si existe o no cambios significativos en los esfuerzos y direcciones principales. Dichas relaciones se observan en la figura 5.42.

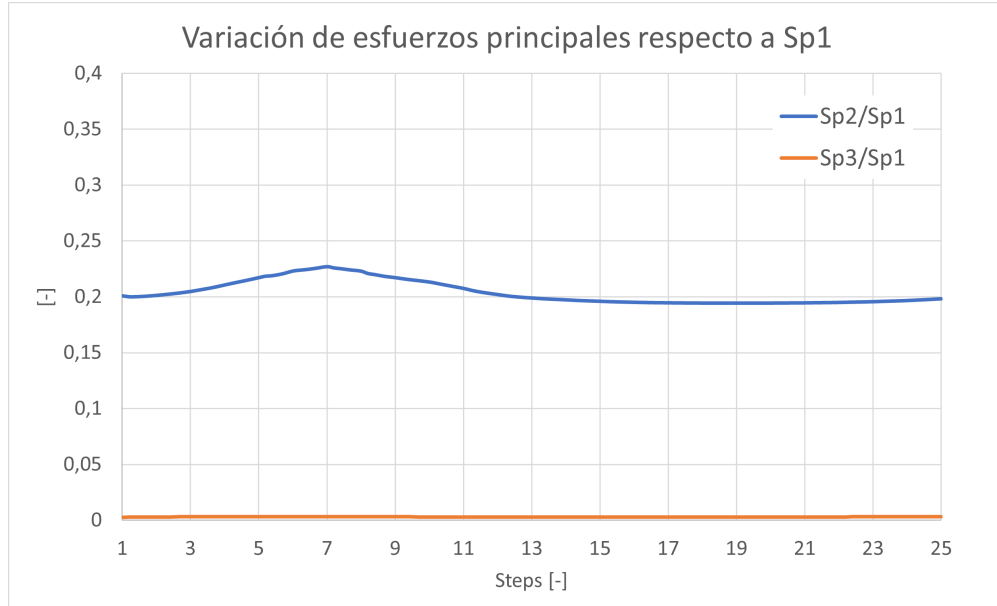


Figura 5.42: Variación de los esfuerzos principales respecto a  $\sigma_{p1}$ .

De la figura 5.42 se observa que efectivamente las variaciones son mínimas con el transcurso de los pasos de carga y la mayoría de los esfuerzos se va en dirección de las fibras. Por la flexión que resiste el compuesto, resulta evidente que la parte inferior del laminado se encuentra predominantemente en tensión, mientras que la superior en compresión. Se obtienen entonces los esfuerzos en dirección de las fibras para las 6 láminas inferiores del laminado, y las 6 láminas superiores del laminado, con lo que se obtienen los esfuerzos alternantes y medios de los distintos elementos que constituyen dichas laminas. La información es mostrada en el diagrama CFL de 2 segmentos para laminados unidireccionales que se observa en la figura 5.43.

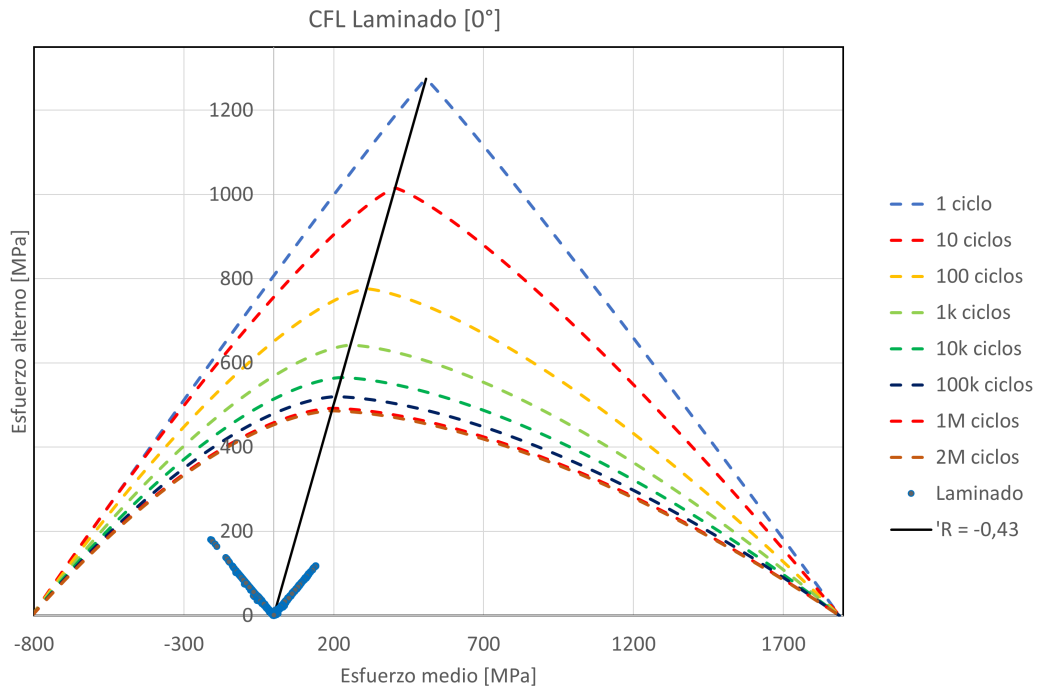


Figura 5.43: Diagrama CFL para laminas unidireccionales carbono-epoxi T700S.

De esta forma, se concluye que la totalidad de los elementos constituyentes del laminado cumplen la prueba cíclica de la normativa ISO 10328:2016 de  $2 \cdot 10^6$  ciclos.

# Capítulo 6

## Conclusiones y Recomendaciones

En el presente trabajo de título se presenta el diseño de una prótesis del tipo transtibial fabricada mediante el empleo de materiales compuestos del tipo laminado de carbono multidireccionales en conjunto a técnicas de manufactura aditiva de impresión por sinterizado selectivo por láser. Dicha prótesis se diseña bajo los estándares y pruebas descritas en la normativa ISO 10328:2016 para un nivel de carga P5 (100[kg]).

El análisis de resistencia última estática es aplicado a la prótesis en función de lo descrito en la normativa para las configuraciones de laminados  $\{[45/90/ - 45/0]_{2s}\}_2$ ,  $\{[0/60/ - 60]_{3s}\}_3$  y  $\{[0/90]_{3s}\}_3$  todos para un espesor total de laminado de 6[mm]. De los resultados sobre talón, se observa que tanto para nivel inferior como superior, la distribución de esfuerzos es indiferente para el tipo de laminado. En contraste, para la prueba sobre antepié la elección del laminado toma mayor relevancia. Para nivel superior e inferior de carga en antepié se estudia el esfuerzo equivalente de von Mises para el cuerpo impreso en PA-12 obteniéndose que para ambas cotas se sobrepasa la fluencia del material, logrando con ello deformación plástica del modelo. En cuanto al laminado, este es estudiado mediante el criterio de Tsai-Wu, obteniéndose también que ciertos elementos se encuentran bajo un factor de seguridad menor a 1, resultando en una posible falla de este. La cantidad de elementos es traspasada al volumen equivalente del cuerpo principal o laminado de carbono respectivo para obtener el porcentaje relativo de volumen que se encuentra en falla. En particular, los porcentajes de volumen sobre falla con carga última inferior para los 3 laminados estudiados son 0,0019 % y 0,4629 % para el cuerpo PA-12 y compuesto  $\{[45/90/ - 45/0]_{2s}\}_2$ , 0,0006 % y 0,1370 % para el cuerpo PA-12 y laminado  $\{[0/60/ - 60]_{3s}\}_3$ , y 0,0010 % y 0,1611 % para el cuerpo PA-12 y la configuración laminada  $\{[0/90]_{3s}\}_3$  respectivamente. Dando como resultando en la elección del laminado  $\{[0/60/ - 60]_{3s}\}_3$  debido a que presenta el menor volumen bajo posible falla.

La configuración con laminado  $\{[0/60/ - 60]_{3s}\}_3$  es sometida a un análisis de confiabilidad,

modelando el comportamiento de los esfuerzos de la prueba última estática sobre antepié como una distribución de Weibull, lográndose una confiabilidad del 99,93131 % y 99,55978 % para las pruebas con cota superior e inferior, respectivamente.

Para finalizar, se realiza la prueba de fatiga descrita en la normativa. Se obtiene que para el laminado de carbono los esfuerzos varían según que lamina y la orientación de sus fibras respectivas, concentrándose los esfuerzos justamente paralelos a la dirección de las fibras, es por ello que se decide el uso de los diagramas de vida constante unidireccionales (CFL) de Kawai, obteniendo como resultado que todos los elementos del material compuesto escogido son capaces de cumplir de forma satisfactoria los  $2 \cdot 10^6$  ciclos.

Considerando el bajo porcentaje de volumen que sobrepasa la fluencia en la prueba última estática para el cuerpo principal, la alta confiabilidad del sistema, y los resultados de la prueba a fatiga, se considera que la prótesis diseñada se encuentra bajo el cumplimiento de las pruebas exigidas por la normativa ISO 10328:2016.

En cuanto a posibles mejoras se propone el empleo de distintos tipos de impresión o materiales como PA-11 cuyas propiedades son similares al de PA-12, o PA-11 CF en cuya composición se encuentra un refuerzo de fibras de carbono, el cual dota a la PA-11 de una resistencia a la tracción mucha mayor (70 [MPa] aproximadamente). Por otro lado, podría resultar de interés el añadir una división del cuerpo principal con la finalidad de lograr una mayor adaptabilidad a los distintos terrenos. Por último una propuesta interesante, sería el realizar el mismo proceso de diseño de prótesis utilizando en su totalidad materiales compuestos, como se ve comúnmente en prótesis comerciales.

# Referencias

- Barbero, E. J. (2017a). Chapter 1 - introduction. In Barbero, E. J., editor, *Introduction to Composite Material Design*, pages 1–27. CRC Press, third edition.
- Barbero, E. J. (2017b). Chapter 6 - macromechanics. In Barbero, E. J., editor, *Introduction to Composite Material Design*, pages 173–226. CRC Press, third edition.
- Casavola, C., Cazzato, A., ncenzo Moramarco, V., and Pappalettere, C. (2016). Orthotropic mechanical properties of fused deposition modelling parts described by classical laminate theory. *Materials Design*, 90:453–458.
- CENADIS (2022). Estudio nacional de discapacidad adultos.
- De Vivo Nicoloso, L., Pelz, J., Barrack, H., and Kuester, F. (2021). Towards 3d printing of a monocoque transtibial prosthesis using a bio-inspired design workflow. *Rapid Prototyping Journal*.
- Gibson, R. F. (2016). Chapter 4 - strength of a continuous fiber-reinforced lamina. In Gibson, R. F., editor, *Principles of Composite Materials Mechanics*, pages 143–190. CRC Press, fourth edition.
- Hermosilla, D. (2021). Análisis de una unidad de pie para prótesis transtibial fabricada mediante impresión 3d por sinterización selectiva por láser. Memoria de pregado, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso.
- ISO 10328 (2016). Prosthetics - Structural testing of lower-limb prostheses - Requirements and test methods. Standard, International Organization for Standardization.
- Kapur, K. and Lamberson, L. (1977). *Reliability in Engineering Design*. Wiley.
- Kathrotiya, D., Yusuf, A., Bhagchandani, R. K., and Gupta, S. (2023). A study for the development of prosthetic foot by additive manufacturing. *Journal of the Brazilian Society of Mechanical Sciences and Engineering*, 45(3):187.

- Kawai, M. (2010). 6 - fatigue life prediction of composite materials under constant amplitude loading. In Vassilopoulos, A. P., editor, *Fatigue Life Prediction of Composites and Composite Structures*, Woodhead Publishing Series in Composites Science and Engineering, pages 177–219. Woodhead Publishing.
- Kawai, M. and Koizumi, M. (2007). Nonlinear constant fatigue life diagrams for carbon/epoxy laminates at room temperature. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 38(11):2342–2353. CompTest 2006.
- Kawai, M. and Teranuma, T. (2012). A multiaxial fatigue failure criterion based on the principal constant life diagrams for unidirectional carbon/epoxy laminates. *Composites Part A: Applied Science and Manufacturing*, 43(8):1252–1266.
- Kluska, E., Gruda, P., and Majca-Nowak, N. (2018). The accuracy and the printing resolution comparison of different 3d printing technologies. *Transactions on Aerospace Research*, 2018(3):69–86.
- Lammens, N., Kersemans, M., De Baere, I., and Van Paepegem, W. (2017). On the visco-elasto-plastic response of additively manufactured polyamide-12 (pa-12) through selective laser sintering. *Polymer Testing*, 57:149–155.
- Lindberg, A., Alfthan, J., Pettersson, H., Flodberg, G., and Yang, L. (2018). Mechanical performance of polymer powder bed fused objects – fem simulation and verification. *Additive Manufacturing*, 24:577–586.
- Mehdipour, F., Gebhardt, U., and Kästner, M. (2021). Anisotropic and rate-dependent mechanical properties of 3d printed polyamide 12 - a comparison between selective laser sintering and multi jet fusion. *Results in Materials*, 11:100213.
- Ottobock (2014). *Tube adapters - Instructions for Use*. Ottobock HealthCare GmbH, Duderstadt.
- Piekarski, K. (1973). Analysis of bone as a composite material. *International Journal of Engineering Science*, 11(6):557–565.
- Sadd, M. H. (2021). Chapter 11 - anisotropic elasticity. In Sadd, M. H., editor, *Elasticity*, pages 331–377. Academic Press, fourth edition.
- Tsai, S. W. and Wu, E. M. (1971). A general theory of strength for anisotropic materials. *Journal of Composite Materials*, 5(1):58–80.
- Ugural, A. C. (2017). Chapter 3 - plate-bending theory. In Ugural, A. C., editor, *Plates and Shells - Theory and Analysis*, pages 91–125. CRC Press, fourth edition.

Van Hooreweder, B. and Kruth, J.-P. (2014). High cycle fatigue properties of selective laser sintered parts in polyamide 12. *CIRP Annals*, 63(1):241–244.