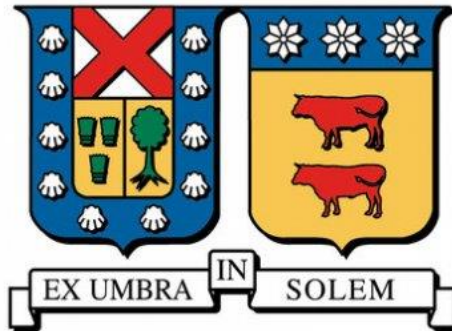


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS
VALPARAISO - CHILE



**PROGRAMACIÓN ESTOCÁSTICA PARA CONTROL DE INVENTARIO CON
REVISIÓN PERIÓDICA, LOST SALE, Y DEMANDA INCIERTA.**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL INDUSTRIAL

AUTOR

SEBASTIÁN CARVAJAL TORTI

PROFESOR GUÍA : PABLO ESCALONA RODRÍGUEZ.

PROFESOR CORREFERENTE : JORGE WESTON.

VALPARAÍSO DE CHILE, 29 DE AGOSTO, 2018.

AGRADECIMIENTOS

Esta memoria está dedicada a las personas, a aquellas sin cuyo apoyo no me habría sido posible llegar tan lejos en la vida. Mi familia, que siempre me proveyó los medios y me dio las oportunidades para desarrollarme, me escuchó, me guió y me apoyó. Mis amigos, tanto los que me acompañan hoy como lo que ya no, porque siempre los llevaré conmigo, de una forma u otra. Mi mochi, Valentina Vera, por ser la mejor compañera que una persona podría tener, por amarme, entenderme, apoyarme, y motivarme a ser cada día mejor, te doy gracias porque sin ti esto habría sido imposible. A michu, por ser el gato más lindo del mundo, en todos los sentidos posibles, y acompañarnos siempre durante las largas noches de estudio.

Finalmente, un agradecimiento especial a Pablo Escalona, y a todo el equipo de Operaciones que me acompañó durante el proceso de escribir mi memoria. Gracias por los consejos, la paciencia y el compromiso.

Índice de Contenidos

AGRADECIMIENTOS	2
Índice de Contenidos.....	3
Índice de Tablas.....	7
Índice de Figuras	8
1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN	10
2. OBJETIVOS	13
2.1. Objetivo General.....	13
2.2. Objetivos Específicos.....	13
3. MARCO TEÓRICO	15
3.1. Apreciación Histórica.....	15
3.2. El impacto de la gestión de inventarios en la industria.	17
3.3. Los modelos de gestión de inventarios	20
3.4. La gestión de inventarios y su lenguaje técnico	21
3.4.1. Definiciones de Inventario	21
3.4.2. Definiciones de Gestión de Inventarios.....	22
3.4.3. Terminología a utilizar	23
3.5. El evento de la Venta Perdida o Lost Sale	28

3.5.1.	Definiciones de Lost Sale	28
3.5.2.	Cuándo usar el Lost Sale	30
3.6.	Programación Matemática para la Gestión de Inventarios.	31
3.7.	Programación Estocástica	32
3.7.1.	Definiciones de Programación Estocástica	33
3.7.2.	Cuándo usar la Programación Estocástica.....	35
3.7.3.	State of the art Survey – Stochastic Programming: Computation and Applications. 36	
3.8.	Introducción y Revisión Bibliográfica del estudio que motiva esta investigación 40	
3.8.1.	Introducción	40
3.8.2.	Revisión de la Literatura.	46
4.	FORMULACIÓN DEL PROBLEMA	56
4.1.	Descripción Elemental del Problema.	56
4.2.	Método Hadley-Whitin	59
4.2.1.	Descripción Conceptual.....	60
4.2.2.	La política (R,S) aplicada a Backorder.....	61
4.2.3.	Extensión a Lost Sale	69
4.3.	Modelo de Programación Estocástica	73

4.3.1.	Formulación Matemática.....	75
4.3.2.	Notación.	76
4.3.3.	Sample Average Approximation (SAA)	83
5.	RÉPLICA DE LOS MODELOS.....	90
5.1.	Réplica del modelo Hadley-Whitin.....	90
5.2.	Réplica del Modelo de Programación Estocástica.	96
6.	ESTUDIO COMPUTACIONAL.....	98
6.1.	Réplica del primer experimento computacional	98
6.1.1.	Observaciones del primer experimento computacional	103
6.2.	Revisión de la réplica del modelo de SP.....	106
6.2.1.	Revisión completa del modelo de SP.	107
6.3.	Nuevo Primer Experimento Computacional.....	114
6.3.1.	Observaciones del Nuevo Primer Experimento Computacional.	117
6.4.	Análisis de aproximación exploratorio.	118
6.4.1.	La Función Objetivo.	120
6.4.2.	Los elementos del costo.....	121
6.4.3.	Generación de escenarios de demanda.	125
6.4.4.	El Inventario de Seguridad.	126
6.4.5.	Trabajos Posteriores.....	129

6.5.	Extracción de la mejor aproximación.....	131
6.6.	Experimentos computacionales de Cunha et al (2017).	131
6.6.1.	Continuación Primera Prueba Numérica	132
6.6.2.	Segunda prueba numérica.	133
7.	CONCLUSIONES Y COMENTARIOS	134
8.	REFERENCIAS.....	140
9.	ANEXOS	150
9.1.	Anexo n°1: Tablas con funciones ϕ y Φ tabuladas. Fuente: Axsäter (2006). 150	
9.2.	Anexo n°2: Réplica de modelo HW – Configuración Backorder.	155
9.3.	Anexo n°3: Resolución de ejemplo explicativo con replica de modelo HW. 158	
9.4.	Anexo n°4: Réplica de modelo HW – Configuración Lost Sale.	160
9.5.	Anexo n°5: Réplica de modelo SP - Configuración Lost Sale.	162

Índice de Tablas

Tabla 3.1: Resumen de las contribuciones del estudio que motiva esta investigación.....	455
Tabla 3.2: Resumende modelos de CS's que consideran incertidumbre separados por el uso de SP.....	477
Tabla 6.1: Resumen de resultados del primer experimento computacional	1022
Tabla 6.2: Error porcentual del primero experimento computacional.....	1055
Tabla 6.3: Resultados del “Nuevo Primer Experimento Computacional”	1156
Tabla 6.4: Diferencias porcentuales entre los resultados del “Nuevo Primer Experimento Computacional y los resultados de Cunha et al. (2017)..	1166
Tabla 6.5: Contraste de resultados con réplica del modelo HW..	1199
Tabla 6.6: Diferencias entre IL y LS entre ambos modelos replicados.	1211
Tabla 6.7: Extensión de la aproximación 6.4.2 a todas las configuraciones de parámetros.....	1233
Tabla 6.8: Experimento de análisis exploratorio sobre el inventario de seguridad..	1288
Tabla 6.9: Extensión del experimento de análisis exploratorio sobre el inventario de seguridad.....	1288

Índice de Figuras

Figura 3.2.1: Número de investigaciones anual de la gestión de inventarios, en el período 1995-2017.	188
Figura 3.2.2: Cantidad de publicaciones de distintas área científicas referidas a la gestión de inventarios.	19
Figura 3.4.1: Ejemplo gráfico del Lead Time. (Fuente: Silver et al., 2016)	244
Figura 3.4.2: Representació gráfica de una continuous review (R, Q) policy with deterministic lead time	277
Figura 3.7.1: Áreas de aplicación de la Programación Estocástica.	399
Figura 3.8.1: Clasificación de modelos de planificación de la producción en dos dimensiones	488
Figura 3.8.2: Resumen de modelos de revisión periódica considerando lost sale..	533
Figura 4.1.1: Dinámica del sistema (R,S).	588
Figura 6.1.1: Resumen de resultados de la primera prueba numérica del modelo SP de Cunha et al. (2017).	1033
Figura 9.3.1: Resultados de la réplica del modelo HW para el ejemplo expositivo.	1588
Figura 9.3.2: Resultados de las iteraciones para la resolución del ejemplo expositivo de la política (R,S).....	1599

Figura 9.4.1: Imagen de Solver para la réplica del modelo HW en configuración Lost

Sale.....1611

Figura 9.5.1: Código AMPL para la réplica del modelo de SP. Archivo .mod 1633

1. PROBLEMA DE INVESTIGACIÓN

La evolución científica-tecnológica computacional y la proliferación de los software de programación permitieron la resolución de problemas de optimización con una gran cantidad de variables, problemas que sin estas herramientas son considerados imposibles de resolver. En este contexto, los problemas de gestión de inventarios más complejos pueden contener una cantidad de variables que sobrepasan la capacidad de resolución humana, o incluso ser no lineales, o no convexos, con lo que la búsqueda de una solución óptima se vuelve aún más difícil, incluso con el uso de herramientas modernas.

La importancia de gestionar correctamente los inventarios y su beneficio estratégico ha sido innegable desde mediados de 1980 (Silver, Pyke & Thomas, 2016), aunque su estudio científico comenzó mucho antes. Ahora bien, la razón más importante de que esta arista de la gestión de operaciones cobre una relevancia particular recae en que, de acuerdo a la estadística, en un 90% de los casos, una mejoría en la gestión de inventarios genera un ahorro de al menos el 20% de los costos de una organización, sin sacrificar nivel de servicio (Silver et al., 2016).

Los modelos más simples, como el EOQ (Harris, 1913), son usados para los casos en que la demanda es determinística e invariante, o cuando su variabilidad es baja (Silver et al., 2016). Sin embargo, existen muchas formas de agregarle complejidad a este tipo de problemas, considerando, por ejemplo, “backorder”, “lost sale”, “lead times no determinísticos”, entre otros.

La importancia de esta temática ha sido respaldada prácticamente por la totalidad de los autores que han escrito sobre ella. Por ejemplo, Kim, Wee & Huang (2015), sostienen que para cualquier firma que entregue productos a sus clientes, el control de inventarios en su cadena de suministro juega un rol fundamental en su competitividad. Por otra parte, Soysal et al. (2015) establece que asegurar la colaboración a lo largo de la cadena de suministros es una estrategia efectiva para ganar ventaja competitiva.

Ahora bien, con el amplio cuerpo bibliográfico que posee esta materia, se vuelve difícil innovar y explorar nuevos campos que aporten valor investigativo. No obstante, existe un tipo de problemas de control de inventario que han demostrado ser de los más difíciles de resolver, aquellos que incluyen demanda variable, que han despertado el interés de un gran número de investigadores (Chang & Dye, 1999). Existe relativo consenso respecto a la complejidad de esta clase de problemas entre los autores abocados al tema. Kim et al. (2015) reconoce el desafío que representa encontrar una política de control óptima cuando se trabaja con incertidumbre en la demanda. Por su parte, Solyalı, Cordeau & Laporte (2015) indagan sobre el alcance de un método de resolución no convencional para lidiar con la incertidumbre de la demanda, entendiendo que la búsqueda de estas nuevas metodologías responden a una necesidad por encontrar mejores y más eficientes formas de enfrentar esta clase de problemas.

Finalmente, el estudio en el que interesa profundizar es aquel que incluye “lost sale” en el análisis, ya que es la configuración que cuenta con menor cantidad de estudios en la bibliografía (Bijvank & Vis, 2011). Dentro de esto, se considera que trabajar con Revisión Periódica del inventario es más adecuado, por su mayor cercanía a la realidad, pero también

porque genera una cadena de suministros más estable y es más fácil de tratar matemáticamente (Cunha, Raupp & Oliveira, 2017). Con todo esto, el problema a tratar se basa, en una primera instancia, en la réplica de los resultados obtenido por los autores Cunha, Raupp & Oliveira (2017) en su propuesta de modelo de programación estocástica de dos fases para emular la política de control de revisión periódica con lost sale y demanda estocástica desarrollado por Hadley & Whitin (1963). El modelo desarrollado por los autores pretende encontrar los parámetros óptimos de una política de inventario para un retailer con un solo producto, en un horizonte de tiempo determinado, en el que la demanda puede ser descrita mediante una función de distribución conocida, se ordena producto de manera periódica, y la demanda que se produce durante los quiebres de stock se pierde.

Adicionalmente, es deseable añadir elementos al modelo, que le permitan reflejar de mejor manera un escenario más realista, o simplemente agregarle especificidad, de forma tal de darle la mayor utilidad práctica posible. Lo más importante de esta temática es la definición preliminar explícita del problema: ¿Cómo ha de estructurarse la programación del mismo? ¿De qué manera han de plantearse las variables y los parámetros de forma tal que representen la estocasticidad? ¿Cuáles son los puntos más débiles de la formulación existente? Respecto a esto último, ¿se identifica una correcta réplica del modelo desarrollado por Hadley & Whitin (1963)? ¿Cuáles son los potenciales cambios que es posible realizar para acercar más el modelo a la realidad? ¿Cuáles son las herramientas asociadas a la resolución de este tipo de problemas?

2. OBJETIVOS

2.1. Objetivo General

Replicar los resultados matemáticos del trabajo realizado por Cunha et al (2017), mediante el estudio del modelo desarrollado en su publicación y la programación del mismo en lenguaje de programación matemática, para corroborar sus conclusiones y añadir elementos complementarios al modelo original que permitan la resolución de sistemas más complejos.

2.2. Objetivos Específicos

- Plantear el problema con todas sus variables, identificando claramente las fuentes de incertidumbre y su manifestación, en orden de replicar efectivamente los planteamientos en una herramienta computacional adecuada.
- Determinar la naturaleza del problema en cuanto a su linealidad, convexidad y sus variables, para definir los métodos de resolución atinentes al problema.
- Analizar métodos de resolución que se adecuen a la naturaleza del problema y sean conocidos por funcionar apropiadamente con ésta, en orden de obtener resultados que respalden el estudio original.

- Implementar mejoras al modelo, o añadirle especificidad al mismo, agregando variables que permitan controlar otros parámetros relacionados a los sistemas de control de inventarios.

3. MARCO TEÓRICO

3.1. Apreciación Histórica

El uso de inventarios puede retrotraerse hasta a los primeros asentamientos humanos, cuando el hombre pasó de ser nómada a sedentario. Esto marca el comienzo del período Neolítico, aproximadamente entre los años 10.000 y 8.000 A.C. (Ellaury, 2007) ¿Por qué esto es apuntado como el nacimiento de los inventarios? Es ampliamente reconocido que el sedentarismo dio paso a la agricultura, y ésta dio paso a las primeras formas de comercio (Ellaury, 2007). Ahora bien, cuando este tópico es estudiado como motivación de la microeconomía, se reconoce que para que exista comercio, deben existir excedentes (Pindyck & Rubinfeld, 2009). Este último concepto es el que abre las puertas del estudio del manejo de inventarios, porque se necesita almacenar los excedentes para luego intercambiarlos. Esto sugiere la existencia de un desfase entre los sucesos de producción y consumo, que como ya será explicitado, es la base de la gestión de inventarios.

El estudio de su fundamento histórico constituye un esfuerzo por expresar la importancia que tiene la gestión de inventarios, y para ello existen diversos ejemplos en la Historia Universal que pueden dar fe de la trascendencia de los inventarios. Para comenzar, todas las civilizaciones de la antigüedad tenían almacenes en los que guardaban sus bienes, principalmente alimentos. Prueba de esto puede encontrarse en cualquier libro que elabore sobre el comercio de las antiguas civilizaciones, como la obra de Fox (2008). Sin embargo, existe un gran ejemplo que puede ser expuesto como la máxima de la gestión de inventarios en la Antigüedad, Roma. Ya desde los tiempos de la República que la plebe, la clase social

más baja de Roma, era mantenida por el gobierno con raciones de pan, agua y otros suministros (Diakov & Kovalev, 1966). Es notable el esfuerzo administrativo (de gestión) que suponía tener disponibilidad de recursos para cubrir estas necesidades todo el tiempo tratándose, en el siglo III, de aproximadamente un millón de personas las que recibían este beneficio.

Realizando un salto hacia un período más actual, es posible encontrar grandes implicancias de la gestión de inventarios en el esfuerzo de guerra de Napoleón Bonaparte. Crawley (1971) reconoce que el éxito del emperador se basó mayormente en su destreza para desarrollar eficientes sistemas logísticos. Su combinación de la ciencia y la técnica es lo que algunos, como Lopez (2012), consideran que dio origen a la Ingeniería.

Un siglo más tarde, la mala anticipación y la paupérrima administración de los suministros (en lo que se incluye a los inventarios) le costó a Hitler y a la Alemania Nazi la guerra contra la Unión Soviética (Braithwaite, 2006; Brahm, 2013).

Todas las referencias históricas anteriores entregan una noción del poderoso impacto del manejo eficiente de inventarios. Sin embargo, lo que realmente interesa para el presente estudio es la evidencia de su impacto en la industria. Se abordará este tópico una vez concluida esta apreciación.

Cuando se estudia la evolución histórica de la gestión de inventarios, es común encontrar la evolución de las herramientas de control que se han utilizado en esta área. Particularmente, Robert Lockard (2012) reconoce a la “punch card” como la primera de estas herramientas, diseñada en 1889 por Herman Hollerith específicamente para registrar

entradas y salidas de los trabajadores. Luego apunta que, en la década de 1930, la Universidad de Harvard creó un sistema con las “punch card” para aplicarlas en el manejo de inventarios en las empresas. Finalmente hace mención a que, en la década de 1960, nace el mundialmente conocido “código de barras”, que es usado ampliamente en la actualidad para mantener un sistema de control de inventarios continuo, especialmente en los retailers.

3.2. El impacto de la gestión de inventarios en la industria.

No obstante la importancia de todo lo que se ha expuesto hasta este punto, lo que corresponde analizar en detalle es la importancia de la gestión de inventarios en la Industria y, más aún, de los modelos de optimización asociados a esta gestión. A continuación se exponen algunos ejemplos que pueden ser encontrados en la literatura.

“La administración de inventarios [...] es un motivo importante de preocupación para todos los gerentes de todo tipo de empresas. La administración eficaz de los inventarios es esencial para realizar el pleno potencial de toda cadena de valor. [...] Estas decisiones fueron tan importantes para Wal-Mart que decidió utilizar la tecnología para mejorar los flujos de información en la cadena de suministro.” (Krajewsky, Ritzman & Malhotra, 2008).

“Como Amazon.com lo sabe bien, el inventario es uno de los activos más costosos de muchas compañías, llega a representar hasta un 50% del capital total invertido. Los administradores de operaciones de todo el mundo reconocen que la buena administración del inventario es crucial” (Heizer & Render, 2004).

En adición a lo anterior, es posible estudiar y exponer datos estadísticos concernientes a la investigación sobre la gestión de inventarios. En virtud de esto, se recopila la información disponible en la plataforma en línea de la revista ScienceDirect para construir la siguiente gráfica respecto a la evolución de la investigación sobre la gestión de inventarios.

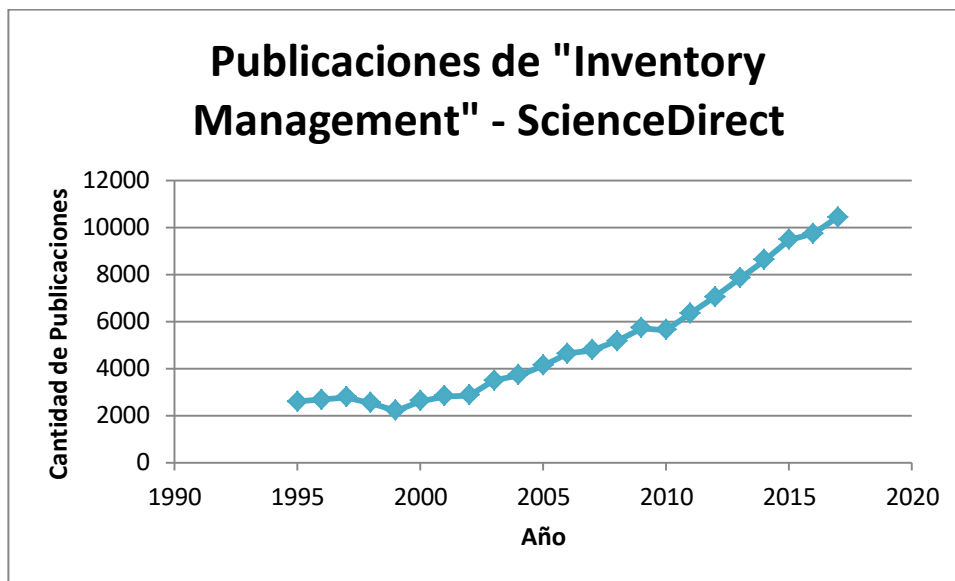


Figura 3.2.1: Número de investigaciones anual de la gestión de inventarios, en el período 1995-2017. (Fuente: Elaboración propia).

Es posible observar que existe una tendencia al aumento en términos de investigación, lo cual no sólo refuerza la validez del planteamiento del impacto que tiene la gestión de inventarios para una empresa, sino que también demuestra que, a pesar de que el número de investigaciones aumenta al pasar los años, la gestión de inventarios posee prácticamente inagotables posibilidades para profundizar o complejizar en algún tipo de política.

En particular, para el año 2017 las investigaciones llegaron a un total de 10.440, mientras que para el año 1995 superaban apenas las 2.000. En base a estos datos es que se calcula que su tasa de crecimiento promedio corresponde a un 4,5% anual aproximadamente.

Por otro lado, es natural que la gestión de inventarios sea utilizada en diversos tipos de industrias y por lo tanto, en un elevado número de empresas. En términos generales, sería útil tener una visión un tanto más global de las áreas de la ciencia que más investigaciones presentan sobre el tema. En base a esto se construye el siguiente gráfico con datos obtenidos de la plataforma en línea de la revista Springer.

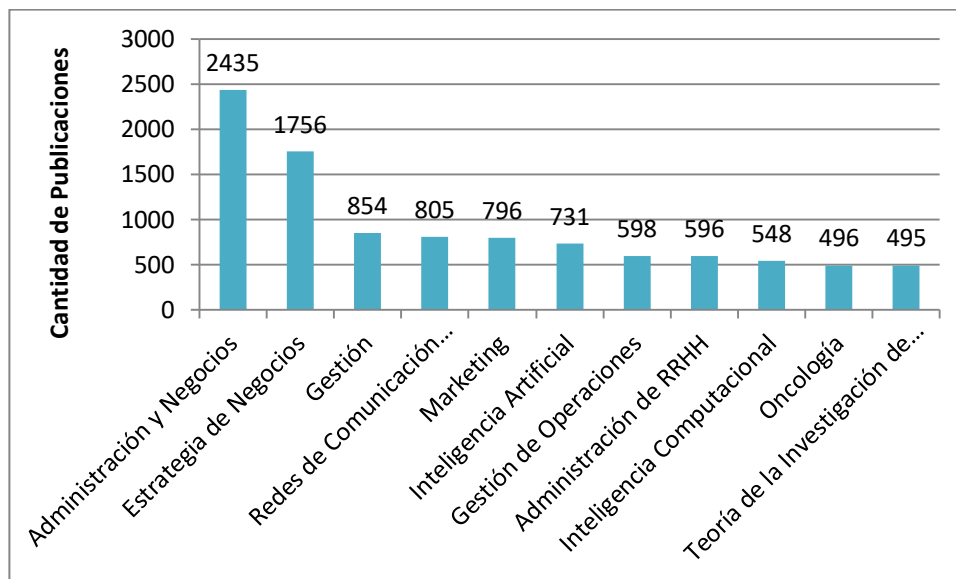


Figura 3.2.2: Cantidad de publicaciones de distintas áreas científicas referidas a la gestión de inventarios. (Fuente: Elaboración propia).

Se han considerado, para la construcción de la figura 3.2, las principales áreas de la ciencia en que la revista Springer clasifica los artículos de su biblioteca. La altura de las

columnas del gráfico representan la cantidad de publicaciones, de cualquier tipo, relacionadas con “Inventory Management” con las que cuenta la biblioteca al 24 de mayo del 2018. Naturalmente, se han obviado aquellas áreas científicas que cuentan con muy pocas publicaciones. Se evidencia, en la gráfica, la ciencia que más profundiza en la temática actualmente, la cual corresponde a la de “Administración y Negocios”. Por otro lado, dada la naturaleza de este estudio se destacan los resultados obtenidos para el área de gestión, gestión de operaciones e investigación de operaciones. Es posible notar como la suma total supera las 1000 investigaciones, versus las 2500 realizadas en el área mencionada en un comienzo. Además, considerando que las cifras corresponden a las áreas con mayor cantidad de publicaciones, resulta interesante el que 3 de las 8 áreas más estudiadas sean afines al tipo de estudio que se realizará en esta investigación.

3.3. Los modelos de gestión de inventarios

El primer modelo conocido que trató sobre la optimización en el manejo de inventarios corresponde al Modelo de Lote Económico, conocido como el modelo EOQ por sus siglas en inglés. En su publicación, Harris (1913) reconoce la importancia de encontrar un equilibrio que permita minimizar los costos asociados a la gestión de inventarios, en particular, los costos de emitir una orden (pedir producto para reabastecer el inventario) y los costos de almacenar producto en el tiempo.

Posteriormente, se reconoce el advenimiento del llamado “newsboy model” o modelo del vendedor de diarios, llamado de esta forma por primera vez en 1951 (según Cheng, Choi & Wang (2016) en Morse and Kimball (1951)).

El exponer todos los modelos desarrollados por la literatura en gestión de inventarios tomaría un libro completo, o más. Sin embargo es importante mencionar que los modelos evolucionaron con el tiempo y con el advenimiento de la programación matemática que, de acuerdo a Kutateladze (2012), nació originalmente gracias al trabajo realizado por Leonid Kantorovich en la URSS. No obstante, y sin indagar en quién fue el precursor de esta importante herramienta, es un hecho que desde la década de 1930 ha proliferado y ha sido utilizada en múltiples áreas científicas para obtener resultados óptimos de acuerdo a modelos específicos. Se elaborará sobre esto posteriormente.

3.4. La gestión de inventarios y su lenguaje técnico

Se ha tratado hasta este punto sobre la historia, la importancia y los primeros modelos asociados a la gestión de inventarios. No obstante, falta establecer una definición clara de lo que este concepto pretende comunicar, para lo que es posible consultar a diversos autores, es decir, no es necesario ni parte de la contribución de este estudio el establecer un nuevo concepto al respecto.

Es preciso comenzar, para lograr lo anterior, definiendo apropiadamente lo que se entenderá por inventarios, recurriendo también a la bibliografía.

3.4.1. Definiciones de Inventario

“Inventario son las existencias de una pieza o recurso utilizado en una organización.”
(Chase, Jacobs & Aquilano, 2009).

“Los inventarios son acumulaciones de materias primas, provisiones, componentes, trabajo en proceso y productos terminados que aparecen en numerosos puntos a lo largo del canal de producción y de logística de una empresa” (Ballou, 2004)

3.4.2. Definiciones de Gestión de Inventarios

“La administración de inventarios [es] la planificación y control de los inventarios para cumplir las prioridades competitivas de la organización” (Krajewski et al., 2008).

“El objetivo de la administración de inventarios es encontrar un equilibrio entre la inversión en el inventario y el servicio al cliente.” (Heizer & Render, 2009)

“El manejo del inventario implica equilibrar la disponibilidad del producto (o servicio al cliente), por una parte, con los costos de suministrar un nivel determinado de disponibilidad del producto, por la otra.” (Ballou, 2004).

“Un sistema de inventario es el conjunto de políticas y controles que vigilan los niveles del inventario y determinan aquellos a mantener, el momento en que es necesario reabastecerlo y qué tan grandes deben ser los pedidos.” (Chase et al, 2009).

Todas estas definiciones ayudan a comprender de mejor manera el trabajo a realizar, especialmente la formulada por Chase et al. (2009), que entrega las nociones sobre las políticas de inventario. Ahora bien, las otras definiciones también constituyen un aporte en cuanto a su relación con los costos asociados a la gestión de inventarios y su enfoque al servicio al cliente. También es interesante el concepto de “prioridades competitivas” mencionado por Krajewski et al. (2009), aunque no es estrictamente necesario para comprender a cabalidad la presente investigación.

3.4.3. Terminología a utilizar

Existe una gran diversidad de términos y conceptos asociados al estudio de la gestión de inventarios, los cuales deben ser manejados en profundidad si se pretende comprender los postulados de esta investigación. Ahora bien, es importante notar que muchos de los conceptos poseen una explicación difícil de internalizar sin apoyo gráfico, por lo que se presentarán en esta sección múltiples figuras para esclarecer las definiciones presentadas. Además, antes de comenzar con las definiciones, es preciso apuntar que todos los términos están en inglés, y serán tratados de esta forma en virtud de que gran parte de la bibliografía a utilizar así lo hace.

Holding Cost o Costo de Almacenamiento: En términos simples, este costo incluye todos aquellos costos que varían con la cantidad de inventario de una firma. Esto incluye costos de distinta índole, a saber, de oportunidad por el capital invertido en inventarios, de manejo de materiales, de almacenaje propiamente tal, por daños y obsolescencia, seguros e impuestos. (Axsäter, 2015).

Ordering or Setup Costs o Costos de Ordenamiento o de Preparación: Se refieren a costos fijos asociados a la reposición del inventario, independiente del tamaño del lote. (Axsäter, 2015).

Shortage Costs o Costos de Escasez: Es el costo en el que se incurre cuando un artículo es demandado y no puede ser entregado. Se puede dar de dos formas, la primera es aquella en la que el consumidor decide esperar a que exista disponibilidad de producto, esto es llamado *backlog*, mientras que la segunda corresponde a aquella situación en que el

cliente simplemente no adquiere el artículo y la venta se pierde, lo que se conoce como *lost sale*. Los costos asociados a esto son, por lo general, difíciles de estimar o determinar. (Axsäter, 2015).

Lead Time o Tiempo de Espera: “En los sistemas de compras, es el tiempo que transcurre entre colocar y recibir una orden; en los sistemas de producción, es el tiempo de espera, movimiento, cola, preparación y corrida para cada componente que se produce.” (Heizer & Render, 2009).

El Lead Time generalmente se expresa con una “L”. En la figura 3.3 puede apreciarse una gráfica en la que se explicita el lead time.

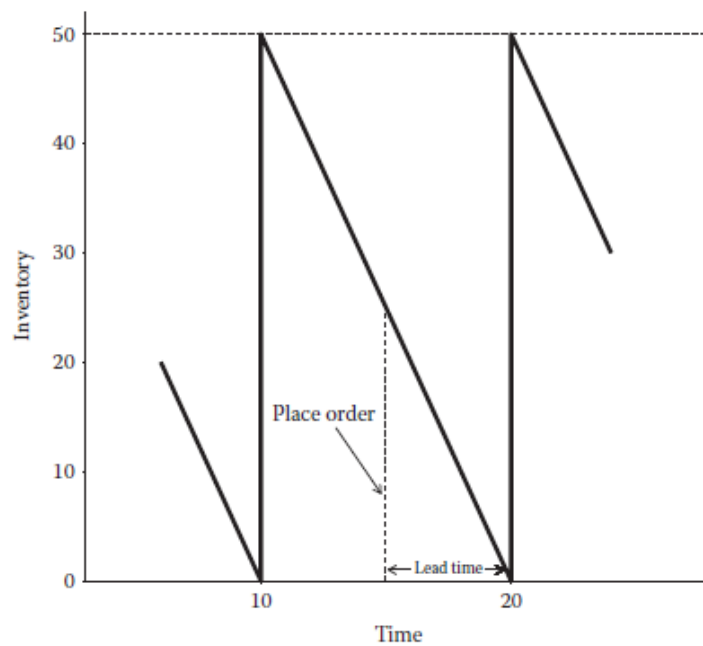


Figura 3.4.1: Ejemplo gráfico del Lead Time. (Fuente: Silver et al., 2016)

Inventory Position o Posición de Inventario: En control de inventarios, como ya se ha expuesto en las definiciones citadas, lo importante es determinar cuándo y cuánto ordenar. En este respecto, Axsäter (2015) considera que es importante tener en cuenta, no sólo el *stock on hand* (inventario a la mano, es decir, la cantidad de inventario con la que se cuenta en un momento determinado), sino que se debe incluir en las consideraciones las *outstanding orders* (órdenes pendientes, es decir, aquellos artículos que ya fueron solicitados pero que aún no llegan) y los *backorders* (las órdenes asociadas al backlog, o demanda pendiente). Esto resulta en la siguiente ecuación:

$$\text{Inventory Position} = \text{Stock on Hand} + \text{Outstanding Orders} - \text{Backorders}$$

Para comprender de mejor manera el concepto de Inventory Position se expone en la figura 3.4 una representación gráfica del mismo. Sin embargo, se recomienda esperar antes de consultar la figura, ya que incluye algunos conceptos que aún no se han definido.

Inventory Level o Nivel de Inventario: Es básicamente la cantidad de inventario real con la que se cuenta, con una salvedad, el backorder. Esta cantidad es la que se utilizará para calcular el *holding cost* y el *shortage cost* (Axsäter, 2015). Tiene la siguiente expresión:

$$\text{Inventory Level} = \text{Stock on Hand} - \text{Backorders}$$

Notar como el Inventory level es igual al Inventory Position menos las Outstanding Orders. Su representación gráfica también se incluye en la figura 3.4.

Continuous Review Policy o Política de Revisión Continua: Las políticas de revisión de inventario se clasifican en periódica o continua en base al evento que gatilla una orden. En particular, la política continua es la que supone un monitoreo constante del Inventory Position, y cuando éste se encuentra por debajo de cierto valor, se produce una orden de producto (Axsäter, 2015).

Periodic Review Policy o Política de Revisión Periódica: Esta política hace referencia a una revisión del Inventory Position cada cierto período de tiempo. Si al momento de la revisión éste se encuentra por debajo de un valor determinado, se produce una orden (Axsäter, 2015).

Se verá a continuación una política específica de control de inventarios, con el objetivo de clarificar algunos de los conceptos expuestos y plasmarlos en la figura 3.4, que complementa la explicación.

(R, Q) Policy o Política (R, Q): Así llamada por Axsäter (2015), esta política se conoce mejor como la (Q, r) , y responde a las siguientes consideraciones: cuando el inventario cae por debajo de cierto nivel R , se ordena un lote fijo de productos de tamaño Q . En caso de revisión continua, siempre se emitirá una orden en el punto R , en caso de tener una política de revisión periódica permitiendo backorder, es posible que sea necesario ordenar más de un lote de tamaño Q . Es por esto último que la política es a veces referida como política (R, nQ) .

Ahora bien, sea T el período de revisión de inventario para una periodic review (R, Q) policy with deterministic Lead Time (Lead Time determinístico quiere decir que esta

cantidad es conocida como parámetro del problema). En la figura 3.4 que se expone a continuación pueden apreciarse algunas cantidades y conceptos relevantes de los que se han definido hasta ahora.

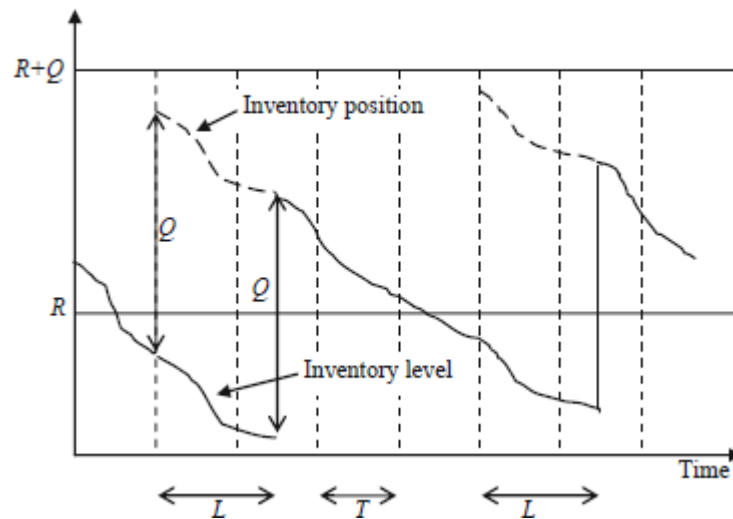


Figura 3.4.2: Representación gráfica de una continuous review (R, Q) policy with deterministic lead time. (Fuente: Axsäter ,2015)

Notar cómo la figura 3.4 pone de manifiesto las diferencias entre inventory level e inventory position. Apreciarlas es de vital importancia para la comprensión acabada del presente estudio. Además, adviértase que el stock on hand es igual al inventory level mientras este última sea positivo. Cuando hay quiebre de stock, es decir, cuando no quedan unidades del producto en inventario, el stock on hand es, naturalmente, cero. Sin embargo, cuando el modelo admite la posibilidad de backorder o lost sale, el inventory level puede perfectamente tomar valores negativos.

3.5. El evento de la Venta Perdida o Lost Sale

La literatura no especializada en inventarios, dígase, libros que abordan la gestión de operaciones en su amplio espectro, que dedican una parte de su vasta extensión a la gestión de inventarios, apenas tienen mención alguna del concepto de venta perdida. Esto es natural, ya que el tratamiento de los inventario y la cadena de valor en general no se encuentra dirigido, en dichos textos, al estudio detallado de los conceptos y los casos específicos, sino que más bien tienen una intencionalidad expositiva.

En lo que respecta a la literatura especializada, Axsäter (2015) aborda el Lost Sale de manera extensiva, pero también falla en entregar una definición conceptual al respecto. Esto probablemente se deba a que el término se explica a sí mismo.

No obstante lo anterior, se ha considerado preciso entregar una definición del concepto de Lost Sale, en orden de que no exista duda alguna sobre su interpretación, especialmente en lo que respecta a su relación con la gestión de inventarios.

3.5.1. Definiciones de Lost Sale

Como se mencionó, Axsäter (2015) no entrega una definición extensa del concepto de Lost Sale. En la sección 5.14 de su libro, aborda un modelo con esta configuración, introduciéndolo de la siguiente manera:

“En esta sección abandonamos el supuesto de completo backordering (dejar órdenes pendientes) y asumimos, en su lugar, que la demanda que no puede ser satisfecha inmediatamente, se pierde.” (Axsäter, 2015).

En orden de contar con una definición más detallada y precisa, se formula en esta sección una propia. Se dirá que se presenta el evento de Venta Perdida o Lost Sale cuando “dado un nivel de inventario cualquiera, se produce una demanda del artículo (en análisis) que excede dicho nivel. Dependiendo de las exigencias del cliente (gestor de la demanda) la venta perdida puede ser todo el pedido, o simplemente la diferencia entre la demanda y el stock de inventario (stock on hand)”.

La definición anterior, si bien cumple su papel de entregar una noción clara respecto a lo que es el lost sale, no se aplica con total exactitud en esta investigación. Nótese que la definición estipula que la demanda se produce en un cierto momento, lo que le atribuye una componente discreta a la realización de la demanda. En esta investigación, que está basada en la obra de Cunha et al. (2017), se asume que la demanda es continua, por lo que su realización se produce en cada instante de tiempo. Esto hace necesario el planteamiento de una definición que se ajuste a esta característica de la demanda.

Finalmente, la definición de Lost Sale que se utilizará en adelante en esta investigación será la siguiente: “Se considera como Lost Sale todos aquellos artículos que sean demandados cuando el inventory level se encuentre por debajo de cero, es decir, todos los artículos que se demandan mientras que el stock on hand tiene valor nulo. Esta demanda no podrá ser satisfecha posteriormente, por lo que al reabastecerse el inventario, el inventory level subirá hasta el nivel de la cantidad ordenada.”.

Se advierte que esta definición no se contrapone con lo especificado en la sección 3.5 respecto al stock on hand y al backorder. Ciertamente, cuando no se cuenta con la

opción de backorder, esto es, satisfacer la demanda en un tiempo posterior a su realización, se considera que esas ventas están perdidas. Esto, por supuesto, tiene un costo asociado que debe ser estipulado adecuada y oportunamente, para ser considerado como parámetro del problema.

3.5.2. Cuándo usar el Lost Sale

Ya se ha mencionado que, de acuerdo a Bijvank & Vis (2011), los modelos que incluyen lost sale han recibido menor atención por parte de los investigadores en relación a aquellos que consideran backorder. En este respecto, Cunha et al. (2017) afirma que esto no se condice con el hecho de que, para efectos de modelar la realidad, resulta ser más precisa la aproximación mediante el lost sale. Naturalmente, la explicación a la escasez de investigaciones referidas al tratamiento de este fenómeno la encuentra en la mayor complejidad relativa de estos modelos, que suelen volverse irresolubles cuando, por ejemplo, se acumulan muchas órdenes en espera.

Entonces, de acuerdo a lo anterior, es importante, como antesala al desarrollo de un modelo que considerará el caso de lost sale, indagar en la literatura relacionada sobre los modelos que incluyen esta aproximación, y las razones para hacerlo. En este respecto, al introducir el concepto y la posibilidad del lost sale en un sistema de control de inventarios, Hadley & Whitin (1963) mencionan, como primera implicancia fundamental, que ya no es cierto que el beneficio percibido será independiente de la doctrina operativa, anulándose la equivalencia entre maximización de beneficios y minimización de costos que se había apreciado, hasta ese momento, para los modelos con backorder. Afortunadamente, el modelo de programación estocástica de la presente investigación no se ve alterado por esta

consideración, ya que se desprende directamente del modelo que Hadley & Whitin plantean para este caso.

En lo que respecta a los usos prácticos del lost sale, de la revisión bibliográfica es posible observar que se da mayormente en lo que corresponde a productos perecibles. En este contexto, autores como Abad (2000) y Kenné, Gharbi & Beit (2007) proponen modelos para inventarios y producción respectivamente, tratando productos perecibles en general. Por su parte, uno de los autores que motiva esta investigación extendió su modelo original, en compañía de otros investigadores, para considerar el lost sale en bancos de sangre (Dillon, Oliveira & Abbasi, 2017). Sin embargo, este campo no es el único en que puede aplicarse el concepto de lost sale, ya que éste puede presentarse simplemente por la decisión del cliente de no esperar a que exista stock disponible y cambiar de proveedor. En este contexto, Abad (2008) usa funciones de impaciencia para modelar el tiempo que los clientes están dispuestos a esperar antes de que el sistema incurra en lost sale.

3.6. Programación Matemática para la Gestión de Inventarios.

Realizar una revisión de todo lo que significa el uso de programación matemática y la optimización excedería por mucho el alcance de este capítulo. Por esta razón, se procederá a explicar brevemente, en pos de asegurar una comprensión efectiva, los conceptos fundamentales que deben conocerse para interiorizar un modelo de programación matemática.

Los modelos matemáticos nacen con los problemas de programación lineal, de los cuales puede decirse lo siguiente: “Un problema de programación lineal está dado por una

función lineal de varias variables que debe ser optimizada (maximizada o minimizada) cumpliendo con cierto número de restricciones también lineales” (Moscatelli, 2016)

Esta pequeña mención debiera resultar suficiente como orientación, sin embargo, cuando se trate de introducir otras herramientas asociadas, se realizará una explicación pertinente.

3.7. Programación Estocástica

El modelo que constituye el objeto de estudio de esta investigación no sólo utiliza programación matemática para encontrar los parámetros óptimos de una política de inventarios, sino que usa una clase más específica de programación conocida como programación estocástica.

Básicamente, la programación estocástica aborda modelos de programación matemática que incluyen la consideración de eventos o realizaciones aleatorias para sus parámetros. Esto, de acuerdo a Shapiro, Dentcheva & Ruszczyński (2009), abre la puerta a una enorme cantidad de diferentes configuraciones para los problemas a resolver, reflejando múltiples aspectos aplicados a los mismos.

En particular, se considera prudente contar con una definición apropiada de lo que es la programación estocástica, en orden de que se comprenda a cabalidad el estudio a realizarse. Para tal efecto, se comenzará entregando una definición directa de la palabra “estocástico”, sobre la que el diccionario de Oxford nos entrega lo siguiente:

“Es un adjetivo que describe algo que ha sido determinado aleatoriamente”. (OE Dictionary, 1989).

Con esto en consideración, se procederá a entregar definiciones de la literatura sobre la programación estocástica.

3.7.1. Definiciones de Programación Estocástica

“Los problemas de optimización que involucran modelos estocásticos se encuentran en casi todas las áreas de la ciencia y la ingeniería [...]. Debido a la presencia de parámetros aleatorios en el modelo, la teoría combina conceptos de la teoría de optimización, la teoría de probabilidad y estadística, y análisis funcional.” (Shapiro et al., 2009).

Como se puede apreciar, la cita anterior no entrega una definición de la programación estocástica propiamente tal, sino más bien una noción de las herramientas que combina para el tratamiento de problemas con parámetros aleatorios. Esta cita fue extraída del prefacio del libro citado, por lo que no es sorprendente la ausencia de una definición clara. No obstante, se identifica que en el resto del libro no es posible encontrar una definición explícita de los autores respecto a la programación estocástica. Se enseña a continuación otra cita, esta vez de la introducción del libro.

“Programación estocástica suena similar (a otras herramientas de optimización mencionadas por los autores), pero ninguna formulación específica juega el rol de problema de programación estocástica genérico. La presencia de cantidades aleatorias en el modelo bajo consideración abre la puerta a una gran cantidad de diferentes configuraciones de problemas, reflejando diferentes aspectos del problema a tratar.”(Shapiro, A et al., 2009).

Nuevamente, el extracto entrega nociones que, si bien resultan esclarecedoras respecto al área de interés de la programación estocástica, no constituyen una definición satisfactoria del concepto. Se presenta ahora una tercera cita del libro, referida a como la programación estocástica se usa para resolver problemas de múltiples etapas.

“Como veremos posteriormente, la programación estocástica aborda el problema de una manera diferente, explorando la convexidad del problema subyacente y así intentando resolver problemas con un vector de estado de alta dimensión. Esto es logrado por medio de la discretización del proceso aleatorio D_t (realizaciones de la demanda) en una forma de árbol de escenarios, que también podría volverse prohibitivamente grande.”.

Finalmente, es posible encontrar definiciones más directas en la literatura, pero con menor elaboración técnica, abordando el asunto mediante un discurso más bien comparativo, haciendo referencia a las diferencias de la programación estocástica con la resolución de problemas de optimización determinísticos. Así, se tienen la siguiente cita:

“Programación estocástica es una aproximación para modelar problemas de optimización que involucran incertidumbre. Mientras que los problemas de optimización determinísticos son formulados con parámetros conocidos, los problemas del mundo real incluyen, casi invariablemente, parámetros que son desconocidos al momento en que las decisiones deben ser tomadas. Cuando los parámetros son incierto, pero se asume que moran dentro de un conjunto de valores posibles, uno podría buscar una solución que sea factible para todos las posibles elecciones de parámetros y optimice una función objetivo dada.” (Shapiro & Philpott, 2007).

Lo anterior es una definición más concreta que las anteriores de la programación estocástica como tal, y como rama de la optimización. Ahora bien, en orden de concluir adecuadamente este apartado, se considera preciso remontarse a los orígenes del concepto que, de acuerdo con Hagle (2005), fue utilizado e introducido por primera vez por George Dantzig en la década de 1950. En su obra, republicada en 2004, Dantzig no utiliza el término “Programación Estocástica”, sino que introduce el concepto de modelación de problemas separados en dos o más etapas, producto de la realización de parámetros inciertos o aleatorios, cuyos valores se desconocen durante la primera etapa.

3.7.2. Cuándo usar la Programación Estocástica

Es especialmente importante saber cuándo debe ser usada la programación estocástica para modelar problemas de optimización. Las definiciones del apartado anterior hacen una muy clara referencia a que ésta se usa principalmente cuando existe incertidumbre o aleatoriedad en uno o más parámetros del problema.

Siguiendo con lo anterior, se ha mencionado también que la programación estocástica ha de usarse cuando se deben tomar decisiones antes de conocer los valores de ciertos parámetros, como por ejemplo, en el caso de esta investigación, la demanda.

En particular, Shapiro (2007) explica que los modelos estocásticos son usualmente utilizados para decisiones que se toman repetidamente, en circunstancias similares, y que su objetivo es obtener una solución que responda bien en promedio. Esto lo expresa haciendo referencia a la necesidad, en muchos casos, de contar con información sobre el

comportamiento del parámetro cuya variabilidad se pretende modelar, como una distribución de probabilidad que lo describa.

Por otra parte, Higle (2005) compara la utilización de la programación estocástica con el uso de análisis de sensibilidad. La autora indica que muchas veces puede ser tentador someter los resultados de cierto modelo determinístico a un análisis postoptimalidad, recurriendo a herramientas de sensibilidad para indagar sobre el impacto de la variabilidad. Ante esto, menciona que este tipo de análisis es, en muchos casos, una aproximación inapropiada al problema de la variabilidad, y que es más recomendable recurrir a herramientas de programación estocástica.

Para más detalles sobre lo anterior, es posible referirse a Higle (2005), que mediante un ejemplo básico muestra cómo, para una misma configuración de escenarios posibles de demanda, el análisis de sensibilidad tiende a sobreestimar el ingreso esperado en un problema de optimización.

En resumen, puede establecerse que es recomendable recurrir a la programación estocástica cuando se pretende modelar un problema de optimización que cuenta con uno o más parámetros con una variabilidad significativa, y cuyo comportamiento puede ser representado por una función de probabilidad conocida.

3.7.3. State of the art Survey – Stochastic Programming: Computation and Applications.

En orden de concluir la parte introductoria de este marco teórico, enfocada a la familiarización con la terminología y los conceptos a aplicarse en la investigación, se ha

considerado prudente referir un estudio (survey) sobre la programación estocástica y sus aplicaciones.

En su estudio, Birge (1997) plantea que los avances en la computación han supuesto una importante contribución en lo que respecta a la resolución de problemas de programación matemática, y reconoce que probablemente el mayor impacto yace en la mejora de los procesos de toma de decisiones bajo incertidumbre mediante la aplicación de programación estocástica, lo que él define como “la rama (de la programación matemática) explícitamente ocupada de los modelos que contienen parámetros aleatorios”

Respecto a los orígenes del desarrollo de la programación estocástica, Birge (1997) menciona a Dantzig (1955), como ya se había expuesto en el apartado anterior, y su introducción a los modelos de observación y reacción (o recurso). También hace mención, como parte de los estudios que impulsaron el desarrollo de la programación estocástica, a la obra de los autores Charnes & Cooper (1959), que formularon lo que se conoce como “Chance Constrained Programming”. Ambas investigaciones se basan en la teoría de decisión estadística para formular sus postulados, que no es específicamente de lo que se trata la programación estocástica, ya que esta última se enfoca en la construcción de soluciones analíticas principalmente.

Birge (1997) explica, en su introducción, el cómo los modelos de programación estocástica crecen proporcionalmente con el número de posibles realizaciones de los parámetros inciertos. Una forma en la que ya se presentó esto dentro de este marco teórico, y que se puede consultar, es el desarrollo del ejemplo citado por la autora Hagle (2005), que

utiliza programación estocástica para optimizar la cantidad a producir de ciertos artículos dados tres posibles escenarios de demanda: bajo, medio, alto. En su ejemplo, Hagle (2005) considera sólo un período para el análisis, pero es inmediato apreciar que el modelo, tal como explica Birge (1997) crecerá proporcionalmente con la cantidad de escenarios para las realizaciones de los parámetros inciertos, y lo hará exponencialmente con la cantidad de períodos de evaluación y de parámetros a considerar. Por ejemplo, para el caso de Hagle (2005), dos períodos obligarían a considerar 9 posibles combinaciones en la realización de la demanda, apreciándose como el crecimiento se expresaría de la forma 3^n , con n siendo el número de períodos.

Birge (1997) presenta los programas estocásticos más simples en primer lugar, el News Vendor Problem, con el que, mediante un sencillo ejemplo, demuestra lo que se llama “el valor de la solución estocástica” (VSS por su sigla en inglés). Luego presenta la estructura de los modelos de dos o más etapas, y también la de los “chance constrained”, aplicando a ambos el News Vendor Problem.

El estudio continúa con la descripción de los distintos métodos existentes para resolver los modelos estocásticos. A continuación se presenta un listado de todas las herramientas mencionadas en el texto:

- | | |
|---------------------------------|---|
| - Métodos de puntos extremos. | - Sistema simétrico indefinido. |
| - Métodos de puntos interiores. | - El método en forma de L. |
| - Separación de Columnas. | - Métodos de descomposición con muestreo. |

- Método de descomposición estocástico.
- Algoritmo de cobertura progresivo.
- Ascenso dual Lagrangiano.

La elaboración sobre cada uno de estos métodos excedería el alcance de esta investigación, pero puede consultarse en el estudio citado (Birge, 1997) para más detalles. Finalmente, el autor también hace referencia a las distintas aplicaciones que ha tenido el uso de programación estocástica en el modelamiento de situaciones y problemas reales, encontrándose áreas como las finanzas, las telecomunicaciones, el transporte, entre otras. En la figura siguiente se presenta un extracto del texto con un cuadro resumen de las principales áreas de aplicación de la programación estocástica, los modelos utilizados y los métodos de solución.

Area	Model Type	Solution Method	VSS (cf. optimal value)
Finance	Linear, multistage	Nested decomposition	4%*
Finance	Linear, multistage	Simple recourse [134]	10%
Manufacturing capacity	Linear, integer	Mixed integer [115]	6%
Telecommunications	Linear	Stochastic decomposition [56]	362%
Fleet assignment	Linear, two-stage	Generalized network	9%
Vehicle allocation	Linear multistage	Dynamic network, approximation	10%
Power generation	Linear, multistage, integer	Lagrangian, progressive hedging	1%
Energy planning	Nonlinear, multistage	Nonlinear nested decomposition	2%

Figura 3.7.1: Áreas de aplicación de la Programación Estocástica. (Fuente: Birge, 1997).

En la figura 3.5, como es posible puede apreciar, no existe una mención explícita a los inventarios, y tampoco se menciona el método Sample Average Approximation, que es utilizado en el trabajo que motiva esta investigación. La exposición de la obra de Birge

(1997) constituye simplemente una referencia para presentar los conceptos fundamentales de la programación estocástica.

En la investigación referida de Hagle (2005), la autora desarrolla un análisis sobre los problemas de programación estocástica de dos fases y los métodos de resolución, entre los que se cuenta el Sample Average Approximation. Este método será explicado con detalle posteriormente, cuando sea necesario para resolver el modelo del estudio que motiva esta investigación.

3.8. Introducción y Revisión Bibliográfica del estudio que motiva esta investigación

Este último apartado del Marco Teórico está dedicado a la revisión de las secciones introductorias del estudio realizado por Cunha et al. (2017) para la construcción de su modelo de programación estocástica. El artículo se titula “Un modelo de programación estocástica de dos fases para un sistema de reabastecimiento periódico bajo demanda incierta”, por lo que su enfoque introductorio está dirigido, naturalmente, hacia la justificación de la aplicabilidad de los modelos de gestión de inventario con revisión periódica y el uso de la programación estocástica para representar adecuadamente la incertidumbre de la demanda como parámetro.

3.8.1. Introducción

Los autores comienzan explicitando, como ya se ha hecho en este Marco Teórico, que las principales preguntas que los gestores de inventarios deben responder son: cuándo ordenar, cuánto ordenar, y cuánto mantener en inventarios de seguridad (Namit & Chen, 1999).

En primer lugar, Cunha et al. (2017) exponen la forma más sencilla de clasificar los modelos de gestión de inventarios, que es de acuerdo al tipo de revisión al que estos están sometidos. La revisión puede ser continua o periódica, siendo esta última una forma de controlarlos a intervalos de tiempo regulares de largo R (Silver, Peterson & Pyke, 1998), como ya se ha explicado. Siguiendo con esta clasificación, los autores añaden la característica de la cantidad a ser ordenada, que puede ser fija (lote de tamaño Q) o variable (se ordena una cantidad tal que el inventory position se eleve hasta una cantidad S , conocida como target level). Esta línea de clasificaciones lleva a presentar, de acuerdo a los autores, los 4 sistemas de control de inventario más comunes, los de revisión continua (s,Q) y (s,S) , y los de revisión periódica (R,S) y (R,s,S) , donde s denota el punto de reorden (Hadley and Whitin, 1963; Silver et al., 1998; Zipkin, 2000).

Respecto a su enfoque en lo que se refiere al estudio del sistema de revisión periódica (R,S) mencionado en el párrafo anterior, Cunha et al. (2017) exponen, de acuerdo a este autor, en esta parte introductoria de su publicación, 3 argumentos centrales para justificar el desarrollo de un modelo de esta clase, los cuales pueden ser resumidos de la siguiente manera:

1. Los sistemas de control de inventarios administrados bajo un régimen de revisión periódica entregan mayor estabilidad a la cadena de suministros.

- En efecto, los autores afirman que estos sistemas requieren menos esfuerzo transaccional, implican cálculos de planificación más sencillos y permiten una mejor coordinación dentro de la CS (cadena de suministros). Además, refieren

a Federgruen & Zipkin (1984) para indicar que cuando se trata de una CS con solo echelon, y un solo producto con demanda estacionaria, la política de revisión periódica entrega el mejor resultado posible en cuanto a costo total.

2. Existen pocos modelos que abordan el caso de lost sale en la literatura existente sobre gestión de inventarios.

- De acuerdo a Bijvank & Vis (2011), que ya fueron mencionados anteriormente, existen pocos modelos de control en la literatura que incluyen la posibilidad de lost sale. En su lugar, la mayor parte de los estudios se enfoca en el desarrollo de sistemas de control que modelan el comportamiento del consumidor con backlogging, aun cuando el lost sale suele ser la mejor y más acertada configuración para representarlo.

3. La mayor parte de la investigación sobre CS's se basa en modelos determinísticos.

- Los autores aseguran que esto se da a pesar de que una gran parte de las decisiones relacionadas con los procesos de una CS se basan en información que muchas veces está sujeta a incertidumbre, por ejemplo, los precios de ciertos artículos, la demanda de los consumidores, entre otros. Esto ha llevado a los investigadores, en el último tiempo, a abordar cada vez más problemas, de diversa índole, desde distribución de productos hasta la localización de plantas industriales, con herramientas de programación estocástica. (Santoso et al., 2005).

Luego de presentar la justificación para el desarrollo de su modelo, Cunha et al. (2017) expone el objetivo concreto del estudio, que es:

“Presentar el uso de programación estocástica de dos fases para apoyar la toma de decisiones relacionada a la gestión de un sistema de inventarios con un solo ítem, en un CS de un solo echelon, cuyos niveles de demanda son inciertos en un horizonte de tiempo finito.”(Cunha et al., 2017).

Para cumplir esta meta, los autores proponen un modelo capaz de determinar los parámetros óptimos de una política de control de inventarios (R,S) en términos de costo, asumiendo revisión periódica constante (R) y cantidad de orden variable (S). En el modelo, los costos relevantes son, de acuerdo a lo ya mencionado, los costos de ordenamiento (ordering cost), almacenamiento (holding cost), y de escasez (shortage cost), que son considerados determinísticos en el horizonte de planificación, es decir, son parámetros conocidos del modelo, pero que pueden variar en el tiempo (de forma también conocida). La demanda no servida inmediatamente puede ser, o bien pospuesta y servida en un período futuro (backlog), o bien perdida irremediablemente (lost sale), siendo este último caso el de mayor interés para la investigación.

Adicionalmente, se presenta el cómo una metodología basada en muestreo, el Sample Average Approximation (Aproximación por Promedio de Muestra, y será referida en adelante como SAA), puede ser usado para la generación de muestras de escenarios discretos para representar la demanda del ítem en análisis. Es posible consultar la obra de Shapiro & Philpott (2007) para una descripción detallada del SAA, o bien el apartado 4.3.2

de la presente investigación, donde se presenta una réplica de la descripción desarrollada por Cunha et al. (2017).

Los autores continúan mencionando que la metodología que proponen no se limita a los alcances conocidos de la programación estocástica, ya que sobre los resultados de ésta añaden un análisis de sensibilidad con el fin de evaluarlos. Además, comparan los resultados numéricos con los del modelo estocástico desarrollado por Hadley & Within (1963) que, de acuerdo a los autores, es conocido por entregar soluciones cercanas al óptimo para el caso de lost sale dentro de un rango de valores para el holding y el shortage cost. Cabe mencionar, sobre este punto, que Cunha et al. (2017) presentan una descripción breve del modelo Hadley-Within (en adelante referido como HW), que será considerablemente extendida en esta investigación, para asegurar la cabal comprensión del modelo, que será vital para el contraste efectivo de resultados en la etapa de implementación computacional.

Para concluir su introducción, los autores exponen las contribuciones de su modelo, las que se ha decidido presentar en la siguiente tabla resumen:

Contribución	Descripción	Se logra mediante:
Primera	Configuración más flexible al permitir los casos de backlog y lost sale.	El uso de programación matemática para modelar el problema de determinar los parámetros óptimos de la política de inventarios.
Segunda	El modelo considera el fenómeno estocástico de manera más adherente, al no requerir de ningún método específico de generación de escenarios.	El uso de SAA para aproximar el comportamiento estocástico de la demanda en el horizonte de tiempo estudiado.

Tabla 3.1: Resumen de las contribuciones del estudio que motiva esta investigación. (Fuente: Elaboración Propia).

En lo que respecta a la primera contribución, en efecto, se identifica que los autores desarrollan un modelo que puede alternar fácilmente entre las consideraciones de backlog y lost sale. Además, se plantea que éste puede funcionar independientemente de la cantidad de outstanding orders y con lead times que sean independientes de la periodicidad de la revisión, todo esto sin comprometer el tiempo computacional. Finalmente, como forma adicional de flexibilidad, se expone que el modelo no está sujeto a supuestos restrictivos como la normalidad en la distribución de la demanda, o costos que se mantengan constantes durante el horizonte de planificación, logrando que sea posible aplicarlo a un rango mucho más amplio de problemas.

En cuanto al planteamiento de la segunda contribución, los autores aseguran que el uso de un modelo de programación estocástica de dos fases constituye una metodología totalmente novedosa de abordar este problema en particular, habiendo asegurado con anterioridad que en lo que a su conocimiento respecta, no existe literatura disponible en la actualidad que desarrolle un modelo similar. El uso de SAA con escenarios independientes de la demanda es una efectiva forma de aproximar el comportamiento estocástico de ésta, y permite al modelo abandonar supuestos restrictivos que son comunes en otras investigaciones.

3.8.2. Revisión de la Literatura.

Finalmente, es preciso realizar una breve revisión de la literatura expuesta por Cunha et al. (2017) a modo de presentación de estudios con tópicos relacionados. Cabe mencionar que, dado que la presente investigación cuenta con un amplio marco teórico sobre los conceptos técnicos de la ciencia de la gestión de inventarios, se verificará que la revisión bibliográfica a presentarse aquí puede ser desarrollada de manera más exhaustiva.

En primer lugar, los autores realizan una recapitulación sobre estudios recientes que abordan el diseño de CS's, para separarlos entre los que usan programación estocástica y los que no, como una gran característica de clasificación de modelos para CS's.

En orden de presentar la información de manera más ordenada, se construye una tabla resumen sobre esta parte, la tabla 3.2, en la que SP es Programación Estocástica (Stochastic Programming), M.E. es Multi-Echelon, y T.E. es Two-Echelon.

Referencia	CS	SP
Gupta & Maranas (2000).	M.E.	Sí.
Santoso et al. (2005).	M.E.	Sí.
Oliveira & Hamacher (2012).	M.E.	Sí.
Oliveira et al. (2013).	M.E.	Sí.
Fattahi et al. (2015).	T.E.	Sí.
Daskin et al. (2002).	M.E.	No.
Shen et al. (2003).	M.E.	No.
You & Grossman (2008).	M.E.	No.

Tabla 3.2: *Resumen de modelos de CS's que consideran incertidumbre separados por el uso de SP.(Fuente: Elaboración Propia).*

Luego, los autores refieren las obras de Glock (2012) y Glock et al. (2014) para presentar una clasificación de problemas de determinación de tamaño de lote que se usa en los estudios de planificación de la producción. Nuevamente, para presentar la información de manera ordenada, se construye esta vez un esquema de ramificación (tipo árbol) para desglosar los tipos de modelos.

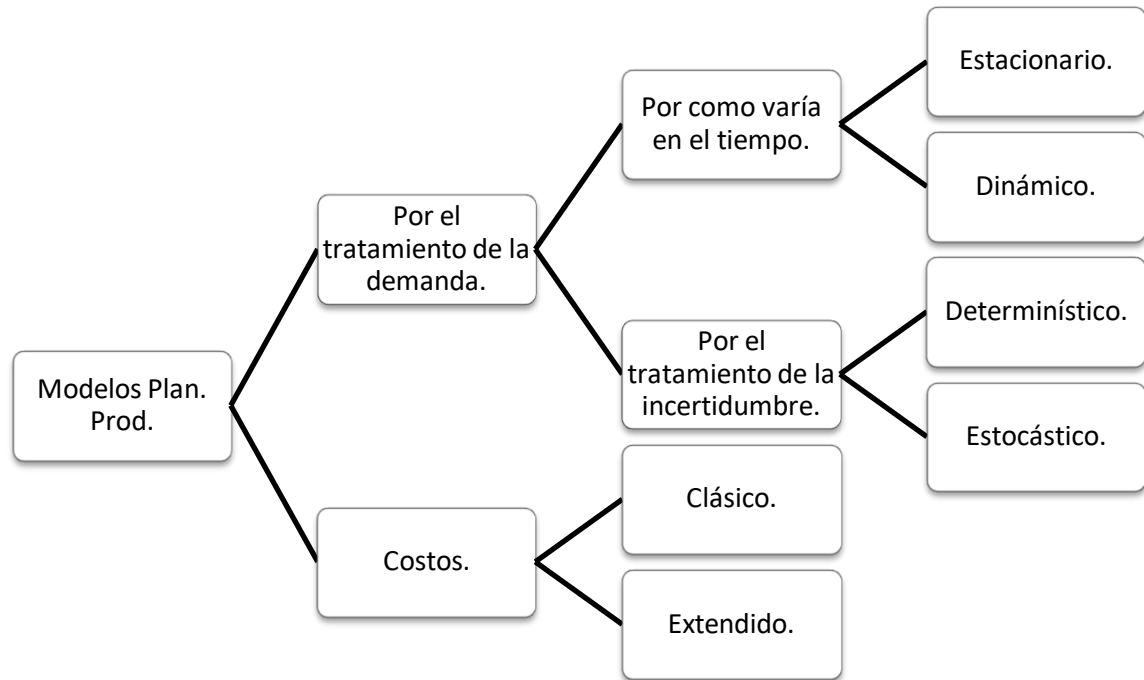


Figura 3.8.1: Clasificación de modelos de planificación de la producción en dos dimensiones. (Fuente: Elaboración Propia).

Respecto a los modelos clásicos, Cunha et al. (2017) mencionan que están orientados a la determinación de la cantidad óptima de producción, y consideran el costo de emitir órdenes, costo de preparación (set-up), costo de almacenamiento y de envío. Pueden verse como variantes del modelo EOQ, y pueden clasificarse de acuerdo a su aplicabilidad para una CS de un echelon, dos echelon, multi-echelon, o integrada.

Por otra parte, los autores mencionan que los modelos extendidos, además de ocuparse de la cantidad de orden óptima, abordan el problema con elementos de secuenciamiento, incentivos, productividad, curvas de aprendizaje, almacenamiento de perecibles y producción de ítems defectuosos.

De acuerdo con lo anterior, Cunha et al (2017) indican que su revisión bibliográfica se enfoca en investigaciones que consideran modelos estocásticos extendidos, de un echelon, con comportamientos estacionarios y dinámicos.

Para continuar, los autores mencionan que además de las clasificaciones anteriores, el estudio de sistemas de inventarios en CS's de un echelon puede ser dividido en dos grandes grupos: Modelos de Costo Total, y Modelos de Nivel de Servicio.

Jha & Shanker (2009) y Bijvank & Vis (2011) apuntan que el objetivo de los modelos de Costo Total es determinar los parámetros óptimos de una política de control de inventarios tal que se minimice el costo total relevante, lo que incluye al costo de escasez. En cuanto a los Modelos de Nivel de Servicio, estos introducen una restricción de “fill-rate”, concepto no ha sido previamente definido en esta investigación, y que básicamente puede ser entendido como la fracción de la demanda que es posible satisfacer inmediatamente con el stock on hand (Axsäter, 2006). De acuerdo con Sobel (2004), la restricción de fill-rate (que representa el nivel de servicio entregado al cliente) reemplaza al costo de escasez (que aparece en la función objetivo de los Modelos de Costo Total) de forma tal que el modelo resultante puede adoptar dos naturalezas distintas: el Enfoque de Servicio Estocástico (SAA por su sigla en inglés), y el Enfoque de Servicio Garantizado (GSA por su sigla en inglés). En el SSA cada instalación mantiene un inventario de seguridad para lidiar con la variabilidad de su propia demanda estocástica. En caso de quiebre de stock, el modelo aplica backlogging. Por su parte, el GSA asume una cota superior para la demanda a producirse durante el lead time, y cualquier valor de demanda que exceda esta cota deberá ser cubierto mediante una agilización del proceso o trabajando

horas extra. En este tipo de enfoque (GSA), los autores mencionan a Chen & Li (2015) y su definición del tiempo de servicio (tiempo entre que el cliente emite una orden y que ésta le es entregada) como una variable de decisión determinística.

Como se ha anticipado, los autores enfocan su revisión bibliográfica en los estudios de Modelos de Costo Total, ya que el modelo a ser desarrollado por ellos mismos pertenece a esta categoría.

Cunha et al. (2017) continúa su revisión mencionando ahora los métodos de resolución que pueden adoptarse para determinados problemas. En primer lugar, expone que de acuerdo con Axsäter (2006), para problemas con demanda determinística que varía en el tiempo es posible usar el algoritmo de Wagner-Whitin, que está basado en programación dinámica. El algoritmo como tal puede ser encontrado en la obra original de los autores “Dynamic version of the Economic Lot Size Model” (Wagner & Whitin, 1958). En cuanto a los modelos con demanda estocástica, estos pueden ser resueltos con un método simple: mediante un enfoque de 2 etapas, usando la fórmula de EOQ y restricciones de nivel de servicio (Axsäter, 1996; Nahmias, 1997).

Por otra parte, Cunha et al (2017) menciona que Hadley & Whitin (1963), Silver et al (1948), Zipkin (2000), y Axsäter (2006) también propusieron modelos simples para abordar políticas de inventarios cuando la demanda es estocástica. Para la representación de la demanda, construyeron modelos aproximados discretos de distribución de probabilidad (Ej: Poisson, Logarítmica, Geométrica) para cuando la demanda era considerada baja, y modelos aproximados continuos de distribución (Ej: Normal, Gamma) para cuando la

demanda era considerada alta. En adelante, por el resto de la revisión, Cunha et al. (2017) se enfoca en estudios de modelos estocásticos de políticas de inventarios con demanda incierta, que es precisamente el marco que encuadra al modelo desarrollado por los autores.

En el contexto anterior, los autores mencionan que los sistemas estocásticos de control de inventarios que consideran backlogging son más fáciles de modelar que aquellos que consideran lost sale. De acuerdo con Bijvank & Vis (2011), los modelos existentes con revisión periódica, que tienen un lead time igual al largo de un período de revisión ($L=R$) o a un múltiplo entero del mismo ($L=nR$) proveen, en general, políticas de reabastecimiento cercanas al óptimo, y por lo tanto podrían ser usados para obtener cotas de cantidades de orden óptimas.

Los autores concluyen su revisión bibliográfica con una exposición de múltiples investigaciones sobre el caso de lost sale aplicado a modelos de revisión periódica y demanda estocástica. Luego presentan un cuadro comparativo con las principales características de cada investigación, incluyendo la propia. Los principales trabajos referidos son: Bellman et al. (1955), que abordó un problema de control de inventarios con lost sale, revisión periódica, lead times no negativos y sin ordering cost. Gaver (1959) y Morse (1959), quienes consideraron un lead time igual largo del período de revisión en su política de lost sale con revisión periódica. Karlin & Scarf (1958), que abordaron el problema considerando el lead time como un número fijo de períodos de revisión, al igual que Morton (1969), y desarrollaron ecuaciones basadas en programación dinámica para encontrar la política óptima. Presman (1977) probó, considerando al lead time como un número fijo de períodos de revisión, que el exceso de demanda esperado y el on-hand

inventory son funciones convexas del valor objetivo S (target level), y que cuando se consideran lead times fijos la función de costos es convexa. Zipkin (2008) reformuló los problemas originales de Karlin & Scarf (1958) y de Morton (1969), considerando sumas parciales de las cantidades de outstanding orders. También derivó cotas adicionales de la política óptima, y extendió el modelo para incluir restricciones de capacidad, demandas correlacionadas, lead times estocásticos, y múltiples clases de demanda. Bijvank & Johansen extendieron el modelo original de Morton (1971) para considerar lead times y períodos de revisión de cualquier largo, en lugar de múltiplos enteros, y para considerar que el costo y la demanda ocurren en un tiempo continuo. Nahmias (1979) consideró un modelo de ordering cost fijo con lead times determinísticos y aleatorios. Hill & Johansen (2006), bajo el supuesto de que no puede existir más de una outstanding order, propusieron un algoritmo para encontrar cantidades cercanas al óptimo, mostrando con un ejemplo que la política óptima correspondiente no es ni una (R,s,S) ni una (R,s,Q) , pero que era fácil de implementar en aplicaciones del mundo real. En contraste con los sistemas de revisión continua, las políticas mencionadas no son equivalentes cuando la demanda es unitaria.

Se presenta entonces el cuadro resumen de Cunha et al. (2017), que a su vez está basado en la obra de Bijvank & Vis (2011), en la figura 3.7, que compara todas las investigaciones citadas en el párrafo anterior con las principales métricas de los modelos. En el cuadro se presentan clasificaciones de los modelos de acuerdo a: 1) La distribución de probabilidad utilizada para describir la demanda (columna “Demand Distribution”). 2) Si requiere el supuesto de demanda estacionaria (columna “Requires Stationarity”). 3) Cómo es modelado el lead time (columna “Lead Time”). 4) Si hay algún supuesto específico

relacionado con el lead time que deba ser impuesto (columna “Lead Time Assumption”). 5) Si se consideran ordering costs fijos (columna “Fixed-order costs”). 6) Si el modelo permite outstanding orders (columna “Outstanding orders”). Para leer la figura, (AL) denota “any length” (cualquier largo), (CP) “compound Poisson” (Poisson compuesta), (D) Deterministic (Determinístico), (G) General, (N) No, (P) Poisson, (S) Stochastic (Estocástico), (Y) Yes (Sí). $L=R$ significa que el lead time (L) debe ser igual a la periodicidad de revisión (R), mientras que $L=nR$ significa que L debe ser un múltiplo entero de R.

Reference	Demand distribution	Requires stationarity	Lead time	Lead time assumption	Fixed-order costs	Outstanding orders
Bellman et al. (1955)	G	Y	D	$L=R$	N	N
Karlin & Scarf (1958)	G	Y	D	$L=R$	N	N
Gaver (1959)	G	Y	D	$L=R$	N	N
Morse (1959)	G	Y	D	$L=R$	N	N
Morton (1969)	G	Y	D	$L=nR$	N	Y
Zipkin (2008b)	G	Y	D	$L=nR$	N	Y
Pressmam (1977)	G	Y	D	$L=nR$	N	Y
Nahmias (1979)	G	Y	S	$L=nR$	Y	$Y (\leq 1)$
Johansen (2001)	P	Y	D	$L=nR$	N	Y
Bijvank & Johansen (2012)	cP	Y	D	AL	N	Y
Hill & Johansen (2006)	G	Y	D	AL	Y	Y
Bijvank et al. (2010)	G	Y	D	AL	Y	Y
Cunha et al. (2017)	G	N	D	AL	Y	Y

Figura 3.8.2: Resumen de modelos de revisión periódica considerando lost sale. (Fuente:

Cunha et al.,2017).

Como es posible observar en la figura, la metodología propuesta por Cunha et al. (2017) permite la relajación de ciertas premisas en comparación con otros métodos. En particular, el uso de modelos de programación estocástica permite considerar la incertidumbre del problema en una manera mucho más amplia, dejando que efectos como

outstanding orders, no estacionariedad, y otros elementos comunes en series de demanda del mundo real puedan ser consideradas. Adicionalmente, la metodología propuesta no impone ningún supuesto en la relación entre L y R , excepto por el hecho de que ambas cantidades son consideradas múltiplos enteros del período unitario del modelo (esto será explicado con más detalle en la siguiente sección, pero debe notarse en este punto el uso del lenguaje en la figura, que expresa “cualquier largo” para el Lead Time, lo cual no es absolutamente preciso).

Por otra parte, el modelo de SP podría ser modificado de una manera sencilla para incluir la consideración de incertidumbre en otros parámetros además de la demanda, esto producto del método utilizado para resolver el modelo, el SAA, que será explicado posteriormente. Cabe mencionar también que para otros modelos actualmente disponibles en la literatura, que se expusieron en esta revisión, es necesario asumir que las demandas son variables aleatorias independientes entre cada período, y que el proceso estocástico es estacionario. Cunha et al. (2017) remarca que este supuesto no es necesario para la metodología que propone. Esto, como se verá en secciones posteriores, es producto del uso de SAA para resolver el problema de programación estocástica.

Con esto concluye el Marco Teórico de esta investigación, que ha entregado las principales nociones necesarias para entender la aplicación de programación matemática al problema de la obtención de los parámetros óptimos de una política de control de inventarios modelada a través de un Modelo de Costo Total. Además, se ha expuesto la justificación para el desarrollo del modelo, y se ha entregado la bibliografía consultada respecto a investigaciones similares.

La estructura del cuerpo restante de esta investigación se define de la siguiente forma: La sección 4 está dedicada a la formulación del problema, donde se expondrá detalladamente el modelo Hadley & Within (1963) y el modelo de SP desarrollado por Cunha et al. (2017), así como el Sample Average Approximation (SAA). Luego, la sección 5 presenta la réplica construida para ambos modelos. La sección 6 se aboca al desarrollo del estudio computacional para corroborar la calidad de la réplica y del modelo original. Finalmente, la sección 7 expone las principales observaciones y conclusiones de la investigación.

4. FORMULACIÓN DEL PROBLEMA

En esta sección se describe detalladamente el problema abordado por Cunha et al. (2017), la política de control de inventarios a la que se ajusta su modelo y las consideraciones principales sobre el tratamiento de la demanda estocástica y los parámetros del sistema.

Adicionalmente, esta sección incluye la exposición del modelo original formulado por Hadley & Whitin (1963) para un sistema de control de inventarios operado con una política (R,S) y demanda estocástica. Esto también es presentado por Cunha et al. (2017) en su artículo, pero a diferencia de ellos, en esta sección se extiende considerablemente la descripción de los autores. También se presenta, finalmente, el modelo de programación estocástica, en forma extendida, desarrollado por Cunha et al. (2017), describiendo detalladamente cada variable, parámetro y restricción del mismo. Luego, para concluir, se describe el Sample Average Approximation (SAA), el método que será utilizado para resolver el problema de SP. Nuevamente, al igual que para la formulación del método Hadley-Whitin, la presente investigación extiende la descripción desarrollada por Cunha et al. (2017).

4.1. Descripción Elemental del Problema.

Interesa determinar los parámetros óptimos de un sistema de revisión periódica (R,S) para una CS de un echelon y un ítem con demanda incierta. En orden de lograrlo es necesario obtener el valor objetivo del inventario (target level) que minimice el costo total y logre el nivel de servicio deseado (nótese cómo las expresiones no son necesariamente

equivalentes, por los argumentos expuestos en el apartado 3.9.2.). En este contexto, se considera un centro de distribución (CD) que emite sus órdenes de reaprovisionamiento a un proveedor externo, almacena un solo ítem, y sirve a un retailer que demanda dicho ítem, todo en un horizonte finito de planificación. Es importante agregar que los costos, retrasos, y capacidades de transporte entre el proveedor externo y el CD, y entre este último y el retailer, no son considerados parte del problema.

Como se ha establecido, el CD opera con un sistema de control de inventarios (R,S), donde R representa el intervalo de revisión, es decir la periodicidad con la que se revisa el inventario, y S denota el máximo para el inventory position, es decir, el valor objetivo (target level). El problema requiere la determinación de los valores óptimos de R y S para el CD, considerando que la demanda a la que está sujeto en cualquier período es no-determinística, es decir, para cada período la demanda puede ser descrita probabilísticamente por una función de densidad de probabilidad conocida.

En este punto, es importante destacar cómo, para la política (R,S), si bien R representa, en rigor, la periodicidad con la que se revisa el inventario del ítem, debe entenderse que, el sistema emitirá una orden de reabastecimiento cuando, para el momento de una revisión, el inventory position se encuentre por debajo del nivel S. Ahora bien, para un modelo que trata la demanda como una variable aleatoria continua, como es el caso del modelo de esta investigación, es inmediato observar que existirá una orden en cada revisión, por lo que R también puede ser entendido como la periodicidad de la emisión de órdenes de reabastecimiento, o bien, de manera más simple, como el tiempo entre la emisión de dos órdenes consecutivas.

El problema a abordar considera, como ya se planteó, un horizonte de planificación finito, compuesto por un total de N_p períodos discretos y uniformes, que pueden ser días, semanas, o meses. El tiempo entre órdenes, R , a ser determinado es modelado como un múltiplo de un período p , es decir, $R = n \cdot p$. El tiempo de reposición, desde que una orden es emitida hasta que se recibe, es decir, el lead time L , también está definido como un múltiplo del período p , y se establece como un parámetro conocido del problema. La cantidad a ordenar estará dada por la diferencia entre el target level S y el inventory position al momento de cada revisión. Es importante explicitar que, en el sistema a presentar, la primera orden se emite al comienzo del primer período del primer ciclo de reabastecimiento R , y será entregado al CD un tiempo $p + L$ después. Se considera que los ítems de una orden recibidos al comienzo de un período p pueden ser consumidos (utilizados para satisfacer la demanda) durante ese mismo período. A continuación, en la figura 4.1, se muestra un esquema representativo del funcionamiento del sistema en el tiempo.

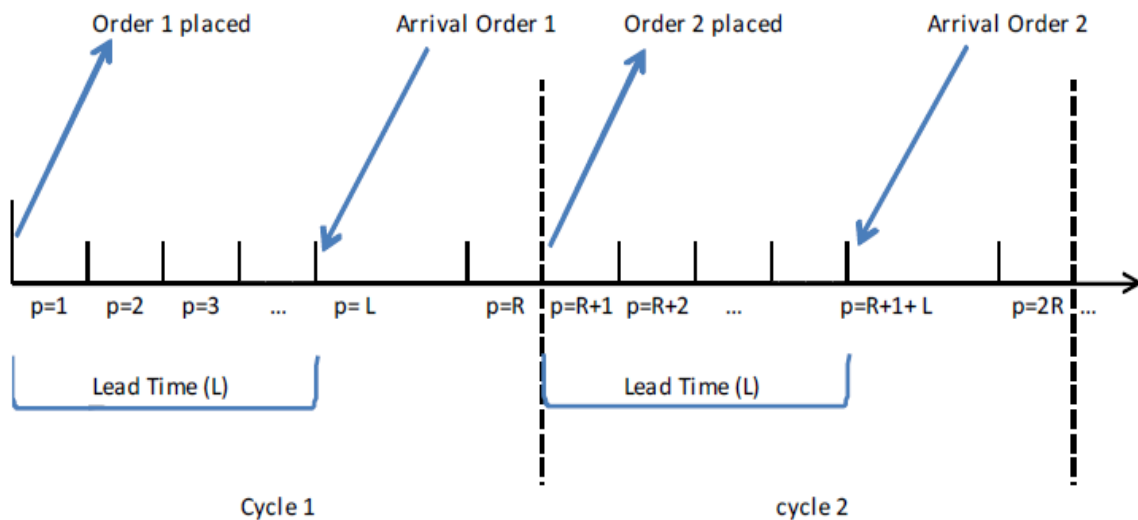


Figura 4.1.1: Dinámica del sistema (R,S) . (Fuente: Cunha et al., 2017).

Finalmente, los costos relevantes para la determinación de los parámetros óptimos del sistema (R,S) son el “carrying cost”, que es el costo de mantener unidades del ítem en inventario (lo que en la sección 3 se describió como el holding cost), y el ordering cost, que es aquel en el que se incurre cuando se emite una orden. Ambos costos no sólo son conocidos y constantes en el tiempo, también son independientes de la cantidad ordenada. Adicionalmente, cualquier cantidad demandada del ítem que no pueda ser cubierta será penalizada con un costo. Inicialmente se considera el caso de lost sale, y el costo de escasez es cargado al total de unidades faltantes, independiente del tiempo de duración de la escasez. Luego, también se incluye la práctica del backlogging, donde el costo de escasez será cargado proporcionalmente a la cantidad de unidades faltantes y al tiempo de escasez.

4.2. Método Hadley-Whitin

Esta sección desarrolla el modelo para aproximar los valores óptimos de los parámetros de una política de revisión periódica (R,S) con demanda estocástica formulado por Hadley & Whitin (1963) para la configuración de backlog y lost sale. Este modelo será usado durante los experimentos computacionales para verificar la calidad del modelo de SP (en adelante referido simplemente como “modelo SP”).

En este punto se vuelve a destacar que esta investigación presenta una descripción mucho más detallada del modelo HW que el estudio de Cunha et al. (2017), haciendo uso extensivo de los postulados atinentes de los capítulos 4 y 5 de la obra de Hadley & Whitin (1963).

4.2.1. Descripción Conceptual

Una doctrina operativa para los sistemas de revisión periódica es emitir una orden al momento de la revisión si es que ha habido demanda durante el período pasado (notar que HW entiende como período de operación al tiempo entre 2 revisiones sucesivas). Una cantidad suficiente para llevar el inventory position al nivel S es ordenada. Como se ha visto, esta política corresponde a un sistema de orden variable (S), y es conocida como una política de “ordenar hasta S ”.

Una alternativa a la política descrita consiste en emitir una orden sólo si, al momento de la revisión, el inventory position se encuentra por debajo de un nivel s . En este caso, una cantidad suficiente para llevar al inventory position hasta S es ordenada ($S > s$). Esta política se conoce como una regla sS . Nótese que una doctrina de “ordenar hasta S ” es un caso particular de la regla sS , donde $s = S - 1$ para problemas con demanda discreta, y $s = S$ para el caso de demanda continua.

Hadley & Whitin (1963) presentan en total tres políticas para operar un sistema de inventarios que trabaja bajo revisión periódica. No serán expuestos aquí ya que sólo interesa desarrollar la política de “ordenar hasta S ”. Ahora bien, el objetivo de este y los otros modelos será determinar valores apropiados para las cantidades s y S dado un valor de R , pero también determinar el valor óptimo de R , el tiempo entre revisiones, en los casos en que éste pueda variar. Los modelos que usan una política de “ordenar hasta S ” serán referidos como modelos (R,S) .

Es necesario comprender que, a diferencia de los modelos desarrollados en capítulos anteriores de la obra de Hadley & Whitin (1963), para el caso de revisión periódica es preciso incluir el costo de realizar una revisión, que será independiente de las variables del modelo. Siguiendo esto último, este costo podrá ser sumado al ordering cost, pero conceptualmente es deseable establecer una separación entre ambos costos, ya que en general es posible que no siempre que se realiza una revisión se emita una orden.

Entiéndase que esta consideración es expuesta en contraposición a los modelos de revisión continua que se habían presentado con anterioridad en el libro, donde el costo de la revisión, si bien es real y puede ser cuantificado, no es relevante para las variables Q (tamaño de lote) y r (punto de re-orden) de la política (Q,r) en aplicación, por lo que su inclusión en la función de costos a diferenciar(o, en el caso de programación matemática, de la función objetivo) no tendría impacto alguno. No sucede lo mismo con los modelos de revisión periódica, donde el costo total de revisar el inventario, en un horizonte de planificación, estará dado directamente por el valor de la variable R .

En el modelo a presentar a continuación, el costo de revisión se suma al ordering cost, pero esto sólo puede hacerse por el tratamiento continuo de la demanda, que hace que el inventory position se encuentre por debajo de S en cada período de revisión, lo que obliga al sistema a emitir una orden cada vez que se revisa el inventario.

4.2.2. La política (R,S) aplicada a Backorder

Para el tiempo en que el modelo (R,S) de Hadley & Whitin (1963) fue desarrollado, la estrategia operativa más usada en la industria para el control de inventarios era la

revisión periódica. Ahora, más de 50 años después, la industria se ha volteado dramáticamente, gracias a los avances en la tecnología, hacia lo que los autores llamaron “transaction reporting system” y que en esta investigación simplemente fue presentado como “revisión continua”.

Antes de comenzar, es preciso comentar que Hadley & Whitin (1963) utilizan una terminología ligeramente diferente a la expuesta en esta investigación. En virtud de evitar ambigüedades, en esta sección, entiéndase como Net Inventory o Inventario Neto lo que aquí se ha llamado Inventory Level, y entiéndase como On Hand Inventory lo que aquí se ha llamado Stock on Hand.

Se recuerda que todas las variables del modelo a presentar serán tratadas como continuas. El tiempo entre revisiones será R , y en cada revisión se ordena una cantidad de producto suficiente para llevar el inventory position del sistema hasta un nivel S . El problema es determinar los valores óptimos de R y S tal que se minimice el costo total relevante. Para comenzar, es preciso establecer los siguientes supuestos:

1. El costo J de realizar una revisión es independiente de las variables R y S .
2. El costo unitario C del ítem es constante e independiente de la cantidad ordenada.
3. Los backorders son incurridos sólo en muy pequeñas cantidades. Esto implica que cuando una orden llega, es casi siempre suficiente para satisfacer la totalidad del backorder.

4. El costo de cada backorder es b (costo por unidad), y es independiente del período de tiempo por el cual existe el backorder.

5. El lead time, o tiempo de reabastecimiento, es fijo y conocido, lo que implica que no existirá superposición entre las llegadas de diferentes órdenes.

Puede notarse, con respecto al supuesto 5, que para una política (Q,r) , si el lead time fuera una variable aleatoria independiente para cada orden emitida, no sería posible que el supuesto de que las órdenes lleguen en el orden en que fueron emitidas se aplique rigurosamente, ya que existiría una probabilidad no negativa de que dos órdenes estuvieran separadas por un espacio de tiempo aleatoriamente pequeño. Bajo revisión periódica, no obstante, no es posible que dos órdenes estén separadas por un tiempo menor que R y, dado que R es lo suficientemente grande, es posible, si la variabilidad de L es relativamente pequeña, asumir que ambos supuestos aplican rigurosamente (que los L sean variables aleatorias independientes y que no hay superposición en la llegada de las órdenes).

Se contará con la siguiente definición de variables y parámetros para el modelo:

A: Costo de emitir una orden.

J: Costo de Revisión.

C: Costo unitario del ítem.

I: Costo de almacenamiento, como porcentaje del costo unitario.

b : Costo unitario de la escasez.

x : Variable aleatoria que representa la demanda del ítem.

$f(x;t)$: Función de densidad de la demanda x del ítem durante un período t .

λ : Tasa promedio de la demanda.

S: Target Level.

R: Periodicidad de revisión.

h: Costo unitario de almacenamiento ($h = I * C$).

Interesa determinar los costos variables (relevantes) del sistema, que serán los costos de revisión, ordering, almacenamiento, y backorder.

Como se ha anticipado, dado que la demanda es una variable continua, es posible sumar el ordering cost y el costo de revisión, teniendo $C_F = J + A$, que será llamado, por simplicidad, ordering cost. Ahora, dado que el tiempo entre revisiones es R, el ordering cost anual promedio será $\frac{CF}{R}$, entendiendo que R está expresado como fracción de un año.

El costo anual promedio de almacenar inventario se obtiene encontrando el holding cost esperado por período y multiplicándolo por $\frac{1}{R}$, como se hizo para el ordering cost. Es conveniente considerar como período de operación el tiempo entre dos llegadas de órdenes consecutivas. Ya que el inventory position del sistema es S inmediatamente después de revisar el inventario y emitir una orden, y ya que toda orden habrá llegado en el lead time y nada que no haya sido ordenado puede llegar en este tiempo, el inventario neto esperado inmediatamente después de la llegada de una orden debe ser $S - \mu$, donde μ es la demanda esperada durante el lead time. Ahora, como la tasa promedio de demanda permanece constante en el tiempo, el inventario neto esperado debe decrecer linealmente con el tiempo y tener el valor de $S - \mu - \lambda * R$ justo antes de la llegada de la siguiente orden, ya que la demanda esperada por período debe ser la cantidad ordenada esperada, es decir, $\lambda * R$, de tal

forma que si el inventario neto esperado inmediatamente después de la llegada de una orden es $S - \mu$, entonces es $S - \mu - \lambda * R$ justo antes de la llegada de una orden.

Dado el supuesto 3, debe ser cierto que la integral en el tiempo del inventario neto entrega una muy buena aproximación de la integral en el tiempo del on hand inventory. Se tiene entonces que la cantidad anual esperada de unidades almacenadas por período es, aproximadamente:

$$R * \left[\frac{1}{2} * (S - \mu) + \frac{1}{2} * (S - \mu - \lambda * R) \right] = R * \left[S - \mu - \frac{\lambda * R}{2} \right],$$

por lo que el costo promedio anual de almacenamiento será:

$$I * C * \left[S - \mu - \frac{\lambda * R}{2} \right] = h * \left[S - \mu - \frac{\lambda * R}{2} \right] \quad (\text{HW-1})$$

El argumento sobre la aproximación expuesto en el párrafo anterior es correcto siempre y cuando el supuesto 3 se cumpla rigurosamente, para que la cantidad del backorder sea despreciable respecto a la cantidad de unidades almacenadas en promedio anual por período. Esto aplicará incluso cuando el lead time sea una variable aleatoria.

Se tiene, hasta el momento, el ordering cost y el holding cost, por lo que sólo resta obtener la expresión del costo de escasez (shortage cost) (costo anual promedio del backorder en este caso). Para hacerlo, se debe computar la expresión para la cantidad promedio de backorders en los que se incurre anualmente. Esto se hará obteniendo el valor esperado de backorders a ocurrir por período y multiplicando la expresión por $\frac{1}{R}$. Considere primero el caso en que el lead time L es determinístico y constante. Entonces, una orden emitida en un instante t llegará al sistema en el instante $t + L$, y la siguiente lo hará en el

instante $t + L + R$. Luego de que se emite la orden en el instante t , el inventory position del sistema es S . Se desea obtener el número esperado de backorders a ocurrir entre las llegadas de dos órdenes consecutivas. Un backorder ocurrirá en este tiempo, bajo el supuesto 3, si y sólo si la demanda durante el período $L + R$ excede S . El supuesto 3 asegura que luego de la llegada de la orden emitida en el instante t no pueden quedar backorders sin cubrir, por lo que todos los backorders deberán ocurrir entre los instantes $t + L$ y $t + L + R$. Con esto, el número esperado de backorders incurridos por período es:

$$\int_S^{\infty} (x - S) * f(x; L + R) dx \quad (\text{HW-2})$$

Nótese que esta expresión no corresponde a la demanda durante el lead time, sino que a la demanda durante el lead time más un período, que es la relevante. Esto se da producto de que una vez que se emite una orden en el instante t , la siguiente orden no puede ser emitida hasta un tiempo R después, por lo que se necesita “protección” por un tiempo de un lead time más R . Anteriormente se determinó que el inventario neto esperado al momento de la llegada de una orden es $S - \mu - \lambda * R$, esto es, por definición, el inventario de seguridad del sistema (ver Hadley & Whitin (1963) para más detalles) y, como puede suponerse, depende de la demanda esperada durante $L + R$.

Ahora considere el caso en que el lead time es una variable aleatoria, con densidad $g(L)$, y se tenga que L_{Min} , L_{Max} son los límites inferior y superior respectivamente del rango de valores posibles del lead time. Luego, si L_1 y L_2 son los lead time para las órdenes emitidas en t y en $t + R$ respectivamente, el valor esperado del número de backorders incurridos por período es:

$$\int_{L_{\text{Min}}}^{L_{\text{Max}}} \int_{L_{\text{Min}}}^{L_{\text{Max}}} \int_S^{\infty} (x - S) * f(x; L_2 + R) * g(L_2) * g(L_1) dx dL_2 dL_1$$

$$= \int_S^{\infty} (x - S) * \hat{h}(x; R) dx, \quad (\text{HW-3})$$

donde

$$\hat{h}(x; R) = \int_{L_{\text{Min}}}^{L_{\text{Max}}} f(x; L_2 + R) * g(L_2) dL_2, \quad (\text{HW-4})$$

ya que $\int_{L_{\text{Min}}}^{L_{\text{Max}}} g(L_1) dL_1 = 1$.

En orden de que (HW-3) aplique rigurosamente, es necesario que no exista superposición entre las distribuciones de los lead time, es decir, que se cumpla que:

$$L_{\text{Max}} < L_{\text{Min}} + R.$$

Sin embargo, el resultado será aproximadamente correcto si la superposición es pequeña.

Nótese cómo $\hat{h}(x; R)$ no es la distribución marginal de la demanda durante el lead time, por la razón que se expresó anteriormente.

Finalmente, independiente de si se establece $\hat{h}(x; R) = f(x; L + R)$ para cuando el lead time es constante, o si se utiliza (HW-4) para cuando éste es una variable aleatoria, el número de backorders a ocurrir por período puede ser calculado aproximadamente con (HW-3). Con esto, el número promedio de backorders en los que incurrirá el sistema en un año será:

$$E(R,S) = \frac{1}{R} * \int_S^{\infty} (x - S) * \hat{h}(x; R) dx, \quad (\text{HW-5})$$

y el costo promedio anual del backorder será $b * E(R,S)$.

Se han obtenido expresiones para todos los componentes del costo relevante, por lo que el costo variable anual promedio será:

$$K = \frac{L}{R} + h * [S - \mu - \frac{\lambda * R}{2}] + b * E(R,S) \quad (\text{HW-6})$$

Para un R dado, el valor de S que minimiza el costo total K debe satisfacer:

$$\frac{\partial K}{\partial S} = 0 = h - \frac{b}{R} * \hat{H}(R;S), \quad (\text{HW-7})$$

donde:

$$\hat{H}(R;S) = \int_S^{\infty} \hat{h}(x; R) dx \quad (\text{HW-8})$$

es la función complemento de probabilidad acumulada de $\hat{h}(x; R)$. Así, el valor óptimo de S será solución de:

$$\hat{H}(R;S) = \frac{h * R}{b} \quad (\text{HW-9})$$

Para un R dado, (HW-9) normalmente entregará un único S . Nótese cómo no existirá solución si $\frac{h * R}{b} > 1$. Esto no puede suceder, en cualquier caso, si es que los supuestos establecidos inicialmente se cumplen, ya que un valor de esa naturaleza implicaría que se incurre en backorders con mucha frecuencia.

En el año 1963, uno de los métodos existentes para resolver $\frac{\partial K}{\partial R} = 0$ simultáneamente con (HW-9) era aplicando el Método de Newton, y así obtener, al mismo tiempo, los valores de S^* y R^* . En la actualidad, es posible incluso plantear el problema de forma simplificada con programación matemática, usando tablas de probabilidad como parámetros del problema. En su obra, Hadley & Whitin (1963) optan por tabular K como una función de R , encontrando el valor de S^* para múltiples valores de R y así determinar R^* .

Entonces, para resumir, se tiene que el modelo HW considera los siguientes costos: ordering cost (C_O), carrying cost (C_C), y shortage cost (C_S), cuyas expresiones son:

$$C_O = \frac{C_F}{R} ; \quad C_C = h*[S - \mu - \frac{\lambda * R}{2}] \quad ; \quad C_S = b * E(R, S)$$

donde $E(R, S) = \frac{1}{R} * \int_S^{\infty} (x - S) * \hat{h}(x; R) dx$.

Con esto, el costo total relevante a ser minimizado en este modelo es:

$$C_T = \frac{C_F}{R} + h*[S - \mu - \frac{\lambda * R}{2}] + b * E(R, S)$$

4.2.3. Extensión a Lost Sale

Las ecuaciones para el caso de lost sale difieren poco de las del caso de backorder. El costo de revisión y de emitir órdenes no cambia. Tampoco lo hace el costo de escasez, ya que se mantiene el supuesto de independencia de la duración de la misma. El único término de la expresión del costo total que cambiará es el costo de almacenamiento. Para exponerlo, es necesario remitirse a la definición de Inventario de Seguridad que usan

Hadley & Whitin (1963) que es, para el caso de demanda incierta, “el valor esperado del on hand inventory (del net inventory para el caso del backorder) al momento de llegar una orden”.

Ahora bien, con esto en consideración, en el apartado anterior se definió claramente como el Inventario de Seguridad la expresión $S = \mu + \lambda * R$. Para el caso de lost sale, sin embargo, será necesario seguir una pequeña deducción, en orden de asegurar la cabal comprensión del caso, y evitar exponer formulas y expresiones cuyo origen no esté del todo claro.

Se recuerda que el on hand inventory es la cantidad con la que interesa tratar al abordar el caso de lost sale, y que ésta no puede ser negativa. Sea x la variable aleatoria que describe la demanda de un artículo durante el lead time, y sea $\varepsilon(x,r)$ el on hand inventory justo antes de que una orden llega, en un sistema que opera bajo la política (Q,r) , con demanda estocástica, revisión continua, y aplicando lost sale, se tendrá:

$$\varepsilon(x,r) = \begin{cases} r - x & ; \quad r - x \geq 0 \\ 0 & ; \quad r - x < 0 \end{cases}$$

Lo anterior significa que si r es el punto de re-orden, el on hand inventory del sistema justo antes de que llegue una orden será $r - x$ si $x \leq r$, es decir, si la demanda durante el lead time es menor que la cantidad que gatilla la orden, y será cero si $x > r$. Con esto, si $f(x)$ es la función de densidad (de probabilidad) para la demanda x durante el lead time, y si $g(L)$ es la función de densidad para el lead time L , entonces el inventario de seguridad, s , será:

$$s = \int_0^{\infty} \varepsilon(x, r) * h(x) dx = \int_0^r (r - x) * h(x) dx,$$

donde $h(x) = \int_0^{\infty} f(x) * g(L) dL$ es la función de distribución marginal de la demanda durante el lead time. Sin embargo, debe notarse que:

$$\begin{aligned} s &= \int_0^{\infty} (r - x) * h(x) dx - \int_r^{\infty} (r - x) * h(x) dx \\ &= r - \mu + \int_r^{\infty} x * h(x) dx - r * H(r), \end{aligned}$$

con μ siendo la demanda esperada durante el lead time y $H(r)$ la función complemento de probabilidad acumulada de $h(r)$.

Con lo anterior, sabiendo que para una política (Q, r) el valor esperado del on hand inventory luego de que llega una orden es $Q + s$, y que es s justo antes de que llega una orden (ciclo de operación completo), se deduce que el inventario promedio puede expresarse como $\frac{Q+2*s}{2}$, que es:

$$\frac{Q}{2} + [r - \mu + \int_r^{\infty} x * h(x) dx - r * H(r)]$$

Por lo tanto, el costo de almacenamiento promedio se expresa como:

$$h * \left[\frac{Q}{2} + r - \mu \right] + h * \left[\int_r^{\infty} x * h(x) dx - r * H(r) \right]$$

Siguiendo la deducción, es posible realizar una extensión de ésta para el caso de interés, con una política (R, S) que, como ya se mencionó, cuenta con una ligera diferencia

en su concepción del inventario de seguridad, el cual debe proveer protección por un lead time más un período.

Usando el mismo concepto de (HW-3) es posible deducir que, para el caso de lost sale, el inventario de seguridad se expresará como:

$$[S - \mu - \lambda * R] + \int_S^{\infty} (x - S) * \hat{h}(x; R) dx \quad (\text{HW-10})$$

Se reitera que $\hat{h}(x; R)$ no es la distribución marginal de la demanda durante el lead time, sino que durante el lead time más un período. Esta aproximación del nivel de inventario será válida incluso para los casos en que exista más de una outstanding order, siempre y cuando el lost sale ocurra en pequeñas cantidades. Ahora bien, (HW-10) ignora los efectos del lost sale que pueden ocurrir en el tiempo entre que se emite una orden y que ésta llega, considera sólo el lost sale que ocurre entre que llega una orden y que llega la siguiente. Sin embargo, siempre que el sistema incurra en lost sale durante una pequeña fracción del tiempo, la corrección a (HW-10) será pequeña y, por lo tanto, es válido considerar a (HW-10) como una buena aproximación. Con todo esto, el costo promedio de almacenamiento anual para el caso del lost sale será:

$$h * [S - \mu - \lambda * R] + h * \int_S^{\infty} (x - S) * \hat{h}(x; R) dx \quad (\text{HW-11})$$

Por lo tanto, el costo promedio anual del sistema bajo política (R,S) considerando lost sale será:

$$K = \frac{J}{R} + h * [S - \mu - \lambda * R] + \left(h + \frac{b}{R} \right) * \int_S^{\infty} (x - S) * \hat{h}(x; R) dx, \quad (\text{HW-12})$$

y el equivalente de (HW-9) es:

$$\hat{H}(R;S) = \frac{h*R}{b+h*R}$$

Para resumir, las ecuaciones del caso de lost sale son:

$$C_O = \frac{C_F}{R} \quad ; \quad C_C = h*[S - \mu - \frac{\lambda * R}{2}] + h*E(R,S) \quad ; \quad C_S = b*E(R,S)$$

donde $E(R,S) = \frac{1}{R} * \int_S^{\infty} (x - S) * \hat{h}(x; R) dx$.

Con esto, el costo total relevante a ser minimizado en este modelo es:

$$C_T = \frac{C_F}{R} + h*[S - \mu - \frac{\lambda * R}{2}] + (h*R+b)*E(R,S).$$

Con esto concluye la presentación del método HW para modelar un sistema de control de inventarios bajo demanda incierta operado con una política (R,S). Este puede ser aplicado cuando el lead time es una variable aleatoria y cuando existen múltiples outstanding orders. El apartado 5.1 presentará una réplica funcional del modelo, utilizando programación matemática.

4.3. Modelo de Programación Estocástica

Esta sección presenta, finalmente, la metodología propuesta por Cunha et al. (2017) para determinar los valores óptimos de R y S usando programación estocástica de dos fases. También, luego de presentar el modelo en forma extendida, se elabora sobre el método de resolución que será aplicado, el SAA, que servirá para obtener un conjunto discreto de escenarios de demanda, lo que representará la variabilidad de la misma en el horizonte de evaluación.

Como ya se ha establecido, la programación estocástica es útil para modelar situaciones en que la variabilidad de uno o más parámetros es altamente significativa para los resultados de un problema determinado. Mientras que los modelos determinísticos permiten obtener la solución óptima para un solo escenario, los modelos estocásticos toman múltiples escenarios en consideración, entregando una solución que se comporta bien “en promedio”. Por esto, cuando la demanda u otro parámetro están sujetos a incertidumbre, la programación estocástica se convierte en una mejor herramienta que los modelos determinísticos más tradicionales.

El sistema de modelamiento más aplicado en programación estocástica es el modelo de dos etapas con recurso (Higle, 2005). En éste, las variables de decisión se dividen en dos conjuntos: las variables de primera etapa, también conocidas como las variables de diseño, que corresponden a decisiones que deben ser tomadas antes de que se conozcan los valores de los parámetros inciertos, es decir, mientras la incertidumbre sigue vigente; luego están las variables de recurso, cuya resolución está basada en la realización de los parámetros inciertos. Estas variables están conectadas a las decisiones de control, también llamadas decisiones del tipo “espera y observa”.

En estos modelos la incertidumbre es representada por un conjunto finito y discreto de escenarios que buscan aproximar el fenómeno estocástico original. Por supuesto, el tamaño del conjunto estará fuertemente relacionado con la calidad de dicha aproximación. No obstante, es preciso notar que mientras más grande sea el conjunto, más esfuerzo computacional se requerirá para resolver el modelo. En este sentido, es deseable usar

técnicas de resolución que permitan obtener buenas soluciones en un tiempo computacional razonable.

4.3.1. Formulación Matemática

Para encontrar los parámetros óptimos de la política (R,S) se formula un modelo de programación estocástica de 2 etapas, cuyo equivalente determinístico es expresado como un Mixed-Integer Non Linear Programming (MINLP, que se traduce como “modelo de programación entero-mixto no lineal”), que luego es linealizado de manera exacta. Las decisiones de la primera etapa se relacionan con la determinación de R y S. Las de segunda etapa se refieren a los niveles de inventario y a las cantidades a ordenar durante el horizonte de planificación, que están directamente influenciadas por las decisiones de la primera etapa y por las realizaciones de la demanda incierta. Esta demanda se refiere a la que percibe el CD, y es modelada a través de una función de distribución de probabilidad conocida.

Con el método desarrollado por Cunha et al. (2017) debiera ser posible determinar los valores de R y S que minimizan (aproximadamente) el costo relevante (ordering, holding, y shortage), y cumplir con la demanda del ítem la mayor parte del tiempo. En un inicio el modelo es desarrollado con lost sale, luego, en virtud de entregar un modelo completo, los autores también presentan las modificaciones necesarias para permitir la aplicación de backorder.

4.3.2. Notación.

Considere la siguiente notación para el modelo de programación estocástica. Además, como se trabajará el caso de lost sale, entiéndase que el inventory position será el stock on hand más las outstanding orders.

Conjuntos.

P : Conjunto de períodos, $p \in P = \{1, \dots, N_P\}$;

Z : Conjunto de escenarios, $z \in Z$;

T : Conjunto de intervalos de revisión, $r \in T = \{1, \dots, N_R\}$;

Parámetros.

b^p : Costo de escasez por periodo y por unidad escasa del ítem en el período p .

C_F^p : Costo de emitir una orden para el CD en el período p .

$D(z)^p$: Demanda del ítem en el escenario z en el período p .

h^p : Costo de almacenamiento unitario del ítem en el período p .

$\overline{ITI}$: Cota superior por el inventory position total del ítem.

$\overline{S}$: Cota superior para el inventory position del ítem.

W : Matriz auxiliar $N_P \times N_R$ de parámetros w_p^r , definida como

$$W = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & \dots \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ \vdots & & & \end{pmatrix}$$

Variables.

S : Target level para el inventory position.

$A(z)^p$: Demanda cubierta del ítem en el escenario z en el período p ;

$F(z)^p$: Demanda no cubierta del ítem en el escenario z en el período p ;

$I(z)^p$: Stock on hand del ítem en el escenario z al final del período p ;

$IT(z)^p$: Inventory position del ítem en el escenario z al final del período p ;

$ITI(z)^p$: Inventory position del ítem en el escenario z al principio del período p ;

$ITIV(z)^p$: Variable auxiliar para el inventory position total del ítem en el escenario z al principio del período p ;

$P(z)^p$: Cantidad del ítem a ordenar en el escenario z al principio del período p ;

SV^p : Variable auxiliar para el target level del inventory position del ítem en el período p ;

v^p : Indica si existe una orden o no en el período p, $v^p \in \{0,1\}$;

u^r : Variable binaria auxiliar para la determinación del ciclo de reposición R del ítem ($u^r = 1$ implica $R = r$);

4.3.2.1. Problema de la Primera Etapa

El problema de la primera etapa consiste en las decisiones de la periodicidad de revisión R y el target level S usado en el sistema de control de abastecimiento, que deben tomarse antes de la realización de la incertidumbre, apuntando a minimizar el ordering cost, el holding cost, y el shortage cost. El problema de la primera etapa se formula de la siguiente forma:

$$\text{Minimizar } \sum_p C_F^p * v^p + E_Z[Q(R, S, z)] \quad (\text{SP-1})$$

$$\text{sujeto a } \sum_r u^r = 1 \quad (\text{SP-2})$$

$$\sum_r w_r^p * u^r = v^p \quad \forall p \quad (\text{SP-3})$$

$$0 \leq S \leq \overline{S} \quad (\text{SP-4})$$

$$u^r \in \{0,1\} \quad \forall r \quad (\text{SP-5})$$

$$v^p \in \{0,1\} \quad \forall p \quad (\text{SP-6})$$

La función objetivo a ser minimizada (SP-1) modela el costo total relevante que depende de la periodicidad de revisión y del target level, y que son cargados a múltiples puntos discretos (períodos de tiempo p) a lo largo del horizonte de planificación. El primer

término se refiere a la suma de los costos fijos de emitir órdenes a lo largo de todo el horizonte de tiempo, y el segundo término se refiere al valor esperado del holding cost y del shortage cost, los cuales están relacionados al problema de la segunda etapa. La restricción (SP-2) indica que existe exactamente un único valor para el ciclo de reabastecimiento R a ser determinado. La restricción (SP-3) indica que la primera orden siempre ocurre al principio del primer período del horizonte de planificación y las siguientes ocurren cada R períodos después, haciendo $v^p = 1$ cuando una orden ocurre en el período p . La restricción (SP-4) define las cotas inferior y superior para el valor óptimo del target level S . Finalmente, en las restricciones (SP-5) y (SP-6), u^r y v^p son definidas como variables binarias.

4.3.2.2. Problema de la Segunda Etapa

El problema de la segunda etapa representa la minimización del holding cost y del shortage cost a lo largo del horizonte de planificación, dadas las decisiones para R y S y la realización z de los parámetros inciertos de demanda. Para cada escenario $z \in Z$, el problema de la segunda etapa se modela de la siguiente forma:

$$\text{Minimizar } Q(R, S, z) = \sum_p h^p * I(z)^p + b^p * F(z)^p \quad (\text{SP-7})$$

$$\text{sujeto a } I(z)^{p-1} + P(z)^{p-L} = I(z)^p + A(z)^p \quad \forall p \geq L \quad (\text{SP-8})$$

$$I(z)^{p-1} = I(z)^p + A(z)^p \quad \forall p < L \quad (\text{SP-8'})$$

$$IT(z)^{p-1} + P(z)^p = IT(z)^p + A(z)^p \quad \forall p \quad (\text{SP-9})$$

$$A(z)^p + F(z)^p = D(z)^p \quad \forall p \quad (\text{SP-10})$$

$$P(z)^p = (S - IT(z)^{p-1}) * v^p \quad \forall p \quad (SP-11)$$

$$A(z)^p, I(z)^p, IT(z)^p, P(z)^p \geq 0, \quad \forall p \quad (SP-12)$$

$$A(z)^0 = I(z)^0 = IT(z)^0 = P(z)^0 = 0. \quad \forall p \quad (SP-12')$$

En la función objetivo (SP-7), el término $\sum_p h^p * I(z)^p$ representa los costos de almacenamiento que consideran el stock on hand a lo largo del horizonte de planificación, mientras que el término $\sum_p b^p * F(z)^p$ representa los costos de la demanda insatisfecha, que es, el shortage cost a lo largo del horizonte de planificación. Así, la suma del holding cost y del shortage cost es minimizada a lo largo de los períodos.

Las restricciones (SP-8) y (SP-8') representan el balance del stock on hand del ítem de un período al siguiente en cada escenario z, mientras que la restricción (SP-9) representa el balance del inventory position del ítem de un período al siguiente en cada escenario z. En relación a (SP-9), recuerde que la primera orden es emitida al principio del primer período del primer ciclo de reabastecimiento. Las restricciones de (SP-10) definen las cantidades de demanda satisfecha e insatisfecha en cada período para cada escenario z. Las restricciones de (SP-11) indican las cantidades a ser ordenadas al principio de cada período p para algún escenario z. La cantidad a ordenarse debe ser igual al target level S menos el inventory position al principio del período p (que es igual al inventory position al final del período p – 1) al comienzo de cada ciclo (indicado cuando $v^p = 1$), de otra forma, es igual a cero. Finalmente, las restricciones de (SP-12) imponen la no-negatividad para las variables de demanda cubierta, stock on hand, inventory position y cantidad a ordenar, y en (SP-12') se tiene la inicialización para las variables de demanda cubierta, stock on hand y cantidad a

ordenar. En la sección 6 se discutirá la inicialización de los inventory levels $(I(z)^0, IT(z)^0)$.

Observe que las restricciones de (SP-11) convierten al modelo en un problema MINLP, que es una clase de problemas conocidos por su notable complejidad computacional en términos de la obtención de soluciones óptimas. Para evitar esta situación, es posible proceder de dos formas alternativas en orden de resolver el problema usando herramientas de resolución basadas en programación lineal. La primera alternativa es fijar valores para el ciclo de reabastecimiento, eso es, fijar el valor de R . De manera equivalente, la variable binaria v^p se vuelve un parámetro fijo y conocido, causando que la restricción (SP-11) del problema se vuelva lineal. Para encontrar los valores óptimos de R^* y S^* , una cantidad finita de R_j^* es estimada preliminarmente, los respectivos S_j^* son calculados, y entonces se necesita verificar el par (R_j^*, S_j^*) que entregue el mejor resultado para $Q(R_j^*, S_j^*, z)$. Es inmediato notar que esta alternativa no es apropiada para CS's multi-echelon ya que el esfuerzo computacional se incrementa considerablemente. Por ejemplo, y como ya se introdujo un concepto similar anteriormente en referencia al trabajo de Higle (2005), considere una CS de dos echelon, ambos con N_R posibles valores para el intervalo de revisión, entonces será necesario evaluar $(N_R)^{N_R}$ casos.

Para obtener una versión manejable del modelo propuesto, la segunda alternativa es construir un modelo equivalente linealizado, que se describe de la siguiente manera. Primero, se introduce la variable $ITI(z)^p$ para representar el inventory position al principio del período p para un escenario z dado. Ya que $ITI(z)^p = IT(z)^{p-1}$, la restricción (SP-11) puede reescribirse como:

$$P(z)^p = S * v^p - ITI(z)^p * v^p \quad \forall p.$$

La linealización exacta de la restricción (SP-11) resulta de reemplazarla por las restricciones (SP-13) a (SP-20), sumado a la introducción de las restricciones de no-negatividad para las variables auxiliares SV^p , $ITI(z)^p$, y $ITIV(z)^p$, se construye el siguiente modelo MILP (Mixed-Integer Linear Problem, que significa “Problema Entero-Mixto Lineal”) para el problema de la segunda etapa:

Minimizar (SP-7)

sujeto a (SP-8) – (SP-10),(12’)

$$P(z)^{p-1} = SV^p - ITI(z)^p \quad \forall p \quad (\text{SP-13})$$

$$SV^p \leq \overline{S} * v^p \quad \forall p \quad (\text{SP-14})$$

$$SV^p \leq S \quad \forall p \quad (\text{SP-15})$$

$$SV^p \geq S - \overline{S} * (1 - v^p) \quad \forall p \quad (\text{SP-16})$$

$$ITIV(z)^p \leq \overline{ITI} * v^p \quad \forall p \quad (\text{SP-17})$$

$$ITIV(z)^p \leq ITI(z)^p \quad \forall p \quad (\text{SP-18})$$

$$ITIV(z)^p \geq ITI(z)^p - \overline{ITI} * (1 - v^p) \quad \forall p \quad (\text{SP-19})$$

$$ITI(z)^p = IT(z)^{p-1} \quad \forall p \quad (\text{SP-20})$$

$$A(z)^p, I(z)^p, IT(z)^p, ITI(z)^p, ITIV(z)^p, P(z)^p, SV^p \geq 0 \quad \forall p \quad (\text{SP-21})$$

Para considerar la práctica del backloging en la metodología propuesta, en lugar de lost sale, las restricciones (SP-9) y (SP-10) deben ser reemplazadas por (SP-9') y (SP-10'):

$$IT(z)^{p-1} + P(z)^p = IT(z)^p + D(z)^p \quad \forall p \quad (SP-9')$$

$$A(z)^p + F(z)^p = D(z)^p + F(z)^{p-1} \quad \forall p \quad (SP-10')$$

Estos cambios aseguran que, si parte de la demanda no es satisfecha en un período, lo será en un período futuro, ya que la cantidad escasa del ítem $(F(z)^p)$ es transferida al período siguiente.

Debe notarse que sólo se considera incertidumbre en el parámetro de la demanda en el modelo que se ha presentado. Sin embargo, su extensión para considerar incertidumbre en otros parámetros puede ser realizada de manera trivial mediante valores dependientes de escenarios para dichos parámetros.

4.3.3. Sample Average Approximation (SAA)

Los problemas de optimización estocástica, en los que la representación del fenómeno estocástico usualmente involucra el uso de funciones continuas de distribución de probabilidad, imponen dificultades al momento de evaluar numéricamente una Función Objetivo como (SP-1). Para superar esta dificultad, Cunha et al. (2017) utilizan la técnica conocida como Sample Average Approximation (SAA), que es una técnica de muestreo basada en Simulación Montecarlo.

En su obra, Hagle (2015) menciona el SAA como un método de solución a los problemas de programación estocástica, en su sección de “Soluciones”, en el apartado

“Métodos Basados en la Estadística”. Esta autora, y Philpott (2007), coinciden en reconocer a Kleywegt, Shapiro & Homem-de-Melo (2002) como los que acuñaron el término, aunque la técnica se ha utilizado desde hace años, de múltiples formas, y bajo diversos nombres.

Kleywegt et al. (2001) presentaron en su publicación un algoritmo para resolver problemas discretos de optimización estocástica mediante la técnica SAA. También abordaron el método desarrollando tasas de convergencia hacia la solución óptima y criterios de parada. Por otra parte, Santoso et al. (2005) usaron programación estocástica para el diseño de una CS que trabajaba bajo incertidumbre, y aquí también expusieron un algoritmo para la técnica SAA. Esto resulta bastante curioso si se considera que Shapiro & Philpott (2007) aseguran que el SAA no es un algoritmo, ya que incluso después de haberlo planteado, es necesario resolver el problema a través de un método numérico. En efecto, es posible formular un algoritmo basado en el SAA, que debe incluir, necesariamente, el uso de Simulación Montecarlo para generar los escenarios, pero debe entenderse que el método por sí mismo no constituye un algoritmo de resolución, sino más bien una formulación aproximada del problema original.

La idea principal detrás del SAA es aproximar el valor óptimo de la función objetivo con el promedio de la misma evaluada en múltiples instancias, compuestas por M subconjuntos independientes de N escenarios cada uno, muestreados de manera sucesiva e independiente.

Se presenta a continuación el método SAA al estilo con que es expuesto por Cunha et al. (2017). Se verificará que el procedimiento es ligeramente diferente al de los algoritmos referidos anteriormente.

Para un sub-conjunto de N escenarios, el valor óptimo de la función objetivo puede ser aproximado por:

$$\hat{g}_N = \text{Minimizar} \left\{ \sum_p C_F^p * v^p + \frac{1}{N} * \sum_{n=1, \dots, N} Q(R, S; Z^n) \right\},$$

donde $Q(R, S, z^n)$ es el valor de la función objetivo del problema de la segunda etapa evaluada en cada escenario z^n . Entonces, para M sub-conjuntos de N escenarios sucesiva e independientemente generados por muestreo, la aproximación deseada del valor óptimo de la función objetivo estará dado por:

$$\hat{g}_{N,M} = \frac{1}{M} * \sum_{m=1, \dots, M} \left\{ \sum_p C_F^p * v_m^p + \frac{1}{N} * \sum_{n=1, \dots, N} Q(R, S; z_m^n) \right\},$$

donde v_m^p corresponde al valor de la solución de v^p para cada sub-conjunto M , y $Q(R', S', z^{n'})$ es el valor de la función objetivo del problema de la segunda etapa evaluada en cada sub-conjunto M y escenario z_m^n .

De acuerdo con Santoso et al. (2005), el valor esperado $\hat{g}_N$ es menor o igual que el mínimo de la función objetivo del problema, y dado que $\hat{g}_{N,M}$ es un estimador insesgado del valor esperado de $\hat{g}_N$, $\hat{g}_{N,M}$ también es menor o igual que el valor mínimo del problema. Entonces, $\hat{g}_{N,M}$ es entendido como un Lower Bound (LB, cota inferior) del valor óptimo de la función objetivo original.

Mediante la selección de buenas soluciones factibles (u'^r, v'^p, S') , el valor de la función objetivo del modelo de la primera etapa $f(u'^r, v'^p, S')$ puede ser aproximado a través de la técnica SAA de la siguiente manera:

$$\hat{f}_{N'} = \sum_p C_F^p * v'^p + \frac{1}{N'} * \sum_{n=1, \dots, N'} Q(R', S'; z^{n'}),$$

donde $Q(R', S', z^{n'})$ es el valor de la función objetivo del modelo de la segunda etapa evaluado en cada escenario $z^{n'}$, $n=1, \dots, N'$. El tamaño de muestra N' es escogido independiente del tamaño de muestra N usado para el cálculo de u'^r, v'^p , y S' . Entonces, para M' sub-conjuntos de N' escenarios, se tiene:

$$\hat{f}_{N', M'} = \sum_p C_F^p * v'^p + \frac{1}{M'} * \sum_{m=1, \dots, M'} \left\{ \frac{1}{N'} * \sum_{n=1, \dots, N'} Q(R', S'; z_m^{n'}) \right\},$$

En este caso, un total de $M'N'$ sub-problemas determinísticos e independientes son resueltos en la segunda etapa con menor esfuerzo computacional. La ventaja de usar valores más grandes para N' y M' reside en el intento de reducir errores en las estimaciones.

De acuerdo con Santoso et al. (2005), $\hat{f}_{N'}$ es un estimador insesgado de $f(u'^r, v'^p, S')$. Como (u'^r, v'^p, S') son soluciones factibles del problema, $f(u'^r, v'^p, S')$ son mayores o iguales que el valor óptimo de la función objetivo del problema. Nuevamente, dado que $\hat{f}_{N', M'}$ es un estimador insesgado de $\hat{f}_{N'}$, $\hat{f}_{N', M'}$ es también mayor o igual que el valor óptimo de la función objetivo del problema. Entonces, $\hat{f}_{N', M'}$ es entendido como un Upper Bound (UB, cota superior) del valor óptimo de la función objetivo original.

Linderoth, Shapiro & Wright (2006) demostraron que, mediante el uso de esta técnica, es posible obtener LB y UB del valor óptimo de la función objetivo, y que ambos convergen al valor óptimo a medida que N aumenta. A partir del Teorema del Límite Central, y considerando un nivel de confianza para la Distribución Normal con promedio cero y varianza σ_{LB}^2 (y σ_{UB}^2) dado por α , donde $P(z \leq z\alpha) = 1 - \alpha$, un intervalo de confianza para LB (y UB) puede ser expresado, respectivamente, como:

$$\left[LB - \frac{z_\alpha * \sigma_{LB}}{\sqrt{M}}, LB + \frac{z_\alpha * \sigma_{LB}}{\sqrt{M}}\right] \text{ y } \left[UB - \frac{z_\alpha * \sigma_{UB}}{\sqrt{M}}, UB + \frac{z_\alpha * \sigma_{UB}}{\sqrt{M}}\right],$$

donde σ_{LB}^2 y σ_{UB}^2 son estimadores de la varianza para el LB y el UB respectivamente.

De manera adicional, con la aplicación de técnicas de muestreo, es posible obtener una estimación del optimality gap (brecha de optimalidad) y su varianza σ_{GAP}^2 . El estimador del optimality gap es definido como la diferencia entre UB y LB, y el estimador de la varianza del optimality gap es la suma de σ_{LB}^2 y σ_{UB}^2 .

Finalmente, existen múltiples alternativas para estimar el número de escenarios N requeridos para obtener una aproximación del valor óptimo de la función objetivo dentro de cierto margen de error (Kleywegt et al., 2002; Shapiro & Homem-de-Melo, 1998). Una de ellas es usar las ideas de técnicas de muestreo, que proveen bases estadísticas para estimar el número de escenarios requeridos.

Para este fin, debe notarse que la variable aleatoria $\hat{g}_N$ puede ser considerada como un estimador del valor mínimo de la función objetivo. Entonces, para cada escenario de

$\{z^1, z^2, \dots, z^N\}$, se tiene, para $n=1, \dots, N$, que el estimador del valor determinístico de la función objetivo es:

$$g_N(z^n) = \text{minimizar}\{\phi(R, S) + Q(R, S, z^n)\},$$

con varianza dada por:

$$\hat{\sigma} = \sqrt{\frac{\sum_{n=1}^N (\hat{g}_N - g_N(z^n))^2}{N-1}}$$

Por el Teorema del Límite Central, es posible definir un intervalo de confianza con nivel $\frac{\alpha}{2}$ para el estimador $\hat{g}_N$:

$$[\hat{g}_N - \frac{Z_{\alpha/2} * \hat{\sigma}_N}{\sqrt{N}}, \hat{g}_N + \frac{Z_{\alpha/2} * \hat{\sigma}_N}{\sqrt{N}}].$$

Usando este intervalo, un estimado para el LB del número de escenarios necesarios en la aproximación de la función objetivo es:

$$N \geq \left(\frac{Z_{\alpha/2} * \hat{\sigma}_N}{(\beta/2) * \hat{g}_N} \right)^2,$$

donde $\beta \in [0,1]$ establece el tamaño del intervalo de confianza deseado en términos de porcentaje de $\hat{g}_N$. En la práctica, la determinación del número de escenarios debiera considerar un equilibrio entre el esfuerzo computacional y la calidad deseada para la solución en términos del intervalo de confianza para el valor de la función objetivo.

Con esto concluye la sección 4. Se ha formulado el problema que motiva la investigación, se han expuesto los dos principales modelos que lo encuadran, y se ha

presentado el SAA como técnica para aproximar la solución del problema de programación estocástica. Nótese, respecto a esto último, que en términos sencillos, lo que logra el SAA es transformar el problema estocástico de dos fases en uno determinístico equivalente de una fase.

5. RÉPLICA DE LOS MODELOS

En esta sección se entregan sendas réplicas de los modelos que se han presentado como fundamentos de la investigación, a saber, el modelo HW y el modelo de programación estocástica desarrollado por Cunha et al. (2017), teniendo ambos por objetivo la determinación de los parámetros óptimos de una política de control de inventarios (R,S) con demanda incierta.

En primer lugar, será presentada la réplica del modelo HW que se desarrolló para esta investigación. Esto es importante ya que una de las estrategias que Cunha et al. (2017) utilizan para corroborar la calidad de las soluciones entregadas por su modelo SP es comparar directamente con los resultados del modelo HW. Sin embargo, los autores no entregan ninguna réplica de este último, y simplemente presentan los valores que, ellos aseguran, corresponden a los resultados de aplicar el modelo HW. Esta investigación resuelve esto entregando una réplica de alta calidad del modelo HW, y mostrando de manera previa a su uso final su funcionalidad y confiabilidad.

Posteriormente se presenta la réplica construida del modelo SP de Cunha et al. (2017), en lenguaje AMPL. El modelo es presentado en forma extendida y se explica con detalle las diferencias existentes con el modelo original en cuanto a forma, y cómo éstas no afectan a la calidad de la réplica.

5.1. Réplica del modelo Hadley-Whitin

En este apartado será presentada la réplica del modelo HW que se construyó para esta investigación. Como se mencionó en el apartado 4.2.3, al momento de ser desarrollado el

modelo en la década de 1960, la tecnología no permitía resolverlo de manera computacional, por lo que los métodos utilizados para encontrar los valores óptimos de R y S incluían, entre otros, al método de Newton, aunque Hadley & Whitin (1963) prefieren tabular la función de costos como una función de R , encontrando el valor óptimo de S para distintos valores de R , hasta encontrar la combinación que lograra el mínimo valor para el costo total. Actualmente es posible modelar el problema utilizando programación matemática, que es justamente lo que se ha hecho en esta investigación. No obstante, como podrá apreciarse, se ha decidido modelar el problema expresando S como una función de variable, cambiando sólo R , en orden de respetar lo más posible el método original de resolución empleado por los autores.

Se presentará, en primer lugar, el modelo HW considerando backorder, en orden de demostrar la funcionalidad del mismo mediante la resolución de un ejemplo de la obra de Hadley & Whitin (1963) que opera bajo este sistema. Se desarrollará una explicación pertinente para cada elemento del modelo, y luego se expondrán las modificaciones que se necesita efectuar en orden de extender la aplicación a lost sale que, como ya se ha expuesto, corresponden sólo a una pequeña adición a la función objetivo.

Formulación del Modelo:

Parámetros.

C_F : Costo fijo de emitir una orden.

b : Shortage cost unitario.

h : Holding cost unitario por unidad de tiempo.

D : Tasa de demanda promedio del ítem por período.

L : Lead time.

σ^2 : Varianza de la demanda del ítem por período.

Variables.

R : Periodicidad del ciclo de revisión del inventario.

Funciones de Variable.

$S = Z_S * \sqrt{\sigma^2 * (R + L)} + \mu * (L + R)$: Target Level.

$$Z_S = X(1 - \Phi\left(\frac{S - \mu * (R + L)}{\sqrt{\sigma^2 * (R + L)}}\right))$$

$\phi(x)$.

$\Phi(x)$.

$X(\Phi)$: Función para recuperar el valor x a partir de la función $\Phi(x)$.

Restricciones.

$R \geq 0$;

Función Objetivo.

$$\begin{aligned} \text{Min}\{ & \frac{C_F}{R} + h * [S - D * L - \frac{D * R}{2}] + \frac{b}{R} * [\sqrt{\sigma^2 * (R + L)} * \phi(\frac{S - D * L * (R + L)}{\sqrt{\sigma^2 * (R + L)}}) \\ & + (D * L * (R + L) - S) * \Phi(\frac{S - D * L * (R + L)}{\sqrt{\sigma^2 * (R + L)}})] \} \end{aligned}$$

Esta formulación es meramente explicativa, para introducir la técnica aplicada, ya que realmente la réplica fue desarrollada en la plataforma Microsoft Excel 2010, y su programación dista mucho de la estructura aquí expuesta, aunque, por supuesto, es totalmente equivalente. Se elaborará sobre esto de manera posterior, una vez se hayan explicado todos los componentes del modelo. No obstante, debe notarse en este punto la introducción del término $D * L$, que reemplaza a μ , dado que la demanda esperada durante el lead time será igual a la demanda esperada de un período multiplicada por la cantidad de períodos que dure el lead time.

Como es posible apreciar, muchos de los parámetros utilizados ya fueron introducidos como parte de la presentación del modelo HW. En particular, es necesario explicar la introducción de 4 funciones de variable como elementos del modelo, la función Z_S , la función $\phi(x)$, la función $\Phi(x)$, y la función $X(\Phi)$. Es preciso hacer notar que estas funciones son utilizadas por los autores del modelo para resolver numéricamente la integral que expresa el valor estimado del backorder promedio en un período de operación.

En primer lugar, dada la ecuación (HW-9), Hadley & Whitin (1963) definen que $\hat{H}(R; S) = \int_S^\infty \hat{h}(x; R) dx = \Phi(\frac{S - \mu * (R + L)}{\sqrt{\sigma^2 * (R + L)}})$. Esta función $\Phi(x)$ es conocida, y se encuentra

tabulada en la obra de Axsäter (2006), en el apéndice 2. Sin embargo, es preciso exponer que Axsäter define la función como $\Phi(x) = \int_{-\infty}^x \phi(v) dv$, es decir, con los límites de integración invertidos respecto a la definición de Hadley & Whitin (1963)¹. Ahora bien, la réplica del modelo HW fue construida utilizando la tabulación de Axsäter (2006), por lo que para obtener los resultados realmente deseados, la réplica presentada del modelo HW, al utilizar la función $\Phi(x)$ para computar cierto valor, debe usarse con una pequeña corrección. Al utilizar x para obtener $\Phi(x)$, no se contará con el resultado buscado, sino que lo que realmente se necesita es aplicar un paso adicional, y obtener el valor de $1 - \Phi(x)$. Podrá apreciarse que el ejemplo a referirse posteriormente será especialmente esclarecedor en este respecto. De momento, las tablas con las funciones $\Phi(x)$ y $\phi(x)$ tabuladas, extraídas de Axsäter (2006), se encuentran en el anexo n°1.

En cuanto a la función $\phi(x)$, Hadley & Whitin (1963) hacen referencia a que el promedio de backorders en que su modelo incurre anualmente puede ser calculado combinando la ecuación (HW-5) con la ecuación 25 del apéndice 4 de su libro, que se expresa como:

$$\frac{1}{\sigma} \int_r^{\infty} (x - r) * \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx = \int_r^{\infty} \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) dx = \sigma * \phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right) - (r - \mu) * \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right).$$

¹ En breve, la función que presenta Axsäter es la de probabilidad acumulada, mientras que la que presentan Hadley & Whitin es la complementaria de la probabilidad acumulada.

Considerando esta ecuación, es relativamente inmediato ahora comprender el origen de la función objetivo del modelo de programación matemática presentado. Note como este término es el único que no se había formulado explícitamente durante la presentación del modelo HW.

Continuando, lo que se ha definido como la función $X(\Phi)$ corresponde sólo a una simplificación de una operación que debió programarse en la réplica del modelo. La función $X(\Phi)$ consiste en recuperar, de la tabla de Axsäter (2006) del anexo n°1, el valor de x tal que $\Phi(x) = 1 - \frac{h * R}{b}$, esto para obtener el valor de S^* para un R dado, como ya fue explicado anteriormente.

Por su parte, la función de variable S que se presenta en el modelo proviene directamente de (HW-9) y de la función $\Phi(x)$, ya que:

$$1 - \frac{h * R}{b} = \Phi\left(\frac{S - \mu * (R + L)}{\sqrt{\sigma^2 * (R + L)}}\right)$$

Aplicando la función $X(\Phi)$ a $1 - \frac{h * R}{b}$, se conocerá el valor “ x ” que es igual a $\left(\frac{S - \mu * (R + L)}{\sqrt{\sigma^2 * (R + L)}}\right)$ (el argumento de la función $\Phi(x)$), con lo que $S^* = "x" * \sqrt{\sigma^2 * (R + L)} + \mu * (L + R)$, que es justamente la definición de S como función de variable. Con esto también se explica suficientemente la función de variable Z_S que simplemente es igual a la función $X(\Phi)$ aplicada con el argumento correcto, de acuerdo con las diferencias entre las formulaciones de Hadley & Whitin (1963) y Axsäter (2006).

En el anexo n°2 se exponen figuras de la réplica del modelo HW desarrollado en Microsoft Excel 2010, donde se expone el código utilizado para programar cada celda, y también el uso de la herramienta Solver para encontrar los valores que minimizan el costo total.

En el anexo n°3 se exponen imágenes de la resolución del ejemplo desarrollado en la página 242, capítulo 5 de la obra de Hadley & Whitin (1963), que aborda un sistema de control de inventarios operado bajo una política (R,S) considerando backorder. Los resultados obtenidos por Hadley & Whitin (1963) son comparados con los obtenidos por la réplica de esta investigación con el fin de explicitar la calidad de la misma.

Finalmente, es necesario realizar las modificaciones al programa en orden de que éste considere lost sale y no backorder para la escasez. Los pequeños ajustes son: 1) cambiar la función de variable $\Phi(x) = \frac{h*R}{b}$ por $\Phi(x) = \frac{h*R}{b+h*R}$; 2) Ajustar el costo de almacenamiento en la Función Objetivo, cuya nueva expresión debe ser:

$$\text{Min}\left\{\frac{C_F}{R} + h * \left[S - D * L - \frac{D*R}{2}\right] + \left(\frac{b}{R} + h\right) * \left[\sqrt{\sigma^2 * (R + L)} * \phi\left(\frac{S-D*L*(R+L)}{\sqrt{\sigma^2*(R+L)}}\right) + (D * L * (R + L) - S) * \Phi\left(\frac{S-D*L*(R+L)}{\sqrt{\sigma^2*(R+L)}}\right)\right]\right\}.$$

En el anexo n°4 se encuentran imágenes del programa en Microsoft Excel 2010 modificado para considerar lost sale.

5.2. Réplica del Modelo de Programación Estocástica.

En este apartado será presentada a la réplica construida del modelo de SP de Cunha et al. (2017). Como fue mencionado, la réplica fue elaborada en lenguaje AMPL.

En el anexo n°5 se encuentra el código utilizado para replicar el modelo de SP. Nótese que, por simplicidad, una de las modificaciones de forma que se han introducido consiste en representar el conjunto de escenarios por una letra Z en lugar de N , e indexarlo por z en lugar de z . Ahora, para efectos de notación, N pasará a ser la cardinalidad del conjunto Z . Adicionalmente, el código cuenta con textos explicativos (en color verde) para exponer de manera más clara la equivalencia de cada elemento con respecto al modelo de Cunha et al. (2017). Todas las explicaciones adicionales se encuentran dentro del anexo n°5 junto con el código AMPL.

Con esto concluye la presentación de las réplicas de los modelos HW y de SP que sustentan la investigación. Se advierte que, si bien muchos elementos han sido derivados a la sección de anexos, esto no significa que pueda prescindirse de consultarlos, ya que constituyen piezas fundamentales del estudio, y serán referidos constantemente en las secciones posteriores de esta investigación.

6. ESTUDIO COMPUTACIONAL

Ahora que se cuenta con las réplicas de ambos modelos, el HW y el SP, es posible proseguir con el elemento más importante de la investigación, la réplica de los experimentos computacionales desarrollados por Cunha et al. (2017) con el fin de comprobar la calidad del modelo SP elaborado. Naturalmente, para los experimentos a realizarse en esta sección se utilizará el modelo réplica presentado en el apartado 5.2.

Esta sección se enfoca en replicar los experimentos desarrollados por Cunha et al. (2017), presentando todas las consideraciones necesarias y la construcción de los conjuntos y los parámetros del modelo de SP. Se comienza, por supuesto, con lo que Cunha et al. (2017) refieren como la “Primera prueba numérica”, y que aquí será llamado “primer experimento computacional”.

La resolución de los experimentos con el método SAA será efectuada usando CPLEX versión 12.6.3.0, en un computador Lenovo Z480, con un procesador Intel Pentium CPU B970 de 2.3 GHz y doble núcleo, y una memoria RAM De 6 GB (3,37 GB usable).

6.1. Réplica del primer experimento computacional

El experimento consiste, para los autores, primero en determinar el número de escenarios necesarios para obtener un 99% de confianza en sus resultados, definiendo los parámetros de costo a utilizarse. Luego, se calculan resultados para diferentes configuraciones de costos y se contrastan con los resultados que arroja el modelo HW y una simulación sobre el propio modelo SP (esto último con el objeto de obtener un indicador de

calidad respecto a las cotas obtenidas más que a los resultados en sí, el primer índice de calidad del modelo SP es el modelo HW).

Para el desarrollo de esta réplica, se seguirán todos los pasos descritos por Cunha et al. (2017), profundizando, como antes, en aquellos puntos en que los autores no lo hayan hecho, para la claridad en la exposición. El fruto esperable de este experimento es obtener resultados altamente similares a los obtenidos por los autores, del orden del 1% de acuerdo a sus propias definiciones y, de esta forma verificar, al mismo tiempo, la calidad del modelo original y de la réplica. Sin más preámbulos, se expondrán a continuación todos los pasos del primer experimento computacional.

El primer paso consistirá en definir los principales parámetros de costo y el tamaño del problema a resolver. Se utilizará un conjunto de 42 períodos de tiempo ($N_P=42$), considerando que cada período corresponde un mes. En estos meses, los parámetros de costo serán los siguientes: $C_F = 25 ; 50 ; 75 ; 150$, $h = 0.2 ; 0.4 ; 0.6$, y $b = 25$ (los diferentes valores para C_F y h serán evaluados en experimentos individuales independientes entre sí, todo como parte del primer experimento computacional).

El ciclo de reabastecimiento R a ser determinado será, por supuesto, un múltiplo entero de un período individual p , y podrá variar entre 1 y 10 meses ($N_R=10$). La demanda para el ítem en análisis seguirá una distribución de probabilidad Normal, con media 50 y varianza 75 en cada período. Debe recordarse que la demanda mensual tendrá la misma media y la misma desviación estándar para cada período durante el horizonte de evaluación, y se asume que no existe correlación entre las distintas demandas. Por su parte, el lead time

L será fijo (determinístico) e igual a 2 meses. Los escenarios serán generados, de acuerdo a Cunha et al. (2017), mediante un modelo estacionario como:

$$D(z)^p = \alpha + \varepsilon^p \quad \forall p, \forall z,$$

donde α es la demanda promedio y ε^p es el término que representa el error para cada período, que sigue una distribución Normal con media cero y varianza σ^2 (ruido blanco). Para el caso de esta réplica, los escenarios son construidos mediante la herramienta “generador de números aleatorios” de MS Excel 2010, introduciendo la distribución Normal y los parámetros establecidos para la media y la desviación estándar.

Debe notarse que Cunha et al. (2017) no definen valores para los parámetros $\overline{ITI}$ y $\overline{S}$. Para efectos de esta investigación, se ha determinado establecer valores numéricos arbitrariamente grandes para estos parámetros durante los experimentos. Tratándose de cotas superiores, la asignación de valores arbitrariamente grandes a estos parámetros no afectará la calidad de la solución, mientras que estos sean siempre mayores al valor de S^* a ser determinado. En este caso, teniendo en cuenta la naturaleza de la distribución de la demanda, se ha estimado que 1000 constituye un valor suficientemente grande para los parámetros.

Una consideración importante que los autores (Cunha et al., 2017) mencionan en este punto es que en los métodos tradicionales, al abordar problemas de esta categoría para gestión de inventarios, se suele asumir que el sistema se encuentra operando en estado estable, haciendo esto alusión a que la inicialización de variables no debiera ser una preocupación. Sin embargo, expresan los autores, dado que se está proponiendo un método

basado en la optimización para la gestión de inventarios, es imperativo definir niveles iniciales de inventario ($I(z)^0$, $IT(z)^0$). Por lo tanto, para minimizar el impacto de esta inicialización en los resultados de la minimización, los tres costos relevantes, ordering, holding, y shortage, tendrán un valor igual a cero durante los 6 primeros períodos de evaluación, para asegurar que el sistema tenga inventario disponible al comienzo del séptimo período. Al hacer esto, se están incluyendo en el experimento valores aleatorios para el inventory level que se comportarán de acuerdo a la estocasticidad de la demanda.

En este experimento, Cunha et al. (2017) definieron la cantidad total de escenarios N de acuerdo a los postulados de la sección 4.3.2 de esta investigación. Por lo tanto, para un intervalo de confianza del 1%, se establece $\alpha = 0.01$ y $\beta = 0.055$, considerando una muestra de 200 escenarios.

En este experimento, siguiendo los pasos de Cunha et al. (2017), la cota inferior, que es una aproximación del valor de la función objetivo, será el promedio de los resultados de 10 reproducciones ($M = 10$), de 90 escenarios cada una ($N = 90$). Cinco buenas soluciones candidatas (u^r , v^p , S^s) serán seleccionadas. Las cotas superiores serán obtenidas evaluando las soluciones candidatas seleccionadas 50 veces ($M = 50$), también con $N = 90$.

A continuación, la tabla 6.1, resume los resultados obtenidos del “primer experimento computacional” y es, a su vez, una réplica de la tabla 3 presentada en Cunha et al. (2017) para su “primera prueba numérica”. La columna C_F contiene los diferentes valores del ordering cost que fueron evaluados, lo mismo para la columna h con respecto al holding cost. La columna $\hat{g}_{200}$ representa el valor de la función objetivo (minimizada) con un total

de 200 escenarios, y la columna $\hat{\sigma}_{200}$ expone su desviación estándar (ver apartado 4.3.2 para más detalles). La columna N entrega el número mínimo de escenarios requeridos, de acuerdo a los postulados del apartado 4.3.2. Las columnas R*(SP) y S*(SP) muestran los resultados para los valores óptimos de R y S respectivamente entregados por el modelo SP. Las columnas LB y UB muestran las cotas inferior y superior respectivamente (LB = Lower Bound; UB = Upper Bound) del valor óptimo de la función objetivo. Del mismo modo, las columnas σ_{LB} y σ_{UB} muestran los estimadores de la desviación estándar de las respectivas cotas. La columna gap muestra la diferencia entre la cota superior y la inferior. La columna lbe y ube exponen el porcentaje de error para la estimación de las cotas, $((\sigma_{LB}/LB)*100)$ y $((\sigma_{UB}/UB)*100)$ respectivamente.

C_F	h	$\hat{g}_{200}$	$\hat{\sigma}_{200}$	N	R*(SP)	S*(SP)	LB	σ_{LB}	UB	σ_{UB}	gap	lbe	ube
25	0.2	394	34	64	1	183	394	4,0	403	1,3	9	1,02	0,32
	0.4	470	52	153	1	180	470	5,7	487	2,7	17	1,21	0,55
	0.6	534	67	255	1	177	538	7,2	559	4	21	1,34	0,72
50	0.2	694	34	64	1	183	694	4,1	703	1,3	9	0,59	0,18
	0.4	771	52	153	1	180	770	5,9	787	2,7	17	0,77	0,34
	0.6	838	67	255	1	177	838	7,2	859	4	21	0,86	0,47
75	0.2	994	34	64	1	183	994	4,1	1003	1,3	9	0,41	0,13
	0.4	1071	52	153	1	180	1070	5,9	1087	2,7	17	0,55	0,25
	0.6	1138	67	255	1	177	1138	7,2	1159	4	21	0,63	0,35
150	0.2	1894	34	64	1	183	1889	4,1	1898	1,3	9	0,22	0,07
	0.4	1971	52	153	1	180	1970	5,9	1987	2,7	17	0,30	0,14
	0.6	2038	67	255	1	177	2038	7,2	2059	4	21	0,35	0,19

Tabla 6.1: Resumen de resultados del primer experimento computacional (Réplica).

(Fuente: Elaboración Propia).

Se presenta a continuación, en la figura 6.1, la tabla 3 de la publicación de Cunha et al. (2017), con los resultados obtenidos por los autores en su implementación en AIMMS.

C_F	h	$\hat{g}_{200}$	$\hat{\sigma}_{200}$	N	$R^*(SP)$	$S^*(SP)$	LB	σ_{LB}	UB	σ_{UB}	gap	lbe	ube
25	0.2	375	36	81	2	237	372.2	5.1	372.1	3.8	-0.1	1.36	1.01
	0.4	570	57	88	2	232	571.8	6.1	571.9	5.5	0.1	1.07	0.97
	0.6	724	51	44	1	175	720.5	5.5	725.5	5.4	5.0	0.76	0.75
50	0.2	489	44	71	3	288	485.7	4.1	487.0	3.8	1.3	0.85	0.79
	0.4	727	63	66	2	232	718.5	7.9	721.7	5.6	3.2	1.09	0.78
	0.6	904	70	53	2	224	911.4	8.9	910.7	7.3	-0.7	0.98	0.81
75	0.2	573	49	64	4	339	575.1	6.3	576.1	4.7	1.0	1.10	0.81
	0.4	841	58	42	3	282	844.3	7.2	846.6	5.7	2.4	0.85	0.68
	0.6	1059	75	44	2	229	1062.5	8.4	1061.7	5.5	-0.8	0.79	0.52
150	0.2	760	58	51	5	390	765.4	3.8	763.2	4.4	-2.3	0.49	0.57
	0.4	1104	60	26	4	327	1119.0	6.4	1122.3	5.7	3.3	0.57	0.51
	0.6	1390	79	28	3	278	1395.5	9.9	1394.4	8.1	-1.1	0.71	0.58

Figura 6.1.1: Resumen de resultados de la primera prueba numérica del modelo SP de Cunha et al. (2017). (Fuente: Cunha et al., 2017).

Como se puede apreciar en la figura, existen notables diferencias entre los resultados de la réplica construida en esta investigación y los presentados por los autores del modelo original. Estas diferencias serán abordadas en el siguiente apartado como observaciones sobre el experimento.

6.1.1. Observaciones del primer experimento computacional

Los resultados obtenidos en el primer experimento computacional difieren desde los primeros y más fundamentales cálculos. Ahora bien, uno de los primeros comentarios que debe realizarse sobre estos resultados, es que no corresponden a los arrojados por el modelo desarrollado en AMPL propiamente tal. La investigación reveló que Cunha et al. (2017), sin hacer ninguna mención a ello, presentan sus resultados en una base anual, a pesar de

estar evaluando un período de 42 meses, 36 de los cuales son de interés por haber establecido que los primeros 6 meses del horizonte de tiempo no tendrían costo. Se sospecha que esta configuración anual para la presentación de los resultados está relacionada con el hecho de que el modelo HW original presentado en la obra de Hadley & Whitin (1963) está elaborado para trabajar con un horizonte de planificación igual a 1 año. Esto significa que para muchos valores de las columnas de la tabla 6.1 (todas las que exponen costo, o las que utilizan el costo para su cálculo) se aplicó una división por 3 para ser presentados (36 meses son 3 años, y para presentar los valores de forma anual debe dividirse por 3).

Para presentar las diferencias de manera más ordenada, se muestra a continuación la tabla 6.2. Esta tabla tiene las mismas filas y columnas de la tabla 6.1, y presenta, en cada recuadro, el error porcentual entre los valores de los experimentos de Cunha et al. (2017) y los valores de los experimentos de la réplica de esta investigación, de la forma $\frac{|X-Y|}{X} * 100$, con X siendo el valor de Cunha et al. (2017) e Y el valor de la réplica.

C_F	h	$\hat{g}_{200}$	$\hat{\sigma}_{200}$	N	$R^*(SP)$	$S^*(SP)$	LB	σ_{LB}	UB	σ_{UB}	gap	lbe	ube
25	0.2	5%	6%	21%	100%	30%	6%	28%	8%	192%	101%	33%	216%
	0.4	18%	9%	74%	100%	29%	22%	7%	17%	104%	99%	12%	76%
	0.6	26%	31%	480%	0%	1%	34%	24%	30%	35%	76%	43%	4%
50	0.2	42%	23%	10%	200%	57%	30%	0%	31%	192%	86%	44%	339%
	0.4	6%	17%	132%	100%	29%	7%	34%	8%	107%	81%	42%	129%
	0.6	7%	4%	381%	100%	27%	9%	24%	6%	83%	103%	14%	72%
75	0.2	73%	31%	0%	300%	85%	42%	54%	43%	262%	89%	168%	523%
	0.4	27%	10%	264%	200%	57%	21%	22%	22%	111%	86%	55%	172%
	0.6	7%	11%	480%	100%	29%	7%	17%	8%	38%	104%	25%	49%
150	0.2	149%	41%	25%	400%	113%	59%	7%	60%	238%	126%	123%	714%
	0.4	79%	13%	488%	300%	82%	43%	8%	44%	111%	81%	90%	264%
	0.6	47%	15%	811%	200%	57%	32%	38%	32%	103%	105%	103%	205%

Tabla 6.2: Error porcentual del primer experimento computacional. (Fuente: Elaboración Propia).

Las desviaciones entre ambos conjuntos de resultados son, en definitiva, no despreciables. Es posible apreciar que existen errores en la mayor parte de los campos de la tabla, con valores (absolutos) casi siempre superiores al 5% lo que, para las especificaciones del modelo, no se considera aceptable. Estos resultados obligan a realizar una revisión completa sobre la réplica del modelo que se ha presentado en orden de determinar el origen de la falla. Esto se realizará en el siguiente apartado.

Por último, es también interesante notar la gran diferencia que existe entre los LB y los UB, la cual no debería ser de esa magnitud. La réplica, en el estado actual, demostró ser

altamente sensible a las soluciones que se escogieron para el cálculo de los UB, teniendo que optarse muchas veces por soluciones factibles que se sabía que estaban lejos del óptimo para lograr obtener valores coherentes. Esto es un fuerte indicador de que la réplica presenta problemas estructurales que impiden una correcta resolución del modelo.

6.2. Revisión de la réplica del modelo de SP.

En este apartado se presentará el proceso de revisión al que fue sometida la réplica del modelo SP de manera completa y extendida. Es preciso mencionar que como resultado del proceso de revisión, fallas fueron encontradas y corregidas. No obstante, en orden de asegurar una cabal comprensión de las modificaciones y sus implicancias, se ha considerado preciso exponer el proceso de revisión desde la primera etapa, pasando por el descubrimiento de la falla y la experimentación, hasta la resolución definitiva.

Con lo anterior, el proceso de revisión se basó, mayormente, en una comparación exhaustiva del modelo original en contraste con la réplica, verificando cada componente de manera individual, y luego cada conjunto, función y restricción. Esto, como es posible comprender, requiere de una cantidad de tiempo considerable.

En una primera instancia se decidió trabajar únicamente bajo los parámetros del primer experimento del listado de la tabla 6.1, es decir, con $C_F = 25$, $b = 25$, y $h = 0.2$. Esto bajo la certeza de que encontrar el método correcto de replicar los resultados funcionaría en cualquiera y cada uno de los experimentos. La siguiente consideración consistió en prescindir, temporalmente, del SAA en lo que respecta al uso de múltiples conjuntos de escenarios ($M > 1$). Esto debido a que los resultados obtenidos por la réplica distan mucho

de los deseados, por lo que es posible asumir que el problema no reside en los tamaños de muestra ni en la cantidad de reproducciones. Una vez que las correcciones a la réplica acerquen sus resultados considerablemente a los de Cunha et al. (2017) podría volver a implementarse el SAA en toda su extensión. (Nótese cómo prescindir del uso de múltiples reproducciones disminuye de manera considerable el tiempo a utilizarse en los experimentos computacionales, algo que es altamente significativo para un proceso de revisión sustentado, básicamente, en una metodología de prueba y error).

Otra consideración importante que debe advertirse es que esta situación supone un inconveniente no previsto en la concepción original de la investigación. Identificar fallas en el modelo, como se puede apreciar remitiéndose a la sección 2, no forma parte de los objetivos de la investigación. Esto supone consumir tiempo en actividades no planificadas, lo que indudablemente tiene impacto en el alcance de la investigación.

6.2.1. Revisión completa del modelo de SP.

El primer paso en la búsqueda de la causa de las diferencias en los resultados del experimento consistió, por supuesto, en el contraste entre el código AMPL de la réplica y la formulación de Cunha et al. (2017). Esto no arrojó resultados, concluyéndose que la réplica se encontraba correctamente desarrollada.

El siguiente paso consiste en revisar completamente el modelo original de SP, con el objetivo de detectar potenciales errores en la presentación del código por parte de los autores. Esta revisión contempla un barrido completo a través del modelo, es decir, revisión de conjuntos, parámetros, variables, restricciones y función objetivo.

La primera revisión no arrojó resultados positivos, a saber, no fue posible detectar la causa del error. Esto como consecuencia de que la función objetivo y las restricciones son, en general, directas y sencillas en su formulación. Sin embargo, a raíz de esto fue posible enfocar los esfuerzos futuros en aquellos elementos cuya interpretación, no sólo era un poco más compleja, sino que carecían de explicación alguna en el texto original. Estos elementos son las restricciones de la linealización de la restricción 11, es decir, las restricciones 13 a 21. Se retomará este punto en breve.

Otra herramienta que fue utilizada para la detección del origen del problema fue fijar valores para las variables de la réplica. Esta técnica puede ser utilizada aquí gracias a que se conocen los valores que se espera que asuman las variables, esto es, los resultados de Cunha et al (2017). Entonces, para la configuración que se mencionó al comenzar el apartado 6.2, se tiene que los valores de R^* y S^* deberían ser 2 y 237, respectivamente. Antes de realizar esta operación se invita a observar más detenidamente la tabla 6.1 en lo que respecta a los valores de R y S . Para el target level se identifican valores muy similares en todos los casos, siempre alrededor de 180, lo que ciertamente constituye una anomalía. Sin embargo, para el caso de R la situación es aún más notable, ya que la variable adopta el valor unitario en todos los casos. Se procederá en tres pasos en lo que respecta a la aplicación de esta técnica: primero se forzará el valor “óptimo” (el que entregan Cunha et al. (2017)) de cada variable separadamente, y luego se forzarán ambos valores simultáneamente.

i) Forzando $S^*=237$:

Para forzar esto en la réplica AMPL debe escribirse lo siguiente, en el archivo de extensión `.run`: `fix S:=2;`. El resultado de hacer esto es que R^* continúa siendo 1, y el costo se eleva hasta 508, lo que está muy por encima del valor deseado, considerando además que este resultado debería ser una cota inferior.

ii) Forzando $R^* = 2$:

En este modelo, para forzar $R=2$ se debe cumplir que $u_2 = 1$, por la formulación de las variables. Para hacer esto en la réplica AMPL debe escribirse lo siguiente, en el archivo de extensión `.run`: `fix u_r[2]:=1;`. El resultado de hacer esto es realmente interesante, ya que el valor del target level S ahora es 0, y el costo se dispara como resultado de asumir lost sale durante todo el horizonte de evaluación. Esto al menos arroja luz sobre el hecho de que en todos los experimentos de la tabla 6.1 el valor óptimo de R sea 1. Por supuesto, parece ser que la réplica es incapaz de procesar correctamente mayores valores para la variable, en cuanto arroja que el óptimo en caso de R ser mayor que 1 es asumir el lost sale por todo el horizonte de tiempo.

iii) Forzando $R^*=2$ y $S^*=237$ simultáneamente:

Para lograr esto en la réplica AMPL simplemente se escriben los códigos de los puntos anteriores en dos líneas de código separadas, en el archivo de extensión `.run`. Este resultado es particularmente interesante, no en cuanto al costo final, que acaba siendo mucho más alto que el deseado, sino que en cuanto a la respuesta de AMPL. El forzar ambos valores simultáneamente arroja mensajes de error sobre la restricción 9, que

representa el balance del inventory position a lo largo del horizonte de evaluación. El error básicamente consiste en que la igualdad no puede ser cumplida. Lo mismo sucede con la restricción 20, sobre la cual AMPL arroja el mismo tipo de error.

Lo anterior constituye un elemento crítico en lo que respecta a la identificación de la falla. La restricción 9 es sometida a un riguroso escrutinio, sin embargo, como ya se había mencionado anteriormente, ésta es muy directa y lógica. Por su parte, la restricción 20 también es directa y lógica, ya que simplemente define que el inventory position al comienzo de un período p debe ser igual al inventory position al final del período anterior $(p-1)$. No obstante, es indudable que ambas restricciones deben ser sometidas a pruebas para verificar su funcionamiento.

Con lo anterior, la etapa de revisión del modelo y la réplica ya cuenta con 3 elementos que deben ser estudiados en profundidad, y que constituyen potenciales orígenes de la falla. Los 3 elementos se resumen como:

- i) La restricción 9 podría presentar fallas.
- ii) La restricción 20 podría presentar fallas.
- iii) La variable ITIV, de la linealización, parece no tener función alguna.

El punto iii) proviene de un estudio más profundo de las restricciones 13 a 21, y que será explicado con más detalle posteriormente. Por el momento, es preciso exponer el trabajo realizado sobre los primeros 2 elementos.

Por supuesto, los experimentos a realizarse sobre las restricciones constituyen un esfuerzo por dilucidar el origen del problema y no un intento real por corregirlo. Esto ya que las restricciones 9 y 20 se encuentran conceptualmente bien elaboradas, y cualquier modificación en su formulación implicaría restarle lógica al modelo.

Los experimentos sobre las restricciones 9 y 20 consistieron en una “relajación” de las mismas, es decir, en cambiar la igualdad por una desigualdad. Se realizó el cambio por ambos tipos de desigualdad en ambas restricciones, obteniéndose resultados interesantes en lo que respecta a la restricción 20 (la relajación de la restricción 9 no arrojó resultados sobre los que se pudiera elaborar observaciones útiles). Llevar la restricción 20 de su forma original a una desigualdad de la forma $ITI(z)^p \leq IT(z)^{p-1}$ logra que, para la mayor parte de los experimentos de la tabla 6.1 (11 de los 12), el valor óptimo esperado de R sea alcanzado por la réplica (no así con el valor de S^* ni con el costo). Esto, por supuesto, no significa que la restricción 20 deba ser una desigualdad, ya que carecería de lógica. Estos resultados constituyen sólo un respaldo a la suposición de que el problema reside en el inventory position. Esto, no obstante el progreso logrado, no es suficiente para resolver el problema, por lo que se hace necesario realizar más experimentos y probar nuevas alternativas.

Lo anterior conduce a la realización de experimentos sobre el planteamiento iii. Este punto surge como resultado de una revisión exhaustiva de la linealización, en la que se identifica que, posiblemente, la variable $ITIV(z)^p$ no tiene impacto en el modelo. Para los párrafos siguientes, que tratan sobre esta variable y la linealización en general, se recomienda volver al apartado 4.3.1, donde se presenta la formulación matemática del

modelo SP, en orden de repasar la notación de las variables auxiliares que son usadas para la linealización de la restricción 11.

En primer lugar se explicará cada restricción, en orden de dar a conocer la función de cada una de ellas y su contribución al modelo. Esto con el objetivo de expresar de manera efectiva el cómo las restricciones 13 a 20 representan correctamente a la restricción 11. Es preciso mencionar que Cunha et al. (2017) no explican en ningún apartado las funciones específicas de cada una de estas restricciones, como sí habían hecho con las anteriores. Esto puede deberse a que la interpretación de su funcionalidad es más abstracta que las anteriores, ya que versan sobre el comportamiento de las variables como elementos numéricos y no sobre un comportamiento concreto del inventario. Luego, una vez que exista claridad sobre la linealización, se procederá a indagar en la sospecha sobre la variable $ITIV(z)^p$.

La restricción 11 asegura que el sistema modelado ordene la cantidad deseada de unidades, es decir, la diferencia entre S y el inventory position, cada vez que se realiza una revisión del inventario. Esto se logra, como ya se ha mencionado, con una restricción no lineal que, en orden de que el modelo pueda ser resuelto con CPLEX, debe ser linealizada. Lo primero que se hace es cambiar ligeramente la expresión de esta restricción, a la forma $P(z)^p = S * v^p - ITI(z)^p * v^p$ (se llamará a esta expresión (SP-11')), cuyo único cambio es el reemplazo de $IT(z)^{p-1}$ por $ITI(z)^p$. Esto no tiene ningún impacto al introducir la restricción 20, que hace $ITI(z)^p = IT(z)^{p-1}$. Ahora, la restricción 11 será reemplazada directamente por la restricción 13, pero esta última no cumple la misma función por sí sola. El lado izquierdo de la igualdad se mantiene, por lo que se comenzará el análisis con el lado derecho. La

multiplicación de variables $S * v^p$ se transforma en una sola variable, SV^p , que debería comportarse de la misma forma que la multiplicación de las otras dos. Para lograr esto se tienen las restricciones 14 a 16, que acotan SV^p . Nótese como $S * v^p$ corresponde a la cantidad de artículos a ordenar en cada período en que una orden debe emitirse. (SP-14) asegura que SV^p no sea mayor a $\overline{S}$ en los períodos en que se emiten órdenes, y que sea menor o igual que cero cuando no se emiten órdenes. (SP-15) restringe a SV^p para que nunca sea mayor que el target level S . Finalmente, (SP-16) es un poco más compleja, y podría resultar más sencilla de comprender si se escribe en las dos formas que puede tomar, esto es, para cuando $v^p = 0$ y para cuando $v^p = 1$. Entonces, para $v^p = 0$ se tiene que (SP-16) adopta la forma $SV^p \geq S - \overline{S}$, que por lo general será restringir a SV^p como mayor o igual que cierto número negativo cuando no debe emitirse ninguna orden, lo que, junto con (SP-14) y la no-negatividad de las variables obligan a SV^p a ser cero cada vez que no se emita una orden. Por su parte, cuando $v^p = 1$, (SP-16) adopta la forma de $SV^p \geq S$, lo que, junto con (SP-15) obligan a SV^p a ser igual a S (el target level) cada vez que se emite una orden.

Lo anterior constituye una explicación básica de la técnica de linealización utilizada por Cunha et al. (2017) que, básicamente, consiste en acotar los valores de las variables auxiliares creadas para reemplazar la multiplicación de dos variables. Se realiza exactamente el mismo procedimiento para acotar la variable $ITIV(z)^p$. Sin embargo, como ya se habrá advertido, la variable $ITIV(z)^p$ no es parte de (SP-13), sino que ésta mantiene la variable $ITI(z)^p$. Esto alza la sospecha de que la variable $ITIV(z)^p$ no cumple ninguna función, lo que es confirmado mediante la experimentación. Se eliminaron de la réplica las

restricciones 17 a 19 y, para todos los experimentos de la tabla 6.1, los resultados fueron exactamente los mismos, es decir, se comprueba de manera empírica la hipótesis sobre $ITIV(z)^p$.

Para finalizar, la agrupación de toda la información entregada por esta revisión evidencia la existencia de un problema en lo que respecta al inventory position y su balance a través del horizonte de evaluación, y este problema está probablemente relacionado con la variable $ITIV(z)^p$. Sumando esto al hecho de que, si para pasar de (SP-11') a (SP-13), $S * v^p$ se transformó en SV^p , es natural que $ITI(z)^p * v^p$ se transforme en $ITIV(z)^p$, es que se obtiene la solución al problema.

Para resumir esta sección, se tiene inicialmente un problema con la réplica del modelo SP, la cual no entrega los resultados que Cunha et al. (2017) presentan. Se analiza el modelo original y la réplica y se encuentra una falla en el primero, teniéndose una variable que no cumple ninguna función. El problema es corregido, modificando la restricción (SP-13) para que adopte la forma que corresponde. Cabe decir que es muy posible que el error detectado sea simplemente un error en la transcripción por parte de los autores. Es claro (y es por eso que la falla pudo ser detectada) que la intención original al escribir la restricción (SP-13) era utilizar la variable $ITIV(z)^p$. Con esto pueden volver a realizarse los experimentos de la tabla 6.1, lo que se llevará a cabo en el siguiente apartado.

6.3. Nuevo Primer Experimento Computacional.

Habiéndose corregido las deficiencias en la restricción (SP-13) se procede a realizar nuevamente todos los experimentos computacionales de la tabla 6.1. En esta ocasión los

resultados debieran ser muy similares a los de Cunha et al. (2017). El procedimiento para llevar a cabo los experimentos es exactamente el mismo, por lo que se presentarán los resultados inmediatamente, en la tabla 6.3 a continuación:

C_F	h	$\hat{g}_{200}$	$\hat{\sigma}_{200}$	N	$R^*(SP)$	$S^*(SP)$	LB	σ_{LB}	UB	σ_{UB}	gap	lbe	ube
25	0.2	311	46	196	2	235	310,7	3,3	311,0	4,4	0,3	1,06	1,41
	0.4	447	70	217	2	230	448,7	4,7	450,1	6,5	1,4	1,05	1,44
	0.6	538	63	119	1	177	538,3	6,8	540,4	7,2	2,1	1,26	1,33
50	0.2	423	46	103	3	286	426,1	3,8	425,5	5,6	-0,6	0,89	1,32
	0.4	597	70	122	2	230	598,7	4,7	599,7	6,1	1	0,79	1,02
	0.6	724	82	114	2	226	727,1	7,1	728,9	7,6	1,8	0,98	1,04
75	0.2	514	49	79	4	336	514,6	4,0	514,9	5,9	0,3	0,78	1,15
	0.4	720	67	77	3	280	725,3	5,6	725,4	7,7	0,1	0,77	1,06
	0.6	874	82	78	2	226	877,1	7,1	878,9	7,6	1,8	0,81	0,86
150	0.2	700	59	62	5	386	703,3	6,2	702,4	5,7	-0,9	0,88	0,81
	0.4	999	77	52	4	329	998,5	5,4	999,6	8,5	1,1	0,54	0,85
	0.6	1206	85	43	3	275	1211,9	7,0	1214,0	9,9	2,1	0,58	0,82

Tabla 6.3: Resultados del “Nuevo Primer Experimento Computacional”. (Fuente:

Elaboración Propia).

Se presenta a continuación, en la tabla 6.4, los errores porcentuales de en cada campo de la tabla en comparación con los resultados de Cunha et al. (2017) en su tabla 3.

C_F	h	$\hat{g}_{200}$	$\hat{\sigma}_{200}$	N	$R^*(SP)$	$S^*(SP)$	LB	σ_{LB}	UB	σ_{UB}	gap	lbe	ube
25	0.2	17%	-28%	-142%	0%	1%	17%	35%	16%	-16%	400%	22%	-40%
	0.4	22%	-23%	-147%	0%	1%	22%	23%	21%	-18%	-1300%	2%	-48%
	0.6	26%	-24%	-170%	0%	-1%	25%	-24%	26%	-33%	58%	-66%	-77%
50	0.2	13%	-5%	-45%	0%	1%	12%	7%	13%	-47%	146%	-5%	-67%
	0.4	18%	-11%	-85%	0%	1%	17%	41%	17%	-9%	69%	28%	-31%
	0.6	20%	-17%	-115%	0%	-1%	20%	20%	20%	-4%	357%	0%	-28%
75	0.2	10%	0%	-23%	0%	1%	11%	37%	11%	-26%	70%	29%	-42%
	0.4	14%	-16%	-83%	0%	1%	14%	22%	14%	-35%	96%	9%	-56%
	0.6	17%	-9%	-77%	0%	1%	17%	15%	17%	-38%	325%	-3%	-65%
150	0.2	8%	-2%	-22%	0%	1%	8%	-63%	8%	-30%	61%	-80%	-42%
	0.4	10%	-28%	-100%	0%	-1%	11%	16%	11%	-49%	67%	5%	-67%
	0.6	13%	-8%	-54%	0%	1%	13%	29%	13%	-22%	291%	18%	-41%

Tabla 6.4: Diferencias porcentuales entre los resultados del “Nuevo Primer Experimento

Computacional y los resultados de Cunha et al. (2017). (Fuente: Elaboración Propia).

Como se puede advertir, las diferencias con respecto a los resultados de Cunha et al. (2017) han disminuido considerablemente. Es notable como, en relación a los resultados para los valores de R^* y S^* , el error es casi nulo, obteniéndose valores muy cercanos para S^* , y exactamente iguales para todos los casos de R^* . No obstante, es en el costo total donde aún se identifican errores considerables, a pesar de contarse con valores muy precisos para las variables del problema de la primera etapa. Estos errores en el costo total (la función objetivo) obligan a revisar nuevamente la réplica y el modelo original en busca de potenciales errores que estén causando estas desviaciones.

No obstante lo anterior, es de interés notar cómo la situación anómala referida al cálculo de los UB que se mencionó para el “primer experimento computacional” desaparece para este “nuevo primer experimento computacional”, luego de corregir la

restricción (SP-13). Esto sugiere que el “problema estructural” al que se hizo alusión está, aparentemente, resuelto.

Por otra parte, los grandes errores porcentuales de la tabla 6.4 en los otros campos se deben únicamente a que la réplica no entrega los valores de costo que se esperaban, lo que afecta, por supuesto, al cálculo de todos los demás campos.

En el siguiente apartado se exponen los principales comentarios respecto a los resultados del “nuevo primer experimento computacional”.

6.3.1. Observaciones del Nuevo Primer Experimento Computacional.

A la vista de los porcentajes presentados en la tabla 6.4, se observa que indefectiblemente sigue existiendo un problema, ya sea en la réplica o en el modelo original. Sin embargo, esto es contradictorio con lo establecido anteriormente en el apartado 6.2 donde, luego de revisar exhaustivamente el modelo de Cunha et al. (2017) y la réplica construida, y de haber resuelto un problema detectado, se concluyó que la réplica era perfecta, y que representaba fielmente el modelo en el que está basada. Por esta razón, y en virtud de no incurrir en procedimientos reiterativos, se continuará el análisis del modelo mediante una aproximación diferente.

En relación a lo anterior, es importante hacer notar que esta situación comprende un desarrollo totalmente inesperado de las circunstancias. Se verifica una problemática no contemplada originalmente en el alcance y los objetivos de la investigación. La búsqueda de problemas dentro del modelo original y la determinación de la causa de que éste no sea un buen reflejo de la política (R,S) desarrollada por Hadley & Whitin (1963) ciertamente

no se encontraba entre los prospectos iniciales, y constituye un desarrollo que modifica las premisas en las que se basa la investigación. Lo anterior hace referencia, mayormente, a la característica temporal inherente al trabajo desarrollado, que ha presentado grandes desviaciones respecto a su concepción original y que, por supuesto, restringe el nivel de análisis que puede desarrollarse. Esto significa que, en este punto, es el tiempo la variable que adopta predominancia en el alcance de la investigación, y es en virtud a ésta que se definirán los límites de la misma. Se determina, por consecuencia, que el nuevo objetivo es invertir una cantidad de tiempo determinada y fija en realizar experimentos para encontrar la causa de la falla en la réplica y perfeccionarla para obtener resultados altamente similares a los de Cunha et al. (2017). No obstante, si lo anterior no se verifica posible en el marco de tiempo definido, entonces la investigación deberá presentar sólo las aproximaciones desarrolladas en el esfuerzo de determinar la causa de la falla y concluir al respecto.

Se aplicará, entonces, un análisis exploratorio sobre el modelo original y la réplica, en búsqueda de los elementos que podrían estar generando las desviaciones. Se realizarán experimentos para verificar cada potencial solución y se emitirán comentarios atinentes.

6.4. Análisis de aproximación exploratorio.

Para comenzar el análisis, una determinación que se toma en este punto es utilizar la réplica del modelo HW que fue construida para verificar los resultados. Esto permitirá conocer cuáles son realmente los valores del costo total que deberían obtenerse con una política (R,S) y los parámetros de demanda y costo de los experimentos realizados.

Se presenta a continuación, en la tabla 6.5, los resultados de aplicar el modelo HW de esta investigación a todas las configuraciones de la Primera Prueba Numérica de Cunha et al. (2017). En la tabla, HW (EX) corresponde al costo total calculado con la réplica en MS Excel 2010 que fue presentada en esta investigación; HW (C) corresponde al costo total del modelo HW presentado por Cunha et al. (2017) en la tabla 4 de su publicación; SP (C) corresponde al Lower Bound del costo total obtenido por el modelo SP por Cunha et al. (2017); Finalmente, SP (R) corresponde al Lower Bound del costo total obtenido por la réplica del modelo SP construida en lenguaje AMPL presentada en esta investigación.

C_F	h	HW (EX)	HW (C)	SP (C)	SP (R)
25	0.2	374	374	372	311
	0.4	577	576	572	449
	0.6	735	734	721	538
50	0.2	489	489	486	426
	0.4	727	726	719	599
	0.6	921	919	911	727
75	0.2	579	579	575	515
	0.4	855	853	844	725
	0.6	1071	1069	1063	877
150	0.2	779	778	765	703
	0.6	1132	1129	1119	999
	0.6	1410	1406	1396	1212

Tabla 6.5: Contraste de resultados con réplica del modelo HW. (Fuente: Elaboración Propia).

De acuerdo con estos resultados, se puede observar que el modelo SP de Cunha et al. (2017) presenta resultados que poseen alta similitud a los del modelo HW, cuya calidad ya fue comprobada. Esto sugiere que el error puede estar en la réplica, o en forma de error

de transcripción, como el detectado en el apartado 6.2.1. Sin embargo, esta posibilidad ya se ha descartado, por lo que se procederá como se anticipó.

A lo largo de la investigación, múltiples alternativas para determinar la causa de la distorsión entre la réplica del modelo SP y el original fueron desarrolladas. Se exponen como apartados individuales algunas de estas aproximaciones, con su respectivo experimento. Es preciso mencionar que, dadas las considerables diferencias entre los resultados obtenidos y los resultados esperados, se estipula que es innecesario realizar experimentos para todas las configuraciones por lo que, para efectos de la experimentación sobre las aproximaciones a desarrollar, se considerará sólo la configuración con parámetros $C_F = 25$; $h = 0.2$; $b = 25$; Además, se prescindirá de la rigurosidad del SAA, nuevamente, calculando la función objetivo con $M = 1$ y $N = 90$, es decir, se obtendrá sólo el valor $\hat{g}_{90}$ para la verificación inicial de las aproximaciones. Aquellos enfoques que muestren mayor promesa con estos resultados preliminares serán desarrollados con la rigurosidad del SAA.

6.4.1. La Función Objetivo.

El primer elemento que interesa examinar con mayor detenimiento es, por supuesto, la función objetivo, que es la que presenta desviaciones en los resultados finales. Ahora bien, tratando el problema nuevamente como uno de dos fases, la falla se encuentra definitivamente en la función objetivo del problema de la segunda etapa, la que trata el holding cost y el shortage cost.

Este tratamiento, no obstante, no lleva a grandes resultados por sí solo, puesto que la función objetivo es, como ya se ha mencionado anteriormente, muy sencilla y directa, y no

presenta errores en su concepción. Además, el análisis de la función objetivo o de sus partes fue descartado para esta sección por ya haberse realizado previamente. Esta mención sirve meramente para sugerir que posiblemente el problema se encuentre en las variables $I(z)^p$, $F(z)^p$. En base a esto se construye la aproximación siguiente.

6.4.2. Los elementos del costo

Esta aproximación se desprende directamente de los postulados del apartado anterior. Se alza la sospecha de que el análisis del comportamiento de las variables de la función objetivo de la segunda etapa podría revelar elementos interesantes en relación a los errores presentes en el modelo.

La forma de analizar esto consistirá en calcular, mediante la réplica del modelo HW, los valores esperados de: el inventory level promedio por período (IL – HW), la cantidad promedio de lost sale por período (LS – HW). Las mismas cantidades se obtienen para la réplica del modelo SP (IL – SP y LS – SP respectivamente) y se comparan con las anteriores mediante una diferencia porcentual (DIF). Esto se presenta resumidamente en la tabla 6.6 a continuación (debe recordarse la configuración de parámetros que se está utilizando para todos los experimentos):

IL - HW	LS - SP	DIF	LS - HW	LS - SP	DIF
87,239	60,304	31%	0,0975	0,0743	24%

Tabla 6.6: Diferencias entre IL y LS entre ambos modelos replicados. (Fuente:

Elaboración Propia).

Las diferencias son considerables, por lo que se verifica que existe un problema en la forma en que el modelo SP refleja el comportamiento del inventario para la política (R,S).

Lo más interesante que surge del análisis de los resultados expuestos en la tabla 6.6 reside en que ambos valores, el inventory level y el lost sale, son menores para el modelo SP. El target level y la periodicidad de revisión es la misma para ambos modelos, y sin embargo el modelo SP presenta un menor inventario promedio y, aun a pesar de esto, menor lost sale.

Es interesante multiplicar los valores calculados por su costo respectivo, a saber, 0,2 para el inventory level y 25 para el lost sale. Realizar este ejercicio resulta en obtener la diferencia de costo entre ambos modelos. Ahora bien, es más interesante simplemente costear la diferencia, que es resultado de multiplicar las diferencias entre los niveles de IL y LS presentados por sus costos respectivos, y luego multiplicar por 12 para obtener la diferencia en términos de costo anual. El resultado de esto se expone a continuación:

$$\text{Costo Anual de diferencia en IL} = (87,239 - 60,304) * 0,2 * 12 = 64,644.$$

$$\text{Costo Anual de diferencia en LS} = (0,0975 - 0,0743) * 25 * 12 = 6,96.$$

El costo total de la diferencia, para un año, asciende a 71,604. Esto por sí solo no constituye un aporte. Sin embargo, cuando este costo se le suma al Lower Bound obtenido para esta configuración de parámetros, 310,7, el resultado, 382,304, se vuelve más interesante. Esta cifra se acerca bastante al LW obtenido por Cunha et al. (2017) en su investigación, teniéndose un error de apenas 2,7% respecto a éste. Esta aproximación tan cercana al valor de Cunha et al. (2017) podría sugerir que la desviación entre el modelo original y la réplica es exactamente la diferencia que se presenta en el IL y el LS. Por supuesto, resultados de esta naturaleza ameritan la extensión del análisis a las demás configuraciones de parámetros, para verificar su potencial.

En la tabla 6.7, a continuación, se exponen los resultados de extender el enfoque anterior a las demás configuraciones de los experimentos computacionales. Se recuerda que se mantiene $M = 1$. En la tabla, (K-Rep) corresponde al costo entregado por la réplica calculado para este propósito con $M = 1$ y $N = 90$; (K-dif) corresponde al costo de la diferencia en los valores de IL y LS con respecto a la réplica del modelo HW; (K-exp) muestra la suma de los dos valores anteriores, y es el costo calculado como resultado de este experimento. (K-C) corresponde al Lower Bound del costo total entregado por Cunha et al. (2017); (DIF) muestra la diferencia porcentual entre los últimos dos valores, para verificar cuánto se acerca el costo experimental al costo que debe lograrse.

C_F	h	(K-rep)	(K-dif)	(K-exp)	(K-C)	DIF
25	0.2	317,026	71,602	388,628	372,2	4%
	0.4	455,691	152,381	608,072	571,8	6%
	0.6	549,499	184,787	734,286	720,5	2%
50	0.2	433,287	90,95	524,237	485,7	7%
	0.4	605,691	152,381	758,072	718,5	5%
	0.6	735,337	233,834	969,171	911,4	6%
75	0.2	520,093	117,294	637,387	575,1	10%
	0.4	734,348	193,236	927,584	844,3	9%
	0.6	885,337	233,834	1119,17	1062,5	5%
150	0.2	705,984	148,884	854,868	765,4	10%
	0.6	1004,29	249,695	1253,99	1119	11%
	0.6	1222,57	299,431	1522	1395,5	8%

Tabla 6.7: Extensión de la aproximación 6.4.2 a todas las configuraciones de parámetros.

(Fuente: Elaboración Propia).

De la tabla es posible observar que, si bien los errores no son muy elevados, aún son lo suficientemente grandes como para concluirse que esta alternativa soluciona el problema. No obstante, a pesar de que esta aproximación no entrega los resultados esperados, sí conduce al siguiente acercamiento en el esfuerzo de encontrar la causa de la falla en la réplica del modelo SP. La única conclusión inescapable de estos experimentos realizados es que, de acuerdo a la columna (K-dif) de la tabla 6.7, existe un evidente problema en el comportamiento de las variables del problema de la segunda etapa, particularmente en lo que concierne al comportamiento de los niveles de inventario a lo largo del horizonte de planificación. Partiendo de la premisa de que la réplica es perfecta, los elementos que pueden generar un comportamiento anómalo en las variables son, por supuesto, los parámetros del problema. Ahora bien, como los costos están claramente estipulados y su aplicación es directa, se puede estimar que el parámetro causando las desviaciones corresponde a la demanda y su comportamiento.

Los parámetros de la demanda fueron generados mediante la herramienta “Generación de Números Aleatorios” de MS Excel 2010, como ya fue mencionado, y se procuró que la introducción de los parámetros de media y varianza fuera correctamente realizada. No obstante, un comportamiento anormal en los niveles de inventario del modelo puede perfectamente ser explicado por una anomalía en la demanda, ya que el nivel de inventario, en definitiva, adquiere su comportamiento directamente del comportamiento de la demanda y su variabilidad.

Con lo anterior en consideración es que se desarrolla una nueva aproximación en el esfuerzo de localizar la causa de la falla en la réplica del modelo SP.

6.4.3. Generación de escenarios de demanda.

Esta aproximación se basa en la revisión del parámetro de demanda generado en MS Excel 2010. Particularmente, lo primero que se desea verificar es que para cada escenario la media sea igual a 50 y la varianza igual a 75.

Si bien lo anterior parece trivial, los resultados obtenidos del análisis muestran que, si bien la media de cada conjunto de escenarios n , con $n=1,\dots,90$, es siempre 50 o altamente similar, la varianza, por su parte, presenta grandes desviaciones respecto al valor estipulado, 75. La generación de números aleatorios logra que la varianza de todo el conjunto de 90 escenarios de demanda para 42 períodos sea 75, pero esto no es suficiente, ya que la demanda para cada período debe contar, individualmente, con la misma distribución.

En orden de corregir esta deficiencia y comprobar el impacto de la exactitud en la generación de los escenarios, se debe procurar un conjunto de los mismos de forma tal que se logre la media 50 y varianza 75 en cada escenario de demanda. Debe recordarse que los escenarios deben tener estos parámetros, y ser generados de manera independiente y no tener correlación entre ellos.

Se desarrolla una metodología, utilizando el generador de números aleatorios de MS Excel 2010 y la herramienta Solver, para asegurar que cada escenario tenga media 50 y varianza 75. Este procedimiento implicó generar cada uno de los conjuntos de escenarios para los 42 períodos individualmente, uno por uno, optimizando con Solver en cada caso

para forzar los valores de demanda necesarios. El resultado fue aplicado en la réplica, nuevamente con $M = 1$ y $N = 90$ y la configuración de parámetros previamente definida.

Los resultados de aplicar lo anterior en la réplica del modelo SP fueron muy similares a los obtenidos con los escenarios utilizados originalmente, es decir, el impacto de la alta precisión en la generación de escenarios de demanda es, prácticamente, despreciable. Más aún, se identifica una pequeña disminución en el costo total calculado en los experimentos relacionados a este enfoque, lo que probablemente halla su explicación en el hecho de que usar la herramienta Solver para forzar la constitución de los escenarios viola el principio de que estos deben ser generados de manera independiente y que no debe existir correlación entre ellos.

Esto concluye una línea de razonamiento que había motivado el análisis exploratorio de la réplica, obligando idear una nueva forma de encausar la búsqueda de la causa de la falla.

6.4.4. El Inventario de Seguridad.

Una investigación más profunda del modelo HW y de los principales postulados de Hadley & Whitin (1963) orientó la búsqueda a enfocarse en el concepto del inventario de seguridad. Se discutió su definición y su tratamiento ampliamente durante la presentación del modelo HW, utilizando incluso referencias más modernas para contrastar la conceptualización. Tomando la definición más aceptada entre los autores, el inventario de seguridad será el nivel de inventario con el que se cuenta justo antes de la llegada de una orden al sistema. Con esto en consideración, se decide indagar sobre si el inventory level de

la réplica del modelo SP captura fidedignamente el inventario de seguridad del modelo HW, cuyo inventario de seguridad posee una expresión explícita conocida, que es, para el caso del lost sale, la ecuación (HW-10).

Para la configuración de parámetros que está siendo utilizada en este análisis exploratorio, se sabe que el valor del período de revisión R^* será igual a 2. Esto significa que órdenes serán emitidas, luego de la que se emite en el primer período, con intervalos de separación de dos períodos, por lo que se conoce que existirá una orden al comienzo de los períodos 3, 5, 7, etc. Con esto, y dado que el lead time L es igual a 2, es posible saber que el inventario de seguridad que interesa conocer será el inventory level al final de todos los períodos pares. De manera más explicativa, dado que tanto el lead time L como el ciclo de revisión R son iguales a 2, y dado que la primera orden se emite al comienzo del primer período, es claro que la primera orden arribará al sistema al comienzo del período 3, justo cuando la siguiente orden es emitida. Así, el inventory level justo antes de la llegada de la primera orden será igual al inventory level al final del segundo período, es decir, $I(z)^2$ (nótese como se asume la equivalencia entre inventory level y stock on hand por tratarse de un caso de lost sale).

Siguiendo con lo anterior, se calculará el promedio del inventory position de la réplica en todos los escenarios, a lo largo de todo el período de planificación, y se comparará con el valor de la réplica del modelo HW. Esto con el objetivo de verificar la fidelidad con la que el modelo SP representa al modelo HW en este punto particular. La tabla 6.8, a continuación, resume los resultados, en la que (SS-HW) es el inventario de seguridad promedio para un período calculado con la réplica del modelo HW (SS = Safety

Stock, que significa “inventario de seguridad”); (SS-SP) es el inventario de seguridad promedio calculado con la réplica del modelo SP; (DIF) es la diferencia porcentual entre los valores anteriores.

SS-HW	SS-SP	DIF
37,336	37,692	-1%

Tabla 6.8: Experimento de análisis exploratorio sobre el inventario de seguridad. (Fuente:

Elaboración Propia).

Los resultados parecen indicar que el modelo SP captura adecuadamente el inventario de seguridad del modelo HW. Naturalmente, en orden de poder aseverar esto es necesario extender el experimento a las demás configuraciones de parámetros, para verificar que lo anterior se cumpla en todos los casos. En la tabla 6.9, a continuación, se presentan los resultados de dicha extensión.

C_F	h	SS-HW	SS-SP	DIF
25	0,2	37,336	37,692	-1%
	0,4	32,427	30,761	5%
	0,6	29,834	27,484	8%
50	0,2	38,516	37,490	3%
	0,4	32,427	30,761	5%
	0,6	29,430	27,473	7%
75	0,2	39,715	36,319	9%
	0,4	32,904	30,914	6%
	0,6	29,430	27,472	7%
150	0,2	40,686	51,440	-26%
	0,4	33,434	31,024	7%
	0,6	29,434	26,852	9%

Tabla 6.9: Extensión del experimento de análisis exploratorio sobre el inventario de

seguridad. (Fuente: Elaboración Propia).

Como es posible apreciar de la tabla, el inventario de seguridad se acerca en la mayoría de los casos al valor que se espera, pero no en todos, contándose como la mayor excepción la configuración $C_F = 150$, $h = 0,2$, con un 26% de error. Aun así, los demás valores, si bien son cercanos, sí presentan errores no despreciables, lo que sugiere que el inventario de seguridad del modelo HW no está correctamente replicado por el modelo SP. Esto era de esperarse habiendo comprobado anteriormente que el inventory level no se comporta apropiadamente en promedio a lo largo del horizonte de planificación.

Este experimento, junto a los anteriores, pueden ser usados para establecer las bases de la sospecha de que el modelo SP propuesto por Cunha et al. (2017) no es una buena representación del sistema de inventarios operado con política (R,S) desarrollado por Hadley & Whitin (1963), y que no logra capturar todas sus características.

Particularmente, en relación a los resultados de la tabla 6.9, no es posible proseguir por esta vía en la búsqueda de una solución, ya que el modelo SP es un modelo del tipo Costo Total y, como ya se ha establecido, carece de restricciones de nivel de servicio asociadas a inventarios de seguridad. Esto ha servido para comprobar, mediante un enfoque diferente, que las diferencias se localizan en el comportamiento de los niveles de inventario. Los comentarios y observaciones más detallados se dejan para la siguiente sección, “Conclusiones”.

6.4.5. Trabajos Posteriores

En un último esfuerzo en la búsqueda de la causa de la falla, se verifica que el trabajo de Cunha et al. (2017) ha sido utilizado por otras investigaciones, que lo han citado.

Se estima conveniente revisar estas investigaciones en caso de que exista alguna mención a posibles fallas en el modelo.

La revisión de la publicaciones revela que el trabajo de Cunha et al. (2017) ha sido referido por otras dos investigaciones posteriores, ambas escritas por los mismos autores o con participación de al menos uno de ellos. Uno de los trabajos, Cunha et al. (2017a), en particular, constituye básicamente la extensión del modelo a una CS de dos echelon aplicada al mantenimiento de sangre para transfusiones. La revisión del modelo presentado en este nueva publicación revela que la estructura propuesta es esencialmente la misma que la del modelo SP de Cunha et al. (2017), incluyendo el error en la restricción equivalente a la aquí llamada (SP-13), y no existe mención alguna a la existencia de errores en el modelo original.

Este hallazgo constituye el último elemento del análisis exploratorio, por cuanto no reporta los resultados esperados en cuanto a la determinación de la causa de la falla al momento de alcanzarse el marco de tiempo definido. Las observaciones y comentarios respecto a las implicancias de esto, que se extienden más allá del no cumplimiento de los objetivos de la investigación, se dejan para la sección de conclusiones.

Lo que resta de la investigación se estructurará de la siguiente manera: Primero, se hará un breve comentario sobre la aproximación más prometedora entre las que se han expuesto en esta sección. Luego, se hace referencia al fin de la réplica, y sólo se mencionan los elementos restantes de la investigación de Cunha et al (2017) que no serán replicados.

Finalmente, al terminar estos apartados, se presenta una sección con las principales conclusiones de la investigación.

6.5. Extracción de la mejor aproximación.

De todas las aproximaciones que se realizaron para intentar determinar la causa de la falla de la réplica del modelo SP, se considera, dados los resultados, que el enfoque más prometedor es aquel relacionado con las variables de la segunda etapa y su comportamiento. Esto en contraste principalmente con la generación de escenarios, cuyo estudio no reveló prospectos alentadores.

Naturalmente, es posible observar un comportamiento anormal en el inventory level (al comparar con el modelo HW) que probablemente es consecuencia de una errónea definición de las restricciones del modelo, aunque en esta investigación no se ha podido determinar con certeza.

6.6. Experimentos computacionales de Cunha et al (2017).

Esta breve sección está dedicada a la exposición de los pasos que no fueron analizados ni replicados del trabajo de Cunha et al. (2017). Como podrá recordarse, se mencionó que los autores realizan dos experimentos computacionales, y aquí sólo se ha replicado parte de uno. Es evidente, en este punto, la futilidad de continuar replicando el trabajo de los autores sin haber conseguido obtener resultados similares a los de ellos en el primer experimento computacional, y es por esto que se limitará esta sección a establecer sólo una mención del trabajo restante. Se realizan los comentarios descriptivos de ambos experimentos a continuación.

6.6.1. Continuación Primera Prueba Numérica

Luego de obtener resultados satisfactorios en la primera parte de su primera prueba numérica (tabla 3), con errores nunca superiores al 1,36% para el LB y nunca superiores al 1,01% para el UB, los autores (Cunha et al., 2017) proceden a realizar un ejercicio de simulación, haciendo uso de los resultados obtenidos por su modelo SP. Comparan estos resultados con los del modelo HW en su tabla 4. Estos resultados ya fueron usados para verificar la validez de la réplica del modelo HW aquí presentada.

Los autores concluyen, dados los resultados de su tabla 4, que su modelo efectivamente es confiable para entregar buenas soluciones, algo que esta investigación también respalda en lo que se refiere a las variables del problema de la primera etapa.

El experimento es posteriormente extendido y se prueban diferentes configuraciones para los parámetros de costo, distintos horizontes de planificación, y distintos números de escenarios para la aplicación del SAA. Luego, los autores utilizan los valores del modelo HW y los LW del modelo SP para calcular el error porcentual absoluto de sus resultados.

Finalmente, la primera prueba numérica concluye con los autores revisando los nuevos experimentos y comentando cómo, en algunos casos, el modelo SP entrega LB con valores superiores al costo entregado por el modelo HW. Esto se explica, según los autores, por el hecho de que en los experimentos aludidos, el número de escenarios N utilizado fue demasiado bajo, lo que generó desviaciones en los resultados de R^* con respecto al valor de HW. Ahora bien, algo que resulta interesante de este análisis es que los autores muestran un conocimiento profundo de los postulados de Hadley & Whitin (1963) incluyendo el hecho

de que el modelo de lost sale es una aproximación suficientemente buena sólo para cuando el tiempo promedio de la extensión del shortage es corto, y el hecho de que el modelo HW no planifica para el shortage que puede ocurrir entre el momento en que se emite una orden y el momento en que ésta llega al sistema. Los autores exponen sobre la relación entre R y S y sus efectos sobre el costo total, y esgrimen argumentos que se condicen fuertemente con la teoría subyacente al modelo HW.

6.6.2. Segunda prueba numérica.

En esta sección Cunha et al. (2017) extienden el modelo a una prueba que no podría realizarse con el modelo HW. Generan los escenarios de demanda simulando un proceso de “caminata aleatoria”. Esto claramente viola el principio de que la demanda en cada período sea independiente de la demanda en otros períodos y, probablemente, constituye la mayor contribución del modelo SP con respecto a su base, el modelo HW.

Los autores comprueban sus resultados y obtienen pequeños errores tanto a nivel de LB y UB usando la técnica SAA.

Con esto concluye el estudio de Cunha et al. (2017) y también esta investigación. Sólo resta la sección de conclusiones en la que se expondrán los comentarios más destacados respecto al proceso de replicar el trabajo de Cunha et al. (2017), y también se incluirán parte de las conclusiones de los mismos autores.

7. CONCLUSIONES Y COMENTARIOS

En este punto es claro que una de las conclusiones más importantes que ha de ser establecida para esta investigación reside en el no cumplimiento cabal de los objetivos planteados en su concepción. Esto hace referencia tanto al Objetivo General como a los Objetivos Específicos. Sobre estos últimos, ha sido posible, dado el curso de la investigación, cumplir la mayor parte de ellos, a saber, el modelo fue expresado con todos sus elementos y explicado detenidamente. Más aún, se identificó una falencia en el modelo general, la cual fue corregida de manera ampliamente justificada. Por otra parte, se expresa cómo el modelo desarrollado por Cunha et al. (2017) es, en su forma final, lineal y convexo, por tanto su función objetivo y restricciones son de la misma clase. En relación a los mecanismos de resolución más apropiados, se expuso diversos métodos para abordar las soluciones de los problemas de programación estocástica en la sección del Marco Teórico, y se desarrolló de manera extensa el método SAA en cuanto a su origen conceptual y su formulación matemática. Finalmente, los objetivos que no pudieron ser cumplidos son los referidos a la réplica de los resultados de Cunha et al. (2017) y la extensión del modelo original para contemplar mayor complejidad o especificidad en su formulación y aplicación. Por supuesto, la extensión del modelo no fue realizada debido a que no fue posible validar la calidad del modelo original, y es en este punto en que se pretende enfocar las observaciones más importantes de la investigación.

Para comenzar, es deseable hacer notar la gran extensión del trabajo realizado, particularmente en lo que respecta a su revisión bibliográfica, que abarca mucho más

material que el trabajo de Cunha et al. (2017). Esto se menciona para recordar que la investigación no corresponde sólo a una réplica del trabajo de Cunha et al. (2017), sino que es, en sí misma, una exposición completa de los principales postulados de la gestión de inventarios y de la programación estocástica, y de cómo estos pueden combinarse para ser utilizados en la formulación de un problema de programación estocástica, y cómo resolverlo una vez planteado. La extensa revisión de la literatura y la dedicación al detalle en la presentación de todos los elementos necesarios para la construcción de la réplica es uno de los elementos centrales de la investigación, y constituye uno de sus aportes, desde la perspectiva de que permite una mayor comprensión de los postulados del trabajo replicado. Adicionalmente, la revisión de la literatura también permitió identificar el uso de diferentes terminologías para referir los mismos elementos, particularmente en lo que respecta a la gestión de inventarios. Gracias a que se revisó conceptualmente cada componente de la estructura de los modelos de gestión de inventarios fue posible mantener prácticamente ininterrumpido el discurso y evitar ambigüedades a través de la unificación del lenguaje.

En segundo lugar, es preciso mencionar que la réplica no consistió en simplemente copiar los postulados de Cunha et al. (2017) y mostrar su modelo. En ambos casos, tanto para el modelo HW como para el SP, se presentaron descripciones extendidas con respecto al trabajo de los autores, utilizando más literatura y procedimientos más detallados. Además, para el caso del modelo HW se construyó una réplica funcional del mismo en la plataforma MS Excel 2010, que permite resolver problemas numéricamente con mínimo esfuerzo computacional, siendo el tiempo de procesamiento menor a 1 segundo en todos los casos resueltos. En este punto, quiere establecerse que el modelo HW funcional presentado

es posiblemente una de las contribuciones más importantes de esta investigación, dado que su calidad en la obtención de soluciones pudo ser comprobada.

Por su parte, y aquí adentrándose en la parte medular del trabajo realizado, la réplica del modelo SP de Cunha et al. (2017) se ha establecido en calidad de perfecta. Esto quiere decir que, dada la exhaustiva revisión y comparación de la misma en contraste con el modelo presentado por los autores, y de la corrección de la restricción (SP-13) en consideración con la “intención original de los autores”, se ha contemplado que la réplica construida es, sencillamente, un fiel reflejo de lo que los autores presentaron en su publicación. En los últimos apartados de la sección de Experimentos Computacionales, lo que se intentó fue detectar errores en el modelo original, de la misma forma que se detectó la incongruencia de la restricción (SP-13). Esto extiende la conclusión de que el modelo presentado en Cunha et al. (2017) no arroja los resultados que se muestran en la publicación. Posiblemente existieron diversas versiones del modelo en el curso de su formulación, y la versión final no fue transcrita oportunamente al artículo, algo que podría explicar lo que sucedió con la restricción (SP-13), y que realmente constituye un escenario factible para justificar las desviaciones. Más aún, durante el curso de esta investigación se contactó, vía correo electrónico, a uno de los autores del artículo analizado, Fabricio Oliveira, quien amablemente explicó que en la implementación en AIMMS se habían agregado variables adicionales para representar partes de la función objetivo, y por esta razón el tamaño final del modelo, en términos de cantidad de variables y restricciones, no es congruente con el tamaño que puede calcularse con la cardinalidad de los conjuntos del modelo. Además, Oliveira mencionó no haber estado relacionado estrechamente con el

desarrollo de los experimentos computacionales, por lo que sugirió contactar a Pablo Cunha, el investigador principal. Lamentablemente no fue posible contactar a Cunha por ninguno de los 3 medios de comunicación con los que se hizo el intento.

Para continuar, en definitiva, el modelo como concepto constituye un gran aporte a la ciencia de la gestión de inventarios, y una buena extensión del trabajo originalmente planteado por Hadley & Whitin (1963). Obviando el hecho de que la réplica no muestra los resultados esperados, si se asume que es posible utilizar programación estocástica para replicar el modelo HW, y que Cunha et al. (2017) lo lograron con una versión mejorada del modelo que exponen en su artículo, las implicancias son formidables. El tiempo computacional es razonable, considerando que para $M = 1$ y $N = 90$, el motor de resolución utilizado en esta investigación nunca tardó más de 180 segundos en entregar las soluciones, para ninguna combinación de parámetros. El modelo HW no puede utilizarse para resolver problemas de CS's multi-echelon ni multi-producto, ni tampoco puede considerar una demanda variable en el tiempo, ya que resuelve óptimamente para un solo período. Todas estas limitaciones son superadas con el uso de SP para modelar el sistema operado con una política (R,S). También es importante mencionar que, independiente de que la réplica no haya podido entregar los costos esperados, sí cumple con entregar, en tiempos computacionales razonables, valores muy precisos para R^* y S^* , que son las variables de la primera etapa. En una situación de aplicación real del modelo, es obtener estos valores lo que cuenta con verdadera importancia, y es altamente relevante el hecho de que esta investigación corrobora la calidad del modelo SP de Cunha et al. (2017) en la obtención de estos en al menos 12 configuraciones de costos diferentes.

Para resumir, trabajar en el perfeccionamiento de la réplica es fundamental, por cuanto permitirá conocer la verdadera formulación del modelo que refleja los planteamientos de Hadley & Whitin (1963). Es fundamental desde la perspectiva de la importante contribución que significa contar con modelos de programación estocástica para la resolución de problemas de gestión de operaciones en los que la incertidumbre es un elemento de alto impacto, que son, como se ha visto, la mayoría de estos. Autores como Hagle (2005) que mencionan el uso del SAA y otros métodos en su obra llamada “Optimization When Uncertainty Matters”, o Shapiro & Philpott (2007) cuya presentación de la programación estocástica está acompañada en todo momento de su aplicación a un ejemplo de gestión de inventarios, incluyendo el uso de SAA, respaldan estas afirmaciones.

Finalmente, se vuelve a hacer mención a la falencia de la investigación en cuanto al cumplimiento de los objetivos, aunque se espera haber clarificado la causa de esto como el surgimiento de complicaciones impredecibles y no relacionadas con el planteamiento original. No existió mucho campo para maniobrar una vez identificado el problema, ya que el trabajo de Cunha et al. (2017) no ha sido referido muchas veces, y los trabajos posteriores no han corregido siquiera la restricción (SP-13). Ahora bien, para finalizar esta sección, se ha considerado prudente mencionar parte de las conclusiones expresadas por los mismos autores en su artículo, a modo de complementar lo ya expuesto aquí. Cunha et al. (2017) reconocen su segunda prueba numérica como el gran aporte del trabajo realizado, algo que ya fue mencionado en relación a cómo un modelo SP es más flexible al permitir considerar una demanda variable en el tiempo. Mencionan el esfuerzo computacional indefectiblemente necesario, y su justificación en la importancia de haber comprobado la

alta calidad del modelo. En este punto es importante volver a mencionar que, efectivamente, la réplica también respalda parte de esta afirmación, por cuanto las diferencias entre LB y UB aquí obtenidas también fueron muy bajas, lo que sugiere que el modelo funciona correctamente de acuerdo a su planteamiento. Esto es de alta importancia, ya que se verifica experimentalmente la capacidad del SAA de establecer un modelo determinístico equivalente a la formulación de programación estocástica de dos fases. Para finalizar, los autores hacen mención a los trabajos futuros, en los que incluyen sistemas de dos echelon (algo que ellos mismos realizan posteriormente), o abordar diferentes enfoques, como uno asociado a los niveles de servicio.

El gran impacto potencial de contar con un modelo de gestión de inventarios de revisión periódica, con lost sale, que opere bajo demanda incierta (modelos que no se encuentran en abundancia en la literatura) es justificación suficiente para coger los resultados de esta investigación, identificar la falencia que desvía los resultados respecto al modelo HW, corregirla, y extender el modelo SP para que contemple las situaciones mucho más realistas y aplicaciones de alta utilidad para las cuales fue concebido.

8. REFERENCIAS

Abad, P. L. (2000). Optimal lot size for a perishable good under conditions of finite production and partial backordering and lost sale. *Computers & Industrial Engineering*, 38(4), 457-465.

Abad, P. L. (2008). Optimal price and order size under partial backordering incorporating shortage, backorder and lost sale costs. *International Journal of Production Economics*, 114(1), 179-186.

Axsäter, S. (2015). Inventory control (Vol. 225). *Springer*.

Axsäter, S. (1996). Using the deterministic EOQ formula in stochastic inventory control. *Management Science*, 42(6), 830-834.

Bellman, R., Glicksberg, I., & Gross, O. (1955). On the optimal inventory equation. *Management Science*, 2(1), 83-104.

Bijvank, M., & Vis, I. F. (2011). Lost-sales inventory theory: A review. *European Journal of Operational Research*, 215(1), 1-13.

Bijvank, M., & Johansen, S. G. (2012). Periodic review lost-sales inventory models with compound Poisson demand and constant lead times of any length. *European Journal of Operational Research*, 220(1), 106-114.

Bijvank, M., Bhulai, S., & Huh, W. T. (2010). *Lost-sales inventory systems with fixed order costs*. Working Paper, Department of Computer Science and Operations Research, University of Montreal.

Birge, J. R. (1997). State-of-the-art-survey—Stochastic programming: Computation and applications. *INFORMS journal on computing*, 9(2), 111-133.

Braithwaite, R. (2006). *Moscú 1941: Una Ciudad y su Pueblo en Guerra*. Barcelona, España: Crítica, S.L.

Chang, H. J., & Dye, C. Y. (1999). An EOQ model for deteriorating items with time varying demand and partial backlogging. *Journal of the Operational Research Society*, 1176-1182.

Charnes, A., & Cooper, W. W. (1959). Chance-constrained programming. *Management science*, 6(1), 73-79.

Chase, R. B., Jacobs, F. R., & Aquilano, N. J. (2009). *Administración de operaciones: producción y cadena de suministros*. McGraw Hill Mexico.

Chen, R. R., Cheng, T. C. E., Choi, T. M., & Wang, Y. (2016). Novel advances in applications of the newsvendor model. *Decision sciences*.

Chen, H., & Li, P. (2015). Optimization of (R, Q) policies for serial inventory systems using the guaranteed service approach. *Computers & Industrial Engineering*, 80, 261-273.

Crawley, C. W. (1971). *Historia del Mundo Moderno IX Guerra y Paz en Tiempos de Revolución 1793-1830*. Barcelona, España: Editorial Ramón Sopena.

Cunha, P. S. A., Raupp, F. M. P., & Oliveira, F. (2017). A two-stage stochastic programming model for periodic replenishment control system under demand uncertainty. *Computers & Industrial Engineering*.

Cunha, P. S. A., Oliveira, F., & Raupp, F. M. (2017). Periodic Review System for Inventory Replenishment Control for a two-echelon Logistics Network Under Demand Uncertainty: A two-stage Stochastic Programing Approach. *Pesquisa Operacional*, 37(2), 247-276.

Daskin, M. S., Coullard, C. R., & Shen, Z. J. M. (2002). An inventory-location model: Formulation, solution algorithm and computational results. *Annals of operations research*, 110(1-4), 83-106.

Diakov, V., & Kovalev, S. (1966). *Historia de la Antigüedad Volumen III: Historia de Roma*. Miguel Hidalgo, México: Editorial Grijalbo.

Dictionary, O. E. (1989). Oxford english dictionary. *Simpson, JA & Weiner, ESC*.

Dillon, M., Oliveira, F., & Abbasi, B. (2017). A two-stage stochastic programming model for inventory management in the blood supply chain. *International Journal of Production Economics*, 187, 27-41.

Ellauri, O. S. (2007). *Historia Universal*. Barcelona, España: Bibliográfica Internacional.

Fattahi, M., Mahootchi, M., Moattar Hussein, S. M., Keyvanshokoh, E., & Alborzi, F. (2015). Investigating replenishment policies for centralised and decentralised supply chains using stochastic programming approach. *International Journal of Production Research*, 53(1), 41-69.

Federgruen, A., & Zipkin, P. (1984). Computational issues in an infinite-horizon, multiechelon inventory model. *Operations Research*, 32(4), 818-836.

Fox, R. L. (2008). El mundo clásico: la epopeya de Grecia y Roma. Grupo Planeta (GBS).

Gaver Jr, D. P. (1959). On base-stock level inventory control. *Operations Research*, 7(6), 689-703.

Glock, C. H., Grosse, E. H., & Ries, J. M. (2014). The lot sizing problem: A tertiary study. *International Journal of Production Economics*, 155, 39-51.

Glock, C. H. (2012). The joint economic lot size problem: A review. *International Journal of Production Economics*, 135(2), 671-686.

Gupta, A., & Maranas, C. D. (2000). A two-stage modeling and solution framework for multisite midterm planning under demand uncertainty. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 39(10), 3799-3813.

Hadley, G. W. (1963). *Analysis of inventory systems* (No. 658.787 H3).

Harris, F. W. (1913). How many parts to make at once. *Factory, the magazine of management*, 10(2), 135-136.

Heizer, J., & Render, B. (2004). Principios de administración de operaciones. *Pearson Educación*.

Higle, J. L. (2005). Stochastic programming: Optimization when uncertainty matters. *Tutorials in operations research*, 3053.

Hill, R. M., & Johansen, S. G. (2006). Optimal and near-optimal policies for lost sales inventory models with at most one replenishment order outstanding. *European journal of operational research*, 169(1), 111-132.

Jha, J. K., & Shanker, K. (2009). Two-echelon supply chain inventory model with controllable lead time and service level constraint. *Computers & Industrial Engineering*, 57(3), 1096-1104.

Johansen, S. G. (2001). Pure and modified base-stock policies for the lost sales inventory system with negligible set-up costs and constant lead times. *International Journal of Production Economics*, 71(1-3), 391-399.

Karlin, S., & Scarf, H. (1958). Inventory models of the Arrow-Harris-Marschak type with time lag. *Studies in the mathematical theory of inventory and production*, 1, 155.

Kim, G., Wu, K., & Huang, E. (2015). Optimal inventory control in a multi-period newsvendor problem with non-stationary demand. *Advanced Engineering Informatics*, 29(1), 139-145.

Kleywegt, A. J., Shapiro, A., & Homem-de-Mello, T. (2002). The sample average approximation method for stochastic discrete optimization. *SIAM Journal on Optimization*, 12(2), 479-502.

Krajewski, L. J. R., Malhotra, L. P., Villareal, M. K. C., Krajewski, M. D. P. L. J., Ritzman, L. P., & Malhotra, M. K. (2008). Administración de operaciones: procesos y cadenas de valor/Operations management (No. 658.5). *Pearson Educación*.

Kutateladze, S. S. (2012). Mathematics and economics of Leonid Kantorovich. *Siberian mathematical journal*, 53(1), 1-12.

Linderoth, J., Shapiro, A., & Wright, S. (2006). The empirical behavior of sampling methods for stochastic programming. *Annals of Operations Research*, 142(1), 215-241.

Lockard, R. (2012). Inventory System Software. Recuperado el 16 de Mayo de 2017, de <https://inventorysystemsoftware.wordpress.com/2012/02/06/brief-history-inventory-management/>

Lopez, Z. (2012). Fundamentos Lopez Sanchez Zulema. Recuperado el 19 de Mayo de 2017, de <https://sites.google.com/site/fundamentoslopezsanchezzulema/home/1-1-historia-desarrollo-y-estado-actual-de-la-ingenieria-industrial>

Morton, T. E. (1969). Bounds on the solution of the lagged optimal inventory equation with no demand backlogging and proportional costs. *SIAM review*, 11(4), 572-596.

Morse, P. M., & Kimball, G. E. (1951). *Methods of Operations Research*., New York: John Wiley and Sons.

Morse, P. M. (1959). Solutions of a class of discrete-time inventory problems. *Operations Research*, 7(1), 67-78.

Moscatelli, S. (2016). fmg.edu.uy. Recuperado el 19 de Mayo de 2017, de inco/cursos/io: <https://www.fmg.edu.uy/inco/cursos/io/>

Nahmias, S. (1997). *Production and Operations Management*. 3. ed. Irwin, Chicago, IL.

Nahmias, S. (1979). Simple approximations for a variety of dynamic leadtime lost-sales inventory models. *Operations Research*, 27(5), 904-924.

Namit, K., & Chen, J. (1999). Solutions to the (Q, r) inventory model for gamma lead-time demand. *International Journal of Physical Distribution & Logistics Management*, 29(2), 138-154.

Oliveira, F., Gupta, V., Hamacher, S., & Grossmann, I. E. (2013). A Lagrangean decomposition approach for oil supply chain investment planning under uncertainty with risk considerations. *Computers & Chemical Engineering*, 50, 184-195.

Oliveira, F., & Hamacher, S. (2012). Optimization of the petroleum product supply chain under uncertainty: A case study in northern brazil. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 51(11), 4279-4287.

Pindyck, R. S., & Rubinfeld, D. L. (2009). *Microeconomía*. Madrid: Pearson Educación.

Pressman, I. (1977). An order-level-scheduling-period system with lost sales. *Management science*, 23(12), 1328-1335.

Ronald, B. (2004). Logística: administración de la cadena de suministro. Editorial Pearson, México.

Santoso, T., Ahmed, S., Goetschalckx, M., & Shapiro, A. (2005). A stochastic programming approach for supply chain network design under uncertainty. *European Journal of Operational Research*, 167(1), 96-115.

Shapiro, A., Dentcheva, D., & Ruszczyński, A. (2009). *Lectures on stochastic programming: modeling and theory*. Society for Industrial and Applied Mathematics.

Shapiro, A., & Philpott, A. (2007). A tutorial on stochastic programming. Manuscript. Available at www2.isye.gatech.edu/ashapiro/publications.html, 17.

Shapiro, A., & Homem-de-Mello, T. (1998). A simulation-based approach to two-stage stochastic programming with recourse. *Mathematical Programming*, 81(3), 301-325.

Shen, Z. J. M., Coullard, C., & Daskin, M. S. (2003). A joint location-inventory model. *Transportation science*, 37(1), 40-55.

Silver, E. A., Pyke, D. F., & Thomas, D. J. (2016). *Inventory and Production Management in Supply Chains*.

Silver, E. A., Pyke, D. F., & Peterson, R. (1998). *Inventory management and production planning and scheduling* (Vol. 3, p. 30). New York: Wiley.

Sobel, M. J. (2004). Fill rates of single-stage and multistage supply systems. *Manufacturing & Service Operations Management*, 6(1), 41-52.

Solyalı, O., Cordeau, J. F., & Laporte, G. (2015). The impact of modeling on robust inventory management under demand uncertainty. *Management Science*, 62(4), 1188-1201.

Soysal, M., Bloemhof-Ruwaard, J. M., Haijema, R., & van der Vorst, J. G. (2015). Modeling an Inventory Routing Problem for perishable products with environmental considerations and demand uncertainty. *International Journal of Production Economics*, 164, 118-133.

Wagner, H. M., & Whitin, T. M. (1958). Dynamic version of the economic lot size model. *Management science*, 5(1), 89-96.

You, F., & Grossmann, I. E. (2008). Mixed-integer nonlinear programming models and algorithms for large-scale supply chain design with stochastic inventory management. *Industrial & Engineering Chemistry Research*, 47(20), 7802-7817.

Zipkin, P.H. (2008a). Old and new methods for lost-sales inventory systems. *Operations Research*, 56, 1256–1263.

Zipkin, P. (2008b). On the structure of lost-sales inventory models. *Operations research*, 56(4), 937-944.

Zipkin, P. H. (2000). Foundations of inventory management.

9. ANEXOS

9.1. Anexo nº1: Tablas con funciones ϕ y Φ tabuladas. Fuente: Axsäter (2006).

Normal Distribution Tables

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}, \varphi(-x) = \varphi(x). \quad \Phi(x) = \int_{-\infty}^x \varphi(v) dv, \Phi(-x) = 1 - \Phi(x).$$

$$G(x) = \int_x^{\infty} (v - x) \varphi(v) dv = \varphi(x) - x(1 - \Phi(x)), \quad G(-x) = G(x) + x.$$

$$H(x) = \int_x^{\infty} G(v) dv = \frac{1}{2} \left[(x^2 + 1)(1 - \Phi(x)) - x\varphi(x) \right], \quad H(-x) = -H(x) + \frac{1}{2}(x^2 + 1)$$

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	$G(x)$	$H(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	$G(x)$	$H(x)$
0.00	0.3989	0.5000	0.3989	0.2500	0.13	0.3956	0.5517	0.3373	0.2022
0.01	0.3989	0.5040	0.3940	0.2460	0.14	0.3951	0.5557	0.3328	0.1989
0.02	0.3989	0.5080	0.3890	0.2421	0.15	0.3945	0.5596	0.3284	0.1956
0.03	0.3988	0.5120	0.3841	0.2383	0.16	0.3939	0.5636	0.3240	0.1923
0.04	0.3986	0.5160	0.3793	0.2344	0.17	0.3932	0.5675	0.3197	0.1891
0.05	0.3984	0.5199	0.3744	0.2307	0.18	0.3925	0.5714	0.3154	0.1859
0.06	0.3982	0.5239	0.3697	0.2269	0.19	0.3918	0.5753	0.3111	0.1828
0.07	0.3980	0.5279	0.3649	0.2233	0.20	0.3910	0.5793	0.3069	0.1797
0.08	0.3977	0.5319	0.3602	0.2197	0.21	0.3902	0.5832	0.3027	0.1766
0.09	0.3973	0.5359	0.3556	0.2161	0.22	0.3894	0.5871	0.2986	0.1736
0.10	0.3970	0.5398	0.3509	0.2125	0.23	0.3885	0.5910	0.2944	0.1707
0.11	0.3965	0.5438	0.3464	0.2091	0.24	0.3876	0.5948	0.2904	0.1677
0.12	0.3961	0.5478	0.3418	0.2056	0.25	0.3867	0.5987	0.2863	0.1649

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	$G(x)$	$H(x)$	x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	$G(x)$	$H(x)$
0.26	0.3857	0.6026	0.2824	0.1620	0.72	0.3079	0.7642	0.1381	0.0682
0.27	0.3847	0.6064	0.2784	0.1592	0.73	0.3056	0.7673	0.1358	0.0668
0.28	0.3836	0.6103	0.2745	0.1564	0.74	0.3034	0.7704	0.1334	0.0654
0.29	0.3825	0.6141	0.2706	0.1537	0.75	0.3011	0.7734	0.1312	0.0641
0.30	0.3814	0.6179	0.2668	0.1510	0.76	0.2989	0.7764	0.1289	0.0628
0.31	0.3802	0.6217	0.2630	0.1484	0.77	0.2966	0.7794	0.1267	0.0615
0.32	0.3790	0.6255	0.2592	0.1458	0.78	0.2943	0.7823	0.1245	0.0603
0.33	0.3778	0.6293	0.2555	0.1432	0.79	0.2920	0.7852	0.1223	0.0591
0.34	0.3765	0.6331	0.2518	0.1407	0.80	0.2897	0.7881	0.1202	0.0578
0.35	0.3752	0.6368	0.2481	0.1382	0.81	0.2874	0.7910	0.1181	0.0567
0.36	0.3739	0.6406	0.2445	0.1357	0.82	0.2850	0.7939	0.1160	0.0555
0.37	0.3725	0.6443	0.2409	0.1333	0.83	0.2827	0.7967	0.1140	0.0543
0.38	0.3712	0.6480	0.2374	0.1309	0.84	0.2803	0.7995	0.1120	0.0532
0.39	0.3697	0.6517	0.2339	0.1285	0.85	0.2780	0.8023	0.1100	0.0521
0.40	0.3683	0.6554	0.2304	0.1262	0.86	0.2756	0.8051	0.1080	0.0510
0.41	0.3668	0.6591	0.2270	0.1239	0.87	0.2732	0.8078	0.1061	0.0499
0.42	0.3653	0.6628	0.2236	0.1217	0.88	0.2709	0.8106	0.1042	0.0489
0.43	0.3637	0.6664	0.2203	0.1194	0.89	0.2685	0.8133	0.1023	0.0478
0.44	0.3621	0.6700	0.2169	0.1173	0.90	0.2661	0.8159	0.1004	0.0468
0.45	0.3605	0.6736	0.2137	0.1151	0.91	0.2637	0.8186	0.0986	0.0458
0.46	0.3589	0.6772	0.2104	0.1130	0.92	0.2613	0.8212	0.0968	0.0449
0.47	0.3572	0.6808	0.2072	0.1109	0.93	0.2589	0.8238	0.0950	0.0439
0.48	0.3555	0.6844	0.2040	0.1088	0.94	0.2565	0.8264	0.0933	0.0430
0.49	0.3538	0.6879	0.2009	0.1068	0.95	0.2541	0.8289	0.0916	0.0420
0.50	0.3521	0.6915	0.1978	0.1048	0.96	0.2516	0.8315	0.0899	0.0411
0.51	0.3503	0.6950	0.1947	0.1029	0.97	0.2492	0.8340	0.0882	0.0402
0.52	0.3485	0.6985	0.1917	0.1009	0.98	0.2468	0.8365	0.0865	0.0394
0.53	0.3467	0.7019	0.1887	0.0990	0.99	0.2444	0.8389	0.0849	0.0385
0.54	0.3448	0.7054	0.1857	0.0972	1.00	0.2420	0.8413	0.0833	0.0377
0.55	0.3429	0.7088	0.1828	0.0953	1.01	0.2396	0.8438	0.0817	0.0368
0.56	0.3410	0.7123	0.1799	0.0935	1.02	0.2371	0.8461	0.0802	0.0360
0.57	0.3391	0.7157	0.1771	0.0917	1.03	0.2347	0.8485	0.0787	0.0352
0.58	0.3372	0.7190	0.1742	0.0900	1.04	0.2323	0.8508	0.0772	0.0345
0.59	0.3352	0.7224	0.1714	0.0882	1.05	0.2299	0.8531	0.0757	0.0337
0.60	0.3332	0.7257	0.1687	0.0865	1.06	0.2275	0.8554	0.0742	0.0329
0.61	0.3312	0.7291	0.1659	0.0849	1.07	0.2251	0.8577	0.0728	0.0322
0.62	0.3292	0.7324	0.1633	0.0832	1.08	0.2227	0.8599	0.0714	0.0315
0.63	0.3271	0.7357	0.1606	0.0816	1.09	0.2203	0.8621	0.0700	0.0308
0.64	0.3251	0.7389	0.1580	0.0800	1.10	0.2179	0.8643	0.0686	0.0301
0.65	0.3230	0.7422	0.1554	0.0784	1.11	0.2155	0.8665	0.0673	0.0294
0.66	0.3209	0.7454	0.1528	0.0769	1.12	0.2131	0.8686	0.0659	0.0287
0.67	0.3187	0.7486	0.1503	0.0754	1.13	0.2107	0.8708	0.0646	0.0281
0.68	0.3166	0.7517	0.1478	0.0739	1.14	0.2083	0.8729	0.0634	0.0275
0.69	0.3144	0.7549	0.1453	0.0724	1.15	0.2059	0.8749	0.0621	0.0268
0.70	0.3123	0.7580	0.1429	0.0710	1.16	0.2036	0.8770	0.0609	0.0262
0.71	0.3101	0.7611	0.1405	0.0696	1.17	0.2012	0.8790	0.0596	0.0256

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	$G(x)$	$H(x)$
1.18	0.1989	0.8810	0.0584	0.0250
1.19	0.1965	0.8830	0.0573	0.0244
1.20	0.1942	0.8849	0.0561	0.0239
1.21	0.1919	0.8869	0.0550	0.0233
1.22	0.1895	0.8888	0.0538	0.0228
1.23	0.1872	0.8907	0.0527	0.0222
1.24	0.1849	0.8925	0.0517	0.0217
1.25	0.1826	0.8944	0.0506	0.0212
1.26	0.1804	0.8962	0.0495	0.0207
1.27	0.1781	0.8980	0.0485	0.0202
1.28	0.1758	0.8997	0.0475	0.0197
1.29	0.1736	0.9015	0.0465	0.0193
1.30	0.1714	0.9032	0.0455	0.0188
1.31	0.1691	0.9049	0.0446	0.0184
1.32	0.1669	0.9066	0.0436	0.0179
1.33	0.1647	0.9082	0.0427	0.0175
1.34	0.1626	0.9099	0.0418	0.0171
1.35	0.1604	0.9115	0.0409	0.0166
1.36	0.1582	0.9131	0.0400	0.0162
1.37	0.1561	0.9147	0.0392	0.0158
1.38	0.1539	0.9162	0.0383	0.0155
1.39	0.1518	0.9177	0.0375	0.0151
1.40	0.1497	0.9192	0.0367	0.0147
1.41	0.1476	0.9207	0.0359	0.0143
1.42	0.1456	0.9222	0.0351	0.0140
1.43	0.1435	0.9236	0.0343	0.0136
1.44	0.1415	0.9251	0.0336	0.0133
1.45	0.1394	0.9265	0.0328	0.0130
1.46	0.1374	0.9279	0.0321	0.0127
1.47	0.1354	0.9292	0.0314	0.0123
1.48	0.1334	0.9306	0.0307	0.0120
1.49	0.1315	0.9319	0.0300	0.0117
1.50	0.1295	0.9332	0.0293	0.0114
1.51	0.1276	0.9345	0.0286	0.0111
1.52	0.1257	0.9357	0.0280	0.0109
1.53	0.1238	0.9370	0.0274	0.0106
1.54	0.1219	0.9382	0.0267	0.0103
1.55	0.1200	0.9394	0.0261	0.0100
1.56	0.1182	0.9406	0.0255	0.0098
1.57	0.1163	0.9418	0.0249	0.0095
1.58	0.1145	0.9429	0.0244	0.0093
1.59	0.1127	0.9441	0.0238	0.0090
1.60	0.1109	0.9452	0.0232	0.0088
1.61	0.1092	0.9463	0.0227	0.0086
1.62	0.1074	0.9474	0.0222	0.0084
1.63	0.1057	0.9484	0.0216	0.0081

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	$G(x)$	$H(x)$
1.64	0.1040	0.9495	0.0211	0.0079
1.65	0.1023	0.9505	0.0206	0.0077
1.66	0.1006	0.9515	0.0201	0.0075
1.67	0.0989	0.9525	0.0197	0.0073
1.68	0.0973	0.9535	0.0192	0.0071
1.69	0.0957	0.9545	0.0187	0.0069
1.70	0.0940	0.9554	0.0183	0.0067
1.71	0.0925	0.9564	0.0178	0.0066
1.72	0.0909	0.9573	0.0174	0.0064
1.73	0.0893	0.9582	0.0170	0.0062
1.74	0.0878	0.9591	0.0166	0.0060
1.75	0.0863	0.9599	0.0162	0.0059
1.76	0.0848	0.9608	0.0158	0.0057
1.77	0.0833	0.9616	0.0154	0.0056
1.78	0.0818	0.9625	0.0150	0.0054
1.79	0.0804	0.9633	0.0146	0.0053
1.80	0.0790	0.9641	0.0143	0.0051
1.81	0.0775	0.9649	0.0139	0.0050
1.82	0.0761	0.9656	0.0136	0.0048
1.83	0.0748	0.9664	0.0132	0.0047
1.84	0.0734	0.9671	0.0129	0.0046
1.85	0.0721	0.9678	0.0126	0.0044
1.86	0.0707	0.9686	0.0123	0.0043
1.87	0.0694	0.9693	0.0119	0.0042
1.88	0.0681	0.9699	0.0116	0.0041
1.89	0.0669	0.9706	0.0113	0.0040
1.90	0.0656	0.9713	0.0111	0.0039
1.91	0.0644	0.9719	0.0108	0.0037
1.92	0.0632	0.9726	0.0105	0.0036
1.93	0.0620	0.9732	0.0102	0.0035
1.94	0.0608	0.9738	0.0100	0.0034
1.95	0.0596	0.9744	0.0097	0.0033
1.96	0.0584	0.9750	0.0094	0.0032
1.97	0.0573	0.9756	0.0092	0.0031
1.98	0.0562	0.9761	0.0090	0.0031
1.99	0.0551	0.9767	0.0087	0.0030
2.00	0.0540	0.9772	0.0085	0.0029
2.01	0.0529	0.9778	0.0083	0.0028
2.02	0.0519	0.9783	0.0080	0.0027
2.03	0.0508	0.9788	0.0078	0.0026
2.04	0.0498	0.9793	0.0076	0.0026
2.05	0.0488	0.9798	0.0074	0.0025
2.06	0.0478	0.9803	0.0072	0.0024
2.07	0.0468	0.9808	0.0070	0.0023
2.08	0.0459	0.9812	0.0068	0.0023
2.09	0.0449	0.9817	0.0066	0.0022

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	$G(x)$	$H(x)$
2.10	0.0440	0.9821	0.0065	0.0021
2.11	0.0431	0.9826	0.0063	0.0021
2.12	0.0422	0.9830	0.0061	0.0020
2.13	0.0413	0.9834	0.0060	0.0020
2.14	0.0404	0.9838	0.0058	0.0019
2.15	0.0396	0.9842	0.0056	0.0018
2.16	0.0387	0.9846	0.0055	0.0018
2.17	0.0379	0.9850	0.0053	0.0017
2.18	0.0371	0.9854	0.0052	0.0017
2.19	0.0363	0.9857	0.0050	0.0016
2.20	0.0355	0.9861	0.0049	0.0016
2.21	0.0347	0.9864	0.0047	0.0015
2.22	0.0339	0.9868	0.0046	0.0015
2.23	0.0332	0.9871	0.0045	0.0014
2.24	0.0325	0.9875	0.0044	0.0014
2.25	0.0317	0.9878	0.0042	0.0013
2.26	0.0310	0.9881	0.0041	0.0013
2.27	0.0303	0.9884	0.0040	0.0013
2.28	0.0297	0.9887	0.0039	0.0012
2.29	0.0290	0.9890	0.0038	0.0012
2.30	0.0283	0.9893	0.0037	0.0012
2.31	0.0277	0.9896	0.0036	0.0011
2.32	0.0270	0.9898	0.0035	0.0011
2.33	0.0264	0.9901	0.0034	0.0010
2.34	0.0258	0.9904	0.0033	0.0010
2.35	0.0252	0.9906	0.0032	0.0010
2.36	0.0246	0.9909	0.0031	0.0009
2.37	0.0241	0.9911	0.0030	0.0009
2.38	0.0235	0.9913	0.0029	0.0009
2.39	0.0229	0.9916	0.0028	0.0009
2.40	0.0224	0.9918	0.0027	0.0008
2.41	0.0219	0.9920	0.0026	0.0008
2.42	0.0213	0.9922	0.0026	0.0008
2.43	0.0208	0.9925	0.0025	0.0008
2.44	0.0203	0.9927	0.0024	0.0007
2.45	0.0198	0.9929	0.0023	0.0007
2.46	0.0194	0.9931	0.0023	0.0007
2.47	0.0189	0.9932	0.0022	0.0007
2.48	0.0184	0.9934	0.0021	0.0006
2.49	0.0180	0.9936	0.0021	0.0006
2.50	0.0175	0.9938	0.0020	0.0006
2.51	0.0171	0.9940	0.0019	0.0006
2.52	0.0167	0.9941	0.0019	0.0006
2.53	0.0163	0.9943	0.0018	0.0005
2.54	0.0158	0.9945	0.0018	0.0005
2.55	0.0154	0.9946	0.0017	0.0005

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	$G(x)$	$H(x)$
2.56	0.0151	0.9948	0.0017	0.0005
2.57	0.0147	0.9949	0.0016	0.0005
2.58	0.0143	0.9951	0.0016	0.0005
2.59	0.0139	0.9952	0.0015	0.0004
2.60	0.0136	0.9953	0.0015	0.0004
2.61	0.0132	0.9955	0.0014	0.0004
2.62	0.0129	0.9956	0.0014	0.0004
2.63	0.0126	0.9957	0.0013	0.0004
2.64	0.0122	0.9959	0.0013	0.0004
2.65	0.0119	0.9960	0.0012	0.0004
2.66	0.0116	0.9961	0.0012	0.0003
2.67	0.0113	0.9962	0.0012	0.0003
2.68	0.0110	0.9963	0.0011	0.0003
2.69	0.0107	0.9964	0.0011	0.0003
2.70	0.0104	0.9965	0.0011	0.0003
2.71	0.0101	0.9966	0.0010	0.0003
2.72	0.0099	0.9967	0.0010	0.0003
2.73	0.0096	0.9968	0.0010	0.0003
2.74	0.0093	0.9969	0.0009	0.0003
2.75	0.0091	0.9970	0.0009	0.0003
2.76	0.0088	0.9971	0.0009	0.0002
2.77	0.0086	0.9972	0.0008	0.0002
2.78	0.0084	0.9973	0.0008	0.0002
2.79	0.0081	0.9974	0.0008	0.0002
2.80	0.0079	0.9974	0.0008	0.0002
2.81	0.0077	0.9975	0.0007	0.0002
2.82	0.0075	0.9976	0.0007	0.0002
2.83	0.0073	0.9977	0.0007	0.0002
2.84	0.0071	0.9977	0.0007	0.0002
2.85	0.0069	0.9978	0.0006	0.0002
2.86	0.0067	0.9979	0.0006	0.0002
2.87	0.0065	0.9979	0.0006	0.0002
2.88	0.0063	0.9980	0.0006	0.0002
2.89	0.0061	0.9981	0.0006	0.0002
2.90	0.0060	0.9981	0.0005	0.0001
2.91	0.0058	0.9982	0.0005	0.0001
2.92	0.0056	0.9982	0.0005	0.0001
2.93	0.0055	0.9983	0.0005	0.0001
2.94	0.0053	0.9984	0.0005	0.0001
2.95	0.0051	0.9984	0.0005	0.0001
2.96	0.0050	0.9985	0.0004	0.0001
2.97	0.0048	0.9985	0.0004	0.0001
2.98	0.0047	0.9986	0.0004	0.0001
2.99	0.0046	0.9986	0.0004	0.0001
3.00	0.0044	0.9987	0.0004	0.0001
3.01	0.0043	0.9987	0.0004	0.0001

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	$G(x)$	$H(x)$
3.02	0.0042	0.9987	0.0004	0.0001
3.03	0.0040	0.9988	0.0003	0.0001
3.04	0.0039	0.9988	0.0003	0.0001
3.05	0.0038	0.9989	0.0003	0.0001
3.06	0.0037	0.9989	0.0003	0.0001
3.07	0.0036	0.9989	0.0003	0.0001
3.08	0.0035	0.9990	0.0003	0.0001
3.09	0.0034	0.9990	0.0003	0.0001
3.10	0.0033	0.9990	0.0003	0.0001
3.11	0.0032	0.9991	0.0003	0.0001
3.12	0.0031	0.9991	0.0002	0.0001
3.13	0.0030	0.9991	0.0002	0.0001
3.14	0.0029	0.9992	0.0002	0.0001
3.15	0.0028	0.9992	0.0002	0.0001
3.16	0.0027	0.9992	0.0002	0.0001
3.17	0.0026	0.9992	0.0002	0.0001
3.18	0.0025	0.9993	0.0002	0.0001
3.19	0.0025	0.9993	0.0002	0.0000
3.20	0.0024	0.9993	0.0002	0.0000
3.21	0.0023	0.9993	0.0002	0.0000
3.22	0.0022	0.9994	0.0002	0.0000
3.23	0.0022	0.9994	0.0002	0.0000
3.24	0.0021	0.9994	0.0002	0.0000
3.25	0.0020	0.9994	0.0002	0.0000
3.26	0.0020	0.9994	0.0001	0.0000

x	$\varphi(x)$	$\Phi(x)$	$G(x)$	$H(x)$
3.27	0.0019	0.9995	0.0001	0.0000
3.28	0.0018	0.9995	0.0001	0.0000
3.29	0.0018	0.9995	0.0001	0.0000
3.30	0.0017	0.9995	0.0001	0.0000
3.31	0.0017	0.9995	0.0001	0.0000
3.32	0.0016	0.9995	0.0001	0.0000
3.33	0.0016	0.9996	0.0001	0.0000
3.34	0.0015	0.9996	0.0001	0.0000
3.35	0.0015	0.9996	0.0001	0.0000
3.36	0.0014	0.9996	0.0001	0.0000
3.37	0.0014	0.9996	0.0001	0.0000
3.38	0.0013	0.9996	0.0001	0.0000
3.39	0.0013	0.9997	0.0001	0.0000
3.40	0.0012	0.9997	0.0001	0.0000
3.41	0.0012	0.9997	0.0001	0.0000
3.42	0.0012	0.9997	0.0001	0.0000
3.43	0.0011	0.9997	0.0001	0.0000
3.44	0.0011	0.9997	0.0001	0.0000
3.45	0.0010	0.9997	0.0001	0.0000
3.46	0.0010	0.9997	0.0001	0.0000
3.47	0.0010	0.9997	0.0001	0.0000
3.48	0.0009	0.9997	0.0001	0.0000
3.49	0.0009	0.9998	0.0001	0.0000
3.50	0.0009	0.9998	0.0001	0.0000

9.2. Anexo n°2: Réplica de modelo HW – Configuración Backorder.

Como se mencionó, la réplica del modelo HW fue construida en MS Excel 2010, por lo que cuenta con una estructura dramáticamente diferente a la expuesta en la sección 5.1. No obstante, es posible identificar todos los parámetros y variables del mismo. A continuación se presenta una imagen de cómo se ve el modelo.

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4							
5		Cf					
6		b					
7		h					
8		R			Costo		
9		S					
10		ϕ					
11		Φ					
12							
13							
14		D					
15		L					
16		σ^2					
17							
18							
19							
20							
21		$\Phi(\frac{h * R}{b})$					
22		Z_s					

Ilustración 9.2.1: Estructura del archivo MS Excel 2010 para la réplica del modelo HW

(Fuente: Elaboración Propia).

En la figura, la celda de color amarillo representa la única variable del modelo, R. Las celdas de color celeste son parámetros, las de color salmón son las funciones de variable y, por último, la de color verde es la función objetivo.

A continuación se expone el código utilizado para las funciones de variable:

$$S = C22 * \text{SQRT}(C16 * (C15 + C8)) + C14 * (C15 + C8);$$

$$\phi = \text{VLOOKUP}((C9 - C14 * (C15 + C8)) / (\text{SQRT}(C16 * (C15 + C8))), 'Axsater \text{Data}'!J2:L353; 2; \text{TRUE});$$

$$\Phi = 1 - \text{VLOOKUP}((C9 - C14 * (C15 + C8)) / (\text{SQRT}(C16 * (C15 + C8))), 'Axsater \text{Data}'!J2:L353; 3; \text{TRUE});$$

$$\Phi\left(\frac{h^*R}{b}\right) = C7 * C8 / (C6);$$

$$Z_S = \text{VLOOKUP}(\text{ROUND}((1 - C21); 10), 'Axsater \text{Data}'!L3:P353; 5; \text{TRUE});$$

$$\text{Costo} = (C5 / C8 + C7 * (C9 - C14 * C15 - C14 * C8 / 2) + (C6 / C8) * (\text{SQRT}(C16 * (C15 + C8)) * C10 + (C14 * (C15 + C8) - C9) * C11))$$

Es necesario explicar las funciones que utilizan VLOOKUP, que refieren a una pestaña de Excel llamada 'Axsater Data'. En esta pestaña se encuentran las tablas del anexo n°1, obtenidas de Axsater (2006). La celda asociada a ϕ introduce el valor $(C9 - C14 * (C15 + C8)) / (\text{SQRT}(C16 * (C15 + C8)))$ y lo busca en la columna “x” de la tabla para luego recuperar el valor $\phi(x)$. Así es como funciona el comando VLOOKUP, y la explicación es equivalente para las otras funciones.

Por último, se adjunta a continuación una imagen de la interfaz de la herramienta SOLVER del MS Excel 2010, donde se aprecia la construcción del modelo con su función objetivo y restricciones.

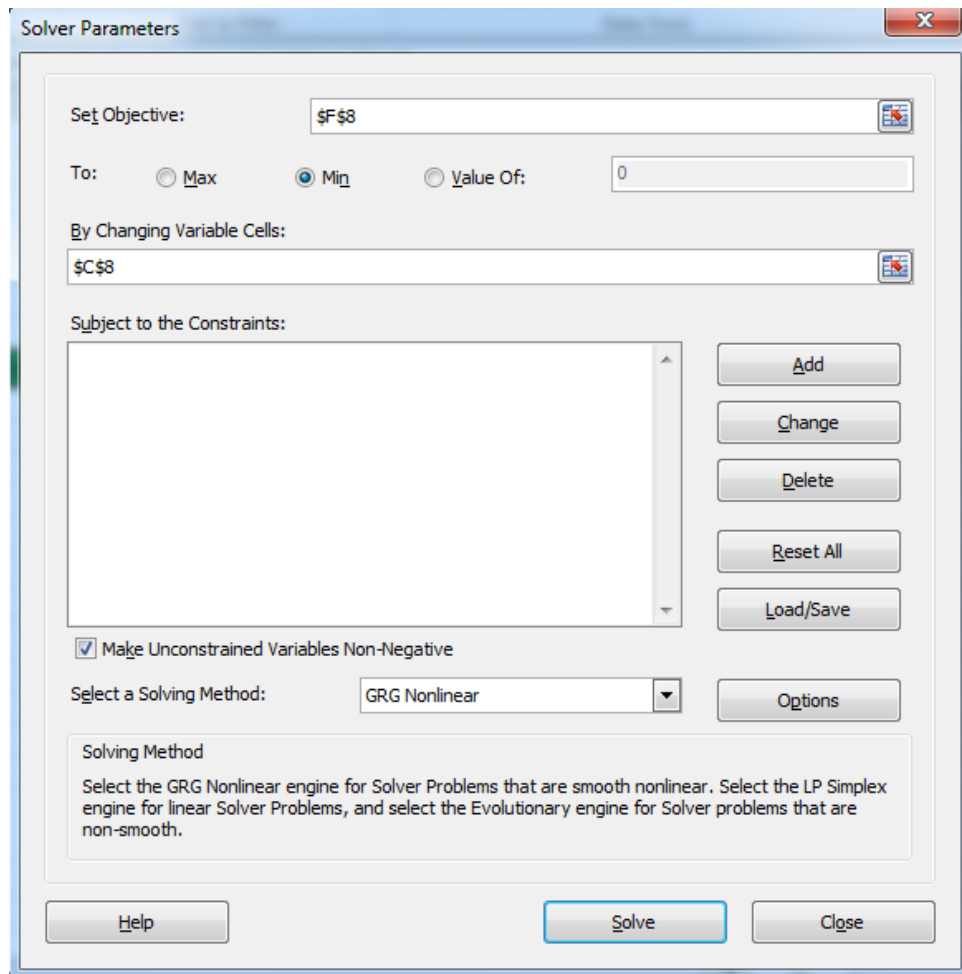


Ilustración 9.2.2: Imagen de la herramienta SOLVER para la réplica del modelo HW.

(Fuente: Elaboración Propia).

9.3. Anexo n°3: Resolución de ejemplo explicativo con replica de modelo HW.

Aquí se presenta la resolución, con la réplica de esta investigación, del ejemplo que Hadley & Whitin (1963) desarrollan para su modelo de la política (R,S).

	A	B	C	D	E	F	G
1							
2							
3							
4							
5		Cf	25				
6		b	25				
7		h	3				
8		R	0,16394		Costo	477,9041	
9		S	448,7202				
10		ϕ	0,0488				
11		Φ	0,0202				
12							
13							
14		D	600				
15		L	0,5				
16		σ^2	900				
17							
18							
19							
20							
21		$\Phi(\frac{h * R}{b})$	0,019673				
22		Z_s	2,06				

Figura 9.3.1: Resultados de la réplica del modelo HW para el ejemplo expositivo. (Fuente: Elaboración Propia).

En la figura se pueden apreciar los resultados de hacer funcionar el modelo con los parámetros del ejemplo correctamente introducidos. Se puede apreciar de inmediato la alta calidad de la réplica al comparar estos resultados con los expuestos por Hadley & Whitin (1963), que se muestran en la figura siguiente:

T (months)	$R^*(T)$ (units)	Safety Stock (units)	Average Annual Review and Ordering Cost	Average Annual Carrying Cost	Average Annual Backorder Cost	Average Annual Cost $\mathcal{K}$
0.5	382	57	\$600	\$208	\$23	\$831
1.0	403	53	300	234	23	557
1.5	426	51	200	265	27	492
1.7	436	51	177	281	25	483
1.8	440	50	167	285	27	479
1.9	445	50	158	292	27	477
2.0	449	49	150	297	31	478
3.0	499	49	100	372	29	501

Figura 9.3.2: Resultados de las iteraciones para la resolución del ejemplo expositivo de la política (R,S) (Fuente: Hadley & Whitin, 1963).

Aquí es posible percibir que, efectivamente, el valor óptimo de T (en el caso de esta investigación llamado R) está cerca de los 1,9 [meses] de acuerdo al costo promedio total K . Esto es notablemente cercano a los 0,16394 [años] obtenidos por la réplica, que equivalen a 1,96728 [meses]. Sucede lo mismo para los valores de R (en el caso de esta investigación llamado S) y el costo total K .

Estos resultados abalan la réplica construida del modelo HW para la política (R,S), y respaldan su uso en la verificación de los resultados de la publicación que motiva esta investigación.

9.4. Anexo n°4: Réplica de modelo HW – Configuración Lost Sale.

Como se ha establecido, las modificaciones para la configuración Lost Sale, respecto al caso de Backorder, son mínimas, y se presentan sólo en la función objetivo. Su nueva expresión será:

$$\text{Costo} = (C5/C8 + C7 * (C9 - C14 * C15 - C14 * C8 / 2) + (C7 + C6 / C8) * (\text{SQRT}(C16 * (C15 + C8)) * C10 + (C14 * (C15 + C8) - C9) * C11)) * 12;$$

Nótese como, además de la modificación para incluir el término adicional en el costo de almacenamiento, la función objetivo se encuentra multiplicada por 12. Esto último es necesario porque se desea que los resultados sean presentados en forma anual, y ya que los parámetros de demanda y costos ingresados para replicar los experimentos de Cunha et al. (2017) están en base mensual, el resultado final también lo está, y debe ser multiplicado por 12 (meses) para obtener su equivalente anual.

También es necesario mencionar que, en orden de replicar correctamente los experimentos de Cunha et al. (2017), es necesario restringir a la variable R para que sea entera (múltiplo entero de un período p) y menor que 10 meses. Estas restricciones se agregan en la herramienta Solver de MS Excel 2010, resultando lo siguiente:

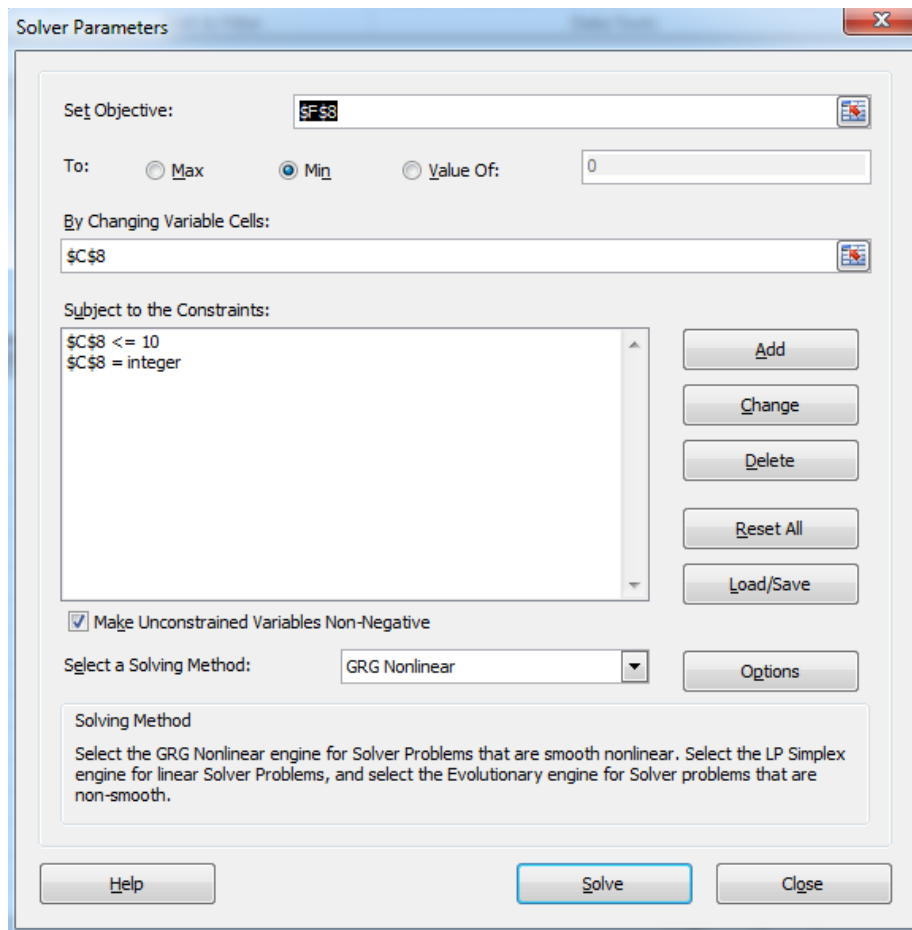


Figura 9.4.1: Imagen de Solver para la réplica del modelo HW en configuración Lost Sale.

(Fuente: Elaboración Propia).

9.5. Anexo nº5: Réplica de modelo SP - Configuración Lost Sale.

En este anexo se presentan imágenes del código AMPL para la réplica del modelo de SP de Cunha et al. (2017).

```

memoria.mod x
1  #CONJUNTOS#
2
3  set P; #Conjunto de periodos {1,...,Np}#
4
5  set Z := 1..200; #Conjunto de escenarios#
6
7  set T; #Conjunto de periodos de revisión {1,...,Nr}#
8
9  set J;
10
11 set cf;
12
13 set hp;
14
15 #PARAMETROS
16
17 param L; # Lead Time#
18 param b_p{P}; # Shortage Cost por unidad en el periodo p #
19 param Cf_p{P,cf}; # Ordering Cost en el periodo p #
20 param D_z_p{Z,P}; # Demanda del item en el escenario z en el periodo p #
21 param h_p{P,hp}; # Holding cost para el item en el periodo p #
22 param ITI; # Cota superior para el stock position total #
23 param SS; # Cota Superior para el stock position maximo #
24 param W{P,T}; # Matriz auxiliar #
25
26 #VARIABLES
27
28 var S>=0; #Target Level#
29 var A_z_p{Z,0..card(P)} >=0; # Demanda satisfecha en el escenario z en el periodo p #
30 var F_z_p{Z,P}>=0; # Demanda insatisfecha en el escenario z en el periodo p #
31 var I_z_p{Z,0..card(P)}>=0; # Stock on hand en el escenario z al final del periodo p #
32 var IT_z_p{Z,0..card(P)}>=0; # Stock Position en el escenario z al final del periodo p #
33 var ITI_z_p{Z,0..card(P)}>=0; # Stock Position en el escenario z al comienzo del periodo p #
34 var ITIV_z_p{Z,0..card(P)}>=0; # Variable auxiliar por el Stock Position Total en el escenario
35                                     # z al comienzo del periodo p
36 var P_z_p{Z,0..card(P)}>=0; # Cantidad a ordenar en el escenario z al principio del periodo p #
37 var SV_p{P}>=0; # Variable auxiliar para el Target Level del Stock Position en el periodo p #
38 var v_p{P} binary; # Indica si existe una orden en el periodo p #
39 var u_r{T} >=0; # Variable Auxiliar para la determinación del tamaño R del ciclo de reposición
40                                     #, u_r = 1 implica R=r
41
42 #FUNCION OBJETIVO
43
44 minimize Costo:
45     sum {p in P} (Cf_p[p,1]*v_p[p])
46     + (1/card(Z)) * sum {z in Z} (sum {p in P} (h_p[p,1]*I_z_p[z,p] + b_p[p]*F_z_p[z,p]));
47
48 subject to rest2:
49     sum {r in T} u_r[r] = 1;
50
51 subject to rest3 {p in P}:
52     sum {r in T} ( W[p,r]*u_r[r] ) = v_p[p];
53
54 subject to rest4:
55     S <= SS;
56
57 subject to rest8 {z in Z, p in P : p >= L}:
58     I_z_p[z,p-1] + P_z_p[z,p-L] = I_z_p[z,p] + A_z_p[z,p];
59
60 subject to rest8s {z in Z, p in P : p < L}:
61     I_z_p[z,p-1] = I_z_p[z,p] + A_z_p[z,p];
62
63 subject to rest9 {z in Z, p in P}:
64     IT_z_p[z,p-1] + P_z_p[z,p] = IT_z_p[z,p] + A_z_p[z,p];
65

```

```

66 subject to rest10 {z in Z, p in P}:
67     A_z_p[z,p] + F_z_p[z,p] = D_z_p[z,p];
68
69 # subject to rest11 {z in Z, p in P}:
70     # P_z_p[z,p] = (S-IT_z_p[z,p-1])*v_p[p];
71
72 #subject to rest12:#
73
74 subject to rest12s {z in Z}:
75     A_z_p[z,0] = 0;
76
77 subject to rest12ss {z in Z}:
78     I_z_p[z,0] = 0;
79
80 subject to rest12sss {z in Z}:
81     IT_z_p[z,0] = 0;
82
83 subject to rest12ssss {z in Z}:
84     P_z_p[z,0] = 0;
85
86 subject to rest13 {z in Z, p in P}:
87     P_z_p[z,p] = SV_p[p] - ITIV_z_p[z,p];
88
89 subject to rest14 {p in P}:
90     SV_p[p] <= SS*v_p[p];
91
92 subject to rest15 {p in P}:
93     SV_p[p] <= S;
94
95 subject to rest16 {p in P}:
96     SV_p[p] >= S - SS*(1-v_p[p]);
97
98 subject to rest17 {z in Z, p in P}:
99     ITIV_z_p[z,p] <= ITI*v_p[p];
100
101 subject to rest18 {z in Z, p in P}:
102     ITIV_z_p[z,p] <= ITI_z_p[z,p];
103
104 subject to rest19 {z in Z, p in P}:
105     ITIV_z_p[z,p] >= ITI_z_p[z,p] - ITI*(1-v_p[p]);
106
107 subject to rest20 {z in Z, p in P}:
108     ITI_z_p[z,p] = IT_z_p[z,p-1];

```

Figura 9.5.1: Código AMPL para la réplica del modelo de SP. Archivo .mod.

(Fuente: Elaboración Propia).

En la imagen es posible apreciar, a través de las descripciones que se adjuntan, la equivalencia de cada elemento con su correspondiente en la formulación de Cunha et al. (2017). Ahora bien, existen ciertas diferencias que es preciso clarificar. Particularmente, en los conjuntos, se encuentran dos elementos de los que carece el modelo original, los conjuntos cf y hp . Estos fueron creados aquí para indexar los parámetros C_F y h respectivamente, en orden de cambiar sus valores más rápidamente al momento de realizar los experimentos computacionales. De manera más explicativa, el parámetro C_F , por ejemplo, toma 4 valores distintos durante los experimentos y, en AMPL, debe construirse un vector en el que se indique el valor del parámetro para cada uno de los 42 períodos en el horizonte de evaluación. Al introducir el conjunto cf , lo que se logra es transformar el vector en una matriz, que ahora se presenta con una configuración en la que las filas representan los períodos, y las columnas representan los distintos valores que puede asumir el parámetro C_F . Así, para $cf = 2$, por ejemplo, se tendrá que $C_F = 50$ para los 42 períodos.

Finalmente, se puede advertir que la restricción 11 se encuentra como “comentario” en color verde. Esto significa que no está siendo considerada en el modelo. Sólo fue añadida al código en virtud de la exactitud, pero las restricciones de su linealización son las que realmente están siendo tomadas en consideración.