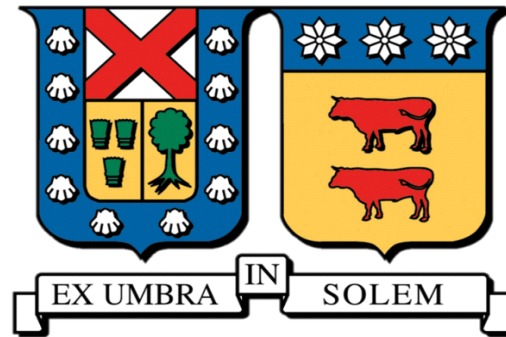


**UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA
MARÍA**

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

VALPARAÍSO – CHILE



**"DISCRETIZACIÓN, CONTROL E
IDENTIFICACIÓN DE UN PÉNDULO
INVERTIDO ROTATORIO"**

RODRIGO GALLARDO OYARZÚN

**MEMORIA DE TITULACIÓN PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO
CIVIL ELECTRÓNICO**

PROFESOR GUÍA:

JUAN YUZ EISSMANN

PROFESOR CORREFERENTE:

JUAN CARLOS AGÜERO

Abril-2021

Agradecimientos

Entonces brindemos
¿deberíamos brindar no?
por los seres humanos.

En todas las épocas hay personas buenas y malas
el ciclo se repite.

La vida es muy larga para dedicarla a la reproducción
pero demasiado corta para dedicarla al aprendizaje, en esta espiral del tiempo
quizás es por eso mismo
que las personas sucumben al deseo y buscan alivio
a pesar de que la vida ya está completa
con el sol, la tierra y la poesía.

Resumen

El trabajo de memoria “Discretización, Control e Identificación de un Péndulo Invertido Rotatorio”, se trata de estudiar distintos modelos discretos para dicho sistema, analizar su impacto en estrategias de control y aplicarlos a métodos de estimación paramétrica. El análisis comienza con el modelo no lineal basado en las ecuaciones de Euler-Lagrange, el cual una vez linealizado en torno a los puntos de equilibrio es discretizado utilizando distintos métodos. Comenzando por el modelo discreto exacto (ZOH), Tustin (Bilineal), Euler Hacia Adelante, Euler Hacia Atrás y Taylor Truncado [1] [94-97].

El control se lleva a cabo utilizando FSF (Full State Feedback), el cual ofrece un control relativamente simple, que sirve como base para la comparación de los modelos.

La identificación se realiza minimizando el error cuadrático entre los datos medidos y los resultados de simulación, para estimar los parámetros más sensibles del sistema.

Los resultados muestran que si bien existen diferencias entre el modelo y los datos recolectados del sistema real, todos los controladores logran estabilizar el péndulo con distintas características. Las razones de estas diferencias, así como maneras de mejorar el desempeño de los controladores son abordados en este documento.

El sistema del péndulo invertido rotatorio o péndulo de Furuta, fue inventado en 1992 en el Instituto de Tecnología de Tokio por Katsuhisa Furuta. Es un oscilador no-lineal complejo, que es de interés en la teoría moderna del control. El péndulo es sub-actuado y extremadamente no-lineal, debido a eso, ha sido estudiado en docenas de artículos que han usado este sistema para probar leyes de control lineal y no-lineal.

Abstract

The dissertation "Discretization, Control and Identification of a Rotating Inverted Pendulum", is about studying different discrete models for said system, analyzing their impact on control strategies and applying them to parametric estimation methods. The analysis begins with the non-linear model based on the Euler-Lagrange equations, which once linearized around the equilibrium points is discretized using different methods. Starting with the exact discrete model (ZOH), Tustin (Bilinear), Euler Forward, Euler Backward, and Taylor Truncated [1] [94-97].

The control is carried out using FSF (Full State Feedback), which offers a relatively simple control, which serves as the basis for the comparison of the models.

The identification is carried out by minimizing the squared error between the measured data and the simulation results, in order to estimate the most sensitive parameters of the system.

The results show that although there are differences between the model and the data collected from the real system, all the controllers manage to stabilize the pendulum with different characteristics. The reasons for these differences, as well as ways to improve the performance of the controllers are addressed in this document.

The inverted rotary pendulum system, or Furuta pendulum, was invented in 1992 at the Tokyo Institute of Technology by Katsuhisa Furuta. It is a complex non-linear oscillator, which is of interest in modern control theory. The pendulum is under-actuated and extremely non-linear, because of that, it has been studied in dozens of papers that have used this system to test laws of linear and non-linear control.

Índice general

Agradecimientos	I
Resumen	II
Abstract	III
1. Introducción	1
1.1. Antecedentes	1
1.2. Sistema PIR Quanser Qube-Servo 2	3
1.2.1. Convenciones del modelo	4
1.3. Objetivos	5
2. Método de Euler-Lagrange	7
2.1. Energía Cinética	9
2.2. Energía Potencial	13
2.3. Lagrangiano y Ecuación de Euler-Lagrange	13
2.4. Simulación en Matlab-Simulink	15
3. Linealización del Modelo Euler-Lagrange	26
3.1. Puntos de Equilibrio	29
3.1.1. Punto de Equilibrio Inestable	30
3.1.1.1. Representación en Espacio de Estados (PEI)	31
3.1.2. Punto de Equilibrio Estable	34

3.1.2.1.	Representación en Espacio de Estados (PEE)	35
3.2.	De Espacio de Estados a Función de Transferencia	39
4.	Discretización del Modelo Linealizado	43
4.1.	Elección del Periodo de Muestreo	43
4.2.	Método de Discretización Exacta	44
4.2.1.	Modelo Discreto Exacto (PEI)	44
4.2.2.	Modelo Discreto Exacto (PEE)	46
4.3.	Método Euler Hacia Atrás	48
4.3.1.	Modelo Discreto Euler Hacia Atrás (PEI)	50
4.3.2.	Modelo Discreto Euler Hacia Atrás (PEE)	51
4.4.	Método Euler Hacia Adelante	53
4.4.1.	Modelo Discreto Euler Hacia Adelante (PEI)	54
4.4.2.	Modelo Discreto Euler Hacia Adelante (PEE)	56
4.5.	Método Tustin (Transformada Bilineal)	58
4.5.1.	Modelo Discreto Tustin (PEI)	60
4.5.2.	Modelo Discreto Tustin (PEE)	61
4.6.	Método Serie de Taylor Truncada	63
4.6.1.	Modelo Discreto Serie de Taylor Truncada (PEI)	65
4.6.2.	Modelo Discreto Serie de Taylor Truncada (PEE)	67
5.	Control por Realimentación del Estado Observado	70
5.1.	Ancho de banda de lazo cerrado Bajo	74
5.2.	Ancho de banda de lazo cerrado Intermedio	75
5.3.	Ancho de banda de lazo cerrado de Alto	76
5.4.	Exigencias del controlador	78
6.	Resultados Experimentales	81
6.1.	Prueba del Modelo Euler-Lagrange	82
6.2.	Identificación del Sistema	84

6.2.1. Estimación de Parámetros	84
6.2.2. System Identification Toolbox	87
6.3. Desempeño de Controladores Discretos	89
6.3.1. Controlador basado en Modelo Discreto Exacto	91
6.3.2. Controlador basado en Modelo Euler Hacia Atrás	92
6.3.3. Controlador basado en Modelo Euler Hacia Adelante	93
6.3.4. Controlador basado en Modelo Tustin	94
6.3.5. Controlador basado en Modelo Taylor Truncado	95
Conclusiones	96
Bibliografía	98

Capítulo 1

Introducción

1.1. Antecedentes

El péndulo invertido es un experimento muy popular utilizado para propósitos educativos en la teoría moderna de control. Este sistema puede aparecer con distintas construcciones: el más convencional de los péndulos invertidos es el sistema carro-péndulo, que consiste de un carro moviéndose por un riel, con un péndulo acoplado en su parte superior. Los péndulos invertidos de este tipo tienen como limitación de movimiento del carro como una restricción para el sistema de control. Por otro lado, el péndulo invertido rotatorio (PIR o Péndulo de Furuta) tiene una estructura diferente. Posee un motor de acción directa como fuente de actuación y el péndulo está acoplado al eje rotatorio del motor. En ambos casos se cuenta con un sistema con dos grados de libertad, pero sólo uno de éstos es actuado (el brazo).

Es en este contexto que se ha realizado gran cantidad de artículos sobre el PIR, probando en éste distintas estrategias de control. Entre estos se encuentran:

- **Swing-up and LQR stabilization of a rotary inverted pendulum** [2]: Se realiza control del PIR mediante dos etapas: Una etapa de levantamiento (Swing-up) cuando el péndulo se encuentra en posición vertical inferior, que consiste en apli-

car un torque, de 90 % la capacidad total, en dirección opuesta a la velocidad del péndulo. Mientras que si el ángulo péndulo (α) se encuentra entre -30° y 30° , se utiliza control por realimentación del estado observado utilizando Lineal Quadratic Regulator (LQR). Con este esquema de control, se logra controlar ambos ángulos y estabilizar el péndulo en la vertical superior.

- **A Simplified IDA-PBC Design for Underactuated Mechanical Systems with Applications** [3]: En este documento se describe un método para simplificar las ecuaciones diferenciales parciales (EDP) asociadas a la energía potencial para IDA-PBC, una estrategia de control no lineal, basada en la resolución de las EDP. Con este enfoque se reducen los errores de aproximación respecto del sistema real, demostrando por simulación y experimentalmente poder estabilizar el péndulo con un ángulo de inclinación inicial de 45° , mientras que para esquemas de control basados en linealización, el ángulo de inclinación crítico está en torno a los 30° . Cabe destacar que utiliza el dispositivo Quanser Qube-Servo para llevar a cabo sus experimentos y simulaciones.
- **Modeling and control of a rotary inverted pendulum using various methods, comparative assessment and result analysis**[4]: En este documento se aborda la comparación del desempeño de tres distintos tipos de esquemas de control para realizar control del PIR, estos son 2DOF PID , FSF y LQR. Las conclusiones son: es posible estabilizar el péndulo con 2DOF PID, pero en la práctica no es robusto; FSF Y LQR son más robustos, pero LQR es más robusto y rápido que FSF.

1.2. Sistema PIR Quanser Qube-Servo 2



Figura 1.1: Dispositivo Quanser Qube-Servo 2

El dispositivo de la Figura 1.1 es la base para el desarrollo de esta memoria. En este se basarán las simulaciones y posteriormente se llevarán a cabo los experimentos. El motor tiene una libertad de movimiento de unos 180° y los parámetros del sistema se pueden encontrar en la documentación entregada por el fabricante en su página web [5], los que se presentan a continuación:

Símbolo	Descripción	Valor	Unidad
m_p	Masa del péndulo	0.024	kg
L_p	Largo del péndulo	0.129	m
B_p	Coefficiente de roce viscoso del péndulo	0.0005	$\frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$
J_p	Momento de inercia del péndulo	$3.3282 \cdot 10^{-5}$	$kg \cdot m^2$
m_r	Masa del brazo	0.095	kg
L_r	Largo del brazo	0.085	m
B_r	Coefficiente de roce viscoso del brazo	0.0015	$\frac{N \cdot m \cdot s}{rad}$
J_r	Momento de inercia del péndulo	$5.7198 \cdot 10^{-5}$	$kg \cdot m^2$
R_m	Resistencia de armadura	8.4	Ω
K_t	Constante corriente a torque	0.042	$\frac{N \cdot m}{A}$
K_m	Constante Back-EMF	0.042	$\frac{V \cdot s}{rad}$
g	Aceleración gravitacional	9.81	$\frac{m}{s^2}$
V_n	Voltaje nominal del motor	18	V
I_n	Corriente nominal del motor	0.54	A
S_n	Velocidad nominal del motor (sin carga)	4050	RPM
E_r	Resolución de encoders (brazo y péndulo)	512	$\frac{Count}{Revolution}$
F_sMax	Tasa de muestreo máxima	1000	Hz

1.2.1. Convenciones del modelo

El esquema del péndulo invertido rotatorio se muestra en la Figura 1.2. El brazo rotatorio está ligado a un servomotor con voltaje nominal de 18[V] y, por lo tanto, es actuado. El brazo tiene largo L_r , un momento de inercia J_r y su ángulo, θ , aumenta positivamente cuando rota en sentido contra reloj (counter-clockwise abreviado CCW). El servomotor (y entonces el brazo) aceleran en dirección CCW cuando el torque es positivo.

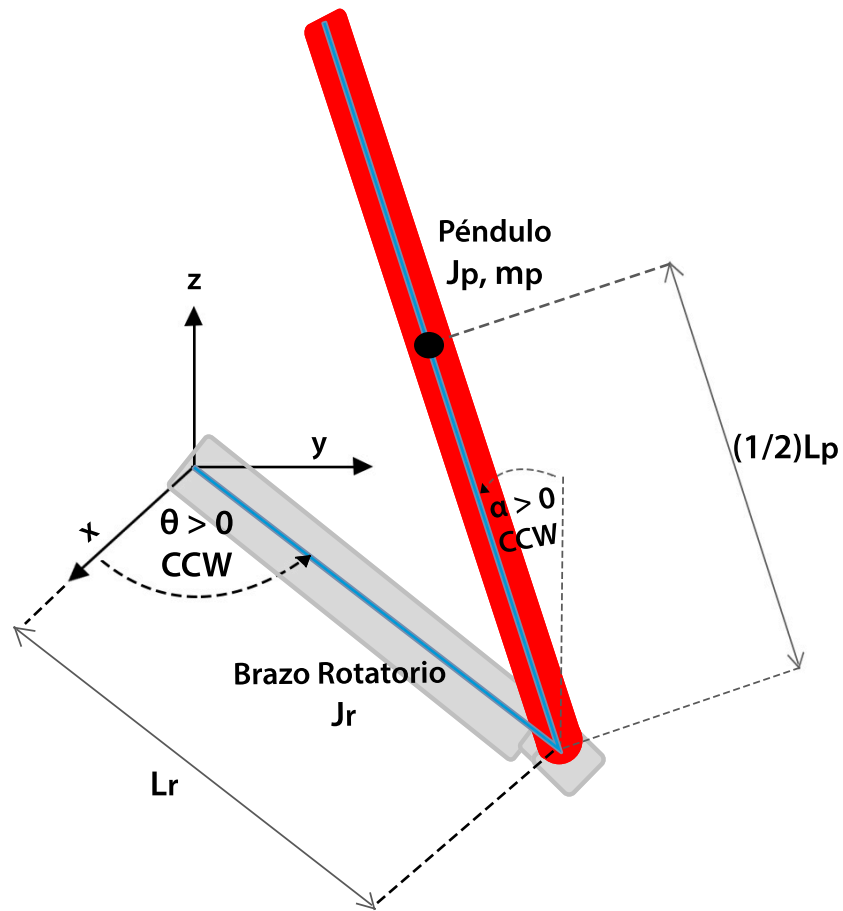


Figura 1.2: Convenciones del modelo péndulo invertido rotatorio

El péndulo está conectado al final del brazo rotatorio. Tiene una longitud total de L_p y su centro de masa se encuentra en la mitad ($\frac{L_p}{2}$). Su momento de inercia respecto de su centro de masa es J_p . El ángulo del péndulo respecto de la vertical, α , es cero cuando está perfectamente levantado en posición vertical y aumenta positivamente cuando rota en sentido CCW.

1.3. Objetivos

El objetivo de esta memoria es analizar la realización de control discreto sobre el PIR utilizando como base para los controladores, distintos modelos discretos aproxima-

dos. Estos modelos son discretizaciones del modelo dinámico linealizado en los puntos de operación. La linealización se lleva a cabo utilizando una expansión en serie de Taylor de primer orden, de esta forma se lleva a cabo distintas simulaciones ocupando estos modelos y se realiza un análisis respecto del efecto del tiempo de muestreo, ancho de banda del lazo cerrado y desempeño de los controladores. Estos controladores luego se prueban en el péndulo real, para de corroborar la validez del modelo ocupado, poniendo a prueba los coeficientes utilizados para describir el sistema.

Capítulo 2

Método de Euler-Lagrange

En vez de utilizar mecánica Newtoniana clásica para describir el sistema, se utilizará el método de Euler-Lagrange (E-L) [6] para encontrar las ecuaciones de movimiento del sistema. Esto se debe a que el sistema cuenta con dos ejes, donde uno de ellos (el péndulo) no está en un sistema inercial, lo que dificultaría un enfoque Newtoniano (Diagrama de fuerzas). Es por esto que se prefiere un método basado en energía. Éstos métodos son a menudo utilizados para sistemas complejos como robots con múltiples articulaciones o grados de libertad.

El método entrega las ecuaciones de movimiento del brazo rotatorio y el péndulo, utilizando el principio de mínima acción [7]. La acción está determinada por la integral de la diferencia entre la energía cinética y la potencial (diferencia también llamada Lagrangiano) del sistema brazo-péndulo:

$$L = T - V \tag{2.1}$$

donde T es la energía cinética total del sistema y V es la energía potencial total del sistema.

Las fuerzas generalizadas Q_i son usadas para describir las fuerzas no conservativas (Ej. fricción) aplicadas al sistema respecto de las coordenadas generalizadas. En este caso

la fuerza actuando sobre el brazo rotatorio es:

$$Q_1 = \tau - B_r \dot{\theta} \quad (2.2)$$

Mientras que la que actúa en el péndulo es:

$$Q_2 = -B_p \dot{\alpha} \quad (2.3)$$

En (2.2), oponiéndose al torque aplicado está el torque de la fricción, correspondiente al término B_r . Como el péndulo es no actuado, en (2.3) la única fuerza actuando sobre es el torque de la fricción, donde el coeficiente de amortiguación del péndulo es B_p .

Entonces la dinámica del sistema se obtendrá utilizando la ecuación de Euler-Lagrange:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{q}_i} - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i \quad (2.4)$$

Las q_i son llamadas coordenadas generalizadas. Para este sistema son:

$$q(t) = [q_1(t) \ q_2(t)]^T = [\theta(t) \ \alpha(t)]^T \quad (2.5)$$

donde como se muestra en (2.5), $\theta(t)$, es ángulo del brazo rotatorio y el ángulo $\alpha(t)$ es ángulo del péndulo invertido. Las velocidades generalizadas son:

$$\dot{q}(t) = \left[\frac{d\theta(t)}{dt} \ \frac{d\alpha(t)}{dt} \right]^T \quad (2.6)$$

Nota: La convención del punto para la derivada temporal será utilizada a través de este documento ($\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt}$). La tiempo t también será obviada para $\theta = \theta(t)$ y $\alpha = \alpha(t)$.

Con las ecuaciones generalizadas definidas, las expresiones para el péndulo invertido rotatorio son:

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{\theta}} - \frac{\partial L}{\partial \theta} = Q_1 \quad (2.7)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{\alpha}} - \frac{\partial L}{\partial \alpha} = Q_2 \quad (2.8)$$

Para desarrollar (2.7) y (2.8), se necesita contar con la expresión del Lagrangiano en función de los parámetros conocidos del sistema. Para eso es necesario encontrar las expresiones de la energía cinética y potencial total del sistema, para ser reemplazadas en (2.1).

2.1. Energía Cinética

La energía cinética del sistema consiste en la componente traslacional y rotacional para el péndulo, mientras que el brazo sólo posee energía cinética rotacional. La ecuación de energía cinética para el péndulo es:

$$K_p = \frac{1}{2}m_p v_{cm}^2 + \frac{1}{2}J_p \dot{\alpha}^2 \quad (2.9)$$

Mientras que la ecuación de energía cinética del brazo es:

$$K_r = \frac{1}{2}J_r \dot{\theta}^2 \quad (2.10)$$

Entonces la energía cinética total del sistema se obtiene sumando (2.9) y (2.10):

$$T = \frac{1}{2}m_p v_{cm}^2 + \frac{1}{2}J_p \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}J_r \dot{\theta}^2 \quad (2.11)$$

Donde la velocidad tangencial del centro de masa del péndulo se puede obtener al derivar las ecuaciones de posición de este. Se le llamará punto $P = (P_x, P_y, P_z)$ a la ubicación del centro de masa del péndulo.

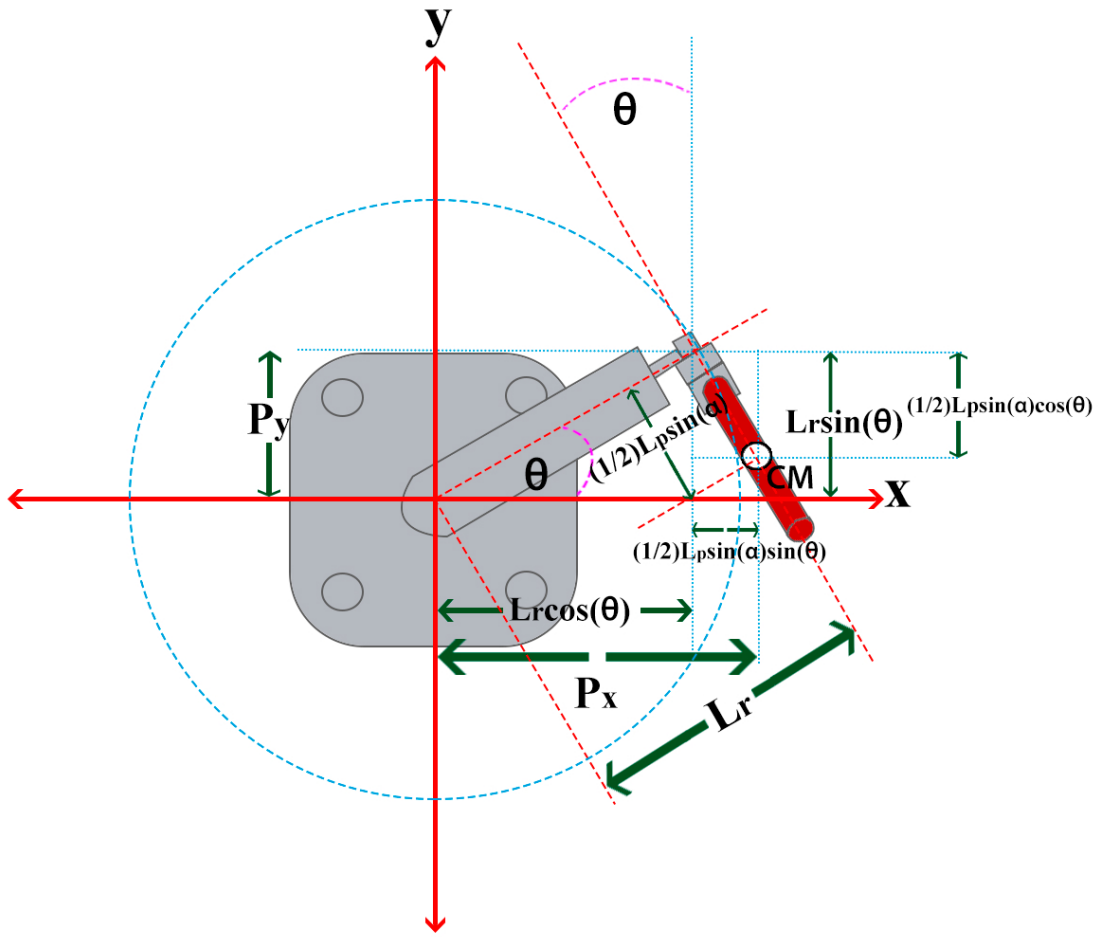


Figura 2.1: Sistema de coordenadas cartesianas, ejes X e Y.

De la Figura 2.1 se pueden encontrar las expresiones para obtener las componentes X e Y de la posición del centro de masa:

$$P_x = L_r \cos(\theta) + \frac{L_p}{2} \sin(\theta) \sin(\alpha) \quad (2.12)$$

$$P_y = L_r \sin(\theta) - \frac{L_p}{2} \cos(\theta) \sin(\alpha) \quad (2.13)$$

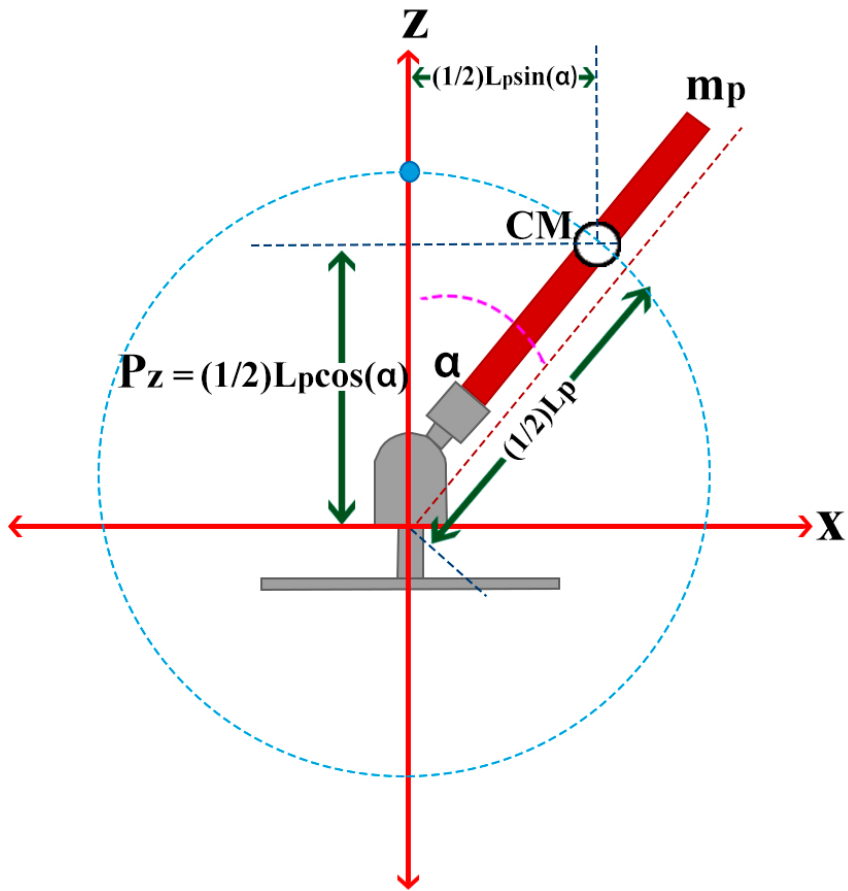


Figura 2.2: Sistema de coordenadas cartesianas, ejes X y Z.

En la Figura 2.2 se puede encontrar la componente Z del centro de masa:

$$P_z = \frac{L_p}{2} \cos(\alpha) \quad (2.14)$$

Las ecuaciones de la velocidad del centro de masa se obtienen al derivar (2.12), (2.13) y (2.14) respecto del tiempo.

Así:

$$\dot{P}_x = -\dot{\theta} L_r \sin(\theta) + \frac{L_p}{2} \left[\dot{\theta} \sin(\alpha) \cos(\theta) + \dot{\alpha} \cos(\alpha) \sin(\theta) \right] \quad (2.15)$$

$$\dot{P}_y = \dot{\theta} L_r \cos(\theta) - \frac{L_p}{2} \left[\dot{\alpha} \cos(\alpha) \cos(\theta) - \dot{\theta} \sin(\alpha) \sin(\theta) \right] \quad (2.16)$$

$$\dot{P}_z = -\frac{L_p}{2} \dot{\alpha} \sin(\alpha) \quad (2.17)$$

La magnitud de la velocidad tangencial del centro de masa al cuadrado es la suma de las todas las componentes de velocidad al cuadrado.

$$v_{cm}^2 = \dot{P}_x^2 + \dot{P}_y^2 + \dot{P}_z^2 \quad (2.18)$$

Entonces elevando al cuadrado (2.15), (2.16) y (2.17), se obtiene:

$$\begin{aligned} \dot{P}_x^2 = \dot{\theta}^2 L_r^2 \sin^2(\theta) - 2\left(\dot{\theta} L_r \sin(\theta)\right) \left(\frac{L_p}{2} \left(\dot{\theta} \sin(\alpha) \cos(\theta) + \dot{\alpha} \cos(\alpha) \sin(\theta)\right)\right) \\ + \frac{L_p^2}{4} \left(\dot{\theta} \sin(\alpha) \cos(\theta) + \dot{\alpha} \cos(\alpha) \sin(\theta)\right)^2 \end{aligned} \quad (2.19)$$

$$\begin{aligned} \dot{P}_y^2 = \dot{\theta}^2 L_r^2 \cos^2(\theta) - 2\left(\dot{\theta} L_r \cos(\theta)\right) \left(\frac{L_p}{2} \left(\dot{\alpha} \cos(\alpha) \cos(\theta) - \dot{\theta} \sin(\alpha) \sin(\theta)\right)\right) \\ + \frac{L_p^2}{4} \left(\dot{\alpha} \cos(\alpha) \cos(\theta) - \dot{\theta} \sin(\alpha) \sin(\theta)\right)^2 \end{aligned} \quad (2.20)$$

$$\dot{P}_z^2 = \frac{L_p^2}{4} \dot{\alpha}^2 \sin^2(\alpha) \quad (2.21)$$

Reemplazando (2.19), (2.20) y (2.21) en (2.18):

$$v_{cm}^2 = L_r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} L_p^2 \left[\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2(\alpha) \right] - L_r L_p \dot{\theta} \dot{\alpha} \cos(\alpha) \quad (2.22)$$

Al reemplazar (2.22) en (2.11), la expresión resultante es la energía cinética total del sistema en función de los parámetros planteados en la Figura 1.2:

$$T = \frac{1}{2} J_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_p \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2} m_p \left[L_r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4} L_p^2 \left(\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2(\alpha) \right) - L_r L_p \dot{\theta} \dot{\alpha} \cos(\alpha) \right] \quad (2.23)$$

2.2. Energía Potencial

La energía potencial del sistema es la energía potencial del centro de masa del péndulo, la cual queda definida por las convenciones planteadas en la Figura 1.2, en donde el ángulo del péndulo es definido como 0 [rad] cuando está levantado en posición vertical y la posición del centro de masa se encuentra en la mitad del largo del péndulo.

$$V = \frac{1}{2}m_p L_p g [\cos(\alpha) + 1] \quad (2.24)$$

Se puede apreciar que (2.24) tiene un máximo en 0 [rad] y es cero en $\pm\pi$ [rad], lo cual concuerda con lo planteado en la Figura 1.2.

2.3. Lagrangiano y Ecuación de Euler-Lagrange

Ahora que se tienen las expresiones para la energía cinética (2.23) y potencial (2.24) del sistema, se pueden reemplazar en (2.1) para obtener el Lagrangiano:

$$L = \frac{1}{2}J_r \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}J_p \dot{\alpha}^2 + \frac{1}{2}m_p \left[L_r^2 \dot{\theta}^2 + \frac{1}{4}L_p^2 (\dot{\alpha}^2 + \dot{\theta}^2 \sin^2(\alpha)) - L_r L_p \dot{\theta} \dot{\alpha} \cos(\alpha) \right] - \frac{1}{2}m_p L_p g [\cos(\alpha) + 1] \quad (2.25)$$

Como indican las ecuaciones de Euler-Lagrange, (2.7) y (2.8), se necesita derivar (2.25) respecto del tiempo y las velocidades generalizadas, así como también respecto a las coordenadas generalizadas.

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \theta} = \left(m_p L_r^2 + \frac{1}{4}m_p L_p^2 \sin^2(\alpha) + J_r \right) \ddot{\theta} - \left(\frac{1}{2}m_p L_p L_r \cos(\alpha) \right) \ddot{\alpha} + \left(\frac{1}{2}m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} + \left(\frac{1}{2}m_p L_p L_r \sin(\alpha) \right) \dot{\alpha}^2 \quad (2.26)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = 0 \quad (2.27)$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial t \partial \dot{\alpha}} = -\frac{1}{2}m_p L_p L_r \cos(\alpha) \ddot{\theta} + \left(J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} + \left(\frac{1}{2}m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} \quad (2.28)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \alpha} = \frac{1}{4}m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2}m_p L_p g \sin(\alpha) + \left(\frac{1}{2}m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} \quad (2.29)$$

Finalmente para encontrar las ecuaciones de movimiento se reemplaza (2.26) y (2.27) en (2.7) y también (2.28) y (2.29) en (2.8):

$$\begin{aligned} & \left(m_p L_r^2 + \frac{1}{4}m_p L_p^2 \sin^2(\alpha) + J_r \right) \ddot{\theta} - \left(\frac{1}{2}m_p L_p L_r \cos(\alpha) \right) \ddot{\alpha} \\ & + \left(\frac{1}{2}m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \right) \dot{\alpha} \dot{\theta} + \left(\frac{1}{2}m_p L_p L_r \sin(\alpha) \right) \dot{\alpha}^2 = \tau - B_r \dot{\theta} \end{aligned} \quad (2.30)$$

$$\begin{aligned} -\frac{1}{2}m_p L_p L_r \cos(\alpha) \ddot{\theta} + \left(J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2 \right) \ddot{\alpha} - \frac{1}{4}m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 \\ - \frac{1}{2}m_p L_p g \sin(\alpha) = -B_p \dot{\alpha} \end{aligned} \quad (2.31)$$

Las ecuaciones de movimiento (2.30) y (2.31) describen el comportamiento del sistema brazo-péndulo en presencia de un torque de entrada en el brazo, mientras que tanto el brazo como el péndulo presentan amortiguación por acción del roce.

El torque aplicado por el servomotor en la base del brazo está descrita por la ecuación:

$$\tau = \frac{K_m (V_m - K_m \dot{\theta})}{R_m} \quad (2.32)$$

donde K_m es la constante Back-EMF del motor y su valor se muestra en la sub-sección 1.2.

2.4. Simulación en Matlab-Simulink

Para realizar la implementación de la simulación del sistema PIR, se despejarán las derivadas de mayor orden de (2.30) y (2.31), de esta forma se facilitará su implementación en Simulink. Así también se definirán constantes que simplificarán la programación y la apreciación visual del sistema.

Se define al vector de estado $x = [\theta, \dot{\theta}, \alpha, \dot{\alpha}]^T$, entonces es posible reescribir (2.30) y (2.31) en función de las s de estado como:

$$f_{11}(x)\ddot{\theta} + f_{12}(x)\ddot{\alpha} = g_1(x, \tau) \quad (2.33) \quad f_{21}(x)\ddot{\theta} + f_{22}(x)\ddot{\alpha} = g_2(x) \quad (2.34)$$

Dónde:

$$f_{11}(x) = m_p L_r^2 + J_r + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \sin^2(\alpha) \quad f_{12}(x) = f_{21}(x) = -\frac{1}{2} m_p L_p L_r \cos(\alpha)$$

$$f_{22}(x) = J_p + \frac{1}{4} m_p L_p^2 = f_{22}$$

$$g_1(x, \tau) = \tau - B_r \dot{\theta} - \frac{1}{2} m_p L_p^2 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\theta} \dot{\alpha} - \frac{1}{2} m_p L_p L_r \sin(\alpha) \dot{\alpha}^2 \quad (2.35)$$

$$g_2(x) = -B_p \dot{\alpha} + \frac{1}{4} m_p L_p^2 \cos(\alpha) \sin(\alpha) \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_p L_p g \sin(\alpha) \quad (2.36)$$

Expresando (2.33) y (2.34) en forma matricial:

$$\begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} g_1(x, \tau) \\ g_2(x) \end{bmatrix}$$

Se puede obtener las expresiones para las derivadas de segundo orden como:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{11}(x) & f_{12}(x) \\ f_{21}(x) & f_{22} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} g_1(x, \tau) \\ g_2(x) \end{bmatrix}$$

Entonces:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \frac{1}{f_{22}f_{11}(x) - f_{21}(x)f_{12}(x)} \begin{bmatrix} f_{22} & -f_{12}(x) \\ -f_{21}(x) & f_{11}(x) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(x, \tau) \\ g_2(x) \end{bmatrix}$$

Expandiendo el determinante:

$$\begin{aligned} f_{22}f_{11}(x) - f_{21}(x)f_{12}(x) = \sin^2(\alpha) & \left(\frac{1}{4}J_p m_p L_p^2 + \frac{1}{16}m_p^2 L_p^4 + \frac{1}{4}m_p^2 L_r^2 L_p^2 \right) \\ & + J_p m_p L_r^2 + J_r J_p + \frac{1}{4}J_r m_p L_p^2 \end{aligned}$$

Se puede notar que el determinante es siempre positivo y mayor que cero, por lo tanto, la matriz es siempre invertible.

Es conveniente separar los términos constantes de los términos s, de esta forma será más fácil su implementación en Simulink. Se redefinen las ecuaciones como función de las constantes:

$$\begin{aligned} f_{22} &= k_1 & f_{11}(x) &= k_3 + k_4 \sin^2(\alpha) \\ f_{12}(x) = f_{21}(x) &= -k_2 \cos(\alpha) & f_{22}f_{11}(x) - f_{21}(x)f_{12}(x) &= k_6 + k_5 \sin^2(\alpha) \\ g_1(x, \tau) &= \tau - B_r \dot{\theta} - k_7 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} - k_2 \sin^2(\alpha) \dot{\alpha}^2 \\ g_2(x) &= -B_p \dot{\alpha} + k_4 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\theta}^2 + k_8 \sin(\alpha) \end{aligned}$$

Donde las constates k_i , para $i = 1, 2, \dots, 8$ son:

$$\begin{aligned} k_1 &= J_p + \frac{1}{4}m_p L_p^2 & k_5 &= \frac{1}{4}J_p m_p L_p^2 + \frac{1}{16}m_p^2 L_p^4 + \frac{1}{4}m_p^2 L_r^2 L_p^2 \\ k_2 &= \frac{1}{2}m_p L_p L_r & k_6 &= J_p m_p L_r^2 + J_r J_p + \frac{1}{4}J_r m_p L_p^2 \\ k_3 &= m_p L_r^2 + J_r & k_7 &= \frac{1}{2}m_p L_p^2 = 2k_4 \\ k_4 &= \frac{1}{4}m_p L_p^2 & k_8 &= \frac{1}{2}m_p L_p g \end{aligned}$$

El sistema en forma matricial queda entonces:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \frac{1}{k_5 \sin^2(\alpha) + k_6} \begin{bmatrix} k_1 & k_2 \cos(\alpha) \\ k_2 \cos(\alpha) & k_4 \sin^2(\alpha) + k_3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} g_1(x, \tau) \\ g_2(x) \end{bmatrix}$$

Multiplcando las matrices de la parte derecha de la ecuación:

$$\begin{bmatrix} \ddot{\theta} \\ \ddot{\alpha} \end{bmatrix} = \frac{1}{k_5 \sin^2(\alpha) + k_6} \begin{bmatrix} k_1 g_1(x, \tau) + k_2 \cos(\alpha) g_2(x) \\ k_2 \cos(\alpha) g_1(x, \tau) + (k_4 \sin^2(\alpha) + k_3) g_2(x) \end{bmatrix}$$

La expresión resultante respecto a $\ddot{\theta}$ es:

$$\ddot{\theta} = \left(\frac{1}{k_5 \sin^2(\alpha) + k_6} \right) (k_1 g_1(x, \tau) + k_2 \cos(\alpha) g_2(x)) \quad (2.37)$$

Reemplazando (2.35) y (2.36) en (2.37), se obtiene:

$$\begin{aligned} \ddot{\theta} = \left(\frac{1}{k_5 \sin^2(\alpha) + k_6} \right) & \left[k_1 (\tau - B_r \dot{\theta} - k_7 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} - k_2 \sin^2(\alpha) \dot{\alpha}^2) \right. \\ & \left. + k_2 \cos(\alpha) (-B_p \dot{\alpha} + k_4 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\theta}^2 + k_8 \sin(\alpha)) \right] \end{aligned} \quad (2.38)$$

Respecto a $\ddot{\alpha}$ se tiene:

$$\ddot{\alpha} = \left(\frac{1}{k_5 \sin^2(\alpha) + k_6} \right) (k_2 \cos(\alpha) g_1(x, \tau) + (k_4 \sin^2(\alpha) + k_3) g_2(x)) \quad (2.39)$$

Reemplazando (2.35) y (2.36) en (2.39):

$$\begin{aligned} \ddot{\alpha} = \left(\frac{1}{k_5 \sin^2(\alpha) + k_6} \right) & \left[k_2 \cos(\alpha) (\tau - B_r \dot{\theta} - k_7 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} - k_2 \sin^2(\alpha) \dot{\alpha}^2) \right. \\ & \left. + (k_4 \sin^2(\alpha) + k_3) (-B_p \dot{\alpha} + k_4 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\theta}^2 + k_8 \sin(\alpha)) \right] \end{aligned} \quad (2.40)$$

Las ecuaciones (2.38) y (2.40) tienen los factores $(k_5 \sin^2(\alpha) + k_6)^{-1}$, $k_2 \cos(\alpha)$, $g_1(x, \tau)$ y $g_2(x)$ en común, lo que simplifica la implementación en Simulink.

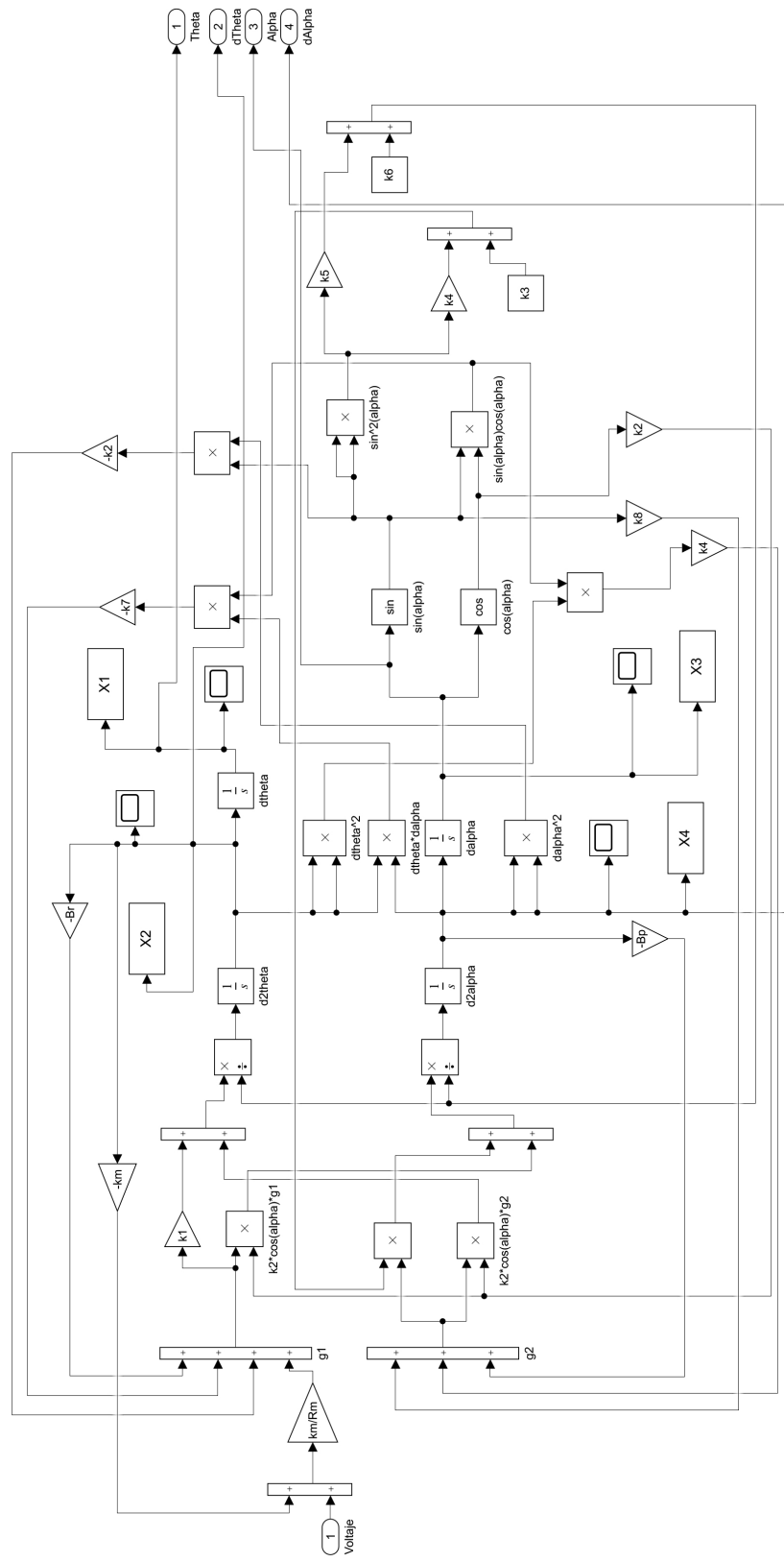


Figura 2.3: Diagrama Simulink implementado, basado en (2.38) y (2.40)

Se simulan diferentes circunstancias de interés, los gráficos de dichas simulaciones se presentan a continuación:

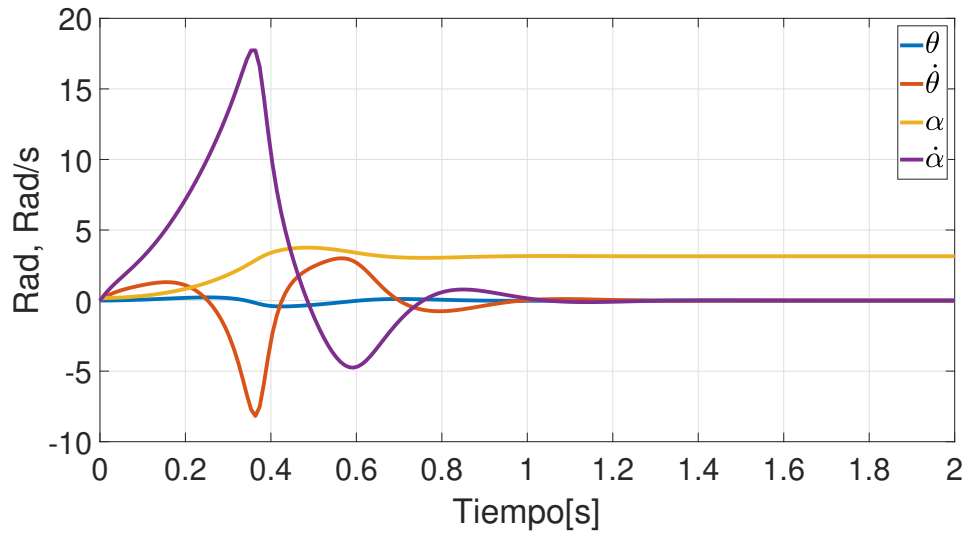


Figura 2.4: Gráfico del vector de estado (x), para $x_0 = (0, 0, \frac{10\pi}{180}, 0)$ y $V_m = 0$

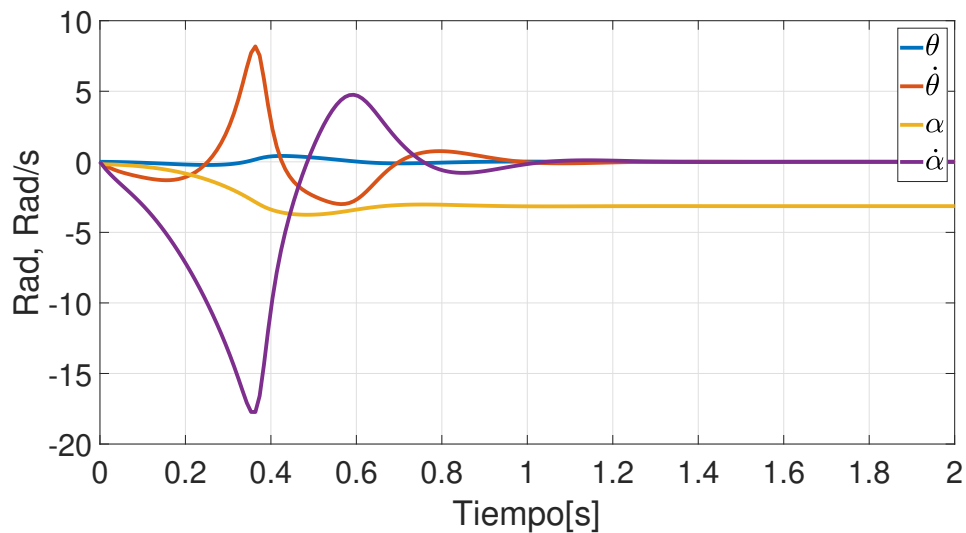


Figura 2.5: Gráfico del vector de estado (x), para $x_0 = (0, 0, -\frac{10\pi}{180}, 0)$ y $V_m = 0$

Analizando los gráficos, se puede observar para todos los casos las respuestas son oscilaciones amortiguadas, lo cual concuerda con el comportamiento físico de un péndulo.

Al observar las Figura 2.4 se desprende que los ángulos θ y α comienzan aumentando en sentido positivo (CCW) y α se estaciona en π (posición vertical inferior). Mientras que en la Figura 2.5 los ángulos θ y α comienzan aumentando en sentido negativo (CW) y α se estaciona en $-\pi$ (posición vertical inferior).

Ahora en presencia de un voltaje positivo de entrada, por lo tanto, también un torque positivo, se presentan los gráficos obtenidos.

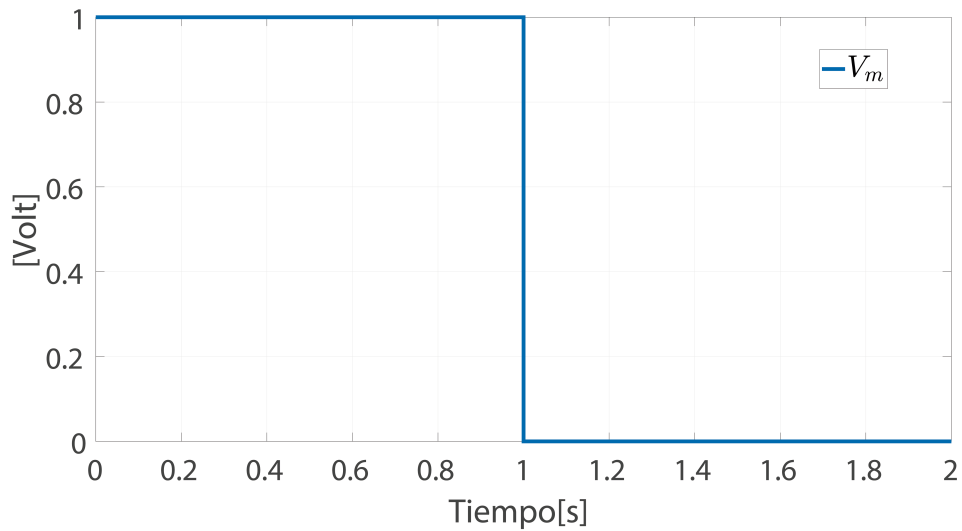


Figura 2.6: Gráfico del voltaje de entrada al motor V_m

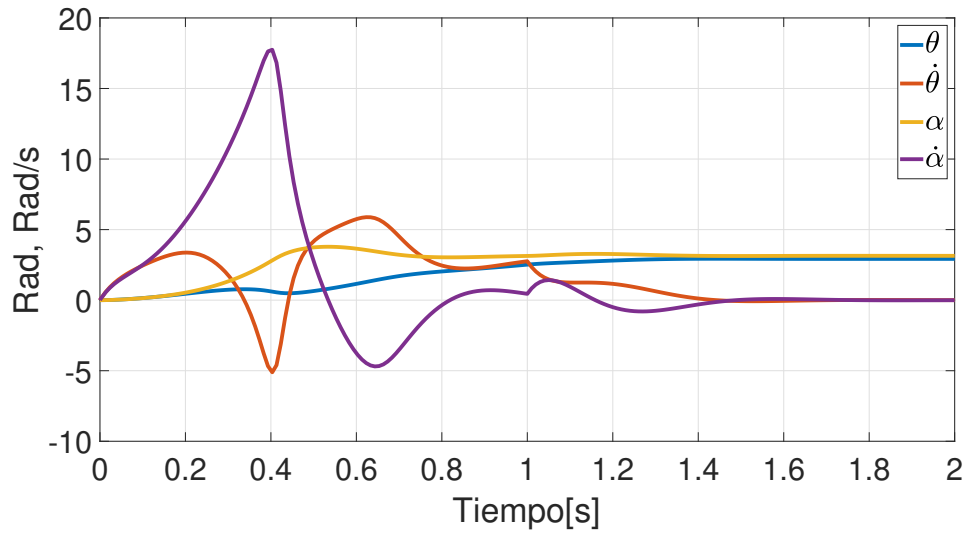


Figura 2.7: Gráfico del vector de estado (x), para $x_0 = (0, 0, 0, 0)$ y voltaje de entrada V_m Figura 2.6.

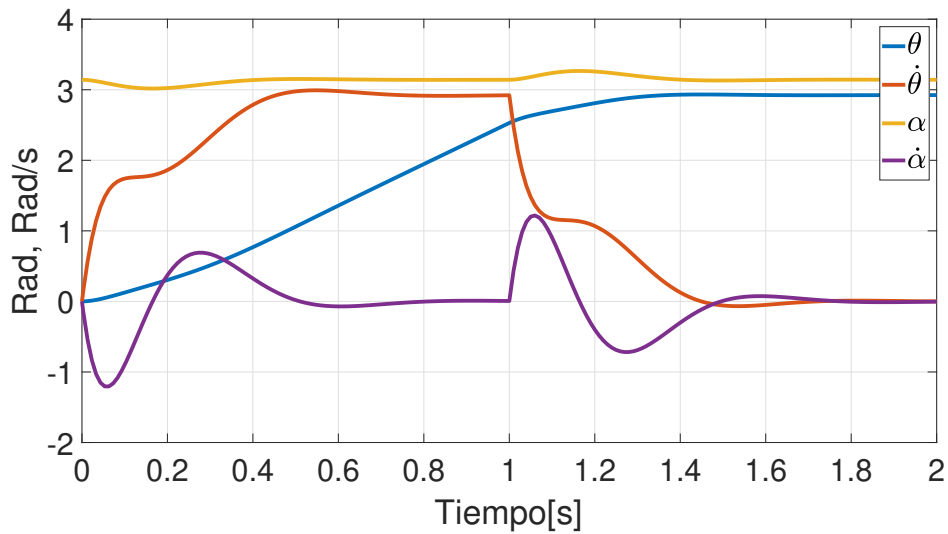


Figura 2.8: Gráfico del vector de estado (x), para $x_0 = (0, 0, \pi, 0)$ y voltaje de entrada V_m Figura 2.6.

Analizando la Figura 2.7, en donde en presencia de un voltaje positivo de entrada, se desprende que los ángulos θ y α comienzan aumentando en sentido positivo (CCW), α se estaciona en π (posición vertical inferior) y θ se estaciona en un ángulo positivo.

Mientras que en la Figura 2.8, en donde el péndulo se encuentra en 180° , el ángulo θ comienza aumentando en sentido positivo y α comienza aumentando en sentido negativo (CW), α se estaciona en π (posición vertical inferior) y θ se estaciona en un ángulo positivo.

Con un voltaje negativo de entrada, se presentan los gráficos obtenidos.

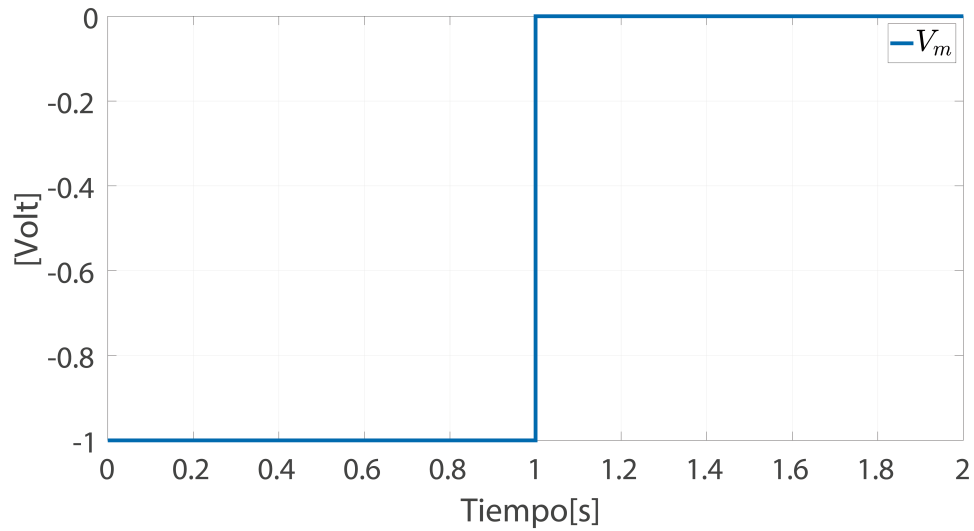


Figura 2.9: Gráfico del voltaje de entrada V_m

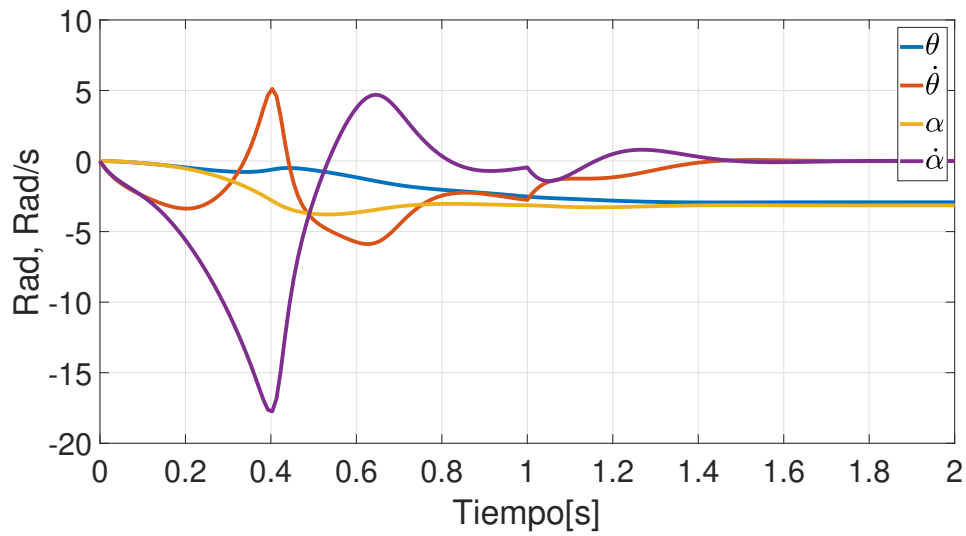


Figura 2.10: Gráfico del vector de estado (x), para $x_0 = (0, 0, 0, 0)$ y voltaje de entrada V_m Figura 2.9.

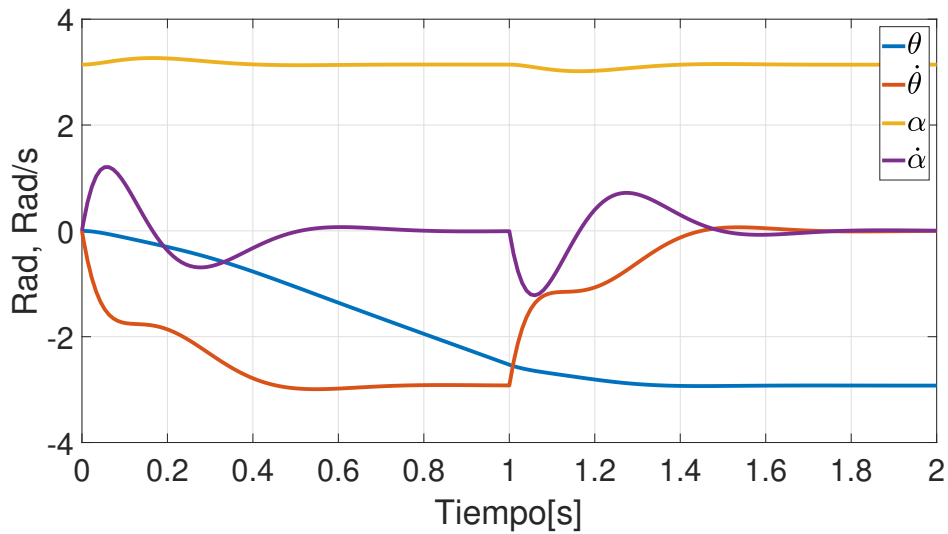


Figura 2.11: Gráfico del vector de estado (x), para $x_0 = (0, 0, \pi, 0)$ y voltaje de entrada V_m Figura 2.9.

En las Figuras 2.8 y 2.11, péndulo comienza con ángulo $\alpha = -\pi$, estos reciben un torque positivo (CCW) y negativo (CW) respectivamente. Se puede observar que a diferencia de los casos anteriores, en presencia de un torque positivo, el ángulo α au-

menta en sentido negativo. Mientras que para un torque negativo, el ángulo α aumenta en sentido positivo. Por otro lado, el ángulo θ sigue el sentido del torque, al igual que en los casos anteriores.

Los resultados obtenidos concuerdan con las convenciones establecidas en la Figura 1.2 y serán de vital importancia para una correcta lectura del comportamiento del sistema.

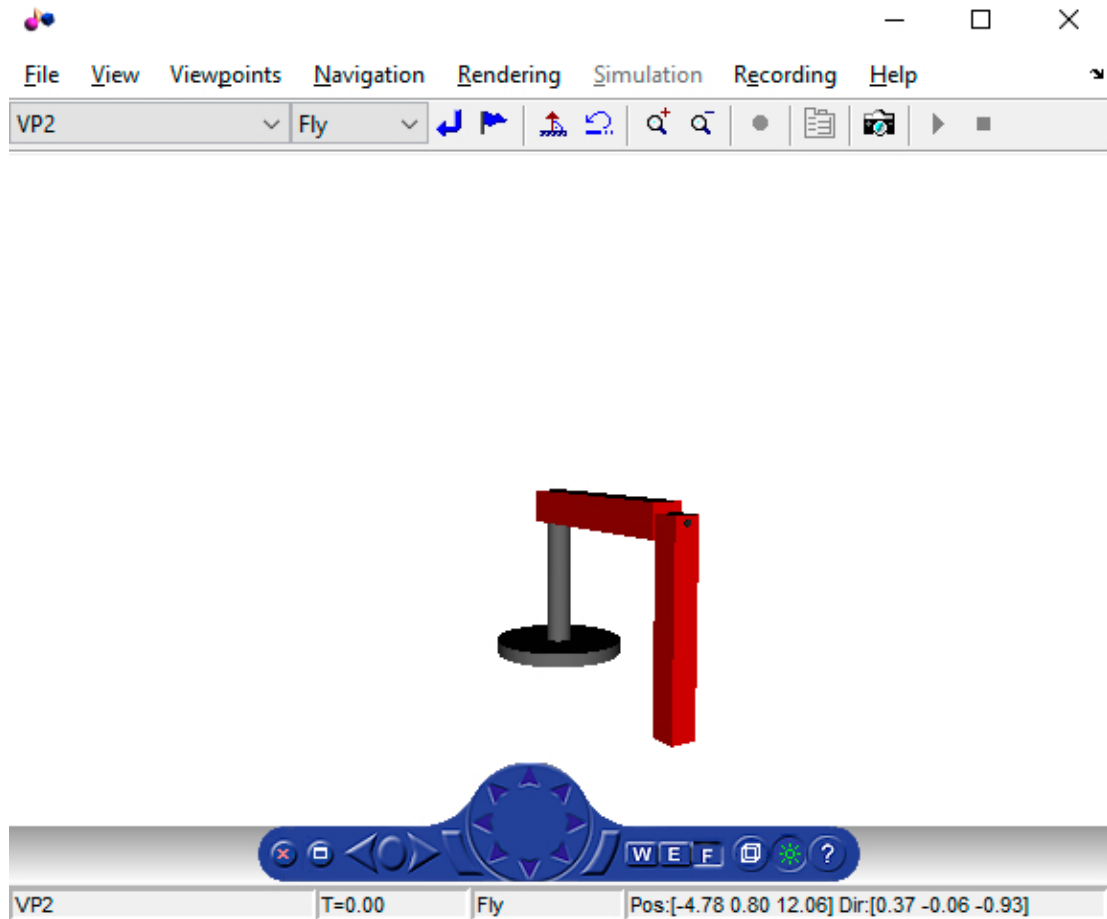


Figura 2.12: Modelo 3D del péndulo

En el archivo Matlab "ModeloEL.m" se incluye un modelo 3D del péndulo, mostrado en la Figura 2.12, el cual se mueve de acuerdo a los datos obtenidos del modelo. El tiempo es configurable y difiere del sistema real, pero brinda una experiencia visual que ayuda a verificar de forma más sencilla el comportamiento del sistema.

Capítulo 3

Linealización del Modelo

Euler-Lagrange

Los sistemas reales suelen poseer características no lineales, como es el caso del modelo del péndulo invertido rotatorio. Sin embargo, generalmente pueden ser representados por modelos lineales con razonable exactitud, al menos en cierto rango entorno a un punto de equilibrio. Este acercamiento desde los modelos lineales permite ocupar una amplia gama de herramientas matemáticas que son de utilidad para analizar un sistema y diseñar un esquema de control.

En esta sección se lleva a cabo la linealización del modelo Euler-Lagrange ya encontrado, utilizando expansión en serie de Taylor de primer orden en torno a un punto de operación arbitrario.

Con el vector de estado $x = [\theta, \dot{\theta}, \alpha, \dot{\alpha}]^T$ y un punto cualquiera con velocidades angulares iguales a cero, $x_0 = (\theta_0, 0, \alpha_0, 0)$. Esto se desprende de que un punto de equilibrio debe mantener la misma posición angular ante ausencia de estímulos, algo que es imposible de lograr con velocidades angulares distintas de 0 [rad/s]. La elección de este punto es conveniente para reducir los términos de las derivadas parciales necesarias para la linealización

Se define la función $N_1(x)$, la cual es la parte derecha de (2.38), donde $\ddot{\theta}$ ya es lineal,

por lo tanto, no necesita ser linealizado.

$$\ddot{\theta} = N_1(x) \quad (3.1)$$

$$N_1(x) = \left(\frac{1}{k_5 \sin^2(\alpha) + k_6} \right) \left[k_1 (\tau - B_r \dot{\theta} - k_7 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} - k_2 \sin^2(\alpha) \dot{\alpha}^2) \right. \\ \left. + k_2 \cos(\alpha) (-B_p \dot{\alpha} + k_4 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\theta}^2 + k_8 \sin(\alpha)) \right] \quad (3.2)$$

Aplicando expansión de serie de Taylor de orden 1 para (3.2):

$$N_{1l}(x) = N_1(x_0) + \left(\frac{\partial N_1(x)}{\partial \dot{\theta}} \right) \Big|_{x=x_0} (\dot{\theta} - \dot{\theta}_0) + \left(\frac{\partial N_1(x)}{\partial \dot{\alpha}} \right) \Big|_{x=x_0} (\dot{\alpha} - \dot{\alpha}_0) \\ + \left(\frac{\partial N_1(x)}{\partial \theta} \right) \Big|_{x=x_0} (\theta - \theta_0) + \left(\frac{\partial N_1(x)}{\partial \alpha} \right) \Big|_{x=x_0} (\alpha - \alpha_0) \quad (3.3)$$

Ahora evaluando (3.3) en el punto de operación:

$$N_{1l}(x) = N_1(x_0) + \left(\frac{\partial N_1(x)}{\partial \dot{\theta}} \right) \Big|_{x=x_0} \dot{\theta} + \left(\frac{\partial N_1(x)}{\partial \dot{\alpha}} \right) \Big|_{x=x_0} \dot{\alpha} \\ + \left(\frac{\partial N_1(x)}{\partial \theta} \right) \Big|_{x=x_0} (\theta - \theta_0) + \left(\frac{\partial N_1(x)}{\partial \alpha} \right) \Big|_{x=x_0} (\alpha - \alpha_0) \quad (3.4)$$

Derivando (3.2) respecto a las s del vector de estado y evaluando en $x = x_0$, se obtiene:

$$N_1(x_0) = \frac{(k_1 \tau + k_2 k_8 \cos(\alpha_0) \sin(\alpha_0))}{k_5 \sin^2(\alpha_0) + k_6} \quad \left(\frac{\partial N_1(x)}{\partial \dot{\alpha}} \right) \Big|_{x=x_0} = \frac{-k_2 B_p \cos(\alpha_0)}{k_5 \sin^2(\alpha_0) + k_6}$$

$$\left(\frac{\partial N_1(x)}{\partial \dot{\theta}} \right) \Big|_{x=x_0} = \frac{-k_1 B_r}{k_5 \sin^2(\alpha_0) + k_6} \quad \left(\frac{\partial N_1(x)}{\partial \theta} \right) \Big|_{x=x_0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial N_1(x)}{\partial \alpha}\right)\Big|_{x=x_0} = \frac{-2k_5 \sin(\alpha_0) \cos(\alpha_0) (k_1 \tau + k_2 k_8 \cos(\alpha_0) \sin(\alpha_0))}{(k_5 \sin^2(\alpha_0) + k_6)^2} + \frac{(k_8 k_2 \cos^2(\alpha_0) - k_8 k_2 \sin^2(\alpha_0))}{k_5 \sin^2(\alpha_0) + k_6}$$

Ahora se realiza el mismo procedimiento para (2.40), donde $\ddot{\alpha}$ ya es lineal.

$$\ddot{\alpha} = N_2(x) \quad (3.5)$$

$$N_2(x) = \left(\frac{1}{k_5 \sin^2(\alpha) + k_6}\right) \left[k_2 \cos(\alpha) (\tau - B_r \dot{\theta} - k_7 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\alpha} \dot{\theta} - k_2 \sin^2(\alpha) \dot{\alpha}^2) + (k_4 \sin^2(\alpha) + k_3) (-B_p \dot{\alpha} + k_4 \sin(\alpha) \cos(\alpha) \dot{\theta}^2 + k_8 \sin(\alpha)) \right] \quad (3.6)$$

Realizando expansión de Taylor de primer orden y evaluando en x_0 :

$$N_{2l}(x) = N_2(x_0) + \left(\frac{\partial N_2(x)}{\partial \dot{\theta}}\right)\Big|_{x=x_0} \dot{\theta} + \left(\frac{\partial N_2(x)}{\partial \dot{\alpha}}\right)\Big|_{x=x_0} \dot{\alpha} + \left(\frac{\partial N_2(x)}{\partial \theta}\right)\Big|_{x=x_0} (\theta - \theta_0) + \left(\frac{\partial N_2(x)}{\partial \alpha}\right)\Big|_{x=x_0} (\alpha - \alpha_0) \quad (3.7)$$

Derivando respecto al vector de estado y evaluando ahora (3.6) en x_0 , se tiene que:

$$N_2(x_0) = \frac{(k_2 \tau \cos(\alpha_0) + (k_3 + k_4 \sin^2(\alpha_0)) k_8 \sin(\alpha_0))}{k_5 \sin^2(\alpha_0) + k_6}$$

$$\left(\frac{\partial N_2(x)}{\partial \dot{\theta}}\right)\Big|_{x=x_0} = \frac{-k_2 B_r \cos(\alpha_0)}{k_5 \sin^2(\alpha_0) + k_6} \quad \left(\frac{\partial N_2(x)}{\partial \dot{\alpha}}\right)\Big|_{x=x_0} = \frac{-(k_3 + k_4 \sin^2(\alpha_0)) B_p}{k_5 \sin^2(\alpha_0) + k_6}$$

$$\left(\frac{\partial N_2(x)}{\partial \theta}\right)\Big|_{x=x_0} = 0$$

$$\left(\frac{\partial N_2(x)}{\partial \alpha}\right)\Big|_{x=x_0} = \frac{-2k_5 \sin(\alpha_0) \cos(\alpha_0) \left(k_2 \tau \cos(\alpha_0) + k_8 \sin(\alpha_0) (k_3 + k_4 \sin^2(\alpha_0))\right)}{\left(k_5 \sin^2(\alpha_0) + k_6\right)^2} + \frac{\left(-k_2 \tau \sin(\alpha_0) + k_3 k_8 \cos(\alpha_0) + 3k_4 k_8 \sin^2(\alpha_0) \cos(\alpha_0)\right)}{k_5 \sin^2(\alpha_0) + k_6}$$

3.1. Puntos de Equilibrio

Una vez obtenidas las expresiones de las ecuaciones linealizadas, es necesario encontrar los puntos de equilibrio del sistema. Los puntos de equilibrio, se definen como:

$$\dot{x}_0 = 0 \implies \begin{bmatrix} \dot{\theta}_0 \\ \ddot{\theta}_0 \\ \dot{\alpha}_0 \\ \ddot{\alpha}_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.8)$$

De (3.8) se desprende que:

$$\dot{\alpha}_0 = 0 \qquad \dot{\theta}_0 = 0$$

Este resultado se había previsto al comienzo del capítulo, debido a que es imposible mantener una posición angular constante con una velocidad angular no nula.

$$\ddot{\theta}_0 = N_1(x_0) = 0 \qquad \ddot{\alpha}_0 = N_2(x_0) = 0$$

Ahora es necesario expandir estas ecuaciones para poder encontrar θ_0 y α_0 .

$$N_1(x_0) = \frac{\left(k_1 \tau + k_2 k_8 \cos(\alpha_0) \sin(\alpha_0)\right)}{k_5 \sin^2(\alpha_0) + k_6} = 0 \quad (3.9)$$

Para que se cumpla (3.9) tiene que suceder que $\tau = 0$, mientras que α_0 puede ser $0, \pm\pi$ o $\pm\frac{\pi}{2}$. Por otro lado, (3.9) es independiente de θ_0 y, por lo tanto, puede tomar cualquier valor real.

$$N_2(x_0) = \frac{\left(k_2\tau \cos(\alpha_0) + (k_3 + k_4 \sin^2(\alpha_0))k_8 \sin(\alpha_0)\right)}{k_5 \sin^2(\alpha_0) + k_6} \quad (3.10)$$

la ecuación (3.10) se cumple cuando $\tau = 0$ y α_0 puede ser 0 o $\pm\pi$. Mientras que (3.10) es independiente de θ_0 , al igual que en el caso anterior, puede tomar cualquier valor real.

Al intersectar estas soluciones se tiene que $x_{d0} = [\theta_0, 0, \pm\pi, 0]$ y $x_{u0} = [\theta_0, 0, 0, 0]$. Pero el sistema del péndulo invertido no hay diferencia entre π y $-\pi$, se trata de la misma posición angular. Por lo tanto, los puntos de equilibrio del sistema son:

- $x_{u0} = (\theta_0, 0, 0, 0)$: En este punto el péndulo se encuentra en posición vertical superior. Debe entonces tratarse de un punto de equilibrio inestable. En esta posición el péndulo cae al mínimo cambio en cualquiera de los estados o en presencia de un torque de entrada.
- $x_{d0} = (\theta_0, 0, \pi, 0)$: En esta posición el péndulo se encuentra en posición vertical inferior, entonces debe tener un comportamiento estable, volviendo a $\alpha_0 = \pi$ [rad] para cualquier estímulo de entrada. Mientras que el ángulo θ se debe estabilizar en algún valor.

3.1.1. Punto de Equilibrio Inestable

Evaluando (3.4) y (3.7) en el punto $x_{u0} = (\theta_0, 0, 0, 0)$, punto de equilibrio inestable (PEI), se obtiene respectivamente:

$$\ddot{\theta} = \frac{k_1}{k_6}\tau - \frac{k_1 B_r}{k_6}\dot{\theta} - \frac{k_2 B_p}{k_6}\dot{\alpha} + \frac{k_2 k_8}{k_6}\alpha \quad (3.11)$$

$$\ddot{\alpha} = \frac{k_2}{k_6} \tau - \frac{k_2 B_r}{k_6} \dot{\theta} - \frac{k_3 B_p}{k_6} \dot{\alpha} + \frac{k_3 k_8}{k_6} \alpha \quad (3.12)$$

Se puede apreciar que (3.11) y (3.12) no dependen de θ , al ser independientes de esa, el punto de operación es en realidad una recta donde θ puede tomar cualquier valor real.

3.1.1.1. Representación en Espacio de Estados (PEI)

Para describir el sistema en s de estado, se utilizará el vector de estado definido con anterioridad: $x = [\theta, \dot{\theta}, \alpha, \dot{\alpha}]^T = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$. De donde se extrae que $\dot{x}_1 = x_2$ y $\dot{x}_3 = x_4$. La expresión general en s de estados es:

$$\dot{x} = A_u x + B_u u \quad (3.13)$$

$$y = C_u x + D_u u$$

$$B_u = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{k_6} \\ 0 \\ \frac{k_2}{k_6} \end{bmatrix} \quad (3.14)$$

$$A_u = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-k_1 B_r}{k_6} & \frac{k_8 k_2}{k_6} & \frac{-k_2 B_p}{k_6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-k_2 B_r}{k_6} & \frac{k_3 k_8}{k_6} & \frac{-k_3 B_p}{k_6} \end{bmatrix} \quad (3.15)$$

Donde las matrices A_u y B_u se obtienen de (3.11) y (3.12).

Cómo el sistema sólo posee mediciones de ángulos del péndulo y brazo, sólo esas componentes se verán reflejadas en la matriz C_u . Por otro lado, como no existe paso directo entre la entrada y la salida, se tiene que $D_u = 0$. Entonces:

$$D_u = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.16)$$

$$C_u = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad (3.17)$$

El sistema expresado en espacio de estados es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{-k_1 B_r}{k_6} & \frac{k_8 k_2}{k_6} & \frac{-k_2 B_p}{k_6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{-k_2 B_r}{k_6} & \frac{k_3 k_8}{k_6} & \frac{-k_3 B_p}{k_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{k_6} \\ 0 \\ \frac{k_2}{k_6} \end{bmatrix} \tau \quad (3.18)$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (3.19)$$

Ahora es necesario añadir la dinámica del actuador al modelo, para que la señal de entrada al sistema sea el voltaje al servomotor. Para esto se utiliza (2.32) y se reemplaza en (3.18)

$$B_{uv} = \frac{K_m B_u}{R_m} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m k_1}{R_m k_6} \\ 0 \\ \frac{K_m k_2}{R_m k_6} \end{bmatrix} \quad (3.20)$$

$$A_{uv} = A_u - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_m^2 k_1}{R_m k_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_m^2 k_2}{R_m k_6} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_1}{k_6} (B_r + \frac{K_m^2}{R_m}) & \frac{k_8 k_2}{k_6} & \frac{-k_2 B_p}{k_6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_2}{k_6} (B_r + \frac{K_m^2}{R_m}) & \frac{k_3 k_8}{k_6} & \frac{-k_3 B_p}{k_6} \end{bmatrix} \quad (3.21)$$

La representación en espacio de estados del sistema respecto de la entrada de voltaje

es la siguiente, donde la salida se mantiene invariante:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_1}{k_6} \left(B_r + \frac{K_m^2}{R_m} \right) & \frac{k_8 k_2}{k_6} & \frac{-k_2 B_p}{k_6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -\frac{k_2}{k_6} \left(B_r + \frac{K_m^2}{R_m} \right) & \frac{k_3 k_8}{k_6} & \frac{-k_3 B_p}{k_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m k_1}{R_m k_6} \\ 0 \\ \frac{K_m k_2}{R_m k_6} \end{bmatrix} V_m \quad (3.22)$$

En el Courseware Rotary Pendulum Workbook página 11-13, descargable en [8], hay un error respecto a la matriz B, en donde cambia un término de signo sin razón aparente, eso cambiaría lo establecido en las convenciones del mismo documento. A continuación se muestra el resultado obtenido al comparar este modelo linealizado, con respecto al modelo original.

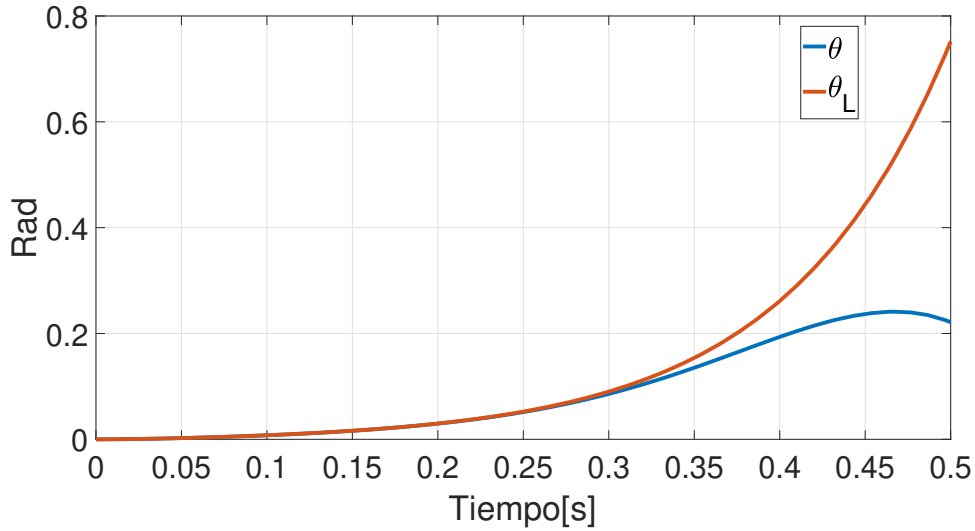


Figura 3.1: Gráfico del ángulo θ del modelo E-L (azul) y el modelo linealizado (naranja), para $x_0 = (0, 0, \frac{\pi}{180}, 0)$ y voltaje de entrada $V_m = 0$

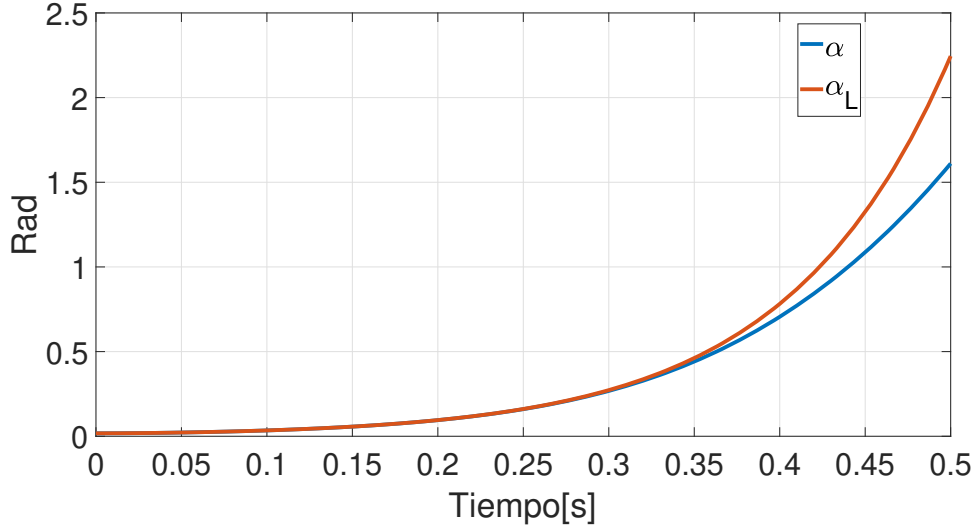


Figura 3.2: Gráfico del ángulo α del modelo E-L (azul) y el modelo linealizado (naranja), para $x_0 = (0, 0, \frac{\pi}{180}, 0)$ y voltaje de entrada $V_m = 0$

Se puede apreciar de las Figura 3.1 y 3.2 que el sistema es inestable en 0 [rad], lo cual concuerda con lo planteado en el análisis de los puntos de equilibrio del sistema. Es importante notar que el sistema linealizado tiene un comportamiento similar al del modelo original, pero se comienza a diferenciar aproximadamente en $t = 0.3$ [s]. La linealización solo logra acercarse al comportamiento de crecimiento exponencial del sistema, por lo tanto, continua aumentando indefinidamente. Mientras que el sistema real comienza a mostrar un comportamiento oscilatorio.

3.1.2. Punto de Equilibrio Estable

Evaluando (3.4) y (3.7) en el punto $x_{d0} = (\theta_0, 0, \pi, 0)$, punto de equilibrio estable (PEE) se obtiene respectivamente:

$$\ddot{\theta} = \frac{k_1}{k_6} \tau - \frac{k_1 B_r}{k_6} \dot{\theta} + \frac{k_2 B_p}{k_6} \dot{\alpha} + \frac{k_2 k_8}{k_6} \alpha \quad (3.23)$$

$$\ddot{\alpha} = -\frac{k_2}{k_6} \tau + \frac{k_2 B_r}{k_6} \dot{\theta} - \frac{k_3 B_p}{k_6} \dot{\alpha} - \frac{k_3 k_8}{k_6} (\alpha - \pi) \quad (3.24)$$

Nuevamente se puede apreciar que (3.23) y (3.24) no dependen del ángulo θ , por lo tanto, al igual que en la sección 3.1.1, el punto de equilibrio x_{d0} es una realidad una recta donde θ puede tomar cualquier valor real.

3.1.2.1. Representación en Espacio de Estados (PEE)

Como en el caso anterior, se utilizará el vector de estado $x = [\theta, \dot{\theta}, \alpha, \dot{\alpha}]^T = [x_1, x_2, x_3, x_4]^T$.

$$\begin{aligned}\dot{x} &= A_d x + B_d u \\ y &= C_d x + D_d u\end{aligned}\tag{3.25}$$

donde las matrices A_d y B_d se pueden obtener de (3.23) y (3.24). Entonces:

$$A_d = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_1 B_r}{k_6} & \frac{k_8 k_2}{k_6} & \frac{k_2 B_p}{k_6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k_2 B_r}{k_6} & -\frac{k_3 k_8}{k_6} & -\frac{k_3 B_p}{k_6} \end{bmatrix} \tag{3.26}$$

$$B_d = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{k_6} \\ 0 \\ -\frac{k_2}{k_6} \end{bmatrix} \tag{3.27}$$

Al igual que en el caso anterior, al tratarse del mismo sistema, se tiene que las matrices $C_d = C_u$ y $D_d = D_u$.

$$C_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \tag{3.28}$$

$$D_d = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \tag{3.29}$$

El modelo expresado en espacio de estados es:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_1 B_r}{k_6} & \frac{k_8 k_2}{k_6} & \frac{k_2 B_p}{k_6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k_2 B_r}{k_6} & -\frac{k_3 k_8}{k_6} & -\frac{k_3 B_p}{k_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k_1}{k_6} \\ 0 \\ -\frac{k_2}{k_6} \end{bmatrix} \tau \tag{3.30}$$

$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \quad (3.31)$$

Ahora, como en el caso anterior, se necesita transformar el modelo para que sea dependiente del voltaje de entrada V_m . Se reemplaza (2.32) en (3.30), resultando:

$$B_{dv} = \frac{K_m B_d}{R_m} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m k_1}{R_m k_6} \\ 0 \\ \frac{-K_m k_2}{R_m k_6} \end{bmatrix} \quad (3.32)$$

$$A_{dv} = A_d - \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{K_m^2 k_1}{R_m k_6} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{K_m^2 k_2}{R_m k_6} & 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_1}{k_6} (B_r + \frac{K_m^2}{R_m}) & \frac{k_8 k_2}{k_6} & \frac{-k_2 B_p}{k_6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k_2}{k_6} (B_r + \frac{K_m^2}{R_m}) & \frac{k_3 k_8}{k_6} & \frac{-k_3 B_p}{k_6} \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

La representación en espacio de estados del sistema respecto de la entrada de voltaje se muestra a continuación, donde la salida no cambia.

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{k_1}{k_6} (B_r + \frac{K_m^2}{R_m}) & \frac{k_8 k_2}{k_6} & \frac{-k_2 B_p}{k_6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & \frac{k_2}{k_6} (B_r + \frac{K_m^2}{R_m}) & \frac{k_3 k_8}{k_6} & \frac{-k_3 B_p}{k_6} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{K_m k_1}{R_m k_6} \\ 0 \\ \frac{-K_m k_2}{R_m k_6} \end{bmatrix} V_m \quad (3.34)$$

A continuación se muestra el resultado obtenido al comparar este modelo linealizado, con respecto al modelo original.

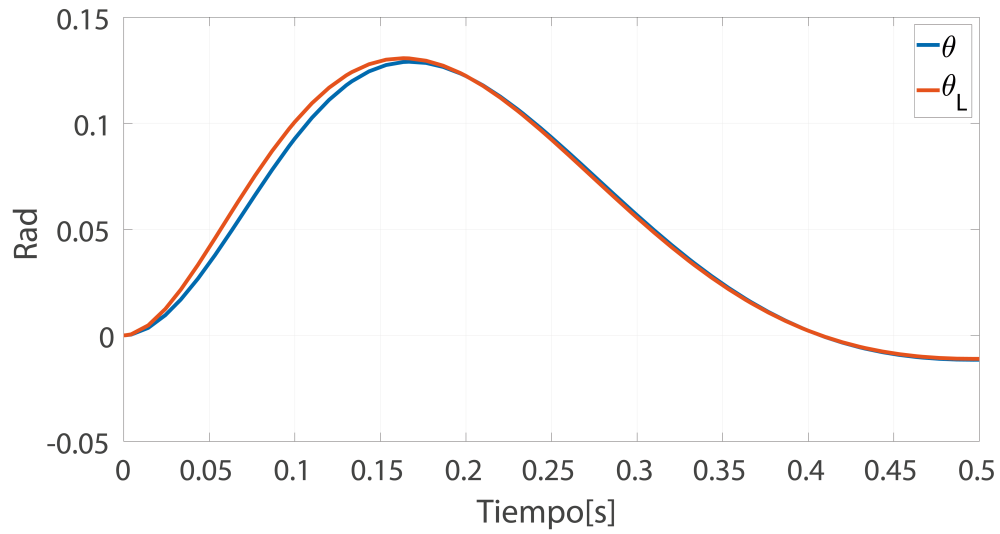


Figura 3.3: Gráfico del ángulo θ del modelo E-L (azul) y el modelo linealizado (naranja), para $x_0 = (0, 0, \frac{\pi}{180}, 0)$ y voltaje de entrada $V_m = 0$

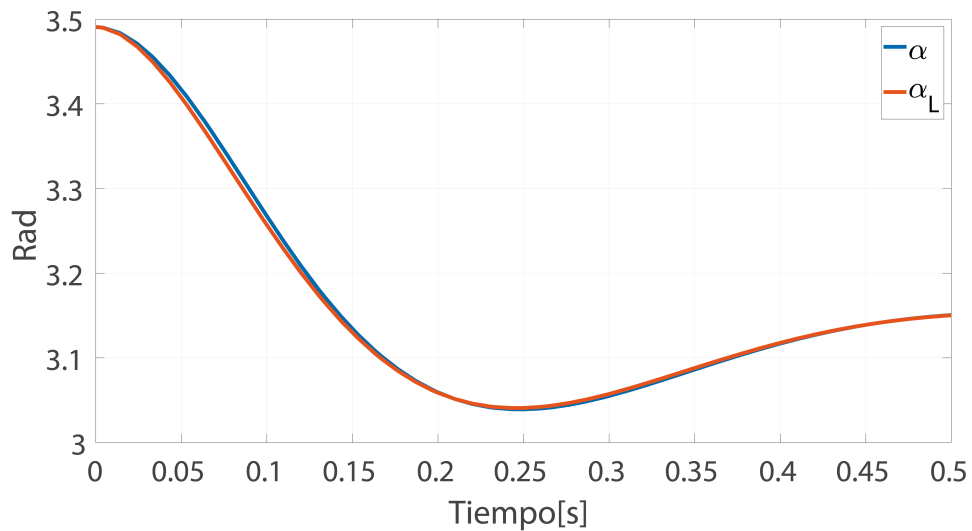


Figura 3.4: Gráfico del ángulo α del modelo E-L (azul) y el modelo linealizado (naranja), para $x_0 = (0, 0, \frac{\pi}{180}, 0)$ y voltaje de entrada $V_m = 0$

De las Figura 3.3 y 3.4 se puede observar que el sistema es estable en la posición del péndulo vertical inferior, lo cual concuerda con el comportamiento físico de un péndulo no invertido. Además se puede notar que el sistema linealizado se comporta de forma

similar al sistema original cuando se trata de pequeñas oscilaciones.

Ahora en presencia de un voltaje positivo de entrada se muestran los gráficos obtenidos.

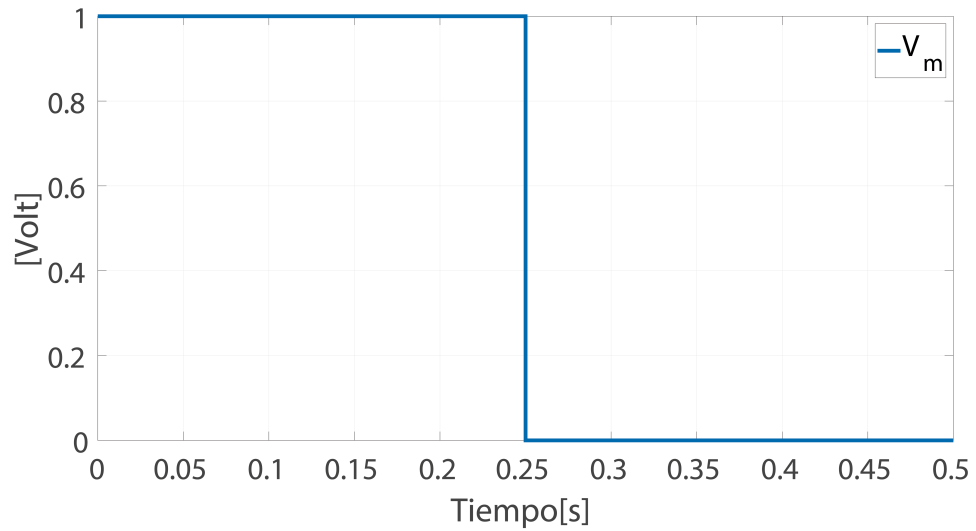


Figura 3.5: Gráfico del voltaje de entrada V_m

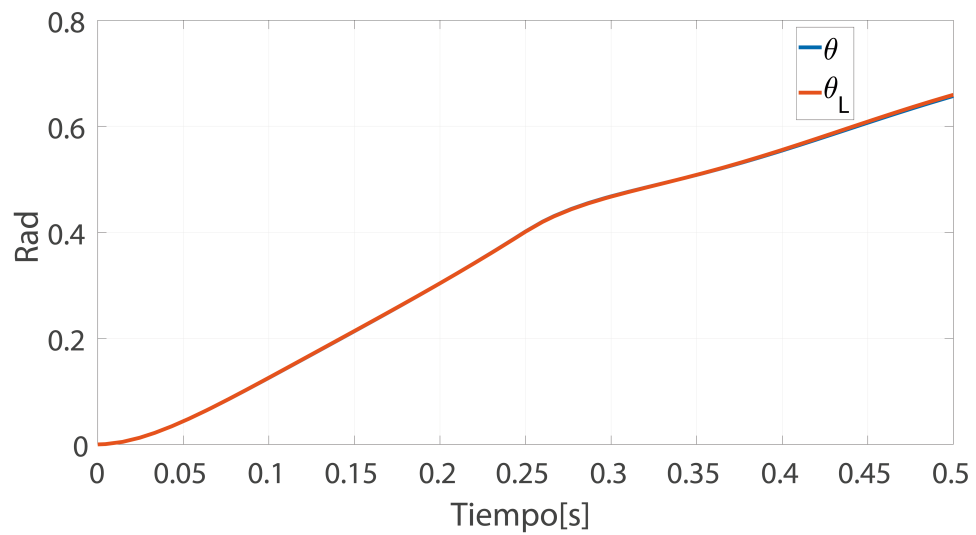


Figura 3.6: Gráfico del ángulo θ del modelo E-L (azul) y el modelo linealizado (naranja), para $x_0 = (0, 0, \frac{\pi}{180}, 0)$ y voltaje de entrada V_m Figura 3.5.

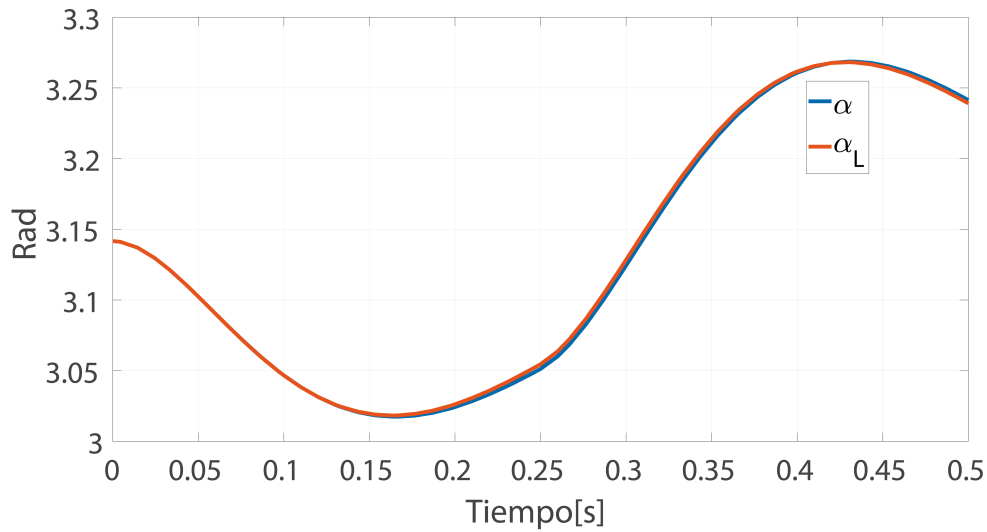


Figura 3.7: Gráfico del ángulo α del modelo E-L (azul) y el modelo linealizado (naranja), para $x_0 = (0, 0, \frac{\pi}{180}, 0)$ y voltaje de entrada V_m Figura 3.5.

De las Figuras 3.6 y 3.7, se puede apreciar que con una entrada de voltaje pequeña el sistema linealizado se comporta de manera casi idéntica al sistema original.

3.2. De Espacio de Estados a Función de Transferencia

Otra forma de ver los sistemas lineales obtenidos en la sección anterior, es verlos como funciones de transferencia, de esta forma se hace más fácil analizar las relaciones entre las entradas y las salidas en el dominio de la frecuencia.

Considerando un sistema en espacio de estados:

$$\dot{x} = Ax + Bu \quad (3.35) \quad y = Cx + Du \quad (3.36)$$

Entonces [9]:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C\Phi(s)B + D = C(sI - A)^{-1}B + D \quad (3.37)$$

Este resultado puede ser aplicado para los modelos de estado definidos en las seccio-

nes anteriores. Dichos espacios de estados comparten las matrices C y D. Además sus matrices A y B son muy similares (3.18 y 3.30), cambiando sólo los signos de algunas constantes. Entonces es posible resolverlo para ambos modelos de manera general:

$$A = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix} \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.38)$$

Se necesita desarrollar:

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = C(sI - A)^{-1}B$$

$$(sI - A) = \begin{bmatrix} s & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & 0 \\ 0 & 0 & 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s & -a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & s - a_{22} & -a_{23} & -a_{24} \\ 0 & 0 & s & -a_{34} \\ 0 & -a_{42} & -a_{43} & s - a_{44} \end{bmatrix}$$

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B = \begin{bmatrix} \frac{\Theta(s)}{T(s)} \\ \frac{\alpha(s)}{T(s)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{a_{12}b_2s^2 - s(a_{12}a_{44}b_2 + a_{12}a_{24}b_4) + (b_4a_{12}a_{23}a_{34} - b_2a_{12}a_{34}a_{43})}{s[s^3 - s^2(a_{44} + a_{22}) + s(-a_{24}a_{42} + a_{22}a_{44} - a_{34}a_{43}) + (a_{22}a_{34}a_{43} - a_{23}a_{34}a_{42})]} \\ \frac{a_{34}b_4s + (a_{34}a_{42}b_2 - a_{22}a_{34}b_4)}{[s^3 - s^2(a_{44} + a_{22}) + s(-a_{24}a_{42} + a_{22}a_{44} - a_{34}a_{43}) + (a_{22}a_{34}a_{43} - a_{23}a_{34}a_{42})]} \end{bmatrix} \quad (3.39)$$

La ecuación 3.39 contiene la función de transferencia de entrada (torque/voltaje) a ángulo del brazo (θ) y a ángulo del péndulo (α) respectivamente. Se puede apreciar que la función de transferencia de entrada a ángulo del brazo tiene denominador de cuarto orden, con un polo en $s = 0$. Este resultado se explica porque el ángulo de brazo no tiene influencia en la dinámica del sistema, por lo tanto, la se obtiene directamente de la integración de la velocidad angular $\dot{\theta}$. Por otro lado, la función de transferencia de entrada a ángulo del péndulo tiene un denominador de tercer orden sin integración. Esto se debe a la ausencia de influencia de θ en las ecuaciones dinámicas, lo que indica

que el sistema en realidad es de tercer orden.

Evaluando la ecuación 3.39 en los parámetros del modelo linealizado en $x_{d0} = (\theta_0, 0, \pi, 0)$, el cual corresponde al péndulo en PEE. Se obtiene lo siguiente:

$$H_d(s) = \left[\begin{array}{c} \frac{49.73s^2+186.8s+5672}{s(s^3+25.62s^2+325.5s+1940)} \\ \frac{-49.15s-1.088 \cdot 10^{-13}}{(s^3+25.62s^2+325.5s+1940)} \end{array} \right] \quad (3.40)$$

De la ecuación 3.41, se pueden obtener los polos del sistema los cuales son:

$s = 0$ (sólo para la salida θ), $s = -6.8260 + 10.7469i$, $s = -6.8260 - 10.7469i$ y $s = -11.9684$.

Estos polos concuerdan con el comportamiento del sistema en el punto de equilibrio $x_{d0} = (\theta_0, 0, \pi, 0)$. En donde se pueden observar: dos polos complejos conjugados, que reflejan la dinámica oscilatoria amortiguada del péndulo, y un polo real negativo, el cual refleja el amortiguamiento en el movimiento del brazo debido al roce. Mientras que para el ángulo θ el polo en $s = 0$, refleja que el ángulo es producto de la acumulación de la velocidad angular $\dot{\theta}$ a través del tiempo. Además se puede apreciar que la función de transferencia de entrada a ángulo del péndulo tiene signo negativo, lo que concuerda que con un torque positivo se obtiene un movimiento angular negativo (CW). Ahora evaluando la ecuación 3.39 en los parámetros del modelo linealizado en $x_{u0} = (\theta_0, 0, 0, 0)$, el cual corresponde al péndulo en PEI, se obtiene lo siguiente:

$$H_u(s) = \left[\begin{array}{c} \frac{49.73s^2+186.8s-5672}{s(s^3+25.62s^2-197.7s-1940)} \\ \frac{49.15s+1.124 \cdot 10^{-13}}{(s^3+25.62s^2-197.7s-1940)} \end{array} \right] \quad (3.41)$$

Desde la ecuación 3.40, se desprenden los polos del sistema los cuales son:

$s = 0$, $s = -30.0521$, $s = 10.5503$ y $s = -6.1186$.

Los polos encontrados concuerdan con el comportamiento del sistema en el punto de equilibrio $x_{u0} = (\theta_0, 0, 0, 0)$. En que se pueden observar: dos polos reales negativos, que reflejan la amortiguación del sistema brazo-péndulo producto del roce, y un polo real positivo asociado a la inestabilidad del ángulo del péndulo en esa posición. Al igual

que en el caso anterior, el polo en cero es porque el ángulo θ se obtiene al integrar la velocidad angular $\dot{\theta}$. Se puede notar además que la función de transferencia de entrada a ángulo del péndulo tiene signo positivo, lo que concuerda con que un torque positivo genera un incremento de ángulo positivo (CCW) en el péndulo.

En [4] se consideran distintos métodos de control para el PIR. Uno de ellos utiliza las funciones de transferencia en tiempo continuo en (3.41) para realizar control PID de los ángulos θ y α , logrando estabilizar el ángulo α .

Capítulo 4

Discretización del Modelo Linealizado

4.1. Elección del Periodo de Muestreo

Antes de comenzar a desarrollar los modelos, se necesita tener un criterio de elección del tiempo de muestreo. El teorema de Nyquist-Shanon indica que la mínima frecuencia de muestreo para poder reconstruir perfectamente una señal es muestrear al doble de la frecuencia más alta de la señal. Pero para un sistema dinámico donde se desconocen todas las frecuencias existentes en un sistema, se necesita un tiempo de muestreo adecuado para obtener un modelo que capture las frecuencias fundamentales del sistema. El criterio a utilizar será usar una frecuencia de muestreo diez veces más alta que la frecuencia natural más alta del modelo del sistema [10]. Para este sistema se pueden observar los polos más rápidos de los sistemas linealizados, los cuales corresponden a las frecuencias naturales del sistema. Así al observar las funciones de transferencia (3.41) y (3.40), para ambos sistemas el polo más rápido está en torno a 3 [Hz], por lo tanto, se utilizará una frecuencia de muestreo de 30[Hz]. Esta tasa de muestreo será llamada estándar, así las frecuencias inferiores y superiores a esta, serán llamadas baja tasa de muestreo y alta tasa de muestreo respectivamente.

4.2. Método de Discretización Exacta

Para modelos LTI es posible obtener el modelo exacto en espacio de estados de tiempo discreto, utilizando directamente las matrices del espacio de estados en tiempo continuo (3.35) y (3.36). Si se utiliza Zero Order Hold para generar la entrada $u(t)$ (la cual mantiene la señal entre los instantes de muestreo), se obtiene:

$$x[kT_s + T_s] = A_{de}x[kT_s] + B_{de}u_k[kT_s] \quad k = 0, 1, 2, \dots \quad (4.1)$$

$$y[kT_s] = Cx[kT_s] + Du_k[kT_s] \quad (4.2)$$

donde las matrices de espacio de estado discreto se calculan como:

$$A_{de} = e^{AT_s}, \quad B_{de} = \int_0^{T_s} e^{A\tau} B \cdot d\tau \quad (4.3)$$

Las matrices A,B,C y D son las matrices del modelo espacio de estado en tiempo continuo (3.35) y (3.36), mientras que T_s es el tiempo de muestreo. Este modelo puede ser obtenido directamente utilizando el comando `c2d()` de Matlab. En [1] pag. [24- 29] se desarrollan en profundidad estas ecuaciones y su posterior demostración, además de incluir otros tipos de dispositivos Hold.

A continuación se muestran los gráficos obtenidos en los modelos discretos, comparados con el modelo linealizado y real de la planta.

4.2.1. Modelo Discreto Exacto (PEI)

Para crear este modelo se utilizan las matrices A_{uv} , B_{uv} , C_u y D_u , de la sección 3.1.1.1, para ser reemplazadas en (4.1) y (4.2), así se obtienen las matrices A_{de} y B_{de} del modelo discretizado exacto. Este es el modelo linealizado del péndulo se encuentra

en el PEI. Para comprobar su comportamiento se utiliza una condición inicial con un ángulo del péndulo desviado $\frac{\pi}{180}$ [rad] (1°) de la vertical y sin acción de torque de entrada en el brazo. La frecuencia de muestreo f_s es de 30 [Hz], que hemos denominado estándar.

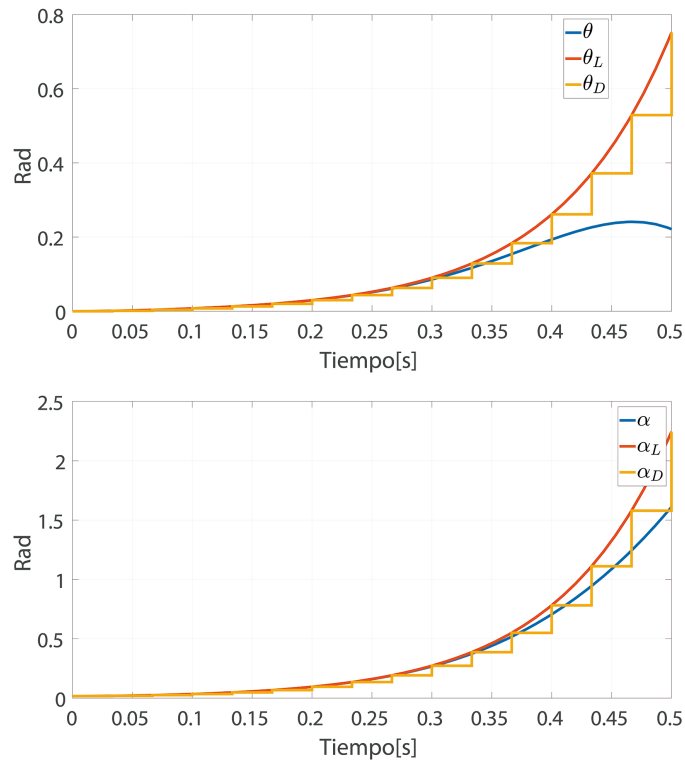


Figura 4.1: Gráfico del ángulo θ y α del modelo E-L, linealizado y discreto exacto. Condiciones iniciales $x_{u0} = (0, 0, \frac{\pi}{180}, 0)$, voltaje de entrada $V_m = 0$ y periodo de muestreo $T_s = \frac{1}{30}$ [s].

Observando la Figura 4.1 se puede confirmar que el modelo discreto (4.1)-(4.3) obtiene de manera exacta la salida modelo linealizado continuo en los instantes de muestreo. Se puede concluir entonces que entre mejor sea la aproximación del modelo linealizado, mejor será su modelo discretizado exacto respecto del modelo E-L.

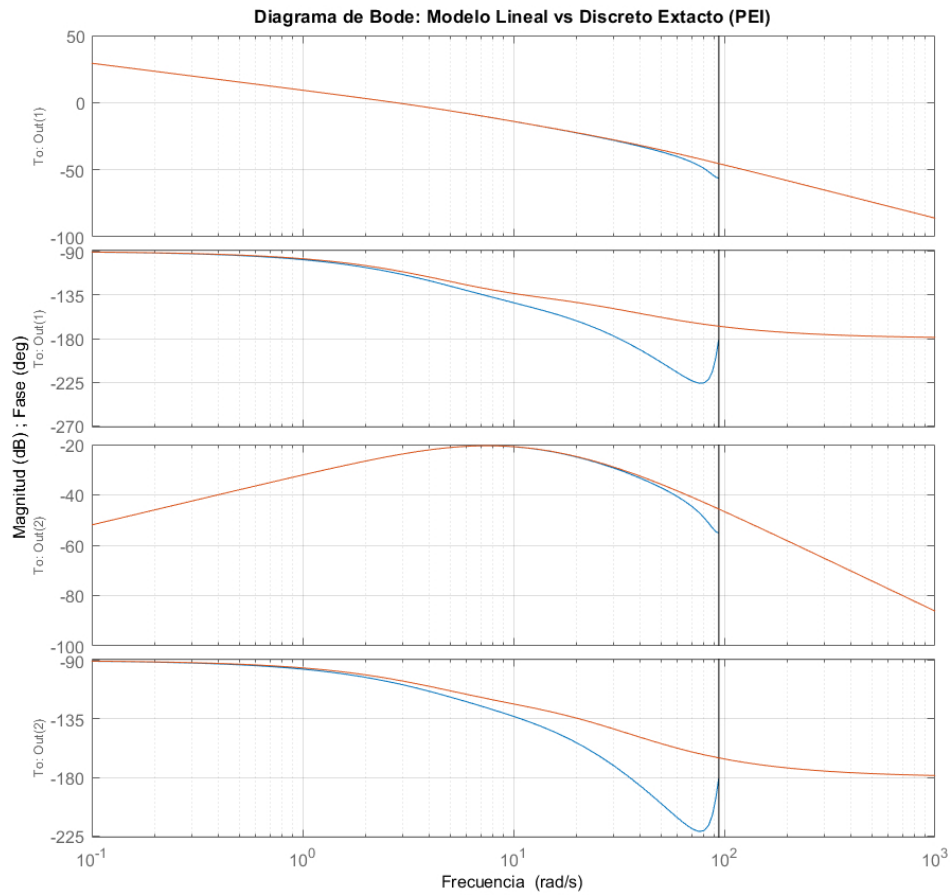


Figura 4.2: Diagrama de Bode magnitud y fase respecto del ángulo θ y α del modelo linealizado y discreto exacto en el PEI.

4.2.2. Modelo Discreto Exacto (PEE)

Para crear este modelo se utilizan las matrices A_{dv} , B_{dv} , C_d y D_d , de la sección 3.1.2.1, para ser reemplazadas en (4.1) y (4.2), y así obtener las matrices A_{de} y B_{de} del modelo discretizado exacto. Este es el modelo linealizado del péndulo en el PEE. Para comprobar su comportamiento se utiliza una condición inicial con un ángulo del péndulo desviado $\frac{20\pi}{180}$ (20°) de la vertical invertida (π) y sin acción de torque. La frecuencia de muestreo f_s , al igual que el caso anterior, es de 30 [Hz] (la frecuencia de

muestreo estándar).

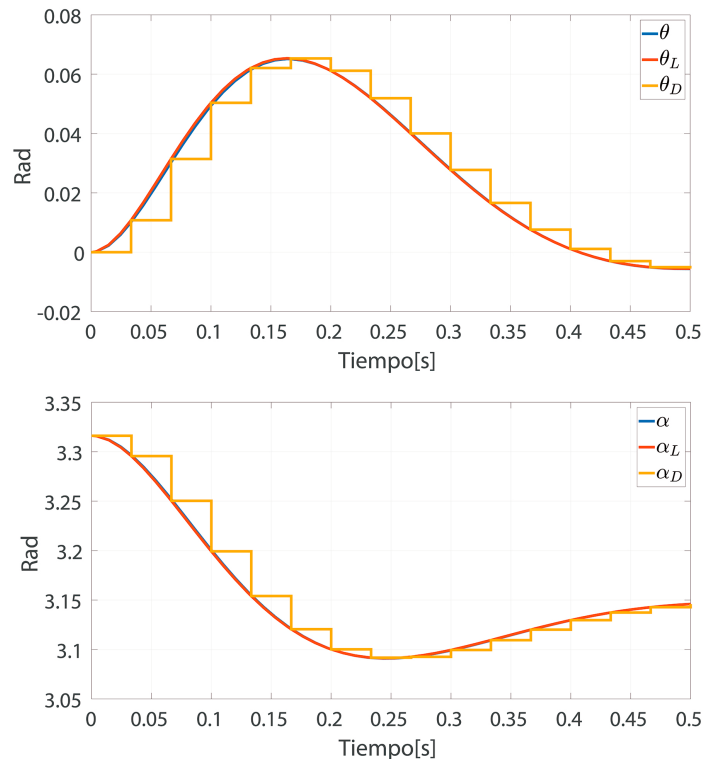


Figura 4.3: Gráfico del ángulo θ y α del modelo E-L, linealizado y discreto exacto. Condiciones iniciales $x_{d0} = (0, 0, \frac{20\pi}{180}, 0)$, voltaje de entrada $V_m = 0$ y periodo de muestreo $T_s = \frac{1}{30}$ [s].

Al igual que en el caso anterior, las Figura 4.3 muestra que el modelo discreto sigue de manera exacta al modelo linealizado. Para el péndulo en el PEE, el comportamiento del modelo linealizado y del modelo Euler-Lagrange es bastante similar en pequeñas oscilaciones, es por esto, que el modelo discreto tendría un comportamiento similar también.

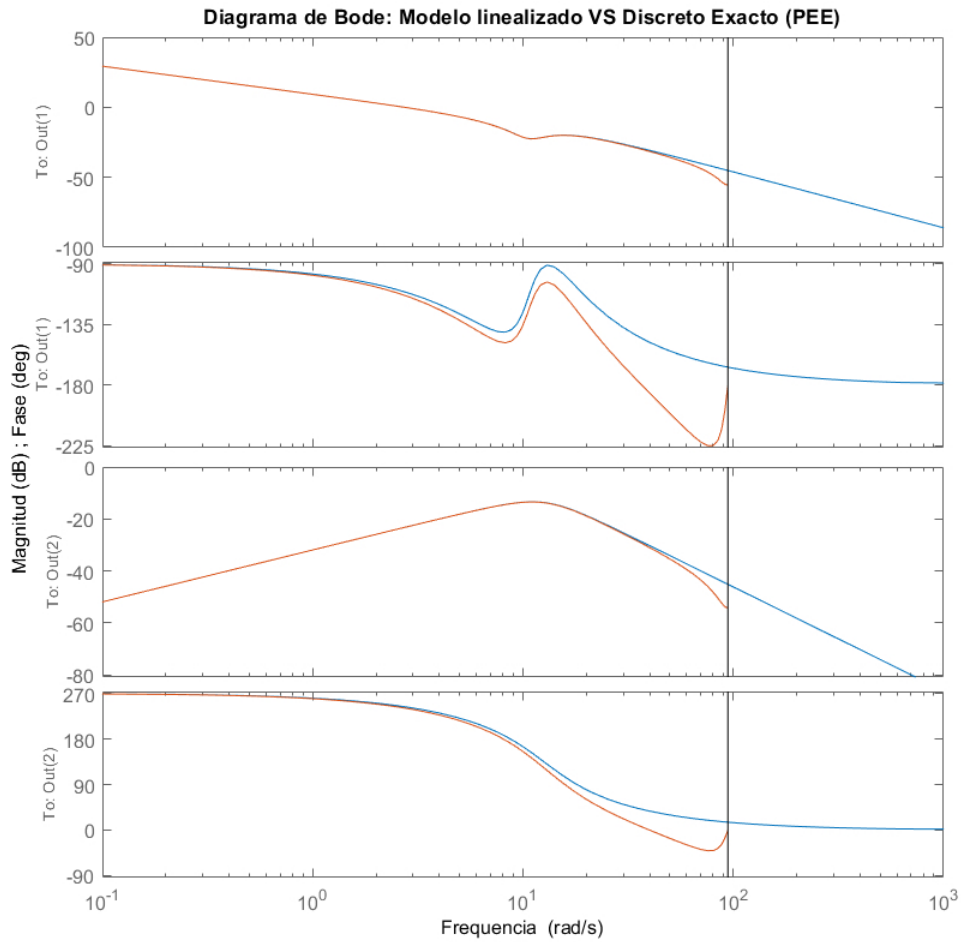


Figura 4.4: Diagrama de Bode magnitud y fase respecto del ángulo θ y α del modelo linealizado y discreto exacto en el PEE.

4.3. Método Euler Hacia Atrás

Teniendo el modelo en espacio de estados, es posible utilizar transformada de Laplace y luego utilizar la aproximación de Euler Hacia Atrás para encontrar un modelo discreto aproximado del sistema. Entonces:

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (4.4)$$

$$Y(s) = CX(s) \quad (4.5)$$

La aproximación de Euler Hacia Atrás:

$$s \approx \frac{z-1}{zT_s} \quad (4.6)$$

Reemplazando (4.6) en (4.4) y (4.5), multiplicando por zT_s y agrupando términos:

$$(I - AT_s)zX(z) = X(z) + zT_sBU(z)$$

Agrupando los términos con z .

$$zX(z) - (I - AT_s)^{-1}zT_sBU(z) = (I - AT_s)^{-1}X(z) \quad (4.7)$$

Realizando un cambio de z y dejando todo en función de la nueva variable $\hat{X}(z)$:

$$z\hat{X}(z) = zX(z) - (I - AT_s)^{-1}zT_sBU(z)$$

$$X(z) = \hat{X}(z) + (I - AT_s)^{-1}T_sBU(z)$$

Reemplazando el cambio de z en (4.7) y (4.5):

$$z\hat{X}(z) = (I - AT_s)^{-1}\hat{X}(z) + (I - AT_s)^{-2}T_sBU(z)$$

$$Y(z) = C\hat{X}(z) + C(I - AT_s)^{-1}T_sBU(z)$$

Utilizando transformada Z inversa:

$$\hat{x}[kT_s + T_s] = (I - AT_s)^{-1}\hat{x}[kT_s] + (I - AT_s)^{-2}T_sBu_k[kT_s] \quad (4.8)$$

$$y[kT_s] = C\hat{x}[kT_s] + C(I - AT_s)^{-1}T_sBu_k[kT_s] \quad (4.9)$$

Las ecuaciones anteriores son equivalentes a:

$$\hat{x}[kT_s + T_s] = A_{eb}\hat{x}[k] + B_{eb}u_k[kT_s]$$

$$y[kT_s] = C\hat{x}[kT_s] + D_{eb}u_k[kT_s]$$

Donde I es la matriz identidad (4x4), A_{eb} , B_{eb} , C y D_{eb} son las matrices del nuevo modelo espacio de estados discreto aproximado.

4.3.1. Modelo Discreto Euler Hacia Atrás (PEI)

Reemplazando A_{uv} , B_{uv} , C_u y D_u de la sección 3.1.1.1 en (4.8) y (4.9), se obtienen las matrices A_{eb} , B_{eb} , y D_{eb} del método Euler hacia atrás. En este modelo se utilizan las mismas condiciones iniciales que para el modelo discreto exacto el PEI. La frecuencia de muestreo es de 30 [Hz] (frecuencia de muestreo estándar).

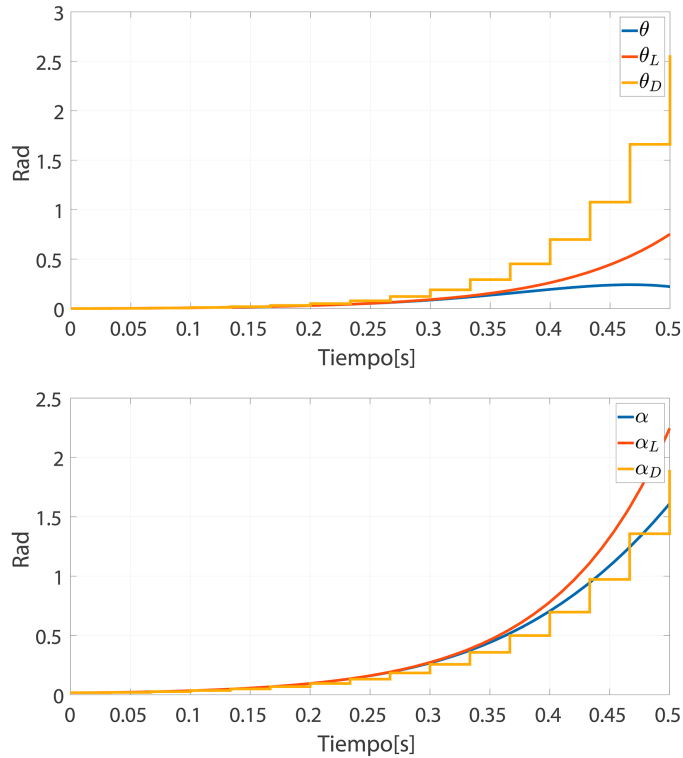


Figura 4.5: Gráfico del ángulo θ y α del modelo E-L, linealizado y Euler hacia atrás. Condiciones iniciales $x_{u0} = (0, 0, \frac{\pi}{180}, 0)$, voltaje de entrada $V_m = 0$ y periodo de muestreo $T_s = \frac{1}{30}$ [s].

La Figura 4.5 y muestra que la aproximación Euler Hacia Atrás no es muy precisa, sobrestimando la posición angular del brazo con respecto del modelo linealizado. Mientras que para el ángulo del péndulo hay una subestimación respecto del modelo linealizado. La dinámica inestable del sistema en ese punto se conserva a grandes rasgos.

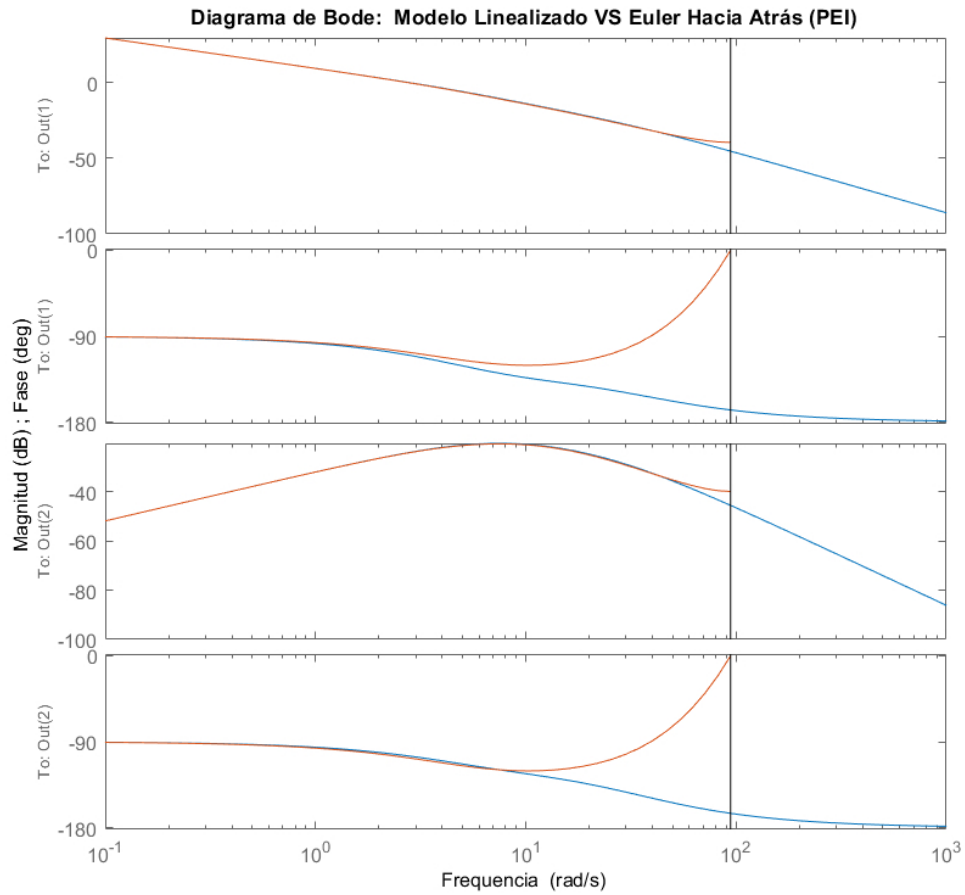


Figura 4.6: Diagrama de Bode magnitud y fase respecto del ángulo θ y α del modelo linealizado y Euler Hacia Atrás en el PEI.

4.3.2. Modelo Discreto Euler Hacia Atrás (PEE)

Reemplazando A_{dv} , B_{dv} , C_d y D_d de la sección 3.1.2.1 en (4.8) y (4.9), se obtienen las matrices A_{eb} , B_{eb} , y D_{eb} del método Euler hacia atrás. En este modelo se utilizan las mismas condiciones iniciales que para el modelo exacto el PEE. La frecuencia de muestreo es 30 [Hz] (frecuencia de muestreo estándar).

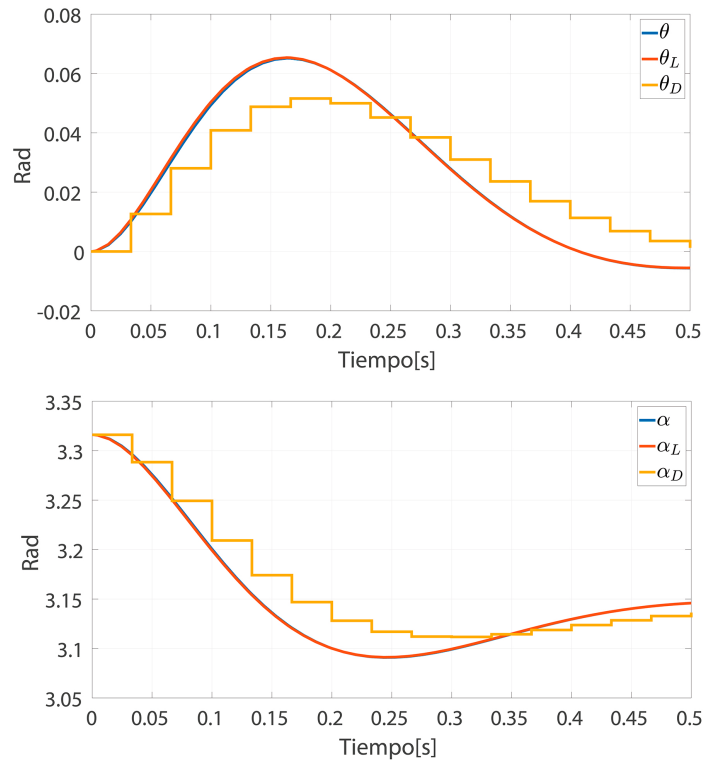


Figura 4.7: Gráfico del ángulo θ del modelo E-L, linealizado y Euler hacia atrás. Condiciones iniciales $x_{d0} = (0, 0, \frac{20\pi}{180}, 0)$, voltaje de entrada $V_m = 0$ y periodo de muestreo $T_s = \frac{1}{30}$ [s].

Observando la Figura 4.7 se puede apreciar que el modelo discreto describe la dinámica del sistema, pero con un notable error de aproximación. La amplitud y fase del modelo discretizado aproximado difieren ligeramente del modelo linealizado y E-L.

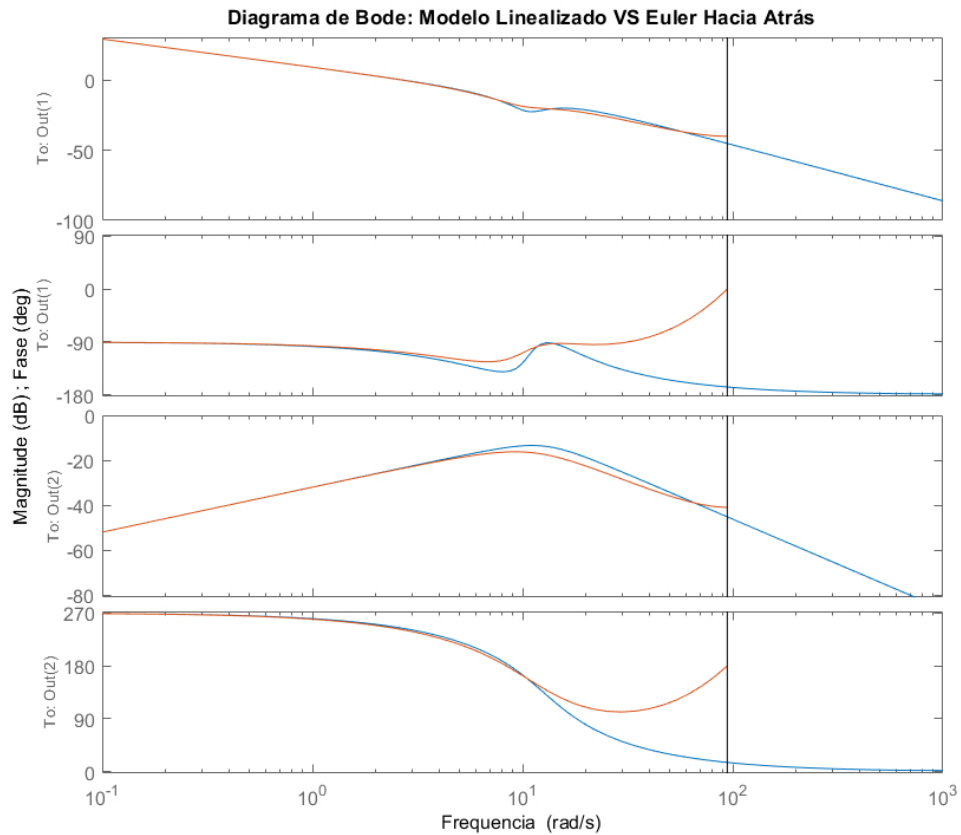


Figura 4.8: Diagrama de Bode magnitud y fase respecto del ángulo θ y α del modelo linealizado y Euler Hacia Atrás en el PEE.

4.4. Método Euler Hacia Adelante

Al igual que el modelo de Euler hacia atrás, se comienza con la transformada de Laplace de un espacio de estados cualquiera, para luego utilizar la aproximación de Euler, en este caso hacia adelante. De esta forma se pasa de un espacio continuo a uno discreto con tiempo de muestreo T_s .

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (4.10)$$

$$Y(s) = CX(s) \quad (4.11)$$

La aproximación de Euler hacia adelante:

$$s \approx \frac{z-1}{T_s} \quad (4.12)$$

Reemplazando (4.12) en 4.10 y 4.11:

$$Y(z) = CX(z) \quad (4.13)$$

$$\frac{z-1}{T_s}X(z) = AX(z) + BU(z)$$

Despejando los términos con z:

$$zX(z) = (I + AT_s)X(z) + T_sBU(z) \quad (4.14)$$

Aplicando transformada Z inversa en (4.14) y (4.13):

$$x[kT_s + T_s] = (I + AT_s)x[kT_s] + T_sBu_k[kT_s] \quad (4.15)$$

$$y[kT_s] = Cx[kT_s] \quad (4.16)$$

El espacio de estados es equivalente a:

$$x[kT_s + T_s] = A_{ef}x[kT_s] + B_{ef}u_k[kT_s]$$

$$y[kT_s] = Cx[kT_s]$$

Donde A_{ef} , B_{ef} y C son las matrices del nuevo modelo discreto aproximado.

4.4.1. Modelo Discreto Euler Hacia Adelante (PEI)

Reemplazando A_{uv} , B_{uv} , C_u y D_u de la sección 3.1.1.1 en (4.15) y (4.16), se obtienen las matrices A_{ef} y B_{ef} del método Euler hacia adelante. Para este modelo se utilizan las mismas condiciones iniciales que para los modelos discretos PEI anteriores. La frecuencia de muestreo es 30 [Hz].

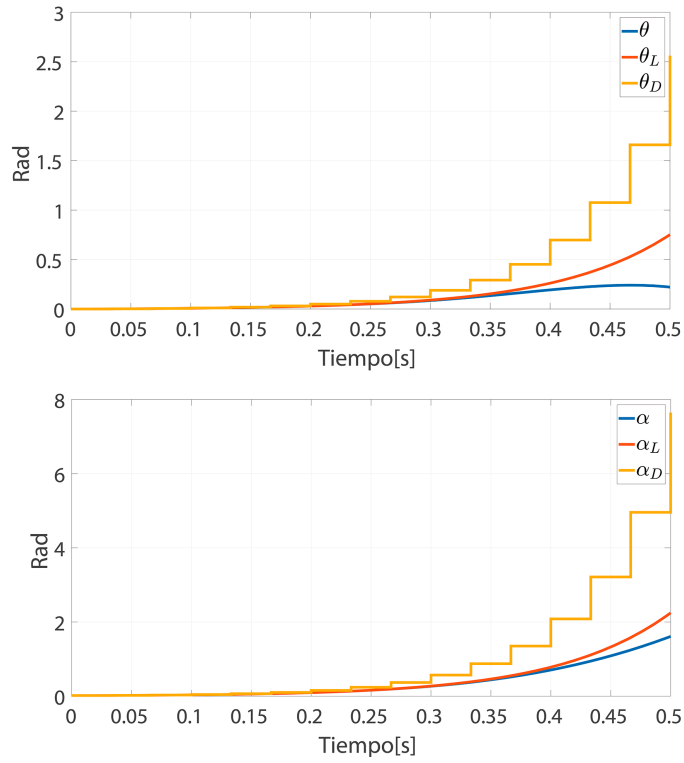


Figura 4.9: Gráfico del ángulo θ del modelo E-L, linealizado y Euler hacia adelante. Condiciones iniciales $x_{u0} = (0, 0, \frac{\pi}{180}, 0)$, voltaje de entrada $V_m = 0$ y periodo de muestreo $T_s = \frac{1}{30}$ [s].

De las Figura 4.9 se observa que mantienen la dinámica inestable del PIR en PEI, pero con un notorio error de aproximación, sobrestimando la posición angular de θ y α .

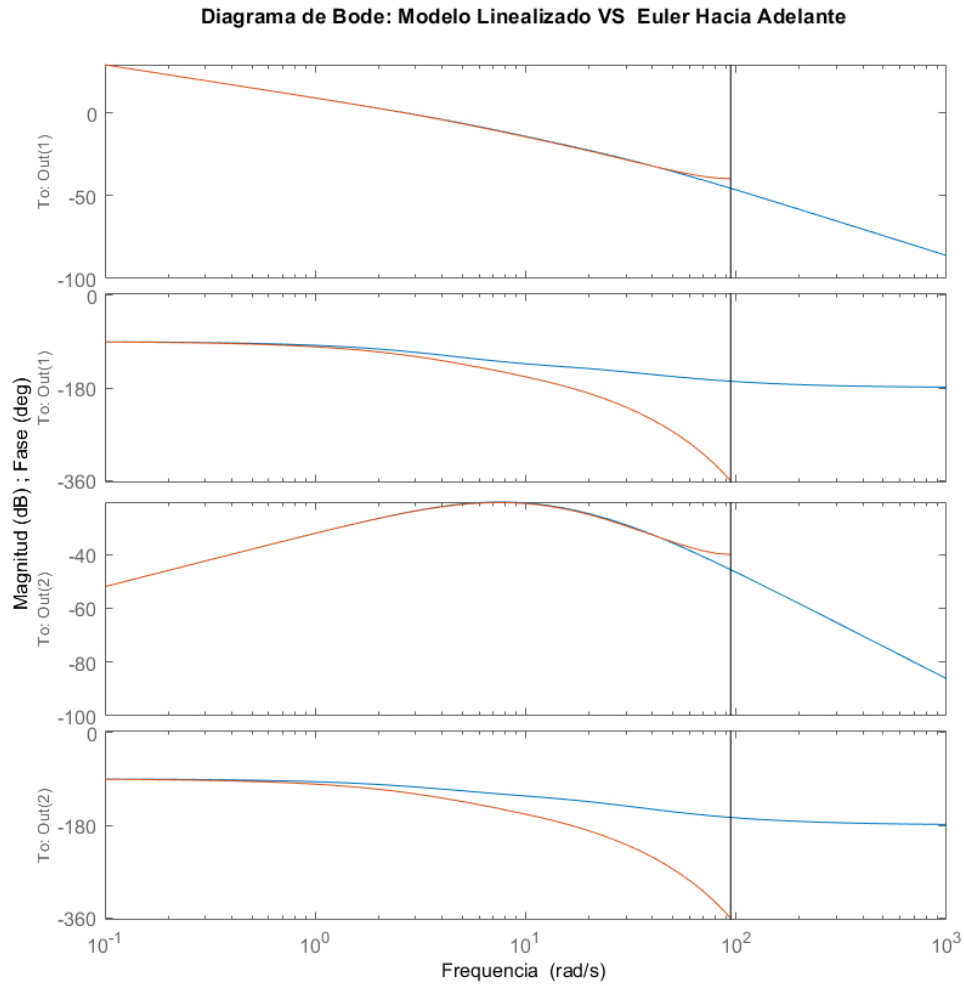


Figura 4.10: Diagrama de Bode magnitud y fase respecto del ángulo θ y α del modelo linealizado y Euler Hacia Adelante en el PEI.

4.4.2. Modelo Discreto Euler Hacia Adelante (PEE)

Reemplazando A_{dv} , B_{dv} , C_d y D_d de la sección 3.1.2.1 en (4.15) y (4.16), se obtienen las matrices A_{ef} y B_{ef} del método Euler hacia adelante. En este modelo se utilizan las mismas condiciones iniciales que para los modelos discretos PEE anteriores. La frecuencia de muestreo es 30 [Hz].

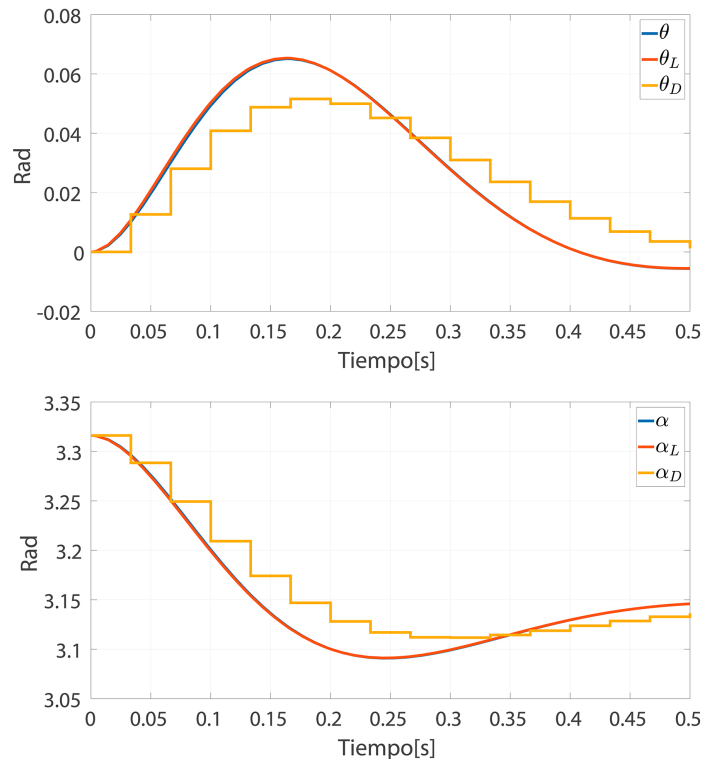


Figura 4.11: Gráfico del ángulo θ del modelo E-L, linealizado y Euler hacia adelante. Condiciones iniciales $x_{d0} = (0, 0, \frac{20\pi}{180}, 0)$, voltaje de entrada $V_m = 0$ y periodo de muestreo $T_s = \frac{1}{30}$ [s].

Observando la Figura 4.11 y se puede apreciar que tienen un error tanto en amplitud como en fase. Pero la dinámica del sistema está bien representada a grandes rasgos.

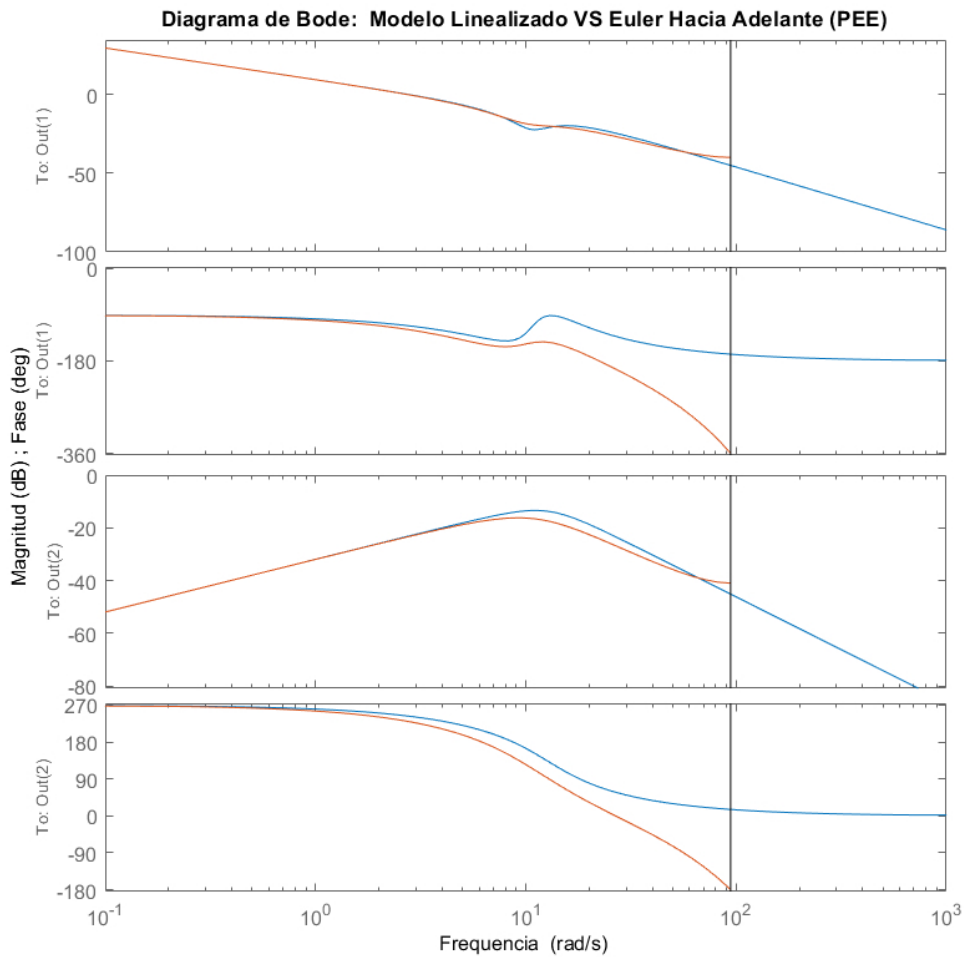


Figura 4.12: Diagrama de Bode magnitud y fase respecto del ángulo θ y α del modelo linealizado y Euler Hacia Adelante en el PEE.

4.5. Método Tustin (Transformada Bilineal)

Al igual que los métodos que utilizan la aproximación de Euler, se comienza con la transformada de Laplace de un espacio de estados cualquiera, para luego utilizar la aproximación de Tustin con el objetivo de llevar al espacio de tiempo continuo a tiempo discreto con un tiempo de muestreo T_s .

$$sX(s) = AX(s) + BU(s) \quad (4.17) \quad Y(s) = CX(s) \quad (4.18)$$

La aproximación de Tustin:

$$s \approx \frac{2(z-1)}{(z+1)T_s} \quad (4.19)$$

Reemplazando (4.19) en (4.17) y (4.18):

$$Y(z) = CX(z) \quad (4.20)$$

$$\frac{2(z-1)}{(z+1)T_s}X(z) = AX(z) + BU(z)$$

Despejando los términos con z:

$$zX(z) - z\left(I - \frac{T_s}{2}A\right)^{-1}\frac{T_s}{2}BU(z) = \left(I - \frac{T_s}{2}A\right)^{-1}\left(I + \frac{T_s}{2}A\right)X(z) + \left(I - \frac{T_s}{2}A\right)^{-1}BU(z) \quad (4.21)$$

Realizando el siguiente cambio de variable:

$$z\hat{X}(z) = zX(z) - \left(I - \frac{T_s}{2}A\right)^{-1}\frac{T_s}{2}BU(z)$$

$$X(z) = \hat{X}(z) + \left(I - \frac{T_s}{2}A\right)^{-1}\frac{T_s}{2}BU(z)$$

Reemplazando el cambio de variable en (4.21) y (4.20), para luego aplicar la transformada Z inversa a las ecuaciones:

$$\hat{x}[kT_s + T_s] = \left(I - \frac{T_s}{2}A\right)^{-1}\left(I + \frac{T_s}{2}A\right)\hat{x}[kT_s] + \left(\left(I - \frac{T_s}{2}A\right)^{-1}\frac{T_s}{2}B\right)\left(\left(I - \frac{T_s}{2}A\right)^{-1}\right)\left(\left(I + \frac{T_s}{2}A\right) + I\right)u_k[kT_s] \quad (4.22)$$

$$y[kT_s] = C\hat{x}[k] + C\left(I - \frac{T_s}{2}A\right)^{-1}\frac{T_s}{2}Bu_k[kT_s] \quad (4.23)$$

Las ecuaciones anteriores son equivalentes a:

$$\hat{x}[kT_s + T_s] = A_{tu}\hat{x}[kT_s] + B_{tu}u_k[kT_s]$$

$$y[kT_s] = C\hat{x}[kT_s] + D_{tu}u_k[kT_s]$$

Finalmente A_{tu} , B_{tu} , D_{tu} y C son las nuevas matrices del nuevo espacio de estados discreto aproximado.

4.5.1. Modelo Discreto Tustin (PEI)

Reemplazando A_{uv} , B_{uv} , C_u y D_u de la sección 3.1.1.1 en (4.22) y (4.23), se obtienen las matrices A_{tu} , B_{tu} y D_{tu} del método Tustin. Se utilizan las mismas condiciones que para los modelos PEI anteriores. La frecuencia de muestreo es de 30 [Hz].

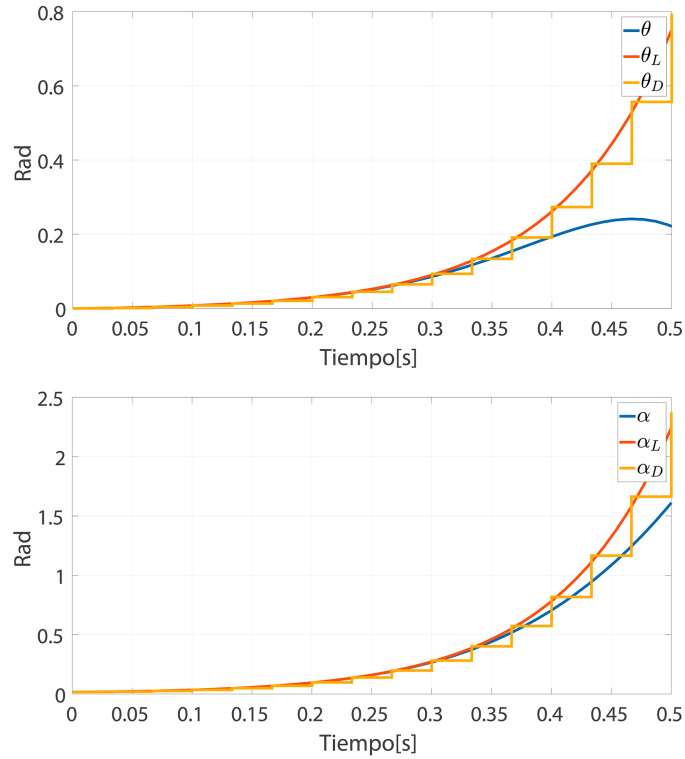


Figura 4.13: Gráfico del ángulo θ del modelo E-L, linealizado y Euler hacia adelante. Condiciones iniciales $x_{u0} = (0, 0, \frac{\pi}{180}, 0)$, voltaje de entrada $V_m = 0$ y periodo de muestreo $T_s = \frac{1}{30}$ [s].

De la Figura 4.13 se puede observar que el modelo discretizado sigue de buena manera al modelo linealizado, presentando un error relativamente bajo.

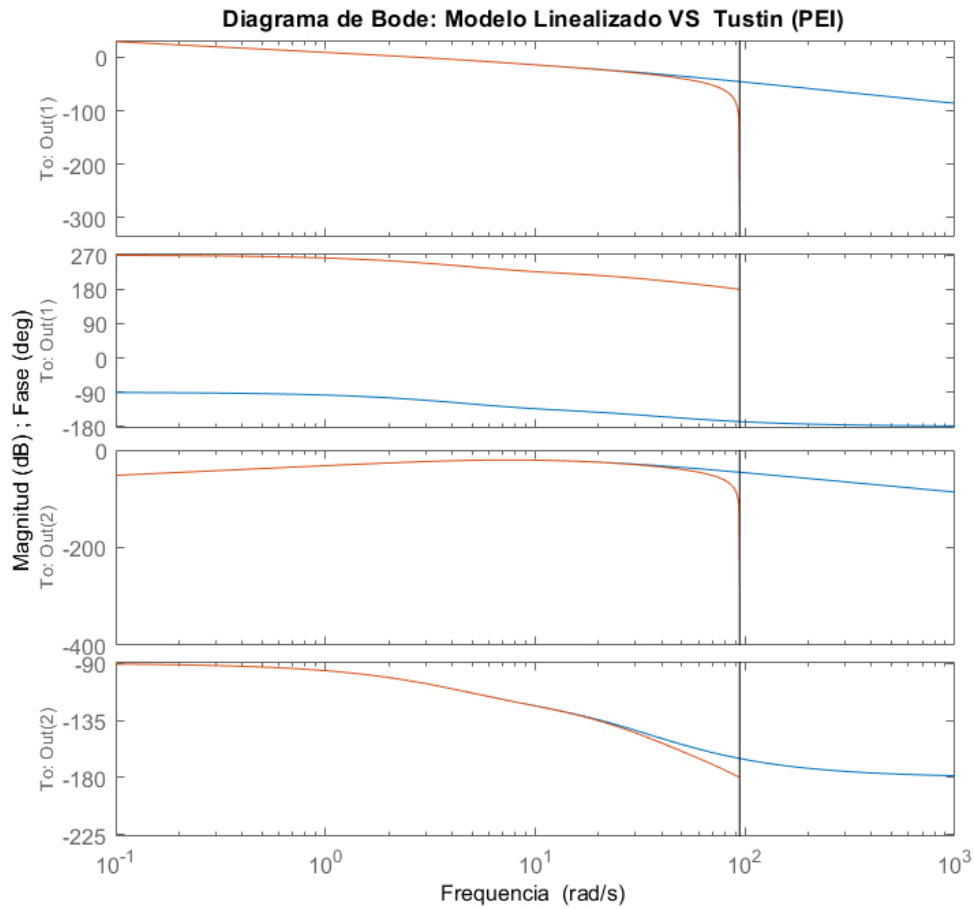


Figura 4.14: Diagrama de Bode magnitud y fase respecto del ángulo θ y α del modelo linealizado y Tustin en el PEI.

4.5.2. Modelo Discreto Tustin (PEE)

Reemplazando A_{dv} , B_{dv} , C_d y D_d de la sección 3.1.2.1 en (4.22) y (4.23), se obtienen las matrices A_{tu} , B_{tu} y D_{tu} del método Tustin. Se utilizan las mismas condiciones que para los modelos PEE anteriores. La frecuencia de muestreo es de 30 [Hz].

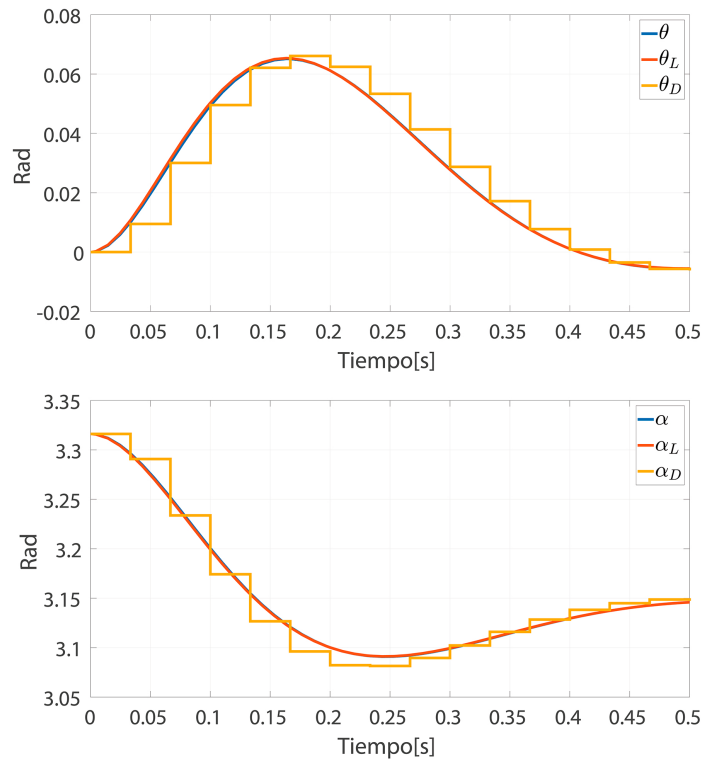


Figura 4.15: Gráfico del ángulo θ del modelo E-L, linealizado y Euler hacia adelante. Condiciones iniciales $x_{d0} = (0, 0, \frac{20\pi}{180}, 0)$, voltaje de entrada $V_m = 0$ y periodo de muestreo $T_s = \frac{1}{30}$ [s].

De las Figura 4.15 se puede observar que el modelo discretizado sigue de manera bastante precisa al modelo linealizado y E-L, presentando un error relativamente bajo en comparación a la aproximación de Euler.

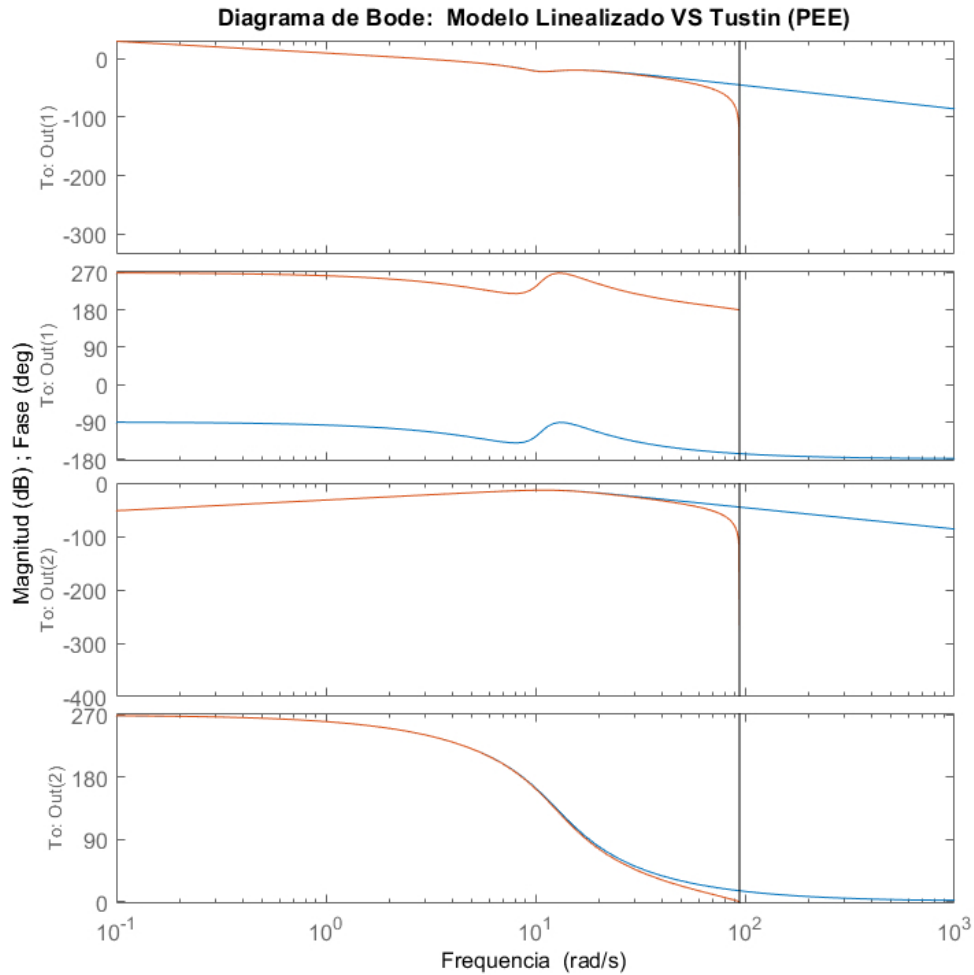


Figura 4.16: Diagrama de Bode magnitud y fase respecto del ángulo θ y α del modelo linealizado y Tustin en el PEE.

4.6. Método Serie de Taylor Truncada

Este método consiste realizar una expansión de los estados en series de Taylor hasta encontrarse por primera vez con términos que incluyan la entrada del sistema. Esto genera una expansión de los estados cuyo orden dependerá del grado de influencia de la entrada en cada uno de ellos. En [1] pag. [94-97] se realiza una expansión exhaustiva

del método para sistemas lineales determinísticos.

Comenzando de las s de estado del modelo linealizado del PIR:

$$\begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \\ \dot{x}_3 \\ \dot{x}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & a_{34} \\ 0 & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ b_2 \\ 0 \\ b_4 \end{bmatrix} u \quad (4.24)$$

Realizando la expansión en series de Taylor del primer estado:

$$x_1[kT_s + T_s] = x_1[kT_s] + T_s(\dot{x}_1[kT_s]) + \frac{T_s^2}{2}\ddot{x}_1[kT_s] \quad (4.25)$$

De (4.24) se extrae que $\dot{x}_1[kT_s] = a_{12}x_2[kT_s]$ y entonces $\ddot{x}_1[kT_s] = a_{12}\dot{x}_2[kT_s]$. Reemplazando estas ecuaciones en (4.25)

$$x_1[kT_s + T_s] = x_1[kT_s] + a_{12}T_sx_2[kT_s] + a_{12}\frac{T_s^2}{2}\dot{x}_2[kT_s] \quad (4.26)$$

De (4.24) se puede obtener $\dot{x}_2[kT_s]$:

$$\dot{x}_2[kT_s] = a_{22}x_2[kT_s] + a_{23}x_3[kT_s] + a_{24}x_4[kT_s] + b_2u_k[kT_s] \quad (4.27)$$

Así reemplazando (4.27) en (4.26):

$$x_1[kT_s + T_s] = x_1[kT_s] + a_{12}T_sx_2[kT_s] + a_{12}\frac{T_s^2}{2}(a_{22}x_2[kT_s] + a_{23}x_3[kT_s]) + a_{24}x_4[kT_s] + b_2u_k[kT_s] \quad (4.28)$$

Ahora expandiendo el segundo estado:

$$x_2[kT_s + T_s] = a_{22}x_2[kT_s] + T_s(\dot{x}_2[kT_s]) \quad (4.29)$$

Reemplazando (4.27) en (4.29)

$$x_2[kT_s + T_s] = x_2[kT_s] + T_s(a_{22}x_2[kT_s] + a_{23}x_3[kT_s]) + a_{24}x_4[kT_s] + b_2u_k[kT_s] \quad (4.30)$$

Expandiendo el tercer estado:

$$x_3[kT_s + T_s] = x_3[kT_s] + T_s(\dot{x}_3[kT_s]) + \frac{T_s^2}{2}\ddot{x}_3[kT_s] \quad (4.31)$$

De (4.24) se desprende que $\dot{x}_3[kT_s] = a_{34}x_4[kT_s]$ y entonces $\ddot{x}_3[kT_s] = a_{34}\dot{x}_4[kT_s]$.
Reemplazando en (4.31):

$$x_3[kT_s + T_s] = x_3[kT_s] + T_s x_4[kT_s] + \frac{T_s^2}{2} \dot{x}_4[kT_s] \quad (4.32)$$

$\dot{x}_4[kT_s]$ se puede obtener de (4.24):

$$\dot{x}_4[kT_s] = a_{42}x_2[kT_s] + a_{43}x_3[kT_s] + a_{44}x_4[kT_s] + b_4u_k[kT_s] \quad (4.33)$$

Así reemplazado (4.33) en (4.32):

$$x_3[kT_s + T_s] = x_3[kT_s] + a_{34}T_s x_4[kT_s] + a_{34} \frac{T_s^2}{2} (a_{42}x_2[kT_s] + a_{43}x_3[kT_s] + a_{44}x_4[kT_s] + b_4u_k[kT_s]) \quad (4.34)$$

Ahora expandiendo el cuarto estado:

$$x_4[kT_s + T_s] = x_4[kT_s] + T_s(\dot{x}_4[kT_s]) \quad (4.35)$$

Reemplazando (4.33) en (4.35):

$$x_4[kT_s + T_s] = x_4[kT_s] + T_s(a_{42}x_2[kT_s] + a_{43}x_3[kT_s] + a_{44}x_4[kT_s] + b_4u_k[kT_s]) \quad (4.36)$$

Con (4.28), (4.30), (4.34) y (4.36) se obtienen las nuevas matrices del modelo discreto aproximado A_{tt} y B_{tt} . Las matrices C y D se conservan del modelo original.

4.6.1. Modelo Discreto Serie de Taylor Truncada (PEI)

Para obtener este modelo se reemplazan las constantes del modelo linealizado PEI (3.22) en (4.28), (4.30), (4.34) y (4.36). Se utilizan las mismas condiciones que para los modelos PEI anteriores. La frecuencia de muestreo es 30 [Hz].

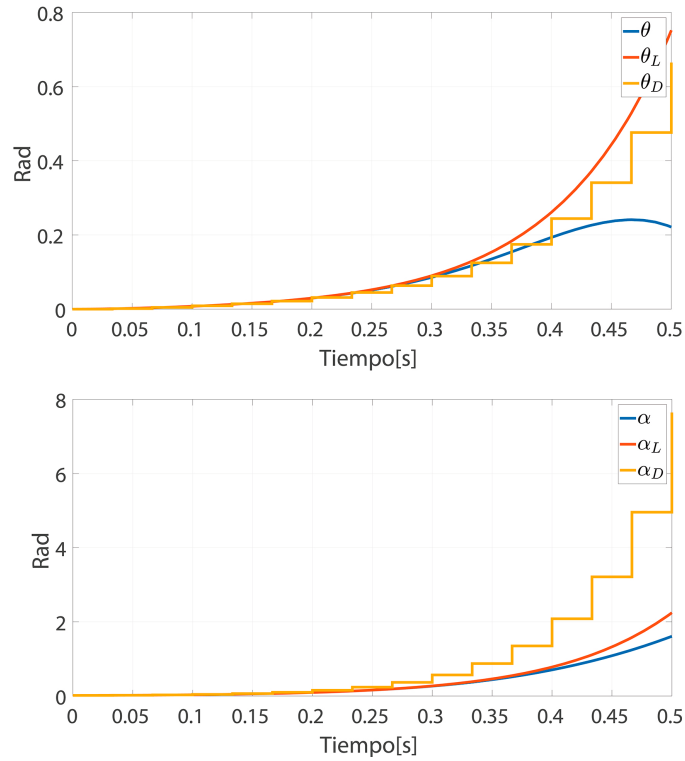


Figura 4.17: Gráfico del ángulo θ del modelo E-L, linealizado y Taylor truncado . Condiciones iniciales $x_{u0} = (0, 0, \frac{\pi}{180}, 0)$, voltaje de entrada $V_m = 0$ y periodo de muestreo $T_s = \frac{1}{30}$ [s].

Al observar la Figura 4.17 se puede observar que mantienen la dinámica inestable del PIR en PEI, con un error de aproximación notable en ambos ángulos. Se subestima la posición angular para θ y se sobrestima para α .

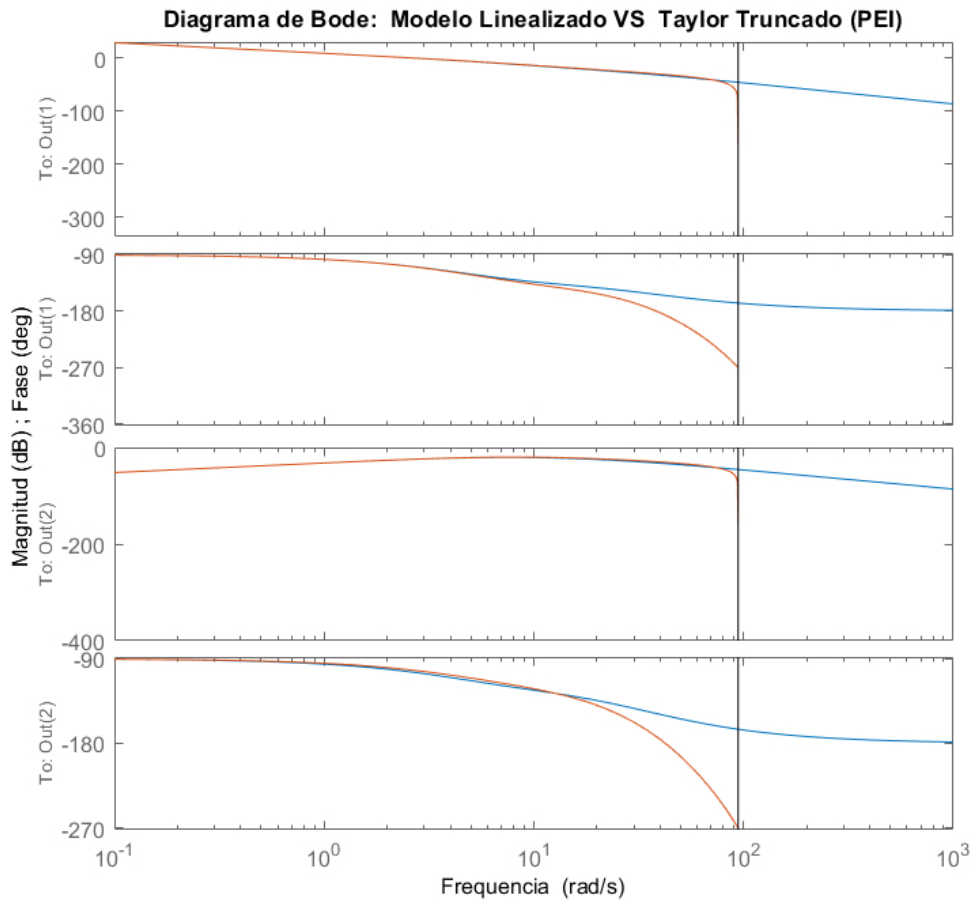


Figura 4.18: Diagrama de Bode magnitud y fase respecto del ángulo θ y α del modelo linealizado y Tustin en el PEI.

4.6.2. Modelo Discreto Serie de Taylor Truncada (PEE)

Para obtener este modelo se reemplazan las constantes del modelo linealizado PEI (3.34) en (4.28), (4.30), (4.34) y (4.36). Para este modelo se utilizan las mismas condiciones que para los modelos PEE anteriores.

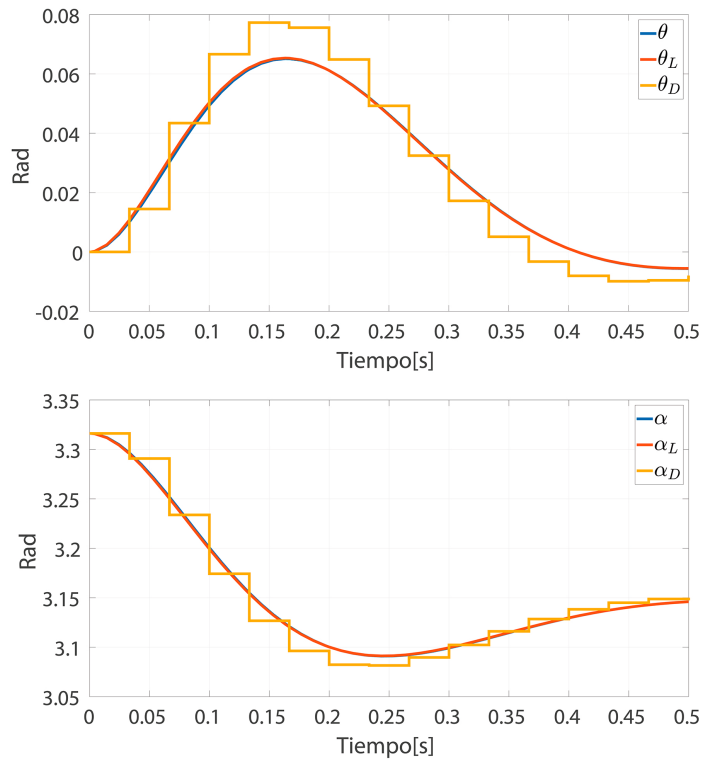


Figura 4.19: Gráfico del ángulo θ del modelo E-L, linealizado y Taylor truncado . Condiciones iniciales $x_{d0} = (0, 0, \frac{20\pi}{180}, 0)$, voltaje de entrada $V_m = 0$ y periodo de muestreo $T_s = \frac{1}{30}$ [s].

Observando la Figura 4.19 se puede apreciar que el modelo discreto aproximado consigue acercarse a la fase de los modelos E-L y linealizado, pero presenta un error de aproximación en la amplitud, sobrestimando tanto θ como α .

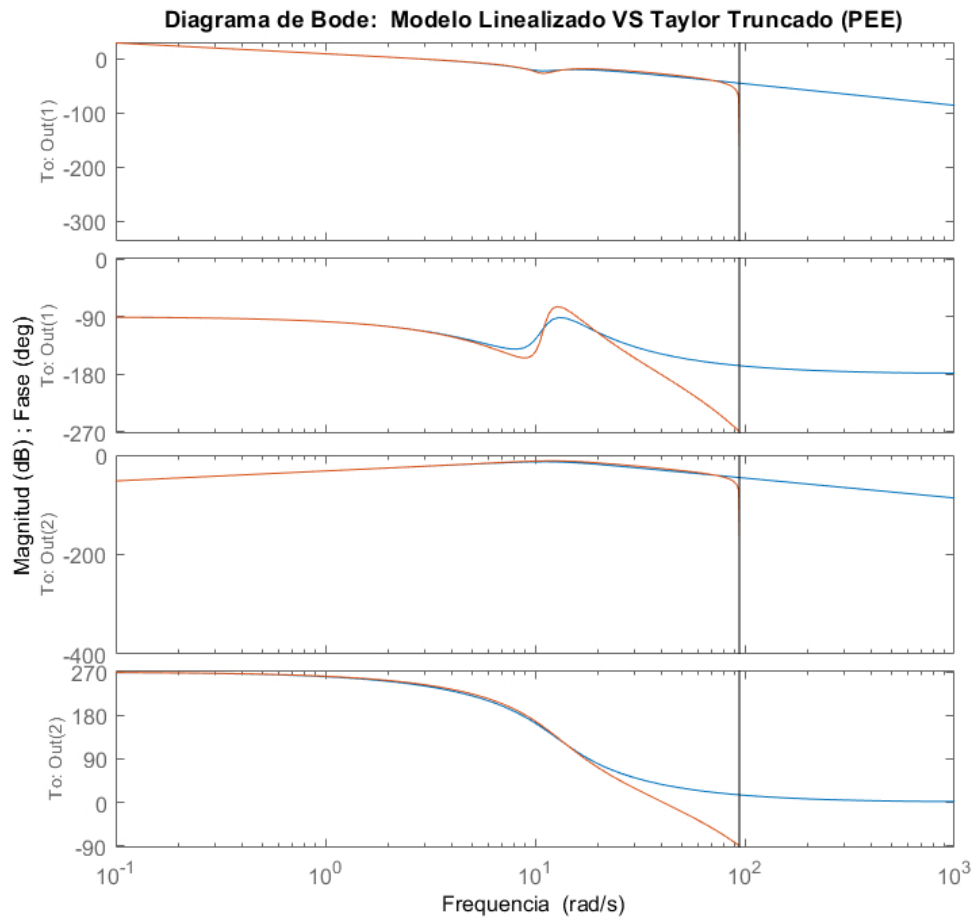


Figura 4.20: Diagrama de Bode magnitud y fase respecto del ángulo θ y α del modelo linealizado y Tustin en el PEE.

Capítulo 5

Control por Realimentación del Estado Observado

En este capítulo se lleva a cabo el diseño de controladores basados en los modelos discretos descritos en el Capítulo 4. El método a utilizar será realimentación del estado observado, el cual consiste en la construcción de un observador que estime los estados de la planta, los cuales serán realimentados a la entrada del sistema por medio de una matriz de ganancia. Con esto se logra fijar los polos del lazo cerrado, los cuales deben ser adecuados para poder lograr un control de acuerdo a las características del sistema. El método utilizado para elegir los polos del lazo cerrado y observador, es mediante FSF (Full State Feedback o Pole Placement).

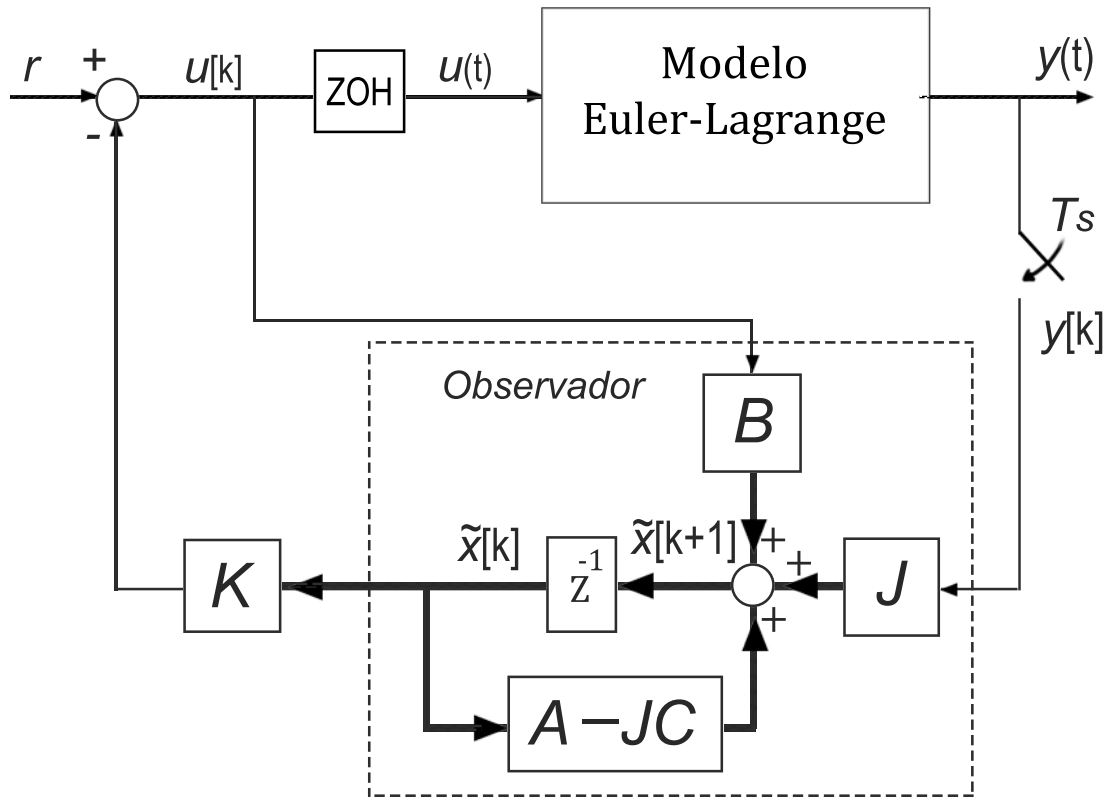


Figura 5.1: Esquema de control por realimentación de estados observados.

Se diseña un controlador por cada modelo discreto y para una colección de tiempos de muestreo T_s y todos con el mismo ancho de banda. En otras palabras, las matrices J y K se obtienen utilizando las matrices A , B , C y el tiempo de muestro T_s para fijar los polos de lazo cerrado.

Se utilizará el comando "place" de Matlab, para obtener la matriz de ganancia K y la ganancia del observador J . El comando "place" funciona ocupando el algoritmo presentado en [11]. Este comando funciona para sistemas con múltiples entradas, utilizando los grados de libertad extras para buscar una solución que minimiza la sensibilidad a perturbaciones del lazo cerrado en las matrices A o B . En [12] se realizan pruebas numéricas para probar el método.

Los modelos usados en el observador se ponen a prueba evaluando si logran la estabilidad en un tiempo de 3 segundos después empezada la simulación, puesto según se

analizó en numerosas simulaciones, es un tiempo adecuado para determinar si el controlador puede estabilizar el péndulo (Modelo E-L). También se incluye un switch que desactiva el control si el ángulo péndulo supera los $\pm 45^\circ$ (respecto de la vertical superior), puesto que está fuera del rango en dónde es posible equilibrar el péndulo. Por otro lado, existe un límite en el rango de voltajes que son recomendados para el motor, el cual tiene un voltaje nominal de 18[V] (sub-sección 1.2), lo cual es simulado como una saturación del voltaje de entrada.

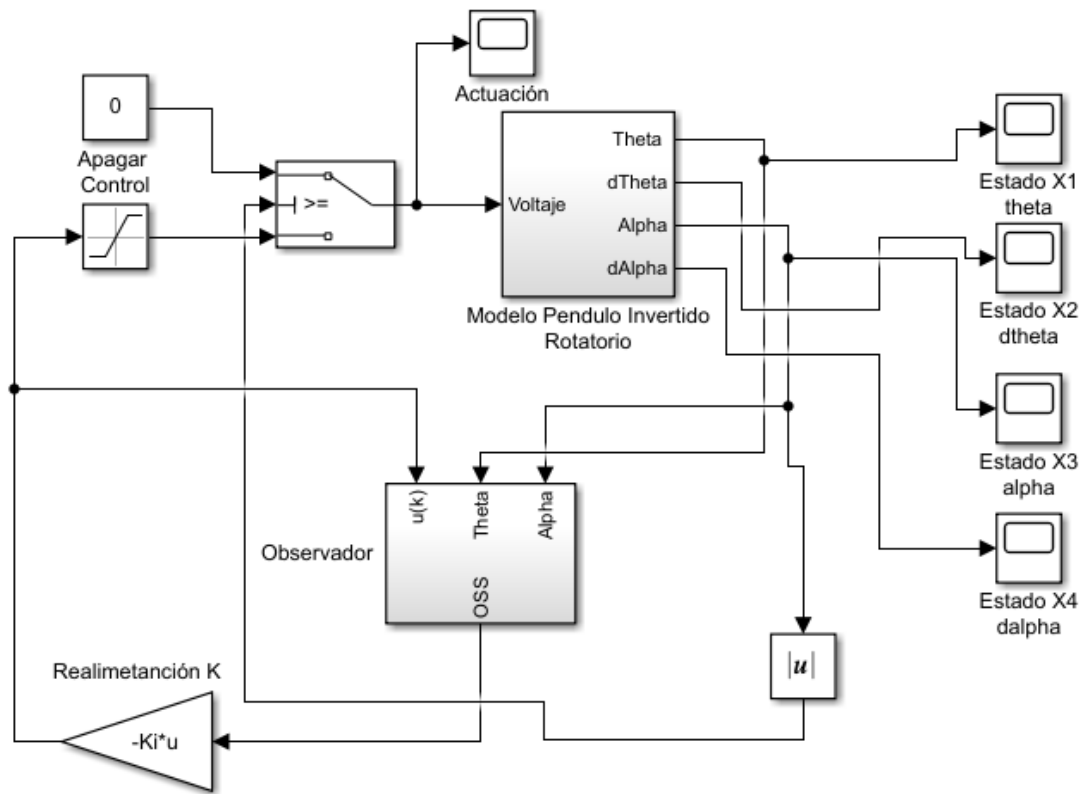


Figura 5.2: Esquema de control por realimentación de estados observados en Matlab Simulink, con saturación en la entrada de voltaje.

En las Figuras 5.3-5.9 los modelos están abreviados de la siguiente forma:

- E: Modelo Discreto Exacto
- TTV: Modelo Taylor Truncado.

- TU: Modelo Tustin Aprox.
- EHAD: Modelo Euler Hacia Adelante.
- EHAT: Modelo Euler Hacia Atrás.

La Figura 5.3 ejemplifica la forma en la que serán presentados los resultados de las simulaciones de este capítulo. Los cuales mostrarán las condiciones que fueron usadas para diseñar cada controlador y su correspondiente desempeño.

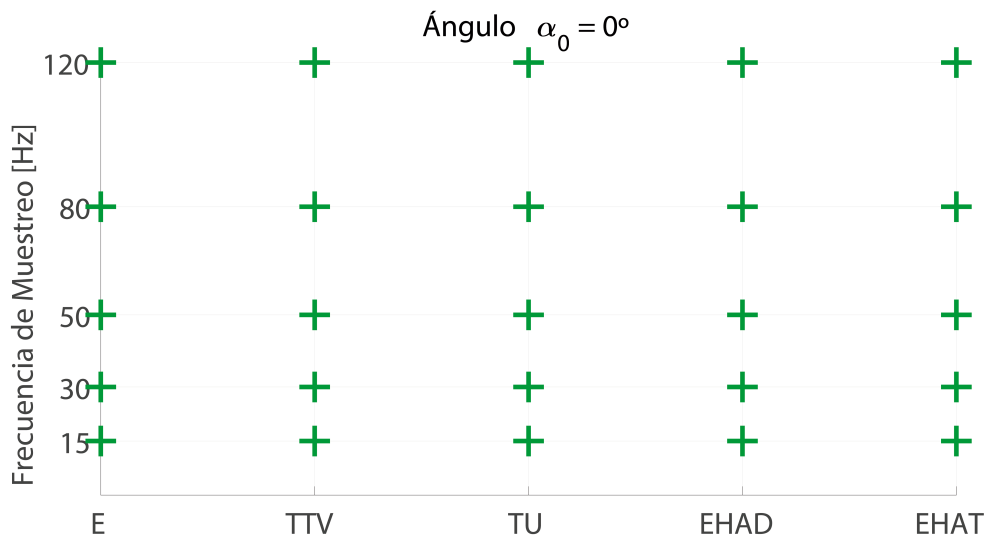


Figura 5.3: Gráfico de controladores que logran estabilizar PIR en PEI. Condición inicial $\alpha_0 = 0^\circ$. Símbolo + verde significa que logró estabilizar, símbolo * rojo significa que no logró estabilizar.

En el gráfico de la fig. 5.3, se puede apreciar que todos los controladores pueden controlar el péndulo invertido cuando el ángulo es 0° , puesto que este ángulo es un punto de equilibrio del sistema y no existen fuerzas aplicadas.

5.1. Ancho de banda de lazo cerrado Bajo

Para un ancho de banda Bajo se escoge un ancho de banda de 3 rad/s, lo cual es más lento que el polo inestable en 10 rad/s del modelo linealizado en torno a la vertical superior (3.41). Si bien es sólo una aproximación del modelo no lineal, es una buena aproximación en la vecindad del punto de equilibrio.

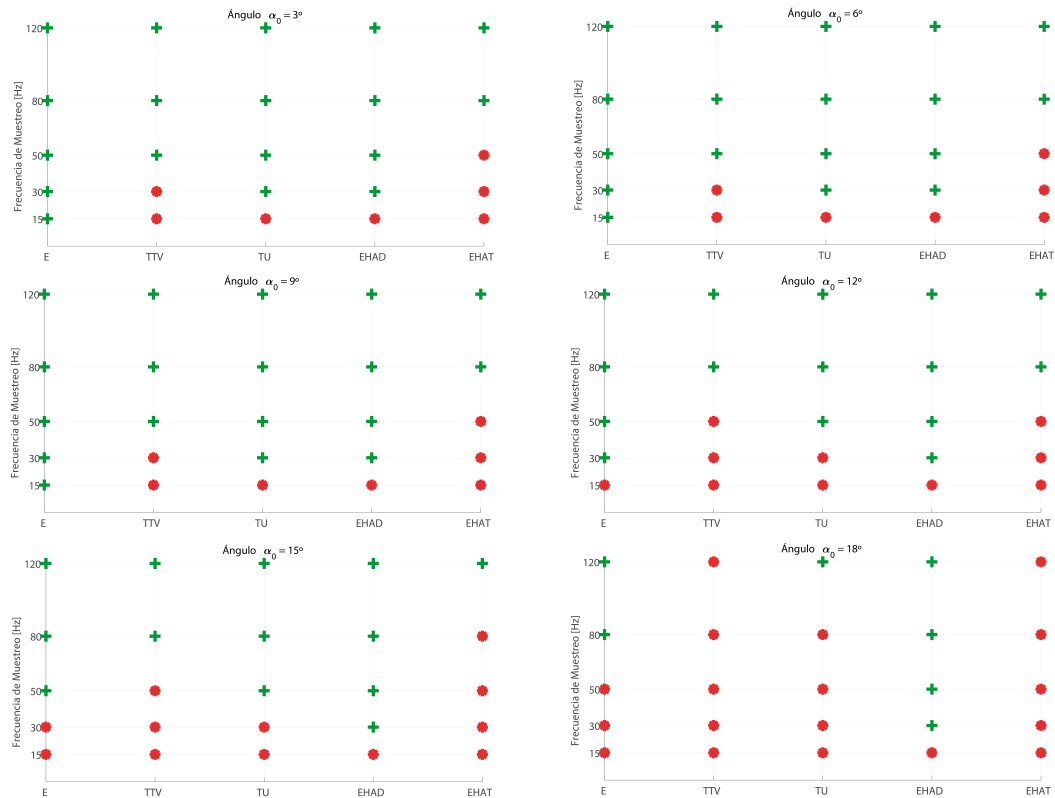


Figura 5.4: Gráfico de controladores que logran estabilizar PIR-PEI. Ancho de banda de 3 rad/s. Condición inicial $\alpha_0 = 3^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 12^\circ, 15^\circ$ y 18° respectivamente. Símbolo + verde significa que logró estabilizar, símbolo * rojo significa que no logró estabilizar.

La Figura 5.4, muestra que para tasas de muestreo bajas los controladores basados de aproximaciones menos exactas no son capaces de estabilizar el péndulo incluso para pequeños ángulos iniciales de desviación. Como es de esperar, la discretización exacta del modelo linealizado tiene el mejor desempeño, seguido de Euler hacia adelante,

Tustin, Taylor Truncado y finalmente Euler hacia atrás.

Después de los 18° ningún controlador es capaz de estabilizar el péndulo, puesto que la velocidad del lazo de control es más lenta que la dinámica del sistema en esos ángulos.

5.2. Ancho de banda de lazo cerrado Intermedio

Para un ancho de banda de lazo cerrado intermedio, se escoge un ancho de banda de 7 rad/s, lo cual se acerca más al polo inestable en 10 rad/s del modelo linealizado en la vertical superior (3.41).

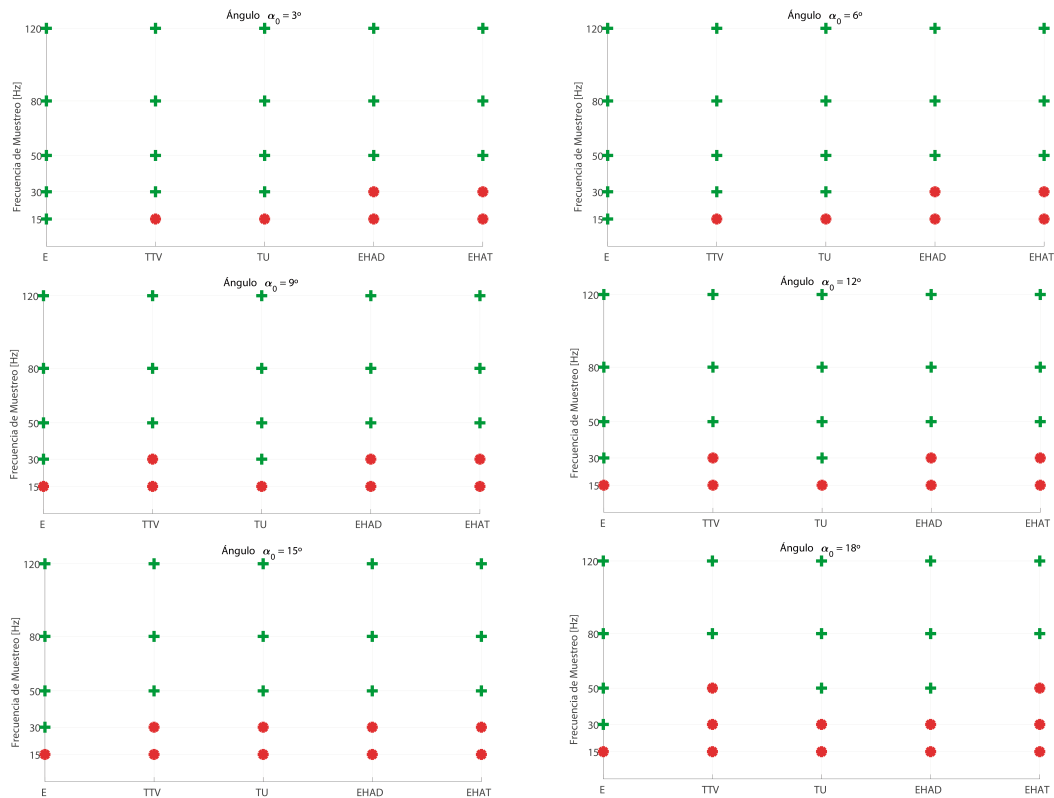


Figura 5.5: Gráfico de controladores que logran estabilizar PIR-PEI. Ancho de banda de 7 rad/s. Condición inicial $\alpha_0 = 3^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 12^\circ, 15^\circ$ y 18° respectivamente. Símbolo + verde significa que logró estabilizar, símbolo * rojo significa que no logró estabilizar.

Al comparar la Figura 5.5 con la Figura 5.4 se observa que al aumentar el ancho de banda ha mejorado el desempeño de los controladores en general, pero no afecta a las frecuencias de muestreo bajas.

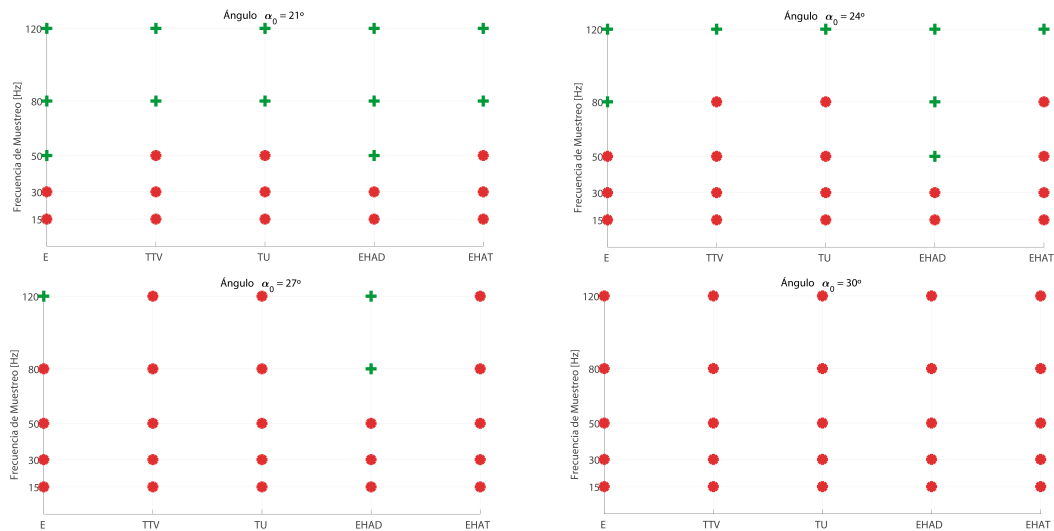


Figura 5.6: Gráfico de controladores que logran estabilizar PIR-PEI. Ancho de banda de 7 rad/s. Condición inicial $\alpha_0 = 21^\circ, 24^\circ, 27^\circ$ y 30° respectivamente. Símbolo + verde significa que logró estabilizar, símbolo * rojo significa que no logró estabilizar.

La Figura 5.6, se observa que el controlador con mayor ancho de banda tiene un mejor desempeño para los ángulos $21^\circ, 24^\circ$ y 27° respecto al caso anterior, donde no hay controladores capaces de estabilizar después de los 18° . Esto se debe a que el aumento del ancho de banda permite responder de manera más rápida ante requerimientos de actuación más exigentes, aunque como resultado el voltaje de entrada al sistema se acerca más al límite recomendado de 18[V].

5.3. Ancho de banda de lazo cerrado de Alto

Para un ancho de banda de lazo cerrado alto se utiliza un ancho de banda de 15 rad/s, cual supera al polo inestable en 10 rad/s del modelo linealizado en torno a la vertical superior. Se tienen los resultados en la Figura 5.7.

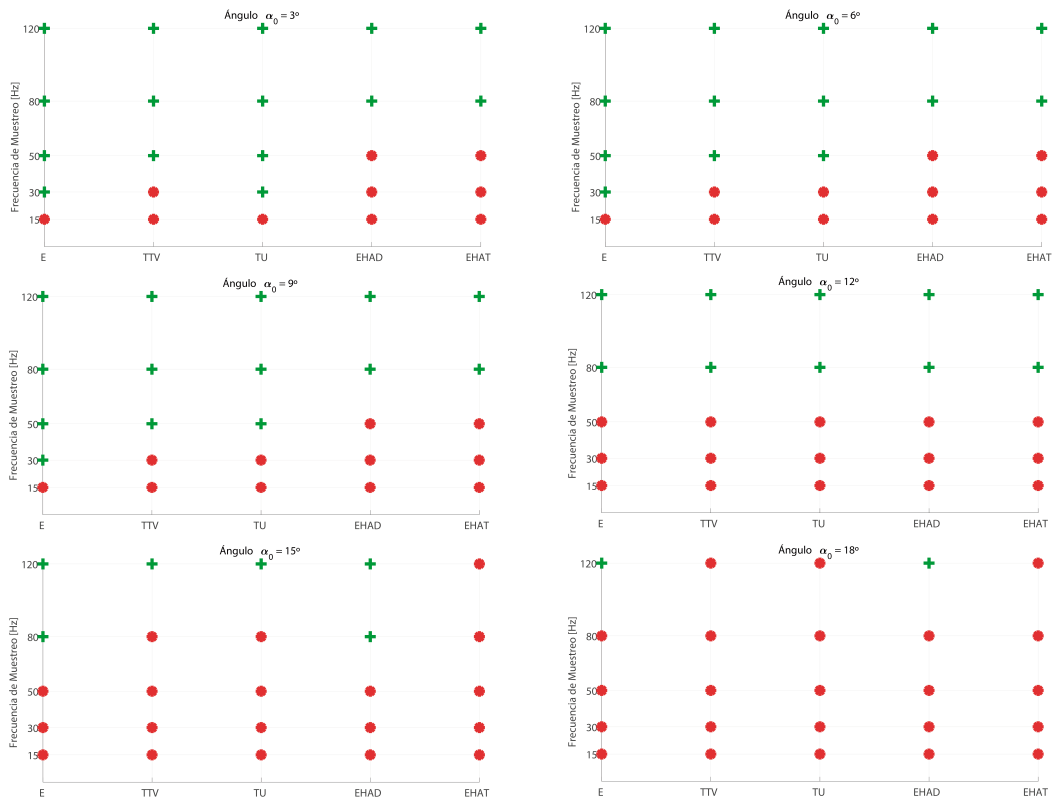


Figura 5.7: Gráfico de controladores que logran estabilizar PIR-PEI. Ancho de banda de 15 rad/s. Condición inicial $\alpha_0 = 3^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 12^\circ, 15^\circ$ y 18° respectivamente. Símbolo + verde significa que logró estabilizar, símbolo * rojo significa que no logró estabilizar.

Al comparar los resultados de la Figuras 5.7 con los de la Figuras 5.5, se puede notar que el desempeño de los controladores ha disminuido al aumentar el ancho de banda, esto se debe a la saturación en el voltaje de entrada al sistema. Mientras que para ángulos mayores a 18° ningún controlador logra estabilizar, lo cual se contrapone a los controladores de la Figura 5.6, de los cuales si existían controladores con éxito en el control.

Se puede entonces concluir que tanto el ancho de banda como la tasa de muestreo son factores que condicionan la capacidad de los controladores de estabilizar el péndulo. Los controladores más eficientes se encuentran en el rango en que el ancho de banda es

lo suficientemente rápido para reaccionar la dinámica de la planta y no saturar el voltaje de entrada. Así también la frecuencia de muestreo tiene que ser lo suficientemente rápida, afectando en mayor parte a los modelos discretos basados en aproximaciones. Según lo observado mediante simulación, estas condiciones se cumplen para un ancho de banda de 6 y 7 rad/s, mientras que la tasa de muestreo genera mejores resultados en general para 120[Hz] en adelante. Si se utiliza el modelo discreto exacto es posible utilizar tasas de muestreo más bajas (Bajo 30 [Hz]) sin disminuir considerablemente el rendimiento, por otro lado, los modelos discretos aproximados muestran mejores rendimientos para frecuencias de muestreo altas (80[Hz] o más). También se concluye que el límite de 1 [kHz] de tasa de muestreo (1.1) es mucho más alta que la suficiente para poder realizar control del sistema.

5.4. Exigencias del controlador

Hasta ahora se han descrito las características que debe poseer el controlador respecto al ancho de banda y frecuencia de muestreo, pero hay otra característica restrictiva que poseen estos controladores, los cuales intentan estabilizar tanto el ángulo del péndulo como el del brazo. Esto último podría ser contraproducente si lo único que se busca es la estabilidad del péndulo. Es por esto, que quitando la retroalimentación respecto del ángulo del brazo en la matriz K, se podría aumentar el desempeño de los controladores. Los gráficos de controlador sin realimentación respecto del ángulo del brazo se presentan en las Figura 5.8 y 5.9.

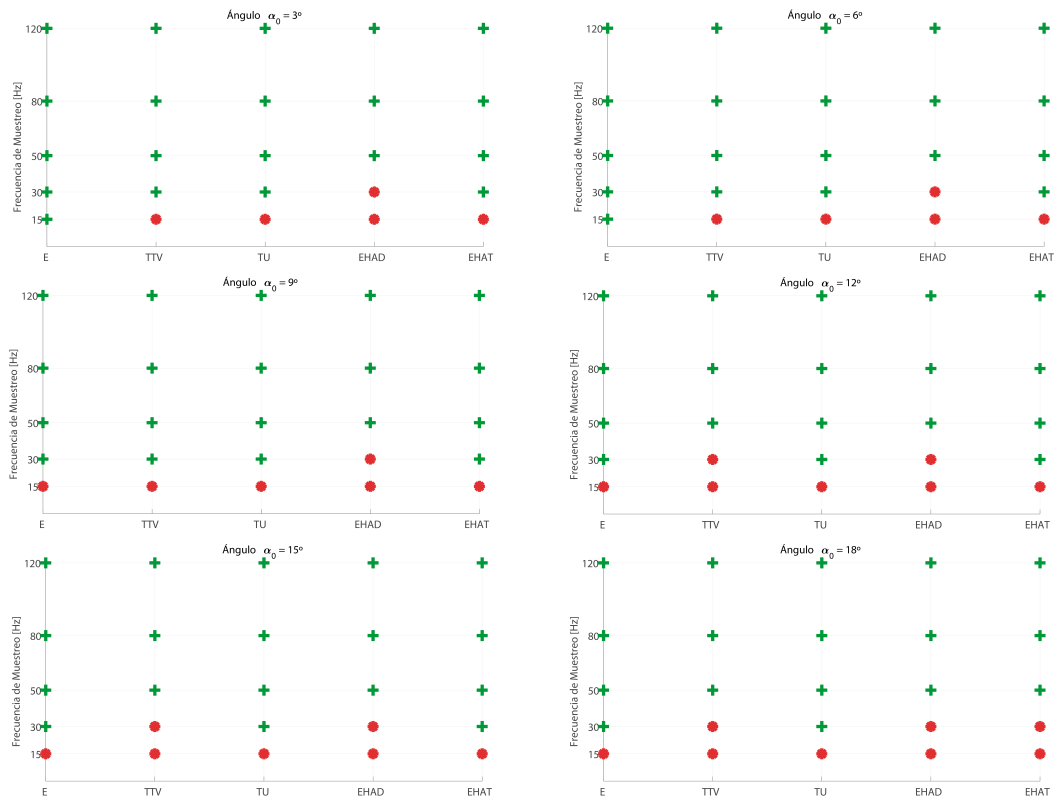


Figura 5.8: Gráfico de controladores que logran estabilizar PIR-PEI. Ancho de banda de 7 rad/s. Sin realimentación para ángulo del brazo. Condición inicial $\alpha_0 = 3^\circ, 6^\circ, 9^\circ, 12^\circ, 15^\circ$ y 18° respectivamente. Símbolo + verde significa que logró estabilizar, símbolo * rojo significa que no logró estabilizar.

Al comparar las Figuras 5.8 Y 5.5 que los controladores en general han aumentado su rendimiento al bajar las restricciones del control.

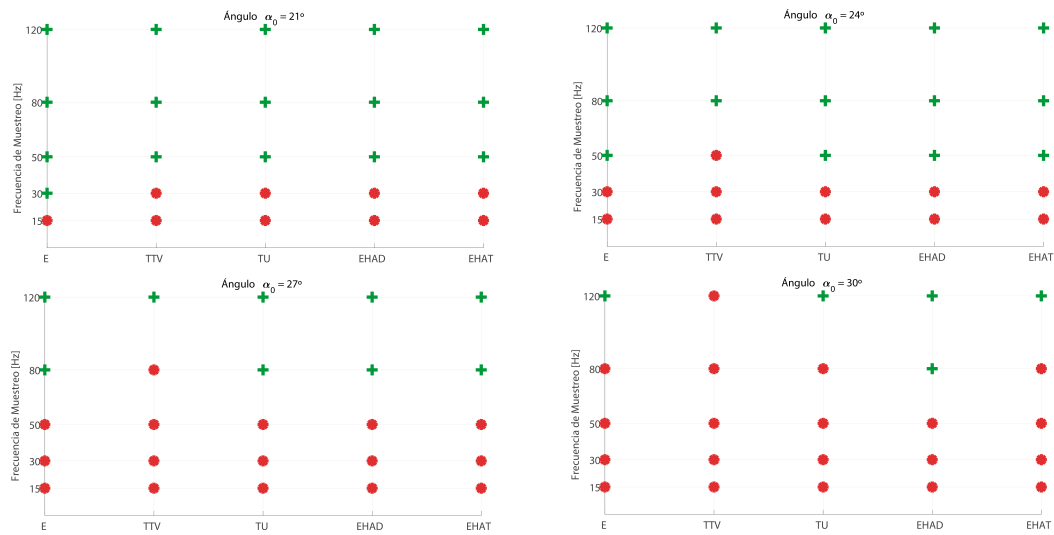


Figura 5.9: Gráfico de controladores que logran estabilizar PIR-PEI. Ancho de banda de 7 rad/s. Sin realimentación para ángulo del brazo. Condición inicial $\alpha_0 = 21^\circ, 24^\circ, 27^\circ$ y 30° respectivamente. Símbolo + verde significa que logró estabilizar, símbolo * rojo significa que no logró estabilizar.

Se puede apreciar en la Figura 5.9, que el desempeño de los controladores aumentó en respecto a los que poseen realimentación con ángulo del brazo, pudiendo algunos estabilizar hasta los 30° de inclinación respecto de la vertical, algo que no sucedía en los otros casos.

Este enfoque puede ayudar a a mejorar el desempeño de los controladores pero, por otro lado, permitir que el brazo pueda tener cualquier posición puede resultar en que este se desplace cerca de los límites en los que se mueve el servo-motor (1.1).

Capítulo 6

Resultados Experimentales

En este capítulo se mostraran los resultados obtenidos al utilizar el sistema PIR de Quanser Qube Servo 2 para llevar a cabo experimentos y contrastar los resultados obtenidos con los de simulación. De esta forma, se busca validar los resultados obtenidos en los capítulos anteriores. La máxima frecuencia de muestro que permite el dispositivo es de 1 [kHz], límite que puede ser superado si se cuenta con computador multicore, para realizar procesos en paralelo y aumentar así la tasa de muestreo.

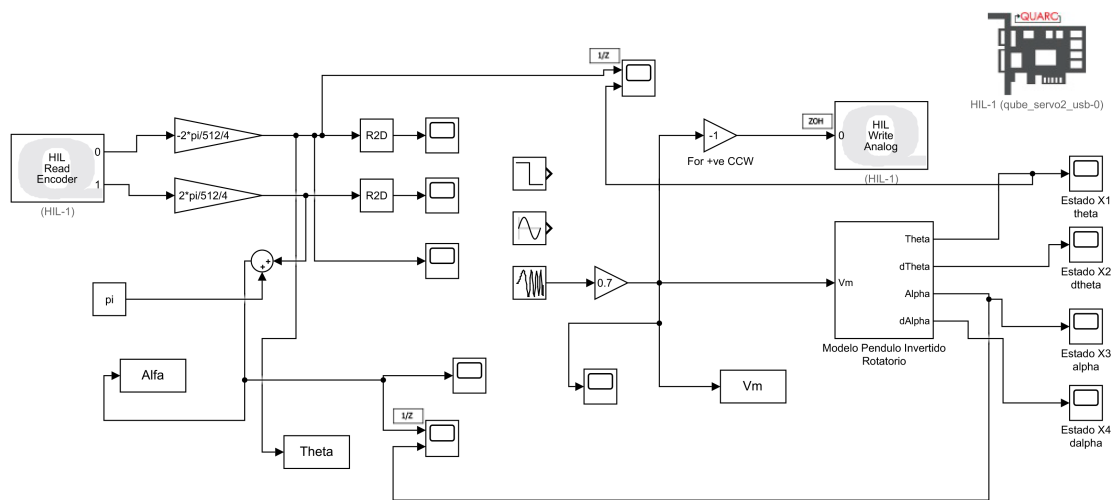


Figura 6.1: Diagrama Simulink utilizado para interactuar con el dispositivo Quanser Qube Servo 2

En el diagrama de la Figura 6.1 se muestra el esquema simulink, el cual tiene constantes de $2\pi/512/4$ para convertir de revoluciones a radianes y una ganancia para invertir el voltaje hacia el motor. Los bloques Quarc son un INITIALIZER, READ ENCODERS y WRITE ANALOG. La función de estos es configurar e iniciar la comunicación, leer el valor de los encoders y mandar una señal (ZOH) al motor DC respectivamente.

6.1. Prueba del Modelo Euler-Lagrange

Lo primero que debe ser puesto a prueba es la validez del modelo creado con el método Euler-Lagrange en el Capítulo 2, debido a que en este se basa todo el trabajo realizado. Para llevar a acabo esto, se comparara el comportamiento de la planta real y la planta simulada sujetas a las mismas condiciones de voltaje de entrada y condiciones iniciales. Los resultados obtenidos son clave para probar la validez de las suposiciones que son la base del modelo construido, las cuales además sirven para comprobar la validez de los parámetros entregados por el fabricante.

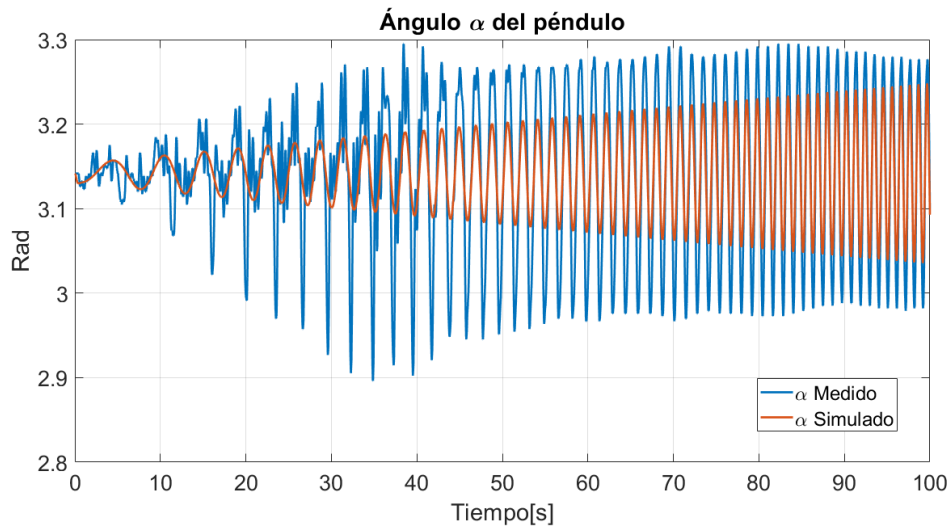


Figura 6.2: Gráfico del ángulo α del modelo simulado E-L y los datos medidos. Condiciones iniciales $x_0 = (0, 0, \pi, 0)$, V_m es una señal chirp lineal de amplitud 0.7[V] y su frecuencia aumenta 1 [Hz/s]. El periodo de muestreo $T_s = 10^{-3}$ [s].

En la Figura 6.2 se puede observar que el comportamiento de las curvas es similar en comportamiento y fase, pero difieren en amplitud. La amplitud de la señal medida es superior a la simulada y eso se debe que el coeficiente de roce viscoso entregado por el fabricante difiere de la del péndulo real. El coeficiente está sobre estimado, probablemente para incluir influencia de la resistencia del aire, la cual depende de la humedad, temperatura y presión del ambiente.

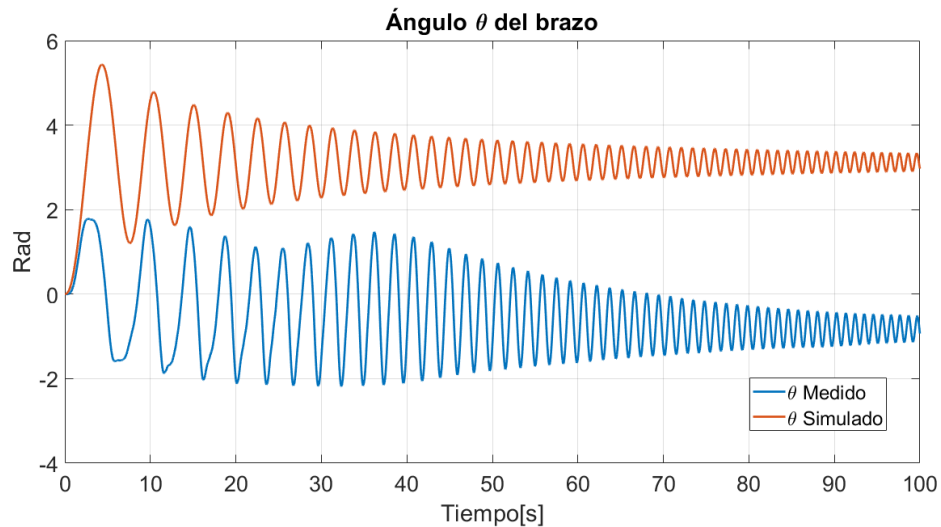


Figura 6.3: Gráfico del ángulo θ del modelo simulado E-L y los datos medidos. Condiciones iniciales $x_0 = (0, 0, \pi, 0)$, V_m es una señal chirp lineal de amplitud 0.7[V] y su frecuencia aumenta 1 [Hz/s]. El periodo de muestreo es $T_s = 10^{-3}$ [s].

La fig. 6.3 muestra que ambas señales tienen un comportamiento similar pero oscilan al rededor de puntos distintos. Esto se debe a las características no modeladas del sistema, como la perturbación producida por el cable del encoder, la cual tiene un efecto de resorte oponiéndose al movimiento libre del péndulo. Esta perturbación es conocida por el fabricante y es mencionada en la lección State-space modeling entregada por fabricante y es indicada como una de las causantes de diferencia entre el modelo y los datos medidos. La referencia exacta se muestra en la Figura 6.4, en donde se pueden notar similitudes con la Figura 6.3.

The model of the arm response displays the same characteristics of the measured arm response, but an offset is observed due to un-modelled dynamics such as the disturbance introduced by the encoder cable.

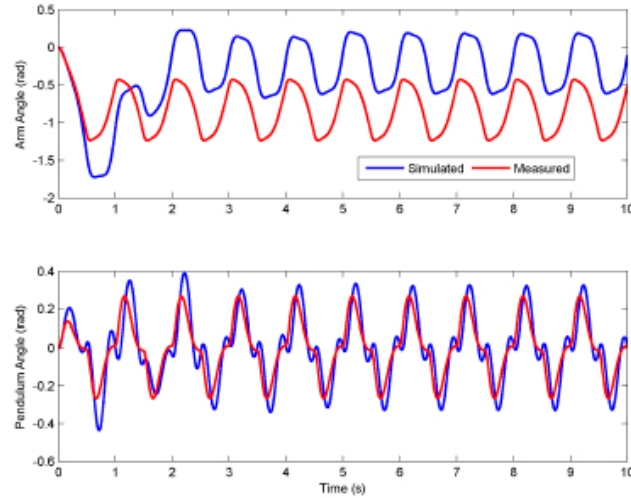


Figura 6.4: Gráfico de los ángulos θ y α simulados y medidos al someter al sistema a escalones de voltaje 0-1[V]. "Rotary Pendulum, State-space modeling Workbook, página 6" descargable desde la pagina web del fabricante [13]

6.2. Identificación del Sistema

Si bien se cuenta con modelo del sistema con sus correspondientes parámetros entregados por el fabricante, siempre es necesario realizar un ajuste los parámetros o construir un modelo a partir de los datos recolectados. Es por esto que se hace necesario realizar este tipo de análisis al trabajar con sistemas dinámicos.

6.2.1. Estimación de Parámetros

Se puede realizar un ajuste de los parámetros al construir un vector que contenga las distintas constantes del sistema y variar los valores para obtener distintas respuestas del sistema. Comparando estos valores y calculando el error cuadrático respecto a los datos

medidos, es posible encontrar un vector que minimiza dicho error, ese vector sería el óptimo a utilizar. Por otro lado, no todos los parámetros tienen la misma influencia y para algunos casos es difícil que tengan variación respecto a los datos entregados, como es el caso de las masas y los largos. Es por esto que los parámetros que se varían son los de roce, puesto que son los más capacidad tienen de variar (condiciones ambientales y desgaste) y de influir en la energía total del sistema. Entonces sea:

$$F(B_p, B_r) = \sum (Data(t) - V(t, B_p, B_r))^2 \quad (6.1)$$

$$Min F(B_p, B_r) \quad (6.2)$$

donde $V(t, B_p, B_r)$ es una función que evalúa el modelo Euler-Lagrange para distintos valores de B_p y B_r . Partiendo de los valores entregados por el fabricante y con un paso de 10^{-5} se obtienen los siguientes resultados:

$$B_p = 9.4000 \cdot 10^{-5} \quad B_r = 0.0011$$

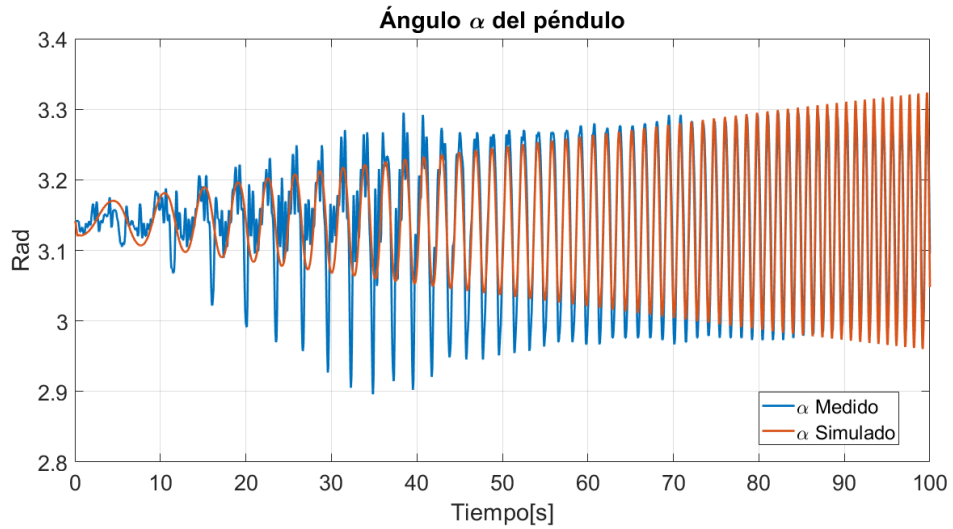


Figura 6.5: Gráfico del ángulo α del modelo simulado E-L y los datos medidos. Condiciones iniciales $x_0 = (0, 0, \pi, 0)$, V_m es una señal chirp lineal de amplitud 0.7[V] y su frecuencia aumenta 1 [Hz/s]. El periodo de muestreo es $T_s = 10^{-3}$ [s]. Parámetros ajustados.

La fig. 6.6, muestra que el modelo simulado se asemeja mejor a los datos recolectados que en la fig. 6.2, pero no es capaz de reproducir las dinámicas no modeladas del sistema. La perturbación ocasionada por el cable genera estas diferencias.

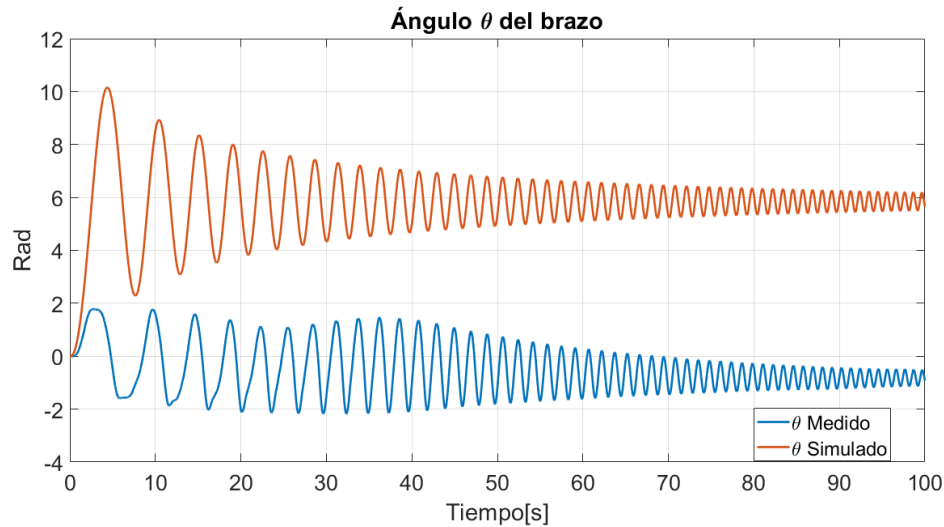


Figura 6.6: Gráfico del ángulo θ del modelo simulado E-L y los datos medidos. Condiciones iniciales $x_0 = (0, 0, \pi, 0)$, V_m es una señal chirp lineal de amplitud 0.7[V] y su frecuencia aumenta 1 [Hz/s]. El periodo de muestreo es $T_s = 10^{-3}$ [s]. Parámetros ajustados.

En la fig. 6.6 muestra que al igual que en la fig. 6.3 las curvas tienen un punto medio distinto debido a la perturbación del cable del encoder, la cual fija la oscilación del brazo respecto al punto donde el cable ejerce menos tensión.

6.2.2. System Identification Toolbox

System Identification Toolbox es una herramienta de MATLAB que permite crear modelos matemáticos de sistemas dinámicos a partir de datos de entrada-salida medidos. Esta aplicación permite crear y usar modelos de sistemas dinámicos que no son fáciles de modelar a través de principios físicos o especificaciones y pueden ser creados a partir de datos en el dominio del tiempo o de la frecuencia.

Esta herramienta permitiría tener un modelo que incorpore las características no modeladas del sistema PIR, es por esto que sería una opción relevante a considerar. Se utiliza el modelo no lineal Hammerstein-Wiener [14], el cual tiene mejor desempeño respecto a otros métodos disponibles en el toolbox.

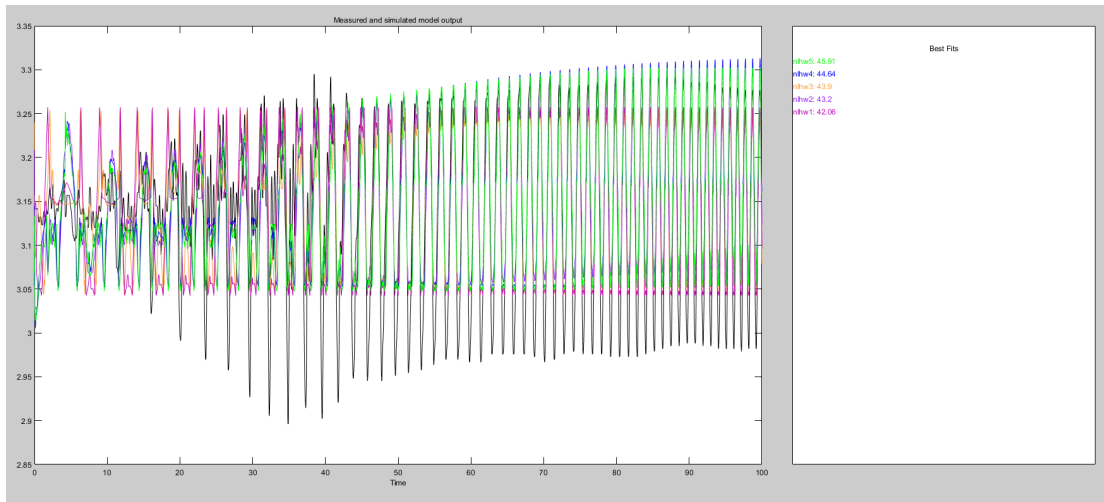


Figura 6.7: Gráfico del ángulo α de distintos modelos Hammerstein-Wiener simulados y los datos medidos. Condiciones iniciales $x_0 = (0, 0, \pi, 0)$, V_m es una señal chirp lineal de amplitud 0.7[V] y su frecuencia aumenta 1 [Hz/s]. El periodo de muestreo es $T_s = 10^{-3}$ [s].

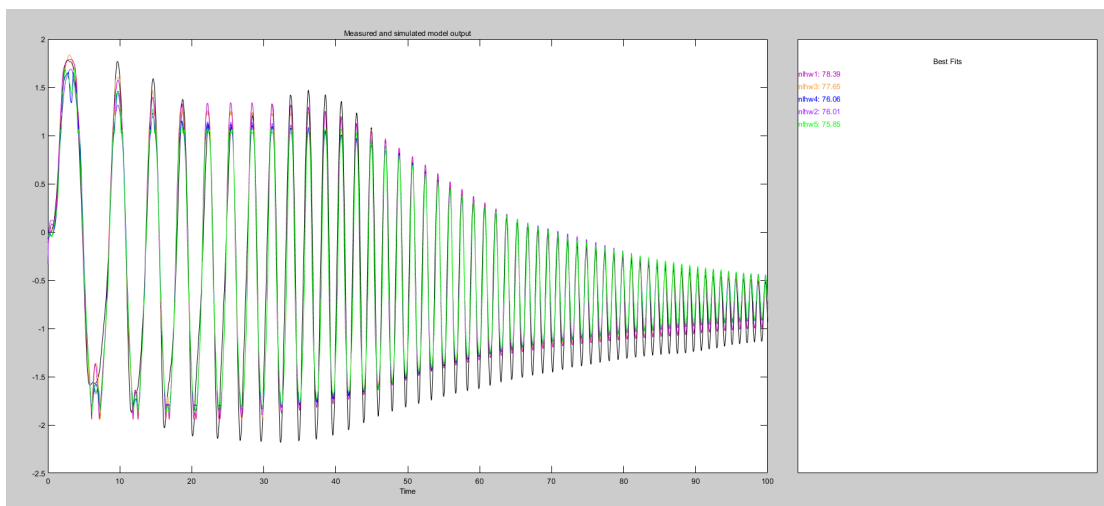


Figura 6.8: Gráfico del ángulo θ de distintos modelos Hammerstein-Wiener simulados y los datos medidos. Condiciones iniciales $x_0 = (0, 0, \pi, 0)$, V_m es una señal chirp lineal de amplitud 0.7[V] y su frecuencia aumenta 1 [Hz/s]. El periodo de muestreo es $T_s = 10^{-3}$ [s].

Al observar los distintos modelos Hammerstein-Wiener de las fig. 6.7 y 6.8, se puede

observar que tienen un relativo buen desempeño al describir el movimiento del brazo, presentando un similitud de hasta un 78%. Lo cual no ocurre con el péndulo, el cual llega solamente al 49%. Esto se debe a la complejidad de lograr estimar el comportamiento de un sistema con múltiples salidas y a la dinámica adicional agregada por el cable del encoder.

<p>nlhw1 = Hammerstein-Wiener model with 2 outputs and 1 input Linear transfer function matrix corresponding to the orders: nb = [2; 2] nf = [3; 3] nk = [1; 1] Input nonlinearity: pwnlinear with 10 units Output nonlinearities: For output 1: pwnlinear with 10 units For output 2: pwnlinear with 10 units Name: nlhw1 Sample time: 0.001 seconds</p> <p>Status: Termination condition: Maximum number of iterations reached. Number of iterations: 20, Number of function evaluations: 77</p> <p>Estimated using PEM on time domain data "mydata2". Fit to estimation data: [77.72;41.83]% FPE: 7.561e-05, MSE: 0.04787</p>	<p>nlhw2 = Hammerstein-Wiener model with 2 outputs and 1 input Linear transfer function matrix corresponding to the orders: nb = [2; 2] nf = [3; 3] nk = [1; 1] Input nonlinearity: sigmoidnet with 10 units Output nonlinearities: For output 1: sigmoidnet with 10 units For output 2: sigmoidnet with 10 units Name: nlhw2 Sample time: 0.001 seconds</p> <p>Status: Termination condition: Maximum number of iterations reached. Number of iterations: 20, Number of function evaluations: 86</p> <p>Estimated using PEM on time domain data "mydata2". Fit to estimation data: [74.75;42.77]% FPE: 7.671e-05, MSE: 0.06058</p>	<p>nlhw3 = Hammerstein-Wiener model with 2 outputs and 1 input Linear transfer function matrix corresponding to the orders: nb = [2; 2] nf = [3; 3] nk = [1; 1] Input nonlinearity: wavenet with 1 unit Output nonlinearities: For output 1: wavenet with 23 units For output 2: wavenet with 14 units Name: nlhw3 Sample time: 0.001 seconds</p> <p>Status: Termination condition: Maximum number of iterations reached. Number of iterations: 20, Number of function evaluations: 45</p> <p>Estimated using PEM on time domain data "mydata2". Fit to estimation data: [76.82;41.63]%</p>
<p>lhw4 = Hammerstein-Wiener model with 2 outputs and 1 input Linear transfer function matrix corresponding to the orders: nb = [2; 2] nf = [3; 3] nk = [1; 1] Input nonlinearity: pwnlinear with 20 units Output nonlinearities: For output 1: pwnlinear with 20 units For output 2: pwnlinear with 20 units Name: lhw4 Sample time: 0.001 seconds</p> <p>Status: Termination condition: Maximum number of iterations reached. Number of iterations: 20, Number of function evaluations: 62</p> <p>Estimated using PEM on time domain data "mydata2".</p>	<p>nlhw5 = Hammerstein-Wiener model with 2 outputs and 1 input Linear transfer function matrix corresponding to the orders: nb = [2; 2] nf = [3; 3] nk = [1; 1] Input nonlinearity: pwnlinear with 50 units Output nonlinearities: For output 1: pwnlinear with 50 units For output 2: pwnlinear with 50 units Name: nlhw5 Sample time: 0.001 seconds</p> <p>Status: Termination condition: Maximum number of iterations reached. Number of iterations: 20, Number of function evaluations: 80</p> <p>Estimated using PEM on time domain data "mydata2".</p>	

Figura 6.9: Parámetros de los modelos Hammerstein-Wiener obtenidos.

6.3. Desempeño de Controladores Discretos

En esta sección se analiza el comportamiento y desempeño de los controladores discretos diseñados en el Capítulo 5. El sistema cuenta con encoders incrementales, por lo tanto, no es posible conocer la posición actual del encoder mientras no se mueva, partiendo siempre de un cero arbitrario. Es por esto que la manera más justa de probar el desempeño de los controladores es utilizando una perturbación de voltaje de entrada

6.3.1. Controlador basado en Modelo Discreto Exacto

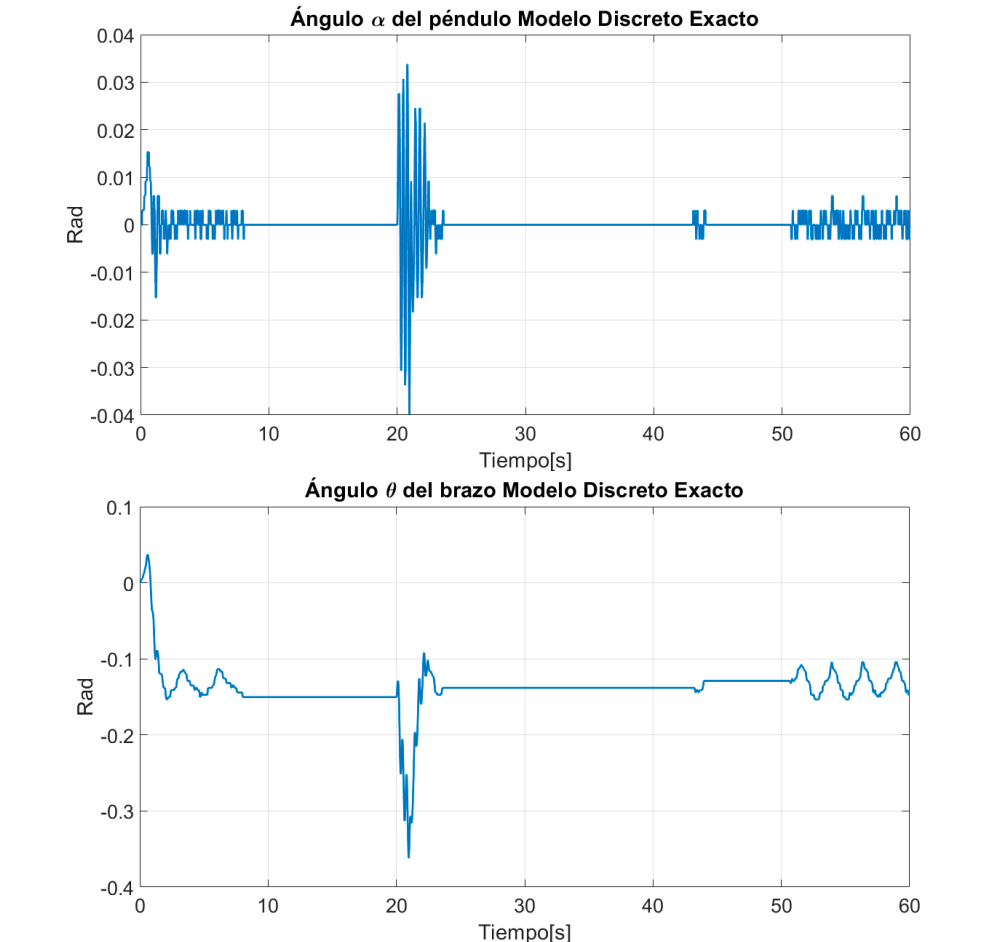


Figura 6.11: Gráfico del ángulo α y θ de los datos medidos, para el modelo Discreto Exacto. Condiciones iniciales $x_0 = (0,0,0,0)$, perturbación de entrada a los 20[s] y ancho de banda 7 rad/s. El periodo de muestreo es $T_s = 10^{-3}$ [s].

La curva de la Figura 6.11 muestra que el controlador puede devolver el péndulo a su posición estable con relativa rapidez. Como se trata del modelo exacto, tiene mejor desempeño respecto a las aproximaciones. Las oscilaciones al rededor de los 50[s] son atribuibles a flujos de aire en la habitación.

6.3.2. Controlador basado en Modelo Euler Hacia Atrás

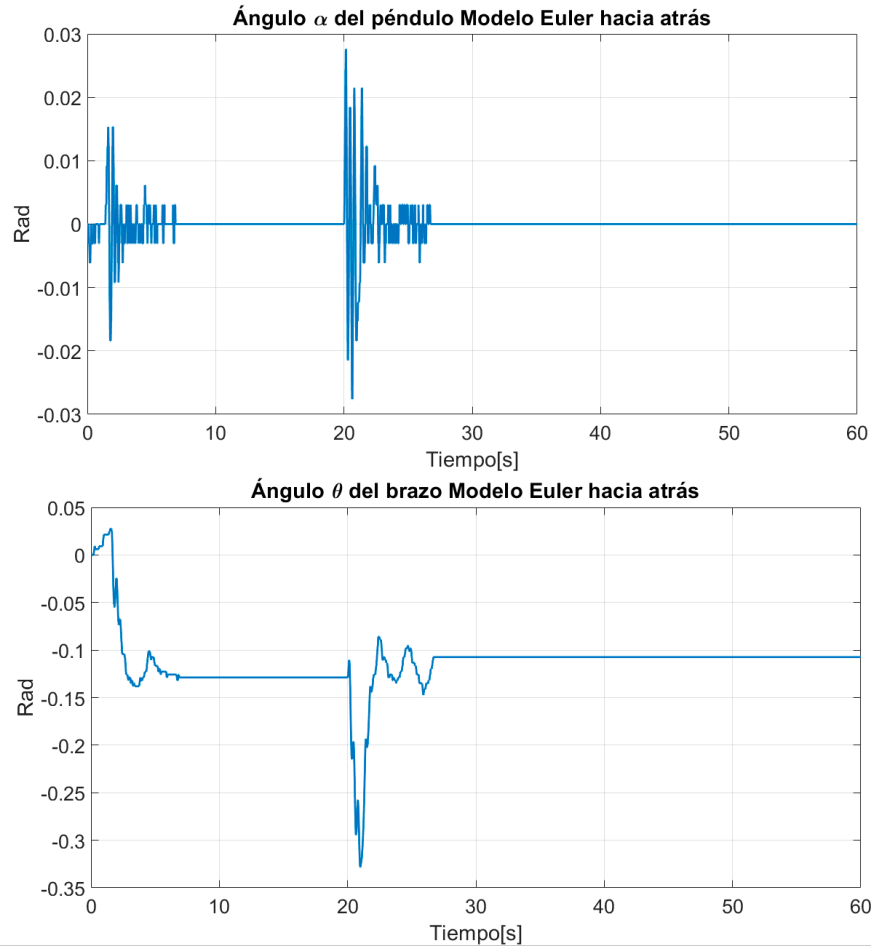


Figura 6.12: Gráfico del ángulo α y θ de los datos medidos, para el modelo Euler Hacia Atrás. Condiciones iniciales $x_0 = (0, 0, 0, 0)$, perturbación de entrada a los 20[s] y ancho de banda 7 rad/s. El periodo de muestreo es $T_s = 10^{-3}$ [s].

A diferencia de la Figura 6.11, en 6.12 se demora unos segundos más en volver a la estabilidad, para luego mantener un comportamiento estable. Se puede apreciar que las oscilaciones del péndulo son ligeramente menores respecto al discretizado exacto. Mientras que el movimiento del brazo tiene un gran parecido con 6.11, diferenciándose en el número de oscilaciones después de la perturbación.

6.3.3. Controlador basado en Modelo Euler Hacia Adelante

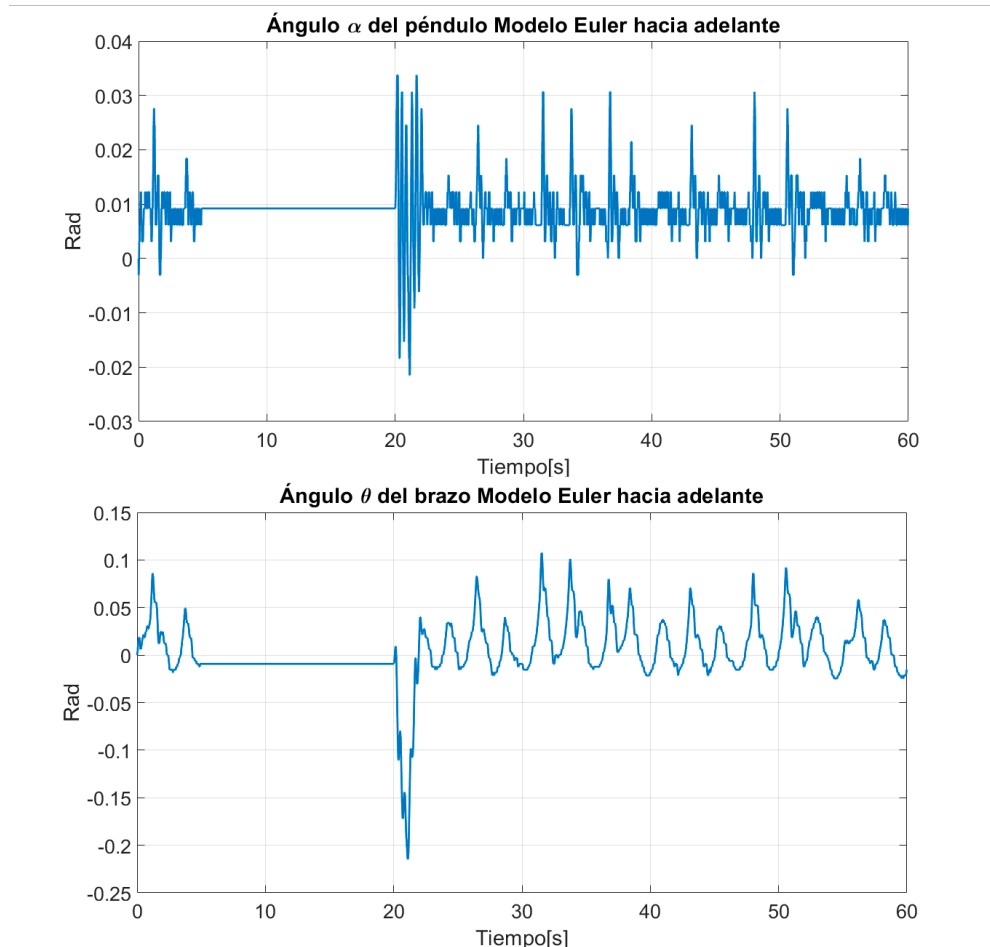


Figura 6.13: Gráfico del ángulo α y θ de los datos medidos, para el modelo Euler Hacia Adelante. Condiciones iniciales $x_0 = (0, 0, 0, 0)$, perturbación de entrada a los 20[s] y ancho de banda 7 rad/s. El periodo de muestreo es $T_s = 10^{-3}$ [s].

A diferencia de 6.12, la fig. 6.13 muestra que el controlador nunca logra estabilizar el péndulo, si bien nunca se cae, queda en un estado de oscilación sostenida. Lo mismo sucede con el brazo, el cual oscila entre 0 y 0.1 rad.

6.3.4. Controlador basado en Modelo Tustin

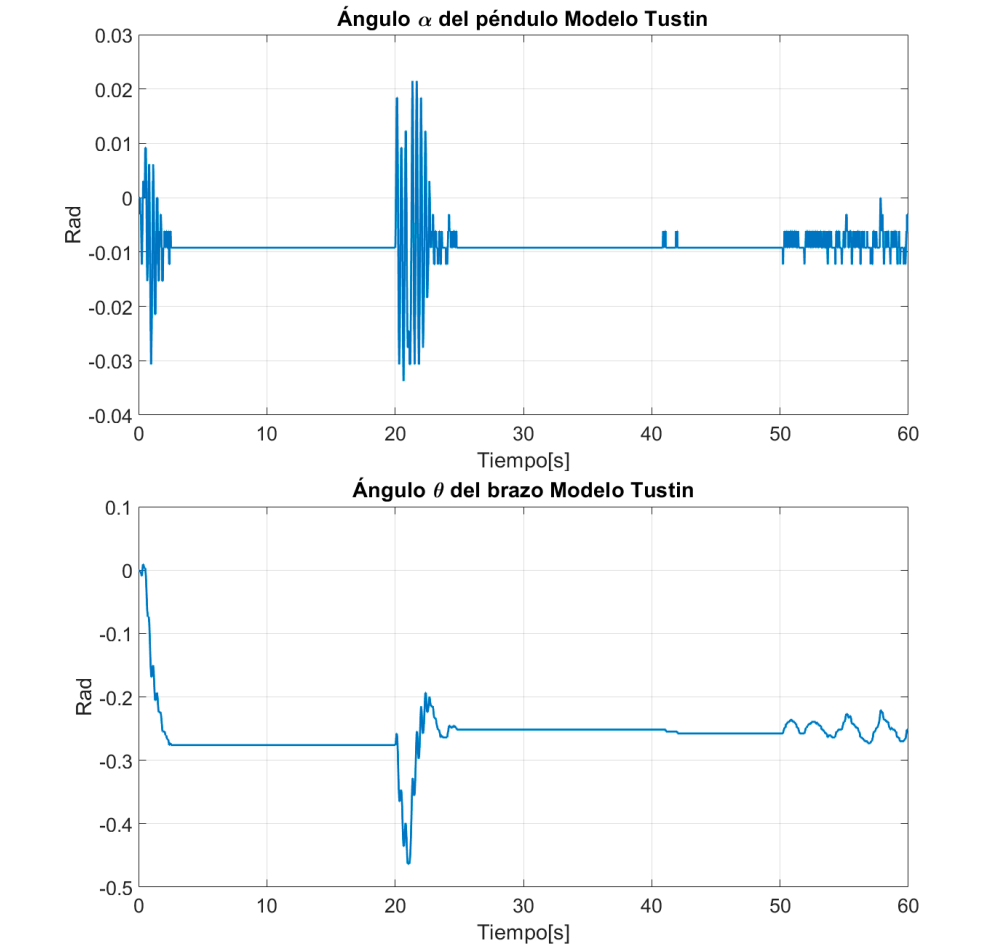


Figura 6.14: Gráfico del ángulo α y θ de los datos medidos, para el modelo Tustin. Condiciones iniciales $x_0 = (0,0,0,0)$, perturbación de entrada a los 20[s] y ancho de banda 7 rad/s. El periodo de muestreo es $T_s = 10^{-3}$ [s].

La Figura 6.14, tiene un gran parecido con 6.11, pero con sutiles diferencias en el tiempo requerido para volver a la estabilidad y la amplitud de las oscilaciones. Este modelo demora un poco más y sus oscilaciones en promedio son de menor amplitud.

6.3.5. Controlador basado en Modelo Taylor Truncado

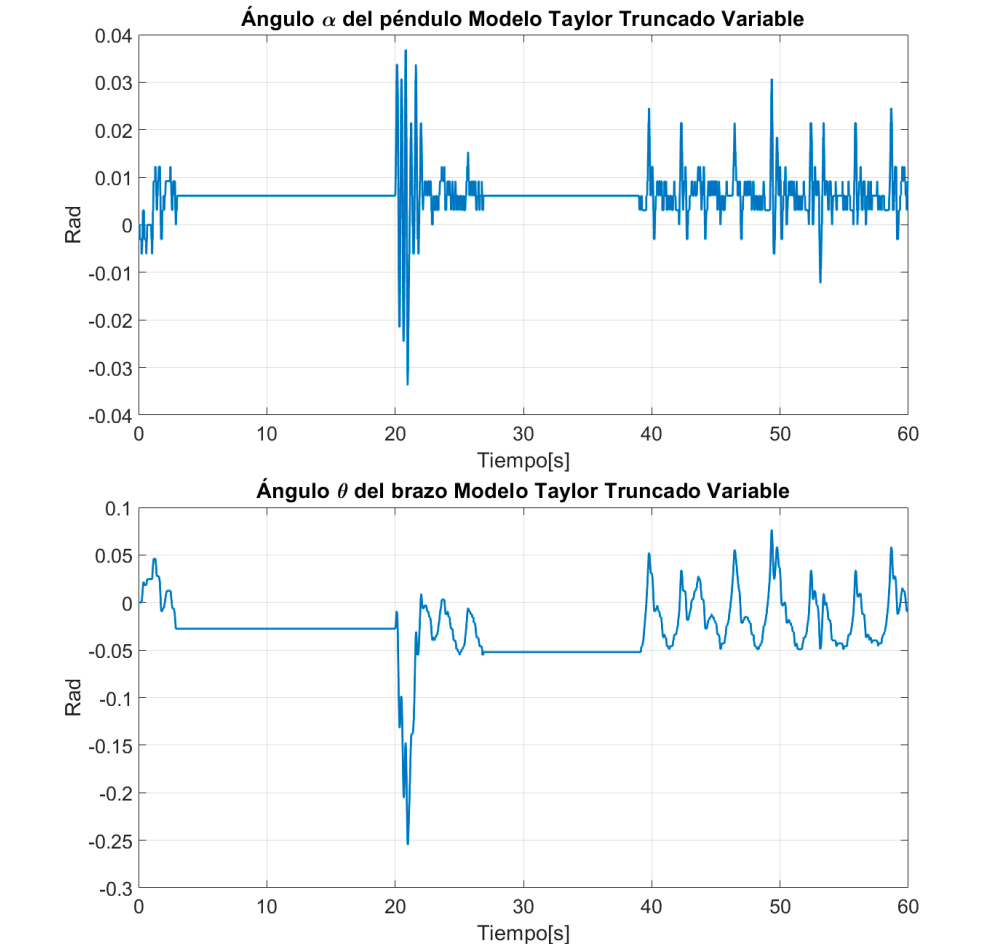


Figura 6.15: Gráfico del ángulo α y θ de los datos medidos, para el modelo Taylor Truncado. Condiciones iniciales $x_0 = (0, 0, 0, 0)$, perturbación de entrada a los 20[s] y ancho de banda 7 rad/s. El periodo de muestreo es $T_s = 10^{-3}$ [s].

La Figura 6.15 muestra en parecido con la Figura 6.12 y 6.13, pero con las oscilaciones son más pronunciadas. Es perturbado por el flujo de aire en los 40 [s], mostrando tener un bajo desempeño en comparación de los otros controladores.

Conclusiones

En este trabajo de memoria se lleva a cabo el análisis del diseño de sistemas de control discreto para el sistema de un péndulo invertido rotatorio. El análisis se basa en el modelo obtenido mediante las ecuaciones de Euler-Lagrange, el cual debe considerar una convención el signo del sentido de giro y la posición inicial del péndulo. Durante esta etapa se encontraron diversos errores en las convenciones (que afecta a la matriz (3.22)) establecidas en los documentos del fabricante del dispositivo [8], pero se encontraban de forma correcta en [13]. Por lo tanto, se recomienda siempre realizar los cálculos de las ecuaciones cada vez que se realiza un trabajo de modelamiento.

Una vez completado el modelo, se hace necesario elegir entre trabajar con este o realizar una simplificación del modelo mediante una linealización. Al elegir utilizar un modelo lineal aproximado se limitan las capacidades máximas del esquema de control, usualmente no pueden equilibrar péndulo en ángulos mayores a 30° , lo cual si es posible con esquemas de control que utilizan el modelo no lineal.

Contando con un modelo lineal, se puede obtener una discretización exacta o una aproximada. Si bien el modelo exacto siempre obtendrá mejores resultados, en muchas aplicaciones puede que baste con utilizar una aproximación. Todos los controladores discretos fueron capaces de equilibrar el péndulo, cada uno mostrando comportamientos distintos.

La elección del tiempo de muestreo estándar (30 [Hz]) se hizo en base al polo inestable del sistema linealizado, puesto que es una buena aproximación de los primeros instantes de caída del péndulo, aunque al ser una linealización sobredimensionada la ve-

locidad de caída del péndulo. Las tasas de muestreo bajo el estándar resultan en malos desempeños de los controlares, afectando considerablemente a los basados en modelos discretos aproximados, los cuales necesitan de tasas de muestreo más altas al estándar (120 [Hz] en adelante) para mostrar un desempeño similar al discretizado exacto. Asimismo el ancho de banda (7 rad/s) se eligió para ser más rápido que la dinámica de la planta, pero no tan rápida como para saturar la entrada de voltaje al motor.

Durante las pruebas en el péndulo real se pudo observar la perturbación que produce el cable del encoder, el cual genera un efecto de elástico o resorte que no está descrito en el modelo, pero es mencionado en la documentación del dispositivo Quanser [13]. También están las perturbaciones generadas por los flujos de aire dentro de la habitación y la diferencia entre los parámetros entregados por el fabricante versus los parámetros reales, los cuales pueden variar en el tiempo.

Otro punto importante a recalcar es la realimentación del ángulo del Brazo, puesto que si el encoder siempre parte en un cero arbitrario y sólo se busca el equilibrar el péndulo, pierde el sentido querer mantener dicha posición. Flexibilizar dicha condición puede mejorar significativamente la capacidad de los controladores de estabilizar el péndulo, así como también mejorar su respuesta ante perturbaciones, pero a costa de la posibilidad llevar al brazo a los límites de desplazamiento del brazo.

Finalmente los controladores que mejor desempeño tienen en el sistema real son el discreto exacto (como era de esperarse), Euler hacia atrás y Tustin. Estos controladores logran estabilizar el sistema de forma consistente, mientras que Euler hacia adelante y Taylor truncado tienen un comportamiento más inestable.

Bibliografía

- [1] G. Goodwin and J. Yuz, *Sampled-Data Models for Linear and Nonlinear Systems*. Springer-Verlag London, 2014.
- [2] M. Park, Y.-J. Kim, and J.-J. Lee, “Swing-up and lqr stabilization of a rotary inverted pendulum,” vol. 16, pp. 94–97, 06 2011.
- [3] M. Ryalat and D. S. Laila, “A simplified ida-pbc design for underactuated mechanical systems with applications,” *European Journal of Control*, vol. 27, 12 2015.
- [4] M. Akhtaruzzaman and A. Shafie, “Modeling and control of a rotary inverted pendulum using various methods, comparative assessment and result analysis,” pp. 1342 – 1347, 09 2010.
- [5] Quanser, “The quanser qube-servo 2.” <https://www.quanser.com/products/qube-servo-2/#overview>. Accessed: 2021-04-05.
- [6] A. Brizard, *An Introduction to Lagrangian Mechanics*. 10 2008.
- [7] J. Foadi, “Mathematical physics lessons - the principle of least action,” 04 2007.
- [8] QuanserG, “Rotary inverted pendulum.” <https://www.quanser.com/products/rotary-inverted-pendulum/#overview>. Accessed: 2021-04-08.
- [9] B. Bequette, “Process control : Modeling, design, and simulation / b.w. bequette.” *IEEE Control Systems*, p. 155, 01 2003.
- [10] I. J., *Introduction to Shannon Sampling and Interpolation Theory*. 01 1991.

- [11] J. Kautsky and N. NICHOLS, “Robust pole assignment in linear state feedback,” *Int. J. Control*, vol. 41, pp. 1129 – 1155, 05 1985.
- [12] A. J. Laub and M. Wette, “Algorithms and software for pole assignment and observers,” 9 1984.
- [13] Quanser, “The quanser qube-servo 2.” https://www.quanser.com/courseware-resources/?fwp_resource_types=courseware&fwp_resource_related_products=1472. Accessed: 2021-04-05.
- [14] MathWorks, “What are hammerstein-wiener models?.” <https://www.mathworks.com/help/ident/ug/what-are-hammerstein-wiener-models.html>. Accessed: 2021-04-08.