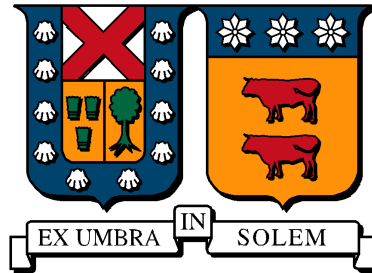


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA ELECTRÓNICA



# Efecto del ruido aditivo en la estabilidad de cuerda en pelotones con topología de comunicación de seguimiento al líder y al predecesor.

Tesis de grado presentada por  
**Fernando Sanhueza Toledo**

Como requisito parcial para optar al grado de  
**Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica**

Supervisor  
Francisco J. Vargas, Ph.D.

Valparaíso, 20 de Enero de 2025



UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
Departamento de Ingeniería Electrónica

# **Efecto del ruido aditivo en la estabilidad de cuerda en pelotones con topología de comunicación de seguimiento al líder y al predecesor.**

Tesis de grado presentada por  
**Fernando Sanhueza Toledo**

Como requisito parcial para optar al grado de  
**Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica**

Supervisor  
Francisco J. Vargas, Ph.D.

Valparaíso, 20 de Enero de 2025



Tesis:

**Efecto del ruido aditivo en la estabilidad de cuerda en pelotones con topología de comunicación de seguimiento al líder y al predecesor.**

Autor:

**Fernando Sanhueza Toledo**

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el grado de Magister en Ciencias de la Ingeniería Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile.

**Supervisor,**

Francisco J. Vargas, Ph.D.

---

**Co-Supervisor,**

Marco Gordon, Ph.D.

---

**Revisor Interno,**

Héctor Ramírez , Ph.D.

---

**Revisor Externo,**

Rodrigo A. González , Ph.D.

(Eindhoven University of Technology)

---

# Agradecimientos

Esta tesis no es de mi completa autoría. Es un trabajo conjunto de todas las personas que me buscaron ayudar de alguna u otra forma.

Hago especial énfasis en mi familia; mi madre, Johanna, que siempre estuvo dispuesta a orientarme y ayudarme, como buena madre que es, y que me motivó a seguir adelante aunque todo se haya puesto cuesta arriba, mi hermano, Nicolás, que es un modelo a seguir, un horizonte ético al que toda persona de bien debería considerar como un ejemplo y a mi perro, Расцўтин, quien siempre me recibe contento al llegar a casa. También no puedo ignorar los esfuerzos realizados por mis abuelos, tíos y primos para permitirme concluir esta etapa de mi desarrollo académico de una buena forma.

También, aprovecho de agradecer encarecidamente a mis tutores, que no solo comparten el gran impacto que lograron en mis estudios y metas de vida, sino que también el nombre de pila; Francisco García y Francisco Vargas, quienes me motivaron, orientaron y dieron medios para decidirme a estudiar Ingeniería Civil Electrónica en primera instancia, y luego decidirme a dar el salto al magister y la academia. En ambos no solo encuentro un mentor a quien consultar, sino un buen amigo en quien confiar. Sin lugar a duda, sin su apoyo, no tan solo esta tesis de grado no existiría, sino que posiblemente no me hubiera dedicado a esta área que tanto me motiva y alegra. Además de destacar el esfuerzo y apoyo otorgado por los profesores de Electrónica, quienes hicieron mi estadía como estudiante una excelente y enriquecedora experiencia, en especial a los profesores Héctor Ramírez, Marco Gordon, Juan Carlos Agüero, Juan Yuz y Ángel Cedeño (¡Prácticamente toda el área de control!).

Doy gracias a la Fundación Consorcio, y en especial a las gestiones de Isabel Romero, quienes no tan solo me ayudaron a financiar el viaje a mi primera conferencia en Yokohama, Japón, siendo una experiencia completamente enriquecedora, sino que me aportaron la educación básica y media, que me permitió abrirme paso hasta la universidad pese a las adversidades propias de mi ambiente.

Asimismo aprovecho de reconocer a mis amigos y compañeros, quienes siempre estuvieron dispuestos a discutir de alguna idea o simplemente pasar ratos de diversión y distraerse. En especial a mi amiga Cass, quién hizo el trabajo que Spotify no pudo hacer correctamente, y que, por lo tanto fue un factor fundamental en el proceso de escritura y revisión de la presente tesis y a mi amigo Miguel, quién se encargó de que no fallezca durante la duración de mi carrera.

# Contenido

<b>Resumen</b>	<b>iv</b>
<b>Símbolos y Acrónimos</b>	<b>v</b>
<b>Lista de Figuras</b>	<b>vii</b>
<b>1 Introducción</b>	<b>1</b>
1.1 Estado del arte . . . . .	3
1.2 Principales contribuciones . . . . .	5
1.3 Publicaciones asociadas . . . . .	5
1.4 Otras publicaciones desarrolladas . . . . .	6
1.5 Organización de la tesis . . . . .	6
<b>2 Herramientas y conceptos preliminares</b>	<b>8</b>
2.1 Notación . . . . .	8
2.1.1 Notación matricial . . . . .	8
2.1.2 Propiedades de interés . . . . .	9
2.1.3 Normas . . . . .	10
2.1.4 Sistemas lineales de tiempo discreto. . . . .	11
2.1.5 Sistemas y procesos estocásticos. . . . .	12
2.1.6 Estabilidad en el sentido cuadrático medio . . . . .	14
2.2 Sistema seguidor a predecesor y a líder determinístico con control por posiciones. . . . .	15
2.3 Nociones de estabilidad en cuerda. . . . .	18
2.3.1 Señales auxiliares de interés. . . . .	18
2.3.2 Análisis de estabilidad de cuerda en el esquema seguidor a predecesor y a líder con control por posiciones determinista. . . . .	18
2.3.3 Análisis de estabilidad de cuerda en el esquema seguidor a predecesor y a líder con control por velocidades determinista. . . . .	20
2.3.4 Definición de estabilidad de cuerda utilizando funciones de clase $\mathcal{K}$ . . . . .	21
2.4 Ejemplo de estabilidad de cuerda determinista. . . . .	22
2.5 Estabilidad en cuerda para pelotones estocásticos. . . . .	24
2.6 Estabilidad de cuerda en el sentido cuadrático medio para sistemas con seguimiento a predecesor con ruido coloreado . . . . .	25
<b>3 Definición del marco de trabajo.</b>	<b>34</b>

3.1	Esquema seguidor a predecesor y a líder con ruido aditivo para control por posición. . . . .	34
3.1.1	Lazo de control del primer seguidor $i = 1$ . . . . .	35
3.1.2	Lazo de control de los seguidores $i \in [2, N]$ . . . . .	36
3.1.3	Lazo de control del líder. . . . .	38
3.1.4	Representación de los lazos de control. . . . .	38
3.2	Esquema seguidor a predecesor y a líder con ruido aditivo para control por velocidad. . . . .	39
<b>4</b>	<b>Estabilidad de cuerda en sistemas con seguimiento a predecesor y a líder con control por posición.</b>	<b>42</b>
4.1	Descripción del sistema en variables auxiliares. . . . .	42
4.2	Análisis de convergencia temporal. . . . .	46
4.3	Análisis de convergencia en el número de vehículos. . . . .	48
4.4	Análisis de estabilidad en cuerda. . . . .	51
4.5	Resultados de simulación. . . . .	52
4.5.1	Con condiciones iniciales cero. . . . .	53
4.5.2	Con condiciones iniciales distintas a cero. . . . .	55
4.5.3	Consideraciones generales de las simulaciones. . . . .	59
4.6	Discusión respecto al estado del arte. . . . .	59
<b>5</b>	<b>Estabilidad de cuerda en sistemas con seguimiento a predecesor y a líder con control por velocidad.</b>	<b>61</b>
5.1	Deducción del sistema de control por velocidad. . . . .	61
5.2	Descripción del sistema en variables auxiliares. . . . .	63
5.3	Análisis de convergencia. . . . .	66
5.3.1	Análisis de convergencia temporal . . . . .	66
5.3.2	Análisis de convergencia en el número de vehículos. . . . .	67
5.4	Análisis de estabilidad en cuerda. . . . .	69
5.5	Método de diseño de controladores PI estables en cuerda. . . . .	70
5.6	Resultados de simulación. . . . .	70
<b>6</b>	<b>Discusión del diseño del lazo de control de pelotones con seguimiento a predecesor y al líder.</b>	<b>74</b>
6.1	Consideraciones de diseño de $T(z)$ en control por posiciones. . . . .	74
6.2	Diseño de $\eta$ para controlar la varianza de la señal de desempeño en control por posiciones. . . . .	75
6.2.1	Diseño de $\eta$ para minimizar la varianza del último vehículo $P_N$ . . . . .	75
6.2.2	Minimización de $P_w$ . . . . .	77
6.2.3	Ejemplo numérico por simulaciones. . . . .	78
6.2.4	Estrategia de $\eta$ dinámico . . . . .	78
6.3	Estrategias de obtención de la velocidad del líder. . . . .	81
<b>7</b>	<b>Conclusiones y trabajo futuro</b>	<b>84</b>
	<b>APÉNDICES</b>	<b>86</b>

A	Demostración del Lema 1 . . . . .	86
B	Demostración de (4.7) . . . . .	87
C	Demostración del Lema 2 . . . . .	88
D	Demostración del Teorema 3 . . . . .	90
E	Demostración de (4.16) . . . . .	96
F	Demostración del Corolario 1 . . . . .	96
G	Demostración del Teorema 4 . . . . .	98
H	Demostración del Lema 3 . . . . .	102
I	Demostración del Lema 4 . . . . .	104
J	Demostración del Teorema 5 . . . . .	105
K	Demostración del Corolario 2 . . . . .	110
L	Demostración de (5.28) . . . . .	110
M	Demostración del Corolario 3 . . . . .	111
N	Demostración del Teorema 7 . . . . .	112

<b>BIBLIOGRAFÍA</b>	<b>114</b>
---------------------	------------

# Resumen

La estabilidad de cuerda es una propiedad fundamental para la seguridad en la navegación de pelotones de vehículos autónomos. En la práctica, la presencia de fenómenos aleatorios, tales como pérdida temporal de comunicación entre vehículos y ruidos en los canales de comunicación, entre otros, puede afectar la navegación de los vehículos. Sin embargo, el estudio del efecto de estos fenómenos aleatorios en el desempeño de los sistemas de pelotones es escasa en la literatura actual. La presente tesis busca complementar el incipiente análisis de pelotones de vehículos autónomos afectados por fenómenos estocásticos, específicamente, estudiando el efecto de canales con ruido aditivo en pelotones con topología seguidor a predecesor y a líder. Para ello, se analiza un pelotón de vehículos modelados como sistemas lineales de tiempo discreto, con comunicación entre cada vehículo y su predecesor, y también con el vehículo líder del pelotón, y donde las comunicaciones tanto del predecesor como del líder están afectas por ruido blanco aditivo. Para el presente análisis se utilizan definiciones de estabilidad de cuerda adecuadas para la inclusión de señales estocásticas ya presentes en la literatura, y se adaptan al entorno de seguimiento a predecesor y a líder estudiado en este trabajo. De esta forma, la principal contribución de esta tesis yace en la obtención de condiciones necesarias y suficientes para estabilidad de cuerdas con comunicación sujeta a ruido aditivo para la topología de seguimiento a predecesor y a líder. Discusión y ejemplos numéricos complementan los resultados analíticos obtenidos.

**Palabras clave:** estabilidad en cuerda, sistemas multi-agente, estabilidad en sentido cuadrático medio, pelotón de vehículos, ruido aditivo, topología seguidor a predecesor y a líder.

# Símbolos y acrónimos

A continuación se presenta una lista de los símbolos y acrónimos más usados en la presente tesis. Aquellos símbolos y acrónimos que requieren una definición formal se detallan en la sección de notación dentro del capítulo 2, o en su defecto, al primer momento de ser utilizados.

a-wss	asintóticamente estacionario en sentido amplio
DARE	ecuación algebraica de Ricatti en tiempo discreto
GF	geometría de la formación
i.i.d.	independiente e idénticamente distribuido
ITC	intervalo de tiempo constante
LTI	lineal e invariante en el tiempo
PSD	densidad espectral de potencia
LPF	<i>Leader Predecessor Following</i> , Seguidor a predecesor y a líder.
PF	<i>Predecessor Following</i> , Seguidor a predecesor.
BIBO	<i>Bounded input, Bounded output</i> , Entrada acotada, salida acotada.
SISO	<i>Single input, single output</i> , Entrada de una variable, salida de una variable..
wss	estacionario en sentido amplio
$\triangleq$	igual por definición
$ \circ $	valor absoluto
$\in$	pertenencia a un conjunto
$\cup$	unión
$\mathbb{N}$	$\{1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{N}_0$	$\{0, 1, 2, 3, \dots\}$
$\mathbb{Z}$	$\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$
$\mathbb{R}$	números reales
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R} \times \dots \times \mathbb{R}$ ( $n$ veces)
$\mathbb{R}_{\geq 0}$	$\{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < \infty\}$
$I_n$	matriz identidad de dimensiones $n \times n$
$A^T$	transpuesta de la matriz $A$
$A^*$	conjugado transpuesto de la matriz $A$
$A \geq 0$	la matriz $A$ es positiva semi-definida
$A > 0$	la matriz $A$ es positiva definida
$diag\{a_1, \dots, a_n\}$	matriz diagonal que contiene a $\{a_1, \dots, a_n\}$ en su diagonal

$\rho(A)$	radio espectral de la matriz $A$
$\sigma_{max}(A)$	máximo valor singular de la matriz $A$
$\ x\ _p$	norma $p$ del vector $x \in \mathbb{R}^n$ con $p \in \mathbb{N}$
$\ x\ _\infty$	norma infinito del vector $x \in \mathbb{R}^n$
$\ x(k)\ _{\mathcal{L}_p}$	norma $\mathcal{L}_p$ de la señal vectorial en tiempo discreto $x(k) \in \mathbb{R}^n$
$\ x(k)\ _{\mathcal{L}_\infty}$	norma $\mathcal{L}$ -infinito de la señal vectorial en tiempo discreto $x(k) \in \mathbb{R}^n$
$\ A(k)\ _{\mathcal{L}_p}$	norma $\mathcal{L}_p$ de la matriz variante en el tiempo $A(k)$
$\ A(k)\ _{\mathcal{L}_\infty}$	norma $\mathcal{L}$ -infinito de la matriz variante en el tiempo $A(k)$
$z$	argumento de la transformada Z
$T(z)$	función de transferencia en tiempo discreto
$T(z)^H$	par Hermitiano de $T$ , es decir: $T(z^{-1})^\top$
$\ T(z)\ _\infty$	norma infinito del sistema $T(z)$
$\otimes$	producto de Kronecker
$vec\{\circ\}$	operador vector
$vec^{-1}\{\circ\}$	inversa del operador vector
$\mathcal{E}\{\circ\}$	operador esperanza
$\mu_x(k)$	media al instante $k$ del proceso $x$
$\mu_x$	media estacionaria del proceso $x$
$P_x(k)$	matriz de varianza del proceso $x$ al instante $k$
$P_x$	matriz de varianza estacionaria del proceso $x$
$R_x(k + \tau, k)$	función de covarianza del proceso $x$ al instante $k$
$R_x(\tau)$	función de covarianza estacionaria del proceso $x$
$\Omega_x(z)$	factor espectral del proceso $x$
$\phi_x(z)$	densidad espectral de potencia del proceso $x$
$\lim$	límite
$\max$	máximo
$\sup$	supremo
$\mathcal{R}$	conjunto de todas las funciones de transferencia racionales reales
$\mathcal{R}_p$	subconjunto de $\mathcal{R}$ de todas las funciones de transferencia propias
$\mathcal{RH}_\infty$	subconjunto de $\mathcal{R}_p$ de todas las funciones de transferencia estables

# Lista de Figuras

1.1 Resistencia aerodinámica. . . . .	2
2.1 Esquema seguidor a predecesor y a líder determinista. . . . .	15
2.2 Lazo de control interno para un seguidor en una topología con seguimiento a predecesor y a líder. . . . .	15
2.3 Concatenación de un pelotón determinístico con topología seguidor a predecesor y a líder. . . . .	20
2.4 Comparativa entre un pelotón estable en cuerda y un pelotón inestable en cuerda. . . . .	23
2.5 Lazo de control del vehículo $i$ -ésimo . . . . .	26
2.6 Estadísticas: (a) Caso estable en cuerda (primera fila). (b) Caso inestable en cuerda (segunda fila). . . . .	33
3.1 Esquema seguidor a predecesor y a líder. . . . .	35
3.2 Lazo de control para el primer seguidor. . . . .	36
3.3 Lazo de control reescrito para el primer seguidor. . . . .	36
3.4 Lazo de control para un agente dentro de un pelotón LPF con control por posiciones. . . . .	37
3.5 Lazo de control para un agente dentro de un pelotón LPF con control por velocidades. . . . .	40
4.1 Señales de interés de un pelotón con topología seguidor a predecesor y a líder con transmisión con ruido aditivo. Simulación realizada con condiciones iniciales iguales a cero y estable en cuerda. . . . .	54
4.2 Señales de interés de un pelotón con topología seguidor a predecesor y a líder con transmisión con ruido aditivo. Simulación realizada con condiciones iniciales iguales a cero e inestable en cuerda. . . . .	56
4.3 Señales de interés de un pelotón con topología seguidor a predecesor y a líder con transmisión con ruido aditivo. Simulación realizada con condiciones iniciales distintas a cero y estable en cuerda. . . . .	57
4.4 Señales de interés de un pelotón con topología seguidor a predecesor y a líder con transmisión con ruido aditivo. Simulación realizada con condiciones iniciales distintas a cero e inestable en cuerda. . . . .	58

5.1	Comportamiento de un pelotón con topología seguidor a predecesor y a líder afecto a ruido aditivo por transmisión, con control por velocidad. Simulación realizada con condiciones iniciales iguales a cero, con un pelotón estable en cuerda. . . . .	72
5.2	Comportamiento de un pelotón con topología seguidor a predecesor y a líder afecto a ruido aditivo por transmisión, con control por velocidad. Simulación realizada con condiciones iniciales iguales a cero, con un pelotón inestable en cuerda. . . . .	73
6.1	Compromiso al momento de seleccionar $\eta$ . . . . .	78
6.2	Evolución de las varianzas en función de $\eta$ . Varianzas con $\eta$ que minimiza $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N}$ . . . . .	79
6.3	Sistema de pelotón con seguimiento a predecesor y a líder con control por posiciones y $\eta$ dinámico . . . . .	80
6.4	Transmisión de dos momentos de posición del líder usando dos canales afectados a ruido aditivo. . . . .	82
6.5	Transmisión de la posición del líder y su posterior almacenamiento para la obtención de la velocidad. . . . .	82

## CAPÍTULO



---

---

## Introducción

Los recientes avances en tecnologías de conducción autónoma abren nuevas oportunidades y desafíos que deben ser considerados para la correcta y eficiente implementación de estas tecnologías. Entre estas tecnologías, el estudio de sistemas de pelotón, también conocido como *Platooning* en inglés, es considerado un tema relevante que promete revolucionar el transporte terrestre en las próximas décadas [1, 2, 3, 4, 5, 6]. Estos sistemas corresponden a un pelotón de vehículos autónomos que navegan de forma coordinada, comunicándose entre ellos de forma inalámbrica para compartir información relevante para esta tarea. El estudio de sistemas de pelotón, desde la perspectiva de la disciplina de Control Automático, busca diseñar sistemas de control que permita que los vehículos naveguen de forma fluida y segura mientras mantienen un espaciamiento entre vehículos deseado, usualmente tan pequeño como sea posible [7, 8, 6]. Los vehículos deben compartir información para realizar esta tarea, lo que requiere de la definición de una topología de comunicación entre vehículo. De esta forma, el estudio de pelotones puede entenderse como el estudio de sistemas multiagentes controlados sobre redes de comunicación con estructura definida [9]. Este tipo de sistemas se caracterizan porque están conformados por múltiples subsistemas que intercambian información para realizar una tarea específica.

La correcta implementación de un pelotón de vehículos autónomos permitirá mejorar la seguridad vial, la eficiencia energética y optimizar el uso de las rutas [10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 7, 17, 8, 18, 19]. Las ventajas respecto a la eficiencia energética están basadas principalmente en la reducción de la resistencia aerodinámica de los vehículos [20] al acercarlos entre sí [21, 22, 23], como se representa en la Figura 1.1. En este caso, se utiliza el término energía de forma genérica, puesto que puede representar alimentación desde una batería, consumo de combustible fósil o ambas en un pelotón. Esta optimización es capaz

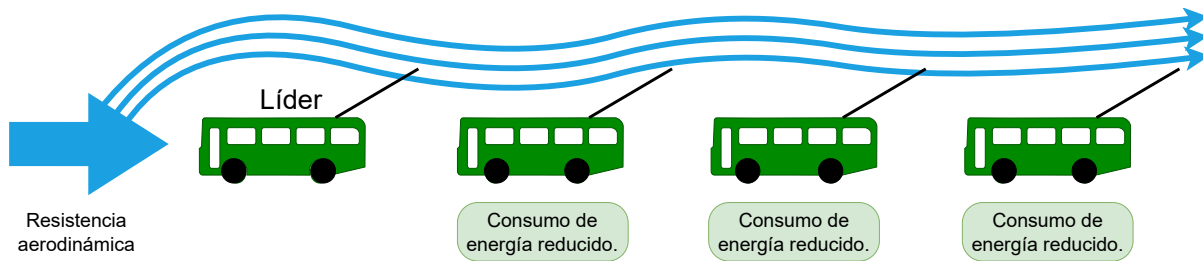


Figura 1.1: Resistencia aerodinámica.

de representar una revolución en el transporte por carretera en general y en la conducción autónoma en particular.

Asimismo, ya se han logrado implementaciones a escala real con resultados que proponen una reducción en la resistencia aerodinámica en los seguidores [24, 25], lo que se traduce en una menor energía requerida en el transporte. El estudio y eventual implementación de esquemas de pelotón está siendo un foco a nivel estatal en las mayores potencias globales, como el proyecto KONVOI en Alemania, el proyecto Chauffeur en la Unión Europea, el programa PATH en Estados Unidos y el proyecto Energy ITS en Japón [26, 27, 7, 28, 29], mientras que los principales actores privados han puesto sus miras en implementar sistemas de pelotón en sus productos, como Volvo o Scania [30, 31]. Estas implementaciones van de la mano de las recientes innovaciones en la implementación de sistemas autónomos de conducción y la incorporación de sensores a bordo, como GPS, LiDAR, sensores ultrasónicos e infrarrojos, llegando a incluso cámaras con detección de elementos en el ambiente [32, 33]; que permiten al vehículo conocer su ambiente; posición, velocidad, aceleración, distancias relativas y eventuales obstáculos. Esta información puede ser transmitida mediante canales inalámbricos a un servidor central o, más relevante en el caso de sistemas de pelotón, otros vehículos. El indudable avance en el poder de cómputo permiten que los sistemas de conducción autónoma a bordo sean cada vez más eficaces e independientes de la acción humana; además de permitir procesar los datos recibidos por los sistemas de sensado de forma eficiente y veloz.

Esta coordinación a través de compartir información entre miembros del pelotón le hace formar un ecosistema, en donde se pueden tomar decisiones de forma cooperativa y así lograr un desempeño correcto tanto individualmente como en el conjunto. Incluso, es posible traducir estos beneficios para el conjunto en forma de un retorno monetario para los vehículos que aporten a un pelotón [31].

Los desafíos a superar por un esquema de control para un sistema de pelotón son más complejos a medida que se consideran más factores, tanto ambientales como respecto a la comunicación y modelado matemático de cada vehículo. En particular, el desafío de pelotón a resolver en el presente trabajo es en una única dimensión espacial, existiendo trabajos que

también consideran dos dimensiones [34, 35], donde se estudian las dinámicas del pelotón en curvas o eventuales cambios de carril. De esta manera, la distancia longitudinal entre dos vehículos debe ser la deseada mientras se conserva una velocidad constante.

El rechazo de eventuales perturbaciones, como cambios de velocidad producto de un obstáculo a lo largo del pelotón es parte de una noción de estabilidad conocida como *estabilidad de cuerda* [5, 6, 36, 37]. En un sistema estable en cuerda, los errores transientes producto de perturbaciones se propagan hacia los vehículos de más atrás, pero reduciendo su amplitud. Por el contrario, los errores en un sistema inestable en cuerda van amplificándose mientras se propagan a lo largo del pelotón de vehículos. La estabilidad de cuerda es fundamental para evitar eventuales colisiones producto del sistema de control en sí, por lo que se utiliza como medida de seguridad. La estabilidad de cuerdas no debe ser confundida con la estabilidad interna o la estabilidad entrada acotada-salida acotada (BIBO) en el tiempo. Un sistema de peloton estable internamente asegura que el error se disipe en el tiempo, y un sistema estable en cuerdas asegura que los errores se disipen también cuando el número de vehículos crece, a la vez que se mantienen acotadas usando ciertas métricas. Matemáticamente hablando, la noción de estabilidad de cuerda se ha definido de variadas formas, existiendo definiciones tanto en el tiempo como en la frecuencia, y para sistemas lineales y no lineales [5]. La estabilidad de cuerdas está ampliamente estudiada en entornos deterministas [5, 6, 36, 37], es decir, cuándo es posible conocer *a priori* las señales involucradas con completa certeza. Definiciones útiles para entornos estocásticos, es decir, cuándo las señales involucradas se ven afectadas por uno o más fenómenos aleatorios, son escasas. Una definición reciente y suficientemente general ha sido propuesta en [38].

## 1.1 Estado del arte

El estudio de sistemas de pelotón es un tópico ya asentado, siendo estudiado desde mediados del siglo pasado [39, 37, 40] y ha surgido una alta variedad de estudios, lo que conlleva a la natural necesidad de clasificarlos.

Los esquemas de pelotón son clasificados, principalmente, por su topología de comunicación, tipo de modelo para los vehículos, dominio temporal y topología de comunicación [5, 6, 41], entre otros criterios.

Por topología de comunicación (o topología de flujo de información) se entiende a la disponibilidad de información relacionada a otros vehículos, siendo la topología Seguidor a predecesor, *Predecessor Follower* (PF), en la cuál se comparte información al vehículo seguidor inmediato, la más común y una de las más simples [42, 5, 43]. Otras topologías relevantes son Bidireccional, *Bidirectional* (BD), en dónde se comparte información al vehículo seguidor inmediato y al predecesor inmediato [44, 45], Seguidor a líder *Leader Follower* (LF) [46] y Seguidor a predecesor y a líder, *Leader Predecessor Follower* (o *Predecessor-Leader Following*)

(LPF) [47, 48, 49, 39, 50]. La topología de comunicación también permite clasificar sistemas por los datos transmitidos, que corresponden a la variable física, por ejemplo, velocidad y posición transmitida por cada vehículo y utilizada en la elección de una acción de control. Hay trabajos que incluyen la interconexión de más de una topología de flujo de información, que se denominan pelotones mixtos [51].

Los modelos de los vehículos (o dinámica de nodos) se clasifican en lineales [42] y no-lineales [52, 20], en función del cumplimiento de propiedades de superposición y homogeneidad en sus modelos; y si éstos son iguales en todos los agentes se habla de un pelotón homogéneo y de no ser iguales, de un pelotón heterogéneo.

Los sistemas involucrados pueden ser descritos en el dominio temporal [53, 44] o de la frecuencia [54], ya sea de tiempo continuo [55, 44] o discreto [53]. La elección de cierto dominio establece los criterios que debe satisfacer el sistema de control para cada situación. Las clasificaciones, y trabajos notables asociados a cada tipo, son comunes en trabajos del tipo estudio (*survey*), como [5, 56, 6, 41], que se encargan de catalogar el estado del arte en sistemas de pelotón.

En particular, este trabajo puede ser clasificado como un esquema seguidor a predecesor y a líder (*Leader Predecessor Follower*) lineal de tiempo discreto y, debido a como se modela su comunicación, estocástico, ya que se busca estudiar el efecto que posee un ruido aditivo en las comunicaciones entre el líder y el predecesor sobre un vehículo dado. El estudio considerando ruido aditivo es relativamente nuevo, y sólo existen resultados para esquemas bajo topología seguidor a predecesor (*Predecessor Follower*), en donde se demuestra que las condiciones para estabilidad de cuerdas son iguales en entornos deterministas y afectos a ruido aditivo, ya sea blanco [38] o coloreado [57].

La elección del marco de trabajo en tiempo discreto está basada en la abundancia de controladores digitales, que pertenecen al tiempo discreto en la actualidad y la simpleza del manejo de señales aleatorias de tiempo discreto. Sin embargo, la revisión bibliográfica apunta que no existen trabajos publicados en relación a implementaciones del tipo Seguidor a predecesor y a líder en tiempo discreto en el dominio de la frecuencia, pero sí se ha abordado este tipo de problemas usando control predictivo (MPC) [58, 34, 59, 50], en entornos deterministas.

Dentro de la implementación de esquemas de pelotón está el efecto de los canales de comunicación, puesto que están afectos a fenómenos aleatorios. Éstos pueden modelar la incertidumbre producto del canal de comunicación como un retardo aleatorio en la transmisión [60, 61, 62, 63, 43], como pérdida de datos [64, 65, 66, 53, 67, 68, 19] o como el ya mencionado ruido aditivo [69, 38, 57, 59]. Pese a existir bastantes trabajos basados en fenómenos aleatorios, aún no existe consenso de cómo definir y asegurar estabilidad de cuerdas en este tipo de entornos; existiendo trabajos parciales respecto a este tópico o sólo resultados numéricos [70, 65, 61, 71, 72]. Algunos trabajos que buscan establecer

éstos criterios son [62, 38], basados en los segundos momentos de las señales de interés, asociadas al error de seguimiento. En particular, se busca trabajar a partir los resultados de [73, 38], que propone el concepto de estabilidad de cuerdas en el sentido cuadrático medio (*Mean square string stability*).

De esta forma la presente tesis busca proponer un esquema de control para una situación de un esquema de pelotón con comunicación de seguimiento al predecesor y al líder, bajo la condición de que cada transmisión de datos se encuentra afectada por ruidos aditivos y por lo tanto, se deben proponer criterios que aseguren que es posible satisfacer condiciones de estabilidad de cuerdas en el sentido cuadrático medio.

Adicionalmente, se proponen estudios relacionados a las métricas de desempeño que permitan comprender el cómo manipular el lazo de control para obtener un comportamiento deseable. Estos estudios contemplan la elección de controlar por una u otra variable física, y el cómo estas son transmitidas para conseguir el mejor desempeño.

## 1.2 Principales contribuciones

En este trabajo se estudia la estabilidad de cuerda en pelotones en presencia de ruido aditivo. Las principales contribuciones de esta tesis son:

- Se obtienen condiciones necesarias y suficientes para estabilidad de cuerda en pelotones con topología de seguidor a predecesor y a líder, considerando canales de comunicación afectados por ruido blanco aditivo. Para ello se utiliza el concepto de estabilidad de cuerda propuesto en [38]. Dichas condiciones se obtienen para dos escenarios: cuando se considera control basado en posición, y cuando se considera control basado en velocidad.
- Para el caso de control de posición, se obtienen expresiones analíticas para la máxima varianza estacionaria de los errores de seguimiento del pelotón. Esta varianza limita la varianza de los errores de estimación de todos los vehículos en el pelotón. Por lo tanto, esta expresión abre el camino para diseñar controladores de mínima varianza, lo que está propuesto como trabajo futuro.
- Se proponen y discuten consideraciones adicionales para el diseño del lazo de control, con el objetivo de mejorar el desempeño del pelotón de vehículos, manteniendo la propiedad de estabilidad de cuerda.

## 1.3 Publicaciones asociadas

Los trabajos realizados asociados a esta tesis son:

1. **Título del artículo:** Convergence Analysis for Platooning Over Coloured Additive Noise Channels

**Autores:** Fernando Sanhueza, Marco Gordon, Alejandro I. Maass , Andrés Peters, Francisco Vargas.

**Publicado en:** Conferencia IEEE 2024: 2024 European Control Conference (ECC).

## 1.4 Otras publicaciones desarrolladas

Los trabajos realizados durante los estudios de postgrado, no asociados a esta tesis son:

1. **Título del artículo:** Micro-Channel Level Estimation Utilizing Non-Linear Filtering Methods

**Autores:** Luis Severino, Fernando Sanhueza, Ignacio Acosta, Francisco Vargas, Marco Gordon, Àngel Cedeño

**Publicado en:** Conferencia IEEE 2024: XXVI Congress of the Chilean Association of Automatic Control.

2. **Título del artículo:** Exploring LQI Control in Sampled-Data Systems: A Numerical Study for First-Order Systems

**Autores:** Luis Severino, Fernando Sanhueza, Andrés Peters, Francisco Vargas.

**Publicado en:** Conferencia IEEE 2024: ANDESCON 2024.

3. **Título del artículo:** LQI Control of a Self Balancing Robot: A Numerical Study of the Impact of the Integral Approximation.

**Autores:** Luis Severino, Fernando Sanhueza, Andrés Peters, Francisco Vargas.

**Publicado en:** Conferencia IEEE 2023: 2023 IEEE CHILEAN Conference on Electrical, Electronics Engineering, Information and Communication Technologies.

4. **Título del artículo:** Port Hamiltonian based model for platooning applications including air drag effects

**Autores:** Fernando Sanhueza, Francisco Vargas, Héctor Ramírez, Andrés Peters.

**Publicado en:** Conferencia IFAC 2023: 22nd IFAC World Congress.

## 1.5 Organización de la tesis

Este trabajo se estructura en capítulos, cada uno enfocado en cumplir los siguientes objetivos:

- El capítulo 2 presenta las herramientas fundamentales utilizadas a lo largo de la tesis, incluyendo la notación adoptada, las definiciones de estabilidad de cuerdas en entornos deterministas y estocásticos, y un ejemplo ilustrativo que abarca tanto estabilidad como inestabilidad de cuerdas en un sistema determinista.
- El capítulo 3 plantea los esquemas principales que se abordan en esta tesis, junto con las suposiciones consideradas en su desarrollo.
- El capítulo 4 propone condiciones de convergencia y enuncia las condiciones de estabilidad de cuerda para el sistema propuesto en el capítulo 3 con control por posiciones. Estas condiciones de convergencia son probadas mediante simulaciones.
- El capítulo 5 extiende el análisis realizado en el capítulo 4 para una modificación del lazo de control: en vez de controlar respecto a la posición del líder se controla con respecto a su velocidad, utilizando el esquema propuesto en el capítulo 3 con control por velocidad-
- El capítulo 6 aporta herramientas que permiten mejorar el desempeño de los sistemas expuestos en el capítulo 4 y 5 a partir de distintas consideraciones, tales como la minimización de la varianza asociada a los errores de seguimiento o la obtención con menor varianza de la velocidad del líder.
- El capítulo 7 concluye en relación al trabajo expuesto y propone trabajos futuros relacionados.

## CAPÍTULO

## 2

---



---

**Herramientas y conceptos preliminares**

En este capítulo se introducen las principales herramientas utilizadas en esta tesis, incluyendo la notación adoptada, antecedentes de pelotones de vehículos en entornos deterministas, y resultados previos sobre estabilidad de cuerdas.

Además, se desarrolla un ejemplo que ilustra un sistema con estabilidad e inestabilidad de cuerdas, con el propósito de validar las definiciones propuestas y facilitar al lector la comprensión empírica de este concepto.

## 2.1 Notación

### 2.1.1 Notación matricial

Sea  $M \in \mathbb{C}^{n \times n}$  y  $L \in \mathbb{C}^{n \times m}$  matrices complejas, de dimensiones  $n$  y  $m$  arbitrarias.

Se define a la operación radio espectral como  $\rho(\circ)$ . El  $i$ -ésimo valor singular de una matriz se denota como  $\sigma_i(L)$  y su mayor valor singular se denota como  $\sigma_{max}(L)$ .

Se denota a la matriz transpuesta de  $M$  como  $M^T$ . El par hermitiano de  $M$  es expresado como  $M^H$ , esta operación en el dominio de la frecuencia corresponde a  $M(z)^H = M(z^{-1})^T$

La operación de vectorización es definida sobre una matriz  $L \in \mathbb{R}^{n \times m}$ . Con  $L_{d_a, d_b} \in \mathbb{R}$  el  $(d_a, d_b)$  elemento de  $L$ .

$$\text{vec}(L) = [L_{1,1}, \dots, L_{m,1}, L_{1,2}, \dots, L_{m,2}, L_{1,n}, \dots, L_{m,n}]^T$$

Sea  $\vec{v} = \text{vec}(L) \in \mathbb{R}^{m \times n}$ . Suponiendo que se conocen las dimensiones originales de  $L$ , es

posible reconstruir  $L$  con la operación inversa  $\text{vec}^{-1}$ :

$$\text{vec}^{-1}(\vec{v}) = (\text{vec}(I_n)^T \otimes I_m)(I_n \otimes \vec{v}) = L$$

Con  $I_n$  como la matriz identidad de tamaño  $n$  y  $\otimes$  representando al producto de Kronecker, que se define a continuación.

### Producto de Kronecker

Sean las matrices  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  y  $B \in \mathbb{R}^{p \times q}$ . Su producto de Kronecker  $A \otimes B \in \mathbb{R}^{np \times nq}$  se define como:

$$A \otimes B \triangleq \begin{bmatrix} a_{1,1}B & \dots & a_{1,n}B \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m,1}B & \dots & a_{m,n}B \end{bmatrix}$$

Con  $a_{m,n} \in \mathbb{R}$  el  $(m, n)$  elemento de  $A$ . Las propiedades más relevantes del producto de Kronecker son:

- Sean  $A, B, C, D$  matrices de dimensiones apropiadas, de manera que sea posible definir los productos  $BD$  y  $AC$ ; entonces se cumple:

$$(A \otimes B)(C \otimes D) = (AC) \otimes (BD) \quad (2.1)$$

- Sean  $A, X, B$  matrices de dimensiones apropiadas, tales que exista el producto  $AXB$ . Entonces:

$$\text{vec}(AXB) = (B^T \otimes A)\text{vec}(X) \quad (2.2)$$

- Sea  $A$  una matriz cuadrada, entonces  $\rho(A \otimes A) = \rho(A)\rho(A)$

### 2.1.2 Propiedades de interés

Se explotan las siguientes propiedades demostradas en [74].

- Sea  $M$  una matriz simétrica positiva semi definida y  $x$  un vector columna. Se cumple:

$$x^T M x \leq \rho(M)x^T x \quad (2.3)$$

- Sea  $M$  una matriz simétrica positiva semi definida:

$$\sigma_{\max}(M) = \rho(M) \quad (2.4)$$

### 2.1.3 Normas

Se definen las siguientes normas a utilizar:

- Sea  $x \in \mathbb{R}^n$  un vector, donde el  $i$ -ésimo elemento de  $x$  se denota como  $x(i)$ . Su norma  $\|x\|_p$ , con  $p \in \mathbb{N}$  y su norma  $\|x\|_\infty$  se definen como:

$$\|x\|_p \triangleq \left( \sum_{i=1}^n |x(i)|^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_\infty \triangleq \max_i |x(i)|$$

- Sea  $x(k) \in \mathbb{R}^n$  una señal en tiempo discreto, donde  $x(k)$  denota a un vector  $x$  al instante  $k \in \mathbb{N}_0$ . Su norma  $\|x\|_{\mathcal{L}_p}$ , con  $p \in \mathbb{N}$  y su norma  $\|x\|_{\mathcal{L}_\infty}$  se definen como

$$\|x\|_{\mathcal{L}_p} \triangleq \left( \sum_{k=0}^{\infty} \|x(k)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|x\|_{\mathcal{L}_\infty} \triangleq \sup_k \|x(k)\|_\infty$$

- Sea  $X \in \mathbb{R}^{n \times n}$  una matriz constante, simétrica y positiva semi-definida, se definen la norma Schatten [74]  $\|X\|_p$ , con  $p \in \mathbb{N}$  y la norma  $\|X\|_\infty$  como

$$\|X\|_p \triangleq \left( \sum_{i=1}^n \sigma_i(X)^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|X\|_\infty \triangleq \sigma_{max}(X)$$

- Sea  $X(k)$  una matriz variante en el tiempo, con  $k \in \mathbb{N}_0$ , su norma  $\|X\|_{\mathcal{L}_p}$ , con  $p \in \mathbb{N}$  y su norma  $\|X\|_{\mathcal{L}_\infty}$  se definen como:

$$\|X\|_{\mathcal{L}_p} \triangleq \left( \sum_{k=0}^{\infty} \|X(k)\|_p^p \right)^{\frac{1}{p}}, \quad \|X\|_{\mathcal{L}_\infty} \triangleq \sup_k \|X(k)\|_\infty$$

Se denomina espacio normado  $\mathcal{V}$  a un espacio vectorial en el que se ha definido una norma, la cual permite calcular magnitudes asociadas a los vectores que lo componen, siguiendo las propiedades establecidas para dichas normas. Como propiedad más relevante para este trabajo, asociada a los espacios nombrados, se enuncia la desigualdad triangular.

**Teorema 1** (Desigualdad triangular). [75]

Sean  $u, v \in \mathcal{V}$ . Por lo tanto, se cumple:

$$\|u + v\| \leq \|u\| + \|v\| \tag{2.5}$$

Esta desigualdad se convierte en una igualdad si y solo si  $u$  y  $v$  son múltiplos no negativos entre sí.

### 2.1.4 Sistemas lineales de tiempo discreto.

En este trabajo las señales están definidas en un entorno de tiempo discreto, definidos en los instantes  $k \in \mathbb{N}^0$ . Si las señales se definen en el dominio temporal, éstas van acompañadas del argumento  $[k]$ , si estas se describen en el dominio de la frecuencia usando la transformada  $\mathbb{Z}$ , estas señales se representan con mayúsculas y acompañadas del argumento  $(z)$ .

Las variables aleatorias se escriben en negrita en el dominio del tiempo. También se utiliza el superíndice tilde  $\tilde{\circ}$  para identificar variables aleatorias.

La letra  $q$  corresponde al operador de adelanto, es decir, que representa  $q \cdot s(k) = s(k + 1)$ . Se define a un sistema estrictamente propio como aquél con un grado de adelanto superior en las salidas respecto a las entradas en la ecuación recursiva del sistema (ERS) y como un sistema bipropio a aquel que tanto las entradas como las salidas poseen el mismo grado de adelanto. En el dominio de la frecuencia, se puede apreciar esta diferencia como el grado relativo de la función de transferencia de dicho sistema. Un sistema impropio no cumple ninguna de las condiciones descritas y no es físicamente realizable.

Los sistemas estudiados en este trabajo se asumen lineales e invariantes en el tiempo (LTI), lo que implica que cumplen las propiedades de homogeneidad y superposición. La homogeneidad indica que si un sistema genera una salida dada ante una entrada específica, entonces, al escalar dicha entrada, la salida también se escala en la misma proporción. Por otro lado, la superposición establece que la salida total de un sistema ante múltiples estímulos puede expresarse como la suma de las salidas individuales correspondientes a cada estímulo.

Si este tipo de sistemas posee una respuesta impulso denotada por  $h(k)$  y función de transferencia  $H(z)$ , su entrada  $u(k)$  pudiendo ser un proceso estocástico (o no), la salida  $y(k)$  producto de dicho estímulo está definida como  $y(k) = h(k) * u(k)$ , con  $*$  como la convolución. Una variante simplificada de dicha notación a utilizar en la presente tesis, la salida es planteada como  $y = Hu$ .

Al ser multiplicado un sistema  $H(z)$  con su par hermitiano  $H(z)^H$  se obtiene la magnitud de este sistema al cuadrado  $H(z)H(z)^H = |H(z)|^2$ .

La representación en espacio de estados de un sistema es expresada a partir de la notación  $G(z) = (A, B, C, D)$ .

Se define como una función de clase  $\mathcal{K}$  como una función matemática  $\gamma$  que en el dominio  $\mathbb{R}_{\geq 0} \triangleq [0, \infty)$ , cumple  $\gamma : \mathbb{R}_{\geq 0} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}$ , siendo  $\gamma$  continua, estrictamente creciente y con raíz en cero.

**Teorema 2.** Propuesto en [76]. Considere un sistema  $G(z) = (A, B, C, D) \in \mathcal{RH}_\infty$  es una realización mínima y  $\gamma > \|G(z)\|_\infty$ . Entonces existe una matriz de transferencia  $M(z) \in \mathcal{RH}_\infty$  tal que cumple  $M^H M = \gamma I - G^H G$  y  $M^{-1} \in \mathcal{RH}_\infty$ . Una realización particular de  $M$  está dada por:

$$M = (A, B, -R^{1/2}F, R^{1/2})$$

Donde:

$$\begin{aligned} R_D &= \gamma^2 I - D^T D \\ R &= R_D + B^T X B \\ F &= -(R_D + B^T X B)^{-1} (B^T X A - D^T C) \end{aligned}$$

Con  $X = X^T$ , solución estabilizante a la ecuación de Ricatti de tiempo discreto (DARE):

$$\begin{aligned} (A + BR_D^{-1}D^T C)^T X (A + BR_D^{-1}D^T C) - X - C^T (I + DR_D^{-1}D^T) C \\ - (A + BR_D^{-1}D^T C)^T X B (R_D + B^T X B)^{-1} B^T X (A + BR_D^{-1}D^T C) = 0 \end{aligned}$$

### 2.1.5 Sistemas y procesos estocásticos.

Sean  $\mathbf{x}(k)$  e  $\mathbf{y}(k)$ , dos procesos aleatorios en tiempo discreto, es decir, son señales conformadas por variables aleatorias con una función de densidad de probabilidad bien definida. Esta señal puede caracterizarse por las siguientes métricas:

- La media de  $\mathbf{x}(k)$  es expresada por  $\mu_{\mathbf{x}}(k)$  está definida como  $\mu_{\mathbf{x}}(k) \triangleq \mathcal{E} \{x(k)\}$ , con  $\mathcal{E} \{\circ\}$  como el operador esperanza.
- La matriz de varianza de  $\mathbf{x}(k)$  es expresada como  $P_{\mathbf{x}}(k)$ , que representa a  $P_{\mathbf{x}}(k) \triangleq \mathcal{E} \{(\mathbf{x}(k) - \mu_{\mathbf{x}}(k))(\mathbf{x}(k) - \mu_{\mathbf{x}}(k))^T\}$ . Esta matriz es simétrica y semi-definida positiva.
- La matriz de segundo momento de  $\mathbf{x}(k)$ , expresada como  $Q_{\mathbf{x}}(k)$  se define como  $Q_{\mathbf{x}}(k) \triangleq \mathcal{E} \{\mathbf{x}(k)\mathbf{x}(k)^T\}$ . El segundo momento se relaciona a la media y a la varianza a partir de  $Q_{\mathbf{x}}(k) = P_{\mathbf{x}}(k) + \mu_{\mathbf{x}}(k)\mu_{\mathbf{x}}(k)^T$ . Naturalmente, si la media del proceso estudiado es cero, el segundo momento y la varianza son numéricamente iguales.
- La función de covarianza de  $\mathbf{x}(k)$  es expresada como  $R_{\mathbf{x}}(k + \tau, k)$ , considerando  $\forall \tau \in \mathbb{N}_0$ , definida como  $R_{\mathbf{x}}(k + \tau) \triangleq \mathcal{E} \{(\mathbf{x}(k + \tau) - \mu_{\mathbf{x}}(k + \tau))(\mathbf{x}(k) - \mu_{\mathbf{x}}(k))^T\}$ . Se cumple  $R_{\mathbf{x}}(k, k) = P_{\mathbf{x}}(k)$ .
- La función de covarianza cruzada entre las dos señales  $\mathbf{x}(k)$  e  $\mathbf{y}(k)$  es expresada como  $R_{\mathbf{x}\mathbf{y}}(k_1, k_2) \triangleq \mathcal{E} \{(\mathbf{x}(k_1) - \mu_{\mathbf{x}}(k_1))(\mathbf{y}(k_2) - \mu_{\mathbf{y}}(k_2))^T\}$ .

Los procesos aleatorios pueden ser clasificados a partir de los siguientes criterios.

- Si dos procesos aleatorios  $x(k)$  e  $y(k)$  cumplen  $R_{xy}(k_1, k_2) = 0 \quad \forall k_1, k_2 \in \mathbb{N}_0$ , se dice que no están correlacionados.
- Un proceso estocástico  $x(k)$  se dice independiente e idénticamente distribuido (*i.i.d*) s y sólo si es una secuencia de variables aleatorias independientes e idénticamente distribuidas. Esta relación puede ser extendida a un conjunto de señales aleatorias, pasando a referirse a un conjunto *i.i.d*.
- Un proceso estocástico  $x(k)$  se define como uno de segundo orden si su media  $\mu_x(k)$  y su matriz de segundo momento  $Q_x(k)$  están definidos y son finitos en todo  $k \in \mathbb{N}_0$ .

Un proceso de segundo orden  $x(k)$  se clasifica como estacionario en sentido amplio (*wss*) sí y solo sí su media  $\mu_x(k)$  es constante  $\forall k \in \mathbb{Z}$  y su función de covarianza  $R_x(k + \tau, k)$  es una función de  $\tau$  solamente,  $\forall k, \tau \in \mathbb{Z}$ . Un proceso es asintóticamente estacionario (*a-wss*) si posee media y varianza estacionaria pasado un intervalo considerable de muestras; es decir, son aquellos procesos que cumplen:

$$\mu_x \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_x(k) \quad P_x \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} P_x(k) \quad R_x(\tau) \triangleq \lim_{k \rightarrow \infty} R_x(k + \tau, k)$$

- Un proceso estocástico  $x(k)$  se dice una secuencia estacionaria de ruido blanco si es una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas, que poseen la misma media y matriz de varianza. Es decir  $R_x(k + \tau, k) = 0 \quad \forall \tau \neq 0, k \in \mathbb{N}_0$ .

Es posible aplicar conceptos de análisis de sistemas lineales sobre procesos aleatorios de segundo orden. Entre estos conceptos, destaca la obtención de la *Densidad espectral de potencia* y la factorización espectral.

Para un proceso  $x(k)$  de segundo orden y *a-wss*, definido completamente en  $k \in \mathbb{N}_0$ , su densidad espectral de potencia es  $\phi_x(z)$ , definida a partir de:

$$\phi_x(z) = \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} \bar{R}_x(\tau) z^{-\tau}, \quad \text{Donde } \bar{R}_x(\tau) = \begin{cases} R_x(\tau) & \text{si } \tau \geq 0 \\ R_x(-\tau)^T & \text{si } \tau < 0 \end{cases}$$

La expresión de  $\phi_x(z)$  está bien definida en el círculo unitario. La densidad espectral de potencia también puede ser expresada como:

$$\phi_x(z) = \left[ \sum_{\tau=1}^{\infty} R_x(\tau) z^{-\tau} \right]^H + \sum_{\tau=1}^{\infty} R_x(\tau) z^{-\tau} + R_x(0)$$

La densidad espectral de potencia posee las siguientes propiedades:

- $P_x = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_x(e^{j\omega}) d\omega$ .
- Si  $\mathbf{x}(k)$  es de tipo wss con densidad espectral de potencia racional y de rango normal completo, se cumple  $\phi_x(z) = \Omega_x(z)\Omega_x(z)^H$ , con  $\Omega_x(z)$  como el factor espectral del proceso  $\mathbf{x}(k)$ .

### 2.1.6 Estabilidad en el sentido cuadrático medio

Sea un sistema lineal e invariante en el tiempo discreto, representado en espacio de estados:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k+1) &= A\mathbf{x}(k) + B\mathbf{u}(k), & \forall k \in \mathbb{N}_0, \text{ con } \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \\ \mathbf{y}(k) &= C\mathbf{x}(k) + D\mathbf{u}(k) \end{aligned} \quad (2.6)$$

Con  $A, B, C, D$  como las matrices de la representación de espacio de estados, que cumplen  $H(z) = C(zI - A)^{-1}B + D$ , con  $H(z)$  la función de transferencia de un sistema dado. De esta forma,  $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n_x}$  es el estado del sistema,  $\mathbf{x}_0$  es el estado inicial del sistema,  $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n_u}$  un vector de entradas exógenas al sistema e  $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{n_y}$  como la salida del sistema.

**Suposición 1.** Respecto a la representación genérica de (2.6):

1. El estado inicial  $\mathbf{x}_0$  es una variable aleatoria de segundo orden con media  $\mu_{x_0}$  y matriz de varianza  $P_{x_0}$ .
2. La entrada  $\mathbf{u}(k)$  es un proceso blanco de segundo orden cuyas media y varianza son  $u_u$  y  $P_w$  respectivamente.
3. El estado inicial  $\mathbf{x}_0$  no está correlacionado con la entrada  $\mathbf{u}(k)$ .

**Definición 1.** En relación al sistema de (2.6), es posible clasificarlo como un sistema estable en el sentido cuadrático medio si, al cumplirse la suposición 1, existen  $u_x \in \mathbb{R}^{n_x}$  y  $P_x \in \mathbb{R}^{n_x \times n_x}$ ,  $P_x \geq 0$ , ambos finitos e independientes de los momentos de la condición inicial, tales que:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E} \{ \mathbf{x}(k) \} = \mu_x \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \mathcal{E} \{ (\mathbf{x}(k) - \mu_x(k))(\mathbf{x}(k) - \mu_x(k))^T \} = P_x \quad (2.7)$$

El cumplimiento de (2.7) está condicionado a que  $\mathbf{u}$  sea de segundo orden y que la matriz  $A$  de un sistema representado como (2.6) posea todos sus autovalores dentro del círculo unitario.

La estabilidad en sentido cuadrático medio de la definición 1 es un homólogo a la estabilidad exponencial en el sentido de Lyapunov en sistemas deterministas; y por ende garantiza

que los estados (Y por lo tanto, la salida) del sistema converjan a variables aleatorias con momentos definidos y finitos.

## 2.2 Sistema seguidor a predecesor y a líder determinístico con control por posiciones.

Un esquema de seguidor a predecesor y a líder puede ser descrito a partir de la Figura 2.1, esto permite realizar control por posición; considerando que los vehículos se mueven a una velocidad constante y las flechas coloreadas en la figura representan transmisión de información.

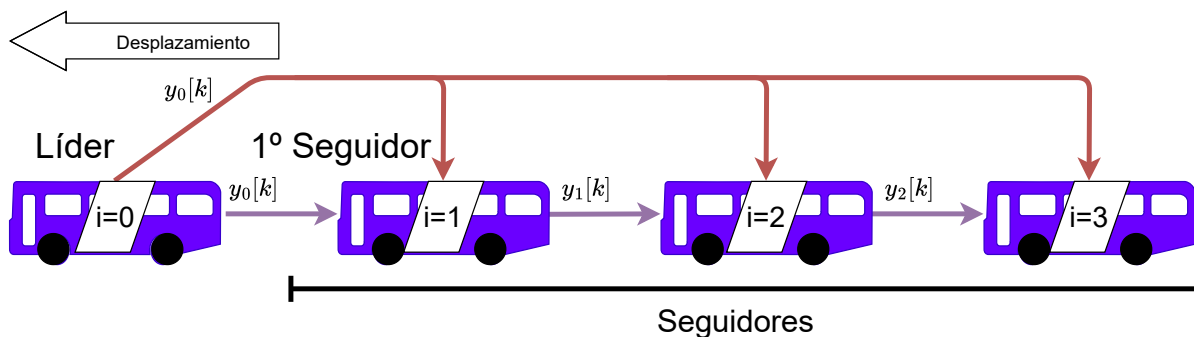


Figura 2.1: Esquema seguidor a predecesor y a líder determinista.

Para este trabajo, se asume que los vehículos seguidores poseen el mismo modelo interno; por lo que internamente poseen el mismo lazo de control, expresado en la Figura 2.2, con la misma planta  $G$ , mismo controlador  $K$  y misma constante de ponderación  $\eta$ .

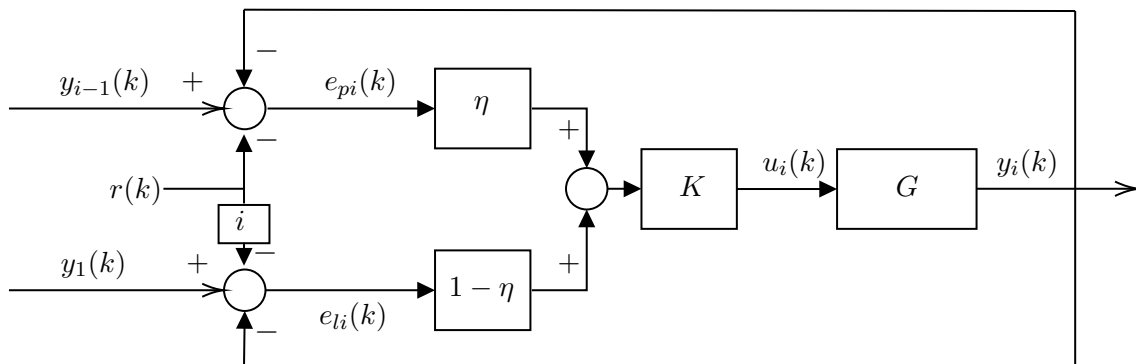


Figura 2.2: Lazo de control interno para un seguidor en una topología con seguimiento a predecesor y a líder.

Dentro del lazo presentado, las señales y parámetros de interés se definen como:

- $y_i(k)$  representa a la posición del vehículo  $i$  en un instante  $k$  dado.

- $e_{pi}(k) = y_{i-1}(k) - y_i(k) - r(k)$  y  $e_{li}(k) = y_1(k) - y_i(k) - i \cdot r(k)$  corresponden al error de seguimiento local respecto a predecesor y a líder, respectivamente, a ser regulados producto de la acción de control.
- $\eta$  corresponde a una constante de ponderación estática  $\eta \in (0, 1)$ , siendo el caso  $\eta = 0$  correspondiente a otra topología, el seguimiento a predecesor y  $\eta = 1$  el seguimiento a líder. Esta constante permite que el controlador priorice controlar el error de seguimiento respecto a predecesor o el error de seguimiento respecto a líder.
- $r(k)$  corresponde a la referencia a ser seguida por el lazo de control. Esto corresponde a la distancia deseada entre vehículos. A diferencia de esquemas de seguimiento a predecesor no debe ser proporcional a la velocidad [73, 38], pero al momento de implementar, si debería considerarse la inercia y dinámicas de frenado del vehículo dado.
- Los sistemas  $G$  y  $K$  corresponden a la planta y al controlador respectivamente; La planta resume las dinámicas de los vehículos, como su motor, inercia, etc. El controlador es diseñado a voluntad.

Adicionalmente, se propone la observación 1.

**Observación 1.** Como  $\eta$  es una constante y los errores de seguimiento son sumados, este es un problema con control de una entrada y una salida (SISO). Sin embargo, es posible diseñar el controlador como un controlador de múltiples entradas y múltiples salidas (MISO), al incorporar los factores  $\eta$  y  $1 - \eta$  dentro del controlador.

Para este esquema de pelotón, y dentro de cada lazo de control, se toman las suposiciones de 2.

**Suposición 2.** Para el análisis de pelotones con seguimiento a predecesor y a líder se toman las siguientes suposiciones:

- El producto de los sistemas  $G \cdot K$  posee doble integración; es decir, posee dos polos en  $z = 1$ . Esta doble integración es necesaria debido a que se espera cumplir que la velocidad de los vehículos converja a una constante, por lo que la posición de cada vehículo debe tender a una señal rampa de tiempo discreto.
- Al poseer doble integración, el sistema de control es capaz de asegurar seguimiento perfecto también a referencias escalón. Esto significa que el lazo también posee rechazo perfecto a perturbaciones constantes.
- La planta  $G$  es estrictamente propia. Es decir, que transcurre al menos una muestra temporal para que el efecto de una entrada dada sea visible en la salida.

- *La longitud de los vehículos no es considerada para conservar la linealidad de los sistemas involucrados.*
- *$r(k)$ , la distancia deseada entre vehículos es una señal constante en estado estacionario; por lo que no se espera que cambie durante la operación del pelotón.*
- *Cada vehículo conoce su propia posición  $i$  dentro del pelotón. Pese a que pueden existir fenómenos aleatorios, esta posición se conoce con completa exactitud y precisión.*

Es posible obtener la función de transferencia en el dominio de la transformada Zeta que relaciona la posición de un vehículo  $i$ -ésimo con la posición de su predecesor y el líder. Para ello, se define la función  $T(z)$ , la función de transferencia de un lazo de control estándar en (2.8):

$$T(z) = \frac{K(z)G(z)}{1 + K(z)G(z)} \quad (2.8)$$

Usando la expresión de (2.8), la posición del vehículo  $i$ -ésimo está dada como una función de los errores de seguimiento:

$$Y_i(z) = T(z)[\eta E_{pi}(z) + (1 - \eta)E_{li}(z)] \quad (2.9)$$

El análisis del lazo puede ser separado en tres casos: El líder, el primer seguidor y los otros seguidores:

### 1. El líder:

Se asume que el líder posee la misma dinámica que el resto de vehículos  $G(z)$  y  $K(z)$  y que éste sigue a un “Líder virtual”. Este líder virtual otorga una posición  $r_0(k) = v_c \cdot k \quad \forall k \in \mathbb{N}^0$ , con  $v_c$  como una constante proporcional a la velocidad propuesta para el pelotón<sup>1</sup>. No debe confundirse la implementación del líder virtual como un líder físico, sino que es una forma de emular ese efecto localmente dentro del líder y de esta forma permitir el movimiento del pelotón.

### 2. El primer seguidor:

El primer seguidor posee redundancia en la transmisión de la posición del líder, ya que recibe esta información por dos canales; el canal de la posición del predecesor y el canal de la posición del líder, y es en la práctica un miembro del pelotón con topología de seguimiento a predecesor. Su lazo de control puede ser simplificado a un lazo de control estándar con referencia  $y_1(k) - r(k)$  a partir de la cancelación de las ramas asociadas al líder y al predecesor.

<sup>1</sup>Debido a la naturaleza discreta del sistema, no es directamente la velocidad. La observación 5 explica esta diferencia en profundidad.

### 3. Los otros seguidores:

Los otros seguidores requieren ambas transmisiones y son ponderadas. Su lazo de control es el de la Figura 2.2.

## 2.3 Nociones de estabilidad en cuerda.

### 2.3.1 Señales auxiliares de interés.

El desempeño del sistema de pelotón en un instante dado  $k \in \mathbb{N}^0$  puede ser determinado por el estudio de tres señales;  $\zeta_i(k)$ ,  $\xi_i(k)$  y  $\nu_i(k)$ . La señal  $\zeta_i(k)$  corresponde al desempeño del vehículo: en el caso de un esquema seguidor a predecesor corresponde al error de seguimiento, pero en este caso corresponde únicamente al error de seguimiento en relación al predecesor, dado que el efecto de la transmisión del líder puede ser entendida como una prealimentación de perturbaciones. La señal  $\xi_i(k)$  representa a un estado compuesto de cada vehículo y está ampliamente relacionado a la evolución de  $\zeta_i(k)$ . La señal  $\nu_i(k)$  representa a las señales exógenas que afectan la evolución de los estados en cada vehículo. Naturalmente, como se desea estudiar el pelotón como un sistema emulgente, resulta conveniente concatenar las señales de todo el pelotón, formando vectores generales a partir de:

$$\xi(k) = \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \vdots \\ \xi_N(k) \end{bmatrix} \quad \zeta(k) = \begin{bmatrix} \zeta_1(k) \\ \zeta_2(k) \\ \vdots \\ \zeta_N(k) \end{bmatrix} \quad \nu(k) = \begin{bmatrix} \nu_1(k) \\ \nu_2(k) \\ \vdots \\ \nu_N(k) \end{bmatrix} \quad (2.10)$$

De esta forma, el desempeño del pelotón está afecto a la propagación de errores a través de la cadena. El error de un vehículo  $i$ -ésimo es propagado a lo largo de la cadena y es deber del sistema de pelotón estable en cuerda asegurar que estos errores son disipados correctamente, mientras se acotan dichos errores.

### 2.3.2 Análisis de estabilidad de cuerda en el esquema seguidor a predecesor y a líder con control por posiciones determinista.

Múltiples trabajos ya existen compilando las definiciones de estabilidad de cuerda en entornos deterministas, destacando [5, 56]. Estas definiciones están orientadas a cada topología de comunicación, modelo y representación de cada vehículo; pero *grosso modo* se relacionan a si los errores de seguimiento son amplificadas o no y cómo lo hacen. De forma general, se afirma que un pelotón estable en cuerda es incapaz de amplificar los efectos de las entradas externas a medida que se avanza a lo largo del pelotón.

En la presente sección se presentan resultados acordes a sistemas de tiempo discreto bajo

topología seguidor a predecesor y a líder, con un lazo de control interno similar al de la Figura 3.1. Estas definiciones corresponden a pelotones estables en cuerda, pero no necesariamente en el sentido cuadrático medio. De [73] se propone la definición 2.

**Definición 2.** *Una cadena de vehículos es estable, con una estructura de control de realimentación si, para cualquier conjunto de perturbaciones iniciales que sean acotadas, las fluctuaciones de posición de todos los vehículos permanecen acotadas y estas fluctuaciones se aproximan a cero cuando el tiempo tiende a infinito.*

La definición 2 propone que las señales deben estar acotadas tanto en el tiempo como cuando el número de vehículos crece indefinidamente. La definición 2 también propone guías generales para considerar un pelotón estable en cuerda, sin importar ningún aspecto adicional de su implementación.

A continuación, se presentan definiciones de sistemas de pelotón con seguimiento al predecesor y al líder de tiempo discreto obtenidas a partir de discretizar los resultados de [77, 78].<sup>2</sup> Estos resultados utilizan el mismo lazo de control presente en la Figura 2.2, de forma que su manipulación permite obtener los resultados de la definición 3. Estos esquemas de control de seguidor a predecesor y a líder corresponden entonces a sistemas de control por posición.

**Definición 3.** [77, 78] *Un pelotón se dice estable en cuerda, al aplicar control por posición, si el producto entre la función de transferencia formada por el lazo de control estándar de cada vehículo y la constante de proporcionalidad  $\eta$  satisface:*

$$\|\eta T(z)\|_{\infty} \leq 1, \quad \text{Con: } \|T(z)\|_{\infty} = \sup_{e^{j\omega} \omega \in [0, 2\pi]} |T(e^{j\omega})|, \quad \eta \in (0, 1) \quad (2.11)$$

*Con  $T(z)$  obtenida a partir de (2.8).  $T(z)$  debe poseer todos los polos dentro del círculo unitario, para asegurar también estabilidad temporal.*

*El caso en que se cumple  $\|\eta T(z)\|_{\infty} = 1$  se denomina marginalmente estable en cuerda.*

A continuación se procede a estudiar el comportamiento estable e inestable de un pelotón determinístico. Para ello, se define  $T(z)$  como la función de transferencia del lazo de control,  $y_i(k)$ , la posición del vehículo  $i$ -ésimo, quedando la interconexión de los sistemas presentada en la Figura 2.3, con  $R_i^p(z) = \eta R(z) + (1 - \eta)(i)R(z)$  como la referencia a seguir por cada vehículo, que es planteada junto con un factor ponderado por el número de

<sup>2</sup>Al momento de escribir esta tesis, los resultados de [78] se encuentran como trabajo en curso.

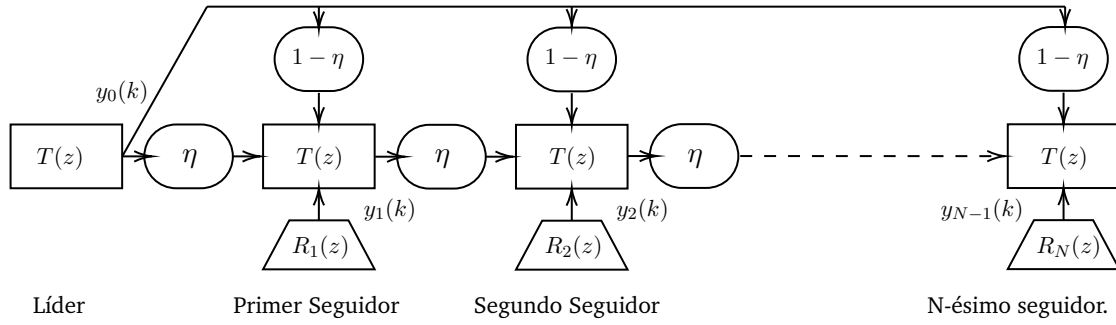


Figura 2.3: Concatenación de un pelotón determinístico con topología seguidor a predecesor y a líder.

vehículo asociado a la referencia del líder.

Con la existencia de la señal  $R_i^p(z)$  se puede manipular directamente la referencia para conseguir que la distancia entre vehículos sea una constante. A diferencia de los sistemas de pelotón de seguimiento a predecesor, no es necesario que esta referencia sea proporcional a la velocidad [79, 73] y la estabilidad en cuerda sólo depende del valor de  $\eta$ .

Asimismo, como  $\eta$  es una constante para el caso del control por posición es posible notar que puede salir de la norma infinito de la Definición 3. Como este valor puede salir de la norma infinito, se enuncia la observación 2.

**Observación 2.** Es posible obtener a partir de los resultados de la definición 3 una cota superior para  $\eta$ , correspondiendo a:

$$\eta < (\|T(z)\|_\infty)^{-1} \quad (2.12)$$

Por lo que es posible diseñar en primera instancia  $T(z)$  y luego plantear un  $\eta$  que permita que el pelotón sea estable en cuerda. Esta observación es sólo válida si se realiza control por posición, con un valor de  $\eta$  constante.

### 2.3.3 Análisis de estabilidad de cuerda en el esquema seguidor a predecesor y a líder con control por velocidades determinista.

Adicionalmente, se han estudiado variantes al esquema seguidor y predecesor al líder, en las cuales, en lugar de utilizar la señal de posición del líder, se emplea la tasa de cambio de la posición del líder junto con la posición del predecesor [78]. Utilizar dicha tasa de cambio de la posición del líder presenta una ventaja fundamental sobre el uso de su posición: cada vehículo no necesita conocer su índice dentro del pelotón, ya que  $i$  no se emplea en la referencia. Además, se espera que la velocidad relativa entre los vehículos sea 0, dado que para asegurar la formación deseada todos los vehículos deben mantener la misma tasa de cambio, y por ende, la misma velocidad. Esta tasa de cambio de la posición es proporcional a la velocidad y por simpleza del lenguaje, se define como tal.

Para esto, se define  $\dot{y}_i(k) = y_i(k) - y_i(k-1)$ , una señal proporcional al cambio de posición del vehículo  $i$ -ésimo. De esta forma, se plantea una actuación que sigue la ley de control:

$$U_i(z) = C_p(z) (Y_{i-1}(z) - Y_i(z) - R(z)) + C_v(z) (\dot{Y}_1(z) - \dot{Y}_i(z)) \quad (2.13)$$

Con  $C_p(z)$  y  $C_v(z)$  de (2.13) como funciones de transferencia estabilizantes y propias que satisfacen  $C_p(z)|_{z=1} + C_v(z)|_{z=1} = 1$  y  $C(z) = C_p(z) + \frac{z-1}{z}C_v(z)$ , siendo  $\frac{z-1}{z}$  un factor que permite usar velocidades en control por posición, al funcionar como un factor de diferencia temporal. El requerimiento de doble integración está entre el producto  $C(z)G(z)$ . En [78], se concluye que al plantear una función de transferencia auxiliar  $A(z) = \frac{C_p(z)}{C(z)}$ , el lazo de control puede ser descrito a partir de (2.14).

$$A(z)T(z) = \frac{C_p(z)G(z)}{1 + G(z) \left( C_p(z) + \frac{z-1}{z}C_v(z) \right)} \quad (2.14)$$

A partir de (2.14), el requisito para estabilidad de cuerda está presente por 2.15.

$$\|A(z)T(z)\|_\infty \leq 1 \quad (2.15)$$

Como se puede apreciar, el requerimiento de (2.15) es similar al de la definición 3, pero tomando  $A(z)$  el lugar de la constante de proporcionalidad, entendiéndose el caso de seguimiento a velocidad del líder como una iteración con un valor de  $\eta$  dinámico fusionado con el controlador en sí. Sin embargo, este esquema es menos flexible que hacer control por posición con  $\eta$  estáticos, ya que no es posible separar este sistema  $A(z)$  de  $T(z)$ .

#### 2.3.4 Definición de estabilidad de cuerda utilizando funciones de clase $\mathcal{K}$

Es también posible proponer estabilidad de cuerda determinista a partir de la búsqueda de funciones que acoten tanto a las entradas exógenas como de la condición inicial. Sin embargo, estos resultados están únicamente propuestos para esquemas seguidor a predecesor [73, 80] en tiempo continuo, donde se propone la estabilidad de cuerda basada en la norma  $\mathcal{L}_2$ , donde se busca justamente acotar las normas de los errores entre las condiciones iniciales del sistema de pelotón y dichas señales exógenas.

En esquemas seguidor a predecesor, se propone que los seguidores son sistemas estrictamente propios cuyas dinámicas están descritas por:

$$\begin{aligned} \dot{x}_i(t) &= Ax_i(t) + B\nu_i(t) \\ y_i(t) &= C_i x_i(t) \quad \forall 1 \leq i \leq N \end{aligned} \quad (2.16)$$

Considerando a  $y_i$  como la posición del vehículo  $i$ -ésimo y  $\nu_i$  como su entrada exógena.

**Definición 4.** [73, 80] *El sistema definido en (2.16) con un punto de equilibrio constante  $\bar{x}$  ante entrada cero es estable en cuerda basado en norma  $\mathcal{L}_2$  si existen funciones de clase  $\mathcal{K}$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ , tales que, para cualquier condición inicial de estado  $x(0)$  y  $\nu$  se cumple que:*

$$\|y_i(t) - C_i \bar{x}\|_{\mathcal{L}_2} \leq \alpha(\|\nu(t)\|_{\mathcal{L}_2}) + \beta(\|x(0) - \bar{x}\|), \quad 1 \leq i \leq N$$

## 2.4 Ejemplo de estabilidad de cuerda determinista.

Se propone para ilustrar tanto estabilidad en cuerda como inestabilidad en cuerda al sistema conformado por los parámetros de la ecuación 2.17. Este sistema corresponde a un esquema seguidor a predecesor y a líder con control por posiciones determinista como el presentado en la subsección 2.3.2. Se ha diseñado un controlador con integración del tipo *dead beat* [81]. Se propone que los vehículos sigan una referencia constante de  $r(k) = 5$ . Las simulaciones comienzan en estado estacionario.

$$T(z) = \frac{2z - 1}{z^2} \implies \|T(z)\|_{\infty} = 3 \quad \eta_{\text{Estable}} = 0.25 \quad \eta_{\text{Inestable}} = 0.35 \quad (2.17)$$

Bajo los parámetros del sistema de (2.17), se obtienen los resultados de simulación de la Figura 2.4, considerando como error de seguimiento a la diferencia entre posiciones de un vehículo y su predecesor. Esta elección del concepto de error de seguimiento como la diferencia entre posiciones en dos vehículos sucesivos está justificada en que este error no debe ser escalado por el índice de vehículo y que al ser el pelotón unidimensional, con una longitud de vehículo despreciable, el error entre un  $i$ -ésimo vehículo al líder es igual a la suma de todos los errores de sus predecesores.

La estabilidad de cuerda es puesta a prueba con una perturbación en el líder en la muestra  $k = 100$ . Esta perturbación corresponde a una perturbación de entrada en el sistema  $G$  del primer vehículo, lo que emula, bajo el contexto dado, un frenado brusco.

La Figura 2.4 presenta el fenómeno de inestabilidad de cuerda a partir de la definición 2, puesto que en el caso inestable en cuerda es evidente que el error de seguimiento es amplificado a lo largo del pelotón, situación que no ocurre en el caso estable en cuerda, donde las perturbaciones decrecen a medida que se avanza a lo largo del pelotón. El que decrezcan en el tiempo es una propiedad diferente, que se señala en la Observación 3.

La perturbación es más visible en los primeros dos vehículos, en el caso estable en cuerda.

**Observación 3.** *Si bien un lazo de control de un agente es capaz de mitigar errores de seguimiento en el tiempo, y este comportamiento se espera producto del diseño de controladores, esto corresponde a estabilidad interna.*

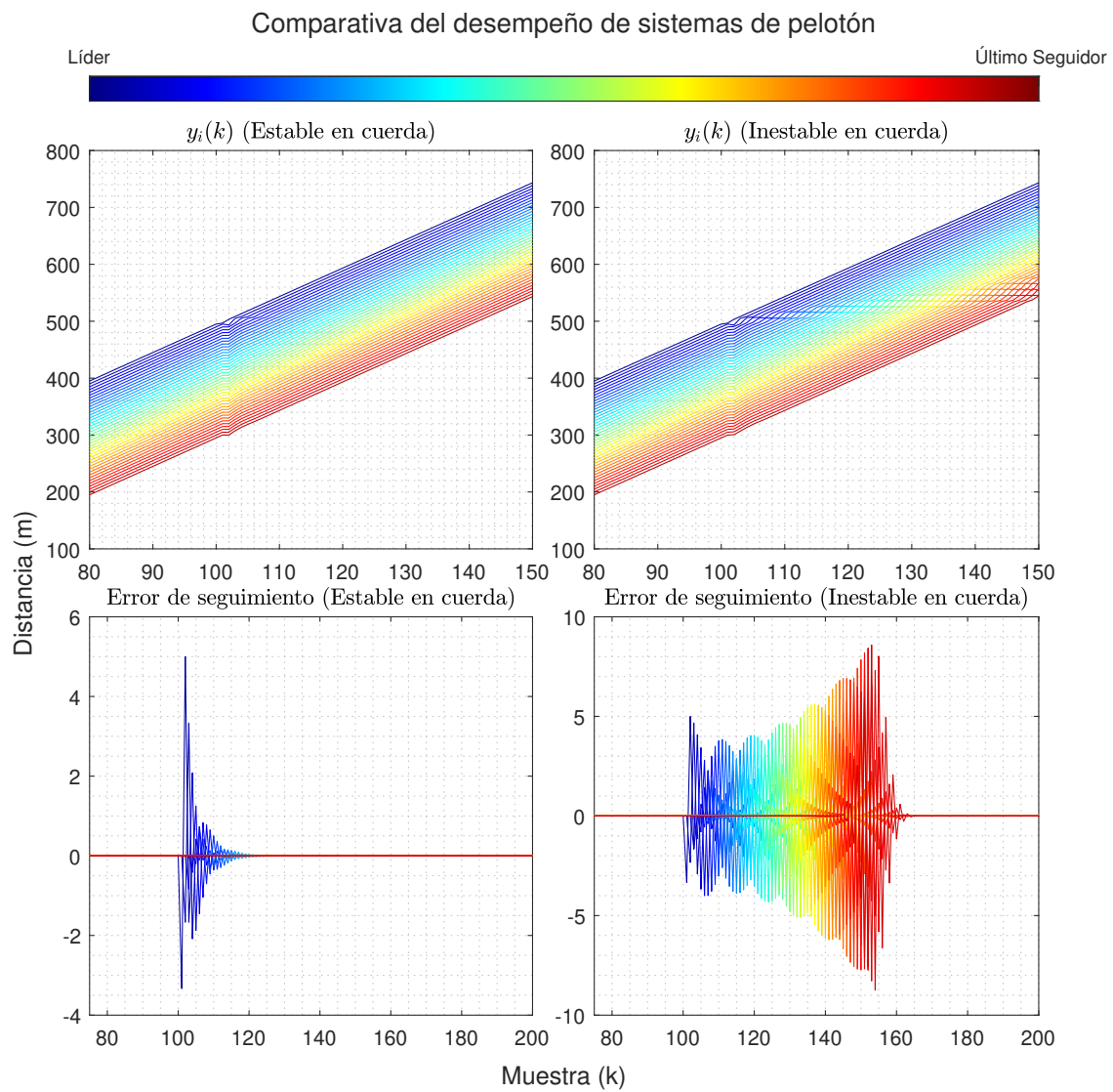


Figura 2.4: Comparativa entre un pelotón estable en cuerda y un pelotón inestable en cuerda.

*La estabilidad de cuerda es una propiedad distinta y del sistema de pelotón en general, por lo que si el sistema es internamente estable, no implica que el pelotón es estable en cuerda [73, 82, 83, 84].*

*Para que un pelotón con seguimiento a predecesor y a líder con control por posiciones, sin considerar fenómenos aleatorios, sea estable en cuerda debe cumplir las condiciones de la Definición 3 y ser estable internamente.*

A diferencia de un caso seguidor a predecesor, como el presentado en [73], el error de seguimiento en esquemas seguidor a predecesor y a líder puede ser tanto positivo como negativo. Esto se justifica por el uso de la señal de la posición del líder como una perturbación adicional y la pre-actuación para solventar esta perturbación antes de que llegue al vehículo  $i$ -ésimo y una posible sobreactuación producto de la elección de  $T(z)$ .

Las señales de posición también presentan estos fenómenos, visible como una oscilación amplificada a lo largo del pelotón en el caso inestable en cuerda.

## 2.5 Estabilidad en cuerda para pelotones estocásticos.

En la sección 2.3 se proponen resultados previos para sistemas sin fenómenos aleatorios, sin embargo, cuando se considera un canal de comunicación a fenómenos aleatorios, estos resultados pierden su validez, puesto que se refieren a cotas de las señales en sí y no de sus momentos. Este problema se hace evidente al considerar que, si existen fenómenos aleatorios, cada señal en sí es una realización y no es posible asegurar que sea conocida *a priori*. Además, se necesitan resultados que sean capaces de proponer estabilidad de cuerda en esquemas seguidor a predecesor y a líder, por lo que al usar la representación de las señales auxiliares propuestas en la sección 2.3.1 se vuelve una necesidad imperante. Estas señales entonces son definidas como procesos aleatorios, cuya media y varianza pueden ser caracterizadas, pero conservando su significado. De esta forma, se propone conservar la notación de  $\zeta_i(k)$ ,  $\xi_i(k)$  y  $\nu_i(k)$ , pero dentro de un entorno estocástico definidas como  $\zeta_i(k)$ ,  $\xi_i(k)$  y  $\nu_i(k)$ .

A diferencia de los resultados en entornos deterministas, que son *ad hoc* a la topología de comunicación, la definición matemática de estabilidad de cuerda a utilizar se basa únicamente en las señales auxiliares, estando la topología de comunicación embebida dentro de su diseño, correspondiendo a una ventaja de su planteamiento. La definición 5 [73] se basa en proponer cotas para los segundos momentos del error de seguimiento, mientras que la definición 6 [73] establece el concepto de estabilidad en cuerda en sentido cuadrático medio. Estas definiciones pueden considerarse una extensión a más topologías y entornos estocásticos de tiempo discreto de la definición 4.

**Definición 5.** [38] Sea  $\mathcal{G}$  el conjunto de especificaciones requeridas para la condición inicial del estado auxiliar  $\xi(0)$  y las entradas exógenas  $\nu$ .

Un pelotón de vehículos se afirma estable en cuerda en base a la media con norma  $\mathcal{L}_p$  y a la varianza con norma  $\mathcal{L}_q$ , donde  $p, q \in \mathbb{N} \cup (+\infty)$ , si existen las siguientes funciones clase  $\mathcal{K}$ ,  $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$  y  $\beta_2$ , tales que, para cualquier  $(\xi(0), \nu) \in \mathcal{G}$ , se cumple:

$$\begin{aligned} \|\mu_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_p} &\leq \alpha_1(\|\mu_\nu(k)\|_{\mathcal{L}_p}) + \beta_1(\|\mu_\xi(0)\|_p) \\ \|P_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_q} &\leq \alpha_2(\|P_\nu(k)\|_{\mathcal{L}_q}) + \beta_2(\|P_\xi(0)\|_q) \end{aligned}$$

$\forall k \in \mathbb{N}_0, \forall i \in [1, \dots, N]$  y  $\forall N \in \mathbb{N}$ .

**Definición 6.** [73] Un pelotón que satisface la Definición 5 se dice **estable en cuerda en sentido cuadrático medio** si y solo si, para cualquier  $(\xi(0), \nu) \in \mathcal{G}$ , existen constantes finitas  $M_1$  y  $M_2$ , tales que:

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\zeta_i}(k) = M_1 \quad \lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\zeta_i}(k) = M_2$$

**Observación 4.** La definición 5 exige únicamente que los momentos de la señal definida como error de seguimiento estén acotados entre las condiciones iniciales y las entradas exógenas. Estas cotas se expresan como normas  $\mathcal{L}$  que no son necesariamente las mismas normas al momento de acotar la media y la varianza, lo que aporta flexibilidad al momento de demostrar estabilidad de cuerda en sentido cuadrático medio.

Junto con lo propuesto en la observación 4, es posible notar que las limitantes son independientes del número de agentes, lo que no afecta a la escalabilidad de un pelotón como un sistema interconectado y puede tornarse eventualmente infinito. Esta escalabilidad en el número de vehículos es fundamental para cualquier esquema de pelotón.

La definición 6 puede considerarse una extensión a la definición 5 y permite asegurar la convergencia de los momentos. Esta definición proviene de combinar la ya clásica notación de estabilidad en sentido cuadrático medio con la definición 5 de manera de enunciar el concepto de *estabilidad en cuerda en sentido cuadrático medio*.

## 2.6 Estabilidad de cuerda en el sentido cuadrático medio para sistemas con seguimiento a predecesor con ruido coloreado

Esta sección está explicada con mayor profundidad en [57].

Para ilustrar la estabilidad de cuerdas en el sentido cuadrático medio se propone un pelotón homogéneo de  $N$  vehículos interconectados con topología seguidor-predecesor (PF).

En este caso, cada vehículo está diseñado con función de transferencia  $G_i(z) = G(z) = [A, B, C, D] \quad \forall i \in \{0, 1, \dots, N\}$ .

Cada vehículo  $i$ -ésimo está determinado por el lazo de control de la Figura 2.5, considerando a  $v_i(k)$  como un ruido coloreado. Las funciones de transferencia correspondientes al controlador, al vehículo y a la función  $H(z)$ , que se definirá más adelante, son  $K(z)$ ,  $G(z)$  y  $H(z)$ , respectivamente. Cabe destacar la diferencia entre  $\tilde{y}_{i-1}(k)$  e  $y_{i-1}(k)$ , siendo la primera señal la versión con ruido aditivo. La señal ruidosa es la que realiza el control y la que realmente conoce cada vehículo.

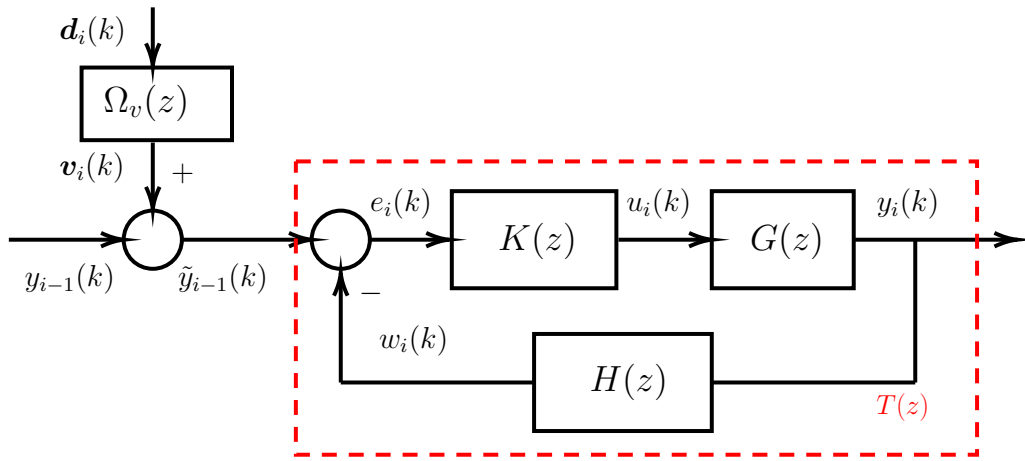


Figura 2.5: Lazo de control del vehículo  $i$ -ésimo

El objetivo del controlador del pelotón es mantener la distancia entre vehículos  $L_i = y_{i-1}(k) - y_i(k)$  igual a un valor deseado  $r_i(k) = L^*(k)$  en cada vehículo. Este valor de distancia deseada corresponde a la política de espaciado y está definido por (2.18), donde  $\delta_i$  representa el espaciado mínimo entre vehículos (que, en un entorno realista, debe ser mayor que la longitud del vehículo), más un término proporcional a la velocidad del vehículo, determinado por  $h$ , una constante de tiempo positiva (*time headway*). Esta política de espaciado, que depende de la velocidad de cada vehículo, que se establece por motivos de seguridad. De esta manera, se garantiza una distancia adecuada para el frenado de vehículos reales, absorbiendo el riesgo inducido por la inercia, entre otros factores. La elección del valor de  $h$  puede influir en el cumplimiento de la estabilidad de cuerdas, como se analiza en [38].

$$r_i(k) = \delta_i + h [y_i(k) - y_i(k-1)] \quad (2.18)$$

Si se asume  $\delta_i = 0 \quad \forall i \in N$ , (2.18) pasa a ser una ecuación recursiva que define a un sistema lineal e invariante en el tiempo [85], y por lo tanto es posible caracterizar la referencia  $r_i(k)$  como la salida de un sistema cuya entrada es la propia posición del vehículo, de manera que se cumpla (2.19). De no realizarse esta suposición, es también posible linealizar el sistema

afín resultante, generando un error fijo, por lo que no existe pérdida de generalidad.

$$R_i(z) = \frac{hz - h}{z} \cdot Y_i(z) \quad (2.19)$$

Las métricas de interés, en línea con lo expuesto en la sección 2.3.1, para cada miembro del esquema de pelotón están representadas por  $\zeta_i(k)$ ,  $\xi_i(k)$  y  $\nu_i(k)$ .

La señal  $\xi_i(k)$  determina la evolución del error de seguimiento, siendo una función tanto del estado del vehículo  $i$ -ésimo, como en el caso de la topología PF propuesta, de su predecesor, actuando como un estado alternativo. La señal  $\nu_i(k)$  corresponde a todas las entradas externas del vehículo  $i$ -ésimo, tales como la trayectoria del predecesor y los ruidos, mientras que la señal  $\zeta_i(k)$  representa el error de seguimiento efectivo (sin considerar los ruidos) y puede expresarse como sigue:

$$\zeta_i(k) = y_{i-1}(k) - y_i(k) - r_i(k) = y_{i-1}(k) - y_i(k) - h[y_i(k) - y_i(k-1)] \quad (2.20)$$

Ya planteadas las señales de interés, es posible deducirlas a partir del lazo de control. Para ello, la función  $H(z)$  junto con  $\tilde{y}_{i-1}(k)$  generan el error de seguimiento  $e_i(k)$  (No debe confundirse con la de señal de desempeño planteada en (2.20), pues éste no considera el efecto del ruido coloreado). Para ello, es posible definir el error de seguimiento a partir de su transformada  $\mathcal{Z}$ ,  $E_i(z)$ :

$$\begin{aligned} E_i(z) &= \tilde{Y}_{i-1}(z) - Y_i(z) - R_i(z) \xrightarrow{\text{Usando (2.19)}} \tilde{Y}_{i-1}(z) - Y_i(z) - \frac{hz - h}{z} Y_i(z) \\ &= \tilde{Y}_{i-1}(z) - \underbrace{\left( Y_i(z) + \frac{hz - h}{z} Y_i(z) \right)}_{W_i(z)} \implies H(z) = \frac{W_i(z)}{Y_i(z)} = \frac{z(h+1) - h}{z}. \end{aligned} \quad (2.21)$$

Estando caracterizado  $H(z)$ , es posible determinar el lazo interno del sistema  $T(z)$ , esto es,

$$T(z) = \frac{Y_i(z)}{Y_{i-1}(z)} = \frac{K(z)G(z)}{1 + K(z)G(z)H(z)} \implies S(z) = \frac{Y_{i-1}(z)}{E_i(z)} = 1 - H(z)T(z). \quad (2.22)$$

Para esta sección, se proponen las siguientes suposiciones:

- $T(z)$  es estrictamente propio.
- $G(z)K(z)$  posee al menos doble integración.

Mientras tanto, con respecto al ruido coloreado permite las siguientes suposiciones:

1. El ruido coloreado es *WSS* (*Wide-Sense Stationary*), y sus momentos son  $\mu_{v_i}$  y  $P_{v_i}$ . Estos momentos son estacionarios en estado estacionario y corresponden a procesos estocásticos de segundo orden.

2. El espectro del ruido  $S_{v_i}(z) = \Omega_{v_i}(z)\Omega_{v_i}(z)^H$  es conocido, así como la función  $\Omega_{v_i}(z)$ . Este espectro puede considerarse un sistema estable en el sentido cuadrático medio, y su espectro estacionario es  $\Omega_{v_i}(e^{j\omega_0})$ .
3. El ruido  $v_i(k)$  no está correlacionado con ningún estado inicial.
4. El ruido  $v_i(k)$  es de media cero.

De esta forma, el ruido coloreado se puede plantear como un sistema  $\Omega_{v_i}(z) = [A_{vi}, B_{vi}, C_{vi}, D_{vi}]$  estimulado por un ruido blanco  $\mathbf{d}_i(k)$ ; este sistema es estable en el sentido cuadrático medio. Para evitar el efecto de un paso directo, se asume  $D_{vi} = 0$ . En caso que no cumpla esto, puede resolverse usando superposición [85], dado que los sistemas estudiados son lineales y se puede modelar el efecto de un ruido coloreado bipropio con paso directo como la suma de un ruido blanco y un ruido coloreado estrictamente propio. La representación en espacio de estados de  $\Omega_{v_i}$  se puede escribir como un sistema estimulado por un ruido blanco  $\mathbf{d}_i(k)$  de media  $\mu_{d_i} = \Omega_{v_i}(1)^{-1}\mu_v$  y varianza identidad.

$$\begin{aligned} x_{vi}(k+1) &= A_{vi}x(k) + B_{vi}\mathbf{d}_i(k) \\ \mathbf{v}_i(k) &= C_{vi}\mathbf{d}_i(k), \end{aligned} \tag{2.23}$$

Para que la salida del sistema (2.23) sea  $\mathbf{v}_i(k)$  sea la misma que la resultante de este sistema auxiliar, las condiciones iniciales del sistema deben satisfacer (2.24).

$$\begin{aligned} \mu_{x_{vi}}(0) &= (I - A_v)^{-1}B_v\mu_d \\ P_{x_{vi}}(0) &= \text{vec}^{-1}(I - A_{vi} \otimes A_{vi})^{-1}\text{vec}(B_{vi}B_{vi}^T). \end{aligned} \tag{2.24}$$

De esta forma, cualquier sistema  $i$ -ésimo, con  $i \geq 1$ , posee un  $T(z)$  estrictamente propio que puede determinarse a partir de una representación de espacio de estados genérica de la forma

$$\begin{aligned} x_i(k+1) &= Ax_i(k) + By_{i-1}(k) + B\mathbf{v}_i(k) \\ y_i(k) &= Cx_i(k). \end{aligned} \tag{2.25}$$

Combinando (2.25) con (2.23) es posible obtener un modelo ampliado, como el propuesto

$\forall i \geq 1$ :

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_i(k+1) \\ x_{vi}(k+1) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & BC_{vi} \\ 0 & A_{vi} \end{bmatrix}}_{A_{ai}=A_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x_i(k) \\ x_{vi}(k) \end{bmatrix}}_{x_{ai}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ B_v \end{bmatrix}}_{B_a} d_i(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} BC & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_{pi}=B_p} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{i-1}(k) \\ x_{vi-1}(k) \end{bmatrix}}_{x_{ai-1}(k)} \\ y_i(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{C_{ai}} \begin{bmatrix} x_i(k) \\ x_{vi}(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.26)$$

En cambio, el líder ( $i = 0$ ) posee un funcionamiento interno similar, solo que se asume como entrada una posición de un líder virtual, conocida y manipulada de antemano,  $y_0(k)$ , resultando la siguiente representación en espacio de estados de (2.27). Esta posición del líder virtual es necesaria para fijar una velocidad base en el pelotón, proporcional a la tasa de cambio de dicha posición.

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} x_0(k+1) \\ x_{v0}(k+1) \end{bmatrix} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A & BC_{v0} \\ 0 & A_{v0} \end{bmatrix}}_{A_{a0}=A_a} \underbrace{\begin{bmatrix} x_0(k) \\ x_{v0}(k) \end{bmatrix}}_{x_{a0}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ B_v \end{bmatrix}}_{B_a} d_0(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} B & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}}_{B_{p0}} \underbrace{\begin{bmatrix} y_0(k) \\ x_{v0-1}(k) \end{bmatrix}}_{x_{ai-1}(k)} \\ y_0(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{C_{ai}} \begin{bmatrix} x_0(k) \\ x_{v0}(k) \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (2.27)$$

Se busca obtener un modelo alternativo, para que las señales de interés estén acotadas, pasando de ser funciones con media similar a una función rampa a funciones con media constante y convergente. Para ello, se plantea la siguiente ecuación de diferencia de estados, usando la misma notación propuesta en [38],

$$\xi_i(k) = x_{ai-1}(k) - x_{ai}(k) - h[x_{ai}(k) - x_{ai}(k-1)]. \quad (2.28)$$

La principal ventaja de esta notación es que si el controlador seleccionado está correctamente diseñado,  $\xi_i$  es estable en sentido cuadrático medio, lo que asegura que sus momentos convergen a un valor en estado estacionario, además de, evidentemente, asegurar que éstos sean de segundo orden. Ya sea si se considera el ruido aditivo por transmisión o por medición, es válido asumir que el líder carece de ruido ( $d_0(k) = 0$ ,  $P_{d_0} = 0$ ), por lo que es posible asignar  $\zeta_0(k) = r_0(k) - y_0(k) - h[y_0(k) - y_0(k-1)]$ . Estas condiciones son necesarias para resolver (2.28) de forma iterativa.

Por simplicidad, se supone que  $\Omega_i(z) = \Omega(z) = [A_v, B_v, C_v, 0]$  en todos los seguidores; esto significa que el espectro de cada ruido coloreado es igual en todos los seguidores. De no realizarse esta suposición, no es posible agrupar las matrices con formas genéricas para



de seguimiento, o señal de interés, satisfacen a la siguiente ecuación recursiva:

$$\begin{aligned}\mu_{\xi}(k+1) &= A_g \mu_{\xi}(k) + B_0 \mu_{\xi_0}(k) + B_{ga} \mu_d(k) + B_{gb} \mu_d(k-1), & \mu_{\xi}(0) &= \mu_{\xi_0} \\ \mu_{\zeta}(k) &= C_g \mu_{\xi}(k).\end{aligned}\quad (2.32)$$

Además, las matrices de covarianza satisfacen, para todo tiempo  $k > 0$ ,

$$P_{\xi}(k+1) = A_g P_{\xi}(k) A_g^T + B_{ag} B_{ag}^T + B_{gb} B_{gb}^T + A_g B_{ag} B_{gb}^T + B_{gb}^T B_{ga}^T A_g^T. \quad (2.33)$$

El pelotón es estable, y convergente en el tiempo si se cumple (2.34). Esto equivale a afirmar que  $T(z)$  es estable en el sentido cuadrático medio.

$$\rho(A_g) < 1. \quad (2.34)$$

De cumplirse (2.34), la solución a (2.32) y a (2.33) no tan solo existe, sino que converge a un valor finito cuando  $k \rightarrow \infty$ . Esto también asegura estabilidad en el sentido cuadrático medio, por lo que también permite asegurar que el sistema es estable de forma determinista, por lo que las señales convergen en ese caso, y poseen media y varianza convergente en el caso estocástico.

El cumplimiento de  $\rho(A) < 1$  garantiza la existencia de un espectro estacionario para el sistema completo. Esto sigue siendo válido para el sistema con ruido coloreado, dado que las suposiciones sobre dicho ruido obligan a añadir polos estables a  $A_a$ . De esta forma, si bien se requiere que se cumpla 2.34, no se pierde generalidad con  $\rho(A) < 1$ .

Estas métricas son independientes de la cantidad de vehículos en el pelotón y de las condiciones iniciales, por lo que constituyen requisitos mínimos para cualquier sistema de pelotón considerado (es decir, con ruido aditivo, topología PF, entre otros).

Una vez cumplida (2.34), es posible suponer que el sistema posee un espectro conocido e igual en todos los vehículos, es decir  $\Omega_i = \Omega_v \forall i \in N$ . De esta forma, el sistema generador de errores de seguimiento (2.31) posee medias y densidad espectral estacionaria. De esta forma la media  $\mu_{\zeta_i}(e^{j\omega})$  y la densidad espectral de potencia del error  $\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega})$  de todos los seguidores están determinadas por

$$\begin{aligned}\mu_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= T(e^{j\omega}) \mu_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) \\ \phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= |T(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + |T(e^{j\omega})|^2 |S(e^{j\omega})|^2 |\Omega_v(e^{j\omega})|^2 \\ &\quad + (1 - |T(e^{j\omega})|^2) |1 - S(e^{j\omega})|^2 |\Omega_v(e^{j\omega})|^2\end{aligned}\quad (2.35)$$

donde  $\phi_{\zeta_1}(e^{j\omega}) = |H(e^{j\omega})T(e^{j\omega})|^2 |\Omega_v(e^{j\omega})|^2$ .

Nótese que la expresión (2.35) presenta una recursividad en los términos  $|T(e^{j\omega})|^2$ , los cuales están relacionados con los espectros de los vehículos previos. De este modo, el

espectro permanece acotado en el número de vehículos si el efecto del predecesor en cada miembro del pelotón es inferior al efecto actual. Asimismo, puede observarse que si se satisface la condición propuesta en [38], es decir, se cumple

$$|T(e^{j\omega})| < 1, \quad \forall \omega > 0, \quad (2.36)$$

también se garantiza que  $|1 - S(e^{j\omega})| < 1$ , lo que asegura que los momentos enunciados en (2.35) permanezcan acotados. Esta condición se explica con mayor detalle en [38]; sin embargo, resulta más práctico demostrar que dichas condiciones se satisfacen directamente en este caso, como una versión particular de [38], en lugar de derivarlas desde el principio. De esta forma, se establecen las condiciones generales para que un pelotón afectado por ruido coloreado sea estable en cuerdas, derivadas del cumplimiento de (2.34) y (2.36). Como puede observarse, estas condiciones justifican la extensión de los planteamientos presentados en [38] al caso de ruido coloreado. La pérdida de generalidad se encuentra, entonces, en las propias características del ruido coloreado, que, no obstante, son suficientemente amplias para abarcar diversos escenarios prácticos.

Estos resultados son ilustrados con el ejemplo al considerar el pelotón descrito en la presente sección, donde cada vehículo tiene su función de transferencia  $T(z)$  (ver Figura 2.5) dada a partir de:

$$\begin{aligned} G(z) &= \frac{1}{z-1}, & K(z) &= \frac{0.228z^2 - 0.1824z}{z^3 - 0.95z^2 - 0.73z + 0.68}, \\ H(z) &= (1+h) - h/z. \end{aligned}$$

Para analizar la estabilidad de cuerda, se seleccionaron dos valores diferentes de la constante de tiempo  $h$ :  $h = 3.8$  y  $h = 2.2$ . Estos valores fueron elegidos con el propósito de ilustrar un caso estable en cuerda y otro caso inestable en cuerda.

El ruido coloreado se modela usando una entrada de ruido blanco  $\mathbf{d}_i(k)$  que distribuye de forma gaussiana y está determinado por su media  $\mu_{\mathbf{d}_i}(k) = 0, \forall k \in \mathbb{N}^0$  y su varianza  $P_{\mathbf{d}_i}(k) = 1, \forall i \in \mathbb{N}, \forall k \in \mathbb{N}^0$ . Dicho ruido blanco pasa por un filtro  $\Omega(z)$  dado por

$$\Omega(z) = \frac{0.021z^3 + 0.071z^2 + 0.689z + 0.28}{z^2 - 0.755z + 0.28},$$

cuya salida  $v_i$  corresponde a un ruido de color rosado. Para la generación del ruido coloreado además se asegura que  $v_i$  tenga media cero, de manera de cumplir con las suposiciones. En la Figura 2.6 se muestra el comportamiento de la media de la posición, la media del error de seguimiento y la varianza del error de seguimiento de un pelotón de 20 vehículos que siguen una referencia rampa y parten desde el reposo con condiciones iniciales cero. Los resultados mostrados se obtuvieron mediante una simulación de tipo Monte Carlo de

$1 \times 10^6$  iteraciones.

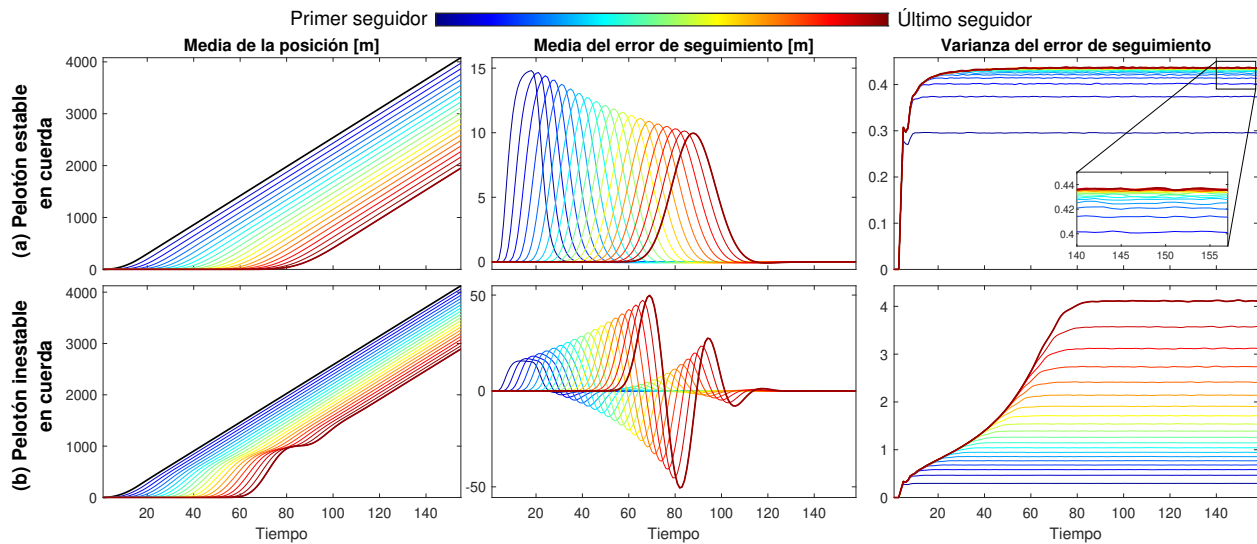


Figura 2.6: Estadísticas: (a) Caso estable en cuerda (primera fila). (b) Caso inestable en cuerda (segunda fila).

Para el caso estable en cuerda ( $h = 3.8$ ) mostrado en la Figura 2.6(a) se observa un buen seguimiento de la referencia en la media de la posición. La media del error de seguimiento converge a cero y además, los valores punta van disminuyendo conforme aumenta el número de vehículos. Se observa además que la varianza del error de seguimiento de cada vehículo converge a un valor estacionario diferente de cero. Adicionalmente dichos valores estacionarios muestran una convergencia a un valor máximo. Es decir, la diferencia entre los valores estacionarios de dos vehículos consecutivos,  $\Delta_i = P_{\zeta_i} - P_{\zeta_{i-1}}$ , tiende a cero cuando  $i$  se incrementa.

Por el contrario, en el caso inestable en cuerda ( $h = 2.2$ ) mostrado en la Figura 2.6(b); si bien las varianzas individuales también convergen a valores estacionarios, vemos que al incrementarse el número de vehículos la diferencia  $\Delta_i$ , eventualmente crece cuando  $i$  se incrementa. Además, en el caso inestable en cuerda, es claro que pueden existir colisiones, pues el comportamiento del error presenta oscilaciones (reflejadas en la media de la posición) cuyos peaks máximos crecen al aumentar vehículos en la cadena. Note además que, debido a la presencia del doble integrador, la media del error llega a cero, sin embargo el comportamiento inestable en cuerda de la media se refleja en el transiente.

## CAPÍTULO



---

---

## Definición del marco de trabajo.

En este capítulo se proponen los esquemas del pelotón con topología seguidor a predecesor y a líder considerando la influencia de fenómenos estocásticos producto de la comunicación, los cual serán resueltos en el transcurso de esta tesis, utilizando dos enfoques de control: por posición y por velocidad. Se definen los lazos de control internos dentro de estos agentes y se presentan expresiones útiles para su análisis. Este capítulo amplía las nociones introducidas en el capítulo 2 a un entorno estocástico.

### 3.1 Esquema seguidor a predecesor y a líder con ruido aditivo para control por posición.

Este esquema, representado en la Figura 3.1, dispone que los vehículos seguidores  $i \in \mathbb{N}$  posean información ruidosa de sus predecesores  $i - 1$  y del líder  $i = 0$ . Este esquema está ampliamente basado en el propuesto en la sección 2.2 y también cumple con las Suposiciones 2. Su análisis es complementario al realizado en dicha sección, haciendo énfasis en los fenómenos estocásticos.

Como se puede observar en la Figura 3.1, el primer seguidor ( $i = 1$ ) solo dispone de información del líder transmitida a través de dos canales, por lo que es razonable suponer que su lazo de control se comporta de manera diferente, esta redundancia es utilizada como la Suposición 3. Para comprender estas diferencias, se describe inicialmente el lazo de control genérico de los demás seguidores y, posteriormente, se explican las diferencias respecto al primer seguidor. En cuanto a la referencia a seguir, se establece la suposición 4.

**Suposición 3.** *El primer seguidor ( $i = 1$ ) recibe dos veces la posición del líder, una como la*

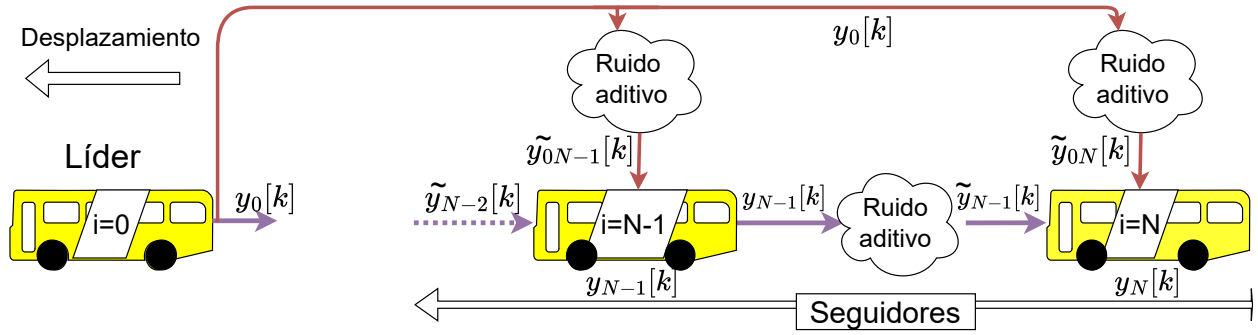


Figura 3.1: Esquema seguidor a predecesor y a líder.

posición de su predecesor, y otra, como la posición del líder en sí. Esto se justifica al suponer que existe un canal dedicado a cada transmisión, siendo la transmisión de la posición del líder una difusión a todo el pelotón.

Esta suposición permite diseñar el primer seguidor de una forma similar a sus pares, debido a que incluye dos ruidos y no forma un caso especial de un único ruido.

**Suposición 4.** La referencia  $r(k)$  no está asociada a un ruido aditivo. Esto se debe a que dicha señal puede interpretarse como una constante interna en cada vehículo, o incluso como un parámetro fijo. Por lo tanto, no es necesario transmitirla de forma inalámbrica, y si se transmite, su naturaleza constante garantiza que su media no se vea afectada por los ruidos aditivos como los propuestos.

En consecuencia,  $r(k)$  se considera una señal constante y puede entenderse como un parámetro, según convenga.

### 3.1.1 Lazo de control del primer seguidor $i = 1$ .

El lazo de control del primer seguidor puede escribirse de manera diferente, ya que utiliza únicamente la información del líder para su control. Su estructura se obtiene al reemplazar en la Figura 3.4 al usar el valor  $i = 1$ .

El lazo de control de la Figura 3.2 corresponde directamente al de la Figura 3.4, pero con los reemplazos necesarios con  $i = 1$ . Este lazo puede ser reescrito para mover la constante de ponderación directamente a los ruidos, resultando el lazo de la Figura 3.3.

Esta reescritura proviene de caracterizar la señal  $e_1(k)$ :

$$\begin{aligned}
 e_1(k) &= \eta(y_0[k] + \mathbf{w}_{p_1}(k) - r[k] - y_1(k)) + (1 - \eta)(y_0(k) + \mathbf{w}_{p_1}(k) - r(k) - y_1(k)) \\
 &= \eta y_0(k) + \eta \mathbf{w}_{p_1}(k) - \eta r(k) - \eta y_1(k) \\
 &\quad + (1 - \eta)y_0(k) + (1 - \eta)\mathbf{w}_{p_1}(k) - (1 - \eta)r(k) - (1 - \eta)y_1(k) \\
 &= y_0[k] + \eta \mathbf{w}_{p_1}(k) - r(k) + (1 - \eta)\mathbf{w}_{p_1}(k) - y_1(k)
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

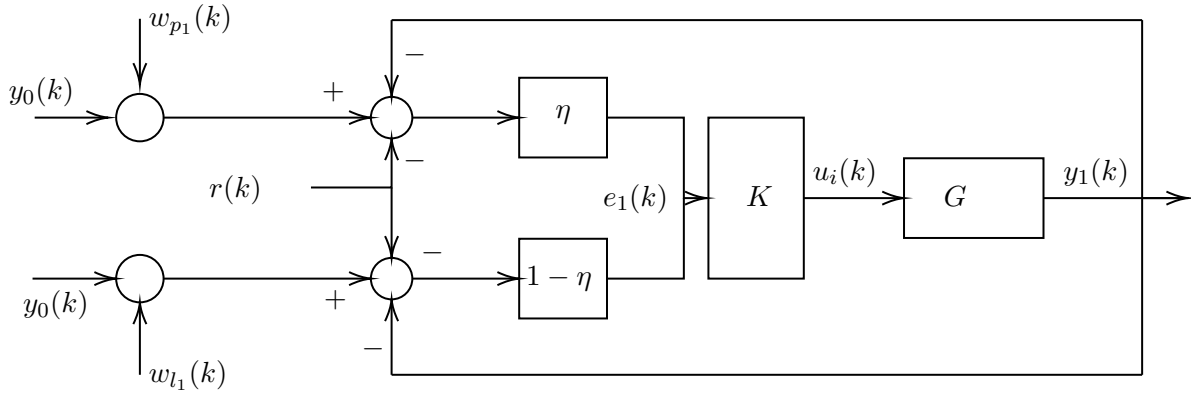


Figura 3.2: Lazo de control para el primer seguidor.

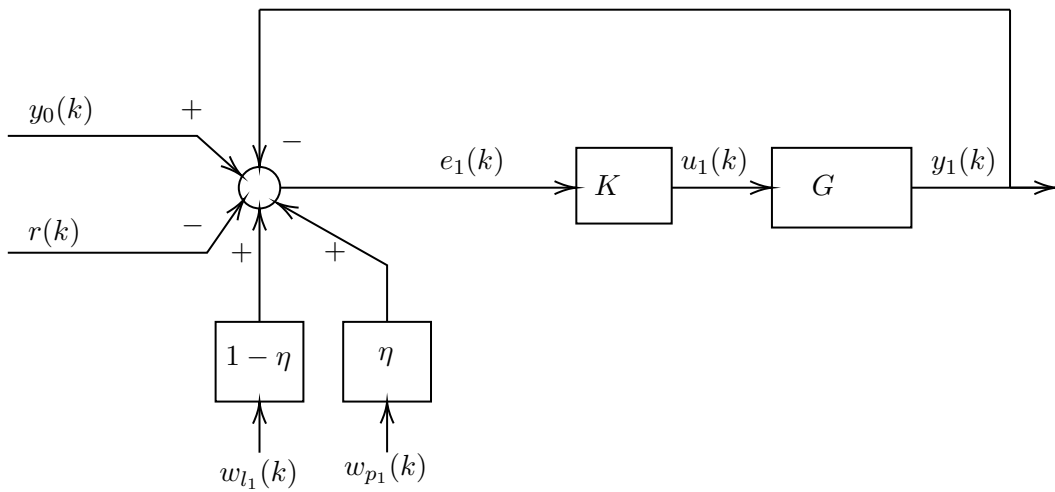


Figura 3.3: Lazo de control reescrito para el primer seguidor.

La ventaja del lazo de la Figura 3.3 radica en que corresponde directamente a un lazo de control estándar, lo que permite aislar visualmente el efecto de los pesos directamente sobre los ruidos. En una implementación física, es razonable suponer que el primer seguidor posee información más precisa sobre  $y_0(k)$ , dado que este dato es recibido con redundancia, aunque provenga de canales con ruido.

### 3.1.2 Lazo de control de los seguidores $i \in [2, N]$ .

El lazo de control de los seguidores sigue el esquema de la Figura 3.4, con  $y_i[k]$  representando la posición del  $i$ -ésimo vehículo, y  $w_{p_i}[k]$  y  $w_{l_i}[k]$  como los ruidos aditivos asociados a la transmisión de datos desde el predecesor y el líder, respectivamente.

Estos ruidos son blancos, estacionarios, de media cero y varianza  $P_{p_i}$  y  $P_{l_i}$ , respectivamente. Para este trabajo, se asume que los segundos momentos de los ruidos son iguales a lo largo del pelotón, es decir  $P_{p_i} = P_p \forall i \in [2, N]$  y  $P_{l_i} = P_l \forall i \in [2, N]$ .

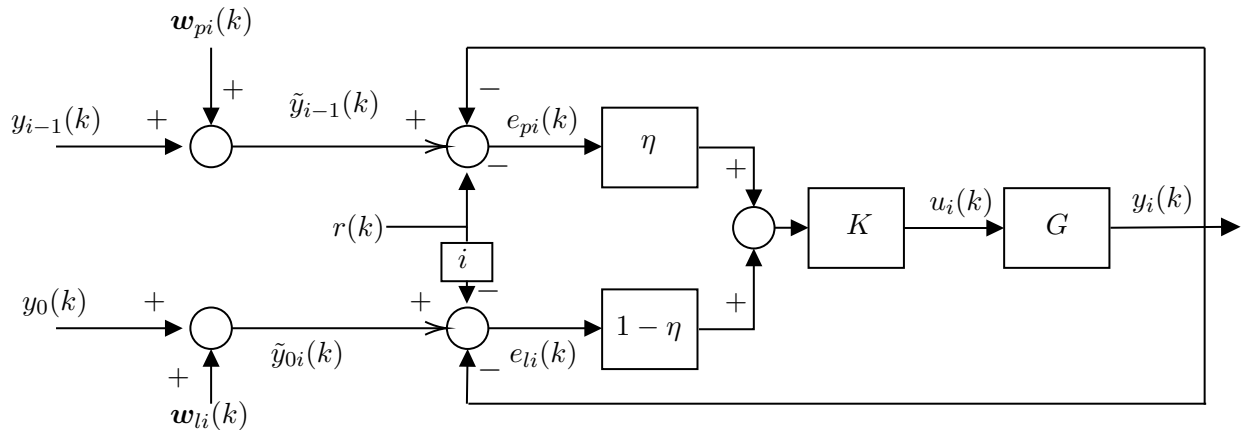


Figura 3.4: Lazo de control para un agente dentro de un pelotón LPF con control por posiciones.

La acción de control se basa en el efecto ponderado del *error de seguimiento local* respecto al predecesor  $e_{p_i}[k]$  y al líder  $e_{l_i}[k]$ . Este error de seguimiento local no debe confundirse con el error de seguimiento, entendido como una señal de desempeño, ya que el lazo de control sigue como referencia una señal afectada por ruido. Sin embargo, esto no altera la posición efectiva de cada vehículo dentro del pelotón.

Se define a  $G(z)$  como la planta, el modelo dinámico de cada vehículo, que se asume igual en todos los vehículos que conforman el pelotón; esta planta se asume estrictamente propia.  $K(z)$  corresponde al controlador a ser diseñado; este controlador también se asume igual a lo largo del pelotón y debe ser propio. Debido a que se espera que los vehículos posean una velocidad diferente a cero, sus posiciones  $y_i[k]$  deberían tomar una forma similar a la de una función rampa de tiempo discreto; por lo tanto se espera que el producto  $G(z) \cdot K(z)$  posea al menos dos polos en  $z = 1$  para asegurar la ausencia de *overshoot* y el seguimiento perfecto a este tipo de referencias. Tanto el controlador como la planta son sistemas lineales, por lo que cumplen homogeneidad y superposición. Se asume que los sistemas involucrados son de una entrada y una salida (SISO).

La señal  $r(k)$  corresponde a la distancia constante deseada entre los vehículos. Para este trabajo, se considera un parámetro fijo. A diferencia de los sistemas con seguimiento a predecesor [38, 73], no es necesario que la distancia entre los vehículos sea proporcional a la velocidad bajo topologías de seguimiento a predecesor y a líder. Esto representa una ventaja del esquema seguidor a predecesor y a líder respecto a seguir únicamente al predecesor, ya que permite proponer una distancia constante entre vehículos [79, 82, 47]. En una implementación real, esta constante debe estar asociada a la capacidad de actuación en forma de frenado de los vehículos.

Debido a la existencia del factor  $i$ , se asume que cada agente conoce su propia posición dentro del pelotón o índice, sin que esta información se vea afectada por ruidos ni por

ningún otro tipo de fenómeno aleatorio. Esta suposición es razonable, ya que el número de vehículo debe ser un número natural, y el ruido asociado tendría una varianza de un orden de magnitud inferior.

### 3.1.3 Lazo de control del líder.

Para el líder se propone la suposición 5.

**Suposición 5.** *El líder, al no recibir mensajes de otros vehículos, no se ve afectado por fenómenos aleatorios, por lo que su modelo determinista también es válido en ambientes con fenómenos aleatorios.*

### 3.1.4 Representación de los lazos de control.

Al manipular el lazo de control de la Figura 3.4 definiendo una señal que corresponde al error de seguimiento asociado al lazo respecto al predecesor  $e_{pi}(k)$  y al error de seguimiento asociado al lazo del líder  $e_{li}(k)$ , definidos a partir de:

$$\begin{aligned} e_{pi}(k) &= \tilde{y}_{i-1}(k) - r(k) \\ e_{li}(k) &= \tilde{y}_{0_i}(k) - ir(k) \end{aligned} \quad (3.2)$$

A partir de la definición de (3.2) en el lazo de la Figura 3.4 es posible notar que, al aplicar superposición para aislar el efecto de cada señal auxiliar se forma un lazo de control estándar cuya función de transferencia es conocida y equivalente a:

$$T = \frac{GK}{1 + GK} \quad (3.3)$$

La expresión de 3.3 corresponde a la función de sensibilidad complementaria  $T$ . Para futuros desarrollos también se propone la función de sensibilidad y ciertas relaciones de utilidad:

$$T + S = 1 \Leftrightarrow S = 1 - T \Leftrightarrow S = \frac{1}{1 + GK} \quad (3.4)$$

Obsérvese que la expresión en (3.3) es una generalización de la expresión en (2.8), pero sin considerar el dominio de la frecuencia, ya que las señales involucradas pertenecen a un entorno estocástico, por lo que se refiere únicamente a la interconexión.

Así, es posible caracterizar la posición de cada vehículo a partir de estas señales auxiliares y la función de transferencia del lazo de (3.3).

$$\begin{aligned} y_i(k) &= T(\eta e_{pi}(k) + (1 - \eta)e_{li}(k)) \quad \forall i \in [2, N] \\ y_1(k) &= T(y_1(k) - r(k) + (1 - \eta)w_{l_1}(k) + (\eta)w_{p_1}(k)) \quad i = 1 \\ y_0(k) &= T(r_0 - r(k)) \quad i = 0 \end{aligned} \quad (3.5)$$

A partir de la definición de (3.5) es posible plantear definiciones de espacio de estado genéricas para el líder y los seguidores, a partir de la relación entre función de transferencia y variables de estado  $T(q) = C(qI - A)^{-1}B$ , ya que  $\eta$  es una constante y no altera la dinámica del sistema, por lo que se incluye dentro de las señales, no del sistema:

$$\begin{aligned}
x_i[k+1] &= Ax_i(k) + B\eta w_{p_i}(k) + B\eta y_{i-1}(k) + B(1-\eta)w_{l_i}(k) + B(1-\eta)y_0(k) \\
&\quad - Br(k)(\eta + (1-\eta)(i)) \\
y_i[k] &= Cx_i[k] \quad \forall i \in [2, N] && \text{(Seguidores)} \\
x_1[k+1] &= Ax_1(k) + B\eta w_{p_1}(k) + By_0(k) + B(1-\eta)w_{l_1}(k) \\
&\quad - Br(k) && \text{(3.6)} \\
y_1[k] &= Cx_1[k] && \text{(Primer seguidor)} \\
x_0[k+1] &= Ax_0[k] + Br_0[k] - Br(k) \\
y_0[k] &= Cx_0[k] && \text{(Líder)}
\end{aligned}$$

La expresión en (3.6) describe a cada vehículo, pero su análisis no es directo, ya que el lazo de control tiene como objetivo que las posiciones converjan a la del vehículo anterior con una diferencia equivalente a  $r(k)$ . Si esta función se cumple y la velocidad es distinta de cero, es razonable esperar que ni las posiciones ni los estados converjan a un valor acotado y constante. En cambio, estas seguirán una función rampa con una pendiente proporcional a la velocidad<sup>1</sup> deseada para el pelotón, la cual es determinada por el líder.

Obsérvese que la expresión asociada al líder en (3.6) incluye un factor  $r(k)$  que puede considerarse parte de la referencia virtual. Este factor se plantea de manera explícita para enfatizar que la dinámica del líder es **exactamente** igual a la del resto de los vehículos.

### 3.2 Esquema seguidor a predecesor y a líder con ruido aditivo para control por velocidad.

En el presente trabajo, se denomina control por posición a las leyes de control y análisis a proponer en el capítulo 4, es decir, aquellas en las que el control se basa en el error de seguimiento respecto a la distancia con el líder y el predecesor.

En contraste, se denomina control por velocidad a los sistemas de control que actúan en función de la velocidad relativa con respecto al líder y la distancia respecto al predecesor, a ser analizados en el capítulo 5.

La principal ventaja de un controlador por velocidad en comparación con un controlador por posición es que, para el control por velocidades, no es necesario que cada vehículo conozca su posición relativa  $i$  dentro del pelotón, lo cual facilita la implementación.

<sup>1</sup>En la observación 5 se profundiza esta diferencia.

**Observación 5.** Se propone la notación punto ( $\dot{\cdot}$ ) para obtener la **tasa de cambio** de una señal en el tiempo, de esta forma, se define a  $\dot{y}_i(k) \triangleq y_i(k) - y_i(k-1)$ , siendo  $\dot{y}_i(k)$  una señal proporcional a la velocidad de un vehículo  $i$ -ésimo, pero no la velocidad en sí, ya que esto depende del tiempo de muestreo. Sin embargo, por simpleza del lenguaje, se define a  $\dot{y}_i(k)$  como la velocidad del vehículo  $i$ -ésimo en lo que resta de la presente tesis.

El esquema externo, es decir, que información es compartida es igual al caso de control por posiciones, presentado en la Figura 3.1, sólo que en vez de transmitirse la posición del líder  $y_0(k)$ , se transmite su velocidad  $\dot{y}_0(k)$ . Estas transmisiones están afectas a ruidos aditivos  $w_{pi}(k)$  y  $w_{v0i}(k)$ , de media cero y varianza  $P_d$  y  $P_l$  respectivamente.

Bajo las modificaciones propuestas, se propone el lazo de control interno de la Figura 3.5.

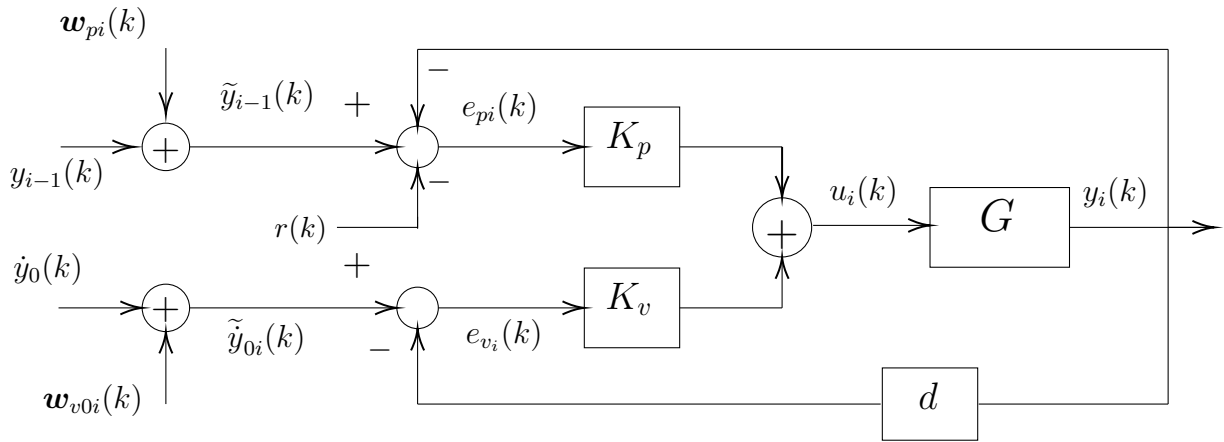


Figura 3.5: Lazo de control para un agente dentro de un pelotón LPF con control por velocidades.

Es posible proponer variantes del lazo de control mostrado en la Figura 3.5, dado que existen múltiples formas de transmitir la información de la velocidad del líder. Algunas de estas variantes incluyen la transmisión directa de la velocidad del líder, el envío de la posición del líder con dos muestras de tiempo diferentes desde el líder para reconstruir la velocidad en cada seguidor, o la transmisión de la posición del líder, que luego es almacenada por cada seguidor para formar la velocidad. En este capítulo se estudia únicamente el caso propuesto, principalmente por su simplicidad en la implementación y su similitud con el lazo de control por posición de la Figura 3.4. Otras estrategias disponibles se analizan en detalle en la sección 6.3, donde se concluye que este método de obtención de la velocidad del líder es el más eficiente en términos de uso de memoria y varianza de la señal recibida. Del lazo de control de la Figura 3.5 se presentan las siguientes diferencias respecto al lazo de control ya estudiado de la Figura 3.4:

- La constante de ponderación  $\eta$  no está presente, ya que se ha fusionado el controlador con su propia ponderación, lo que da lugar a una ponderación dinámica. Esta fusión

permite diseñar un controlador para la posición y para la velocidad de manera independiente.

- El bloque  $K_p$  corresponde al controlador de posición. Este controlador se asume con integración.
- El bloque  $K_v$  corresponde al controlador de velocidad. Este controlador se asume con integración.
- El bloque  $d$  corresponde a un retraso de tiempo discreto, es decir:

$$d(z) = \frac{z - 1}{z}$$

De esta forma, permite convertir la posición del vehículo  $i$ -ésimo  $y_i(k)$  en su velocidad  $\dot{y}_i(k)$ . Por lo que es posible usarlo metafóricamente como un derivador de tiempo discreto, pero no siéndolo, dadas las dimensiones del tiempo de muestreo.

- La señal  $\tilde{y}_{0i}(k)$  corresponde a la señal de velocidad del líder  $\dot{y}_0(k)$  que es recibida por el vehículo  $i$ -ésimo.

De esta forma, ahora la distinción entre un controlador respecto al líder y al predecesor es dinámica, no estática como en el control por posiciones. Para simplificar el análisis se propone el bloque de control equivalente  $K(z)$  que satisface:

$$K(z) = K_p(z) + d(z)K_v(z) \tag{3.7}$$

La implementación de este bloque permite recontextualizar las expresiones de  $T(z)$  dada en (3.3) y (3.4) al utilizar propiamente el álgebra de bloques.

Asimismo, (3.7) permite volver a usar las suposiciones 2, pero, como se comentó previamente, ya no es necesario que cada vehículo conozca su posición dentro del pelotón.

**Suposición 6.** *Los controladores  $K_p(z)$  y  $K_v(z)$  satisfacen:*

$$K_p(z)|_{z=1} + K_v(z)|_{z=1} = 1 \tag{3.8}$$

De esta forma, queda propuesto el esquema seguidor a predecesor y a líder con ruido aditivo para control por velocidad.

## CAPÍTULO

## 4

---



---

**Estabilidad de cuerda en sistemas con seguimiento a predecesor y a líder con control por posición.**

En el presente capítulo se aplican las nociones descritas en el capítulo 2 al sistema estudiado en la sección 3.1. En primer lugar, se introducen las variables auxiliares propuestas para este sistema, y posteriormente, se analiza su eventual convergencia.

Finalmente, se analizan las condiciones de convergencia y se establecen los requisitos para la estabilidad de cuerda en el sentido cuadrático medio. Además, se presenta una implementación por simulación para ilustrar los fenómenos deducidos.

#### 4.1 Descripción del sistema en variables auxiliares.

La convergencia de las posiciones hacia señales rampa, inducida por la velocidad constante, hace imprescindible la elección de un conjunto de variables que sean convergentes. Las definiciones de estabilidad en cuerda se plantean a partir de las variables auxiliares  $\xi(k)$ ,  $\zeta(k)$  y  $\nu(k)$ , que representan el estado alternativo, una métrica de desempeño y las entradas exógenas, respectivamente.

En [38, 73], la estabilidad de cuerda en el sentido cuadrático medio resultante asocia  $\zeta(k)$  al error de seguimiento. En este trabajo, dicha asociación se extiende hacia una definición más general como métrica de desempeño. Esto se debe a que, al existir dos controladores, uno asociado al predecesor y otro al líder, la definición tradicional de error de seguimiento podría resultar ambigua.

De este modo, dado que cada vehículo se modela a partir de (3.6), es fundamental establecer una equivalencia entre las señales auxiliares y los estados físicos definidos en (3.6).

$$\xi_i(k) = x_{i-1}(k) - x_i(k) \quad \zeta_i(k) = y_{i-1}(k) - y_i(k) - r(k) \quad \forall i \in [1, N] \quad (4.1)$$

**Observación 6.** La expresión de  $\zeta_i(k)$  en (4.1) no corresponde ni a la entrada del controlador ni al error de seguimiento local; en su lugar, representa una señal de desempeño del controlador. Esto se debe a que el esquema seguidor a predecesor y a líder introduce, en realidad, dos errores de seguimiento locales: uno asociado a la diferencia con el predecesor,  $y_{i-1}(k) - y_i(k)$ , y otro relacionado con el líder,  $y_i(k) - y_0(k)$ . El error de seguimiento utilizado como entrada al controlador es la suma ponderada de ambos.

Esta elección se fundamenta en la naturaleza de  $\zeta_i(k)$  como una señal de desempeño diseñada para demostrar la estabilidad en cuerda. Además, el error de seguimiento respecto al líder, que no forma parte de  $\zeta_i(k)$ , también converge si  $\zeta_i(k)$  es convergente. Esto se debe a que, al tratarse de un pelotón unidimensional, se satisface la relación planteada en (4.2).

$$\begin{aligned}
 y_i(k) - y_0(k) &= y_i(k) - y_{i-1}(k) + y_{i-1}(k) - y_0(k) \\
 &= y_i(k) - y_{i-1}(k) + y_{i-1}(k) - y_{i-2}(k) + y_{i-2}(k) - y_0(k) \\
 &= y_i(k) - y_{i-1}(k) + y_{i-1}(k) - y_{i-2}(k) + y_{i-2}(k) - y_{i-3}(k) + \dots + y_1(k) - y_0(k) \\
 &\implies y_i(k) - y_0(k) = \sum_{\ell=1}^i \zeta_\ell(k)
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

A partir de (4.2), se puede observar que, si  $\zeta_i(k)$  converge para todo  $i \in [1, N]$ , cualquier error de seguimiento respecto al líder,  $y_0(k) - y_i(k)$ , también será convergente.

La expresión de (4.1) está definida para todos los seguidores, pero no para el líder ( $i = 0$ ). En lugar de ello, para el líder, se propone el uso de un líder virtual, cuya definición detallada se presenta en la sección 2.2. El uso de este líder virtual permite formular el estado alternativo y la señal de desempeño del líder como se expresa en (4.3).

$$\xi_0(k) = x_{r_0}(k) - x_0(k) \quad \zeta_0(k) = r_0(k) - y_0(k) - r(k) \tag{4.3}$$

**Suposición 7.** Se asume que el lazo de control del líder regula  $\zeta_0(k)$ . Para ello, al cumplirse la suposición 2, el líder posee doble integración, lo que le permite asegurar un seguimiento perfecto de referencias rampa en estado estacionario. Por lo tanto,  $\zeta_0(k)$  será cero como una condición de operación regular.

Además, por simplicidad, se proponen los vectores de ruido  $\mathbf{w}_p(k)$  y  $\mathbf{w}_l(k)$ , definidos a partir de (4.4).

$$\mathbf{w}_p(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{p1}(k) \\ \mathbf{w}_{p2}(k) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{pN}(k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}_l(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{l1}(k) \\ \mathbf{w}_{l2}(k) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{lN}(k) \end{bmatrix} \tag{4.4}$$

Al usar los estados alternativos de (4.1), el pelotón descrito en la sección 3.1 puede ser definido a partir de la representación propuesta en el Lema 1.

**Lema 1.** *Utilizando la elección del sistema alternativo dada por (4.1) y (4.3), junto con la definición del espacio de estados del pelotón en (3.6), es posible describir las dinámicas de los sistemas en función de las variables auxiliares:*

$$\begin{aligned}\xi(k+1) &= \mathbf{A}\xi(k) + \mathbf{B}_0\zeta_0(k) + \mathbf{B}_p\mathbf{w}_p(k) + \mathbf{B}_l\mathbf{w}_l(k) + \mathbf{B}_r r(k) \\ \zeta(k) &= \mathbf{C}\xi(k) - \mathbf{1}r(k)\end{aligned}\quad (4.5)$$

Con  $\xi(k) \in \mathbb{R}^{nN}$ ,  $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ ,  $\mathbf{B}_0 \in \mathbb{R}^{nN}$ ,  $\mathbf{B}_p \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ ,  $\mathbf{B}_l \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ ,  $\mathbf{B}_r \in \mathbb{R}^{nN}$ ,  $\zeta(k) \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{N \times nN}$  e  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{nN}$ , descritas a partir de:

$$\begin{aligned}\xi(k) &\triangleq \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \vdots \\ \xi_N(k) \end{bmatrix} & \mathbf{A} &\triangleq \begin{bmatrix} A & & & \\ B\eta C & A & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & B\eta C & A \end{bmatrix} & \mathbf{B}_0 &\triangleq \begin{bmatrix} B \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_r &\triangleq \begin{bmatrix} B \\ B(1-\eta) \\ \vdots \\ B(1-\eta) \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_p &\triangleq \begin{bmatrix} -B\eta & & & \\ B\eta & -B\eta & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & B\eta & -B\eta \end{bmatrix} & \mathbf{C} &\triangleq \begin{bmatrix} C & & & \\ & C & & \\ & & \ddots & \\ & & & C \end{bmatrix} & \mathbf{1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_l &\triangleq \begin{bmatrix} -B(1-\eta) & & & \\ B(1-\eta) & -B(1-\eta) & & \\ & \ddots & \ddots & \\ & & B(1-\eta) & -B(1-\eta) \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Los elementos vacíos en las matrices correspondientes a la representación de estados alternativa son matrices de ceros, de dimensiones adecuadas para que las matrices de representación estén completamente definidas.

Demostración otorgada en el apéndice A.

**Observación 7.** *La expresión del Lema 1 es notablemente similar a su contraparte en la topología de seguidor a predecesor, tal como se propone en [73, 38]. Esta similitud se debe a la elección de la señal de desempeño como la distancia entre vehículos, lo que esencialmente representa el mismo fenómeno. A pesar de esta semejanza, es importante destacar que el origen de las matrices  $A$ ,  $B$  y  $C$  del sistema es distinto, ya que, en el lazo de control propuesto en la Figura 3.1, no se introduce una constante de tiempo  $h$ .*

El Lema 1 describe la concatenación de vehículos mediante la topología, la ley de control seleccionada y la elección de la señal de desempeño. De este modo, se posibilita la operación del pelotón como un conjunto integrado, considerando únicamente variables acotadas.

Adicionalmente a esta representación, es necesario obtener una expresión recursiva en relación a los errores de seguimiento en los vehículos, lo que permitirá habilitar el análisis de la convergencia de las señales a medida que el número de vehículos crece. Para ello, se debe plantear una señal asociada al error de seguimiento local respecto al predecesor  $e_{pi}(k)$  descrito como:

$$e_{pi}(k) = y_{i-1}(k) - y_i(k) - r(k) + \mathbf{w}_{pi}(k) = \zeta_i(k) + \mathbf{w}_{pi}(k) \quad \forall i \in [1, N] \quad (4.6)$$

Utilizando (4.6), es posible obtener para cualquier vehículo que la señal de desempeño  $\zeta_i$  puede ser descrita por transferencias como:

$$\zeta_i = \begin{cases} T [\eta \zeta_{i-1} + \eta \mathbf{w}_{pi-1} - \eta \mathbf{w}_{pi} + (1 - \eta) \mathbf{w}_{li-1} - (1 - \eta) \mathbf{w}_{li}] - Sr & \text{para } i \in [2, N] \\ T [\eta \zeta_{i-1} - \eta \mathbf{w}_{pi} - (1 - \eta) \mathbf{w}_{li}] - Sr & \text{para } i = 1 \end{cases} \quad (4.7)$$

*Proof.* Demostración presente en el apéndice B.

**Observación 8.** La expresión de (4.7) incluye un término  $Sr$ , que podría inducir a la creencia de que el error no puede ser cero, dado que  $r(k)$  está supuesto como una señal constante. Sin embargo, dado que (4.7) representa en realidad convoluciones y  $S(z)|_{z=1} = 0$  como resultado del cumplimiento de la suposición 2, este factor  $Sr$  se vuelve nulo en estado estacionario.

Este término también permite observar con facilidad que la señal de desempeño depende directamente de la referencia dada. Si esta referencia llegara a cambiar, se produciría una evolución instantánea en la señal de desempeño.

## 4.2 Análisis de convergencia temporal.

En el Lema 2 se definen los dos primeros momentos del sistema descrito en el Lema 1, así como la condición que debe cumplirse para garantizar que dichos momentos converjan a un valor específico.

**Lema 2.** Para el pelotón descrito en variables auxiliares, en el Lema 1, las medias del estado auxiliar y de la señal de desempeño satisfacen las ecuaciones recursivas:

$$\begin{aligned}\mu_{\xi}(k+1) &= \mathbf{A}\mu_{\xi}(k) + \mathbf{B}_0\zeta_0(k) + \mathbf{B}_r r(k) \\ \mu_{\zeta}(k) &= \mathbf{C}\mu_{\xi}(k) - \mathbf{1}r(k)\end{aligned}\tag{4.8}$$

Mientras que las varianzas satisfacen las ecuaciones recursivas:

$$\begin{aligned}P_{\xi}(k+1) &= \mathbf{A}P_{\xi}(k)\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_p\bar{P}_p\mathbf{B}_p^T + \mathbf{B}_l\bar{P}_l\mathbf{B}_l^T \\ P_{\zeta}(k) &= \mathbf{C}P_{\xi}(k)\mathbf{C}^T\end{aligned}\tag{4.9}$$

Con  $P_{\xi}(0) = P_{\xi 0} \geq 0$ ,  $\bar{P}_p \in \mathbb{R}^{nN \times nN} = \text{diag}(P_p, P_p, \dots, P_p)$  y  $\bar{P}_l \in \mathbb{R}^{nN \times nN} = \text{diag}(P_l, P_l, \dots, P_l)$ . De cumplirse los requisitos de estabilidad en sentido cuadrático medio, es decir, en este caso (4.10).

$$\rho(\mathbf{A}) < 1\tag{4.10}$$

$\mu_{\zeta}(k)$  y  $P_{\zeta}(k)$  convergen a:

$$\begin{aligned}\mu_{\zeta} &= 0; \\ P_{\zeta} &= \mathbf{C} \text{vec}^{-1}((\mathbf{I} - \mathbf{A} \otimes \mathbf{A})^{-1} \text{vec}(\mathbf{B}_p\bar{P}_p\mathbf{B}_p^T + \mathbf{B}_l\bar{P}_l\mathbf{B}_l^T))\mathbf{C}^T\end{aligned}\tag{4.11}$$

*Proof.* Demostración presente en el apéndice C. □

Es posible considerar las necesidades del Lema 2 como cumplidas por defecto, ya que se diseña  $K(z)$  dentro de  $T(z)$  de tal manera que  $T(z)$  tenga efectivamente los polos dentro del círculo unitario, y por ende, que  $\mathbf{A}$  tenga todos sus autovalores dentro del mismo. Al considerar que  $T(z)$  es estable, en el sentido determinista, también se consigue estabilidad en el sentido cuadrático medio del sistema, y por ende se asegura convergencia de los momentos de segundo orden [86], media y varianza, tal como se señala en (4.11). Como existen los momentos de segundo orden estacionarios, también existen las densidades espectrales de potencia estacionarias.

Además, el cumplimiento de la Suposición 2 es fundamental para asegurar que tanto los errores de seguimiento como la señal de desempeño tienden a algún valor finito en estado estacionario en general y tendiendo a cero en particular, dado el diseño del lazo de control.

Por su parte, la varianza no tiende a cero; esto es producto de la naturaleza aditiva de los ruidos respecto al predecesor y al líder. Esto está asociada al efecto de la intervención de tanto la varianza del ruido respecto al predecesor como al líder en (4.9) como entradas constantes. Sin embargo, el cumplimiento de (4.10) si asegura la convergencia de cada varianza a un valor finito.

Es importante destacar que el Lema 2 está formulado de manera que es independiente del tamaño del pelotón (lo cual afecta principalmente al tamaño de las matrices involucradas en la representación alternativa, pero no su estructura). Además, al cumplirse (4.10), los valores que toma (4.11) no dependen de las condiciones iniciales del sistema.

### 4.3 Análisis de convergencia en el número de vehículos.

Es necesario también analizar la convergencia asociada al número de vehículos, en particular cuando  $N \rightarrow \infty$ . Este análisis proporciona las condiciones necesarias para enunciar las condiciones de estabilidad en cuerda, al examinar cómo los errores de seguimiento se distribuyen a lo largo del pelotón a medida que aumenta el número de vehículos. Esta propiedad es conocida como *escalabilidad del pelotón* [73].

Al cumplirse las condiciones de (4.10), es posible asumir que el sistema es efectivamente convergente en el tiempo, y que, por lo tanto, existe una media y densidad espectral de potencia estacionarias. De existir, requisito intrínseco para la estabilidad en cuerda en el sentido cuadrático medio, la expresión que relaciona los segundos momentos de la señal de desempeño de un vehículo  $i$ -ésimo con la de su predecesor en el dominio de la frecuencia está expresada en el Teorema 3.

**Teorema 3.** *Considere el sistema descrito en el Lema 1 y que satisface (4.10), es decir, un sistema que converge en el tiempo al tener todos los autovalores de  $A$  dentro del círculo unitario. La media y la densidad espectral de potencia de la señal de desempeño del vehículo  $i$ -ésimo seguidor  $i \in [1, N], \forall N \in \mathbb{N}$ , cumplen:*

$$\begin{aligned} \mu_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= \eta T \mu_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) \\ \phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= \begin{cases} |\eta T(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + \phi_{\zeta_{is}}(e^{j\omega}) & \text{si } i \in [2, N] \\ \eta^2 |T(e^{j\omega})|^2 P_p + (1 - \eta)^2 |T(e^{j\omega})|^2 P_l & \text{si } i = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Con:

$$\begin{aligned} \phi_{\zeta_{is}}(e^{j\omega}) &= (2 - \eta) P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 - \eta |T(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\ &\quad + \eta |S(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\ P_w &= (P_p + P_l) + \eta^{-1} [(1 - 2\eta) P_l] \eta^{-1} \end{aligned} \quad (4.13)$$

La expresión de (4.12) permite establecer que la media  $\mu_{\zeta_i}$  y la densidad espectral de potencia  $\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega})$  permanecen acotadas independientemente del número de vehículos, en particular cuando  $N \rightarrow \infty, \forall \omega$ , si y solo si:

$$\eta |T(e^{j\omega})| < 1, \quad \forall \omega > 0 \quad (4.14)$$

*Proof.* La demostración está presente en el apéndice D. □

**Observación 9.** *Debido a que el factor  $\eta$  es menor a 1, y que el lazo de control busca seguimiento perfecto a referencias rampa,  $T(1) = 1$ , la definición de (4.14) puede ser extendida a condiciones*

basadas en norma infinito, sin sacrificar generalidad.

$$\|\eta T(z)\|_{\infty} < 1 \quad (4.15)$$

De esta forma el Teorema 3 no tan solo permite caracterizar la media y la densidad espectral de potencia de las señales de desempeño, si no, que más relevante aún, proporciona métricas que debe satisfacer el lazo de control propuesto de manera que dichas expresiones estacionarias permanezcan acotadas a medida que aumenta el número de vehículos. La expresión de (4.12) comienza de la premisa de que estos valores estacionarios existen al cumplirse (4.10).

**Observación 10.** *El Teorema 3 permite enunciar que  $\|\eta T(z)\|_{\infty} < 1$  es una condición necesaria para que los momentos de la señal de desempeño permanezcan acotados. A diferencia del caso de seguimiento a predecesor, esta condición es necesaria y suficiente, dada la naturaleza de  $\eta$  que permite que se cumpla (4.15) mientras que se satisface  $T(1) = 1$ . Esto corresponde a una ventaja del esquema propuesto, puesto que se aporta flexibilidad al diseño de  $T(z)$ .*

*También, de cumplirse  $\|\eta T(z)\|_{\infty} = 1$  no es posible asegurar convergencia en el número de vehículos, por lo que tampoco será posible conseguir estabilidad en cuerda en el sentido cuadrático medio.*

**Observación 11.** *La varianza  $P_w$  enunciada en (4.13) puede interpretarse como una varianza ponderada, la cual regula la transferencia de la varianza de la señal de desempeño entre los vehículos. Además, permite unificar el análisis en una única varianza. Debido a su función de control sobre la transferencia, se le denomina varianza de paso o varianza ponderada. La sección 6.2.2 ofrece una explicación más detallada sobre la interpretación de esta varianza.*

Para completar el análisis de escalabilidad y permitir una verificación directa de las expresiones presentadas, es necesario investigar si el valor estacionario de la varianza en cada vehículo aumenta o disminuye conforme se añaden más vehículos al pelotón, así como caracterizar dicho valor estacionario. Con este objetivo, se propone una expresión alternativa para la densidad espectral de potencia en (4.12).

$$\begin{aligned} \phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + (1 - \eta)P_w |\eta T(e^{j\omega})^{i-1}|^2 - \eta |T(e^{j\omega})(\eta T(e^{j\omega})^{i-1})|^2 P_w \\ &\quad + \eta |S(e^{j\omega})(\eta T(e^{j\omega})^{i-1})|^2 P_w + |(\eta T)^i|^2 P_w \end{aligned} \quad (4.16)$$

*Proof.* Demostración presente en el apéndice E. □

**Corolario 1.** *Al considerar el pelotón descrito en (4.5), que satisface las condiciones (4.10) y (4.15). Entonces, para  $i \in \{2, \dots, N\}$ ,  $\forall N \in \mathbb{N}$ , las varianzas estacionarias  $P_{\zeta_i}$  satisfacen*

$$1. \quad P_{\zeta_i} = P_{\zeta_{i-1}} + (1 - \eta)P_w \left\| (\eta T(e^{j\omega}))^{i-1} \right\|_2^2 - \eta P_w \left\| T(e^{j\omega})(\eta T(e^{j\omega}))^{i-1} \right\|_2^2 + \eta P_w \left\| S(e^{j\omega})(\eta T(e^{j\omega}))^{i-1} \right\|_2^2 + P_w \left\| (\eta T(e^{j\omega}))^i \right\|_2^2 \quad \forall i \in [2, N]$$

$$2. \quad P_{\zeta_i} \geq P_{\zeta_{i-1}} \quad \forall i \in [2, N]$$

$$3. \quad \max_i P_{\zeta_i} = P_{\zeta_N} = \left( (1 - \eta) \left\| F_{A_\zeta} \right\|_2^2 - \eta \left\| F_{B_\zeta} \right\|_2^2 + \eta \left\| F_{C_\zeta} \right\|_2^2 + \left\| F_{D_\zeta} \right\|_2^2 \right) P_w$$

$$4. \quad \lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N} = \left( (2 - \eta) \left\| \frac{\eta T(z)}{M(z)} \right\|_2^2 - \eta \left\| \frac{\eta T(z)^2}{M(z)} \right\|_2^2 + \left\| \frac{S(z)\eta T(z)}{M(z)} \right\|_2^2 \right) P_w$$

Con  $P_w$  descrito en (4.13) y donde:

$$|M(e^{j\omega})|^2 = 1 - |\eta T(e^{j\omega})|^2$$

$$F_{A_\zeta} = \begin{bmatrix} 0 & (\eta T) & (\eta T)^2 & \dots & (\eta T)^{N-1} \end{bmatrix}$$

$$F_{B_\zeta} = \begin{bmatrix} 0 & T(\eta T) & T(\eta T)^2 & \dots & T(\eta T)^{N-1} \end{bmatrix}$$

$$F_{C_\zeta} = \begin{bmatrix} 0 & S(\eta T) & S(\eta T)^2 & \dots & S(\eta T)^{N-1} \end{bmatrix}$$

$$F_{D_\zeta} = \begin{bmatrix} (\eta T) & (\eta T)^2 & (\eta T)^3 & \dots & (\eta T)^N \end{bmatrix}$$

*Proof.* Presente en el Apéndice F. □

**Observación 12.** *El Teorema 2 exige condiciones que debe satisfacer  $\eta T(z)$ . Estas condiciones son cumplidas por defecto, pues si se cumplen las ecuaciones (4.10) y (4.15) junto con la suposición 2 se asegura que el sistema si pertenece a  $\mathcal{RH}_\infty$  y que  $1 > \|\eta T(z)\|_\infty$ . Esto permite que  $M(e^{j\omega})$  pueda ser calculado utilizando el Teorema 2.*

El Corolario 1 establece que, al cumplirse las condiciones de convergencia temporal y en el número de vehículos de (4.10) y (4.15), respectivamente, las varianzas estacionarias aumentan a lo largo del pelotón conforme crece el índice  $i$ . Más relevante aún es que los valores estacionarios de la varianza de cada vehículo están acotados por un valor constante que no depende de  $N$ , es decir,  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N}$ . Es importante señalar que este análisis se realiza en estado estacionario, por lo que no se descarta la posibilidad de que, dadas ciertas condiciones iniciales, se produzca un transitorio que pueda superar dicho valor estacionario.

## 4.4 Análisis de estabilidad en cuerda.

Una vez establecidas las condiciones que debe cumplir el pelotón descrito en (4.5) para garantizar la convergencia tanto en el tiempo como en el número de vehículos (es decir, la convergencia a medida que el número de vehículos crece a lo largo del pelotón), es necesario analizar las condiciones de estabilidad en cuerda para dicho pelotón.

De una forma similar a la propuesta en [73], es necesario analizar las condiciones que aseguran la estabilidad en cuerda basado en la norma  $\mathcal{L}_p$  y la varianza basada en norma  $\mathcal{L}_q$ , en orden de satisfacer las condiciones de la definición 5. Una vez probada la definición 5, se buscan las condiciones para asegurar estabilidad de cuerda en el sentido cuadrático medio a partir de la definición 6. Como la configuración bajo análisis está basada en la propuesta en [73, 38], se busca asegurar estabilidad en cuerda basada en las normas  $\mathcal{L}_2$  para la media, y  $\mathcal{L}_\infty$  para la varianza. Esto no significa que la definición 5 sea exclusiva para estas normas, sino que es válida para cualquier elección de  $p, q \in \mathbb{N} \cup (+\infty)$  siempre y cuándo estas normas sean existentes.

Sea  $\mathcal{G}$  el conjunto de condiciones iniciales  $\xi(0) \in \mathbb{R}^{nN}$  que son de segundo orden, cuya matriz de varianza es definida positiva y el vector de entradas exógenas  $\nu \in \mathbb{R}^N$ , definido de manera que puede ser escrito como  $\nu = \zeta_0(k)\phi_1 + w_p(k) + w_l(k)$ , con  $\phi_1 = [1 \ 0 \ \dots \ 0]^T$ . De esta forma, asumiendo que se cumple la suposición 2, la media y varianza de  $\nu$  están definidas como:

$$\begin{aligned} \mu_\nu(k) &= \phi_1 \zeta_0(k) \\ P_\nu(k) &= \bar{P}_p + \bar{P}_l = \text{diag}(P_p + P_l, P_p + P_l, \dots, P_p + P_l) \end{aligned} \quad (4.17)$$

Para poder demostrar estabilidad en cuerda, también se asume que las correspondientes normas  $\mathcal{L}_2$  y  $\mathcal{L}_\infty$  de  $\nu$  existen. Son tales que se cumpla:

$$\begin{aligned} \|\mu_\nu(k)\|_2 &= \|\zeta_0(k)\|_2 \\ \|\bar{P}_p + \bar{P}_l\|_{\mathcal{L}_\infty} &= P_d + P_l \end{aligned} \quad (4.18)$$

**Observación 13.** La señal  $r(k)$  no aparece en  $\nu(k)$ , a pesar de ser definida como una señal externa. Sin embargo, dado su comportamiento como una señal constante, puede considerarse como un parámetro fijo de antemano, lo que permite linealizar y trabajar con una señal de referencia cero. Además, la elección de  $r(k)$  no afecta el desempeño del sistema del pelotón, siempre que sea una señal constante, por lo que no entra en la definición estricta de  $\nu(k)$ , tal como se describe en la sección 2.3.1.

**Teorema 4.** *Considérese el sistema descrito en el Lema 1, que cumple con las condiciones de convergencia en el tiempo de (4.10) y las condiciones de convergencia en el número de vehículos de (4.15), bajo las suposiciones enunciadas en 2. El cumplimiento de (4.10) y (4.15) constituye una condición necesaria y suficiente para lograr estabilidad en cuerda  $\mathcal{L}_2 - \mathcal{L}_\infty$ , basada en la acotación de la media mediante la norma  $\mathcal{L}_2$  y de la varianza mediante la norma  $\mathcal{L}_\infty$ . Esta estabilidad en cuerda cumple con la definición 6, lo que implica que el sistema es estable en cuerda en el sentido cuadrático medio. De esa forma, la media y la varianza tienden a los valores límite de:*

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\zeta_N}(k) = 0$$

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\zeta_N}(k) = P_w \left( (2 - \eta) \left\| \frac{\eta T(z)}{M(z)} \right\|_2^2 - \eta \left\| \frac{\eta T(z)^2}{M(z)} \right\|_2^2 + \left\| \frac{S(z)\eta T(z)}{M(z)} \right\|_2^2 \right)$$

Con  $P_w$  definido en (4.13).

*Proof.* La demostración está presente en el apéndice G. □

En el Teorema 4, se proponen condiciones para la estabilidad en cuerda utilizando normas  $\mathcal{L}_2$  para la media y  $\mathcal{L}_\infty$  para la varianza, de manera similar a lo planteado en [73]. Estas condiciones son independientes del tamaño del pelotón, de las condiciones iniciales del sistema y de la referencia utilizada. Son tanto necesarias como suficientes para garantizar la estabilidad de cuerda en el sentido cuadrático medio. Las condiciones presentadas en (4.10) y (4.15) aseguran la convergencia en cuerda de la media y la varianza, tanto en el tiempo como en el número de vehículos, constituyendo los requerimientos necesarios para garantizar la estabilidad en cuerda en el Teorema 4.

## 4.5 Resultados de simulación.

Para validar los resultados obtenidos en el presente capítulo, se propone una simulación del pelotón diseñado con el fin de ilustrar la estabilidad de cuerda en el sentido cuadrático medio. Se considera un pelotón homogéneo de 40 vehículos, donde cada lazo de control interno posee funciones de transferencia  $G(z)$ ,  $K(z)$  y  $T(z)$  enunciadas en (4.19).

$$G(z) = \frac{1}{z-1} \quad K(z) = \frac{0.6z-0.51}{z-1} \quad \implies \quad T(z) = \frac{0.6z-0.51}{z^2-1.4z+0.49} \quad (4.19)$$

La función de transferencia del lazo  $T(z)$ , enunciada en (4.19) propone como limitante de diseño  $\|T(z)\|_\infty = 1.2365$ , por lo que, para satisfacer (4.15) se requiere que  $\eta < \frac{1}{1.2365} \approx$

0.8087, mientras que las condiciones de (4.10) son satisfechas ya que todos los polos de  $T(z)$  están ubicados en  $z = 0.7$ , por lo que  $\rho(A) = 0.7$ .

De esta forma, se propone  $\eta_e = 0.5$  y  $\eta_u = 0.82$ , para ilustrar un caso estable e inestable en cuerda en el sentido cuadrático medio, respectivamente. Por simpleza, se asume un tiempo de muestreo  $T_s = 1$ , de forma que una muestra corresponde a un segundo. De esta forma, la simulación propone una situación donde los vehículos aceleran durante los primeros 40 segundos hasta alcanzar una velocidad de crucero de  $28 \frac{m}{s}$ , unos  $100 \frac{km}{h}$  aproximadamente, mientras conservan una distancia entre vehículos de  $r(k) = 10 \quad \forall k \in \mathbb{N}^0$  metros. Todos los vehículos comienzan en reposo, es decir, velocidad cero.

Al igual que en [73] se proponen dos situaciones: Condiciones iniciales cero y condiciones iniciales distintas de cero. Cuando se habla de condiciones iniciales cero, se quiere decir que todos los vehículos parten desde el mismo punto en el espacio ( $y_i(0) = 0 \quad \forall i \in [1, N]$ ), mientras que se habla de condiciones iniciales distintas de cero, quiere decir que los vehículos empiezan en el orden propuesto, pero no necesariamente con la distancia entre vehículos propuesta. En este caso, si bien la posición inicial de los vehículos es una variable aleatoria, para las simulaciones se propone que la condición inicial es conocida con certeza, puesto que el fenómeno aleatorio está enfocado en la transmisión de datos.

Los ruidos propuestos poseen varianzas constantes  $P_p = 2$  y  $P_l = 4.4$ . Se proponen  $1 \times 10^5$  iteraciones de tipo Monte Carlo, para obtener las estadísticas de la media y varianza de la señal de desempeño y de la posición. El sistema posee una perturbación en el líder de  $-15\mu(k - 70)$ , para estudiar también la reacción del sistema ante perturbaciones; en el contexto real que se busca emular esta perturbación representa un frenado brusco.

El código de colores a utilizar permite distinguir *grosso modo* la posición de cada elemento del pelotón, siendo el líder denotado por un color azul oscuro y el último seguidor por un color rojo oscuro. Los gráficos poseen también denotado el valor de  $r(k)$  y  $-r(k)$  en la representación de la media de la señal de desempeño, esto permite estudiar con mayor facilidad el funcionamiento del sistema propuesto.

#### 4.5.1 Con condiciones iniciales cero.

En primer lugar, se propone el caso con condiciones iniciales iguales a cero. Este es un caso hipotético, puesto que es físicamente imposible que todos los vehículos se ubiquen en *exactamente* la misma posición. Sin embargo, como bien se comenta en [73], es necesario estudiar este caso puesto que es un ejemplo didáctico de cómo evoluciona el transiente del sistema de pelotón. Luego, en la observación 14 se comenta en profundidad el significado de este fenómeno.

##### Caso estable en cuerda

Al simular el sistema estable en cuerda se obtiene la Figura 4.1.

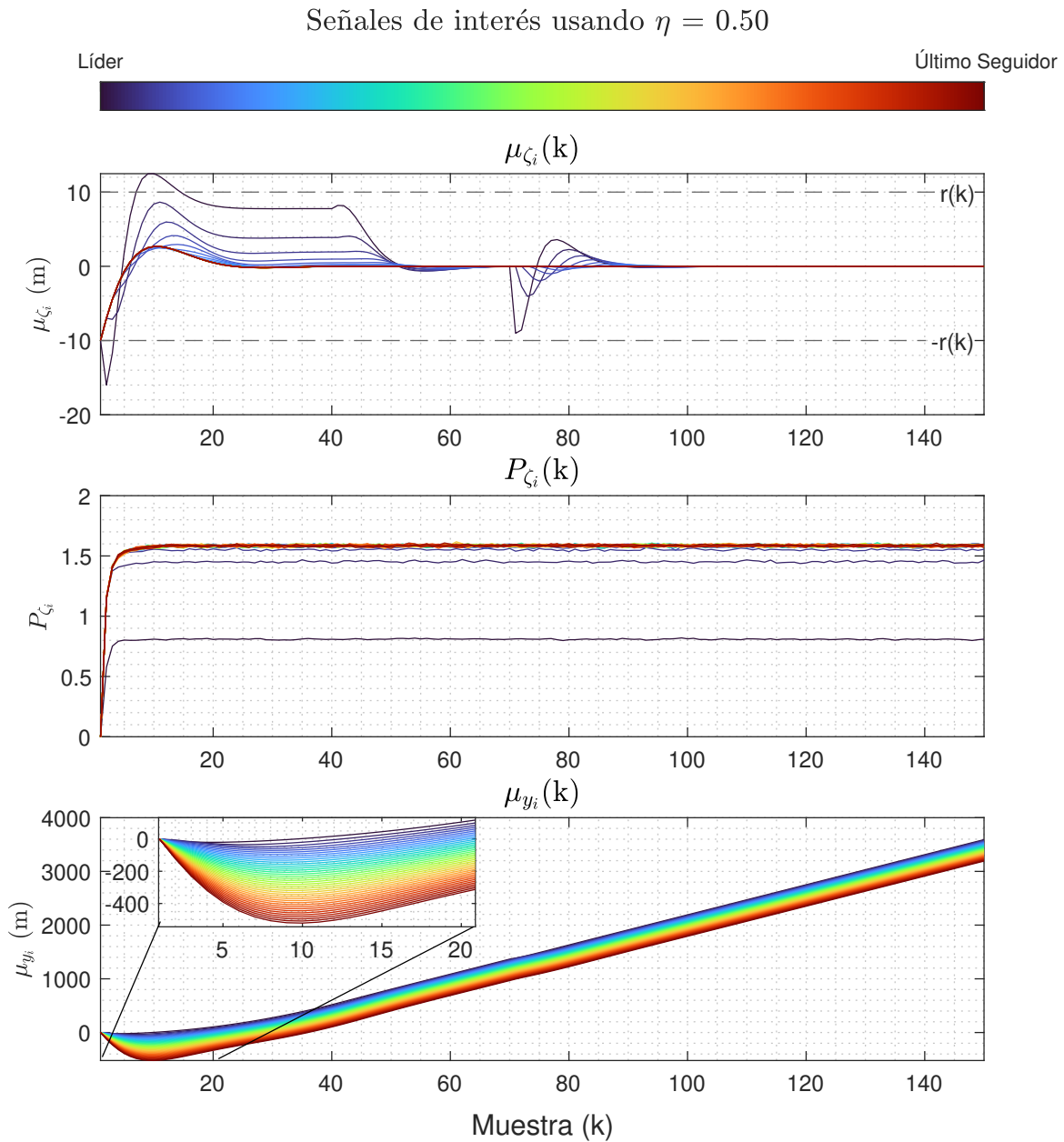


Figura 4.1: Señales de interés de un pelotón con topología seguidor a predecesor y a líder con transmisión con ruido aditivo. Simulación realizada con condiciones iniciales iguales a cero y estable en cuerda.

La Figura 4.1 muestra que la señal de desempeño tiende a cero en estado estacionario, pero presenta dos intervalos en los que no es nula: durante la aceleración inicial y al aplicarse la perturbación. Durante la aceleración, el error de seguimiento permanece constante debido a que la aceleración puede interpretarse como un cambio constante en la referencia. Por lo

tanto, es esperado que la señal de desempeño tenga una media diferente de cero mientras la referencia sigue cambiando. En cuanto a la perturbación, se observa que ésta se disipa conforme al diseño, tanto en el tiempo como cuando el número de vehículos aumenta. Además, se nota que la amplitud de la media de la señal de desempeño disminuye a medida que se avanza a lo largo del pelotón hasta volver a ser cero, un fenómeno conocido como convergencia en el número de vehículos.

En cuanto a las varianzas, se observa el fenómeno descrito en el corolario 1, ya que éstas efectivamente alcanzan un valor estacionario correspondiente a  $P_{\zeta_N} \approx \lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N}$ . Cabe destacar que la perturbación no afecta las varianzas, lo cual se debe a que dicha perturbación es de naturaleza determinística.

### **Caso inestable en cuerda**

Al simular el sistema inestable en cuerda se obtiene la Figura 4.2.

La Figura 4.2 muestra un comportamiento completamente opuesto al observado en la Figura 4.1. En primer lugar, la media de la señal de desempeño se amplifica progresivamente a lo largo del pelotón, exhibiendo comportamientos altamente oscilatorios. Estos comportamientos son producto de la no convergencia en el número de vehículos, dado que el sistema es temporalmente estable (Ya que sus polos, son los mismos que en el caso estable en cuerda en el sentido cuadrático medio). Esto provoca que la perturbación en la señal de desempeño, originada por las condiciones iniciales, se superponga con la perturbación de entrada al sistema, situación que no ocurre en el experimento presentado en la Figura 4.1, donde los errores de seguimiento producto del transiente se disipan antes de la intervención de la perturbación. Tal comportamiento representa un riesgo significativo para la seguridad durante la implementación. Por otro lado, aunque la varianza converge dentro del intervalo analizado, sus valores son notablemente mayores en comparación con los observados en el sistema estable en cuerda.

La perturbación se disipa en el tiempo, pero no es posible afirmar que ocurre el mismo fenómeno en el número de vehículos.

#### **4.5.2 Con condiciones iniciales distintas a cero.**

Ahora, se propone analizar el caso en el que las condiciones iniciales son distintas de cero. En este escenario, los vehículos comienzan separados y en el orden establecido inicialmente, pero no respetan la distancia deseada entre ellos (Es decir, la señal de desempeño no parte desde cero).

Dado que se asume que existe certidumbre en la condición inicial, puesto que aún no se realiza comunicación inalámbrica,  $P_\nu(0) = P_\xi(0) = 0$ .

### **Caso estable en cuerda**

En el caso estable en cuerda, con condiciones iniciales distintas a cero, las simulaciones

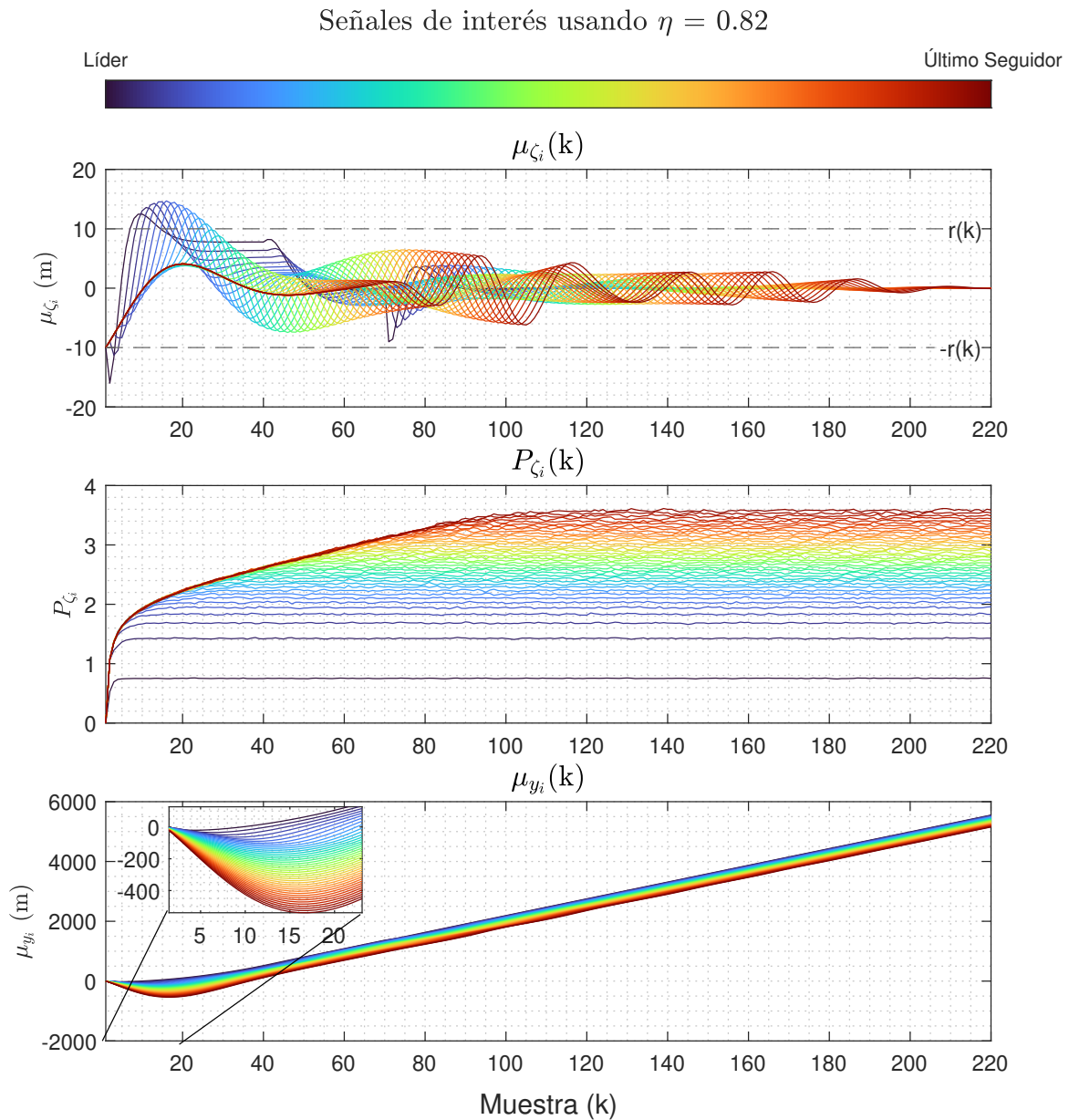


Figura 4.2: Señales de interés de un pelotón con topología seguidor a predecesor y a líder con transmisión con ruido aditivo. Simulación realizada con condiciones iniciales iguales a cero e inestable en cuerda.

corresponden a las presentadas en la Figura 4.3.

Los resultados mostrados en la Figura 4.3 son bastante similares a los de la Figura 4.1, ya que también presentan una media estacionaria de la señal de desempeño igual a cero. Asimismo, el comportamiento de la varianza de la señal de desempeño es idéntico en ambos

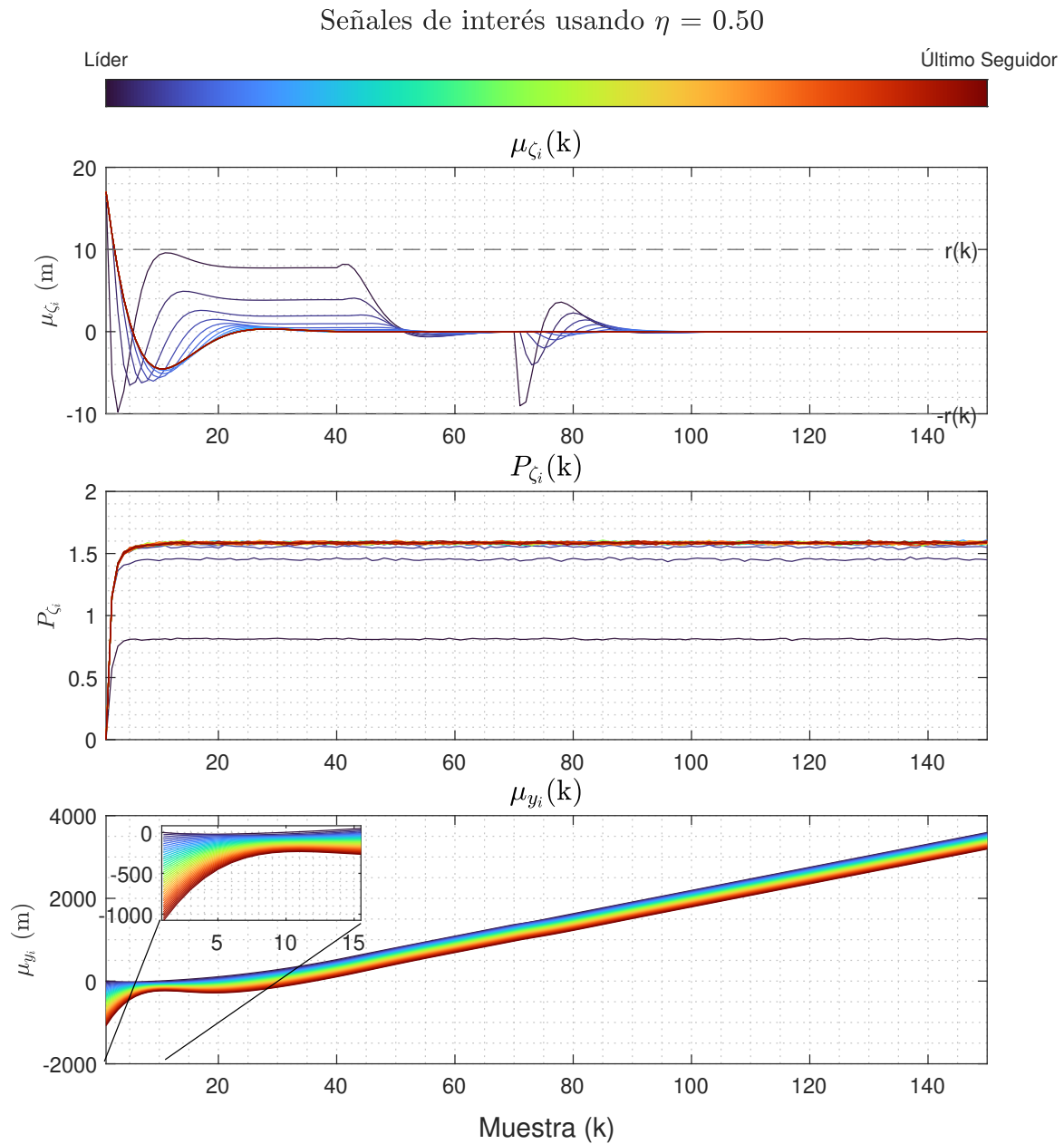


Figura 4.3: Señales de interés de un pelotón con topología seguidor a predecesor y a líder con transmisión con ruido aditivo. Simulación realizada con condiciones iniciales distintas a cero y estable en cuerda.

casos.

El efecto de las condiciones iniciales se manifiesta como un alto valor en la media de la señal de desempeño al inicio de la simulación. Sin embargo, posteriormente, el pelotón alcanza la formación deseada. Este comportamiento evidencia la estabilidad en cuerda, ya

que la amplitud de la media de la señal de desempeño disminuye a medida que se avanza a lo largo del pelotón.

**Caso inestable en cuerda**

Para un caso inestable en cuerda con condiciones iniciales distintas a cero, se obtienen las simulaciones de la Figura 4.4.

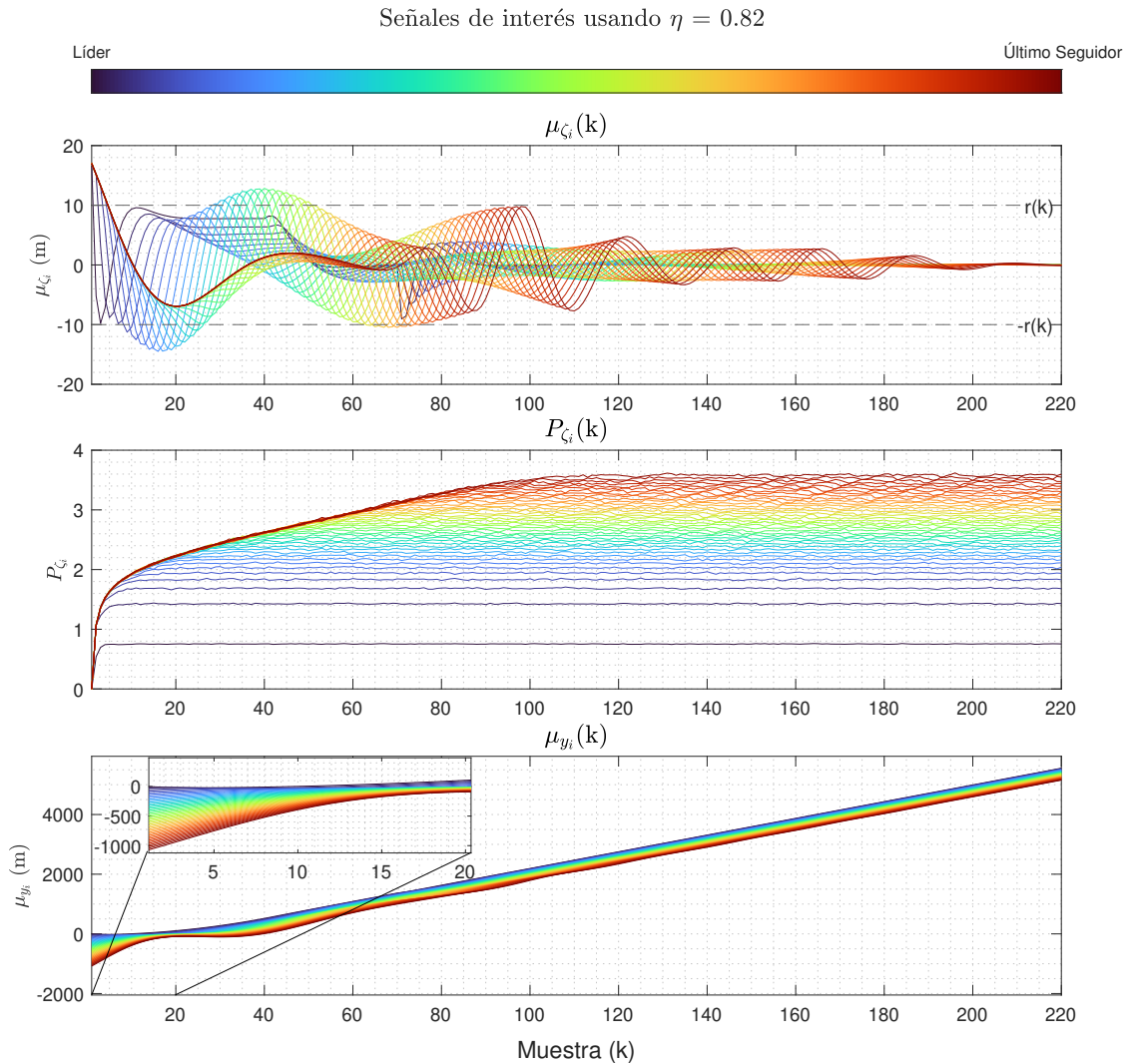


Figura 4.4: Señales de interés de un pelotón con topología seguidor a predecesor y a líder con transmisión con ruido aditivo. Simulación realizada con condiciones iniciales distintas a cero e inestable en cuerda.

Al estudiar la Figura 4.4 se hace presente la amplificación de los errores de seguimiento, en particular, de la media de la señal de desempeño a lo largo del pelotón. Este fenómeno se hace más presente al notar el impacto que poseen las condiciones iniciales del pelotón

a medida que el número de vehículo aumenta. Al igual que en el caso de la Figura 4.2, la varianza toma valores mucho más altos, permitiendo concluir a partir de las simulaciones que los sistemas inestables en cuerda son mucho más ruidosos.

Producto de la perturbación, se produce una amplificación de la magnitud del error de seguimiento, que se disipa en el tiempo. Esta disipación del error de seguimiento es producto del cumplimiento del Lema 2, que asegura que el sistema al menos disipa perturbaciones en el tiempo.

### 4.5.3 Consideraciones generales de las simulaciones.

Las simulaciones realizadas permiten observar que la estabilidad en cuerda facilita la disipación de los errores de seguimiento a lo largo del pelotón, fenómeno claramente visible en las medias de la señal de desempeño. Además, en los sistemas estables en cuerda, se evidencia una menor varianza en dicha señal, lo que refuerza el impacto positivo de la estabilidad de cuerda en el desempeño del sistema.

El efecto de las condiciones iniciales no es observable en el estado estacionario para el sistema estable en cuerda, ya que, de acuerdo con el corolario 1, las varianzas se estabilizan en un valor constante. Además, las medias de la señal de desempeño tienden a cero, independientemente de las condiciones iniciales del sistema.

Las condiciones iniciales con valores distintos a los que permitan error de seguimiento cero provocan un error significativo al inicio de la simulación, visible como un aumento abrupto de la media del error de seguimiento. Este error puede minimizarse generando una curva de aceleración menos pronunciada, lo que implica que el sistema alcance la velocidad crucero de manera más gradual. Este fenómeno se debe a la inercia inherente al sistema.

**Observación 14.** *El que exista una señal de desempeño con magnitud superior a  $r(k)$  o la coincidencia de posiciones entre dos vehículos sugiere la posibilidad de colisiones. Es importante destacar que la estabilidad de cuerda no garantiza que todos los vehículos eviten colisiones, ya que este es un fenómeno distinto. Por lo tanto, bajo ciertas condiciones, como curvas de aceleración pronunciadas o perturbaciones drásticas, un sistema que sea estable en cuerda podría experimentar colisiones de todas formas.*

## 4.6 Discusión respecto al estado del arte.

Es posible comparar el desempeño de un sistema de pelotón diseñado con topología de comunicación que emplea seguimiento a predecesor y a líder basadas en control por posición con las soluciones actuales propuestas, basadas en topología de comunicación con seguimiento a predecesor, documentadas en [73, 38].

Una ventaja comparativa al momento de implementar el esquema con Seguimiento a Predecesor y a Líder (LPF) respecto a los esquemas con Seguimiento a Predecesor (PF) es que los sistemas LPF son capaces de moverse de forma coordinada. Esto se debe al canal de comunicación con el líder, que permite que el último seguidor comience su movimiento al mismo tiempo que el líder acelera, lo que hace que sea una solución más rápida. Esta diferencia puede observarse en las simulaciones, donde los últimos vehículos retroceden para lograr la formación deseada con la distancia entre vehículos propuesta, mientras que en los sistemas PF, los vehículos deben esperar a que se mueva su predecesor para poder moverse.

Una desventaja al momento de implementar el esquema LPF es que requiere un canal adicional de comunicación, lo que añade varianza a la señal de desempeño. Cabe resaltar que la solución propuesta se basa en una premisa ideal en la práctica: que la varianza de la comunicación asociada al líder es la misma para todos los vehículos que conforman el pelotón.

Sin embargo, las mayores ventajas comparativas asociadas al diseño de un sistema LPF como es propuesto en el presente capítulo están asociadas al proceso de su diseño, pues:

- Es posible diseñar  $T(z)$  de una forma tradicional y ampliamente documentada, ya que sigue las ecuaciones del lazo de control estándar, sin tener requerimientos adicionales asociados a su norma infinito. Esto aporta flexibilidad en comparación con los sistemas PF, en los cuales el lazo de control incluye las condiciones de estabilidad de cuerda. Posteriormente, el diseño de  $\eta$  está condicionado a este sistema resultante.
- Es posible diseñar  $\eta$  de tal manera que no solo garantice la estabilidad de cuerda, sino que también permita manipular métricas del sistema, como la evolución de los momentos entre vehículos.
- Es posible fijar de antemano la distancia entre vehículos deseada, sin necesidad de un *time headway*, como en los sistemas PF [36]. Esto facilita la interpretación de los sistemas con seguimiento a predecesor y a líder.

En el capítulo 6 se exponen discusiones, condiciones y herramientas que permiten diseñar el sistema LPF para seguir un comportamiento deseado.

La elección de una distancia fija entre vehículos, aunque representa una ventaja durante el diseño, puede ser contraproducente en una implementación real, tal como se expuso en la observación 14. Por lo tanto, esta distancia debe estar condicionada a factores como la velocidad de operación del sistema, la inercia de los vehículos, la capacidad de frenado, así como al cumplimiento de las normativas de seguridad.

## CAPÍTULO

## 5

---



---

**Estabilidad de cuerda en sistemas con seguimiento a predecesor y a líder con control por velocidad.**

En este capítulo se pretende ampliar las definiciones presentadas en el capítulo 4, aplicándolas a sistemas de control de pelotón con topología de seguimiento a predecesor y a líder, donde se considera la velocidad del líder como variable de control.

Este capítulo explora las diferencias entre ambos sistemas de control, sin profundizar con la misma formalidad que en el caso del control por seguimiento a distancia. Por lo tanto, se considera que los resultados presentados aquí son un complemento de los expuestos en el capítulo 4, y no un resultado en sí mismos.

### 5.1 Deducción del sistema de control por velocidad.

Es posible notar, mediante álgebra de bloques sobre el sistema descrito en la sección 3.2, que el sistema sigue la siguiente ley de control:

$$\begin{aligned} u_i &= K_p \cdot (\tilde{y}_{i-1} - y_i - r) + K_v \cdot (\tilde{y}_{0i} - \dot{y}_i) \\ y_i &= G u_i \end{aligned} \tag{5.1}$$

Las expresiones de (5.1) pueden fusionarse al considerar (3.7):

$$y_i = \frac{G}{1 + GK} \left( K_p (\tilde{y}_{i-1} - r) + K_v (\tilde{y}_{0i}) \right) \tag{5.2}$$

Es posible determinar que  $K_p \cdot (\tilde{y}_{i-1} - r) + K_v \cdot (\tilde{y}_{0i})$  es la salida de un sistema auxiliar, formado por los controladores  $K_p$  y  $K_v$ . Este sistema se denomina sistema  $\varepsilon$ . El sistema  $\varepsilon$  posee como entradas  $\tilde{y}_{i-1} - r$  y  $\tilde{y}_{0i}$  y como salida  $O_\varepsilon = K_p (\tilde{y}_{i-1} - r) + K_v (\tilde{y}_{0i})$ .

Si los controladores poseen dinámicas en espacio de estados  $K_p = A_{K_p}, B_{K_p}, C_{K_p}, D_{K_p}$  y  $K_v = A_{K_v}, B_{K_v}, C_{K_v}, D_{K_v}$ , la representación en espacio de estados del sistema  $\varepsilon$  está dado por:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{\varepsilon_{ai}}(k+1) \\ x_{\varepsilon_{bi}}(k+1) \end{bmatrix}}_{x_{\varepsilon i}(k+1)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A_{K_p} & 0 \\ 0 & A_{K_v} \end{bmatrix}}_{A_\varepsilon} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{\varepsilon_{ai}}(k) \\ x_{\varepsilon_{bi}}(k) \end{bmatrix}}_{x_{\varepsilon i}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_{K_p} & 0 \\ 0 & B_{K_v} \end{bmatrix}}_{B_\varepsilon} [\tilde{y}_{i-1}(k) - r(k) \quad \tilde{y}_{0i}(k)] \\ O_{\varepsilon i}(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} C_{K_p} & C_{K_v} \end{bmatrix}}_{C_\varepsilon} x_{\varepsilon i}(k) + \underbrace{\begin{bmatrix} D_{K_p} & 0 \\ 0 & D_{K_v} \end{bmatrix}}_{D_\varepsilon} [\tilde{y}_{i-1}(k) - r(k) \quad \tilde{y}_{0i}(k)] \end{aligned} \quad (5.3)$$

La primera columna de  $B_\varepsilon$  se denomina  $B_{\varepsilon p}$  y la segunda columna  $B_{\varepsilon v}$ , es decir:

$$B_{\varepsilon p} = \begin{bmatrix} B_{K_p} \\ 0 \end{bmatrix} \quad B_{\varepsilon v} = \begin{bmatrix} 0 \\ B_{K_v} \end{bmatrix} \quad (5.4)$$

Asímismo, sea:

$$\frac{G}{1 + GK} = (A_l, B_l, C_l, 0)$$

De manera que el sistema que representa la dinámica de  $y_i(k)$  está dado por:

$$\begin{aligned} x_{li}(k+1) &= A_l x_{li}(k) + B_l O_{\varepsilon i}(k) \\ y_i &= C_l x_{li}(k) \end{aligned} \quad (5.5)$$

Fusionando ambos sistemas de (5.5) y (5.3) se obtiene el sistema que define a cada seguidor en su totalidad:

$$\begin{aligned} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{li}(k+1) \\ x_{\varepsilon i}(k+1) \end{bmatrix}}_{x_{ti}(k+1)} &= \underbrace{\begin{bmatrix} A_l & B_l C_\varepsilon \\ 0 & A_\varepsilon \end{bmatrix}}_{A_t} \underbrace{\begin{bmatrix} x_{li}(k) \\ x_{\varepsilon i}(k) \end{bmatrix}}_{x_{ti}(k)} + \underbrace{\begin{bmatrix} D_{K_p} & D_{K_v} \\ B_{\varepsilon p} & B_{\varepsilon v} \end{bmatrix}}_{B_t} [\tilde{y}_{i-1}(k) - r(k) \quad \tilde{y}_{0i}(k)] \\ y_i(k) &= \underbrace{\begin{bmatrix} C_l & 0 \end{bmatrix}}_{C_t} x_{ti}(k) \end{aligned} \quad (5.6)$$

La primera columna de  $B_t$  se denomina  $B_p$  y la segunda columna se denomina  $B_v$ , es decir:

$$B_p = \begin{bmatrix} D_{K_p} \\ B_{\varepsilon p} \end{bmatrix} \quad B_v = \begin{bmatrix} D_{K_v} \\ B_{\varepsilon v} \end{bmatrix} \quad (5.7)$$

Se puede discutir si la representación propuesta en (5.6) es mínima. Esta representación claramente no es mínima, ya que incluye más estados de los necesarios, debido a la doble

inclusión de la dinámica de los controladores, tanto en el sistema  $\varepsilon$  como en el sistema  $\frac{G}{1+GK}$ . Esto implica que, aunque exista una realimentación estable en  $T(z)$ , el sistema de (5.6) podría presentar polos adicionales correspondientes a los polos del controlador. En consecuencia, bajo las suposiciones de 2, el sistema resultante tendrá al menos dos polos en  $z = 1$ , lo que rechaza su estabilidad a menos que se considere que la forma propuesta no es mínima.

En resumen, el sistema en lazo cerrado está planteado como:

$$\begin{aligned} x_{ti}(k+1) &= A_t x_{ti}(k) + B_p(\tilde{y}_{i-1}(k) - r(k)) + B_v \tilde{y}_0(k) \\ y_i(k) &= C_t x_{ti}(k) \end{aligned} \quad (5.8)$$

El sistema (5.8) puede ser reemplazado por su representación mínima, lo que permitirá obtener matrices  $A_t$ ,  $B_p$ ,  $B_v$  y  $C_t$  de dimensiones reducidas, asegurando que los autovalores de  $A_t$  coincidan con los polos de  $T(z)$ .

## 5.2 Descripción del sistema en variables auxiliares.

De manera similar al caso de control por posiciones, se propone el uso de un conjunto de variables auxiliares  $\xi(k)$ ,  $\zeta(k)$  y  $\nu(k)$ . Dado que la topología de comunicación es la misma, se opta por utilizar las variables auxiliares definidas en (4.1), junto con una versión homologada de los vectores 4.4:

$$\mathbf{w}_p(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{p1}(k) \\ \mathbf{w}_{p2}(k) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{pN}(k) \end{bmatrix} \quad \mathbf{w}_l(k) = \begin{bmatrix} \mathbf{w}_{v01}(k) \\ \mathbf{w}_{v02}(k) \\ \vdots \\ \mathbf{w}_{v0N}(k) \end{bmatrix} \quad (5.9)$$

En cuanto a las definiciones del líder, son las mismas que las de (4.3), con la adición de la señal de desempeño de velocidades,  $\zeta_{v0}(k)$ , definida como:

$$\zeta_{v0}(k) = \dot{r}_0(k) - \dot{y}_0(k) \quad (5.10)$$

**Suposición 8.** *Se asume que el lazo de control del líder asegura regulación para  $\zeta_{v0}(k)$ . Para ello, al cumplir la suposición 2, el líder tiene doble integración, lo que le permite garantizar seguimiento perfecto de referencias tipo escalón en estado estacionario. Esta suposición complementa la 7, ya que enfatiza la naturaleza integrativa del controlador, asegurando que la referencia virtual tendrá aceleración nula en algún instante, lo cual es un requisito intrínseco para lograr que  $\zeta_{v0}(k) = 0$ .*

**Lema 3.** Utilizando la elección del sistema alternativo de (4.1), (4.3) y (5.10), junto con la definición de espacio de estados del pelotón de (5.6), es posible describir las dinámicas de los sistemas en función de las variables auxiliares:

$$\begin{aligned}\xi(k+1) &= \mathbf{A}_f \xi(k) + \mathbf{B}_{0fp} \zeta_0(k) + \mathbf{B}_{0fv} \zeta_{v0}(k) + \mathbf{B}_{pf} \mathbf{w}_p(k) + \mathbf{B}_{lf} \mathbf{w}_l(k) + \mathbf{B}_{0fp} r(k) \\ \zeta(k) &= \mathbf{C}_f \xi(k) - \mathbf{1} r(k)\end{aligned}\tag{5.11}$$

Con  $\xi(k) \in \mathbb{R}^{nN}$ ,  $\mathbf{A}_f \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ ,  $\mathbf{B}_{0fp} \in \mathbb{R}^{nN}$ ,  $\mathbf{B}_{0fv} \in \mathbb{R}^{nN}$ ,  $\mathbf{B}_{pf} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ ,  $\mathbf{B}_{lf} \in \mathbb{R}^{nN \times nN}$ ,  $\zeta(k) \in \mathbb{R}^N$ ,  $\mathbf{C}_f \in \mathbb{R}^{N \times nN}$  e  $\mathbf{1} \in \mathbb{R}^{nN}$ , descritas a partir de:

$$\begin{aligned}\xi(k) &\triangleq \begin{bmatrix} \xi_1(k) \\ \xi_2(k) \\ \vdots \\ \xi_N(k) \end{bmatrix} & \mathbf{A}_f &\triangleq \begin{bmatrix} A_t & & & & \\ B_p C_t & A_t & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & B_p C_t & A_t \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{0fp} &\triangleq \begin{bmatrix} B_p \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} & \mathbf{B}_{0fv} &\triangleq \begin{bmatrix} B_v \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{pf} &\triangleq \begin{bmatrix} -B_p & & & & \\ B_p & -B_p & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & B_p & -B_p \end{bmatrix} & \mathbf{C}_f &\triangleq \begin{bmatrix} C_t & & & & \\ & C_t & & & \\ & & \ddots & & \\ & & & C_t & \end{bmatrix} & \mathbf{1} &= \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{bmatrix} \\ \mathbf{B}_{lf} &\triangleq \begin{bmatrix} -B_v & & & & \\ B_v & -B_v & & & \\ & \ddots & \ddots & & \\ & & & B_v & -B_v \end{bmatrix}\end{aligned}$$

Los elementos vacíos en las matrices de la representación de estados alternativa corresponden a matrices de ceros, cuya dimensión está definida de manera que estas matrices de representación queden completamente determinadas.

*Proof.* La demostración está presente en el anexo H. □

**Observación 15.** La forma del Lema 3 es bastante similar a la del Lema 1, siendo prácticamente igual al caso de control por posición si se realiza la elección de  $K_p = \eta K$  y  $K_v = (1 - \eta)K$ , cambiando únicamente la presencia de la referencia en el sistema ampliado.

Análogamente es posible expresar la señal de desempeño de forma recursiva, de manera

similar a la propuesta en el capítulo 4, de esta forma, se obtiene la recursión:

$$\begin{aligned}\zeta_i &= \frac{G}{1+GK} (K_p \zeta_{i-1} + K_p(\mathbf{w}_{pi-1} - \mathbf{w}_{pi}) + K_v(\mathbf{w}_{v0i-1} - \mathbf{w}_{v0i})) \\ &\quad + \left( \frac{K_p G}{1+GK} - 1 \right) r \quad \text{Si } i \in [2, N] \\ \zeta_1 &= \frac{G}{1+GK} (K_p \zeta_0 - K_p \mathbf{w}_{p1} - K_v \mathbf{w}_{v01} + K_v \zeta_{v0}) \\ &\quad + \left( \frac{K_p G}{1+GK} - 1 \right) r \quad \text{Si } i = 1\end{aligned}\tag{5.12}$$

De (5.12) la expresión que acompaña a  $r$  no es evidente que permita que la señal de desempeño sea cero. Para demostrar que la señal de desempeño en estado estacionario es cero, se consigue:

$$\begin{aligned}\frac{K_p G}{1+GK} - 1 &= \frac{-1 - GK_v d}{1+GK} \\ d(z) \Big|_{z=1} &= \frac{1-1}{1} = 0 \\ \implies \frac{K_p(z)G(z)}{1+G(z)K(z)} \Big|_{z=1} - 1 &= \frac{-1}{1+G(z)K(z)} \Big|_{z=1} = -S(z) \Big|_{z=1} = 0\end{aligned}\tag{5.13}$$

Por lo que se cumple la misma relación que en el caso de control por posiciones. En particular, la observación 8 es igualmente válida en control por velocidades.

Para simplificar (5.12) se propone la siguiente notación resumida:

$$T_p = \frac{GK_p}{1+GK} \quad T_v = \frac{GK_v}{1+GK} \quad T_c = \frac{G}{1+GK}\tag{5.14}$$

Análogamente estas funciones de transferencia poseen las siguientes funciones complementarias:

$$S_p = 1 - T_p \quad S_v = 1 - T_v\tag{5.15}$$

Estas funciones de transferencia pueden relacionarse al sistema propuesto en (5.8) con la siguiente relación, siempre y cuándo se asegure que el sistema es una representación mínima;

$$\begin{aligned}T_p(z) &= (A_t, B_p, C_t, 0) \\ T_v(z) &= (A_t, B_v, C_t, 0)\end{aligned}\tag{5.16}$$

De esta forma, la señal de desempeño se simplifica a :

$$\begin{aligned}\zeta_i &= T_p \zeta_{i-1} + T_p(\mathbf{w}_{pi-1} - \mathbf{w}_{pi}) + T_v(\mathbf{w}_{v0i-1} - \mathbf{w}_{v0i}) + (T_p - 1)r \quad \text{Si } i \in [2, N] \\ \zeta_1 &= T_p \zeta_0 - T_p(\mathbf{w}_{p1}) - T_v(\mathbf{w}_{v01}) + T_v \zeta_{v0} + (T_p - 1)r \quad \text{Si } i = 1\end{aligned}\quad (5.17)$$

### 5.3 Análisis de convergencia.

#### 5.3.1 Análisis de convergencia temporal

Análogamente, en el Lema 4 es posible enunciar condiciones para el sistema de pelotón a partir de las especificaciones requeridas para la convergencia de la media y la varianza en el tiempo.

**Lema 4.** Para el pelotón descrito en variables auxiliares, en el Lema 3, las medias del estado auxiliar y del error de seguimiento satisfacen las ecuaciones recursivas:

$$\begin{aligned}\mu_\xi(k+1) &= \mathbf{A}_f \mu_\xi(k) + \mathbf{B}_{0fp} \zeta_0(k) + \mathbf{B}_{0fv} \zeta_{v0}(k) + \mathbf{B}_{0fp} r(k) \\ \mu_\zeta(k) &= \mathbf{C}_f \mu_\xi(k) - \mathbf{1}r(k)\end{aligned}\quad (5.18)$$

Mientras que las varianzas satisfacen las ecuaciones recursivas:

$$\begin{aligned}P_\xi(k+1) &= \mathbf{A}_f P_\xi(k) \mathbf{A}_f^T + \mathbf{B}_{pf} \bar{P}_p \mathbf{B}_{pf}^T + \mathbf{B}_{lf} \bar{P}_l \mathbf{B}_{lf}^T \\ P_\zeta(k) &= \mathbf{C}_f P_\xi(k) \mathbf{C}_f^T\end{aligned}\quad (5.19)$$

Con  $P_\xi(0) = P_{\xi_0} \geq 0$ ,  $\bar{P}_p \in \mathbb{R}^{nN \times nN} = \text{diag}(P_p, P_p, \dots, P_p)$  y  $\bar{P}_l \in \mathbb{R}^{nN \times nN} = \text{diag}(P_l, P_l, \dots, P_l)$ . En este caso los requisitos de estabilidad en sentido cuadrático medio están dados por (5.20).

$$\rho(A_t) < 1 \quad (5.20)$$

Al cumplirse (5.20),  $\mu_\zeta(k)$  y  $P_\zeta(k)$  convergen a:

$$\begin{aligned}\mu_\zeta &= 0; \\ P_\zeta &= \mathbf{C}_f \text{vec}^{-1}((\mathbf{I} - \mathbf{A}_f \otimes \mathbf{A}_f)^{-1} \text{vec}(\mathbf{B}_{pf} \bar{P}_p \mathbf{B}_{pf}^T + \mathbf{B}_{lf} \bar{P}_l \mathbf{B}_{lf}^T)) \mathbf{C}_f^T\end{aligned}\quad (5.21)$$

*Proof.* La demostración está presente en el anexo; sección I. □

**Observación 16.** Obsérvese que la ecuación (5.20) puede no cumplirse directamente, y aún así el sistema puede converger en el tiempo. Esto se debe a que la representación propuesta no es mínima y presenta todos los polos. En particular, para evitar este fenómeno, se establece que (5.20) implica que todos los polos de  $T(z)$  deben estar dentro del círculo unitario, ya que  $T(z)$  y la representación mínima del sistema comparten los mismos polos.

Al igual que con el caso de control por posiciones, es posible asumir que las condiciones del Lema 4 son cumplidas por defecto, bajo el mismo principio de que se diseña  $T(z)$  de antemano de manera que sea estable. Todos los comentarios en relación al Lema 2 son también comentarios válidos del Lema 4.

### 5.3.2 Análisis de convergencia en el número de vehículos.

Se busca demostrar las condiciones que debe cumplir un sistema de pelotón con seguimiento a la velocidad del líder para que sea escalable. Para ello, se asume que se cumplen las condiciones de (5.20), considerando la representación mínima del sistema. De este modo, el sistema se considera convergente en el tiempo, con la existencia de una media y una densidad espectral de potencia estacionaria. Esta suposición es razonable, ya que, de no cumplirse (5.20), el sistema no sería estable en el sentido cuadrático medio.

**Teorema 5.** *Considere el sistema descrito en el Lema 3 y que satisface (5.20), es decir, un sistema que converge en el tiempo al tener todos los autovalores de  $A_t$  en forma mínima dentro del círculo unitario. La media y la densidad espectral de potencia de la señal de desempeño del vehículo  $i$ -ésimo seguidor  $i \in [1, N], \forall N \in \mathbb{N}$ , cumplen:*

$$\begin{aligned} \mu_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= \begin{cases} T_p(e^{j\omega})\mu_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) & \text{si } i \in [2, N] \\ T_p(e^{j\omega})\zeta_0(e^{j\omega}) + T_l(e^{j\omega})\zeta_{v0}(e^{j\omega}) & \text{si } i = 1 \end{cases} \\ \phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= \begin{cases} |T_p(e^{j\omega})|^2\phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + f_v(P_p, P_l) & \text{si } i \in [2, N] \\ |T_p(e^{j\omega})|^2P_p + |T_v(e^{j\omega})|^2P_l & \text{si } i = 1 \end{cases} \end{aligned} \quad (5.22)$$

Con:

$$\begin{aligned} f_v(P_p, P_l) &= -P_p \left( |T_p^2(e^{j\omega})|^2 - |T_p(e^{j\omega})S_p(e^{j\omega})|^2 \right) \\ &\quad - P_l \underbrace{\frac{K_p(e^{j\omega})}{K_v(e^{j\omega})}}_{\phi_\varphi(e^{j\omega})} \left( T_v(e^{j\omega})T_v^H(e^{j\omega}) - S_v(e^{j\omega})S_v^H(e^{j\omega}) + 1 \right) T_v(e^{j\omega})T_v(e^{j\omega})^H \\ &\quad + |T_p(e^{j\omega})|^2P_p + 2|T_v(e^{j\omega})|^2P_l \end{aligned} \quad (5.23)$$

La expresión de (4.12) permite establecer que la media  $\mu_{\zeta_i}$  y la densidad espectral de potencia  $\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega})$  permanecen acotadas independientemente del número de vehículos, en particular cuando  $N \rightarrow \infty, \forall \omega$ , si y solo si:

$$|T_p(e^{j\omega})| < 1, \quad \forall \omega > 0 \quad (5.24)$$

*Proof.* La demostración está presente en la sección J. □

La condición propuesta en (5.24) implica a (5.25) al considerar las suposiciones 2, puesto que al buscar seguimiento perfecto a referencias escalón, es necesario que se cumpla  $|T_p(1)| = 1$ .

$$\|T_p(z)\|_\infty \leq 1 \quad (5.25)$$

El Teorema 5 puede homologarse al Teorema 3; sin embargo, es menos general, ya que no presenta una definición explícita de la densidad espectral de potencia estacionaria  $\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega})$ . No obstante, el Teorema 5 cumple su función al demostrar las condiciones necesarias para que el sistema converja en el número de vehículos, aunque sin garantizar a qué valor específico converge.

El resultado del Teorema 5 es el mismo que el propuesto en [78], correspondiente a la misma topología, con la misma información transmitida, pero en un sistema determinista, puesto que la expresión de  $A(z)T(z)$  de (2.14) corresponde a la expresión de  $T_p(z)$  de (5.14).

**Corolario 2.** *Sea una función de proporcionalidad entre controladores  $\phi_\varphi(e^{j\omega})$  capaz de satisfacer:*

$$\phi_\varphi(z) = \varphi(z)p_\alpha\varphi(z)^H \quad (5.26)$$

Con  $p_p \in \mathbb{R}$  y  $\varphi(z)$  propia. Entonces, la definición de  $f_v(P_p, P_l)$  de (5.23) se torna a:

$$\begin{aligned} f_v(P_p, P_l) = & -P_p \left( |T_p^2(e^{j\omega})|^2 - |T_p(e^{j\omega})S_p(e^{j\omega})|^2 \right) \\ & - P_l p_\alpha \left( |T_v(e^{j\omega})^2 \varphi(e^{j\omega})|^2 - |S_v(e^{j\omega})T_v(e^{j\omega})\varphi(e^{j\omega})|^2 + |T_v(e^{j\omega})\varphi(e^{j\omega})|^2 \right) T_v(e^{j\omega}) \\ & + |T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + 2|T_v(e^{j\omega})|^2 P_l \end{aligned} \quad (5.27)$$

*Proof.* Ver Apéndice K. □

**Observación 17.** *El caso particular de una función de proporcionalidad que pueda satisfacer (5.26) no es general, por lo que sólo ciertos controladores satisfacen (5.26), por ejemplo, el controlador estático propuesto en el capítulo 4.*

Al igual que en el caso de control por posición, expuesto en el capítulo 4, es posible reescribir de forma alternativa (5.22), resultando en (5.28), obtenida siguiendo los mismos

procedimientos que los expuestos en el caso de control por posición, visibles en el anexo L.

$$\begin{aligned}
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) - P_p |T_p(e^{j\omega})^i|^2 + P_p |T_p(e^{j\omega})^{i-1} S_p(e^{j\omega})|^2 \\
&\quad - P_l \phi_\varphi(e^{j\omega}) T_v(e^{j\omega}) (T_v(e^{j\omega}) (T_p(e^{j\omega}) T_p(e^{j\omega})^H) T_v(e^{j\omega})^H \\
&\quad - S_v(e^{j\omega}) (T_p(e^{j\omega}) T_p(e^{j\omega})^H) S_v(e^{j\omega})^H + 1) T_v(e^{j\omega})^H + |T_p(e^{j\omega})^{i-1} T_v(e^{j\omega})|^2 P_l \\
&\quad + |T_p(e^{j\omega})^i|^2 P_p + |T_p(e^{j\omega})^i T_v(e^{j\omega})|^2 P_l
\end{aligned} \tag{5.28}$$

**Observación 18.** La expresión de (5.28) puede ser expresada como una combinatoria de amplitudes al cuadrado si se cumplen las condiciones del Corolario 2.

La existencia de una expresión recursiva del espectro estacionario para el control por velocidades sugiere que es posible obtener una equivalencia con relación al Corolario 1, pero para el caso de control por velocidades, esta equivalencia se propone como la suposición 9.

**Suposición 9.** Se asume, que para control por velocidades se cumple:

- $P_{\zeta_i} \geq P_{\zeta_{i-1}} \implies P_{\zeta_N} \geq P_{\zeta_i} \forall i \in [1, N]$ .
- $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N}$  existe como un valor finito.

Siempre y cuando se cumplan las condiciones propuestas en el Teorema 5.

## 5.4 Análisis de estabilidad en cuerda.

En este capítulo, se han propuesto las condiciones necesarias para garantizar la convergencia en el tiempo y en el número de vehículos en un pelotón con seguimiento al predecesor y al líder. Utilizando un control basado en la velocidad del líder, al cumplirse dichas condiciones, es posible discutir sobre la estabilidad en cuerda en el sentido cuadrático medio.

**Teorema 6.** Sea el conjunto  $\mathcal{G}$ , que permite las condiciones iniciales  $\xi(0) \in \mathbb{R}^{nN}$  de segundo orden con una matriz de varianza definida positiva y el vector de entradas exógenas  $\nu \in \mathbb{R}^N$ , definido como  $\nu = (\zeta_0(k) + \zeta_{v0}(k))\phi_1 + \mathbf{w}_p(k) + \mathbf{w}_l(k)$ , que interactúan sobre el sistema de pelotón con seguimiento a predecesor y a líder del Lema 3.

Si el sistema cumple con los requisitos de convergencia en el tiempo establecidos en el Lema 4 y de convergencia en el número de vehículos del Teorema 5, y se cumple la suposición 9, entonces el sistema es **estable en cuerda en el sentido cuadrático medio**. Esto se debe a que satisface las condiciones de estabilidad de cuerda con media  $\mathcal{L}_2$  y varianza  $\mathcal{L}_\infty$  de la definición 5, así como las condiciones de estabilidad de cuerda en el sentido cuadrático medio de la definición 6.

*Proof.* Mutatis mutandis a la demostración propuesta en la sección G. □

## 5.5 Método de diseño de controladores PI estables en cuerda.

Es posible notar que dada la naturaleza dinámica de los controladores y sus requerimientos para estabilidad en el número de vehículos, su diseño no es tan sencillo como manipular un  $\eta \in (0, 1)$  a partir de la elección un controlador estabilizante diseñado de antemano, como en el caso propuesto en el capítulo 4.

En esta sección, se presenta un método de diseño que será expuesto en [78] en el caso determinista. Dado que las condiciones de convergencia en el tiempo y en el número de vehículos también se cumplen en el contexto estocástico, este método permite diseñar controladores estables en cuerda en el sentido cuadrático medio.

**Corolario 3.** *Sea  $K(z)$  un controlador PI que sea capaz de asegurar el cumplimiento de (5.20), es decir, de mantener el lazo estable con integración. Por lo tanto, existe un factor de peso  $w_f > 1$  que permita diseñar los controladores  $K_p$  y  $K_v$  de la forma:*

$$K_p(z) = \frac{K(z) \cdot z}{(w_f + 1) \cdot z - w_f} \quad K_v(z) = \frac{w_f \cdot K(z) \cdot z}{(w_f + 1) \cdot z - w_f} \quad (5.29)$$

*Los controladores presentes en (5.29) permiten obtener  $T_p(z)$  a partir de la elección de algún  $w_f$  que permita el cumplimiento de (5.24).*

*Proof.* Ver Apéndice M. □

Nótese que el controlador resultante satisface 5.24, y por ende permite realizar la suposición 9, por lo que el controlador diseñado utilizando este método permite la estabilidad de cuerda en el sentido cuadrático medio.

**Observación 19.** *El controlador diseñado a partir del Corolario 3 es un controlador que es capaz de asegurar estabilidad en cuerda en el sentido cuadrático medio, pero no es el único controlador capaz de satisfacer dichas condiciones.*

Este controlador, además, cumple con las condiciones del Corolario 2, pues cumple con (5.26) con  $\varphi(z) = 1$  y  $p_p = \frac{1}{w_f}$ .

## 5.6 Resultados de simulación.

Para comprobar los resultados expuestos en (5.20) y (5.24), se propone un ejemplo que incluye dos sistemas: uno que satisface los requerimientos y otro que no, con el objetivo de ilustrar un pelotón estable en cuerda y otro inestable en cuerda. Se emplean las condiciones presentadas en la sección 4.5, pero debido a la complejidad numérica de este tipo de controladores, se utilizan menos simulaciones de Monte Carlo, específicamente  $5 \times 10^4$  y 20

vehículos. Bajo estas condiciones, es posible observar que el controlador propuesto cumple con los requisitos del Corolario 3. Se consideran dos valores de  $w_f$ :

$$w_{f_c} = 13.34 \quad w_{f_{nc}} = 0.01 \quad (5.30)$$

Siendo  $w_{f_c}$  un valor que permite asegurar convergencia en el tiempo y en el número de vehículos, y por ende, al cumplirse la suposición 9, estabilidad en cuerda y  $w_{f_{nc}}$  uno que no permite estabilidad en cuerda. A diferencia de lo propuesto en la sección 4.5, sólo se hacen pruebas considerando condiciones iniciales cero, puesto que el fenómeno de la respuesta a distintas condiciones iniciales ya está ilustrado en dicha sección.

Para el sistema estable en cuerda se obtienen los resultados de la Figura 5.1.

**Observación 20.** *Las simulaciones presentadas en la figura 5.1 permiten comprobar que, bajo las condiciones propuestas, el sistema cumple con la suposición 9, por lo que, efectivamente, es estable en cuerda.*

De la Figura 5.1, se puede observar que el sistema converge tanto en el tiempo como en el número de vehículos, aunque de manera relativamente lenta. Esto se debe a la elección de un valor de  $\|T_p(z)\|_\infty$  muy cercano a 1. Durante el diseño, a partir del Corolario 3, se obtuvieron constantes muy altas para lograr valores de  $\|T_p(z)\|_\infty$  más bajos, lo que generó errores numéricos. Esta convergencia lenta es consecuencia del doble requerimiento de seguimiento de posición y velocidad, lo que limita la capacidad de los vehículos para realizar cambios bruscos de velocidad, garantizando una convergencia más suave a lo largo de varias muestras. Además, la varianza se estabiliza en un valor, siguiendo un patrón de convergencia similar al observado en el control estático por posiciones. Durante el estado transitorio, se puede observar que los vehículos predecesores se mueven muy lentamente mientras el líder acelera.

Existen diferencias clave del desempeño respecto a este tipo de controladores basados en control de velocidades con los basados en control de posiciones propuestos durante la sección 4.5, puesto que si bien las condiciones de diseño y lazos de control son lo más similares posibles, la media de la señal de desempeño converge de manera más uniforme y es incapaz de superar el valor de  $r(k)$  a costa de aumentar la varianza de forma significativa, por lo que se compromete la seguridad del pelotón en un entorno real.

Al contrario, para el sistema inestable en cuerda se obtienen los resultados de la Figura 5.2. La Figura 5.2 presenta un comportamiento de esperar; la señal de desempeño es amplificada a lo largo del pelotón y, si bien la varianza se estaciona, sus valores estacionarios son significativamente mayores a los resultantes en el caso expuesto en la Figura 5.1, haciendo a este tipo de esquemas doblemente inviables al momento de implementar.

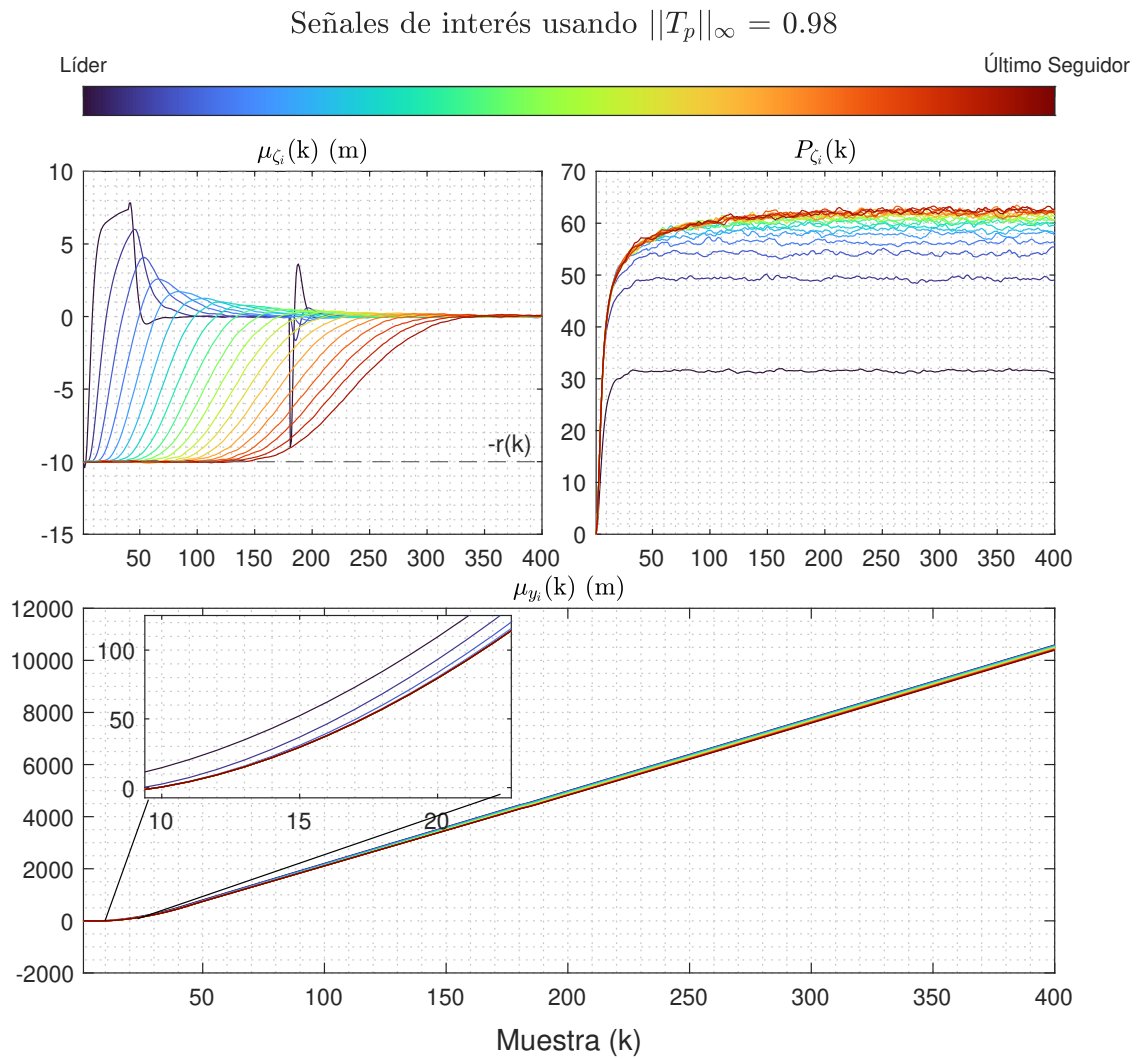


Figura 5.1: Comportamiento de un pelotón con topología seguidor a predecesor y a líder afecto a ruido aditivo por transmisión, con control por velocidad. Simulación realizada con condiciones iniciales iguales a cero, con un pelotón estable en cuerda.

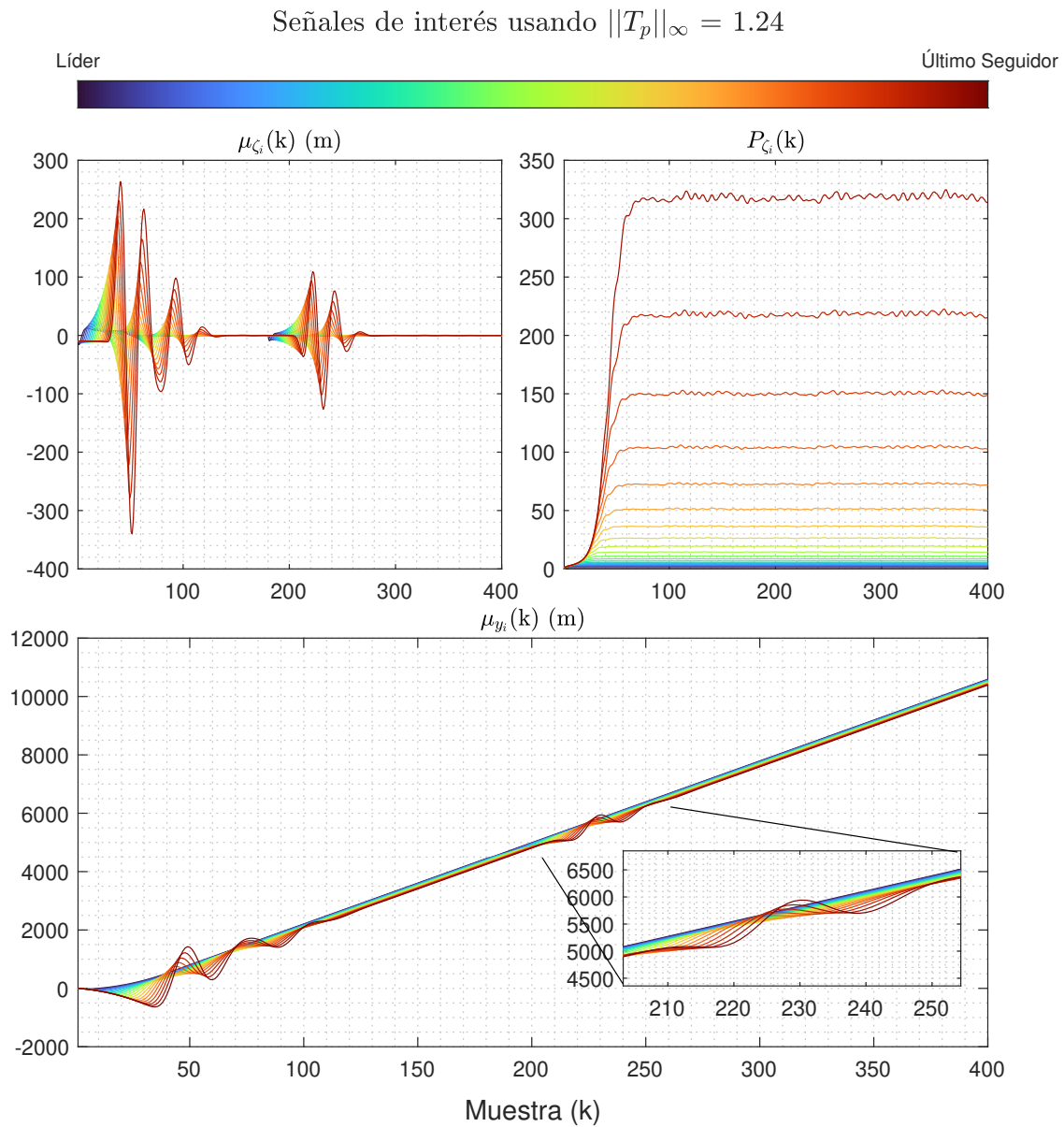


Figura 5.2: Comportamiento de un pelotón con topología seguidor a predecesor y a líder afecto a ruido aditivo por transmisión, con control por velocidad. Simulación realizada con condiciones iniciales iguales a cero, con un pelotón inestable en cuerda.

## CAPÍTULO



---

---

## Discusión del diseño del lazo de control de pelotones con seguimiento a predecesor y al líder.

En este capítulo, tras comprobar las condiciones de estabilidad de cuerda para un sistema de pelotón con seguimiento al predecesor y al líder basado en control por posición, junto con enunciar preliminarmente la condiciones de biconvergencia en sistemas de pelotón con seguimiento al predecesor y al líder basado en control por velocidad, se exploran métodos para afinar sus métricas de funcionamiento, como por ejemplo, la minimización de la varianza de la señal de desempeño. Además, se presentan observaciones adicionales relacionadas con la seguridad en la eventual implementación de estos sistemas de pelotón. Gran parte de estas consideraciones adicionales se derivan de los beneficios asociados a fenómenos estocásticos causados por ruidos aditivos, lo que hace que su aplicación en entornos deterministas sea poco recomendable.

### 6.1 Consideraciones de diseño de $T(z)$ en control por posiciones.

Al considerar la relación del lazo de control estándar  $T(z) + S(z) = 1$  es posible analizar criterios de sensibilidad para diseñar  $T(z)$  y por consiguiente diseñar  $S(z)$ . En particular, se busca minimizar el efecto de los errores de seguimiento (proporcionales a la señal de desempeño) dentro de cada vehículo, así como, a partir de la ecuación (4.7), reducir la brusquedad en la respuesta del sistema ante cambios de referencia, como en el caso de la aceleración constante expuesta en la sección 4.5.

Es deseable para que se cumplan ambos fenómenos, que el valor de  $|S(e^{j\omega})|$  sea el mínimo posible en el mayor rango de frecuencias. Producto de las integrales de sensibilidad de Bode en tiempo discreto, es recomendable minimizar la cantidad de ceros de fase no mínima en la función de transferencia  $K(z)G(z)$  [87], para minimizar la magnitud de

$$S(e^{j\omega}) \quad \forall \omega \in [-\pi, \pi].$$

Por lo tanto, el diseño de  $T(z)$  entonces debe estar enfocado en:

- Minimizar la magnitud de  $S(e^{j\omega})$  para reducir la reacción de cada sistema a cambios de referencia, o en otras palabras, minimizar los errores de seguimiento locales. Esta minimización de errores de seguimiento locales está asociada con medidas de seguridad, ya que, como se señala en la observación 14, la estabilidad de cuerda no está relacionada con la disipación de errores de seguimiento dentro del pelotón. Una minimización de  $S(e^{j\omega})$  permite que el pelotón sea mucho más robusto ante perturbaciones del ambiente, debido a que cada vehículo miembro responderá de mejor manera ante éstas.
- Disminuir los ceros de fase no mínima en  $K(z)G(z)$ , de manera de evitar esa amplificación de los errores de seguimiento mencionadas. Esto plantea un compromiso entre la rapidez del control y el sobrepaso que se obtiene en la respuesta escalón del sistema. Este compromiso es el origen de la necesidad de un *time headway* en pelotones con seguimiento únicamente al predecesor [38, 73, 36].
- Al igual que en los casos de seguimiento a predecesor, es deseable que  $\|T(z)\|_\infty \rightarrow 1$ , para poseer mayor capacidad de diseño en el valor de  $\eta$  y minimizar estas sobreacciones no deseadas en la respuesta escalón de cada vehículo, pues, si bien no comprometen la estabilidad de cuerda, si presentan al momento de implementar un comportamiento menos seguro. Una mayor capacidad de diseño de  $\eta$  es capaz de, potencialmente, inducir una menor varianza en la señal de desempeño de cada vehículo, como es expuesto en la sección 6.2.1.

## 6.2 Diseño de $\eta$ para controlar la varianza de la señal de desempeño en control por posiciones.

### 6.2.1 Diseño de $\eta$ para minimizar la varianza del último vehículo $P_N$

El Corolario 1 propone que, dado un lazo de control ya diseñado, es decir, un valor de  $T(z)$  y  $S(z)$  fijos, la varianza en estado estacionario es proporcional a  $P_w$ . La expresión de  $P_w$  y de la varianza en el vehículo N-ésimo, propuestas en (4.13) y en el Corolario 1, respectivamente, propone que estas varianzas dependen de tres factores,  $\eta$ ,  $P_p$  y  $P_l$ . Es lógico suponer que para diseñar el sistema de control  $P_p$  y  $P_l$  son valores inalterables, debido a que son propios del canal de transmisión y  $\eta$  es una constante a manipular que permite estabilizar el lazo en cuerda y manipular el valor de  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N}$ . De esta forma, se utiliza  $\eta$  como una variable de afinación que permite no tan solo la estabilidad de cuerda, sino que manipular la varianza de la señal de desempeño.

Para ello, se fusiona la expresión de  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N}$  con la  $P_w$ , obteniendo:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N} &= \eta^2 \left( (2 - \eta) \left\| \frac{T(z)}{M(z)} \right\|_2^2 - \eta \left\| \frac{T(z)^2}{M(z)} \right\|_2^2 + \left\| \frac{S(z)T(z)}{M(z)} \right\|_2^2 \right) \\ &\times \left( (P_p + P_l) + \eta^{-2}(1 - 2\eta)P_l \right) \end{aligned} \quad (6.1)$$

Luego, la expresión de (6.1) puede ser compactada al notar que las normas<sup>−2</sup> al cuadrado son constantes siempre positivas, ya que son normas, que dependen de  $\eta$ . Por simpleza en la notación, se propone que  $\left\| \frac{T(z)}{M(z)} \right\|_2^2 = n_a(\eta)$ ,  $\left\| \frac{T(z)^2}{M(z)} \right\|_2^2 = n_b(\eta)$  y  $\left\| \frac{S(z)T(z)}{M(z)} \right\|_2^2 = n_c(\eta)$ , que satisfacen  $n_a(\eta), n_b(\eta), n_c(\eta) > 0 \forall z \in \mathbb{C}$ . De esta forma, trabajando sobre (6.2) se obtiene:

$$\begin{aligned} \lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N} &= \eta^2 \left( (2 - \eta)n_a(\eta) - \eta n_b(\eta) + n_c(\eta) \right) \left( (P_p + P_l) + \eta^{-2}(1 - 2\eta)P_l \right) \\ &= \left( (2 - \eta)n_a(\eta) - \eta n_b(\eta) + n_c(\eta) \right) \left( \eta^2(P_p + P_l) + (1 - 2\eta)P_l \right) \\ &= \eta^2(P_p + P_l)(2 - \eta)n_a(\eta) - \eta^3(P_p + P_l)n_b(\eta) + \eta^2(P_p + P_l)n_c(\eta) \\ &\quad + (1 - 2\eta)P_l(2 - \eta)n_a(\eta) - (1 - 2\eta)P_l\eta n_b(\eta) + n_c(\eta)(1 - 2\eta)P_l \end{aligned} \quad (6.2)$$

De la expresión de (6.2), es posible escribir como un funcional de costo los objetivos de minimización de varianza:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_{\eta} \lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N} &= \eta^2(P_p + P_l)(2 - \eta)n_a(\eta) - \eta^3(P_p + P_l)n_b(\eta) + \eta^2(P_p + P_l)n_c(\eta) \\ &\quad + (1 - 2\eta)P_l(2 - \eta)n_a(\eta) - (1 - 2\eta)P_l\eta n_b(\eta) + n_c(\eta)(1 - 2\eta)P_l \\ \text{Sujeto a:} \quad &\eta > 0 \\ &\eta < \|T(z)\|_{\infty}^{-1} \end{aligned} \quad (6.3)$$

Dado que en (6.3) intervienen normas, es decir operaciones no lineales, y que, además, para optimizar se requiere obtener  $M(z)$  que depende de la variable de decisión  $\eta$ , la obtención del valor óptimo de  $\eta$  al reducir el funcional de costo de (6.3) de manera analítica no es sencilla. Por esta razón, se recomienda resolver (6.3) utilizando un solver numérico con el resto de parámetros ya conocidos. El algoritmo de punto interior [88] es, entre otros, adecuado para proporcionar una solución  $\eta$  que minimice el funcional de costo de (6.3).

**Observación 21.** *La capacidad de optimizar  $\eta$  para minimizar la varianza del último vehículo sugiere que un valor de  $\eta$  es el óptimo para el diseño de un lazo de control de pelotones con seguimiento a predecesor y a líder, sin embargo, producto del Teorema 3 es posible notar que si bien  $\eta$  no influye en la media de la señal de desempeño en estado estacionario, si es relevante en cómo la señal de desempeño se propaga a lo largo del pelotón, por lo que existe un compromiso en la minimización de la varianza y de la capacidad de la disipación de la señal de desempeño*

a lo largo del pelotón.

**Observación 22.** Si bien la presente sección está orientada a minimizar la varianza en el último vehículo, este valor de  $\eta$  también permite minimizar la varianza de la señal de desempeño en cada vehículo seguidor; debido a que se cumple  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N} \geq P_{\zeta_i} \forall i \in [1, N]$  por el Corolario 1.

Cabe resaltar que la elección de un valor de  $\eta$  que minimice la varianza no implica que la varianza obtenida en cada vehículo sea la mínima posible. Más bien, significa que es la mínima varianza que se puede lograr sin alterar la topología del lazo de control propuesto. Es decir, la varianza podría reducirse aún más si se incluyeran sistemas de filtrado en cada lazo de control o si se emplearan otros lazos de control internos.

### 6.2.2 Minimización de $P_w$

Si bien la sección 6.2.1 propone un método para disminuir la varianza de la señal de desempeño en cada vehículo, es posible que se busque no disminuir el valor en sí, sino el cómo disminuye, es decir, controlar qué tan pronunciado es el cambio de varianza de la señal de desempeño respecto al predecesor. También, como el método propuesto requiere de un *solver* numérico, por lo que se vuelve complejo el diseño *a priori*. En la presente sección se señala cómo diseñar  $\eta$  de tal manera que el paso  $P_w$  es disminuido. Un menor  $P_w$  implica un mayor número de vehículos para llegar a  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N}$ , por lo que puede ser una opción atractiva para disminuir la varianza de la señal de desempeño en un pelotón de pocos vehículos.

**Teorema 7.** Considere el sistema descrito en el lema 1, que satisface las condiciones de estabilidad en cuerda. La varianza auxiliar  $P_w$  será mínima  $P_w^*$  cuando se cumpla:

$$\eta = \|T(z)\|_{\infty}^{-1} - \epsilon \quad (6.4)$$

Con  $\epsilon$  un valor positivo muy pequeño.

A medida que  $\eta \rightarrow 0$ ,  $P_w$  aumenta de forma monótona, por lo que  $P_w$  es inversamente proporcional a  $\eta$ .

*Proof.* La demostración está presente en el apéndice N. □

El Teorema 7 propone un compromiso directo entre el valor de  $P_w$  y la estabilidad de cuerda (O propiamente dicho, la holgura de la estabilidad de cuerda), así como qué tan rápido se disipa la media de la señal de desempeño, que requiere de un valor de  $\eta$  más pequeño a lo largo del pelotón, a partir del Teorema 3, que propone que  $\eta$  tiene una alta importancia en la transmisión de la señal de desempeño.

De forma gráfica, este compromiso es resumido en la Figura 6.1. Notase que a menor sea el valor de  $\|T(z)\|_\infty$ , es más amplio el rango de diseño de  $\eta$  estable en cuerda.

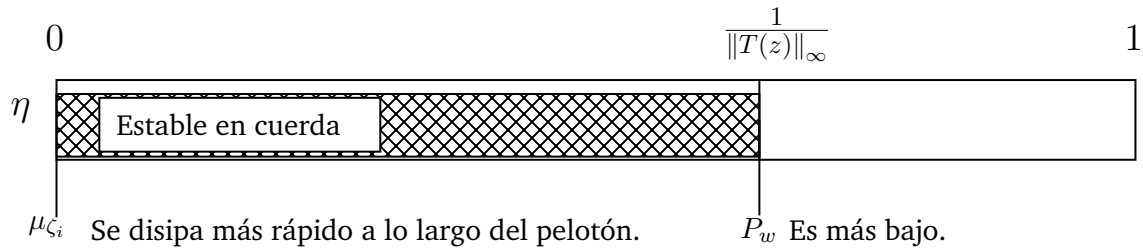


Figura 6.1: Compromiso al momento de seleccionar  $\eta$

Con la Figura 6.1 se otorga una guía visual que permite diseñar un  $\eta$  estable en cuerda que permita también controlar los momentos de la señal de desempeño, otorgando un criterio adicional al propuesto en la sección 6.2.1.

### 6.2.3 Ejemplo numérico por simulaciones.

Para ilustrar los fenómenos mencionados, se retoman las condiciones de la simulación propuesta en la sección 4.5, con condiciones iniciales cero y 20 vehículos, pero considerando un valor de  $\eta$  variable. La codificación de colores es la misma que en dicha sección.

En la Figura 6.2 se ilustra el cómo evoluciona  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N}$  ( $P_N$  en la figura, por simpleza) a medida que cambia  $\eta$ , así como simulaciones de Monte Carlo para comprobar el comportamiento propuesto.

En la Figura 6.2 se observa que es posible diseñar  $\eta$  de manera que la varianza de la señal de desempeño se reduzca en todos los vehículos, aplicando la solución presentada en la sección 6.2.1 (es decir, un  $\eta = \eta_{P_N}^* \approx 0.6020$ ). Asimismo, se evidencia el impacto de la minimización de la varianza de paso  $P_w$ : con un valor de  $\eta = 0.2$ , son necesarios 2 vehículos para alcanzar el máximo teórico, mientras que para  $\eta = 0.7$ , se requieren 5 vehículos, según los criterios empleados en estas simulaciones.

Además, el gráfico que relaciona a  $P_N$  con  $\eta$  es una herramienta útil al momento de diseñar un lazo de control para un esquema de pelotón con seguimiento a predecesor y al líder, puesto que otorga una guía visual de qué valores de  $\eta$  permiten una minimización efectiva de  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N}$  y permiten ponderar en relación al paso  $P_w$ .

### 6.2.4 Estrategia de $\eta$ dinámico

Hasta el momento, en la presente tesis solo se han explorado situaciones de control por posición basadas en un valor de  $\eta$  estático, sin embargo, es posible agudizar el desempeño del sistema de pelotón si se considera un valor de  $\eta$  variable en el tiempo, dígame  $\eta(k)$ .

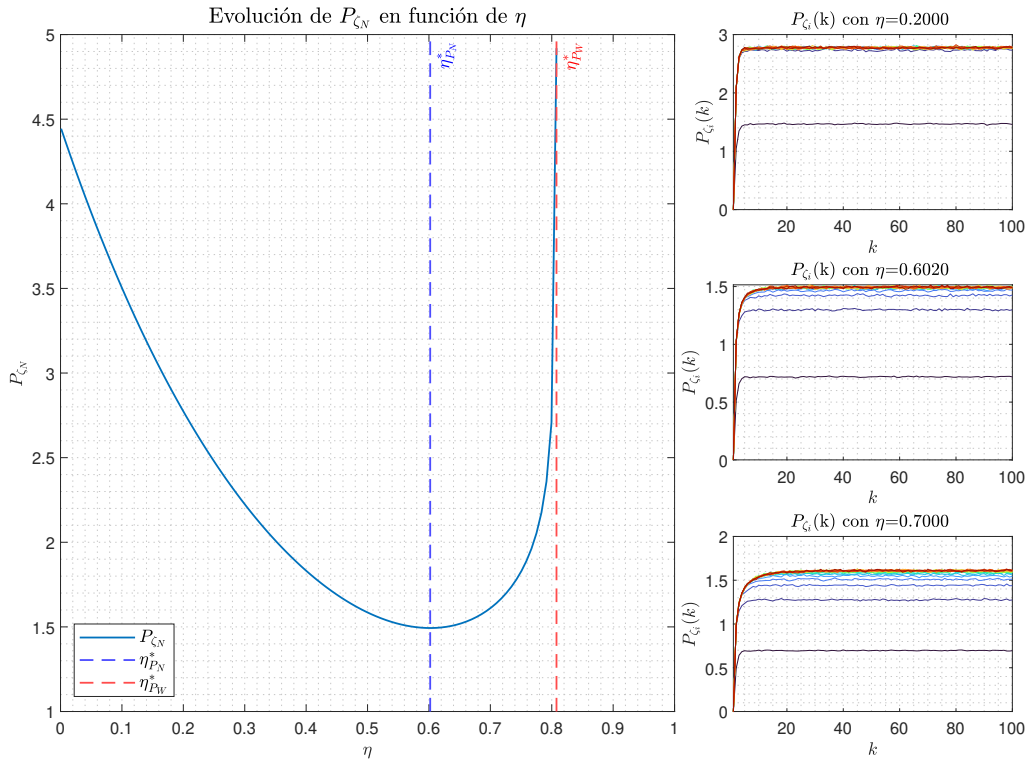


Figura 6.2: Evolución de las varianzas en función de  $\eta$ . Varianzas con  $\eta$  que minimiza  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N}$ .

De esta forma, el valor de  $\eta(k)$  puede manipularse para conseguir, por ejemplo, una minimización de la media de la señal de desempeño a medida que el pelotón acelera y al momento de alcanzar el estado estacionario, modificar  $\eta$  para conseguir minimización de la varianza de la señal de desempeño. En base a lo expuesto en la presente sección, esto se implementa como la evolución desde un valor de  $\eta$  mínimo a  $\eta_{P_N}^*$ . Incluso, de no ser posible conocer *a priori* la situación en la que se encuentra el pelotón, es posible diseñar un controlador ajeno al sistema de control de pelotón, que, mientras se mantenga dentro del cumplimiento de (4.15), permitirá asegurar estabilidad en cuerda. Esto permite que este valor sea manipulado, por ejemplo, por un controlador del tipo *Model Predictive Control* (MPC).

Como consideración adicional, cabe resaltar que el Corolario 1 está planteado con un valor de  $\eta$  estático, pero si el valor de  $\eta$  cambia mientras el pelotón está en funcionamiento, cambian las cotas de  $P_{\zeta_i}$  en tiempo real, siendo posible que las nuevas cotas sean inferiores, por lo que es posible, al cambiar  $\eta$ , que se cumpla  $P_{\zeta_i}(k) \leq P_{\zeta_i}(k-1)$ , pero permaneciendo acotado por  $P_{\zeta_N}$ . Esto no arriesga la percepción de estabilidad de cuerda en el sentido cuadrático medio, puesto que la varianza sigue estando acotada por el peor valor de  $\eta$

posible que satisfaga (4.15).

Para ilustrar el comportamiento del sistema de pelotón con  $\eta$  dinámico, se repite la simulación estable en cuerda en el sentido cuadrático medio con condiciones iniciales cero, con los parámetros de la sección 4.5, pero con 20 vehículos, resultando la Figura 6.3.

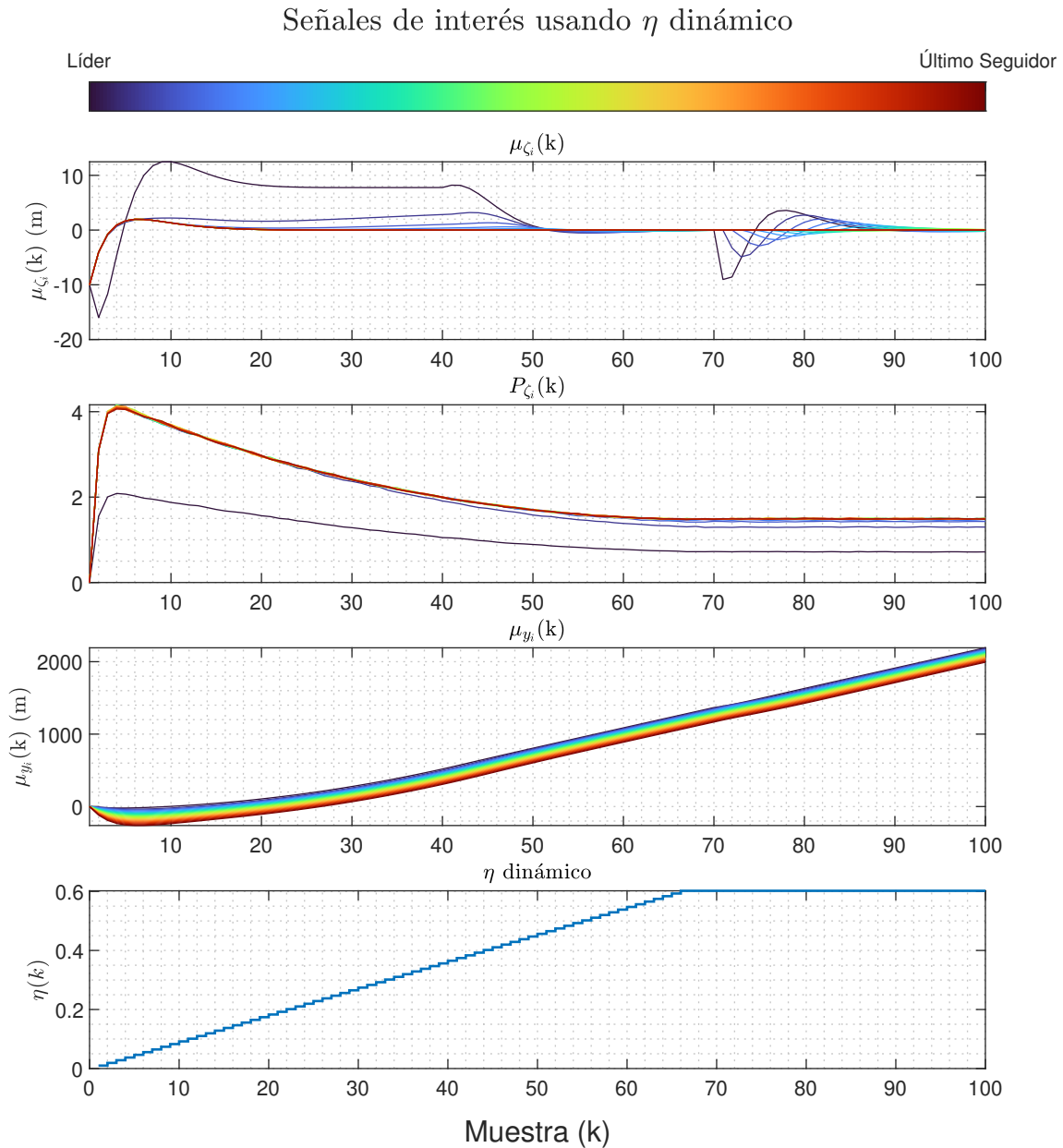


Figura 6.3: Sistema de pelotón con seguimiento a predecesor y a líder con control por posiciones y  $\eta$  dinámico

En la Figura 6.3 se ilustran los fenómenos descritos. Al comparar la métrica de la media de

la señal de desempeño con la presentada en la Figura 4.1, se observa una clara disminución de la señal de desempeño en los seguidores, atribuida a la elección de un  $\eta$  menor. Posteriormente, en estado estacionario, al aplicar el valor óptimo de  $\eta$ , se evidencia una amplificación del efecto de la perturbación en comparación con la Figura 6.3; sin embargo, la varianza de la señal de desempeño se reduce de manera significativa.

### 6.3 Estrategias de obtención de la velocidad del líder.

En el capítulo 5, se propone un sistema de control de pelotones basado en la transmisión directa de la velocidad del líder. Sin embargo, esta no es la única opción de comunicación posible, ya que dicha información puede obtenerse mediante otros métodos, los cuales se presentan en la presente sección.

Nótese que, para el sistema de control, la señal  $\tilde{y}_{0i}(k)$  poseerá una media independiente del sistema de transmisión, pero la varianza  $P_l$  sí se verá afectada, dependiendo de cómo es transmitida la información.

Al momento de implementar la elección de estas topologías determina cuantos canales de comunicación son necesarios y dónde se almacena la información dinámica, si en el líder o en los predecesores.

#### Transmisión la posición del líder en dos instantes usando dos canales afectos a ruido aditivo

Es posible obtener la velocidad al recibir dos transmisiones desde el líder; una asociada a la posición del líder en el momento  $k$ -ésimo y otra asociada a la posición del líder en su momento inmediatamente precedente. Como ocurren dos transmisiones, es natural pensar que existen dos ruidos aditivos asociados,  $\mathbf{w}_{v0iA}(k)$  y  $\mathbf{w}_{v0iB}(k)$  asociados a la transmisión del momento  $k$ -ésimo y del momento  $k - 1$ -ésimo, respectivamente, formando la topología de comunicación de la Figura 6.4. Estos son ruidos blancos de varianza  $P_{la}$  y  $P_{lb}$ .

Bajo la topología de comunicación propuesta, la señal recibida de velocidad está dada por:

$$\tilde{\mathbf{y}}_{0i}(k) = y_0(k) - y_0(k - 1) + \mathbf{w}_{v0iA}(k) - \mathbf{w}_{v0iB}(k) \quad (6.5)$$

De la topología propuesta en (6.5), es posible notar que la varianza de la señal resultante es  $P_l = P_{la} + P_{lb}$ .

**Observación 23.** *Bajo esta topología, la medición de velocidad podría transformarse en un componente determinista si se cumple que  $\mathbf{w}_{v0iA}(k) = \mathbf{w}_{v0iB}(k) \quad \forall i, k \in \mathbb{N}$ . Sin embargo, esta condición no es realista, ya que es imposible garantizar una transmisión con exactamente el mismo ruido aditivo. Además, forzar esta condición no sería factible en la práctica, ya que requeriría conocer el ruido presente en cada transmisión.*

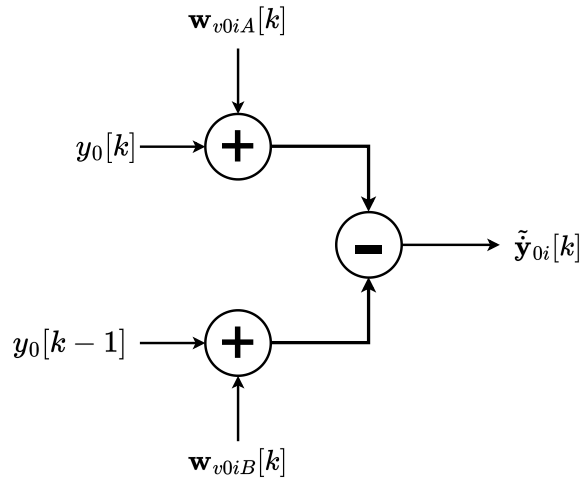


Figura 6.4: Transmisión de dos momentos de posición del líder usando dos canales afectados a ruido aditivo.

### Transmisión de un dato de posición del líder y obtención de velocidad desde el predecesor

De manera similar, la velocidad del líder puede deducirse a partir de los datos de posición transmitidos en un instante dado. Esto se logra almacenando dichos datos y comparando su evolución en cada vehículo seguidor, utilizando la topología mostrada en la Figura 6.5.

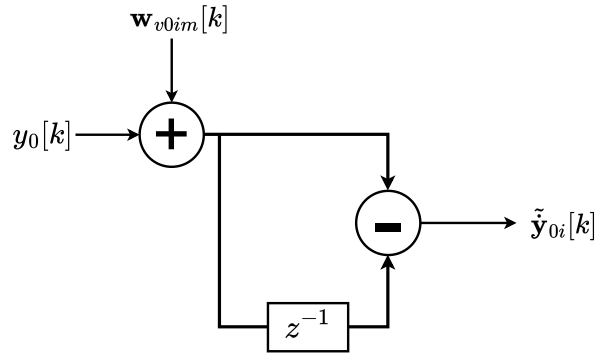


Figura 6.5: Transmisión de la posición del líder y su posterior almacenamiento para la obtención de la velocidad.

El ruido de esta comunicación  $w_{v0im}(k)$  es un ruido blanco de media cero y varianza  $P_{lm}$ . La señal recibida de velocidad está dada por:

$$\tilde{y}_{0i}(k) = y_0(k) - y_0(k-1) + w_{v0im}(k) - w_{v0im}(k-1) \quad (6.6)$$

La señal definida en (6.6) posee una varianza  $P_l = 2P_{lm}$ .

**Comparativa de las estrategias estudiadas.**

En resumen, las estrategias para la obtención de la velocidad del líder estudiadas tanto en este capítulo como en el capítulo 5 se sintetizan en la tabla 6.1.

Información transmitida	Dónde se almacena $y_0[k-1]$	$P_l$
Velocidad de líder	En el líder	$P_l$
Posición del líder en $k$ y $k-1$	En el líder	$P_{la} + P_{lb}$
Posición del líder en $k$	En cada seguidor	$2P_m$

Table 6.1: Comparativa entre métodos de transmisión de la velocidad del líder

De la tabla 6.1, se concluye que el método de transmisión directa de la velocidad del líder presenta menor varianza, siempre que el canal de comunicación tenga la misma varianza para toda la información. Además, este enfoque simplifica la implementación, ya que únicamente requiere que el líder almacene en memoria su posición anterior, lo que reduce la complejidad de los vehículos seguidores.

## CAPÍTULO



---

---

## Conclusiones y trabajo futuro

En el presente trabajo se han analizado en profundidad las condiciones necesarias para que un esquema de pelotón homogéneo con seguimiento al predecesor y al líder, basado en el seguimiento de posiciones, garantice estabilidad en cuerda en el sentido cuadrático medio. Además, se han presentado simulaciones que ilustran este concepto. Las condiciones derivadas se fundamentan en la determinación de cotas para las señales de desempeño asociadas a los errores de seguimiento entre vehículos, causados por la comunicación entre al menos dos de ellos. Asimismo, se realizaron comparativas con esquemas existentes basados únicamente en el seguimiento al predecesor. Los resultados obtenidos demuestran que los requerimientos para un lazo de control bajo estas condiciones son equivalentes a los necesarios en un lazo de control determinista, en consonancia con resultados previos en sistemas con seguimiento al predecesor.

Los resultados que permiten demostrar la estabilidad de cuerda también abren la posibilidad de optimizar el desempeño del lazo de control sin necesidad de alterar su estructura, modificando únicamente el parámetro  $\eta$ . Esta optimización se traduce en una menor varianza en la señal de desempeño, una convergencia más rápida de la media en con un menor número de vehículos o una convergencia acelerada de la varianza de la señal de desempeño. Estos resultados son inherentes a la representación estocástica utilizada. En trabajos futuros se podría considerar la posibilidad de que este valor de  $\eta$  sea dinámico, posibilitando la optimización más fina del sistema de control.

Por su parte, adicionalmente se realizó un estudio general y preliminar del diseño de controladores por velocidad, permitiendo establecer condiciones de convergencia que van en la misma línea que las condiciones de control por posición. Esto permite un trabajo futuro focalizado en formalizar dichos resultados respecto a control por velocidades, en

particular, formalizar los resultados que permitan pasar de biconvergencia a estabilidad en cuerda en el sentido cuadrático medio.

La capacidad de imponer seguimiento a predecesor y a líder propone un amplio conjunto de trabajos futuros, por ejemplo, aún es posible proponer este tipo de esquemas controlando en base a aceleración utilizando controladores dinámicos, ruidos o esquemas no homogéneos. Además, este trabajo es un precedente de ruido aditivo en otra topología, demostrando que es posible no tan solo demostrar estabilidad en cuerda, sino que optimizar los momentos de las señales de desempeño. De esta forma, se motiva al estudiar el efecto de más topologías de comunicación, como el seguimiento a más de un predecesor o comunicación bidireccional, por dar un ejemplo.

La inclusión de retrasos de transmisión constituye un factor adicional que enriquecería el análisis realizado. Dichos retrasos podrían ser determinísticos o modelar un fenómeno aleatorio, ampliando así la perspectiva del estudio.

Además, la validación experimental de los resultados obtenidos en la presente tesis es parte del trabajo futuro propuesto, para comprobar si las suposiciones tomadas son válidas en un entorno más realista.

## APÉNDICES

### A Demostración del Lema 1

La representación alternativa puede ser justificada al considerar los modelos de (3.6) y la representación de estados alternativos de (4.1). Para simplificar el análisis, se realiza por separado, considerando el primer seguidor, y luego los otros seguidores.

**Primer seguidor**  $i = 1$ . Adelantando temporalmente la definición del estado alternativo de (4.1):

$$\begin{aligned}
 \xi_1(k+1) &= x_0(k+1) - x_1(k+1) \\
 &= Ax_0(k) + Br_0(k) - Br(k) - Ax_1(k) - B\eta\mathbf{w}_{p1}(k) \\
 &\quad - By_0(k) - B(1-\eta)\mathbf{w}_{l1}(k) + Br(k) \\
 &= A\xi_1(k) - B\eta\mathbf{w}_{p1}(k) - B(1-\eta)\mathbf{w}_{l1}(k) + B(r_0(k) - y_0(k))
 \end{aligned} \tag{A.1}$$

La expresión de (A.1) puede ser refinada al recordar las definiciones de (4.3), resultando, en efecto:

$$\begin{aligned}
 \xi_1(k+1) &= A\xi_1(k) - B\eta\mathbf{w}_{p1}(k) - B(1-\eta)\mathbf{w}_{l1}(k) + B(r_0(k) - y_0(k) - r(k) + r(k)) \\
 \xi_1(k+1) &= A\xi_1(k) - B\eta\mathbf{w}_{p1}(k) - B(1-\eta)\mathbf{w}_{l1}(k) + B\zeta_0 + Br(k)
 \end{aligned} \tag{A.2}$$

Considerando (A.2) como la ecuación que dicta la evolución del estado auxiliar en el primer seguidor. Luego, es posible plantear la variable de desempeño de (4.1), de esta forma y retomando las expresiones de (3.6) es posible plantear la señal de desempeño en el primer seguidor:

$$\begin{aligned}
 \zeta_1(k) &= y_0(k) - y_1(k) - r(k) \\
 &= C(x_0(k) - x_1(k)) - r(k) = C\xi_1(k) - r(k)
 \end{aligned} \tag{A.3}$$

Así, las expresiones de (4.1) y (A.3) corresponden a las ecuaciones de estado y de salida en el entorno auxiliar propuesto.

**Seguidor**  $i \in [2, N]$ . De forma análoga a la representación del primer seguidor, es posible

adelantar temporalmente la definición del estado alternativo de (4.1):

$$\begin{aligned}
\xi_i(k+1) &= x_{i-1}(k+1) - x_i(k+1) \\
&= (Ax_{i-1}(k) + B\eta\mathbf{w}_{pi-1}(k) + B\eta Cx_{i-2}(k) + B(1-\eta)\mathbf{w}_{li-1}(k) + B(1-\eta)y_0(k) \\
&\quad - Br(k)(\eta + (1-\eta)(i-1))) - (Ax_i(k) + B\eta\mathbf{w}_{pi}(k) + B\eta Cx_{i-1}(k) \\
&\quad + B(1-\eta)\mathbf{w}_{li}(k) + B(1-\eta)y_0(k) - Br(k)(\eta + (1-\eta)i)) \\
&= A(x_{i-1}(k) - x_i(k)) + B\eta C(x_{i-2}(k) - x_{i-1}(k)) + B(1-\eta)\mathbf{w}_{li-1}(k) \\
&\quad + B\eta\mathbf{w}_{pi-1}(k) - B\eta\mathbf{w}_{pi}(k) - B(1-\eta)\mathbf{w}_{li}(k) + B(1-\eta)r(k) \\
&= A\xi_i(k) + B\eta C\xi_{i-1}(k) + B(1-\eta)\mathbf{w}_{li-1}(k) + B\eta\mathbf{w}_{pi-1}(k) - B\eta\mathbf{w}_{pi}(k) \\
&\quad - B(1-\eta)\mathbf{w}_{li}(k) + B(1-\eta)r(k)
\end{aligned} \tag{A.4}$$

La señal de desempeño puede ser obtenida a partir de la ecuación de salida de los seguidores genéricos de (3.6), pues se cumple:

$$\begin{aligned}
\zeta_i(k) &= y_{i-1}(k) - y_i(k) - r(k) = Cx_{i-1}(k) - Cx_i(k) - r(k) \\
&= C(x_{i-1}(k) - x_i(k)) - r(k) = C\xi_i(k) - r(k)
\end{aligned} \tag{A.5}$$

Luego, combinando las expresiones de (A.2), (A.3), (A.4) y (A.5), de forma matricial a lo largo del pelotón, se obtiene la estructura general del sistema propuesto en el lema 1.

## B Demostración de (4.7)

Es posible analizar la figura 3.1 y notar que la posición de un vehículo está dada por:

$$y_i = GK(\eta e_{pi} + (1-\eta)e_{li}) \tag{A.6}$$

Aplicando (A.6) sobre la definición del estado alternativo se consigue:

$$\begin{aligned}
\zeta_i &= y_{i-1} - y_i - r \\
\zeta_i &= GK(\eta e_{pi-1} + (1-\eta)e_{li-1}) - GK(\eta e_{pi} + (1-\eta)e_{li}) - r
\end{aligned} \tag{A.7}$$

De la expresión de (A.7) es necesario obtener una forma de pasar desde los errores de seguimiento locales a expresiones de señales de desempeño. La relación planteada en (4.6)

permite relacionar  $e_{pi}$  con  $\zeta_i$ , mientras que  $e_{li}$  puede ser asociado a  $\zeta_i$  como:

$$\begin{aligned}
e_{li} &= y_0 - y_i - ir + \mathbf{w}_{li} \\
&= y_0 - y_i - y_{i-1} + y_{i-1} - ir + \mathbf{w}_{li} \\
&= e_{li-1} - \mathbf{w}_{li-1} + \zeta_i + \mathbf{w}_{li}
\end{aligned} \tag{A.8}$$

Luego, es posible aplicar (A.8) en (A.7) para obtener:

$$\begin{aligned}
\zeta_i &= GK(\eta e_{pi-1} + (1 - \eta)e_{li-1}) - GK(\eta e_{pi} + (1 - \eta)e_{li}) - r \\
\zeta_i &= GK(\eta e_{pi-1} + (1 - \eta)e_{li-1}) - GK(\eta e_{pi} + (1 - \eta)(e_{li-1} - \mathbf{w}_{li-1} + \zeta_i + \mathbf{w}_{li})) - r \\
\zeta_i &= GK(\eta e_{pi-1}) - GK(\eta e_{pi} + (1 - \eta)(-\mathbf{w}_{li-1} + \zeta_i + \mathbf{w}_{li})) - r \\
\zeta_i &= GK(\eta(\zeta_{i-1} + \mathbf{w}_{pi-1}) - \eta(\zeta_i + \mathbf{w}_{pi}) + (1 - \eta)(\mathbf{w}_{li-1} - \zeta_i - \mathbf{w}_{li})) - r \\
\zeta_i &= GK(\eta(\zeta_{i-1} + \mathbf{w}_{pi-1}) - \zeta_i - \eta(\mathbf{w}_{pi}) + (1 - \eta)(\mathbf{w}_{li-1} - \mathbf{w}_{li})) - r \\
\zeta_i(1 + GK) &= GK(\eta(\zeta_{i-1} + \mathbf{w}_{pi-1}) - \eta(\mathbf{w}_{pi}) + (1 - \eta)(\mathbf{w}_{li-1} - \mathbf{w}_{li})) - r \\
\zeta_i &= T(\eta(\zeta_{i-1} + \mathbf{w}_{pi-1}) - \eta(\mathbf{w}_{pi}) + (1 - \eta)(\mathbf{w}_{li-1} - \mathbf{w}_{li})) - Sr
\end{aligned} \tag{A.9}$$

Con (A.9) queda demostrado el origen de (4.7) a partir de la ley de control seleccionada.

## C Demostración del Lema 2

La expresión de la media de (4.8) puede ser obtenida directamente al aplicar el operador esperanza sobre (4.5), recordando que tanto  $r(k)$  como  $\zeta_0(k)$  son determinísticos, y que las medias de los ruidos  $w_{pi}(k)$  y  $w_{li}(k)$  son cero  $\forall i \in [1, N]$ .

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} \{ \boldsymbol{\xi}(k+1) \} &= \mathcal{E} \{ \mathbf{A}\boldsymbol{\xi}(k) + \mathbf{B}_0\zeta_0(k) + \mathbf{B}_p\mathbf{w}_p(k) + \mathbf{B}_l\mathbf{w}_l(k) + \mathbf{B}_r r(k) \} \\
&= \mathbf{A}\mu_{\boldsymbol{\xi}}(k) + \mathbf{B}_0\zeta_0 + \mathbf{B}_r r(k) \\
\mathcal{E} \{ \boldsymbol{\zeta}(k) \} &= \mathcal{E} \{ \mathbf{C}\boldsymbol{\xi}(k) - \mathbf{1}r(k) \} = \mathbf{C}\mu_{\boldsymbol{\xi}}(k) - \mathbf{1}r(k)
\end{aligned} \tag{A.10}$$

La expresión recursiva de la varianza de (4.8) puede ser obtenida por definición, utilizando el hecho de que tanto  $r(k)$  como  $\zeta_0(k)$  son determinísticos y que los ruidos, además de con

media cero, son blancos:

$$\begin{aligned}
P_{\xi}(k+1) &= \mathcal{E} \left\{ (\xi(k+1) - \mu_{\xi(k+1)})(\xi(k+1) - \mu_{\xi(k+1)})^T \right\} \\
&= \mathcal{E} \left\{ \underbrace{(\mathbf{A}(\xi(k) - \mu_{\xi(k)}))}_{P_{\xi}(k)} + \mathbf{B}_p \mathbf{w}_p(k) + \mathbf{B}_l \mathbf{w}_l(k) \right\} \underbrace{(\mathbf{A}(\xi(k) - \mu_{\xi(k)}))}_{P_{\xi}(k)} + \mathbf{B}_p \mathbf{w}_p(k) + \mathbf{B}_l \mathbf{w}_l(k) \right\}^T \\
&= \mathbf{A} P_{\xi}(k) \mathbf{A}^T + \mathbf{B}_p P_p \mathbf{B}_p^T + \mathbf{B}_l P_l \mathbf{B}_l^T
\end{aligned} \tag{A.11}$$

Quedando demostrada también la expresión recursiva utilizada para calcular la varianza utilizando el estado auxiliar. La varianza de la señal de desempeño es calculada como:

$$\begin{aligned}
P_{\zeta}(k) &= \mathcal{E} \left\{ (\zeta(k) - \mu_{\zeta(k)})(\zeta(k) - \mu_{\zeta(k)})^T \right\} \\
&= \mathcal{E} \left\{ (\mathbf{C}\xi(k) - \mathbf{1}r(k) - \mathbf{C}\mu_{\xi(k)} + \mathbf{1}r(k))(\mathbf{C}\xi(k) - \mathbf{1}r(k) - \mathbf{C}\mu_{\xi(k)} + \mathbf{1}r(k))^T \right\} \\
&= \mathcal{E} \left\{ (\mathbf{C}\xi(k) - \mathbf{C}\mu_{\xi(k)})(\mathbf{C}\xi(k) - \mathbf{C}\mu_{\xi(k)})^T \right\} = \mathbf{C} P_{\xi}(k) \mathbf{C}^T
\end{aligned}$$

Se desea asegurar la convergencia en el tiempo de los segundos momentos de la señal de desempeño, que es equivalente a demostrar que el sistema planteado en (4.5) es estable en sentido cuadrático medio. Para ello, se hace uso de la suposición 7, puesto que, en realidad se propone  $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_0(k) = \zeta_0 = 0$ .

Las condiciones de convergencia y eventual estabilidad en el sentido cuadrático medio pueden ser demostradas al seguir los pasos propuestos por [73, 38], ya que la estructura del sistema y las suposiciones son similares. Al ser cumplidas, es posible notar que:

$$\begin{aligned}
\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\xi}(k+1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\xi}(k) = \mu_{\xi} \\
\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_{\zeta}(k) &= \mu_{\zeta} \\
\lim_{k \rightarrow \infty} P_{\xi}(k+1) &= \lim_{k \rightarrow \infty} P_{\xi}(k) = P_{\xi} \\
\lim_{k \rightarrow \infty} P_{\zeta}(k) &= P_{\zeta}
\end{aligned} \tag{A.12}$$

Aplicando (A.12) sobre (4.5) junto con la suposición 7 se obtiene para las ecuaciones de media, ante una referencia que cumple  $\lim_{k \rightarrow \infty} r(k) = r$ .

$$\begin{aligned}
\mu_{\xi} &= \mathbf{A}\mu_{\xi} + \mathbf{B}_r r = \mu_{\xi}(\mathbf{I} - \mathbf{A}) + \mathbf{B}_r r \implies \mu_{\xi} = (\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_r r \\
\mu_{\zeta} &= \mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{A})^{-1} \mathbf{B}_r r - \mathbf{1}r
\end{aligned} \tag{A.13}$$

La expresión de (A.13) puede ser trabajada, al considerar que, al cumplirse la suposición 2 se cumple también, en variables de estado  $\mathbf{C}(\mathbf{I} - \mathbf{A})\mathbf{B} = 1$ . Luego, es posible, por simpleza,

volver a operar en relación a cada elemento de  $\xi(k)$  por separado de (A.4) y aplicar operador esperanza en estado estacionario. De esta forma, se nota una cancelación de los pesos al utilizar también el vehículo predecesor, que aporta el factor  $(1 - \eta)$  faltante, consiguiendo  $\mu_\zeta = 0$ .

En relación a la obtención de la expresión de la varianza, se aplica (A.13) sobre (A.11), de manera de obtener:

$$\begin{aligned} P_\xi &= \mathbf{A}P_\xi\mathbf{A}^T + \mathbf{B}_pP_p\mathbf{B}_p^T + \mathbf{B}_lP_l\mathbf{B}_l^T \\ P_\zeta &= CP_\xi C^T \end{aligned} \quad (\text{A.14})$$

La expresión de  $P_\zeta$  no requiere mayor manipulación en (A.14), sin embargo, la expresión de  $P_\xi$  sigue siendo recursiva, por lo que se le es aplicada la operación de vectorización:

$$\begin{aligned} \text{vec}(P_\xi) &= (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A})\text{vec}(P_\xi) + \text{vec}(\mathbf{B}_pP_p\mathbf{B}_p^T + \mathbf{B}_lP_l\mathbf{B}_l^T) \\ (I - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}))\text{vec}(P_\xi) &= \text{vec}(\mathbf{B}_pP_p\mathbf{B}_p^T + \mathbf{B}_lP_l\mathbf{B}_l^T) \\ \text{vec}(P_\xi) &= (I - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}))^{-1}\text{vec}(\mathbf{B}_pP_p\mathbf{B}_p^T + \mathbf{B}_lP_l\mathbf{B}_l^T) \\ P_\xi &= \text{vec}^{-1}\left((I - (\mathbf{A} \otimes \mathbf{A}))^{-1}\text{vec}(\mathbf{B}_pP_p\mathbf{B}_p^T + \mathbf{B}_lP_l\mathbf{B}_l^T)\right) \end{aligned} \quad (\text{A.15})$$

Combinando (A.15) con (A.14) se obtienen las expresiones de varianza propuestas en el lema 2.

Para futuras demostraciones, se reescribe (A.10) de forma recursiva:

$$\begin{aligned} \mu_\xi(k+1) &= \mathbf{A}\mu_\xi(k) + \mathbf{B}_0\zeta_0 + \mathbf{B}_r r(k) \\ \mu_\xi(k) &= \mathbf{A}^k\mu_\xi(0) + \sum_{j=1}^k \mathbf{A}^{k-j} (\mathbf{B}_0\zeta_0(j-1) + \mathbf{B}_r r(j-1)) \\ \implies \mu_\zeta(k) &= \mathbf{C} \left( \mathbf{A}^k\mu_\xi(0) + \sum_{j=1}^k \mathbf{A}^{k-j} (\mathbf{B}_0\zeta_0(j-1) + \mathbf{B}_r r(j-1)) \right) - \mathbf{1}r(k) \end{aligned} \quad (\text{A.16})$$

## D Demostración del Teorema 3

Es posible notar, a partir de (4.8), que las medias del primer vehículo seguidor ( $i = 1$ ) satisface:

$$\begin{aligned} \mu_{\xi_1}(k+1) &= A\mu_{\xi_1}(k) + B\eta\mu_{\zeta_0}(k) + Br(k) \\ \mu_{\zeta_1}(k) &= C\mu_{\xi_1}(k) - r(k) \end{aligned} \quad (\text{A.17})$$

Al hacer al análisis en frecuencia se obtiene:

$$\begin{aligned}\mu_{\zeta_1}(z) &= C(zI - A)^{-1}B\eta\mu_{\zeta_0}(z) + C(zI - A)^{-1}BR(z) - R(z) \\ \mu_{\zeta_1}(z) &= \eta T(z)\mu_{\zeta_0}(z) + T(z)R(z) - R(z)\end{aligned}\tag{A.18}$$

La expresión de (A.18) es concluida *a posteriori* en (A.20), ya que la expresión a partir de este punto es igual entre todos los seguidores  $\forall i \in [1, N]$ .

Es posible notar, a partir de (4.8), que las medias de cada vehículo seguidor ( $\forall i \in [2, N]$ ) satisfacen:

$$\begin{aligned}\mu_{\xi_i}(k+1) &= A\mu_{\xi_i}(k) + B\eta C\mu_{\xi_{i-1}}(k) + B(1-\eta)r(k) \\ &= A\mu_{\xi_i}(k) + B\eta(\mu_{\zeta_{i-1}}(k) + r(k)) + B(1-\eta)r(k) \\ &= A\mu_{\xi_i}(k) + B\eta(\mu_{\zeta_{i-1}}(k) + r(k)) + B(1-\eta)r(k) \\ &= A\mu_{\xi_i}(k) + B\eta\mu_{\zeta_{i-1}}(k) + Br(k) \\ \mu_{\zeta_i}(k) &= C\mu_{\xi_i}(k) - r(k)\end{aligned}\tag{A.19}$$

Considerando que se cumple  $\mu_{\zeta_0}(k) = \zeta_0(k)$ , debido a que  $\zeta_0(k)$  es una señal determinística. Usando herramientas del análisis en el dominio de la frecuencia, es posible notar que se cumple:

$$\begin{aligned}\mu_{\zeta_i}(z) &= C(zI - A)^{-1}B\eta\mu_{\zeta_{i-1}}(z) + C(zI - A)^{-1}BR(z) - R(z) \\ \mu_{\zeta_i}(z) &= T(z)\eta\mu_{\zeta_{i-1}}(z) + T(z)R(z) - R(z)\end{aligned}\tag{A.20}$$

Mientras que las expresiones relacionadas a la transformada de la referencia  $R(z)$  pueden ser manipuladas como:

$$\begin{aligned}\mu_{\zeta_i}(z) &= T(z)\eta\mu_{\zeta_{i-1}}(z) + T(z)R(z) - R(z) \\ \mu_{\zeta_i}(z) &= T(z)\eta\mu_{\zeta_{i-1}}(z) + T(z)R(z) - (T(z) + S(z))R(z) \\ \mu_{\zeta_i}(z) &= T(z)\eta\mu_{\zeta_{i-1}}(z) - S(z)R(z)\end{aligned}\tag{A.21}$$

Al pasar a estado estacionario y usando las suposiciones 2 se obtiene:

$$\mu_{\zeta_i}(e^{j\omega}) = T(e^{j\omega})\eta\mu_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega})\tag{A.22}$$

Para obtener el espectro estacionario se utilizan las funciones de transferencia de la señal de desempeño, asumiendo que son estables en el sentido cuadrático medio, y de la función de covarianza. De forma análoga a la demostración propuesta en [73], la demostración se divide en dos partes, para el primer seguidor y para el resto.

**Primer seguidor**  $i = 1$ . A partir de (4.7) y de que  $\zeta_0$  es determinístico, junto con  $r$ , la

densidad espectral de potencia queda como:

$$\begin{aligned}\phi_{\zeta_1}(e^{j\omega}) &= (T(e^{j\omega})\eta)[\phi_p](T(e^{j\omega})\eta)^H + (T(e^{j\omega})(1-\eta))[\phi_l](T(e^{j\omega})(1-\eta))^H \\ &= |T(e^{j\omega})\eta|^2 P_p + |T(e^{j\omega})(1-\eta)|^2 P_l\end{aligned}\quad (\text{A.23})$$

Dado que se cumple  $\eta \in (0, 1)$   $= \eta^2 |T(e^{j\omega})|^2 P_p + (1-\eta)^2 |T(e^{j\omega})|^2 P_l$ .

Nótese que se hace uso de que al ser  $\mathbf{w}_{p1}$  y  $\mathbf{w}_{l1}$  ruidos blancos, su densidad espectral de potencia es  $P_p$  y  $P_l$ , respectivamente.

**Otros seguidores**  $i \in [2, N]$ . De manera análoga al primer seguidor, la transferencia del señal de interés está dada a partir de  $T[\eta\zeta_{i-1} + \eta\mathbf{w}_{pi-1} - \eta\mathbf{w}_{pi} + (1-\eta)\mathbf{w}_{li-1} - (1-\eta)\mathbf{w}_{li}] - Sr$ , entonces, al considerar también que  $r$  es determinista la densidad espectral de potencia satisface:

$$\begin{aligned}\phi_{\zeta_i}(z) &= (\eta T(z))\phi_{\zeta_{i-1}}(z)(\eta T(z))^H \\ &+ (\eta T(z))\phi_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(z)(\eta T(z))^H + (\eta T(z))\phi_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{li-1}}(z)((1-\eta)T(z))^H \\ &+ 2(\eta T(z))P_p(\eta T(z))^H + 2((1-\eta)T(z))P_l((1-\eta)T(z))^H\end{aligned}\quad (\text{A.24})$$

La expresión de (A.24) posee dos términos aún no definidos;  $\phi_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(z)$  y  $\phi_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{li-1}}(z)$ . Estos términos, correspondientes a la densidad espectral de potencia de la señal de desempeño del vehículo predecesor y cada ruido, son producto de que la señal de desempeño efectivamente está correlacionada con los ruidos del predecesor. Estas expresiones son caracterizadas individualmente a partir de su función de covarianza:

**Caso**  $\phi_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(z)$

La covarianza  $R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(k + \tau, \tau) = \mathcal{E} \left\{ (\zeta_{i-1}(k + \tau) - \mu_{\zeta_{i-1}}(k + \tau))(\mathbf{w}_{pi-1}(k))^H \right\}$  puede ser expandida como se propone:

$$\begin{aligned}R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(k + \tau, \tau) &= \mathcal{E} \left\{ (\zeta_{i-1}(k + \tau) - \mu_{\zeta_{i-1}}(k + \tau))(\mathbf{w}_{pi-1}(k))^H \right\} \\ &= \mathcal{E} \left\{ C(\xi_{i-1}(k + \tau) - \mu_{\xi_{i-1}}(k + \tau))(\mathbf{w}_{pi-1}(k))^H \right\} \\ &= C\mathcal{E} \left\{ (\xi_{i-1}(k + \tau) - \mu_{\xi_{i-1}}(k + \tau))(\mathbf{w}_{pi-1}(k))^H \right\}\end{aligned}\quad (\text{A.25})$$

Como es relevante únicamente la covarianza estacionaria, y que ya es posible asumir que ésta existe, la expresión de (A.25) es analizada en estado estacionario, recordando que los ruidos son blancos:

$$R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \tau = 0 \\ -CB\eta P_p & \text{Si } \tau = 1 \\ -CA^{\tau-1}B\eta P_p & \text{Si } \tau > 1 \end{cases}\quad (\text{A.26})$$

La expresión de  $R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}$  habilita la obtención de la densidad espectral de potencia

estacionaria por definición:

$$\begin{aligned}
\phi_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(z) &\triangleq \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(\tau)z^{-\tau} \\
&= \left[ \sum_{\tau=1}^{\infty} R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(\tau)z^{-\tau} \right]^H + \left[ \sum_{\tau=1}^{\infty} R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(\tau)z^{-\tau} \right] + R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(0) \\
&= \left[ \sum_{\tau=1}^{\infty} -CA^{\tau-1}B\eta P_p z^{-\tau} \right]^H + \left[ \sum_{\tau=1}^{\infty} -CA^{\tau-1}B\eta P_p z^{-\tau} \right] \\
&= -\eta P_p B^T (zI - A)^{-H} C^T - \eta C (zI - A)^{-1} B P_p \\
&= -P_p \eta T(z)^H - T(z) \eta P_p = -P_p \eta (T(z)^H + T(z))
\end{aligned} \tag{A.27}$$

La expresión de (A.27) hace uso de la equivalencia  $\sum_{\tau=1}^{\infty} A^{\tau-1} z^{-\tau} = (zI - A)^{-1}$ .

**Caso**  $\phi_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{li-1}}(z)$

De forma análoga al caso anterior, la covarianza es expandida como:

$$\begin{aligned}
R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{li-1}}(k + \tau, \tau) &= \mathcal{E} \left\{ (\zeta_{i-1}(k + \tau) - \mu_{\zeta_{i-1}}(k + \tau)) (\mathbf{w}_{li-1}(k))^H \right\} \\
&= \mathcal{E} \left\{ C (\boldsymbol{\xi}_{i-1}(k + \tau) - \mu_{\boldsymbol{\xi}_{i-1}}(k + \tau)) (\mathbf{w}_{li-1}(k))^H \right\} \\
&= C \mathcal{E} \left\{ (\boldsymbol{\xi}_{i-1}(k + \tau) - \mu_{\boldsymbol{\xi}_{i-1}}(k + \tau)) (\mathbf{w}_{li-1}(k))^H \right\}
\end{aligned} \tag{A.28}$$

Asimismo, los valores estacionarios de (A.28) son:

$$R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{li-1}}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \tau = 0 \\ -CB(1 - \eta)P_l & \text{Si } \tau = 1 \\ -CA^{\tau-1}B(1 - \eta)P_l & \text{Si } \tau > 1 \end{cases} \tag{A.29}$$

Es posible notar que la estructura de (A.29) es similar a la de (A.26), por lo que es posible realizar la misma expansión de (A.27), resultando:

$$\phi_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{li-1}}(z) = -P_l(1 - \eta)T(z)^H - T(z)(1 - \eta)P_l = -P_l(1 - \eta)(T(z)^H + T(z)) \tag{A.30}$$

Las expresiones de (A.27) y (A.30) poseen el término común  $T(z)^H + T(z)$ . Para simplificarlos, se propone la siguiente relación al explotar (3.4) y al hecho de que se están

manipulando sistemas SISO.

$$\begin{aligned}
T(z) + T^H(z) &= T(z)(S(z)^H + T(z)^H) + T^H(z)(S(z) + T(z)) \\
&= 2T(z)T(z)^H + T(z)S(z)^H + T(z)^H S(z) \\
&= 2T(z)T(z)^H + (1 - S(z))S(z)^H + (1 - S(z)^H)S(z) \\
&= 2T(z)T(z)^H - (S(z) - 1)(S(z) - 1)^H - S(z)^H S(z) + 1 \\
&= 2T(z)T(z)^H - T(z)T(z)^H - S(z)^H S(z) + 1 \\
&= T(z)T(z)^H - S^H(z)S(z) + 1
\end{aligned} \tag{A.31}$$

De esta forma, combinando los resultados de (A.24), (A.27) y (A.30), se obtiene:

$$\begin{aligned}
\phi_{\zeta_i}(z) &= (\eta T(z))\phi_{\zeta_{i-1}}(z)(\eta T(z))^H + (\eta T(z))(-P_p \eta T(z)^H - T(z)\eta P_p)(\eta T(z))^H \\
&\quad + (\eta T(z))(-P_l(1 - \eta)T(z)^H - T(z)(1 - \eta)P_l)((1 - \eta)T(z))^H \\
&\quad + 2(\eta T(z))P_p(\eta T(z))^H + 2((1 - \eta)T(z))P_l((1 - \eta)T(z))^H \\
&= (\eta T(z))\phi_{\zeta_{i-1}}(z)(\eta T(z))^H + (\eta T(z))(-P_p \eta (T(z)^H + T(z)))(\eta T(z))^H \\
&\quad + (\eta T(z))(-P_l(1 - \eta)(T(z)^H + T(z)))(1 - \eta)T(z))^H \\
&\quad + 2(\eta T(z))P_p(\eta T(z))^H + 2((1 - \eta)T(z))P_l((1 - \eta)T(z))^H
\end{aligned}$$

Definiendo  $\tilde{T}(z) = T(z)^H + T(z)$

$$\begin{aligned}
&= (\eta T(z))\phi_{\zeta_{i-1}}(z)(\eta T(z))^H + (\eta T(z))(-P_p \eta \tilde{T}(z) + 2P_p)(\eta T(z))^H \\
&\quad + (\eta T(z))(-P_l(1 - \eta)\tilde{T}(z))((1 - \eta)T(z))^H + 2((1 - \eta)T(z))P_l((1 - \eta)T(z))^H \\
&= (\eta T(z))\phi_{\zeta_{i-1}}(z)(\eta T(z))^H + (\eta T(z))(-P_p \eta \tilde{T}(z) + 2P_p)(\eta T(z))^H \\
&\quad + ((1 - \eta)T(z))(-P_l \eta \tilde{T}(z) + 2P_l)((1 - \eta)T(z))^H \\
&= (\eta T(z))\phi_{\zeta_{i-1}}(z)(\eta T(z))^H + (\eta T(z))P_p(2 - \eta \tilde{T}(z))(\eta T(z))^H \\
&\quad + ((1 - \eta)T(z))P_l(2 - \eta \tilde{T}(z))((1 - \eta)T(z))^H \\
&= (\eta T(z))\phi_{\zeta_{i-1}}(z)(\eta T(z))^H \\
&\quad + (2 - \eta \tilde{T}(z)) \left( (\eta T(z))P_p(\eta T(z))^H + ((1 - \eta)T(z))P_l((1 - \eta)T(z))^H \right) \\
&= (\eta T(z))\phi_{\zeta_{i-1}}(z)(\eta T(z))^H \\
&\quad + (2 - \eta \tilde{T}(z)) \left( (\eta T(z))P_p(\eta T(z))^H + (\eta T(z))P_l(\eta T(z))^H + T(z)[(1 - 2\eta)P_l]T(z)^H \right) \\
&= (\eta T(z))\phi_{\zeta_{i-1}}(z)(\eta T(z))^H \\
&\quad + (2 - \eta \tilde{T}(z)) \left( (\eta T(z))(P_p + P_l)(\eta T(z))^H + T(z)[(1 - 2\eta)P_l]T(z)^H \right) \\
&= (\eta T(z))\phi_{\zeta_{i-1}}(z)(\eta T(z))^H \\
&\quad + (2 - \eta \tilde{T}(z))(\eta T(z)) \left( (P_p + P_l) + \eta^{-1}[(1 - 2\eta)P_l]\eta^{-1} \right) (\eta T(z))^H
\end{aligned} \tag{A.32}$$

La expresión de (A.32) puede ser simplificada al considerar que  $(P_p + P_l) + \eta^{-1}[(1 - 2\eta) P_l]\eta^{-1}$  corresponde a una constante, denominada  $P_w$ . De esta forma; reordenando (A.32) se obtiene, utilizando la relación (A.31):

$$\begin{aligned}
\phi_{\zeta_i}(z) &= (\eta T(z))\phi_{\zeta_{i-1}}(z)(\eta T(z))^H + (2 - \eta\tilde{T}(z))(\eta T(z))P_w(\eta T(z))^H \\
&= (\eta T(z))\phi_{\zeta_{i-1}}(z)(\eta T(z))^H + (2 - \eta T(z)T(z)^H + \eta S(z)S(z)^H - \eta)(\eta T(z))P_w(\eta T(z))^H \\
&= (\eta T(z))\phi_{\zeta_{i-1}}(z)(\eta T(z))^H + ((2 - \eta) - \eta T(z)T(z)^H + \eta S(z)S(z)^H)(\eta T(z))P_w(\eta T(z))^H \\
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= |\eta T(e^{j\omega})|^2\phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + ((2 - \eta) - \eta|T(e^{j\omega})|^2 + \eta|S(e^{j\omega})|^2)P_w|\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
&= |\eta T(e^{j\omega})|^2\phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + (2 - \eta)P_w|\eta T(e^{j\omega})|^2 - \eta|T(e^{j\omega})|^2P_w|\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
&\quad + \eta|S(e^{j\omega})|^2P_w|\eta T(e^{j\omega})|^2
\end{aligned} \tag{A.33}$$

Las expresiones de (A.33) y (A.22) permiten establecer recursiones de la densidad espectral de potencia y la media, respectivamente, de la señal de desempeño, de manera de relacionar estos momentos en cada vehículo  $i$ -ésimo con los de su predecesor inmediato. Esta influencia en vez de definirse en el tiempo, se definen en el dominio de la transformada  $\mathcal{Z}$  y, al asegurarse convergencia en el tiempo al cumplirse las condiciones del lema 2, en el dominio de la transformada de Fourier de tiempo discreto. Esto permite desligarse de la convergencia temporal y enfocarse en estudiar el efecto de añadir más agentes en la cadena de vehículos, y, de esta forma estudiar la convergencia espacial.

Es posible notar que si se cumple  $|\eta T(e^{j\omega})| < 1 \quad \forall \omega \in (0, 2\pi)$ , las expresiones de (A.22) y (A.33) dan pie a una sucesión convergente a un valor finito, sin importar el efecto de la cantidad de vehículos, llegando a cumplirse la convergencia incluso con  $N \rightarrow \infty$ . Ante señales constantes, en estado estacionario, con  $\omega \rightarrow 0$ , tanto la media como la densidad espectral de potencia provocan una secuencia acotada debido al cumplimiento de la suposición 2 y de la condición propuesta  $\eta \in (0, 1)$ , que permite flexibilizar el diseño de  $T(z)$  al diseñar  $\eta$  a posteriori.

En todo el espectro de frecuencias, la condición suficiente para asegurar escalabilidad es  $|T(e^{j\omega})| < 1$ . A diferencia de [73, 38], en este caso se cumple  $T(e^{j\omega}) + S(e^{j\omega}) = 1 \quad \forall \omega \in [0, 2\pi]$ , por lo que incluso de existir un  $w^*$  que permita  $|T(e^{j\omega^*})| = 1$ , el factor  $|S(e^{j\omega^*})|$  será 0. El parámetro adicional  $\eta$  permite desplazar la magnitud de  $|T(e^{j\omega})|$  para asegurar convergencia. De esta forma, se concluye que  $|\eta T(e^{j\omega})| < 1$  es una condición necesaria y suficiente para asegurar la escalabilidad del pelotón.

A diferencia del caso de seguimiento a predecesor, esta condición puede ser extendida a norma infinito, puesto que no contradice el seguimiento perfecto a referencias estacionarias, sin embargo, ésta norma debe ser estrictamente menor, puesto que se busca que la magnitud de la densidad espectral de potencia decrezca, más no se mantenga igual.

## E Demostración de (4.16)

De la expresión que caracteriza a la densidad espectral de potencia de cada vehículo seguidor  $i \in [2, N]$

$$\begin{aligned}
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= |\eta T(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + (2 - \eta) P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 - \eta |T(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
&\quad + \eta |S(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) - |\eta T(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) &= (2 - \eta) P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 - \eta |T(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
&\quad + \eta |S(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) + (1 - |\eta T(e^{j\omega})|^2) \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) &= \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + (2 - \eta) P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
&\quad - \eta |T(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 + \eta |S(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) + (1 - |\eta T(e^{j\omega})|^2) \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) &= \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + (1 - \eta) P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
&\quad - \eta |T(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 + \eta |S(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 + P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2
\end{aligned}$$

Es posible sumar y restar el término  $|\eta T(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2$  a la derecha de la expresión, para construir un factor  $(1 - |\eta T(e^{j\omega})|^2) P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2$ :

$$\begin{aligned}
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) + (1 - |\eta T(e^{j\omega})|^2) \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) &= \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + (1 - \eta) P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
&\quad - \eta |T(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 + \eta |S(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 + P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
&\quad + |\eta T(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 - |\eta T(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) + (1 - |\eta T(e^{j\omega})|^2) \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) &= \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + (1 - \eta) P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
&\quad - \eta |T(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 + \eta |S(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 + (1 - |\eta T(e^{j\omega})|^2) P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
&\quad + |\eta T(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) + (1 - |\eta T(e^{j\omega})|^2) \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) &= \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + |\eta T(e^{j\omega})|^2 [(1 - \eta) P_w \\
&\quad - \eta |T(e^{j\omega})|^2 P_w + \eta |S(e^{j\omega})|^2 P_w + |\eta T(e^{j\omega})|^2 P_w] + (1 - |\eta T(e^{j\omega})|^2) P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2
\end{aligned} \tag{A.34}$$

Luego, es posible reemplazar iterativamente sobre los factores de  $\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega})$  en (A.34), recordando que  $\phi_{\zeta_1}(e^{j\omega}) = |\eta T(e^{j\omega})|^2 P_w$ , por lo que este término es cancelado al terminar la sucesión.

## F Demostración del Corolario 1

Es posible caracterizar la varianza estacionaria a partir de la densidad espectral de potencia de la señal de desempeño, planteada en su forma alternativa a partir de (4.16), utilizando

la definición de norma-2 estándar para sistemas:

$$\begin{aligned}
P_{\zeta_i} &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) d\omega \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} [\phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + ((\eta T(e^{j\omega}))^{i-1})(1-\eta)P_w((\eta T(e^{j\omega}))^{i-1})^H \\
&\quad - (T(e^{j\omega})(\eta T(e^{j\omega}))^{i-1})\eta P_w(T(e^{j\omega})(\eta T(e^{j\omega}))^{i-1})^H + ((\eta T(e^{j\omega}))^i)P_w((\eta T(e^{j\omega}))^i)^H \\
&\quad + (S(e^{j\omega})(\eta T(e^{j\omega}))^{i-1})\eta P_w(S(e^{j\omega})(\eta T(e^{j\omega}))^{i-1})^H] d\omega \\
&= P_{\zeta_{i-1}} + (1-\eta)P_w \left\| (\eta T(e^{j\omega}))^{i-1} \right\|_2^2 - \eta P_w \left\| T(e^{j\omega})(\eta T(e^{j\omega}))^{i-1} \right\|_2^2 \\
&\quad + \eta P_w \left\| S(e^{j\omega})(\eta T(e^{j\omega}))^{i-1} \right\|_2^2 + P_w \left\| (\eta T(e^{j\omega}))^i \right\|_2^2 \\
&= P_{\zeta_{i-1}} + (1-\eta)P_w \\
&\quad \times \underbrace{\left[ \left\| (\eta T(e^{j\omega}))^{i-1} \right\|_2^2 - \eta \left\| T(e^{j\omega})(\eta T(e^{j\omega}))^{i-1} \right\|_2^2 + \eta(1-\eta)^{-1} \left\| S(e^{j\omega})(\eta T(e^{j\omega}))^{i-1} \right\|_2^2 \right]}_{\hbar}
\end{aligned} \tag{A.35}$$

La expresión de (A.35) permite conocer *a priori* la naturaleza creciente de  $P_{\zeta_i}(e^{j\omega})$ , es decir  $P_{\zeta_i} \geq P_{\zeta_{i-1}}$ . Para ello, se supone que  $\hbar$  es siempre positivo.

De esta forma, si  $\hbar > 0$ , se cumple  $P_{\zeta_i} \geq P_{\zeta_{i-1}}$ , por lo que es esperable que  $P_{\zeta_N}$  sea la varianza máxima de cualquier vehículo del pelotón.

Es posible explotar la expresión final de (A.35) de forma recursiva, factorizando y utilizando propiedades de norma-2 de manera de obtener (A.36).

$$\max_i P_{\zeta_i} = P_{\zeta_N} = \left( (1-\eta) \left\| F_{A_\zeta} \right\|_2^2 - \eta \left\| F_{B_\zeta} \right\|_2^2 + \eta \left\| F_{C_\zeta} \right\|_2^2 + \left\| F_{D_\zeta} \right\|_2^2 \right) P_w \tag{A.36}$$

Con:

$$\begin{aligned}
F_{A_\zeta} &= \begin{bmatrix} 0 & (\eta T) & (\eta T)^2 & \dots & (\eta T)^{N-1} \end{bmatrix} \\
F_{B_\zeta} &= \begin{bmatrix} 0 & T(\eta T) & T(\eta T)^2 & \dots & T(\eta T)^{N-1} \end{bmatrix} \\
F_{C_\zeta} &= \begin{bmatrix} 0 & S(\eta T) & S(\eta T)^2 & \dots & S(\eta T)^{N-1} \end{bmatrix} \\
F_{D_\zeta} &= \begin{bmatrix} (\eta T) & (\eta T)^2 & (\eta T)^3 & \dots & (\eta T)^N \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

El valor de varianza en estado estacionario, de un hipotético último vehículo, cuando  $N \rightarrow \infty$ , se obtiene retornando a (4.12), utilizando de forma auxiliar un factor espectral  $M(e^{j\omega})$  que satisface  $|M(e^{j\omega})|^2 = 1 - |\eta T(e^{j\omega})|^2$ , y que puede ser calculado utilizando el

teorema 2:

$$\begin{aligned}
\phi_{\zeta_\infty}(e^{j\omega}) &= |\eta T(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_\infty} + (2 - \eta) P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 - \eta |T(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
&\quad + \eta |S(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
\phi_{\zeta_\infty}(e^{j\omega})(1 - |\eta T(e^{j\omega})|^2) &= (2 - \eta) P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 - \eta |T(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
&\quad + \eta |S(e^{j\omega})|^2 P_w |\eta T(e^{j\omega})|^2 \\
\phi_{\zeta_\infty}(e^{j\omega}) &= (2 - \eta) P_w \frac{|\eta T(e^{j\omega})|^2}{|M(e^{j\omega})|^2} - \eta P_w \frac{|T(e^{j\omega})|^2 |\eta T(e^{j\omega})|^2}{|M(e^{j\omega})|^2} + \eta P_w \frac{|S(e^{j\omega})|^2 |\eta T(e^{j\omega})|^2}{|M(e^{j\omega})|^2}
\end{aligned} \tag{A.37}$$

La expresión de (A.37) puede ser resuelta usando  $\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \phi_{\zeta_\infty}(e^{j\omega}) d\omega$ , por lo tanto, factorizando (A.37) de manera de formar, por definición, a la estructura de la norma-2 se obtiene:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_{\zeta_N} = P_w \left( (2 - \eta) \left\| \frac{\eta T(z)}{M(z)} \right\|_2^2 - \eta \left\| \frac{\eta T(z)^2}{M(z)} \right\|_2^2 + \left\| \frac{S(z) \eta T(z)}{M(z)} \right\|_2^2 \right) \tag{A.38}$$

## G Demostración del Teorema 4

El presente teorema es demostrado en dos partes: una referente a la media de la señal de desempeño y a su varianza.

### Media de la señal de desempeño

Al utilizar la expresión recursiva de (A.16), de esta forma, para separar cada vehículo de la expresión que representa a todo el pelotón, se utiliza el vector  $\phi_i$ , de forma que la media de un vehículo  $i$ -ésimo se propone  $\mu_{\zeta_i}(k) = \phi_i \mu_\zeta$ , con  $\phi_i$  como un vector de ceros, excepto con el elemento en la posición  $i$  que es igual a uno. Por lo tanto, la media de la señal de desempeño corresponde a:

$$\mu_{\zeta_i}(k) = \phi_i \mathbf{C} \left( \mathbf{A}^k \mu_\xi(0) + \sum_{j=1}^k \mathbf{A}^{k-j} (\mathbf{B}_0 \zeta_0(j-1) + \mathbf{B}_r r(j-1)) \right) - r(k) \tag{A.39}$$

Con  $\mu_\xi(0)$  es la media de la condición inicial del estado ampliado  $\xi(0)$ . Usando la desigualdad

triangular del teorema 1 se obtiene:

$$\begin{aligned} \|\mu_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_2} &\leq \left\| \phi_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mu_{\xi}(0) \right\|_{\mathcal{L}_2} + \left\| \phi_i \sum_{j=1}^k \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-j} (\mathbf{B}_0 \zeta_0(j-1) + \mathbf{B}_r r(j-1)) - r(k) \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ \|\mu_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_2} &\leq \left\| \phi_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mu_{\xi}(0) \right\|_{\mathcal{L}_2} \\ &\quad + \left\| \phi_i \sum_{j=1}^k \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-j} (\mathbf{B}_0 \zeta_0(j-1)) \right\|_{\mathcal{L}_2} + \left\| \phi_i \sum_{j=1}^k \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-j} \mathbf{B}_r r(j-1) - r(k) \right\|_{\mathcal{L}_2} \end{aligned} \quad (\text{A.40})$$

Para el término asociado a la condición inicial, la norma  $\mathcal{L}_2$  puede ser calculada utilizando la propiedad (2.3):

$$\begin{aligned} \left\| \phi_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mu_{\xi}(0) \phi_i \right\|_{\mathcal{L}_2}^2 &= \sum_{k=0}^{\infty} \phi_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mu_{\xi}(0) \mu_{\xi}(0)^T \mathbf{A}^{kT} \mathbf{C}^T \phi_i^T \leq \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \|\mu_{\xi}(0)\|_2^2 \rho(\mathbf{A}^{kT} \mathbf{C}^T \phi_i^T \phi_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k) \right] \\ &= \|\mu_{\xi}(0)\|_2^2 \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \rho(\mathbf{A}^{kT} \mathbf{C}^T \phi_i^T \phi_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k) \right] \end{aligned}$$

Por lo tanto, se cumple:

$$\left\| \phi_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k \mu_{\xi}(0) \phi_i \right\|_{\mathcal{L}_2}^2 \leq \|\mu_{\xi}(0)\|_2^2 \left( \sum_{k=0}^{\infty} \left[ \rho(\mathbf{A}^{kT} \mathbf{C}^T \phi_i^T \phi_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k) \right] \right)^{\frac{1}{2}} \quad (\text{A.41})$$

El cumplimiento de (A.41) permite acotar la un término de la media de la señal de desempeño por una función asociada a la condición inicial del estado auxiliar.

Luego, el término asociado a la señal de desempeño del primer elemento de (A.40) puede ser acotado. Esto se consigue al notar que  $\zeta_0(k)$  es una señal meramente determinística. Como  $\zeta_0$  converge a cero, su norma  $\mathcal{L}_2$  está definida. También el término de la sumatoria,  $\phi_i \sum_{j=1}^k \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-j} (\mathbf{B}_0 \zeta_0(j-1))$  representa a la respuesta de  $(\eta T)^i$  al estímulo  $\zeta_0$ , por lo que se cumple:

$$\left\| \phi_i \sum_{j=1}^k \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-j} (\mathbf{B}_0 \zeta_0(j-1)) \right\|_{\mathcal{L}_2} = \left\| \eta T(z)^i \right\|_{\infty} \|\zeta_0(k)\|_{\mathcal{L}_2} \quad (\text{A.42})$$

Se conoce de antemano que  $\|\zeta_0(k)\|_{\mathcal{L}_2}$  existe, ya que  $\zeta_0(k)$  converge a cero. Además, de cumplirse  $\|\eta T(z)\|_{\infty} \leq 1$ , se permite concluir que (A.42) también permanece acotada, independientemente de los valores que toma  $\zeta_0(k)$ . Luego, como  $\zeta_0(k)$  es determinista, y asumiendo que se cumple  $\|\eta T(z)\|_{\infty} \leq 1$ , es posible conseguir la cota asociada a la señal de

desempeño del primer vehículo:

$$\left\| \phi_i \sum_{j=1}^k \mathbf{C} \mathbf{A}^{k-j} (\mathbf{B}_0 \zeta_0(j-1)) \right\|_{\mathcal{L}_2} < \|\eta T(z)\|_{\infty} \|\mu_{\zeta_0}(k)\|_{\mathcal{L}_2} \quad (\text{A.43})$$

El tercer término de (A.40) está asociado al efecto de la señal de referencia, que no está estrictamente definida como parte de  $\nu$ , pero que también es parte de la cota. Para ello, es posible notar que el tercer término corresponde a la convolución entre el sistema  $S$  y la señal  $r(k)$ . Dadas las condiciones propuestas en la suposición 2, es posible notar que  $S(z)$  posee al menos dos ceros en  $z = 1$ , por lo que la convolución  $Sr$  converge a cero en estado estacionario (Porque la respuesta  $Sr$  está formada únicamente por modos naturales, que al cumplirse (4.10), permiten asegurar que éstos se disipan). De esta forma, sea la señal  $\tau_t(k) = Sr$ .  $\tau_t(k)$  es una señal acotada, por lo que  $\|\tau_t(k)\|_{\mathcal{L}_2}$  existe y es un valor finito.

Además, el que  $\|\tau_t(k)\|_{\mathcal{L}_2}$  sea parte de la cota permite notar un comportamiento asociado al efecto de cambiar la referencia, puesto que implica un aumento de la norma  $\mathcal{L}_2$  hasta que  $\tau_t(k)$  vuelva a estado estacionario, es decir, hasta que  $\tau_t(k)$  sea 0. Esto también significa que es necesario que  $S(z)$  posea dos ceros en  $z = 1$  y que la referencia sea constante, dado que si no se cumple esta propiedad,  $\tau_t(k)$  deja de estar acotado y por ende la señal de desempeño también deja de estarlo. De esta forma, los resultados obtenidos son válidos sí y solo si  $r(k)$  es constante.

De esta forma, es posible afirmar, *grosso modo*, que se cumple (A.44) en todo instante, debido a que  $\|\tau_t(k)\|_{\mathcal{L}_2}$  es no negativo.

$$\|\mu_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_2} \leq f(\|\mu_{\nu}(k)\|_{\mathcal{L}_2}, \|\mu_{\xi}(0)\|_2) \leq f(\|\mu_{\nu}(k)\|_{\mathcal{L}_2}, \|\mu_{\xi}(0)\|_2) + \|\tau_t(k)\|_{\mathcal{L}_2} \quad (\text{A.44})$$

Con el lado izquierdo de (A.44) es posible acotar la media de la señal de desempeño con funciones de clase  $\mathcal{K}$ , es decir:

$$\|\mu_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_2} \leq f(\|\mu_{\nu}(k)\|_{\mathcal{L}_2}, \|\mu_{\xi}(0)\|_2) = \alpha_1(\|\mu_{\nu}(k)\|_{\mathcal{L}_2}) + \beta_1(\|\mu_{\xi}(0)\|_2) \quad (\text{A.45})$$

Con  $\alpha_1$  y  $\beta_1$  como funciones de clase  $\mathcal{K}$ , definidas en (A.41) y (A.43), respectivamente.

### Varianza de la señal de desempeño

Es posible trabajar con el ruido unificado de varianza  $\bar{P}_p + \bar{P}_l$ . Esto permite poseer una estructura similar a la propuesta en [73]; pues de (A.35), se plantea que la expresión recursiva de la varianza de la señal de desempeño sigue la estructura:

$$P_{\zeta_i}(k) = f_i(P_{\xi}(0), k) + g_i(P_p + P_l, k)$$

Con  $P_{\xi}(0)$  como la varianza de la condición inicial del estado  $\xi(0)$  y  $g_i(\bar{P}_p + \bar{P}_l, l)$  como una

función lineal de  $\bar{P}_p + \bar{P}_l$ . De esta forma, utilizando la desigualdad triangular (Teorema 1) se obtiene:

$$\|P_{\zeta_i}(k)\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \|f_i(P_\xi(0), k)\|_{\mathcal{L}_\infty} + \|g_i(\bar{P}_p + \bar{P}_l, k)\|_{\mathcal{L}_\infty} \quad (\text{A.46})$$

Usando (4.9) es posible obtener una expresión recursiva con respecto a la condición inicial:

$$f_i(P_\xi(0), k) = \phi_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k P_\xi(0) (\mathbf{A}^k)^T \mathbf{C}^T \phi_i^T \quad \text{Para } k \geq 1 \quad (\text{A.47})$$

Luego, utilizando la propiedad (2.3) se obtiene:

$$\begin{aligned} \|f_i(P_\xi(0), k)\|_{\mathcal{L}_\infty} &= \max_k \left( \phi_i \mathbf{C} \mathbf{A}^k P_\xi(0) (\mathbf{A}^k)^T \mathbf{C}^T \phi_i^T \right) \\ &\geq \max_k \rho \left( \mathbf{A}^k P_\xi(0) (\mathbf{A}^k)^T \right) \|\phi_i \mathbf{C}\|_2 \end{aligned} \quad (\text{A.48})$$

La expresión de (A.48) permite acotar la varianza, puesto que el radio espectral de  $\rho \left( \mathbf{A}^k P_\xi(0) (\mathbf{A}^k)^T \right)$  logra su máximo con  $k = 0$ , debido a que se asume el cumplimiento de la condición de convergencia temporal de (4.10). Luego,  $\mathbf{C}$  es diagonal por bloques, por lo que se cumple  $\phi_i \mathbf{C} \mathbf{C}^T \phi_i^T = \mathbf{C} \mathbf{C}^T$  y, por lo tanto,  $\|\phi_i \mathbf{C}\|_2^2 = \|\mathbf{C}\|_2^2$ , por lo que se concluye, utilizando (2.4):

$$\|f_i(P_\xi(0), k)\|_{\mathcal{L}_\infty} \geq \rho(P_\xi(0)) \|\phi_i \mathbf{C}\|_2 = \sigma_{max}(P_\xi(0)) \|\mathbf{C}\|_2 \quad (\text{A.49})$$

Para acotar a  $\|g_i(\bar{P}_p + \bar{P}_l, k)\|_{\mathcal{L}_\infty}$  con una función mediante se busca demostrar que el valor máximo de la función  $g_i(\bar{P}_p + \bar{P}_l, k)$  ocurre en estado estacionario, es decir, cuando  $k \rightarrow \infty$ . Para ello, se nota que  $g_i(\bar{P}_p + \bar{P}_l, k) = P_{\zeta_i}(k)$  cuando  $P_\xi(0) = 0$ . De esta forma, es necesario demostrar que la varianza  $P_\xi$  es también creciente. La demostración se torna semejante a la propuesta en [73]. De esta forma, asumiendo  $P_\xi(0) = 0$ , al reemplazar en (4.9), se obtiene:

$$P_\xi(1) - P_\xi(0) = \mathbf{B}_p \bar{P}_p \mathbf{B}_p^T + \mathbf{B}_l \bar{P}_l \mathbf{B}_l^T \geq 0$$

Las sucesiva diferencia en el tiempo también es semi-definida positiva, ya que:

$$P_\xi(2) - P_\xi(1) = \mathbf{A} P_\xi(1) \mathbf{A}^T + \mathbf{B}_p \bar{P}_p \mathbf{B}_p^T + \mathbf{B}_l \bar{P}_l \mathbf{B}_l^T - \mathbf{B}_p \bar{P}_p \mathbf{B}_p^T - \mathbf{B}_l \bar{P}_l \mathbf{B}_l^T = \mathbf{A} P_\xi(1) \mathbf{A}^T \quad (\text{A.50})$$

De (4.9), con un espíritu similar al propuesto en (A.50), se obtiene que  $P_\xi(k+1) - P_\xi(k) = \mathbf{A} (P_\xi(k) - P_\xi(k-1)) \mathbf{A}$ . De esta forma, se concluye que  $P_\xi(k+1) - P_\xi(k) \geq 0, \forall k \geq 0$ , luego, como  $P_\zeta(k+1) - P_\zeta(k) = \mathbf{C} (P_\xi(k+1) - P_\xi(k)) \mathbf{C}^T$ , por lo que la diferencia temporal  $P_\zeta(k+1) - P_\zeta(k)$  es también una matriz positiva definida. Esto también implica que  $P_\zeta(k+1) - P_\zeta(k)$  es un escalar positivo, dado que cada sub-matriz de una matriz positiva definida también lo es [74, 73]. Por lo tanto, cuando  $P_\xi(0) = 0$ ,  $P_{\zeta_i}(k)$  es también una función creciente en  $k$  y su máximo valor se alcanza en estado estacionario.

En el teorema 3 se propone que al cumplirse  $\|\eta T(z)\|_\infty < 1$  las varianzas estacionarias existen para cualquier  $N \in \mathbb{N}$ . Esta noción es extendida en el corolario 1, dónde se caracteriza esta varianza estacionaria y es acotada por  $P_{\zeta_N}$ ; por lo que se cumple:

$$\begin{aligned}
\|g_i(\bar{P}_p + \bar{P}_l, k)\|_{\mathcal{L}_\infty} &\geq \|g_N(\bar{P}_p + \bar{P}_l, k)\|_{\mathcal{L}_\infty} \\
&= \|P_{\zeta_N}(k)\|_{\mathcal{L}_\infty}, \quad \text{Considerando } P_\xi(0) = 0 \\
&= P_w \left( (2 - \eta) \left\| \frac{\eta T(z)}{M(z)} \right\|_2^2 - \eta \left\| \frac{\eta T(z)^2}{M(z)} \right\|_2^2 + \left\| \frac{S(z)\eta T(z)}{M(z)} \right\|_2^2 \right)
\end{aligned} \tag{A.51}$$

Con  $P_w$  definido a partir de (4.13), dónde se puede determinar que, al cumplirse que  $P_w = P_p + P_l + \Psi$ , es también una cota superior, ya que es posible entender este proceso de acotación como un sistema auxiliar de varianzas  $P_p$  y  $P_l$  y  $\eta$  nulo, calculado de tal forma que sea equivalente a la del sistema real y completo a acotar, en un proceso de mapeo del valor de  $\eta$  incluyéndolo dentro las varianzas; este proceso siempre tiene solución, dado que existe una ecuación y dos incógnitas, por lo que es un sistema de ecuaciones consistente, al asignar a alguna varianza un valor arbitrario no negativo. De esta forma, al darse la relación  $\|\bar{P}_p + \bar{P}_l\|_{\mathcal{L}_\infty} = P_d + P_l$  y utilizando desigualdad triangular, es posible acotar utilizando términos de  $P_w$ , dado que acota también de forma superior a  $\|\bar{P}_p + \bar{P}_l\|_{\mathcal{L}_\infty}$ .

Siendo también utilizado que  $\|P_w\|_{\mathcal{L}_\infty} = P_w$  y que el valor máximo de la varianza de cualquier señal de desempeño, corresponde a  $P_{\zeta_N}$  en estado estacionario, obtenido al utilizar el corolario 1. Por lo tanto, es posible concluir que la varianza de cualquier señal de desempeño satisface la relación:

$$\|P_{\zeta_i}(K)\|_{\mathcal{L}_\infty} \leq \alpha_2 \left( \|\bar{P}_p + \bar{P}_l\|_{\mathcal{L}_\infty} \right) + \beta_2 (\|P_\xi(0)\|_{\mathcal{L}_\infty}) \tag{A.52}$$

Donde las funciones de clase  $\mathcal{K}$ ,  $\alpha_2$  y  $\beta_2$  están definidas en (A.51) y (A.49), respectivamente.

## H Demostración del Lema 3

La demostración es similar a la propuesta para el lema 1. Puesto que está basada en la definición del sistema en (5.8) y la definición de estado alternativo de (4.1). Al igual que en el caso de control por posición, se propone esta demostración por separado.

**Primer seguidor**  $i = 1$ . Adelantando la definición de estado alternativo de (4.1), usando el

sistema (5.8):

$$\begin{aligned}
\xi_1(k+1) &= x_{t0}(k+1) - x_{t1}(k+1) \\
&= A_t x_{t0}(k) + B_p(r_0(k) - r(k)) + B_v(\dot{r}_0(k)) - A_t x_{t1}(k) \\
&\quad - B_p(y_1(k) + \mathbf{w}_{p1}(k) - r(k)) - B_v(\dot{y}_0(k) + \mathbf{w}_{v01}(k)) \\
&= A_t \xi_1(k) + B_p(r_0(k) - y_1(k) - r(k)) + B_p r(k) + B_v(\dot{r}_0(k) - \dot{y}_0(k)) \\
&\quad - B_p \mathbf{w}_{p1}(k) - B_v \mathbf{w}_{v01}(k)
\end{aligned} \tag{A.53}$$

Usando (A.53) junto con las definiciones de (4.3) y (5.10) se obtiene:

$$\xi_1(k+1) = A_t \xi_1(k) + B_p(\zeta_0(k)) + B_p r(k) + B_v \zeta_{v0}(k) - B_p \mathbf{w}_{p1}(k) - B_v \mathbf{w}_{v01}(k) \tag{A.54}$$

Luego, la señal de desempeño del primer seguidor está dada por:

$$\begin{aligned}
\zeta_1(k) &= y_0(k) - y_1(k) - r(k) \\
&= C_t(x_{t0}(k) - x_{t1}(k)) - r(k) = C_t \xi_1(k) - r(k)
\end{aligned} \tag{A.55}$$

**Seguidor**  $i \in [2, N]$  Adelantando la expresión del estado alternativo de (4.1), con el sistema (5.8):

$$\begin{aligned}
\xi_i(k+1) &= x_{ti-1}(k+1) - x_{ti}(k+1) \\
&= A_t x_{ti-1}(k) + B_p(C_t x_{ti-2}(k) + \mathbf{w}_{pi-1}(k) - r(k)) + B_v(\dot{y}_0(k) + \mathbf{w}_{v0i-1}(k)) \\
&\quad - A_t x_{ti}(k) - B_p(C_t x_{ti-1}(k) + \mathbf{w}_{pi}(k) - r(k)) - B_v(\dot{y}_0(k) + \mathbf{w}_{v0i}(k)) \\
&= A_t(x_{ti-1}(k) - x_{ti}(k)) + B_p C_t(x_{ti-2}(k) - x_{ti-1}(k)) + B_p \mathbf{w}_{pi-1}(k) \\
&\quad + B_v \mathbf{w}_{v0i-1}(k) - B_p \mathbf{w}_{pi}(k) - B_v \mathbf{w}_{v0i}(k) \\
&= A_t \xi_i(k) + B_p C_t \xi_{i-1}(k) + B_p \mathbf{w}_{pi-1}(k) \\
&\quad + B_v \mathbf{w}_{v0i-1}(k) - B_p \mathbf{w}_{pi}(k) - B_v \mathbf{w}_{v0i}(k)
\end{aligned} \tag{A.56}$$

Mientras que la expresión de la señal de desempeño puede ser obtenida de la misma forma que en (A.55), es decir:

$$\begin{aligned}
\zeta_i(k) &= y_i(k) - y_{i-1}(k) - r(k) \\
&= C_t(x_{ti-1}(k) - x_{ti}(k)) - r(k) = C_t \xi_i(k) - r(k)
\end{aligned} \tag{A.57}$$

Combinando los resultados de (A.54), (A.55), (A.56) y (A.57) de forma matricial, se obtienen las expresiones que conforman al lema 3.

## I Demostración del Lema 4

Es posible calcular la expresión de la media al aplicar directamente el operador de esperanza sobre (5.11), recordando que  $r(k)$ ,  $\zeta_0$  y  $\zeta_{v0}(k)$  son determinísticos y que los ruidos tienen media cero:

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\{\boldsymbol{\xi}(k+1)\} &= \mathcal{E}\{\mathbf{A}_f\boldsymbol{\xi}(k) + \mathbf{B}_{0fp}\zeta_0(k) + \mathbf{B}_{0fv}\zeta_{v0}(k) + \mathbf{B}_{pf}\mathbf{w}_p(k) + \mathbf{B}_{lf}\mathbf{w}_l(k) + \mathbf{B}_{0fp}r(k)\} \\ &= \mathbf{A}_f\mu_{\boldsymbol{\xi}}(k) + \mathbf{B}_{0fp}\zeta_0(k) + \mathbf{B}_{0fv}\zeta_{v0}(k) + \mathbf{B}_{0fp}r(k) \\ \mathcal{E}\{\zeta(k)\} &= \mathcal{E}\{\mathbf{C}_f\boldsymbol{\xi}(k) - \mathbf{1}r(k)\} = \mathbf{C}_f\mu_{\boldsymbol{\xi}}(k) - \mathbf{1}r(k)\end{aligned}\tag{A.58}$$

La expresión de (A.58) permite calcular la varianza por definición, pues se cumple (A.59) al usar el hecho de que el ruido no está correlacionado.

$$\begin{aligned}P_{\boldsymbol{\xi}}(k+1) &= \mathcal{E}\{(\boldsymbol{\xi}(k+1) - \mu_{\boldsymbol{\xi}(k+1)})(\boldsymbol{\xi}(k+1) - \mu_{\boldsymbol{\xi}(k+1)})^T\} \\ &= \mathbf{A}_f P_{\boldsymbol{\xi}}(k) \mathbf{A}_f^T + \mathbf{B}_{pf} \bar{P}_p \mathbf{B}_{pf}^T + \mathbf{B}_{lf} \bar{P}_l \mathbf{B}_{lf}^T\end{aligned}\tag{A.59}$$

Quedando demostrada también la expresión recursiva utilizada para calcular la varianza utilizando el estado auxiliar. La varianza de la señal de desempeño es calculada como:

$$\begin{aligned}P_{\zeta}(k) &= \mathcal{E}\{(\zeta(k) - \mu_{\zeta}(k))(\zeta(k) - \mu_{\zeta}(k))^T\} \\ &= \mathcal{E}\{(\mathbf{C}_f\boldsymbol{\xi}(k) - \mathbf{1}r(k) - \mathbf{C}_f\mu_{\boldsymbol{\xi}}(k) + \mathbf{1}r(k))(\mathbf{C}_f\boldsymbol{\xi}(k) - \mathbf{1}r(k) - \mathbf{C}_f\mu_{\boldsymbol{\xi}}(k) + \mathbf{1}r(k))^T\} \\ &= \mathcal{E}\{(\mathbf{C}_f\boldsymbol{\xi}(k) - \mathbf{C}_f\mu_{\boldsymbol{\xi}}(k))(\mathbf{C}_f\boldsymbol{\xi}(k) - \mathbf{C}_f\mu_{\boldsymbol{\xi}}(k))^T\} = \mathbf{C}_f P_{\boldsymbol{\xi}}(k) \mathbf{C}_f^T\end{aligned}$$

Nótese que la expresión de la varianza de la señal de desempeño es igual a la del caso de control por posiciones, por lo que lo que resta de demostración de ecuaciones asociadas a la varianza de señal de desempeño es igual a la ya presentada en la sección C. Esto es producto de que la elección del estado alternativo y la señal de desempeño es conveniente para retornar a expresiones ya conocidas.

De la misma forma, se debe asegurar convergencia en el tiempo de los segundos momentos de la señal de desempeño. Se hace uso de la suposición 7 y de la suposición 8, exclusiva de sistemas de control basado en velocidades, de forma de poder asumir que se cumple  $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_0(k) = \zeta_0 = 0$  y  $\lim_{k \rightarrow \infty} \zeta_{v0}(k) = \zeta_{v0} = 0$ .

Las condiciones de convergencia y eventual estabilidad en el sentido cuadrático medio pueden ser demostradas al seguir los pasos enunciados en la sección C ya que la estructura del sistema y las suposiciones son similares. Al ser cumplidas, es posible notar que en este caso también es posible aplicar (A.12).

Aplicando (A.12) sobre (A.58) se obtiene:

$$\begin{aligned}\mu_\xi &= \mathbf{A}_f \mu_\xi + \mathbf{B}_{0fp} r = (\mathbf{I} - \mathbf{A}_f)^{-1} \mathbf{B}_{0fp} r \\ \mu_\zeta &= \mathbf{C}_f (\mathbf{I} - \mathbf{A}_f)^{-1} \mathbf{B}_{0fp} r - \mathbf{1} r\end{aligned}\quad (\text{A.60})$$

La expresión de la señal de desempeño (A.60) en estado estacionario se torna cero al considerar el efecto de la realimentación producto de  $\mathbf{A}_f$  y el cumplimiento de las suposiciones 2, puesto que se asegura que  $\mathbf{C}_t (\mathbf{I} - \mathbf{A}_t)^{-1} \mathbf{B}_p = 1$ .

## J Demostración del Teorema 5

Es posible notar a partir de (5.11) que las medias del primer vehículo seguidor  $i = 0$  satisfacen:

$$\begin{aligned}\mu_{\xi_1}(k+1) &= A_t \mu_{\xi_1}(k) + B_p \zeta_0(k) + B_v \zeta_{v0}(k) + B_p r(k) \\ \mu_{\zeta_1}(k) &= C_t \mu_{\xi_1}(k) - r(k)\end{aligned}\quad (\text{A.61})$$

Por lo que el análisis en el dominio de la transformada zeta pasa a ser:

$$\begin{aligned}\mu_{\xi_1}(z) &= C_t (z\mathbf{I} - A_t)^{-1} B_p \zeta_0(z) + C_t (z\mathbf{I} - A_t)^{-1} B_v \zeta_{v0}(z) + C_t (z\mathbf{I} - A_t)^{-1} B_p R(z) - R(z) \\ \mu_{\zeta_1}(z) &= T_p \zeta_0(z) + T_l(z) \zeta_{v0}(z) + T_p(z) R(z) - R(z)\end{aligned}\quad (\text{A.62})$$

Luego, la media del resto de seguidores a partir de (5.11) está dada por:

$$\begin{aligned}\mu_{\xi_i}(k+1) &= A_t \mu_{\xi_i}(k) + B_p (\mu_{\zeta_{i-1}}(k) + r(k)) \\ \mu_{\zeta_i}(k) &= C_t \mu_{\xi_i}(k) - r(k)\end{aligned}\quad (\text{A.63})$$

De modo que, en frecuencia, se obtiene:

$$\begin{aligned}\mu_{\xi_i}(z) &= C_t (z\mathbf{I} - A_t)^{-1} B_p (\mu_{\zeta_{i-1}}(z) + R(z)) - R(z) \\ \mu_{\zeta_i}(z) &= T_p(z) \mu_{\zeta_{i-1}}(z) + (T_p(z) - 1) R(z)\end{aligned}\quad (\text{A.64})$$

Luego, la expresión de (A.64) puede ser simplificada al considerar operación en estado estacionario al aplicar las suposiciones 2 y la propiedad presente en (5.13) es posible caracterizar la media de la señal de desempeño en el dominio de la transformada de Fourier de tiempo discreto como:

$$\mu_{\zeta_i}(e^{j\omega}) = T_p(z) \mu_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) \quad \forall i \in [2, N] \quad (\text{A.65})$$

Bajo la misma lógica, en el primer seguidor se cumple a partir (A.62), asumiendo que,

$\zeta_0(e^{j\omega})$  y  $\zeta_{v0}(e^{j\omega})$  están definidos, pese a que, dada la suposición 7, estas señales son cero en estado estacionario, como:

$$\mu_{\zeta_1}(z) = T_p \zeta_0(z) + T_v(z) \zeta_{v0}(z) \quad (\text{A.66})$$

La expresión de (A.65) permite demostrar la expresión genérica de la media de la señal de desempeño en el dominio de la frecuencia.

El espectro estacionario se utilizan las funciones de transferencia de la señal de desempeño, asumiendo que éstas son estables en el sentido cuadrático medio y de la función de covarianza.

**Primer seguidor**  $i = 1$ . A partir de (5.17) y que tanto  $\zeta_0(k)$ , como  $\zeta_{v0}(k)$  y  $r(k)$  son señales deterministas la densidad espectral de potencia de la señal de desempeño queda como:

$$\begin{aligned} \phi_{\zeta_1}(e^{j\omega}) &= (T_p(e^{j\omega}))\phi_p(e^{j\omega})(T_p(e^{j\omega}))^H + (T_v(e^{j\omega}))\phi_l(e^{j\omega})(T_v(e^{j\omega}))^H \\ &= |T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + |T_l(e^{j\omega})|^2 P_l \end{aligned} \quad (\text{A.67})$$

Al igual que en el caso de control por posiciones, para obtener (A.67) se aprovecha que tanto el ruido asociado a la información del predecesor y de la velocidad es blanco.

**Otros seguidores**  $i \in [2, N]$ . De (5.17) se obtiene que la función de transferencia de la señal de desempeño es  $T_p \zeta_{i-1} + T_p(\mathbf{w}_{pi-1} - \mathbf{w}_{pi}) + T_v(\mathbf{w}_{v0i-1} - \mathbf{w}_{v0i}) + (T_p - 1)r$ , entonces, al ser  $r$  una señal determinista, la densidad espectral de potencia está dada por:

$$\begin{aligned} \phi_{\zeta_i}(z) &= T_p(z)\phi_{\zeta_{i-1}}(z)T_p(z)^H + T_p(z)\phi_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(z)T_p(z)^H + T_p(z)\phi_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{v0i-1}}(z)T_v(z)^H \\ &\quad + 2T_p(z)P_p T_p(z)^H + 2T_v(z)P_l T_v(z)^H \end{aligned} \quad (\text{A.68})$$

La expresión de (A.68) hace uso de la blancura de los ruidos involucrados y posee dos términos aún no definidos;  $\phi_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(z)$  y  $\phi_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{v0i-1}}(z)$ . Estos términos corresponden a la densidad espectral de potencia de la señal de desempeño del vehículo predecesor y cada ruido. Estas expresiones se caracterizan de forma individual a partir de su función de covarianza:

**Caso**  $\phi_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(z)$ .

La covarianza  $R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(k + \tau, \tau) = \mathcal{E} \{ (\zeta_{i-1}(k + \tau) - \mu_{\zeta_{i-1}}(k + \tau))(\mathbf{w}_{pi-1}(k))^H \}$  puede ser expandida como:

$$\begin{aligned} R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(k + \tau, \tau) &= \mathcal{E} \{ (\zeta_{i-1}(k + \tau) - \mu_{\zeta_{i-1}}(k + \tau))(\mathbf{w}_{pi-1}(k))^H \} \\ &= C_t \mathcal{E} \{ (\xi_{i-1}(k + \tau) - \mu_{\xi_{i-1}}(k + \tau))(\mathbf{w}_{pi-1}(k))^H \} \end{aligned} \quad (\text{A.69})$$

Al igual que en el caso de control por posiciones es posible trabajar únicamente con la covarianza estacionaria, debido a que al satisfacer condiciones de convergencia temporal, la

expresión de (A.69) puede ser analizada en estado estacionario:

$$R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \tau = 0 \\ -C_t B_p P_p & \text{Si } \tau = 1 \\ -C_t + A_t^{\tau-1} B_p P_p & \text{Si } \tau > 1 \end{cases} \quad (\text{A.70})$$

La expresión de  $R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}$  habilita la obtención de la densidad espectral de potencia estacionaria por definición:

$$\begin{aligned} \phi_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(z) &\triangleq \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(\tau) z^{-\tau} \\ &= \left[ \sum_{\tau=1}^{\infty} R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(\tau) z^{-\tau} \right]^H + \left[ \sum_{\tau=1}^{\infty} R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(\tau) z^{-\tau} \right] + R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{pi-1}}(0) \\ &= \left[ \sum_{\tau=1}^{\infty} -C_t A_t^{\tau-1} B_p P_p z^{-\tau} \right]^H + \left[ \sum_{\tau=1}^{\infty} -C_t A_t^{\tau-1} B_p P_p z^{-\tau} \right] \\ &= -P_p B_p^T (zI - A_t)^{-H} C^T - C_t (zI - A_t)^{-1} B_p P_p \\ &= -P_p (T_p(z)^H + T_p(z)) \end{aligned} \quad (\text{A.71})$$

La expresión de (A.71) hace uso de la equivalencia  $\sum_{\tau=1}^{\infty} A^{\tau-1} z^{-\tau} = (zI - A)^{-1}$ .

**Caso**  $\phi_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{v0i-1}}(z)$ .

De manera análoga al caso anterior, la covarianza estacionaria presenta una estructura similar, correspondiente a lo descrito en (A.72)

$$R_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{v0i-1}}(\tau) = \begin{cases} 0 & \text{Si } \tau = 0 \\ -C_t B_v P_l & \text{Si } \tau = 1 \\ -C_t A^{\tau-1} B_v P_l & \text{Si } \tau > 1 \end{cases} \quad (\text{A.72})$$

Por lo tanto, al expandir de manera análoga a lo propuesto en (A.71), se obtiene:

$$\phi_{\zeta_{i-1}\mathbf{w}_{v0i-1}}(z) = -P_l (T_v(z)^H + T_v(z)) \quad (\text{A.73})$$

Por lo tanto, pasando las expresiones de (A.68), (A.71) y (A.73) a espectros estacionarios,

se obtiene:

$$\begin{aligned}
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= T_p(e^{j\omega})\phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega})T_p(e^{j\omega})^H + T_p(e^{j\omega})\left(-P_p\left(T_p(e^{j\omega})^H + T_p(e^{j\omega})\right)\right)T_p^H \\
&\quad + T_p(e^{j\omega})\left(-P_l\left(T_v(e^{j\omega})^H + T_v(e^{j\omega})\right)\right)T_v(e^{j\omega})^H \\
&\quad + 2T_p(e^{j\omega})P_pT_p(e^{j\omega})^H + 2T_v(e^{j\omega})P_lT_v(e^{j\omega})^H \\
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= |T_p(e^{j\omega})|^2\phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + T_p(e^{j\omega})\left(-P_p\left(T_p(e^{j\omega})^H + T_p(e^{j\omega})\right)\right)T_p(e^{j\omega})^H \\
&\quad + T_p(e^{j\omega})\left(-P_l\left(T_v(e^{j\omega})^H + T_v(e^{j\omega})\right)\right)T_v(e^{j\omega})^H \\
&\quad + 2|T_p(e^{j\omega})|^2P_p + 2|T_v(e^{j\omega})|^2P_l
\end{aligned} \tag{A.74}$$

La expresión de (A.74) permite enunciar el teorema 5, ya que, al existir recursividad en  $\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega})$  respecto a su predecesor ponderado por  $|T_p(e^{j\omega})|^2$ , este factor se vuelve fundamental para garantizar la convergencia en el espacio. Además, la expresión que acompaña a este factor recursivo está determinada por una función que depende exclusivamente de las varianzas  $P_p$  y  $P_l$  y de cada lazo interno de control, pero sin importar el número de agentes de los que está conformado el pelotón.

Por lo tanto, es posible notar que al reemplazar recursivamente sobre (A.74) éste factor escala de manera potencial, por lo que, si se busca acotar a  $\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega})$ , independientemente de los valores de  $\phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega})$ , es necesario que se cumpla:

$$|T_p(e^{j\omega})| < 1 \quad \forall \omega > 0 \tag{A.75}$$

La expresión de A.75 puede ser extendida a nociones de norma infinito. Sin embargo, en este caso, dado que la ponderación no es dinámica, no es posible desplazar todo el comportamiento en frecuencia, como en el caso de seguimiento a posición con ponderación estática, por lo que, es necesario que se cumpla  $T_p(1) = 1$  para asegurar el seguimiento perfecto a referencias rampa. De esta forma, la condición de (A.76) es necesaria, pero no suficiente para asegurar estabilidad en cuerdas, puesto que es posible que exista una frecuencia  $w^*$  tal que  $T_p(e^{j\omega^*}) = 1$ , que cumpla (A.76), pero no (A.75) por lo que el sistema no converge en el espacio.

$$\|T_p(z)\|_{\infty} \leq 1 \tag{A.76}$$

Luego, utilizando las funciones de sensibilidad  $S_p(e^{j\omega})$  y  $S_v(e^{j\omega})$ , de una manera similar a la planteada en (A.31) se propone la siguiente igualdad:

$$\begin{aligned}
T_p(e^{j\omega}) + T_p^H(e^{j\omega}) &= T_p(e^{j\omega})T_p^H(e^{j\omega}) - S_p(e^{j\omega})S_p^H(e^{j\omega}) + 1 \\
T_v(e^{j\omega}) + T_v^H(e^{j\omega}) &= T_v(e^{j\omega})T_v^H(e^{j\omega}) - S_v(e^{j\omega})S_v^H(e^{j\omega}) + 1
\end{aligned} \tag{A.77}$$

Luego, es posible explotar la relaciones (A.77) y (5.14) sobre (A.74) para simplificar formas

cuadráticas.

$$\begin{aligned}
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= |T_p(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) + T_p(e^{j\omega}) \left( -P_p \left( T_p(e^{j\omega})^H + T_p(e^{j\omega}) \right) \right) T_p(e^{j\omega})^H \\
&\quad + T_p(e^{j\omega}) \left( -P_l \left( T_v(e^{j\omega})^H + T_v(e^{j\omega}) \right) \right) T_v(e^{j\omega})^H \\
&\quad + 2|T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + 2|T_v(e^{j\omega})|^2 P_l \\
&= |T_p(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) - P_p T_p(e^{j\omega}) \left( T_p(e^{j\omega}) T_p^H(e^{j\omega}) - S_p(e^{j\omega}) S_p^H(e^{j\omega}) + 1 \right) T_p(e^{j\omega})^H \\
&\quad - P_l T_p(e^{j\omega}) \left( T_v(e^{j\omega}) T_v^H(e^{j\omega}) - S_v(e^{j\omega}) S_v^H(e^{j\omega}) + 1 \right) T_v(e^{j\omega})^H \\
&\quad + 2|T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + 2|T_v(e^{j\omega})|^2 P_l \\
&= |T_p(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) - P_p \left( |T_p^2(e^{j\omega})|^2 - |T_p(e^{j\omega}) S_p(e^{j\omega})|^2 + |T_p(e^{j\omega})|^2 \right) \\
&\quad - P_l T_p(e^{j\omega}) T_v^{-1}(e^{j\omega}) \left( T_v(e^{j\omega}) T_v^H(e^{j\omega}) - S_v(e^{j\omega}) S_v^H(e^{j\omega}) + 1 \right) T_v(e^{j\omega}) T_v(e^{j\omega})^H \\
&\quad + 2|T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + 2|T_v(e^{j\omega})|^2 P_l \\
&= |T_p(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) - P_p \left( |T_p^2(e^{j\omega})|^2 - |T_p(e^{j\omega}) S_p(e^{j\omega})|^2 \right) \\
&\quad - P_l T_p(e^{j\omega}) T_v^{-1}(e^{j\omega}) \left( T_v(e^{j\omega}) T_v^H(e^{j\omega}) - S_v(e^{j\omega}) S_v^H(e^{j\omega}) + 1 \right) T_v(e^{j\omega}) T_v(e^{j\omega})^H \\
&\quad + |T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + 2|T_v(e^{j\omega})|^2 P_l \\
&= |T_p(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) - P_p \left( |T_p^2(e^{j\omega})|^2 - |T_p(e^{j\omega}) S_p(e^{j\omega})|^2 \right) \\
&\quad - P_l \underbrace{\frac{K_p(e^{j\omega})}{K_v(e^{j\omega})}}_{\phi_\varphi(e^{j\omega})} \left( T_v(e^{j\omega}) T_v^H(e^{j\omega}) - S_v(e^{j\omega}) S_v^H(e^{j\omega}) + 1 \right) T_v(e^{j\omega}) T_v(e^{j\omega})^H \\
&\quad + |T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + 2|T_v(e^{j\omega})|^2 P_l
\end{aligned} \tag{A.78}$$

Con  $\phi_\varphi(e^{j\omega})$  un factor de proporcionalidad de las dinámicas de los controladores.

## K Demostración del Corolario 2

Sea la relación entre espectros de (A.78) y la función de proporcionalidad entre controladores de (5.26), por lo que se cumple:

$$\begin{aligned}
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= |T_p(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) - P_p \left( |T_p^2(e^{j\omega})|^2 - |T_p(e^{j\omega})S_p(e^{j\omega})|^2 \right) \\
&\quad - P_l p_\alpha \varphi(e^{j\omega}) \varphi(e^{j\omega})^H \left( T_v(e^{j\omega}) T_v^H(e^{j\omega}) - S_v(e^{j\omega}) S_v^H(e^{j\omega}) + 1 \right) T_v(e^{j\omega}) T_v(e^{j\omega})^H \\
&\quad + |T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + 2|T_v(e^{j\omega})|^2 P_l \\
&= |T_p(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) - P_p \left( |T_p^2(e^{j\omega})|^2 - |T_p(e^{j\omega})S_p(e^{j\omega})|^2 \right) \\
&\quad - P_l p_\alpha \left( \varphi(e^{j\omega}) T_v(e^{j\omega}) \varphi(e^{j\omega})^H T_v^H(e^{j\omega}) - \varphi(e^{j\omega}) S_v(e^{j\omega}) \varphi(e^{j\omega})^H S_v^H(e^{j\omega}) + \varphi(e^{j\omega}) \varphi(e^{j\omega})^H \right) T_v(e^{j\omega}) \\
&\quad \times T_v(e^{j\omega})^H + |T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + 2|T_v(e^{j\omega})|^2 P_l
\end{aligned} \tag{A.79}$$

Por lo tanto, se cumple:

$$\begin{aligned}
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= |T_p(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) - P_p \left( |T_p^2(e^{j\omega})|^2 - |T_p(e^{j\omega})S_p(e^{j\omega})|^2 \right) \\
&\quad - P_l p_\alpha \left( |T_v(e^{j\omega})|^2 \varphi(e^{j\omega})|^2 - |S_v(e^{j\omega}) T_v(e^{j\omega}) \varphi(e^{j\omega})|^2 + |T_v(e^{j\omega}) \varphi(e^{j\omega})|^2 \right) T_v(e^{j\omega}) \\
&\quad + |T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + 2|T_v(e^{j\omega})|^2 P_l
\end{aligned} \tag{A.80}$$

## L Demostración de (5.28)

Sea el espectro estacionario de la señal de desempeño  $\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega})$  definido en (A.78):

$$\begin{aligned}
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) &= |T_p(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) - P_p \left( |T_p^2(e^{j\omega})|^2 - |T_p(e^{j\omega})S_p(e^{j\omega})|^2 \right) \\
&\quad - P_l \phi_\varphi(e^{j\omega}) \left( T_v(e^{j\omega}) T_v^H(e^{j\omega}) - S_v(e^{j\omega}) S_v^H(e^{j\omega}) + 1 \right) T_v(e^{j\omega}) T_v(e^{j\omega})^H \\
&\quad + |T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + 2|T_v(e^{j\omega})|^2 P_l \\
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) - |T_p(e^{j\omega})|^2 \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) &= -P_p \left( |T_p^2(e^{j\omega})|^2 - |T_p(e^{j\omega})S_p(e^{j\omega})|^2 \right) \\
&\quad - P_l \phi_\varphi(e^{j\omega}) \left( T_v(e^{j\omega}) T_v^H(e^{j\omega}) - S_v(e^{j\omega}) S_v^H(e^{j\omega}) + 1 \right) T_v(e^{j\omega}) T_v(e^{j\omega})^H \\
&\quad + |T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + 2|T_v(e^{j\omega})|^2 P_l \\
\phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) + (1 - |T_p(e^{j\omega})|^2) \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) &= \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) - P_p \left( |T_p^2(e^{j\omega})|^2 - |T_p(e^{j\omega})S_p(e^{j\omega})|^2 \right) \\
&\quad - P_l \phi_\varphi(e^{j\omega}) \left( T_v(e^{j\omega}) T_v^H(e^{j\omega}) - S_v(e^{j\omega}) S_v^H(e^{j\omega}) + 1 \right) T_v(e^{j\omega}) T_v(e^{j\omega})^H \\
&\quad + |T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + 2|T_v(e^{j\omega})|^2 P_l
\end{aligned} \tag{A.81}$$

Luego, es posible notar que es posible construir la expresión del espectro estacionario del

primer seguidor propuesto en (A.67), resultando de esta forma:

$$\begin{aligned}
& \phi_{\zeta_i}(e^{j\omega}) + (1 - |T_p(e^{j\omega})|^2)\phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) = \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) - P_p \left( |T_p^2(e^{j\omega})|^2 - |T_p(e^{j\omega})S_p(e^{j\omega})|^2 \right) \\
& - P_l \phi_\varphi(e^{j\omega}) \left( T_v(e^{j\omega})T_v^H(e^{j\omega}) - S_v(e^{j\omega})S_v^H(e^{j\omega}) + 1 \right) T_v(e^{j\omega})T_v(e^{j\omega})^H \\
& + |T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + 2|T_v(e^{j\omega})|^2 P_l + |T_p(e^{j\omega})|^2 \underbrace{\left( |T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + |T_v(e^{j\omega})|^2 P_l \right)}_{\phi_{\zeta_1}(e^{j\omega})} \\
& - |T_p(e^{j\omega})|^2 \left( |T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + |T_v(e^{j\omega})|^2 P_l \right) \\
= & \phi_{\zeta_{i-1}}(e^{j\omega}) - P_p \left( |T_p^2(e^{j\omega})|^2 - |T_p(e^{j\omega})S_p(e^{j\omega})|^2 \right) \\
& - P_l \phi_\varphi(e^{j\omega}) \left( T_v(e^{j\omega})T_v^H(e^{j\omega}) - S_v(e^{j\omega})S_v^H(e^{j\omega}) + 1 \right) T_v(e^{j\omega})T_v(e^{j\omega})^H \\
& + \left( 1 - |T_p(e^{j\omega})|^2 \right) \left( |T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + |T_v(e^{j\omega})|^2 P_l \right) + |T_v(e^{j\omega})|^2 P_l \\
& + |T_p(e^{j\omega})|^2 \left( |T_p(e^{j\omega})|^2 P_p + |T_v(e^{j\omega})|^2 P_l \right)
\end{aligned} \tag{A.82}$$

De esta forma, al igual que en la forma propuesta en (A.34), es posible reemplazar de forma iterativa sobre (A.82), para de esta forma obtener (5.28).

## M Demostración del Corolario 3

Considere un controlador PI genérico  $K(z)$  con parámetros  $Q_p$  y  $Q_i$ , constantes de posición y velocidad, respectivamente, de manera que:

$$C(z) = \frac{Q_p(z-1) + Q_i z}{z-1} = \frac{Q_c z - Q_i}{z-1} \quad Q_c = Q_p + Q_i$$

Reemplazando esta forma en (5.29).

$$K_p = \frac{(Q_c)z - Q_i}{z-1} \cdot \frac{z}{(w_f + 1)z - w_f} \quad K_v = \frac{(Q_c)z - Q_i}{z-1} \cdot \frac{w_f \cdot z}{(w_f + 1)z - w_f}$$

Con el diseño de  $K_p$  y  $K_v$  fijo, es posible retornar a  $K(z)$  usando (3.7), para comprobar el cumplimiento de dicha relación.

$$\begin{aligned}
K_p + \frac{z-1}{z} K_v &= \frac{Q_c z - Q_i}{z-1} \cdot \frac{z}{(w_f + 1)z - w_f} + \frac{Q_c z - Q_i}{z-1} \cdot \frac{w_f \cdot z}{(w_f + 1)z - w_f} \cdot \frac{z-1}{z} \\
&= \frac{Q_c z - Q_i}{z-1} \cdot \frac{z}{(w_f + 1)z - w_f} + \frac{(Q_c z - K_i)w_f}{(w_f + 1)z - w_f} = \frac{(Q_c z - Q_i)z + (z-1)(Q_c z - Q_i)w_f}{((w_f + 1)z - w_f)(z-1)} \\
&= \frac{(Q_c z - Q_i)((w_f + 1)z - w_f)}{((w_f + 1)z - w_f)(z-1)} \implies K(z) = \frac{Q_p(z-1) + Q_i z}{z-1} = \frac{Q_c z - Q_i}{z-1}
\end{aligned}$$

Esto permite diseñar cualquier controlador PI estabilizante *a priori* siempre y cuándo este exista. Además como se cumple  $w_f > 0$ , la estabilidad interna del lazo de control no se ve comprometida, puesto que la cancelación de  $(w_f + 1)z - w_f$  es estable, dado que  $\frac{w_f}{w_f+1}$  es siempre real y menor a uno.

## N Demostración del Teorema 7

Para minimizar  $P_w$  es posible escribir dicha varianza como una función de costo a minimizar:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_\eta P_w &= (P_p + P_l) + \eta^{-2} [(1 - 2\eta)P_l] \\ \text{Sujeto a:} \quad &\eta > 0 \\ &\eta < \|T(z)\|_\infty^{-1} \end{aligned} \tag{A.83}$$

El funcional de costo de (A.83) no es convexo, por lo que se dificulta su análisis. Sin embargo, al plantear la variable auxiliar  $\vartheta = \eta^{-1}$ , la función pasa a ser convexa en  $\vartheta$ . Reescribiendo (A.83) se obtiene (A.84) que sí es convexa.

$$\begin{aligned} \text{Minimizar}_\vartheta P_w &= (P_p + P_l) + \vartheta^2 P_l - 2\vartheta P_l \\ \text{Sujeto a:} \quad &\vartheta > \|T(z)\|_\infty \end{aligned} \tag{A.84}$$

Como el funcional de costo de (A.84) es convexo, es necesario calcular sus puntos críticos derivando; de esta forma:

$$\begin{aligned} \frac{dP_w}{d\vartheta} &= 2\vartheta P_l - 2P_l = 0 \implies \vartheta^* = 1 \\ \frac{d^2P_w}{d\vartheta^2} &= 2P_l > 0 \forall \vartheta \in \mathbb{R} \implies \vartheta^* \text{ Es mínimo global} \end{aligned} \tag{A.85}$$

Sin embargo, por [36], es posible notar que es imposible que se alcance  $\vartheta^* = \frac{1}{\eta} = 1$ , ya que  $\eta$  está diseñado de forma estricta inferior a 1, y aún ignorando este requisito de diseño, sería necesario que  $\|T(z)\|_\infty = 1$ . Además, la función de costo es creciente en todos los reales. De esta forma, el valor de  $\vartheta$  óptimo está en la restricción, es decir, el menor valor de  $P_w$  se obtiene con  $\vartheta \rightarrow \|T(z)\|_\infty$ , o expresado en términos de  $\eta$ ,  $\eta \rightarrow \|T(z)\|_\infty^{-1}$ .

Dado que las restricciones de estabilidad de cuerda exigen que  $\eta < \|T(z)\|_\infty^{-1}$ , el óptimo, estable en cuerda es  $\eta = \|T(z)\|_\infty^{-1} - \epsilon$ , con  $\epsilon \rightarrow 0$ .

Además, como el mínimo global está fuera de las restricciones y la función es estrictamente creciente en ambos intervalos, es posible notar que  $P_w$  es inversamente proporcional a  $\eta$  en todo el intervalo en que  $\eta$  asegura estabilidad de cuerda, dado que su derivada es siempre positiva en el intervalo en que  $\vartheta$  es mayor a 1. Esto puede apreciarse de forma gráfica, al notar que la función de costo de (A.84) es una función cuadrática convexa, cuyo punto de

---

corte está siempre en  $\eta = 1$ , siendo el efecto de cambiar las varianzas visible en la forma de dicha función.

## BIBLIOGRAFÍA

- [1] S. Stüdli, M. Seron, and R. Middleton, “From vehicular platoons to general networked systems: String stability and related concepts,” *Annual Reviews in Control*, vol. 44, pp. 157 – 172, 2017.
- [2] D. Jia, K. Lu, J. Wang, X. Zhang, and X. Shen, “A survey on platoon-based vehicular cyber-physical systems,” *IEEE Communications Surveys and Tutorials*, vol. 18, no. 1, pp. 263–284, 2016.
- [3] S. Knorn, Z. Chen, and R. H. Middleton, “Overview: Collective control of multiagent systems,” *IEEE Transactions on Control of Network Systems*, vol. 3, no. 4, pp. 334–347, 2016.
- [4] V. Lesch, M. Breitbach, M. Segata, C. Becker, S. Kounev, and C. Krupitzer, “An overview on approaches for coordination of platoons,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 23, no. 8, pp. 10 049–10 065, 2022.
- [5] S. Feng, Y. Zhang, S. Eben Li, Z. Cao, H. Liu, and L. Li, “String stability for vehicular platoon control: Definitions and analysis methods,” *Annual Reviews in Control*, 2019.
- [6] A. Soni and H. Hu, “Formation control for a fleet of autonomous ground vehicles: A survey,” *Robotics*, vol. 7, no. 4, 2018.
- [7] S. Sivanandham and M. Gajanand, “Platooning for sustainable freight transportation: an adoptable practice in the near future?” *Transport Reviews*, vol. 40, no. 5, pp. 581–606, 2020.
- [8] H. Ramezani, S. E. Shladover, X.-Y. Lu, and O. D. Altan, “Micro-simulation of truck platooning with cooperative adaptive cruise control: Model development and a case study,” *Transportation Research Record*, vol. 2672, no. 19, pp. 55–65, 2018.
- [9] You, K. and Xiao, N. and Xie, L., *Analysis and Design of Networked Control Systems*. Springer, 2015.
- [10] W. Levine and M. Athans, “On the optimal error regulation of a string of moving vehicles,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 11, no. 3, pp. 355 – 361, jul 1966.
- [11] D. Swaroop and J. Hedrick, “String stability of interconnected systems,” *Automatic Control, IEEE Transactions on*, vol. 41, no. 3, pp. 349 –357, mar 1996.

- [12] C. Bonnet and H. Fritz, "Fuel consumption reduction in a platoon: Experimental results with two electronically coupled trucks at close spacing," SAE Technical Paper, Tech. Rep., 2000.
- [13] J. Cerutti, G. Cafiero, and G. Iuso, "Aerodynamic drag reduction by means of platooning configurations of light commercial vehicles: A flow field analysis," *International Journal of Heat and Fluid Flow*, vol. 90, p. 108823, 2021.
- [14] R. Kianfar, B. Augusto, A. Ebadighajari, U. Hakeem, J. Nilsson, A. Raza, R. S. Tabar, N. V. Irukulapati, C. Englund, P. Falcone, S. Papanastasiou, L. Svensson, and H. Wymeersch, "Design and experimental validation of a cooperative driving system in the grand cooperative driving challenge," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 13, no. 3, pp. 994–1007, 2012.
- [15] S. E. Shladover, D. Su, and X.-Y. Lu, "Impacts of cooperative adaptive cruise control on freeway traffic flow," *Transportation Research Record*, vol. 2324, no. 1, pp. 63–70, 2012.
- [16] G. Orosz, R. E. Wilson, and G. Stépán, "Traffic jams: dynamics and control," *Philosophical Transactions of the Royal Society A: Mathematical, Physical and Engineering Sciences*, vol. 368, no. 1928, pp. 4455–4479, 2010.
- [17] B. Van Arem, C. J. Van Driel, and R. Visser, "The impact of cooperative adaptive cruise control on traffic-flow characteristics," *IEEE Transactions on intelligent transportation systems*, vol. 7, no. 4, pp. 429–436, 2006.
- [18] Y. Jo, J. Kim, C. Oh, I. Kim, and G. Lee, "Benefits of travel time savings by truck platooning in korean freeway networks," *Transport Policy*, vol. 83, pp. 37–45, 2019.
- [19] Z. Shen, Y. Liu, Z. Li, and Y. Wu, "Distributed vehicular platoon control considering communication delays and packet dropouts," *Journal of the Franklin Institute*, vol. 361, no. 7, p. 106703, 2024.
- [20] F. Sanhueza, F. Vargas, H. Ramirez, and A. Peters, "Port hamiltonian based model for platooning applications including air drag effects," in *22nd IFAC World Congress*, vol. 56, no. 2, 2023, pp. 3917–3922.
- [21] Q. Deng, "A general simulation framework for modeling and analysis of heavy-duty vehicle platooning," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 17, no. 11, pp. 3252–3262, 2016.
- [22] K. Liang, J. Mårtensson, and K. H. Johansson, "Heavy-duty vehicle platoon formation for fuel efficiency," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 17, no. 4, pp. 1051–1061, 2016.

- [23] B. Caiazzo, A. Coppola, A. Petrillo, and S. Santini, "Distributed nonlinear model predictive control for connected autonomous electric vehicles platoon with distance-dependent air drag formulation," *Energies*, vol. 14, no. 16, p. 5122, 2021.
- [24] P. Schito *et al.*, "Numerical and experimental investigation on vehicles in platoon," *SAE International Journal of Commercial Vehicles*, vol. 5, no. 2012-01-0175, pp. 63–71, 2012.
- [25] S. Tsugawa, "A survey on effects of its-related systems and technologies on global warming prevention," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 42, no. 15, pp. 334–341, 2009.
- [26] S. Deutschle, G. C. Kessler, C. Lank, G. Hoffmann, M. Hakenberg, and M. Brummer, "Use of electronically linked konvoi truck platoons on motorways," *ATZ worldwide*, vol. 112, no. 7, pp. 74–79, 2010.
- [27] M. Zabat, N. Stabile, S. Farascaroli, and F. Browand, "The aerodynamic performance of platoons: A final report," *UC Berkeley Research Reports*, 1995.
- [28] S. Tsugawa, "An overview on an automated truck platoon within the energy its project," *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 46, no. 21, pp. 41–46, 2013.
- [29] S. E. Shladover, C. A. Desoer, J. K. Hedrick, M. Tomizuka, J. Walrand, W.-B. Zhang, D. H. McMahon, H. Peng, S. Sheikholeslam, and N. McKeown, "Automated vehicle control developments in the path program," *IEEE Transactions on vehicular technology*, vol. 40, no. 1, pp. 114–130, 1991.
- [30] E. Uhlemann, "Platooning: connected vehicles for safety and efficiency [connected vehicles]," *IEEE Vehicular Technology Magazine*, vol. 11, no. 3, pp. 13–18, 2016.
- [31] J. Axelsson, T. Bergh, A. Johansson, B. Mårdberg, P. Svenson, and V. Åkesson, "Truck platooning business case analysis," 2020.
- [32] P. Wang, "Research on comparison of lidar and camera in autonomous driving," in *Journal of Physics: Conference Series*, vol. 2093, no. 1. IOP Publishing, 2021, p. 012032.
- [33] F. E. Sahin, "Long-range, high-resolution camera optical design for assisted and autonomous driving," *Photonics*, vol. 6, no. 2, 2019.
- [34] Z. Zuo, K. Yang, H. Wang, Y. Wang, and Y. Wu, "Distributed mpc for automated vehicle platoon: A path-coupled extended look-ahead approach," *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, 2024.

- [35] J. Guo, W. Jingyao, K. Li, and Y. Luo, "Adaptive non-linear coordinated optimal dynamic platoon control of connected autonomous distributed electric vehicles on curved roads," *IET Intelligent Transport Systems*, vol. 14, no. 12, pp. 1626–1637, 2020.
- [36] D. Swaroop and J. K. Hedrick, "String stability of interconnected systems," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 41, no. 3, pp. 349–357, 1996.
- [37] C. Canudas de Wit and B. Brogliato, "Stability issues for vehicle platooning in automated highway systems," in *Proceedings of the 1999 IEEE International Conference on Control Applications (Cat. No.99CH36328)*, vol. 2, 1999, pp. 1377–1382 vol. 2.
- [38] F. J. Vargas, M. A. Gordon, A. A. Peters, and A. I. Maass, "On stochastic string stability with applications to platooning over additive noise channels," *Automatica*, vol. 171, p. 111923, 2025.
- [39] S. Sheikholeslam and C. A. Desoer, "Longitudinal control of a platoon of vehicles with no communication of lead vehicle information: A system level study," *IEEE Transactions on vehicular technology*, vol. 42, no. 4, pp. 546–554, 1993.
- [40] W. Levine and M. Athans, "On the optimal error regulation of a string of moving vehicles," *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 11, no. 3, pp. 355–361, 1966.
- [41] Z. Wang, Y. Bian, S. E. Shladover, G. Wu, S. E. Li, and M. J. Barth, "A survey on cooperative longitudinal motion control of multiple connected and automated vehicles," *IEEE Intelligent Transportation Systems Magazine*, vol. 12, no. 1, pp. 4–24, 2019.
- [42] G. Naus, R. Vugts, J. Ploeg, R. van de Molengraft, and M. Steinbuch, "String-stable CACC design and experimental validation: A frequency-domain approach," *IEEE Transactions on vehicular Technology Vol.59*, 2010.
- [43] H. Xing, J. Ploeg, and H. Nijmeijer, "Robust cacc in the presence of uncertain delays," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 71, no. 4, pp. 3507–3518, 2022.
- [44] S. Knorn, A. Donaire, J. C. Agüero, and R. H. Middleton, "Passivity-based control for multi-vehicle systems subject to string constraints," *Automatica*, vol. 50, no. 12, pp. 3224–3230, 2014.
- [45] A. Zakerimanesh, T. Z. Qiu, and M. Tavakoli, "Stability and intervehicle distance analysis of vehicular platoons: Highlighting the impact of bidirectional communication topologies," *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, 2024.
- [46] Z. Zhou, L. Li, X. Qu, and B. Ran, "Pacc: A platoon-based adaptive cruise control strategy based on leader-following information topology to mitigate traffic oscillations

under cav environment,” *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, p. 130117, 2024.

- [47] S. Darbha and J. Hedrick, “Constant spacing strategies for platooning in automated highway systems,” *Journal of Dynamic Systems Measurement and Control-transactions of The Asme - J DYN SYST MEAS CONTR*, vol. 121, 09 1999.
- [48] Z. Liu, Z. Li, G. Guo, and H. Cheng, “Cooperative platoon control of heterogeneous vehicles under a novel event-triggered communication strategy,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 41 172–41 182, 2019.
- [49] G. Rödönyi, “Leader and predecessor following robust controller synthesis for string stable heterogeneous vehicle platoons,” *IFAC-PapersOnLine*, vol. 48, no. 14, pp. 155–160, 2015, 8th IFAC Symposium on Robust Control Design ROCOND 2015.
- [50] J. Wan, H. Liu, M. Xu, X. Yang, Y. Guo, and X. Wang, “Lane-changing tracking control of automated vehicle platoon based on ma-ddpg and adaptive mpc,” *IEEE Access*, 2024.
- [51] S. Li, H. Zheng, J. Wang, C. Chen, Q. Xu, J. Wang, and K. Li, “Influence of information flow topology and maximum platoon size on mixed traffic stability,” *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, vol. 171, p. 104950, 2025.
- [52] W. B. Dunbar and D. S. Caveney, “Distributed receding horizon control of vehicle platoons: Stability and string stability,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 57, no. 3, pp. 620–633, 2012.
- [53] K. Halder, U. Montanaro, S. Dixit, M. Dianati, A. Mouzakitis, and S. Fallah, “Distributed  $H_\infty$  controller design and robustness analysis for vehicle platooning under random packet drop,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 23, no. 5, pp. 4373–4386, 2022.
- [54] F. Ma, J. Wang, Y. Yang, L. Wu, S. Zhu, S. Y. Gelbal, B. Aksun-Guvenc, and L. Guvenc, “Stability design for the homogeneous platoon with communication time delay,” *Automotive Innovation*, vol. 3, no. 2, pp. 101–110, Jun 2020.
- [55] C. Viel, U. Vautier, J. Wan, and L. Jaulin, “Platooning control for heterogeneous sailboats based on constant time headway,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 21, no. 5, pp. 2078–2089, 2020.
- [56] Y. Zhang, Z. Xu, Z. Wang, X. Yao, and Z. Xu, “Impacts of communication delay on vehicle platoon string stability and its compensation strategy: A review,” *Journal of Traffic and Transportation Engineering (English Edition)*, vol. 10, no. 4, pp. 508–529, 2023.

- [57] F. Sanhueza, M. Gordon, A. I. Maass, A. Peters, and F. Vargas, "Convergence analysis for platooning over coloured additive noise channels," in *2024 European Control Conference (ECC)*, 2024, pp. 430–435.
- [58] H. Köroğlu, M. Mirzaei, P. Falcone, and S. Krajnović, "Platoon control under a novel leader and predecessor following scheme with the use of an advanced aerodynamic model," *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control*, vol. 140, no. 4, p. 041006, 2018.
- [59] A. Maxim and C.-F. Caruntu, "Coalitional distributed model predictive control strategy for vehicle platooning applications," *Sensors*, vol. 22, no. 3, p. 997, 2022.
- [60] J. Zheng, L. Xu, L. Xie, and K. You, "Consensusability of discrete-time multiagent systems with communication delay and packet dropouts," *IEEE Trans. on Automatic Control*, vol. 64, no. 3, pp. 1185–1192, 2019.
- [61] W. B. Qin, M. M. Gomez, and G. Orosz, "Stability and frequency response under stochastic communication delays with applications to connected cruise control design," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 18, no. 2, pp. 388–403, 2017.
- [62] C. Zhao, X. Duan, L. Cai, and P. Cheng, "Vehicle platooning with non-ideal communication networks," *IEEE Transactions on Vehicular Technology*, vol. 70, no. 1, pp. 18–32, 2021.
- [63] A. Elahi, A. Alfi, and H. Modares, " $H_\infty$  consensus of homogeneous vehicular platooning systems with packet dropout and communication delay," *IEEE Trans. on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 2021.
- [64] F. Acciani, P. Frasca, G. Heijenk, and A. A. Stoorvogel, "Stochastic string stability of vehicle platoons via cooperative adaptive cruise control with lossy communication," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 23, no. 8, pp. 10 912–10 922, 2022.
- [65] A. Elahi, A. Alfi, and H. Modares, "Distributed consensus control of vehicular platooning under delay, packet dropout and noise: Relative state and relative input-output control strategies," *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 23, no. 11, pp. 20 123–20 133, 2022.
- [66] C. Wu, Y. Lin, and A. Eskandarian, "Cooperative adaptive cruise control with adaptive Kalman filter subject to temporary communication loss," *IEEE Access*, vol. 7, pp. 93 558–93 568, 2019.

- [67] M. A. Gordon, F. J. Vargas, and A. A. Peters, "Comparison of simple strategies for vehicular platooning with lossy communication," *IEEE Access*, vol. 9, pp. 103 996–104 010, 2021.
- [68] F. I. Villenas, F. J. Vargas, and A. A. Peters, "A kalman-based compensation strategy for platoons subject to data loss: Numerical and empirical study," *Mathematics*, vol. 11, no. 5, 2023.
- [69] M. A. Gordon, F. J. Vargas, A. A. Peters, and A. I. Maass, "Platoon stability conditions under inter-vehicle additive noisy communication channels," *IFAC-PapersOnLine*, vol. 53, no. 2, pp. 3150–3155, 2020, 21st IFAC World Congress.
- [70] C. Zhao, L. Cai, and P. Cheng, "Stability analysis of vehicle platooning with limited communication range and random packet losses," *IEEE Internet of Things Journal*, vol. 8, no. 1, pp. 262–277, 2020.
- [71] Y. Tang, M. Yan, P. Yang, and L. Zuo, "Consensus based control algorithm for vehicle platoon with packet losses," in *2018 37th Chinese Control Conference (CCC)*. IEEE, 2018, pp. 7684–7689.
- [72] M. A. Gordon, F. J. Vargas, and A. A. Peters, "Mean square stability conditions for platoons with lossy inter-vehicle communication channels," *Automatica*, vol. 147, p. 110710, 2023.
- [73] M. Gordon, "Análisis de estabilidad en cuerda para pelotones de vehículos con canales de comunicación afectados por ruido aditivo," Master's thesis, Universidad Técnica Federico Santa María, 2023.
- [74] D. S. Bernstein, *Matrix Mathematics: Theory, Facts, and Formulas: Second Edition*, 2nd ed. Princeton University Press, 2009.
- [75] S. Axler, *Linear algebra done right*. Springer Nature, 2024.
- [76] C.-C. Chu, "On discrete inner-outer and spectral factorizations," in *1988 American Control Conference*. IEEE, 1988, pp. 1699–1700.
- [77] A. A. Peters, R. H. Middleton, and O. Mason, "Leader tracking in homogeneous vehicle platoons with broadcast delays," *Automatica*, vol. 50, no. 1, pp. 64–74, 2014.
- [78] F. Vargas, A. Maass, A. Peters, and F. Sanhueza, "Discrete time and sampled systems string stability," *IEEE Access*, 2024, work in progress.
- [79] H. Köroğlu, "String-stable cooperative adaptive cruise control with minimized time headway in the face of delayed communication," *IEEE Control Systems Letters*, 2024.

- [80] J. Ploeg, N. van de Wouw, and H. Nijmeijer, “Lp string stability of cascaded systems: Application to vehicle platooning,” *IEEE Transactions on Control Systems Technology*, vol. 22, no. 2, pp. 786–793, 2014.
- [81] G. C. Goodwin, S. F. Graebe, M. E. Salgado *et al.*, *Control system design*. Prentice Hall Upper Saddle River, 2001, vol. 240.
- [82] P. Seiler, A. Pant, and K. Hedrick, “Disturbance propagation in vehicle strings,” *IEEE Transactions on automatic control*, vol. 49, no. 10, pp. 1835–1842, 2004.
- [83] L. Xiao and F. Gao, “Practical string stability of platoon of adaptive cruise control vehicles,” *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, vol. 12, no. 4, pp. 1184–1194, 2011.
- [84] Z. Wang, G. Wu, and M. J. Barth, “A review on cooperative adaptive cruise control (cacc) systems: Architectures, controls, and applications,” in *2018 21st International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, 2018, pp. 2884–2891.
- [85] M. E. Salgado, J. Yuz, and R. A. Rojas, *Análisis de Sistemas Lineales*, primera ed. Departamento de Electrónica, UTFSM, 2014.
- [86] K. J. Åström, *Introduction to stochastic control theory*. Courier Corporation, 2012.
- [87] J. Chen and C. N. Nett, “Sensitivity integrals for multivariable discrete-time systems,” *Automatica*, vol. 31, no. 8, pp. 1113–1124, 1995.
- [88] R. H. Byrd, M. E. Hribar, and J. Nocedal, “An interior point algorithm for large-scale nonlinear programming,” *SIAM Journal on Optimization*, vol. 9, no. 4, pp. 877–900, 1999.