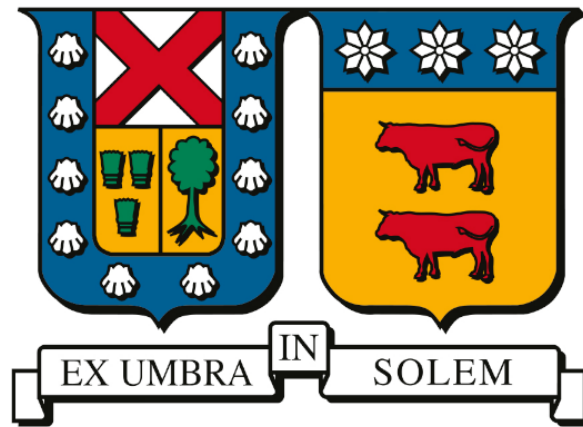


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA  
DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA  
VALPARAÍSO - CHILE



**IMPLEMENTACIÓN DE LA TÉCNICA DE CONTROL PREDICTIVO  
UTILIZANDO ADMM PARA UN SISTEMA DE ESTANQUES ACOPLADOS**

**ARIEL IGNACIO PARRA ANTILLANCA**

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE  
INGENIERO CIVIL ELECTRÓNICO

PROFESOR GUÍA : JUAN CARLOS AGÜERO  
PROFESOR CORREFERENTE 1 : CÉSAR SILAVA JIMÉNEZ  
PROFESOR CORREFERENTE 2 : ÁNGEL CEDEÑO NIETO

Julio 2023

## **AGRADECIMIENTOS**

Agradezco al Centro Avanzado de Ingeniería Eléctrica y Electrónica (AC3E) proyecto Basal ANID FB0008, al proyecto Fondecyt ANID 1211630 del profesor Juan C. Agüero.

---

## RESUMEN

En el presente trabajo se presenta un método avanzado de control de procesos, conocido como Control Predictivo por Modelo (MPC), que consiste en implementar un control que utiliza un modelo del proceso para predecir la salida de la planta en un momento futuro, y con base en esto, optimizar las acciones de control futuras.

La planta a utilizar es de tipo hidráulica, compuesta por dos estanques acoplados. La variable a controlar es la altura de los dos estanques. Esta planta es no lineal, multivariable e inestable.

El método de optimización a utilizar es el Algoritmo del Método de los Multiplicadores de Lagrange con Direcciones Alternadas (ADMM). Esta técnica de optimización se ha utilizado recientemente en control predictivo.

Esta técnica de control se va a probar utilizando simulaciones mediante MATLAB/Simulink.

**Palabras Clave:** MPC, Estanques Acoplados, ADMM, MATLAB/Simulink.

---

## ABSTRACT

In this work, an advanced process control method is presented, known as Model Predictive Control (MPC), which consists of implementing a control that uses a process model to predict the output of the plant at a future time, and with based on this, optimize future control actions.

The plant to be used is of the hydraulic type, composed of two coupled tanks. The variable to control is the height of the two tanks. This plant is not linear, multivariable and unstable.

The optimization method to be used is the Alternating Direction Method of Multipliers (ADMM) algorithm. This technique for optimization has recently been used in predictive control.

This control technique will be tested using MATLAB/Simulink simulations.

**Keywords:** MPC, Coupled Tanks, ADMM, MATLAB/Simulink.

---

## GLOSARIO

**MPC:** *Model Predictive Control* o Control Predictivo por Modelo.

**ADMM:** *Alternating Direction Method of Multipliers* o Algoritmo del Método de los Multiplicadores de Lagrange con Direcciones Alternadas.

**PID:** *proportional–integral–derivative* o proporcional-integral-derivativo.

**LQR:** *Linear–Quadratic Regulator* o Regulador Lineal-Cuadrático.

**QP:** *Quadratic Programming* o Programación Cuadrática.

**SISO:** *Single-Input and Single-Output* o una entrada y una salida.

**MIMO:** *Multiple Input and Multiple Output* o Múltiples Entradas y Múltiples Salidas.

# Índice de Contenidos

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
1.1. Estado del Arte . . . . .	1
1.2. Objetivos Específicos . . . . .	2
<b>2. Control Predictivo por Modelo</b>	<b>3</b>
2.1. Funcionamiento Básico de MPC . . . . .	3
2.2. Definición del Problema de Control . . . . .	5
2.3. Formulación Sparse . . . . .	7
2.4. Seguimiento a Referencia . . . . .	10
2.5. Observadores y Perturbaciones . . . . .	14
2.5.1. Observadores . . . . .	14
2.5.2. Observador Extendido . . . . .	15
2.5.3. Seguimiento a Referencia con Estimación de la Perturbación . . . . .	16
2.6. Pre Estabilización de la Planta . . . . .	17
2.6.1. Formulación Sparse . . . . .	18
2.6.2. Seguimiento a Referencia . . . . .	19
2.6.3. Observadores . . . . .	21
2.6.4. Observador Extendido . . . . .	22
2.6.5. Seguimiento a Referencia con Estimación de la Perturbación . . . . .	23
<b>3. Método de Optimización</b>	<b>24</b>
3.1. Algoritmo del Método de los Multiplicadores de Lagrange con Direcciones Alternadas (ADMM) . . . . .	24
3.1.1. Descomposición Dual . . . . .	24
3.1.2. Método de los Multiplicadores Aumentados de Lagrange . . . . .	25
3.1.3. Método de los Multiplicadores de Lagrange con Direcciones Alternadas . . . . .	25
3.2. Algoritmo ADMM para la Formulación Sparse . . . . .	27
<b>4. Muestreo del Sistema</b>	<b>30</b>
4.1. Muestreo con Retenedor de Orden Cero (ZOH) . . . . .	30
4.1.1. Solución de la Ecuación de Estados . . . . .	32
4.1.2. Solución de la Ecuación de Estados con la Transformada de Laplace . . . . .	33
4.1.3. Discretización Invariante al Escalón . . . . .	34
<b>5. Modelado del Sistema</b>	<b>36</b>
5.1. Planta de Interés . . . . .	36
5.2. Modelo Matemático de los Estanques Acoplados . . . . .	36
5.3. Modelo Linealizado de los Estanques Acoplados . . . . .	38
5.4. Representación en Variables de Estado de los Estanques Acoplados en Tiempo Discreto . . . . .	42
5.5. Pre Estabilización de la Planta . . . . .	46
<b>6. Implementación del Sistema de Control</b>	<b>49</b>
6.1. MATLAB . . . . .	49

6.2. Simulink . . . . .	50
6.3. Estanques Acoplados . . . . .	52
<b>7. Resultados de las Simulaciones</b>	<b>55</b>
7.1. Simulaciones en Estado Cero . . . . .	55
7.1.1. Cambios en las Restricciones . . . . .	59
7.2. Simulaciones con Seguimiento a Referencia . . . . .	63
7.2.1. Cambios en la Referencia . . . . .	67
7.2.2. Cambios en las Restricciones . . . . .	72
7.3. Simulaciones en Estado Cero utilizando Observadores . . . . .	74
7.3.1. Cambios en las Restricciones . . . . .	77
7.4. Simulaciones con Seguimiento a Referencia utilizando Observadores con Perturbaciones . . . . .	79
7.4.1. Cambios en la Referencia . . . . .	82
<b>8. Conclusiones</b>	<b>87</b>
8.1. Conclusión . . . . .	87
8.2. Trabajos Futuros . . . . .	87
<b>A. Códigos MATLAB</b>	<b>90</b>
A.1. Estado Cero . . . . .	90
A.2. Seguimiento a Referencia . . . . .	91
A.3. Estado Cero utilizando Observadores . . . . .	93
A.4. Seguimiento a Referencia utilizando Observadores con Perturbaciones . . . . .	95
A.5. ADMM del Diagrama Simulink . . . . .	97
<b>B. Diagramas Simulink</b>	<b>98</b>
B.1. Diagrama Estado Cero . . . . .	98
B.1.1. <i>MATLAB Function</i> mat_f . . . . .	98
B.2. Diagrama Seguimiento a Referencia . . . . .	99
B.2.1. <i>MATLAB Function</i> mat_f . . . . .	99
B.2.2. <i>MATLAB Function</i> mat_g . . . . .	99
B.2.3. <i>Subsystem</i> . . . . .	99
B.3. Diagrama Estado Cero utilizando Observadores . . . . .	100
B.3.1. <i>MATLAB Function</i> mat_f . . . . .	100
B.4. Diagrama Seguimiento a Referencia utilizando Observadores con Perturbaciones . . . . .	100
B.4.1. <i>MATLAB Function</i> mat_f . . . . .	101
B.4.2. <i>MATLAB Function</i> mat_g . . . . .	101
B.4.3. <i>MATLAB Function</i> fcn . . . . .	101
B.4.4. <i>Subsystem</i> . . . . .	101
B.4.5. <i>Subsystem 1</i> . . . . .	102

# Índice de Figuras

2.1. Estructura Básica de MPC [2]	4
2.2. Funcionamiento del Horizonte Móvil	4
2.3. Diagrama de Bloques del Observador de Estados	14
2.4. Diagrama del Observador	16
2.5. Diagrama de Bloques MPC	18
2.6. Diagrama de Bloques MPC Referencia	21
2.7. Diagrama de Bloques Completo del Sistema	23
4.1. Diagrama de Bloques Sistema de Control Digital	30
4.2. Conversión de Señal Análoga a Digital	31
4.3. Conversión de Señal Digital a Análoga	31
5.1. Sistema de Estanques Acoplados	36
5.2. Plano $z$	46
5.3. Diagrama de la Ley de Control	47
6.1. Entorno de MATLAB	50
6.2. Biblioteca de Simulink	51
6.3. Entorno de Simulink	51
7.1. Gráfico de las salidas $y_k$	55
7.2. Gráfico de los estados $x_k$	56
7.3. Gráfico de las entradas $u_k$	56
7.4. Gráfico de $\bar{u}_k$	57
7.5. Tiempo de Asentamiento de $y_1$	58
7.6. Tiempo de Asentamiento de $y_2$	58
7.7. Gráfico de las entradas $u_k$	59
7.8. Gráfico de $\bar{u}_k$	60
7.9. Gráfico de los estados $x_k$	60
7.10. Gráfico de las salidas $y_k$	61
7.11. Gráfico de los estados $x_k$	61
7.12. Gráfico de las salidas $y_k$	62
7.13. Gráfico de las entradas $u_k$	62
7.14. Gráfico de $\bar{u}_k$	63
7.15. Gráfico de las salidas $y_k$	64
7.16. Gráfico de $\bar{u}_k$	64
7.17. Gráfico de los estados $x_k$	65
7.18. Gráfico de las entradas $u_k$	65
7.19. Tiempo de Asentamiento de $y_1$	66
7.20. Tiempo de Asentamiento de $y_2$	66
7.21. Gráfico de las salidas $y_k$	67
7.22. Gráfico de $\bar{u}_k$	68

7.23. Gráfico de los estados $x_k$ . . . . .	68
7.24. Gráfico de las entradas $u_k$ . . . . .	69
7.25. Gráfico de las salidas $y_k$ . . . . .	69
7.26. Gráfico de $\bar{u}_k$ . . . . .	70
7.27. Gráfico de las entradas $u_k$ . . . . .	71
7.28. Gráfico de los estados $x_k$ . . . . .	71
7.29. Gráfico de los estados $x_k$ . . . . .	72
7.30. Gráfico de las salidas $y_k$ . . . . .	73
7.31. Gráfico de $\bar{u}_k$ . . . . .	73
7.32. Gráfico de las entradas $u_k$ . . . . .	74
7.33. Gráfico de las salidas $y_k$ . . . . .	74
7.34. Gráfico de los estados $\hat{x}_k$ . . . . .	75
7.35. Gráfico de las entradas $u_k$ . . . . .	75
7.36. Gráfico de $\bar{u}_k$ . . . . .	76
7.37. Gráfico de las perturbaciones $d_k$ . . . . .	76
7.38. Gráfico de las salidas $y_k$ . . . . .	77
7.39. Gráfico de los estados $x_k$ . . . . .	77
7.40. Gráfico de las entradas $u_k$ . . . . .	78
7.41. Gráfico de $\bar{u}_k$ . . . . .	78
7.42. Gráfico de las salidas $y_k$ . . . . .	80
7.43. Gráfico de los estados $x_k$ . . . . .	80
7.44. Gráfico de las entradas $u_k$ . . . . .	81
7.45. Gráfico de $\bar{u}_k$ . . . . .	81
7.46. Gráfico de las perturbaciones $d_k$ . . . . .	82
7.47. Gráfico de las salidas $y_k$ . . . . .	82
7.48. Gráfico de los estados observados $\hat{x}_k$ . . . . .	83
7.49. Gráfico de las entradas $u_k$ . . . . .	84
7.50. Gráfico de las Entradas $u_k$ entre los 350 y 700 segundos . . . . .	84
7.51. Gráfico de $\bar{u}_k$ . . . . .	85
7.52. Gráfico de las perturbaciones $d_k$ . . . . .	85
B.1. Diagrama Simulink Estado Cero . . . . .	98
B.2. Diagrama Simulink Seguimiento a Referencia . . . . .	99
B.3. <i>Subsystem, outputs: x_inf, u_barra_inf, r</i> . . . . .	99
B.4. Diagrama Simulink Estado Cero utilizando Observadores con Perturbaciones . . . . .	100
B.5. Diagrama Simulink Seguimiento a Referencia utilizando Observadores con Perturbaciones . . . . .	100
B.6. Diagrama Simulink Seguimiento a Referencia utilizando Observadores con Perturbaciones . . . . .	101
B.7. Diagrama Simulink Seguimiento a Referencia utilizando Observadores con Perturbaciones . . . . .	102

# 1 | Introducción

Hoy en día, los procesos en varios campos no solo requieren ajustarse a la resolución actual y el desarrollo de tareas que se hacen en el momento, sino que también a la previsibilidad para cumplir especificaciones técnicas específicas de acuerdo con las necesidades cambiantes. Por lo tanto, en la actualidad se dice que el objetivo del sistema de control es operar sobre las variables a manipular, de modo que se puedan satisfacer muchos criterios de desempeño, dada la presencia de cambios en las características específicas del proceso.

Una herramienta poderosa para abordar este desafío es la aplicación de un Control Predictivo por Modelo (MPC), que consiste en implementar un enfoque que utiliza un modelo de proceso para predecir la salida de la planta en un momento futuro, y con base en esto, optimizar las acciones de control futuras. En particular, se busca la eficiencia a partir de la implementación del Algoritmo del Método de los Multiplicadores de Lagrange con Direcciones Alternadas (ADMM). La combinación de estas técnicas representan una solución versátil, ya que se desarrolla en diferentes tipos de modelos, funciones de costo o restricciones, convirtiéndose en una metodología que puede ser mucho más reflexiva de los criterios de desempeño, relevantes en la industria de procesos.

## 1.1. Estado del Arte

El Control Predictivo por Modelo es un método de control avanzado de procesos, caracterizándose por tratar de predecir el comportamiento del sistema dinámico a través de un modelo interno y un algoritmo de predicción, diferenciándolo de otros métodos de control como lo son el clásico PID o LQR.

En la industria ha sido utilizado mayormente en plantas químicas y refinerías de petróleo desde la década de 1980. Más recientemente ha sido usado en modelos de estabilidad para sistemas de potencia [1].

La principal ventaja de MPC es la optimización de la ventana de tiempo inmediata, teniendo en cuenta las ventanas de tiempo futuras. Esto se consigue optimizando un horizonte de tiempo finito, pero implementando únicamente la ventana de tiempo actual. MPC tiene la capacidad de anticiparse a acontecimientos futuros y tomar acciones de control respecto a esto. Esta es una gran diferencia con los controladores PID y LQR, los cuales no poseen esta característica de predicción.

MPC puede trabajar de varias maneras, la más común es el modelo que tiene una función de costo cuadrático y restricciones lineales, con el que se puede hacer un algoritmo de Programación Cuadrática (QP), el que minimiza la función de costo por iteración.

Dentro de los distintos métodos de Programación Cuadrática (QP) que se pueden aplicar para MPC, el que se va a trabajar en esta memoria es el Algoritmo del Método de los Multiplicadores de Lagrange con Direcciones Alternadas (ADMM).

El Algoritmo del Método de los Multiplicadores de Lagrange con Direcciones Alternadas (ADMM) es un algoritmo de optimización que resuelve problemas convexos dividiéndolos en partes más pequeñas, donde cada una es más fácil de manejar. Este toma la forma de descomposición-coordinación, donde las soluciones a sub problemas locales se coordinan para encontrar una solución a un gran problema global. Un paso clave es la división de variables y diferentes esquemas de división conducen a diferentes algoritmos.

Este algoritmo es muy adecuado para la optimización convexa distribuida y en particular, para problemas de gran escala que surgen en estadística, aprendizaje automático y otras áreas relacionadas. Este algoritmo se desarrolló en la década de 1970, con raíces en la década de 1950, y está estrechamente relacionado con muchos otros algoritmos, tales como: descomposición dual, método de los multiplicadores, división de Douglas-Rachford, método de inversas parciales de Spingarn, proyecciones alternas de Dykstra, algoritmos iterativos de Bregman para problemas  $\ell_1$ , métodos proximales, entre otros.

## 1.2. Objetivos Específicos

Se esperan los siguientes objetivos principales:

- Construir un modelo matemático de un sistema de estanques acoplados en su representación en variables de estado.
- Linealizar el modelo matemático y decidir dónde linealizar.
- Plantear el problema QP en la Formulación Sparse para la resolución del problema de control con MPC.
- Programar y utilizar ADMM en código MATLAB formulado para la resolución de MPC.
- Diseñar diagrama de control MPC en Simulink.
- Agregar acción integral en el lazo de control para lograr referencia perfecta en estado estacionario utilizando la técnica de los observadores.

## 2 | Control Predictivo por Modelo

El Control Predictivo por Modelo es un método de control avanzado que ha tenido gran éxito durante las últimas décadas para resolver problemas de procesos industriales más complejos. Se utiliza mucho en procesos que requieran un rendimiento bastante alto. No tiene una estrategia de control determinada, lo que hace es agrupar una serie de algoritmos que se desarrollan bajo una misma idea central.

MPC resuelve un problema de control óptimo con un horizonte de tiempo finito en cada instante de muestreo en lazo abierto, luego aplica la primera entrada resultante hasta el siguiente instante de muestreo, para luego volver a resolver el problema de control óptimo en el siguiente instante de muestreo y así el sistema pueda seguir una referencia deseada. A pesar de que el problema de optimización es en lazo abierto, la estrategia no lo es, porque al tomar nuevas medidas antes de resolver el problema de optimización produce un control realimentado.

Las principales características de MPC:

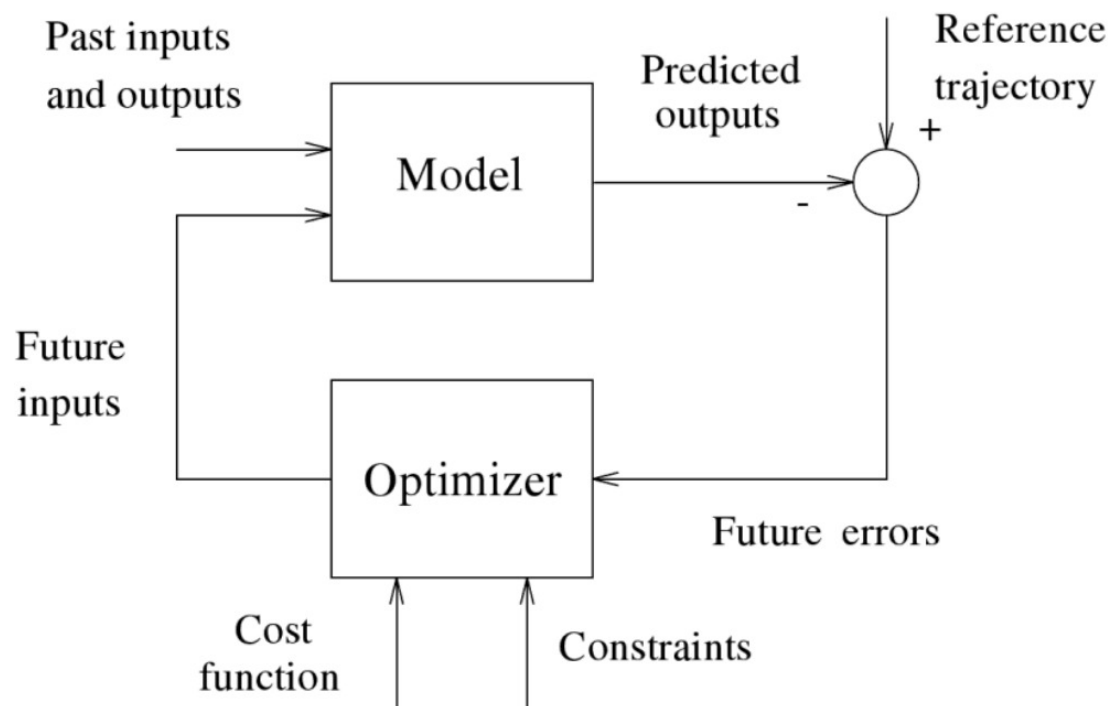
- Utiliza un modelo matemático del sistema, mediante su representación en variables de estado de tiempo discreto.
- La idea es bastante simple e intuitiva y no requiere matemáticas complejas.
- Resuelve un problema de optimización, generalmente minimizar una función de costo cuadrática.
- A diferencia de otros tipos de control, la ventaja que tiene es que se pueden incluir las restricciones que tiene el proceso.
- Pasar del caso SISO al caso MIMO es relativamente simple.

### 2.1. Funcionamiento Básico de MPC

MPC funciona en base a 4 elementos principales:

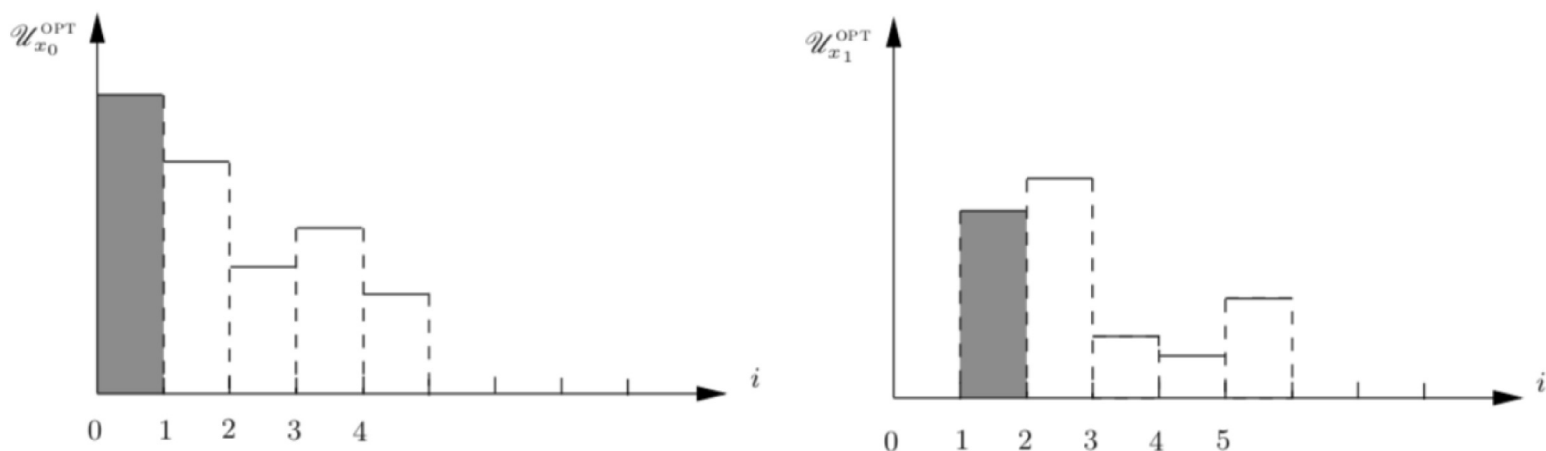
- Modelo matemático a controlar en su representación en variables de estado de tiempo discreto.
- Horizonte de control de tiempo finito de  $N$  muestras.
- Conjunto de restricciones: estados internos, entradas y salidas.
- Función de costo cuadrática a minimizar que penaliza las desviaciones de las entradas y estados de sus valores deseados.

El diagrama general de MPC es el siguiente:



**Figura 2.1:** Estructura Básica de MPC [2]

En cada instante de muestreo, lo primero que hace MPC es usar el modelo matemático del sistema más la medición u observación del estado, para poder predecir el futuro comportamiento del sistema a lo largo del horizonte de tiempo  $N$  de predicción. Estas predicciones las usa para encontrar una secuencia de acciones de control que minimicen la función de costo cuadrático, respetando las restricciones añadidas. Luego de calcular la secuencia de entradas óptimas, solo aplica la primera entrada hasta el siguiente instante de muestreo de control, para así medir o estimar los estados nuevos, repitiendo este proceso de optimización con un horizonte de predicción móvil (conocido en inglés como *receding horizon*) [3].



**Figura 2.2:** Funcionamiento del Horizonte Móvil

En la Figura 2.2 se muestra el vector óptimo para un horizonte  $t = 6$ . Solo se va a ejemplificar su funcionamiento para dos pasos. Inicialmente nos encontramos en el instante  $k = 0$ , en este momento el controlador calcula el vector de acciones de acuerdo a los requerimientos del sistema y solo aplica  $u_0^{opt}$ , representado por el área sombreada. Las demás acciones también se calculan y se obtienen, pero no son utilizadas.

A continuación, se avanza al paso 1, por lo que ahora nos encontramos en  $k = 1$ , con lo que el proceso vuelve a repetirse y del vector de acciones nuevamente se aplica solo  $u_0^{opt}$ , sin utilizar las demás acciones calculadas. Cabe

destacar que cada vez que se repite el proceso, por cada paso se calcula un vector de acciones diferente, por esta razón no se aplican todos los valores de un solo vector.

MPC es capaz de resolver sistemas lineales y no lineales. Si el sistema a controlar es lineal (o aproximadamente lineal en un rango de operación acotado), se define una función de costo cuadrática. Si las restricciones de las entradas y los estados son lineales, entonces se dice que el problema MPC es lineal. La ventaja de que el problema MPC sea de tipo lineal, es que el problema de optimización a resolver en cada instante de muestreo puede ser representado como la formulación canónica de un problema de Programación Cuadrática (QP) con restricciones de igualdad y desigualdad, la cual tiene la siguiente forma:

$$\min J(x) = \frac{1}{2}x^T Hx + h^T x \quad (2.1)$$

sujeto a las siguientes restricciones:

$$Ax = b \quad (2.2)$$

$$Cx \leq d \quad (2.3)$$

donde  $H$  tiene que ser definida semipositiva para que el problema sea convexo y sea posible encontrar un mínimo global [4].

## 2.2. Definición del Problema de Control

Se considera el siguiente sistema en variables de estado, el cual tiene las siguientes características:

- Es lineal.
- Es de tiempo discreto.
- Es invariante en el tiempo.

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (2.4)$$

$$y_k = C x_k \quad (2.5)$$

en donde  $x_k \in \mathbb{R}^n$  representa el valor de los  $n$  estados del sistema en el instante de muestreo  $k$ ,  $y_k \in \mathbb{R}^p$  y  $u_k \in \mathbb{R}^m$  corresponden a los vectores de  $p$  salidas y  $m$  entradas de control respectivamente.  $A_d \in \mathbb{R}^{n \times n}$ ,  $B_d \in \mathbb{R}^{n \times m}$  y  $C \in \mathbb{R}^{p \times n}$  representan las dinámicas del sistema.  $A_d$  describe la influencia del estado actual en el estado siguiente,  $B_d$  describe la influencia de la entrada actual en el estado siguiente y  $C$  describe cómo es que el estado afecta a la salida. Inicialmente se asume que todos los estados del sistema son medibles en el instante  $k$ .

Se necesita diseñar un controlador que logre que la salida del sistema siga una referencia deseada. Para esto se define el vector de error  $e_k \in \mathbb{R}^p$  como la diferencia entre la referencia  $r_k \in \mathbb{R}^p$  y la salida  $y_k$ :

$$e_k = r_k - y_k \quad (2.6)$$

Al considerar  $r_k = 0$ , es decir, se busca llevar la salida del sistema al origen, entonces  $e_k = -y_k$ . Para penalizar las

desviaciones del punto de equilibrio, es conveniente definir una función de costo asociada al cuadrado del error:

$$J_k = y_k^T y_k \quad (2.7)$$

Sustituyendo 2.5 en 2.7, se obtiene:

$$J_k = x_k^T \underbrace{C^T C}_{\Omega} x_k = x_k^T \Omega x_k \quad (2.8)$$

donde  $\Omega \in \mathbb{R}^n$  es una matriz de pesos que refleja la importancia relativa de cada estado en la determinación de la salida del sistema. Además, al considerar aspectos prácticos como el desgaste de los actuadores, restricciones físicas de las componentes del sistema, etc. conviene agregar un término cuadrático que penalice cambios drásticos en las entradas de control  $u_k$ , quedando la siguiente función de costo:

$$J_k = x_k^T \Omega x_k + u_k^T \Gamma u_k \quad (2.9)$$

donde la matriz  $\Gamma \in \mathbb{R}^{m \times m}$  representa factores de penalización definidas a tiempo de diseño.

Como el control predictivo necesita calcular el costo obtenido para las entradas futuras dentro del horizonte de predicción, se generaliza la función de costo como la suma de los costos individuales dentro del horizonte de predicción como:

$$J(x_k, u_k) = \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T \Omega x_k + u_k^T \Gamma u_k) + x_N^T \Omega_N x_N \quad (2.10)$$

donde  $x_N^T \Omega_N x_N$  representa un estado terminal con su correspondiente matriz de penalización  $\Omega_N \in \mathbb{R}^{n \times n}$  el que se introduce para aproximar el comportamiento de un lazo MPC con horizonte infinito (lo cual no es posible implementar en la práctica) mediante un lazo con horizonte finito. En general, la expresión terminal influencia la calidad del control logrado, la estabilidad del sistema, y la complejidad numérica del problema. La correcta selección de esta expresión no es un problema trivial, el cual se resuelve mediante heurísticas.

Para determinar la acción de control óptima a lo largo del horizonte, es necesario encontrar la secuencia de entradas  $\vec{u}^* = [u_0^{*T} \quad u_1^{*T} \quad \dots \quad u_{N-1}^{*T}]^T \in \mathbb{R}^{(m \cdot N)}$  que minimiza la función de costo a lo largo del horizonte de predicción. Suponiendo que se dispone de una medición o estimación del vector de estados actual  $x_k$ , se describe el problema QP de la siguiente manera:

$$\vec{u}^* = \arg \min_{\vec{u}} J(x_k, u_k) \quad (2.11)$$

sujeto a:

$$x_0 = x \quad (2.12)$$

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (2.13)$$

$$u^{min} \leq u_k \leq u^{max} \quad (2.14)$$

$$x^{min} \leq x_k \leq x^{max} \quad (2.15)$$

$$x_N^{min} \leq x_N \leq x_N^{max} \quad (2.16)$$

donde  $x_0$  es el estado inicial cuyo valor al instante  $k$  puede ser medido o estimado mediante un observador,  $u^{min}$  y  $u^{max} \in \mathbb{R}^m$  son los límites de los valores mínimos y máximos que puede tomar cada entrada,  $x^{min}$  y  $x^{max} \in \mathbb{R}^n$  son los límites de los valores mínimos y máximos que puede tomar cada estado,  $x_N^{min}$  y  $x_N^{max} \in \mathbb{R}^n$  son los límites para los valores mínimo y máximo del estado terminal  $N$ .

La formulación anterior plantea un problema de control en lazo abierto, ya que la secuencia de entradas óptimas calculadas en el instante  $k$  no considera alteraciones o perturbaciones que puedan ocurrir al momento de ejecutar las acciones futuras. En el caso de ocurrir perturbaciones, la aplicación de las entradas precalculadas no generarán la trayectoria óptima en los estados y salidas, generando una degradación en el desempeño o incluso inestabilidad en el sistema.

Usando el enfoque de *receding horizon*, se resuelve el problema de optimización de horizonte finito en cada tiempo de muestreo. Una vez que se determina la secuencia de entradas  $\vec{u}^*$ , se aplica solo el primer elemento  $u_0^*$  al sistema, sin tomar en cuenta el resto de los valores de la secuencia óptima. Luego, en el intervalo de muestreo siguiente se determinan los nuevos estados obtenidos a partir de la entrada aplicada y se define un nuevo problema de optimización con un nuevo valor inicial, lo cual introduce una realimentación indirecta, cerrando el lazo de control, evitando que las diferencias entre el estado medido y el predicho se propaguen a instantes futuros.

Resumen de los pasos a aplicar en cada instante de muestreo para MPC:

- Se mide o estima el estado de la planta  $x_k$  en el instante de muestreo  $k$ .
- Se plantea el problema QP.
- Se calcula la nueva función de costo y se resuelve para determinar la secuencia óptima de entradas que lo minimizan,  $\vec{u}^*$ .
- Se aplica el primer elemento de la entrada de la secuencia de control óptimo,  $u_0^*$ .
- Se repiten los pasos para el siguiente instante de muestreo,  $k + 1$ .

Una forma de resolver el problema QP es eligiendo como variables de decisión la entrada  $u_k$  y el estado  $x_k$ , obteniendo la forma denominada Formulación Sparse.

### 2.3. Formulación Sparse

Esta formulación se llama así porque las matrices que se usan para plantear el problema de optimización en la función de costo y las restricciones se denominan sparse. La matriz sparse es una matriz en la que la mayoría de sus elementos tienen valor cero [5]. No existe una definición exacta de la proporción de elementos con valor cero para que una matriz califique como sparse, pero un criterio bastante utilizado para denominar a una matriz sparse es que el número de elementos distintos a cero sea aproximadamente igual al número de filas o columnas de la matriz.

Esta forma de plantear el problema ocupa las entradas y los estados como variables de decisión. El problema de optimización planteado en 2.112 se puede reescribir como:

$$u_k^{opt} = \arg \min_{u_k} J_N(x_k, u_k) \quad (2.17)$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$x_0 = x \quad (2.18)$$

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (2.19)$$

$$\mathcal{J} x_k + \mathcal{E} u_k \leq d \quad (2.20)$$

$$\mathcal{J}_N x_N \leq d_N \quad (2.21)$$

La restricción 2.20 se construye con las restricciones 2.15 y 2.14.

La restricción 2.15 se puede escribir como una sola desigualdad escribiéndola de forma matricial. Para eso hay que separarla en dos inecuaciones:

$$x^{min} \leq x_k \leq x^{max} \quad (2.22)$$

$$x^{min} \leq x_k \quad x_k \leq x^{max} \quad (2.23)$$

$$-x_k \leq -x^{min} \quad x_k \leq x^{max} \quad (2.24)$$

Se agrupan las restricciones de desigualdad de 2.24 en una sola:

$$\begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} x_k \leq \begin{bmatrix} x^{max} \\ -x^{min} \end{bmatrix} \quad (2.25)$$

La restricción 2.14 se puede escribir como una sola desigualdad escribiéndola de forma matricial. Para eso hay que separarla en dos inecuaciones:

$$u^{min} \leq u_k \leq u^{max} \quad (2.26)$$

$$u^{min} \leq u_k \quad u_k \leq u^{max} \quad (2.27)$$

$$-u_k \leq -u^{min} \quad u_k \leq u^{max} \quad (2.28)$$

Se agrupan las restricciones de desigualdad de 2.28 en una sola:

$$\begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix} u_k \leq \begin{bmatrix} u^{max} \\ -u^{min} \end{bmatrix} \quad (2.29)$$

Se juntan las desigualdades matriciales 2.25 y 2.29 para formar la restricción 2.20:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{J}} x_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ -I \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} u_k \leq \underbrace{\begin{bmatrix} x^{max} \\ -x^{min} \\ u^{max} \\ -u^{min} \end{bmatrix}}_d \quad (2.30)$$

De la misma manera, la restricción 2.21 se construye con la restricción 2.16. Esta restricción se puede escribir

como una sola desigualdad escribiéndola de forma matricial, para eso hay que separarla en dos inecuaciones:

$$x_N^{min} \leq x_N \leq x_N^{max} \quad (2.31)$$

$$x_N^{min} \leq x_N \quad x_N \leq x_N^{max} \quad (2.32)$$

$$-x_N \leq -x_N^{min} \quad x_N \leq x_N^{max} \quad (2.33)$$

Se agrupan las restricciones de desigualdad de 2.33 en una sola:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}}_{\mathcal{J}_N} x_N \leq \underbrace{\begin{bmatrix} x_N^{max} \\ -x_N^{min} \end{bmatrix}}_{d_N} \quad (2.34)$$

Para que las matrices queden en la forma sparse, se define el siguiente vector que considera los estados y las entradas:

$$\theta = \begin{bmatrix} x_0^T & u_0^T & x_1^T & u_1^T & \dots & x_{N-1}^T & u_{N-1}^T & x_N^T \end{bmatrix}^T \quad (2.35)$$

Con el vector  $\theta$  ya definido, la función de costo se formula de la siguiente forma:

$$J_N(\theta) = \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \\ x_1 \\ u_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ u_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \Omega & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \Omega_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \\ x_1 \\ u_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ u_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \theta^T \mathcal{H} \theta \quad (2.36)$$

Al reescribir las restricciones de igualdad 2.18 y 2.19 en términos de  $\theta$  en forma matricial, se obtiene:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ A_d & B_d & -I & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & A_d & B_d & -I & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_d & B_d & -I \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \\ x_1 \\ u_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ u_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix}}_{\theta} = \underbrace{\begin{bmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathfrak{f}} \quad (2.37)$$

Al reescribir las restricciones de desigualdad 2.20 y 2.21 en términos de  $\theta$  en forma matricial, se obtiene:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathcal{J} & \mathcal{E} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathcal{J} & \mathcal{E} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathcal{J} & \mathcal{E} & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathcal{J}_N \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ u_0 \\ x_1 \\ u_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ u_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix}}_{\theta} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} d \\ d \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}}_{\mathfrak{g}} \quad (2.38)$$

Con la función de costo y las restricciones ya definidas, el problema de optimización QP queda de la siguiente forma:

$$\theta^{opt} = \underset{\theta}{\text{mín}} J_N(\theta) \quad (2.39)$$

Sujeto a

$$\mathcal{F}\theta = \mathfrak{f} \quad (2.40)$$

$$\mathcal{G}\theta \leq \mathfrak{g} \quad (2.41)$$

Estas restricciones de igualdad 2.40 y desigualdad 2.41, se pueden escribir como una sola restricción de desigualdad en caso de ser necesario:

$$M_x \theta \leq c_x \quad (2.42)$$

Para escribir la restricción de igualdad 2.40 como restricción de desigualdad se escribe de la siguiente forma:

$$\mathfrak{f} \leq \mathcal{F}\theta \leq \mathfrak{f} \quad (2.43)$$

Ahora se separa en dos ecuaciones de desigualdad:

$$\mathfrak{f} \leq \mathcal{F}\theta \quad \mathcal{F}\theta \leq \mathfrak{f} \quad (2.44)$$

$$-\mathcal{F}\theta \leq -\mathfrak{f} \quad \mathcal{F}\theta \leq \mathfrak{f} \quad (2.45)$$

Con esto, se pueden formar las matrices  $M_x$  y  $c_x$  de la restricción de desigualdad 2.42:

$$M_x = \begin{bmatrix} \mathcal{G} \\ \mathcal{F} \\ -\mathcal{F} \end{bmatrix} \quad c_x = \begin{bmatrix} \mathfrak{g} \\ \mathfrak{f} \\ -\mathfrak{f} \end{bmatrix} \quad (2.46)$$

## 2.4. Seguimiento a Referencia

Para que la salida siga una referencia distinta a cero ( $r \neq 0$ ), se necesita que  $y \rightarrow r$ , cuando el valor de la salida está en estado estacionario  $y_\infty$ . Para obtener el valor de las entradas y estados que logren llevar el valor de la salida hasta

el valor de referencia, se reescribe el sistema en variables de estado 2.4 y 2.5 en estado estacionario:

$$x_\infty = A_d x_\infty + B_d u_\infty \quad (2.47)$$

$$y_\infty = C x_\infty \quad (2.48)$$

Se reordena la ecuación 2.47 quedando de la siguiente forma:

$$x_\infty = (I - A_d)^{-1} B_d u_\infty \quad (2.49)$$

La ecuación 2.49 se reemplaza en 2.48:

$$y_\infty = C(I - A_d)^{-1} B_d u_\infty \quad (2.50)$$

Despejando  $u_\infty$  se obtiene el valor de la actuación (entrada) en estado estacionario:

$$u_\infty = [C(I - A_d)^{-1} B_d] r \quad (2.51)$$

Al calcular  $u_\infty$  es posible calcular  $x_\infty$  con la ecuación 2.49.

Con esto, ahora la función de costo a minimizar es la siguiente:

$$\text{mín } J = \sum_{k=0}^{N-1} \left[ (x_k - x_\infty)^T \Omega (x_k - x_\infty) + (u_k - u_\infty)^T \Gamma (u_k - u_\infty) \right] + (x_N - x_\infty)^T \Omega_N (x_N - x_\infty) \quad (2.52)$$

Sujeto a las restricciones:

$$x_0 = x \quad (2.53)$$

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (2.54)$$

$$u^{\min} \leq u_k \leq u^{\max} \quad (2.55)$$

$$x^{\min} \leq x_k \leq x^{\max} \quad (2.56)$$

$$x_N^{\min} \leq x_N \leq x_N^{\max} \quad (2.57)$$

Se hace el siguiente cambio de variables:

$$\tilde{x}_k = x_k - x_\infty \quad (2.58)$$

$$\tilde{u}_k = u_k - u_\infty \quad (2.59)$$

Con este cambio de variables, la función de costo a minimizar y sus restricciones quedan de esta forma:

$$\text{mín } J(\tilde{x}_k, \tilde{u}_k) = \sum_{k=0}^{N-1} \left( \tilde{x}_k^T \Omega \tilde{x}_k + \tilde{u}_k^T \Gamma \tilde{u}_k \right) + \tilde{x}_N^T \Omega_N \tilde{x}_N \quad (2.60)$$

sujeto a las restricciones:

$$\tilde{x}_0 = \tilde{x} \quad (2.61)$$

$$\tilde{x}_{k+1} + x_\infty = A_d(\tilde{x}_k + x_\infty) + B_d(\tilde{u}_k + u_\infty) \quad (2.62)$$

$$u^{\min} - u_\infty \leq \tilde{u}_k \leq u^{\max} - u_\infty \quad (2.63)$$

$$x^{\min} - x_\infty \leq \tilde{x}_k \leq x^{\max} - x_\infty \quad (2.64)$$

$$x_N^{\min} - x_\infty \leq \tilde{x}_N \leq x_N^{\max} - x_\infty \quad (2.65)$$

Con esto, el problema de optimización hay que llevarlo a su Formulación Sparse.

$$\tilde{u}_k^{opt} = \arg \min_{\tilde{u}_k} J_N(\tilde{x}_k, \tilde{u}_k) \quad (2.66)$$

Sujeto a las siguientes restricciones:

$$x_0 = \tilde{x} \quad (2.67)$$

$$\tilde{x}_{k+1} = A_d \tilde{x}_k + B_d \tilde{u}_k \quad (2.68)$$

$$\mathcal{J} \tilde{x}_k + \mathcal{E} \tilde{u}_k \leq \tilde{d} \quad (2.69)$$

$$\mathcal{J}_N \tilde{x}_N \leq \tilde{d}_N \quad (2.70)$$

Reordenando las restricciones 2.63, 2.64 para dejarlas como la restricción 2.69, queda:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I \\ -I \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathcal{J}} \tilde{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ -I \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \tilde{u}_k \leq \underbrace{\begin{bmatrix} x^{\max} - x_\infty \\ -x^{\min} + x_\infty \\ u^{\max} - u_\infty \\ -u^{\min} + u_\infty \end{bmatrix}}_{\tilde{d}} \quad (2.71)$$

Haciendo lo mismo con la restricción 2.65 para dejarla como la restricción 2.70:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}}_{\mathcal{J}_N} \tilde{x}_N \leq \underbrace{\begin{bmatrix} x_N^{\max} - x_\infty \\ -x_N^{\min} + x_\infty \end{bmatrix}}_{\tilde{d}_N} \quad (2.72)$$

Y la función de costo a minimizar 2.60 queda reescrita de la siguiente forma:

$$J_N(\tilde{\theta}) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{u}_0 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{N-1} \\ \tilde{u}_{N-1} \\ \tilde{x}_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \Omega & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \Omega_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{u}_0 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{N-1} \\ \tilde{u}_{N-1} \\ \tilde{x}_N \end{bmatrix} = \tilde{\theta}^T \mathcal{H} \tilde{\theta} \quad (2.73)$$

Por lo que el problema de optimización queda:

$$\tilde{\theta}^{opt} = \min_{\tilde{\theta}} J_N(\tilde{\theta}) \quad (2.74)$$

Sujeto a

$$\mathcal{F} \tilde{\theta} = \tilde{f} \quad (2.75)$$

$$\mathcal{G} \tilde{\theta} \leq \tilde{g} \quad (2.76)$$

donde  $\mathcal{F}$  y  $\mathcal{G}$  son las mismas matrices de 2.37 y 2.38 y:

$$\tilde{f} = \begin{bmatrix} -\tilde{x} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \quad \tilde{g} = \begin{bmatrix} \tilde{d} \\ \tilde{d} \\ \vdots \\ \tilde{d}_N \end{bmatrix} \quad (2.77)$$

Con esto, del vector  $\tilde{\theta}$  se elige solo la primera entrada que corresponde a la desviación óptima de la entrada que permite seguir la referencia deseada, por lo que la entrada óptima a aplicar es:

$$u^{opt} = \tilde{u}_0^{opt} + u_\infty \quad (2.78)$$

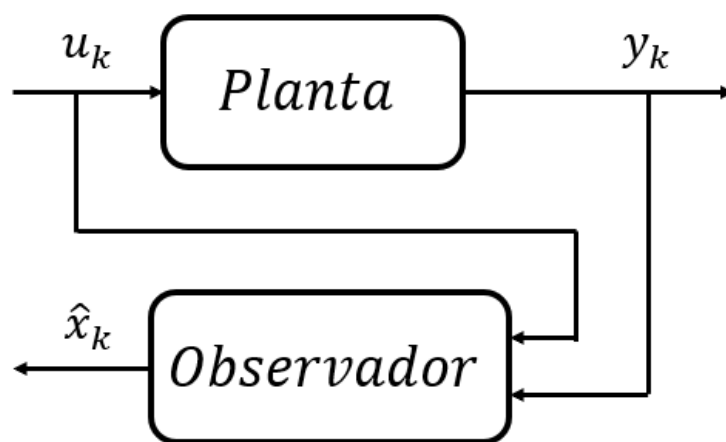
Al usar seguimiento a referencia no asegura obtener error cero en estado estacionario. Para arreglar esto, es necesario utilizar observadores y estimar las perturbaciones, esto permite realizar una acción integral en el controlador y se podrá minimizar el error a cero.

## 2.5. Observadores y Perturbaciones

### 2.5.1. Observadores

Muchas veces no es posible medir directamente todos los estados del sistema, ya sea porque estos no son accesibles o no es económicamente viable. Por esto, una opción es obtener una estimación de los estados a través de un observador de estados.

El observador de estados es un sistema dinámico en el que sus estados convergen a los estados del sistema observado [6]. Dependiendo del número de estados observados, el observador puede ser de orden completo o de orden reducido. A continuación se muestra el diagrama del observador.



**Figura 2.3:** Diagrama de Bloques del Observador de Estados

Considerando que se quieren estimar los estados  $x_k$  del sistema:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (2.79)$$

$$y_k = C x_k \quad (2.80)$$

Para esto se considera la aproximación del estado como  $\hat{x}_k$  del modelo:

$$\hat{x}_{k+1} = A_d \hat{x}_k + B_d u_k \quad (2.81)$$

Esta reconstrucción del estado, es posible hacerla utilizando las mediciones de la salida  $y_k$ . Esto puede realizarse introduciendo la realimentación de la diferencia entre la medición y la salida estimada,  $y_k - C \hat{x}_k$ , obteniendo:

$$\hat{x}_{k+1} = A_d \hat{x}_k + B_d u_k + L_d (y_k - C \hat{x}_k) \quad (2.82)$$

donde  $L_d$  es una matriz de ganancia.

El término  $L_d(y_k - C \hat{x}_k)$  no afecta en la ecuación 2.82 si la salida medida es igual a la estimación de la salida generada por la estimación del estado. Se define el error entre el estado real y el estado estimado como:

$$\check{x}_k = x_k - \hat{x}_k \quad (2.83)$$

Reescribiendo la ecuación 2.82 con la expresión del error 2.83 se obtiene:

$$\check{x}_{k+1} = A_d \check{x}_k - L_d(y_k - C \hat{x}_k) = (A_d - L_d C) \check{x}_k \quad (2.84)$$

Como las matrices  $A_d$  y  $C$  son constantes, la matriz  $L_d$  se tiene que escoger de manera que los autovalores del observador que vienen dados por  $(A_d - L_d C)$  tienen que ser asintóticamente estables. Esto hará que el error  $\check{x}_k \rightarrow 0$ , logrando que  $\hat{x}_k \approx x_k$ , pudiendo reconstruir el estado del sistema con la estimación  $\hat{x}_k$ .

## 2.5.2. Observador Extendido

Muchas veces el observador mostrado anteriormente no sirve para reconstruir los estados, esto debido a las perturbaciones que pueden sufrir los sistemas y estas afectan la estimación de los estados. Al generalizar este problema, se puede describir un modelo con perturbaciones de la siguiente forma:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k + B_d d_k \quad (2.85)$$

$$y_k = C x_k + e_k \quad (2.86)$$

donde  $d_k$  es la perturbación de entrada y  $e_k$  es la perturbación de salida.

La perturbación  $d_k$  se considera como constante en el tiempo, por lo que cumple con lo siguiente:

$$d_{k+1} = d_k \quad (2.87)$$

Al considerar esta perturbación, se aumenta el grado del sistema, por lo que se define un nuevo vector de estados:

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix} \quad (2.88)$$

Con esto, el sistema aumentado viene dado por:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ d_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} A_d & B_d \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{A_z} \begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_z} u_k \quad (2.89)$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{C_z} \begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix} \quad (2.90)$$

Siguiendo los mismos pasos vistos anteriormente para el observador básico, se tiene el siguiente observador para el sistema aumentado:

$$\hat{z}_{k+1} = A_z \hat{z}_k + B_z u_k + L_z (y_k - C_z \hat{z}_k) \quad (2.91)$$

con los autovalores del observador dados por  $(A_z - L_z C_z)$ .

Su diagrama es el siguiente:

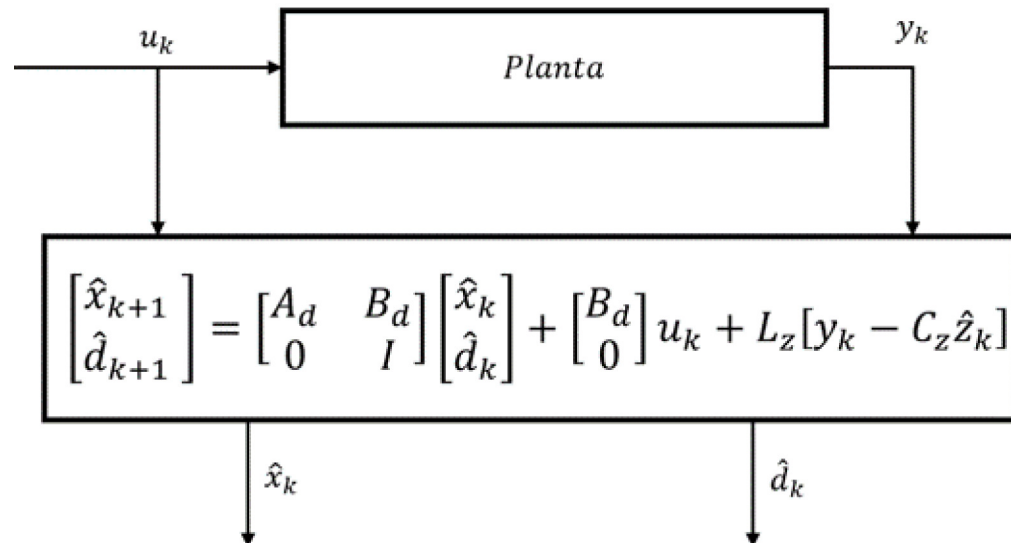


Figura 2.4: Diagrama del Observador

Teniendo la ganancia del observador del sistema aumentado, esta estimación es posible representarla en la forma de variables de estado. Reagrupando la ecuación 2.91 se obtiene:

$$\bar{x}_{k+1} = A_{obs}\bar{x}_k + B_{obs}\bar{u}_k \quad (2.92)$$

$$\bar{y}_k = C_{obs}\bar{x}_k \quad (2.93)$$

donde

$$A_{obs} = A_z - L_z C_z; \quad B_{obs} = \begin{bmatrix} B_z & L_z \end{bmatrix}; \quad C_{obs} = I \quad (2.94)$$

y

$$\text{entrada : } \bar{u}_k = \begin{bmatrix} u_k \\ y_k \end{bmatrix} \quad \text{salida : } \bar{y}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{d}_k \end{bmatrix} \quad (2.95)$$

### 2.5.3. Seguimiento a Referencia con Estimación de la Perturbación

Usando el observador extendido, se tiene la siguiente representación:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k + B_d d_k \quad (2.96)$$

$$y_k = C x_k \quad (2.97)$$

Como se vio anteriormente para el seguimiento a referencia, se sabe que en estado estacionario  $y_\infty \rightarrow r$  y la perturbación  $d_k$  se considera constante y como una estimación, por lo que  $d_k = \hat{d}$ . Por lo tanto, en estado estacionario se tiene:

$$x_\infty = A_d x_\infty + B_d u_\infty + B_d \hat{d} \quad (2.98)$$

$$y_\infty = C x_\infty \quad (2.99)$$

Reordenando la ecuación 2.98 para despejar  $x_\infty$  se tiene:

$$x_\infty - A_d x_\infty = B_d (u_\infty + \hat{d}) \quad (2.100)$$

$$(I - A_d)x_\infty = B_d (u_\infty + \hat{d}) \quad (2.101)$$

$$x_\infty = (I - A_d)^{-1} B_d (u_\infty + \hat{d}) \quad (2.102)$$

Reemplazando 2.102 en 2.99:

$$y_\infty = C(I - A_d)^{-1} B_d (u_\infty + \hat{d}) \quad (2.103)$$

Se despeja  $u_\infty$  de la ecuación 2.103:

$$[C(I - A_d)^{-1} B_d]^{-1} y_\infty = u_\infty + \hat{d} \quad (2.104)$$

$$u_\infty = [C(I - A_d)^{-1} B_d]^{-1} y_\infty - \hat{d} \quad (2.105)$$

$$u_\infty = [C(I - A_d)^{-1} B_d]^{-1} r - \hat{d} \quad (2.106)$$

Con esto, se logra conseguir acción integral y seguimiento a referencia cuando hay perturbaciones constantes utilizando la técnica de los observadores.

## 2.6. Pre Estabilización de la Planta

Adicionalmente, ahora se agrega una característica más a la planta: la inestabilidad. Esto se debe a que la planta en tiempo discreto tiene sus polos  $\lambda\{A_d \geq 1\}$ . Por este problema que se presenta, hay que pre estabilizar el sistema, una forma de hacerlo es usando la siguiente ley de control:

$$u_k = -Lx_k + \bar{u}_k \quad (2.107)$$

La ecuación anterior se reemplaza en la ecuación 2.4 por lo que queda:

$$x_{k+1} = (A_d - B_d L)x_k + B_d \bar{u}_k \quad (2.108)$$

con  $\bar{A} = A_d - B_d L$  donde  $\lambda\{\bar{A}\} < 1$ . Con esto ahora se tiene un sistema estable.

Con esto se reescribe el nuevo sistema:

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k + B_d \bar{u}_k \quad (2.109)$$

$$y_k = Cx_k \quad (2.110)$$

Sujeto a la siguiente restricción:

$$u^{min} \leq \bar{u}_k - Lx_k \leq u^{max} \quad (2.111)$$

Con estos cambios, el problema QP se describe de la siguiente manera:

$$\bar{u}^* = \arg \min_{\bar{u}} J(x_k, \bar{u}_k) \quad (2.112)$$

sujeto a:

$$u^{\min} \leq \bar{u}_k - Lx_k \leq u^{\max} \quad (2.113)$$

$$x_0 = x \quad (2.114)$$

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k + B_d\bar{u}_k \quad (2.115)$$

$$x^{\min} \leq x_k \leq x^{\max} \quad (2.116)$$

$$x_N^{\min} \leq x_N \leq x_N^{\max} \quad (2.117)$$

El diagrama del nuevo sistema de control es el siguiente:

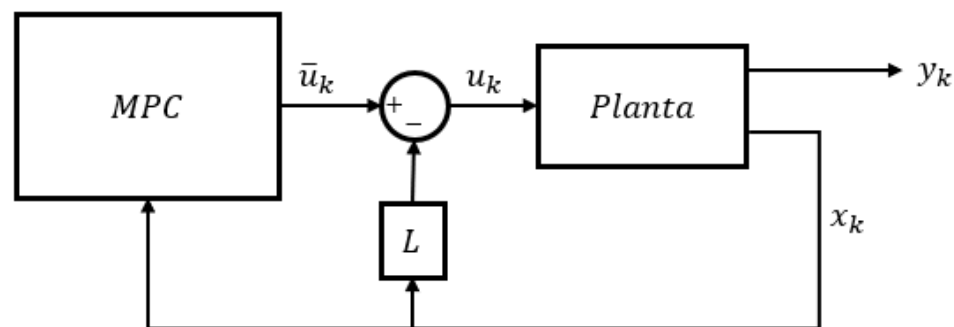


Figura 2.5: Diagrama de Bloques MPC

### 2.6.1. Formulación Sparse

$$u_k^{opt} = \arg \min_{\bar{u}_k} J_N(x_k, \bar{u}_k) \quad (2.118)$$

Sujeto a:

$$x_0 = x \quad (2.119)$$

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k + B_d\bar{u}_k \quad (2.120)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I \\ -I \\ -L \\ L \end{bmatrix}}_{\mathcal{J}} x_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ -I \end{bmatrix}}_{\mathcal{E}} \bar{u}_k \leq \underbrace{\begin{bmatrix} x^{\max} \\ -x^{\min} \\ u^{\max} \\ -u^{\min} \end{bmatrix}}_d \quad (2.121)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}}_{\mathcal{J}_N} x_N \leq \underbrace{\begin{bmatrix} x_N^{\max} \\ -x_N^{\min} \end{bmatrix}}_{d_N} \quad (2.122)$$

Función de costo matricial:

$$J_N(\theta) = \begin{bmatrix} x_0 \\ \bar{u}_0 \\ x_1 \\ \bar{u}_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ \bar{u}_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \Omega & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \Omega_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_0 \\ \bar{u}_0 \\ x_1 \\ \bar{u}_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ \bar{u}_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix} = \theta^T \mathcal{H} \theta \quad (2.123)$$

Restricciones matriciales:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} -I & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ A_d & B_d & -I & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & A_d & B_d & -I & 0 & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & A_d & B_d & -I \end{bmatrix}}_{\mathcal{F}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ \bar{u}_0 \\ x_1 \\ \bar{u}_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ \bar{u}_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix}}_{\theta} = \underbrace{\begin{bmatrix} -x \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}}_{\mathfrak{f}} \quad (2.124)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \mathfrak{J} & \mathcal{E} & 0 & 0 & \dots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \mathfrak{J} & \mathcal{E} & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \mathfrak{J} & \mathcal{E} & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \mathcal{J}_N \end{bmatrix}}_{\mathcal{G}} \underbrace{\begin{bmatrix} x_0 \\ \bar{u}_0 \\ x_1 \\ \bar{u}_1 \\ \vdots \\ x_{N-1} \\ \bar{u}_{N-1} \\ x_N \end{bmatrix}}_{\theta} \leq \underbrace{\begin{bmatrix} d \\ d \\ \vdots \\ d_N \end{bmatrix}}_{\mathfrak{s}} \quad (2.125)$$

## 2.6.2. Seguimiento a Referencia

Sistema en variables de estado en estado estacionario:

$$x_\infty = \bar{A}x_\infty + B_d\bar{u}_\infty \quad (2.126)$$

$$y_\infty = Cx_\infty \quad (2.127)$$

Expresiones en estado estacionario:

$$x_\infty = (I - \bar{A})^{-1} B_d \bar{u}_\infty \quad (2.128)$$

$$y_\infty = C (I - \bar{A})^{-1} B_d \bar{u}_\infty \quad (2.129)$$

$$\bar{u}_\infty = \left[ C (I - \bar{A})^{-1} B_d \right] r \quad (2.130)$$

$$u_\infty = \bar{u}_\infty - L x_\infty \quad (2.131)$$

Cambio de variables:

$$\tilde{x}_k = x_k - x_\infty \quad (2.132)$$

$$\tilde{u}_k = \bar{u} - \bar{u}_\infty \quad (2.133)$$

Formulación Sparse.

$$\tilde{u}_k^{opt} = \arg \min_{\tilde{u}_k} J_N(\tilde{x}_k, \tilde{u}_k) \quad (2.134)$$

Restricciones:

$$x_0 = \tilde{x} \quad (2.135)$$

$$\tilde{x}_{k+1} = A_d \tilde{x}_k + B_d \tilde{u}_k \quad (2.136)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I \\ -I \\ -L \\ L \end{bmatrix}}_{\mathfrak{S}} \tilde{x}_k + \underbrace{\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ I \\ -I \end{bmatrix}}_{\mathfrak{E}} \tilde{u}_k \leq \underbrace{\begin{bmatrix} x^{max} - x_\infty \\ -x^{min} + x_\infty \\ u^{max} + Lx_\infty - \bar{u}_\infty \\ -u^{min} - Lx_\infty + \bar{u}_\infty \end{bmatrix}}_{\tilde{d}} \quad (2.137)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} I \\ -I \end{bmatrix}}_{\mathcal{J}_N} \tilde{x}_N \leq \underbrace{\begin{bmatrix} x_N^{max} - x_\infty \\ -x_N^{min} + x_\infty \end{bmatrix}}_{\tilde{d}_N} \quad (2.138)$$

La función de costo matricial:

$$J_N(\tilde{\theta}) = \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{u}_0 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{N-1} \\ \tilde{u}_{N-1} \\ \tilde{x}_N \end{bmatrix}^T \begin{bmatrix} \Omega & 0 & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & 0 \\ 0 & \Gamma & 0 & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & \Omega & 0 & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \Gamma & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \dots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \Omega_N \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \tilde{x}_0 \\ \tilde{u}_0 \\ \tilde{x}_1 \\ \tilde{u}_1 \\ \vdots \\ \tilde{x}_{N-1} \\ \tilde{u}_{N-1} \\ \tilde{x}_N \end{bmatrix} = \tilde{\theta}^T \mathcal{H} \tilde{\theta} \quad (2.139)$$

Problema de optimización:

$$\tilde{\theta}^{opt} = \underset{\tilde{\theta}}{\text{mín}} J_N(\tilde{\theta}) \quad (2.140)$$

Sujeto a:

$$\mathcal{F}\tilde{\theta} = \tilde{f} \quad (2.141)$$

$$\mathcal{G}\tilde{\theta} \leq \tilde{g} \quad (2.142)$$

Del vector  $\tilde{\theta}$  se elige solo la primera entrada:

$$\bar{u}^{opt} = \tilde{u}_0^{opt} + \bar{u}_\infty \quad (2.143)$$

Su diagrama es el siguiente:

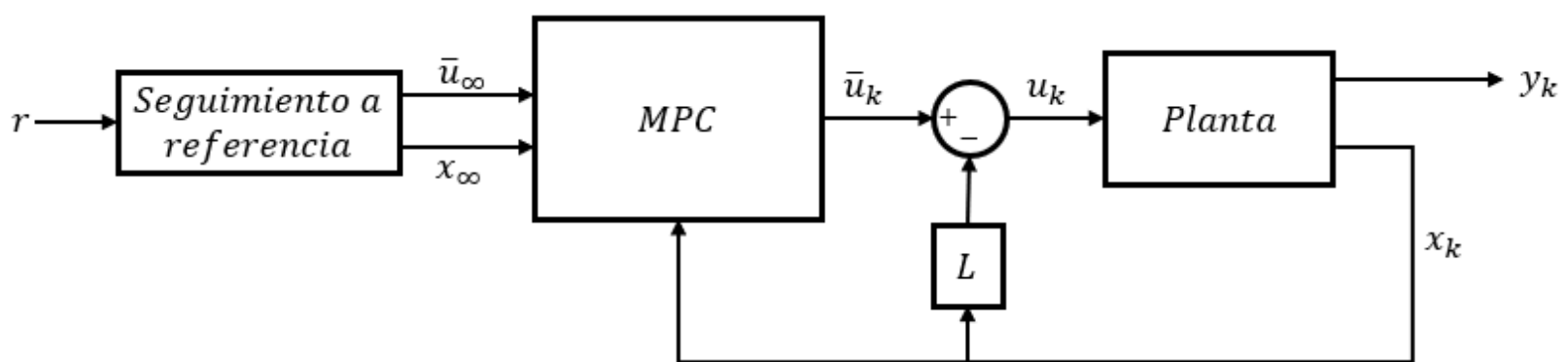


Figura 2.6: Diagrama de Bloques MPC Referencia

### 2.6.3. Observadores

Estimación de los estados  $x_k$  del sistema estabilizado:

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k + B_d\bar{u}_k \quad (2.144)$$

$$y_k = Cx_k \quad (2.145)$$

Aproximación del estado  $\hat{x}_k$ :

$$\hat{x}_{k+1} = \bar{A}\hat{x}_k + B_d\bar{u}_k \quad (2.146)$$

Reconstrucción del estado utilizando la salida  $y_k$ :

$$\hat{x}_{k+1} = \bar{A}\hat{x}_k + B_d\bar{u}_k + L_d(y_k - C\hat{x}_k) \quad (2.147)$$

Error entre el estado real y el estado estimado como:

$$\check{x}_k = x_k - \hat{x}_k \quad (2.148)$$

Reescribiendo la ecuación 2.147 con la expresión del error 2.148 se obtiene:

$$\check{x}_{k+1} = \bar{A}\check{x}_k - L_d(y_k - C\hat{x}_k) = (\bar{A} - L_dC)\check{x}_k \quad (2.149)$$

#### 2.6.4. Observador Extendido

Modelo con perturbaciones:

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k + B_d\bar{u}_k + B_d d_k \quad (2.150)$$

$$y_k = Cx_k + e_k \quad (2.151)$$

Se aumenta el grado del sistema y se define un nuevo vector de estado:

$$z_k = \begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix} \quad (2.152)$$

Sistema aumentado:

$$\begin{bmatrix} x_{k+1} \\ d_{k+1} \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} \bar{A} & B_d \\ 0 & I \end{bmatrix}}_{A_z} \begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix} + \underbrace{\begin{bmatrix} B_d \\ 0 \end{bmatrix}}_{B_z} \bar{u}_k \quad (2.153)$$

$$y_k = \underbrace{\begin{bmatrix} C & 0 \end{bmatrix}}_{C_z} \begin{bmatrix} x_k \\ d_k \end{bmatrix} \quad (2.154)$$

Observador para el sistema aumentado:

$$\hat{z}_{k+1} = A_z\hat{z}_k + B_z\bar{u}_k + L_z(y_k - C_z\hat{z}_k) \quad (2.155)$$

Representación en la forma de variables de estado:

$$\bar{x}_{k+1} = A_{obs}\bar{x}_k + B_{obs}\bar{u}_k \quad (2.156)$$

$$\bar{y}_k = C_{obs}\bar{x}_k \quad (2.157)$$

donde

$$A_{obs} = A_z - L_zC_z; \quad B_{obs} = \begin{bmatrix} B_z & L_z \end{bmatrix}; \quad C_{obs} = I \quad (2.158)$$

y

$$\text{entrada : } \bar{u}_k = \begin{bmatrix} \bar{u}_k \\ y_k \end{bmatrix} \quad \text{salida : } \bar{y}_k = \begin{bmatrix} \hat{x}_k \\ \hat{d}_k \end{bmatrix} \quad (2.159)$$

### 2.6.5. Seguimiento a Referencia con Estimación de la Perturbación

Representación en estado estacionario:

$$x_{\infty} = \bar{A}x_{\infty} + B_d\bar{u}_{\infty} + B_d\hat{d} \quad (2.160)$$

$$y_{\infty} = Cx_{\infty} \quad (2.161)$$

Expresiones en estado estacionario:

$$x_{\infty} = (I - \bar{A})^{-1} B_d(\bar{u}_{\infty} + \hat{d}) \quad (2.162)$$

$$y_{\infty} = C(I - \bar{A})^{-1} B_d(\bar{u}_{\infty} + \hat{d}) \quad (2.163)$$

$$\bar{u}_{\infty} = [C(I - \bar{A})^{-1} B_d]^{-1} r - \hat{d} \quad (2.164)$$

$$u_{\infty} = \bar{u}_{\infty} - Lx_{\infty} \quad (2.165)$$

El diagrama completo del sistema de control es el siguiente:

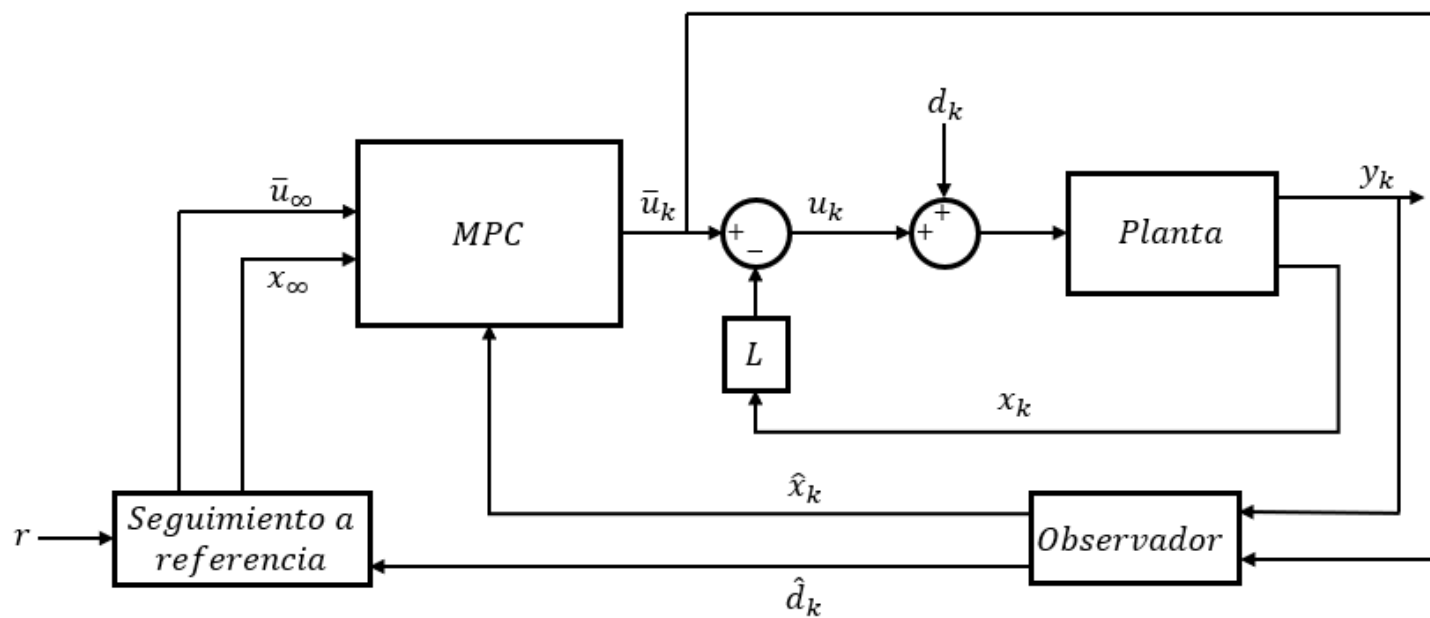


Figura 2.7: Diagrama de Bloques Completo del Sistema

## 3 | Método de Optimización

La teoría clásica de la optimización consiste en un conjunto de métodos y resultados analíticos y numéricos que se enfocan en encontrar e identificar el mejor candidato en un conjunto de alternativas, sin necesariamente enumerar y evaluar todas estas alternativas. En general, un problema de optimización es un problema de toma de decisiones [7].

Los problemas de MPC se resuelven con métodos de optimización no lineal, generalmente programación cuadrática, que en la función objetivo contiene términos cuadráticos y el conjunto de factibilidad puede ser especificado con ecuaciones e inecuaciones lineales.

A continuación se presenta el método de optimización a utilizar, el Algoritmo del Método de los Multiplicadores de Lagrange con Direcciones Alternadas (ADMM).

### 3.1. Algoritmo del Método de los Multiplicadores de Lagrange con Direcciones Alternadas (ADMM)

ADMM empezó a desarrollarse en la década de 1960, hasta tener su nombre propio a principio de 1970. Este algoritmo está estrechamente relacionado con diversos otros, como lo son: la *Descomposición Dual*, los *Métodos Proximales*, la división de *Douglas-Rachford*, entre muchos otros [8].

ADMM en particular nace de la combinación de dos métodos. El primero es el principio de la *Descomposición Dual*, el que permite dividir el problema de optimización en dos funciones de costo, las que se resuelven paralelamente y transforma un problema grande en dos más pequeños. El segundo es el *Método de los Multiplicadores Aumentados de Lagrange*, el que se basa en el método de los lagrangianos, pero que agrega un término adicional conocido como "aumentado", obteniendo de este método la estructura y propiedades favorables para poder conseguir la convergencia que se desea.

#### 3.1.1. Descomposición Dual

Se considera el siguiente problema:

$$\min_x f(x) \tag{3.1}$$

sujeto a:

$$Ax = b \quad (3.2)$$

con  $f(x)$  estrictamente convexa y cerrada. Se define el lagrangiano:

$$L(x, u) = f(x) + u^T (Ax - b) \quad (3.3)$$

El gradiente de la descomposición dual se repite para  $k = 1, 2, 3, \dots$

$$x^{(k)} = \arg \min_x L(x, u^{(k-1)}) \quad (3.4)$$

$$u^{(k)} = u^{(k-1)} + t_k (Ax^{(k)} - b) \quad (3.5)$$

### 3.1.2. Método de los Multiplicadores Aumentados de Lagrange

Acá se modifica el problema, para  $\rho > 0$ :

$$\min_x f(x) + \frac{\rho}{2} \|Ax - b\|_2^2 \quad (3.6)$$

Se modifica el lagrangiano:

$$L_\rho(x, u) = f(x) + u^T (Ax - b) + \frac{\rho}{2} \|Ax - b\|_2^2 \quad (3.7)$$

y se repite para  $k = 1, 2, 3, \dots$

$$x^{(k)} = \arg \min_x L_\rho(x, u^{(k-1)}) \quad (3.8)$$

$$u^{(k)} = u^{(k-1)} + \rho (Ax^{(k)} - b) \quad (3.9)$$

### 3.1.3. Método de los Multiplicadores de Lagrange con Direcciones Alternadas

ADMM lo que hace es combinar lo mejor de ambos métodos. Se tiene el siguiente problema:

$$\min_{x,z} f(x) + g(z) \quad (3.10)$$

sujeto a:

$$Ax + Bz = c \quad (3.11)$$

Se define el lagrangiano aumentado para  $\rho > 0$ :

$$L_\rho(x, z, u) = \underbrace{f(x) + g(z)}_{\text{Función de Costo}} + \underbrace{u^T (Ax + Bz - c)}_{\text{Multiplicadores de Lagrange}} + \underbrace{\frac{\rho}{2} \|Ax + Bz - c\|_2^2}_{\text{Término Proximal Aumentado}} \quad (3.12)$$

se repite para  $k = 1, 2, 3, \dots$

$$x^{(k)} = \arg \min_x L_\rho(x, z^{(k-1)}, u^{(k-1)}) \quad (3.13)$$

$$z^{(k)} = \arg \min_x L_\rho(x^{(k-1)}, z^{(k)}, u^{(k-1)}) \quad (3.14)$$

$$u^{(k)} = u^{(k-1)} + \rho(Ax^{(k)} + Bz^{(k)} - c) \quad (3.15)$$

Para  $f$  y  $g$ , las iteraciones de ADMM satisfacen para cualquier  $\rho > 0$ , lo siguiente:

- **Convergencia Residual:**  $r^{(k)} = Ax^{(k)} + Bz^{(k)} - c \rightarrow 0$  cuando  $k \rightarrow \infty$ .
- **Convergencia Objetiva:**  $f(x^{(k)}) + g(z^{(k)}) \rightarrow f^* + g^*$ , donde  $f^* + g^*$  es el valor objetivo primal óptimo.
- **Convergencia Dual:**  $u^{(k)} \rightarrow u^*$ , donde  $u^*$  es una solución dual.

Si se sigue desarrollando el lagrangiano aumentado 3.12:

$$L_\rho(x, z, u) = f(x) + g(z) + u^T(Ax + Bz - c) + \frac{\rho}{2}(Ax + Bz - c)^T(Ax + Bz - c) \quad (3.16)$$

Se factoriza con el término  $\frac{\rho}{2}$ :

$$L_\rho(x, z, u) = f(x) + g(z) + \frac{\rho}{2} \left[ (Ax + Bz - c)^T(Ax + Bz - c) + \frac{2}{\rho} u^T(Ax + Bz - c) \right] \quad (3.17)$$

Se expanden los términos cuadráticos:

$$L_\rho(x, z, u) = f(x) + g(z) + \frac{\rho}{2} \left[ x^T A^T A x + 2x^T A^T (Bz - c) + \|Bz - c\|^2 + \frac{2}{\rho} x^T A^T u + \frac{2}{\rho} u^T (Bz - c) \right] \quad (3.18)$$

Se reordenan los términos:

$$L_\rho(x, z, u) = f(x) + g(z) + \frac{\rho}{2} \left[ \left\| Ax + Bz - c + \frac{u}{\rho} \right\|^2 + \|Bz - c\|^2 + \frac{2}{\rho} u^T (Bz - c) - \left\| Bz - c + \frac{u}{\rho} \right\|^2 \right] \quad (3.19)$$

Para finalmente reordenar la ecuación de la siguiente forma:

$$L_\rho(x, z, u) = f(x) + g(z) + \frac{\rho}{2} \left[ \left\| Ax + Bz - c + \frac{u}{\rho} \right\|^2 - \frac{\rho}{2} \left\| \frac{u}{\rho} \right\|^2 \right] \quad (3.20)$$

El siguiente paso a seguir es hacer un cambio de variables  $w = \frac{u}{\rho}$ , con esto, el lagrangiano aumentado queda de la siguiente forma:

$$L_\rho(x, z, w) = f(x) + g(z) + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz - c + w\|_2^2 - \frac{\rho}{2} \|w\|_2^2 \quad (3.21)$$

y ADMM se actualiza de acuerdo a [9]:

$$x^{(k)} = \arg \min_x f(x) + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz^{(k-1)} - c + w^{(k-1)}\|_2^2 \quad (3.22)$$

$$z^{(k)} = \arg \min_z g(z) + \frac{\rho}{2} \|Ax^{(k)} + Bz - c + w^{(k-1)}\|_2^2 \quad (3.23)$$

$$w^{(k)} = w^{(k-1)} + Ax^{(k)} + Bz^{(k)} - c \quad (3.24)$$

Notar que la iteración  $k$ -ésima de  $w(k)$  es una suma de los residuos:

$$w^{(k)} = w^{(0)} + \sum_{i=1}^k (Ax^{(i)} + Bz^{(i)} - c) \quad (3.25)$$

## 3.2. Algoritmo ADMM para la Formulación Sparse

En esta sección, se va a ver la formulación de ADMM para Programación Cuadrática para usarse en la Formulación Sparse. Esta se basa en el paper *Embedded ADMM-based QP Solver for MPC with polytopic constraints* [10].

El problema QP que se plantea para MPC es el siguiente:

$$\min_x \frac{1}{2} x^T H x + h^T x \quad (3.26)$$

sujeto a las restricciones:

$$Gx \leq g \quad (3.27)$$

$$Fx = f \quad (3.28)$$

donde  $H$  tiene que ser definida semi positiva. ADMM está definido solo para restricciones de igualdad y la restricción 3.27 es de desigualdad. Para solucionar esto, la restricción de desigualdad hay que transformarla en una restricción de igualdad, esto es posible mediante la utilización de una variable de holgura  $z$ , por lo que la nueva restricción queda así:

$$Gx + z = g \quad (3.29)$$

Con esto se genera una nueva restricción:

$$z \geq 0 \quad (3.30)$$

Pero esta nueva restricción es posible definirla en la función objetivo como una función indicatriz, la cual puede tomar dos valores  $\{0, 1\}$ . Esta función toma el valor de 1 si es que  $z$  pertenece al conjunto definido, en caso contrario, esta función toma el valor de 0. Con esto, el problema QP se puede representar de la siguiente manera:

$$\min_{x,z} \underbrace{\frac{1}{2} x^T H x + h^T x}_{f(x)} + \underbrace{I_Z(z)}_{g(z)} \quad (3.31)$$

sujeto a:

$$Ax + Bz = c \quad (3.32)$$

con

$$A = \begin{bmatrix} G \\ F \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} \quad c = \begin{bmatrix} g \\ f \end{bmatrix} \quad (3.33)$$

$$I_Z(z) : \text{función indicatriz.} \quad (3.34)$$

De esta manera, el algoritmo de ADMM para un problema general del tipo QP viene dado por:

$$x^{(k+1)} = \arg \min_x f(x) + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz^{(k)} - c + w^{(k)}\|^2 \quad (3.35)$$

$$z^{(k+1)} = \arg \min_z g(z) + \frac{\rho}{2} \|Ax^{(k+1)} + Bz - c + w^{(k)}\|^2 \quad (3.36)$$

$$w^{(k+1)} = w^{(k)} + Ax^{(k+1)} + Bz^{(k+1)} - c \quad (3.37)$$

Los sub problemas descritos en las ecuaciones 3.35, 3.36 y 3.37 tienen una única solución por si solas las cuales se obtienen encontrando su punto crítico. Esto se hace derivando la expresión e igualándola a cero. A continuación, se van a encontrar los óptimos de las ecuaciones mencionadas anteriormente.

La ecuación 3.35 en función de la variable  $x$  que corresponde al primer paso del algoritmo de ADMM para un problema QP se describe:

$$x^{(k+1)} = \arg \min_x \frac{1}{2} x^T H x + h^T x + \frac{\rho}{2} \|Ax + Bz^{(k)} - c + w^{(k)}\|^2 \quad (3.38)$$

Trabajando la expresión cuadrática y haciendo las simplificaciones correspondiente queda:

$$x^{(k+1)} = \arg \min_x \frac{1}{2} x^T (H + \rho A^T A) x + \rho (Bz^{(k)} - c + w^{(k)})^T A x + \frac{\rho}{2} \|Bz^{(k)} - c + w^{(k)}\|^2 \quad (3.39)$$

Al derivar la ecuación 3.39 e igualarla a cero, se obtiene la expresión que minimiza la variable  $x^{(k+1)}$ :

$$x^{(k+1)} = (H + \rho A^T A)^{-1} [-h - \rho A^T (Bz^{(k)} - c + w^{(k)})] \quad (3.40)$$

El segundo paso a seguir de ADMM es el de la ecuación 3.36 que está en función de la variable  $z$ , el cual para un problema QP está dado por:

$$z^{(k+1)} = \arg \min_z I_{\mathbb{Z}}(z) + \frac{\rho}{2} \|Ax^{(k+1)} + Bz - c + w^{(k)}\|^2 \quad (3.41)$$

Buscando la expresión que minimiza  $z^{(k+1)}$ , es posible notar que se puede plantear como un problema de optimización que viene dado por:

$$z^{(k+1)} = \arg \min_z \frac{\rho}{2} \|Ax^{(k+1)} + Bz - c + w^{(k)}\|^2 \quad (3.42)$$

sujeto a:

$$z \geq 0 \quad (3.43)$$

donde la función  $g(z)$  que corresponde a la función indicatriz, se puede plantear como una restricción de desigualdad.

El término  $Bz$  es equivalente a la siguiente matriz:

$$Bz = \begin{bmatrix} I \\ 0 \end{bmatrix} z = \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} \quad (3.44)$$

Al reemplazar la matriz obtenida en 3.44 en la ecuación 3.42 se obtiene:

$$z^{(k+1)} = \arg \min_z \frac{\rho}{2} \left\| Ax^{(k+1)} + \begin{bmatrix} z \\ 0 \end{bmatrix} - c + w^{(k)} \right\|^2 \quad (3.45)$$

sujeto a:

$$z \geq 0 \quad (3.46)$$

Dado que se está optimizando en función de  $z$ , no se tomará en cuenta la segunda fila de las matrices ya que no poseen esta variable. De este análisis, la función a optimizar se reduce a:

$$z^{(k+1)} = \arg \min_z \frac{\rho}{2} \|Gx^{(k+1)} + z - g + w^{(k)}\|^2 \quad (3.47)$$

sujeto a

$$z \geq 0 \quad (3.48)$$

Para el análisis que sigue, se va a hacer un cambio de notación, esto para facilitar la descripción del método que se usa para encontrar el óptimo de  $z^{(k+1)}$ .

Esta función de costo, 3.47 se puede reescribir agrupando términos, para lo que se define que  $z_i > d - a_i$ , donde se usa la variable auxiliar  $a_i = Gx^{(k+1)} - g + w_1^{(k)}$  donde  $w^{(k)} = [w_1^{(k)} \quad w_2^{(k)}]^T$ . De esta forma, la función de costo se puede expresar como:

$$z_i^{(k+1)} = \arg \min_{z_i} \frac{\rho}{2} \|z_i - a_i\|^2 \quad (3.49)$$

sujeto a

$$z_i \geq 0 \quad (3.50)$$

La solución de este problema de optimización es igual a  $\max(0, a_i)$  donde el óptimo de esta función de costo es  $a_i$ , en el caso de que este valor sea negativo por la restricción de no negatividad, la solución sería cero. Volviendo a las expresiones originales, la solución de este paso de ADMM corresponde a:

$$z^{(k+1)} = \max \{0, g - Gx^{(k+1)} - w^{(k)}\} \quad (3.51)$$

Finalmente, el algoritmo de ADMM para un problema QP viene dado por:

$$x^{(k+1)} = (H + \rho A^T A)^{-1} [-h - \rho A^T (Bz^{(k)} - c + w^{(k)})] \quad (3.52)$$

$$z^{(k+1)} = \max \{0, g - Gx^{(k+1)} - w^{(k)}\} \quad (3.53)$$

$$w^{(k+1)} = w^{(k)} + Ax^{(k+1)} + Bz^{(k+1)} - c \quad (3.54)$$

## 4 | Muestreo del Sistema

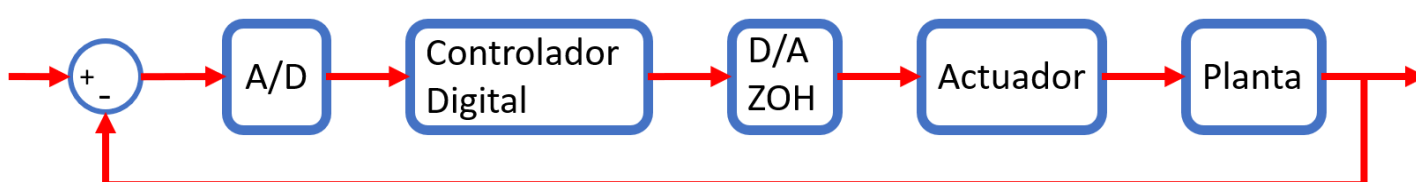
El control digital, que es a través de un computador, cada vez se ha vuelto más común en reemplazo del control análogo. Para hacer control digital es necesario que exista una comunicación coordinada entre el controlador y la planta.

Para esto, es necesario convertir las señales análogas continuas en señales de tipo discretas para que entren al controlador digital y este pueda leerlas e interpretarlas. Esto se logra utilizando la técnica de muestreo. Luego, estas señales de tipo discretas hay que volver a convertirlas en señales análogas continuas para que actúen sobre la planta.

Esto se hace mediante Conversores Análogo Digital, que convierten señales análogas continuas en señales de tipo discretas (A-D). Para hacer el proceso inverso están los Conversores Digital Análogo, que convierten las señales de tipo discretas en señales análogas continuas. El proceso de reconstrucción de la señal viene dado por un Retenedor de Orden Cero (ZOH, por sus siglas en inglés, *Zero Order Hold*).

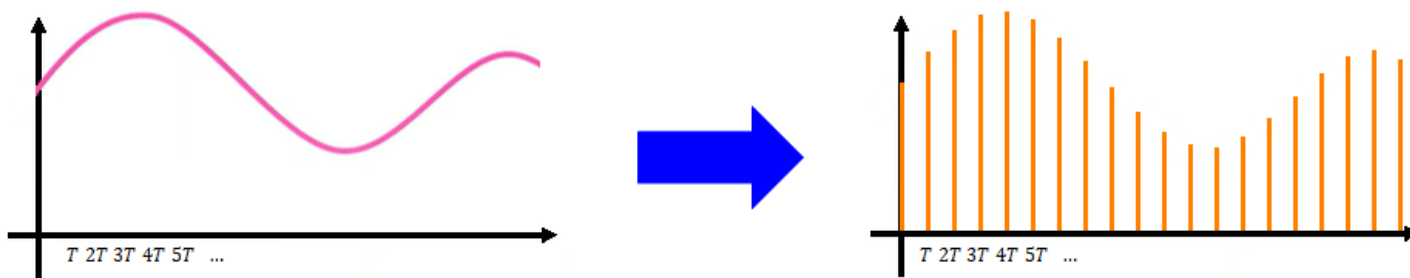
### 4.1. Muestreo con Retenedor de Orden Cero (ZOH)

En la Figura 4.1 se presenta el diagrama de bloques de un sistema de control digital.



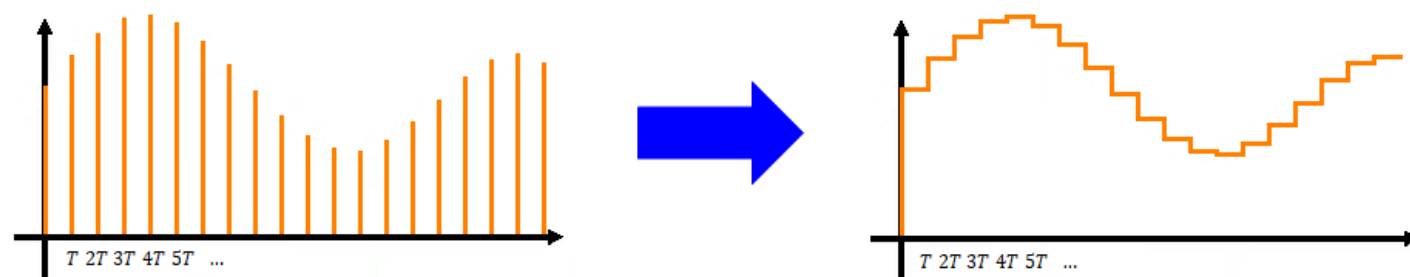
**Figura 4.1:** Diagrama de Bloques Sistema de Control Digital

Una señal análoga entra al Conversor Análogo Digital, este la muestrea en periodos iguales mediante impulsos para obtener los datos de la señal análoga y transformarla en una señal digital, la cual entra al controlador digital para ser leída e interpretada para la acción de control. A continuación se muestra una señal análoga de entrada y cómo queda una vez que es muestreada por el Conversor Análogo Digital.



**Figura 4.2:** Conversión de Señal Análoga a Digital

Luego, esta señal digital tiene que volver a convertirse en continua, por lo que entra al Convertidor Digital Análogo. Acá se aproxima la señal mediante un retenedor de orden cero, donde la primera muestra se retiene hasta la siguiente muestra por lo que queda constante, hasta obtener el siguiente dato el cual nuevamente se retiene y así sucesivamente. De esta forma se aproxima una señal continua teniendo una señal discreta. A continuación se muestra cómo queda la señal una vez que pasa por el Conversor Digital Análogo.



**Figura 4.3:** Conversión de Señal Digital a Análoga

Ahora esta misma idea se va a explicar para un sistema en tiempo continuo que está expresado en su forma de variables de estado.

Se tiene el sistema de tiempo continuo en variables de estado:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \quad (4.1)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad (4.2)$$

Se quiere llegar a la siguiente representación de variables de estado del sistema en tiempo discreto:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (4.3)$$

$$y_k = C x_k + D u_k \quad (4.4)$$

Donde  $u(t)$  se mantiene constante en todo un intervalo de muestreo  $kT \leq t < (k+1)T$ . Como  $y(t)$  solo depende de los valores presentes y no de la dinámica del sistema, la ecuación discreta 4.4 es directa de la ecuación 4.2, por lo que las matrices  $C$  y  $D$  no cambian.

A continuación se presenta la solución de la ecuación de estados [11] y la discretización invariante al escalón para obtener el modelo discretizado del sistema.

### 4.1.1. Solución de la Ecuación de Estados

La ecuación homogénea de 4.1 es:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) \quad (4.5)$$

Cuya solución es:

$$x(t) = e^{A_c(t-t_0)} x(t_0) \quad (4.6)$$

con  $x(t_0)$  el vector de condiciones iniciales.

La matriz  $e^{A_c t}$  se puede obtener desarrollando la serie de Taylor como:

$$e^{A_c t} = I + A_c t + \frac{A_c^2 t^2}{2!} + \frac{A_c^3 t^3}{3!} + \dots \quad (4.7)$$

Definiendo una nueva matriz como:

$$\Phi(t) = e^{A_c t} \quad (4.8)$$

la ecuación 4.6 se puede reescribir así:

$$x(t) = \Phi(t - t_0) x(t_0) \quad (4.9)$$

con esto, la solución de la ecuación 4.1 no homogénea tendrá la siguiente forma:

$$x(t) = \Phi(t - t_0) \alpha_1(t) \quad (4.10)$$

Derivando la ecuación 4.10 respecto a  $t$ , se obtiene:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} x(t) &= A_c \Phi(t - t_0) \alpha_1(t) + \Phi(t - t_0) \frac{d}{dt} \alpha_1(t) \\ &= A_c x(t) + \Phi(t - t_0) \frac{d}{dt} \alpha_1(t) \end{aligned} \quad (4.11)$$

Al comparar la ecuación 4.11 con la ecuación 4.1, se observa que:

$$\Phi(t - t_0) \frac{d}{dt} \alpha_1(t) = B_c u(t) \quad (4.12)$$

Resolviendo se obtiene:

$$\alpha_1(t) = \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau - t_0) B_c u(\tau) d\tau + \alpha_2 \quad (4.13)$$

con esto, la solución de la ecuación de estados es la siguiente:

$$\begin{aligned} x(t) &= \Phi(t - t_0) \alpha_1(t) = \Phi(t - t_0) \left[ \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau - t_0) B_c u(\tau) d\tau + \alpha_2 \right] \\ &= \Phi(t - t_0) \alpha_2 + \Phi(t - t_0) \int_{t_0}^t \Phi^{-1}(\tau - t_0) B_c u(\tau) d\tau \end{aligned} \quad (4.14)$$

dado que

$$\Phi(t - t_0)\Phi^{-1}(\tau - t_0) = e^{A_c(t-t_0)}e^{-A_c(\tau-t_0)} = e^{A_c(t-\tau)} = \Phi(t - \tau) \quad (4.15)$$

la ecuación 4.14 se puede escribir de la siguiente forma:

$$x(t) = \Phi(t - t_0)\alpha_2 + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)B_c u(\tau)d\tau \quad (4.16)$$

Para calcular el vector constante  $\alpha_2$ , la ecuación 4.16 se evalúa en  $t = t_0$ :

$$x(t_0) = \Phi(0)\alpha_2 = \alpha_2 \quad (4.17)$$

La solución de la ecuación de estado queda:

$$x(t) = \Phi(t - t_0)x(t_0) + \int_{t_0}^t \Phi(t - \tau)B_c u(\tau)d\tau \quad (4.18)$$

La matriz  $\Phi(t)$  es conocida como matriz de transición o matriz fundamental.

#### 4.1.2. Solución de la Ecuación de Estados con la Transformada de Laplace

Otra forma es aplicar la transformada de Laplace a la ecuación 4.1.

$$sX(s) - x(0) = A_c X(s) + B_c U(s) \quad (4.19)$$

Se reordena:

$$[sI - A_c]X(s) = x(0) + B_c U(s) \quad (4.20)$$

Se multiplica por la inversa de  $[sI - A_c]$  por la izquierda:

$$X(s) = [sI - A_c]^{-1}x(0) + [sI - A_c]^{-1}B_c U(s) \quad (4.21)$$

Al aplicar la transformada de Laplace inversa:

$$x(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ [sI - A_c]^{-1} \} x(0) + \mathcal{L}^{-1} \{ [sI - A_c]^{-1} B_c u(t) \} \quad (4.22)$$

Al comparar la ecuación 4.22 con la ecuación 4.18 se observa lo siguiente:

- El primer término de la ecuación 4.22 corresponde a la solución de la ecuación homogénea cuando  $u(t) = 0$ .
- El segundo término de la ecuación 4.22 corresponde a la solución particular de la ecuación no homogénea para una entrada  $u(t) \neq 0$ .
- Para obtener la matriz de transición  $\Phi(t)$  se iguala el primer término de las ecuaciones 4.22 y 4.18, con lo que queda:

$$x(t) = \Phi(t)x(0) = \mathcal{L}^{-1} \{ [sI - A_c]^{-1} \} x(0) \quad (4.23)$$

esto implica que:

$$\Phi(t) = \mathcal{L}^{-1} \{ [sI - A_c]^{-1} \} \quad (4.24)$$

### 4.1.3. Discretización Invariante al Escalón

Para hallar  $A_d$  y  $B_d$ , hay que trabajar la ecuación 4.1. Primero se reordena la ecuación.

$$\dot{x}(t) - A_c x(t) = B_c u(t) \quad (4.25)$$

Se multiplica a ambos lados por la izquierda por la matriz exponencial  $e^{-A_c t}$ .

$$e^{-A_c t} (\dot{x}(t) - A_c x(t)) = e^{-A_c t} B_c u(t) \quad (4.26)$$

El lado izquierdo se puede expresar de la siguiente forma:

$$\frac{d(e^{-A_c t} A_c x(t))}{dt} = e^{-A_c t} B_c u(t) \quad (4.27)$$

Se aplica la integral desde 0 a  $t$  a ambos lados de la ecuación:

$$e^{-A_c t} x(t) - x(0) = \int_0^t e^{-A_c \tau} B_c u(\tau) d\tau \quad (4.28)$$

Se despeja  $x(t)$ :

$$e^{-A_c t} x(t) = x(0) + \int_0^t e^{-A_c \tau} B_c u(\tau) d\tau \quad (4.29)$$

$$x(t) = e^{A_c t} x(0) + e^{A_c t} \int_0^t e^{-A_c \tau} B_c u(\tau) d\tau \quad (4.30)$$

En la ecuación 4.30 se consideran dos instantes de tiempo, uno para  $t = kT$  y otro para  $t = (k + 1)T$ :

$$x(kT) = e^{A_c kT} x(0) + e^{A_c kT} \int_0^{kT} e^{-A_c \tau} B_c u(\tau) d\tau \quad (4.31)$$

$$x((k + 1)T) = e^{A_c (k+1)T} x(0) + e^{A_c (k+1)T} \int_0^{(k+1)T} e^{-A_c \tau} B_c u(\tau) d\tau \quad (4.32)$$

La ecuación 4.31 se multiplica por  $e^{A_c T}$ :

$$e^{A_c T} x(kT) = e^{A_c (k+1)T} x(0) + e^{A_c (k+1)T} \int_0^{kT} e^{-A_c \tau} B_c u(\tau) d\tau \quad (4.33)$$

Luego se restan la ecuación 4.32 con la ecuación 4.33:

$$x((k + 1)T) - e^{A_c T} x(kT) = e^{A_c (k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A_c \tau} B_c u(\tau) d\tau \quad (4.34)$$

Se despeja  $x((k + 1)T)$  y como  $u(\tau)$  es constante en todo el intervalo de integración, se puede sacar de la integral:

$$x((k + 1)T) = e^{A_c T} x(kT) + e^{A_c(k+1)T} \int_{kT}^{(k+1)T} e^{-A_c \tau} d\tau B_c u(kT) \quad (4.35)$$

Se realiza el siguiente cambio de variables:  $v = \tau - kT \rightarrow dv = d\tau$ .

$$x((k + 1)T) = e^{A_c T} x(kT) + e^{A_c(k+1)T} \int_0^T e^{-A_c(v+kT)} dv B_c u(kT) \quad (4.36)$$

El término constante  $e^{-A_c kT}$  se puede sacar de la integral:

$$x((k + 1)T) = e^{A_c T} x(kT) + e^{A_c T} \int_0^T e^{-A_c v} dv B_c u(kT) \quad (4.37)$$

Se realiza otro cambio de variables:  $z = T - v \rightarrow dz = -dv$ .

$$x((k + 1)T) = e^{A_c T} x(kT) - e^{A_c T} \int_{-T}^0 e^{-A_c(T-z)} dz B_c u(kT) \quad (4.38)$$

Se saca de la integral el término  $e^{-A_c T}$ :

$$\underbrace{x((k + 1)T)}_{x_{k+1}} = \underbrace{e^{A_c T}}_{A_d} \underbrace{x(kT)}_{x_k} + \underbrace{\int_0^T e^{A_c z} dz B_c}_{B_d} \underbrace{u(kT)}_{u_k} \quad (4.39)$$

Con esto se llega a que  $A_d = e^{A_c T}$  y  $B_d = \int_0^T e^{A_c z} dz B_c$ . Por lo tanto, el sistema en variables de estado en tiempo discreto queda:

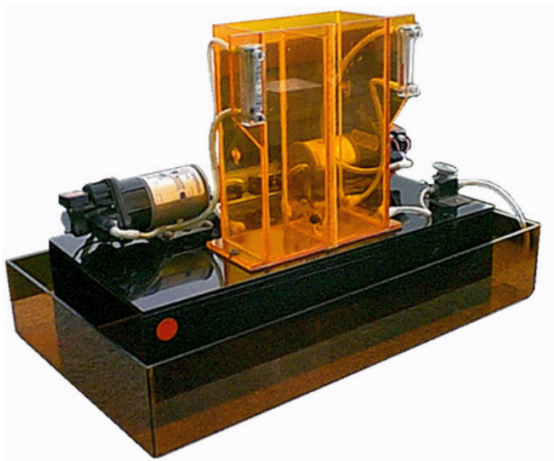
$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (4.40)$$

$$y_k = C x_k \quad (4.41)$$

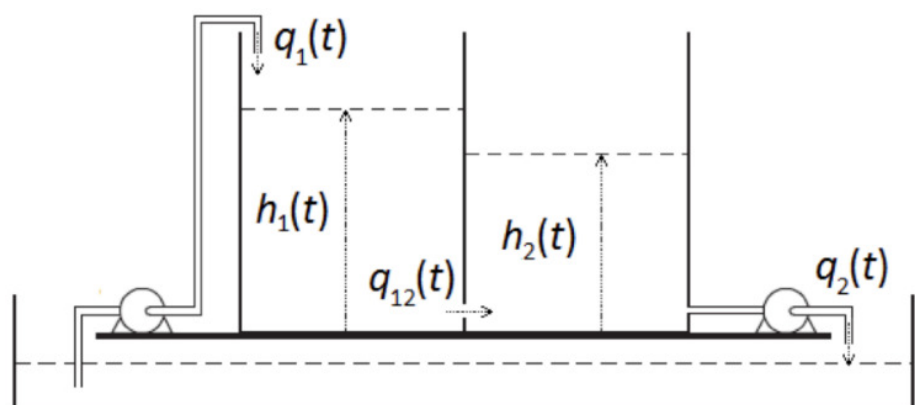
## 5 | Modelado del Sistema

### 5.1. Planta de Interés

La planta a trabajar es de tipo hidráulica y corresponde a unos Estanques Acoplados. Está compuesta por dos estanques de acrílico de base cuadrada y comparten una pared en común. En la pared que tienen en común se encuentra un orificio, el cual permite el flujo de agua entre un estanque y otro. Al primer estanque, por su parte superior se le suministra agua mediante una bomba conectada a un reservorio en el fondo. Al segundo estanque, se le extrae el agua por la parte inferior mediante una segunda bomba, la que se encuentra conectada al reservorio de la base. En la Figura 5.1 se muestra el sistema real de Estanques Acoplados y su esquema con las variables de interés.



(a) Estanques Acoplados



(b) Diagrama Estanques Acoplados

**Figura 5.1:** Sistema de Estanques Acoplados

Al poder medir el nivel de ambos estanques  $h_1(t)$  y  $h_2(t)$ , y actuar mediante las bombas sobre los caudales de entrada y salida  $q_1(t)$  y  $q_2(t)$ , se tiene dos variables de actuación que afectan a dos variables de salida. Por esto se puede clasificar el sistema como de Múltiples Entradas y Múltiples Salidas (MIMO).

### 5.2. Modelo Matemático de los Estanques Acoplados

Para obtener el modelo matemático del sistema de Estanques Acoplados hay que hacer el balance de volumen de agua para cada uno de los estanques.

Partiendo con el balance del estanque 1 se tiene:

$$V_1(t) = V_1(0) + V_{1in}(t) - V_{1out}(t) \quad (5.1)$$

Esta ecuación dice que el volumen de agua, en  $[cm^3]$ , que hay en el estanque 1 en el instante  $t$  ( $V_1(t)$ ), es igual al volumen de agua en el instante inicial ( $V_1(0)$ ), más el volumen de agua que entra ( $V_{1in}(t)$ ), menos el volumen de agua que sale ( $V_{1out}(t)$ ).

Como el sistema es dinámico, la ecuación 5.1 se puede expresar en forma diferencial, derivándola respecto al tiempo.

$$\frac{dV_1(t)}{dt} = \frac{dV_{1in}(t)}{dt} - \frac{dV_{1out}(t)}{dt} \quad (5.2)$$

Esta ecuación dice que la tasa de cambio del volumen de agua es igual a la velocidad del volumen de agua que entra al estanque 1, también conocido como caudal, en  $[cm^3/s]$ , menos la velocidad del volumen de agua que sale del estanque 1. Dado que el volumen del estanque tiene un área constante  $A_1$  y lo que varía es la altura, en  $[cm]$ ,  $h_1(t)$ , se puede volver a reescribir esta ecuación como:

$$A_1 \frac{dh_1(t)}{dt} = q_{1in}(t) - q_{1out}(t) \quad (5.3)$$

De manera análoga se llega a la siguiente ecuación del estanque 2:

$$A_2 \frac{dh_2(t)}{dt} = q_{2in}(t) - q_{2out}(t) \quad (5.4)$$

Como se aprecia en la Figura 5.1b, el caudal que sale del estanque 1 ( $q_{1out}(t)$ ), es el mismo caudal que entra al estanque 2 ( $q_{2in}(t)$ ), por lo que  $q_{12}(t) = q_{1out}(t) = q_{2in}(t)$ . El área basal de ambos estanques es la misma, por lo que  $A = A_1 = A_2$ . El caudal de agua que entra al estanque 1 se va a renombrar como  $q_1(t)$  y el caudal que sale del estanque 2 se va a renombrar como  $q_2(t)$ . Por lo que el sistema queda escrito de la siguiente manera:

$$\begin{cases} \frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - q_{12}(t) \\ A \frac{dh_2(t)}{dt} = q_{12}(t) - q_2(t) \end{cases} \quad (5.5)$$

Para calcular el caudal de traspaso del estanque 1 al estanque 2 ( $q_{12}(t)$ ), hay que utilizar la ecuación de Bernoulli.

$$P_1 + \frac{1}{2}\rho v_1^2 + \rho g h_1 = P_2 + \frac{1}{2}\rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (5.6)$$

Acá se asume que la presión  $P_1 = P_2$  y que la velocidad  $v_1$  es mucho menor que  $v_2$ , por lo que  $v_1 = 0$ . Por lo que la ecuación queda así:

$$\rho g h_1 = \frac{1}{2} \rho v_2^2 + \rho g h_2 \quad (5.7)$$

Despejando para encontrar  $v_2$ :

$$v_2 = \sqrt{2g(h_1 - h_2)} \quad (5.8)$$

Se sabe que el caudal es área por velocidad, nombrando como  $a_{12}$  el área del orificio entre ambos estanques, el caudal  $q_{12}(t)$  queda de la siguiente manera:

$$q_{12}(t) = a_{12} v_2 = a_{12} \sqrt{2g(h_1(t) - h_2(t))} \quad (5.9)$$

Si la parte constante, que es el coeficiente de traspaso en [ $cm^{2.5}/s$ ], lo llamamos  $\kappa$ ,  $\kappa = a_{12} \sqrt{2g}$

$$q_{12}(t) = \kappa \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \quad (5.10)$$

Por lo que el sistema queda finalmente:

$$\begin{cases} A \frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - q_{12}(t) \\ A \frac{dh_2(t)}{dt} = q_{12}(t) - q_2(t) \\ q_{12}(t) = \kappa \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \quad \text{si } h_1(t) \geq h_2(t) \end{cases} \quad (5.11)$$

### 5.3. Modelo Linealizado de los Estanques Acoplados

Para trabajar el sistema, primero hay que linealizar este modelo no lineal en torno a un punto de trabajo de interés, para luego analizarlo de mejor manera.

Para esto se toma la primera ecuación del sistema 5.11:

$$A \frac{dh_1(t)}{dt} = q_1(t) - \kappa \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} \quad (5.12)$$

De la ecuación 5.12 se define el siguiente cambio de variables:

$$\blacksquare x_1 \triangleq \frac{dh_1(t)}{dt}; x_2 \triangleq q_1(t); x_3 \triangleq h_1(t); x_4 \triangleq h_2(t)$$

Ahora se puede reescribir como  $f_a(x_1) = f_b(x_2, x_3, x_4)$  con:

$$f_a(x_1) = Ax_1 \quad (5.13)$$

$$f_b(x_2, x_3, x_4) = x_2 - \kappa \sqrt{x_3 - x_4} \quad (5.14)$$

Utilizando la aproximación de la serie de Taylor en torno al punto de operación  $Q$ , tiene la forma:

$$\begin{aligned}
 f_a(x_{1Q}) + \left. \frac{\partial f_a(x_1)}{\partial x_1} \right|_Q (x_1 - x_{1Q}) &= f_b(x_{2Q}, x_{3Q}, x_{4Q}) + \left. \frac{\partial f_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_2} \right|_Q (x_2 - x_{2Q}) \\
 &+ \left. \frac{\partial f_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_3} \right|_Q (x_3 - x_{3Q}) + \left. \frac{\partial f_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_4} \right|_Q (x_4 - x_{4Q})
 \end{aligned} \tag{5.15}$$

En el punto de operación  $Q = \{x_{1Q}, x_{2Q}, x_{3Q}, x_{4Q}\}$ , se cumple que  $f_a(x_{1Q}) = f_b(x_{2Q}, x_{3Q}, x_{4Q})$  y se define  $\Delta x_1 = x_1 - x_{1Q}$ ,  $\Delta x_2 = x_2 - x_{2Q}$ ,  $\Delta x_3 = x_3 - x_{3Q}$  y  $\Delta x_4 = x_4 - x_{4Q}$ . Por lo que la aproximación queda así:

$$\left. \frac{\partial f_a(x_1)}{\partial x_1} \right|_Q \Delta x_1 = \left. \frac{\partial f_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_2} \right|_Q \Delta x_2 + \left. \frac{\partial f_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_3} \right|_Q \Delta x_3 + \left. \frac{\partial f_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_4} \right|_Q \Delta x_4 \tag{5.16}$$

Luego se calculan las derivadas parciales:

$$\left. \frac{\partial f_a(x_1)}{\partial x_1} \right|_Q = A \tag{5.17}$$

$$\left. \frac{\partial f_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_2} \right|_Q = 1 \tag{5.18}$$

$$\left. \frac{\partial f_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_3} \right|_Q = - \left. \frac{\kappa}{2\sqrt{x_3 - x_4}} \right|_Q = - \frac{\kappa}{2\sqrt{x_{3Q} - x_{4Q}}} \tag{5.19}$$

$$\left. \frac{\partial f_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_4} \right|_Q = \left. \frac{\kappa}{2\sqrt{x_3 - x_4}} \right|_Q = \frac{\kappa}{2\sqrt{x_{3Q} - x_{4Q}}} \tag{5.20}$$

Con esto el sistema linealizado queda así:

$$A\Delta x_1 = \Delta x_2 - \frac{\kappa}{2\sqrt{x_3 - x_4}} \Delta x_3 + \frac{\kappa}{2\sqrt{x_3 - x_4}} \Delta x_4 \tag{5.21}$$

Y volviendo a las variables originales:

$$A \frac{d\Delta h_1(t)}{dt} = \Delta q_1(t) - \frac{\kappa}{2\sqrt{h_{1Q} - h_{2Q}}} \Delta h_1(t) + \frac{\kappa}{2\sqrt{h_{1Q} - h_{2Q}}} \Delta h_2(t) \tag{5.22}$$

Ahora se toma la segunda ecuación del sistema 5.11, para hacer lo mismo que se hizo anteriormente:

$$A \frac{dh_2(t)}{dt} = \kappa \sqrt{h_1(t) - h_2(t)} - q_2(t) \tag{5.23}$$

De la ecuación 5.23 se define el siguiente cambio de variables:

- $x_1 \triangleq \frac{dh_2(t)}{dt}$  ;  $x_2 \triangleq h_1(t)$  ;  $x_3 \triangleq h_2(t)$  ;  $x_4 \triangleq q_2(t)$

Ahora se puede reescribir como  $g_a(x_1) = g_b(x_2, x_3, x_4)$  con:

$$g_a(x_1) = Ax_1 \quad (5.24)$$

$$g_b(x_2, x_3, x_4) = \kappa \sqrt{x_2 - x_3} - x_4 \quad (5.25)$$

Utilizando la aproximación de la serie de Taylor en torno al punto de operación  $Q$ , tiene la forma:

$$\begin{aligned} g_a(x_{1Q}) + \left. \frac{\partial g_a(x_1)}{\partial x_1} \right|_Q (x_1 - x_{1Q}) &= g_b(x_{2Q}, x_{3Q}, x_{4Q}) + \left. \frac{\partial g_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_2} \right|_Q (x_2 - x_{2Q}) \\ &+ \left. \frac{\partial g_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_3} \right|_Q (x_3 - x_{3Q}) + \left. \frac{\partial g_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_4} \right|_Q (x_4 - x_{4Q}) \end{aligned} \quad (5.26)$$

En el punto de operación  $Q = \{x_{1Q}, x_{2Q}, x_{3Q}, x_{4Q}\}$ , se cumple que  $g_a(x_{1Q}) = g_b(x_{2Q}, x_{3Q}, x_{4Q})$  y se define  $\Delta x_1 = x_1 - x_{1Q}$ ,  $\Delta x_2 = x_2 - x_{2Q}$ ,  $\Delta x_3 = x_3 - x_{3Q}$  y  $\Delta x_4 = x_4 - x_{4Q}$ . Por lo que la aproximación queda así:

$$\left. \frac{\partial g_a(x_1)}{\partial x_1} \right|_Q \Delta x_1 = \left. \frac{\partial g_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_2} \right|_Q \Delta x_2 + \left. \frac{\partial g_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_3} \right|_Q \Delta x_3 + \left. \frac{\partial g_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_4} \right|_Q \Delta x_4 \quad (5.27)$$

Luego se calculan las derivadas parciales:

$$\left. \frac{\partial g_a(x_1)}{\partial x_1} \right|_Q = A \quad (5.28)$$

$$\left. \frac{\partial g_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_2} \right|_Q = \left. \frac{\kappa}{2\sqrt{x_2 - x_3}} \right|_Q = \frac{\kappa}{2\sqrt{x_{2Q} - x_{3Q}}} \quad (5.29)$$

$$\left. \frac{\partial g_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_3} \right|_Q = \left. -\frac{\kappa}{2\sqrt{x_2 - x_3}} \right|_Q = -\frac{\kappa}{2\sqrt{x_{2Q} - x_{3Q}}} \quad (5.30)$$

$$\left. \frac{\partial g_b(x_2, x_3, x_4)}{\partial x_4} \right|_Q = -1 \quad (5.31)$$

Con esto el sistema linealizado queda así:

$$A\Delta x_1 = \frac{\kappa}{2\sqrt{x_2 - x_3}}\Delta x_2 - \frac{\kappa}{2\sqrt{x_2 - x_3}}\Delta x_3 - \Delta x_4 \quad (5.32)$$

Y volviendo a las variables originales:

$$A \frac{d\Delta h_2(t)}{dt} = \frac{\kappa}{2\sqrt{h_{1Q} - h_{2Q}}}\Delta h_1(t) - \frac{\kappa}{2\sqrt{h_{1Q} - h_{2Q}}}\Delta h_2(t) - \Delta q_2(t) \quad (5.33)$$

Para poder encontrar el punto de equilibrio  $Q$ , hay que usar las ecuaciones 5.12 y 5.23, igualar sus derivadas a 0 y reemplazar las demás variables en el punto  $Q$ . Con esto nos queda el siguiente sistema de ecuaciones:

$$q_{1Q} - \kappa \sqrt{h_{1Q} - h_{2Q}} = 0 \quad (5.34)$$

$$\kappa \sqrt{h_{1Q} - h_{2Q}} - q_{2Q} = 0 \quad (5.35)$$

Resolviendo este sistema, queda que el sistema tiene su punto de equilibrio cuando  $q_{1Q} = q_{2Q}$ , es decir, cuando el caudal de entrada es igual al caudal de salida, lo cual tiene perfecto sentido físico.

Para reducir la expresión, se define:

$$\gamma = \frac{\kappa}{2\sqrt{h_{1Q} - h_{2Q}}} \quad (5.36)$$

Por lo que finalmente, el sistema de estanques acoplados linealizado queda así:

$$A \frac{d\Delta h_1(t)}{dt} = -\gamma \Delta h_1(t) + \gamma \Delta h_2(t) + \Delta q_1(t) \quad (5.37)$$

$$A \frac{d\Delta h_2(t)}{dt} = \gamma \Delta h_1(t) - \gamma \Delta h_2(t) - \Delta q_2(t) \quad (5.38)$$

Su representación matricial es la siguiente:

$$\begin{bmatrix} \Delta \dot{h}_1(t) \\ \Delta \dot{h}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{A} & \frac{\gamma}{A} \\ \frac{\gamma}{A} & -\frac{\gamma}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta h_1(t) \\ \Delta h_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta q_1(t) \\ \Delta q_2(t) \end{bmatrix} \quad (5.39)$$

Luego de tener el sistema linealizado, la representación en variables de estado de los estanques acoplados queda de la siguiente forma:

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta \dot{h}_1(t) \\ \Delta \dot{h}_2(t) \end{bmatrix}}_{\dot{x}(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{A} & \frac{\gamma}{A} \\ \frac{\gamma}{A} & -\frac{\gamma}{A} \end{bmatrix}}_{A_c} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta h_1(t) \\ \Delta h_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} + \underbrace{\begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A} \end{bmatrix}}_{B_c} \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta q_1(t) \\ \Delta q_2(t) \end{bmatrix}}_{u(t)} \quad (5.40)$$

$$\underbrace{\begin{bmatrix} \Delta y_1(t) \\ \Delta y_2(t) \end{bmatrix}}_{y(t)} = \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}}_C \underbrace{\begin{bmatrix} \Delta h_1(t) \\ \Delta h_2(t) \end{bmatrix}}_{x(t)} \quad (5.41)$$

Al tener la representación en variables de estado del sistema en tiempo continuo, el siguiente paso es discretizar el sistema con un tiempo de muestreo  $T$ , para obtener la representación del sistema en variables de estado de tiempo discreto.

## 5.4. Representación en Variables de Estado de los Estanques Acoplados en Tiempo Discreto

La representación en variables de estado de un sistema de tiempo discreto es la siguiente:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (5.42)$$

$$y_k = C x_k \quad (5.43)$$

Para obtener la representación en variables de estado en tiempo discreto para un periodo de muestro  $T$ , primero hay que obtener la matriz  $A_d$ .

$$A_d = e^{A_c T} = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A_c)^{-1} \right\} \Big|_{t=T} \quad (5.44)$$

Primero se calcula:

$$sI - A_c = \begin{bmatrix} s & 0 \\ 0 & s \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} -\frac{\gamma}{A} & \frac{\gamma}{A} \\ \frac{\gamma}{A} & -\frac{\gamma}{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} s + \frac{\gamma}{A} & -\frac{\gamma}{A} \\ -\frac{\gamma}{A} & s + \frac{\gamma}{A} \end{bmatrix} \quad (5.45)$$

Luego se calcula el determinante y la adjunta:

$$\det(sI - A_c) = \left( s + \frac{\gamma}{A} \right)^2 - \left( \frac{\gamma}{A} \right)^2 = s \left( s + 2\frac{\gamma}{A} \right) \quad (5.46)$$

$$\text{Adj}(sI - A_c) = \begin{bmatrix} s + \frac{\gamma}{A} & \frac{\gamma}{A} \\ \frac{\gamma}{A} & s + \frac{\gamma}{A} \end{bmatrix} \quad (5.47)$$

Teniendo el determinante y la adjunta, se puede calcular la matriz inversa:

$$(sI - A_c)^{-1} = \frac{\text{Adj}(sI - A_c)}{\det(sI - A_c)} = \begin{bmatrix} \frac{s + \frac{\gamma}{A}}{s(s + 2\frac{\gamma}{A})} & \frac{\frac{\gamma}{A}}{s(s + 2\frac{\gamma}{A})} \\ \frac{\frac{\gamma}{A}}{s(s + 2\frac{\gamma}{A})} & \frac{s + \frac{\gamma}{A}}{s(s + 2\frac{\gamma}{A})} \end{bmatrix} \quad (5.48)$$

Ahora se puede calcular la transformada inversa de Laplace.

$$A_d = \mathcal{L}^{-1} \left\{ (sI - A_c)^{-1} \right\} \Big|_{t=T} \quad (5.49)$$

$$\blacksquare \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{s + \frac{\gamma}{A}}{s(s + 2\frac{\gamma}{A})} \right\} \Big|_{t=T}$$

Primero se calculan las fracciones parciales.

$$\frac{s + \frac{\gamma}{A}}{s(s + 2\frac{\gamma}{A})} = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s + 2\frac{\gamma}{A}} \quad (5.50)$$

Se multiplica a ambos lados de la ecuación por  $s\left(s + \frac{2\gamma}{A}\right)$ .

$$s + \frac{\gamma}{A} = a_0\left(s + \frac{2\gamma}{A}\right) + a_1s \quad (5.51)$$

Evalutando en  $s = 0$ :

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad (5.52)$$

Evalutando en  $s = -\frac{2\gamma}{A}$ :

$$a_1 = \frac{1}{2} \quad (5.53)$$

Con los valores de  $a_0$  y  $a_1$  encontrados, así quedan las fracciones parciales:

$$\frac{s + \frac{\gamma}{A}}{s\left(s + 2\frac{\gamma}{A}\right)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s + \frac{2\gamma}{A}} \quad (5.54)$$

Ahora se puede aplicar la transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{1}{2} \frac{1}{s} + \frac{1}{2} \frac{1}{s + \frac{2\gamma}{A}} \right\} \Big|_{t=T} = \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-\frac{2\gamma T}{A}} \right) \quad (5.55)$$

$$\blacksquare \mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{\gamma}{A}}{s\left(s + 2\frac{\gamma}{A}\right)} \right\} \Big|_{t=T}$$

Primero se calculan las fracciones parciales.

$$\frac{\frac{\gamma}{A}}{s\left(s + 2\frac{\gamma}{A}\right)} = \frac{a_0}{s} + \frac{a_1}{s + \frac{2\gamma}{A}} \quad (5.56)$$

Se multiplica a ambos lados de la ecuación por  $s\left(s + \frac{2\gamma}{A}\right)$ .

$$\frac{\gamma}{A} = a_0\left(s + \frac{2\gamma}{A}\right) + a_1s \quad (5.57)$$

Evalutando en  $s = 0$ :

$$a_0 = \frac{1}{2} \quad (5.58)$$

Evalutando en  $s = -\frac{2\gamma}{A}$ :

$$a_1 = -\frac{1}{2} \quad (5.59)$$

Con los valores de  $a_0$  y  $a_1$  encontrados, así quedan las fracciones parciales:

$$\frac{\frac{\gamma}{A}}{s\left(s + 2\frac{\gamma}{A}\right)} = \frac{1}{2} \frac{1}{s} - \frac{1}{2} \frac{1}{s + \frac{2\gamma}{A}} \quad (5.60)$$

Ahora se puede aplicar la transformada inversa de Laplace:

$$\mathcal{L}^{-1} \left\{ \frac{\frac{1}{2}}{s} - \frac{\frac{1}{2}}{s + \frac{2\gamma}{A}} \right\} \Big|_{t=T} = \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2\gamma T}{A}} \right) \quad (5.61)$$

Con esto, la matriz  $A_d$  queda así:

$$A_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-\frac{2\gamma T}{A}} \right) & \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2\gamma T}{A}} \right) \\ \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2\gamma T}{A}} \right) & \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-\frac{2\gamma T}{A}} \right) \end{bmatrix} \quad (5.62)$$

Teniendo  $A_d$ , ahora es posible obtener  $B_d$ .

$$B_d = \int_0^T A_d(\tau) d\tau \cdot B_c \quad (5.63)$$

Remplazando:

$$B_d = \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-\frac{2\gamma}{A}\tau} \right) & \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2\gamma}{A}\tau} \right) \\ \frac{1}{2} \left( 1 - e^{-\frac{2\gamma}{A}\tau} \right) & \frac{1}{2} \left( 1 + e^{-\frac{2\gamma}{A}\tau} \right) \end{bmatrix} d\tau \begin{bmatrix} \frac{1}{A} & 0 \\ 0 & -\frac{1}{A} \end{bmatrix} \quad (5.64)$$

Se multiplica  $A_d(\tau)B_c$ :

$$B_d = \int_0^T \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \left( 1 + e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} \right) & -\frac{1}{2A} \left( 1 - e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} \right) \\ \frac{1}{2A} \left( 1 - e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} \right) & -\frac{1}{2A} \left( 1 + e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} \right) \end{bmatrix} d\tau \quad (5.65)$$

Se procede a resolver las integrales:

- $\int_0^T \frac{1}{2A} \left( 1 + e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} \right) d\tau$

Se separa la integral:

$$\int_0^T \frac{1}{2A} d\tau + \int_0^T \frac{1}{2A} e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} d\tau \quad (5.66)$$

La segunda integral se multiplica por un 1 conveniente para luego poder integrar:

$$\frac{1}{2A} \int_0^T d\tau - \frac{1}{2A} \frac{A}{2\gamma} \int_0^T -\frac{2\gamma}{A} e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} d\tau \quad (5.67)$$

Se integra:

$$\frac{\tau}{2A} \Big|_0^T - \frac{1}{4\gamma} e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} \Big|_0^T \quad (5.68)$$

Se evalúan los límites de integración:

$$\frac{T}{2A} - \frac{1}{4\gamma} e^{-2\frac{\gamma}{A}T} + \frac{1}{4\gamma} \quad (5.69)$$

Se factoriza:

$$\frac{1}{2A} \left( T - \frac{A}{2\gamma} e^{-2\frac{\gamma}{A}T} + \frac{A}{2\gamma} \right) \quad (5.70)$$

$$\blacksquare \int_0^T -\frac{1}{2A} (1 - e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau})$$

Se separa la integral:

$$\int_0^T -\frac{1}{2A} d\tau + \int_0^T \frac{1}{2A} e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} d\tau \quad (5.71)$$

La segunda integral se multiplica por un 1 conveniente para luego poder integrar:

$$-\frac{1}{2A} \int_0^T d\tau - \frac{1}{2A} \frac{A}{2\gamma} \int_0^T -\frac{2\gamma}{A} e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} d\tau \quad (5.72)$$

Se integra:

$$-\frac{\tau}{2A} \Big|_0^T - \frac{1}{4\gamma} e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} \Big|_0^T \quad (5.73)$$

Se evalúan los límites de integración:

$$-\frac{T}{2A} - \frac{1}{4\gamma} e^{-2\frac{\gamma}{A}T} + \frac{1}{4\gamma} \quad (5.74)$$

Se factoriza:

$$-\frac{1}{2A} \left( T + \frac{A}{2\gamma} e^{-2\frac{\gamma}{A}T} - \frac{A}{2\gamma} \right) \quad (5.75)$$

$$\blacksquare \int_0^T \frac{1}{2A} (1 - e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau})$$

Se separa la integral:

$$\int_0^T \frac{1}{2A} d\tau - \int_0^T \frac{1}{2A} e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} d\tau \quad (5.76)$$

La segunda integral se multiplica por un 1 conveniente para luego poder integrar:

$$\frac{1}{2A} \int_0^T d\tau + \frac{1}{2A} \frac{A}{2\gamma} \int_0^T -\frac{2\gamma}{A} e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} d\tau \quad (5.77)$$

Se integra:

$$\frac{\tau}{2A} \Big|_0^T + \frac{1}{4\gamma} e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} \Big|_0^T \quad (5.78)$$

Se evalúan los límites de integración:

$$\frac{T}{2A} + \frac{1}{4\gamma} e^{-2\frac{\gamma}{A}T} - \frac{1}{4\gamma} \quad (5.79)$$

Se factoriza:

$$\frac{1}{2A} \left( T + \frac{A}{2\gamma} e^{-2\frac{\gamma}{A}T} - \frac{A}{2\gamma} \right) \quad (5.80)$$

$$\blacksquare \int_0^T -\frac{1}{2A} (1 + e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau})$$

Se separa la integral:

$$-\int_0^T \frac{1}{2A} d\tau - \int_0^T \frac{1}{2A} e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} d\tau \quad (5.81)$$

La segunda integral se multiplica por un 1 conveniente para luego poder integrar:

$$-\frac{1}{2A} \int_0^T d\tau + \frac{1}{2A} \frac{A}{2\gamma} \int_0^T -\frac{2\gamma}{A} e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} d\tau \quad (5.82)$$

Se integra:

$$-\frac{\tau}{2A} \Big|_0^T + \frac{1}{4\gamma} e^{-2\frac{\gamma}{A}\tau} \Big|_0^T \quad (5.83)$$

Se evalúan los límites de integración:

$$-\frac{T}{2A} + \frac{1}{4\gamma} e^{-2\frac{\gamma}{A}T} - \frac{1}{4\gamma} \quad (5.84)$$

Se factoriza:

$$-\frac{1}{2A} \left( T - \frac{A}{2\gamma} e^{-2\frac{\gamma}{A}T} + \frac{A}{2\gamma} \right) \quad (5.85)$$

Con las integrales ya resueltas, se construye la matriz  $B_d$ :

$$B_d = \begin{bmatrix} \frac{1}{2A} \left( T - \frac{A}{2\gamma} e^{-2\frac{\gamma}{A}T} + \frac{A}{2\gamma} \right) & -\frac{1}{2A} \left( T + \frac{A}{2\gamma} e^{-2\frac{\gamma}{A}T} - \frac{A}{2\gamma} \right) \\ \frac{1}{2A} \left( T + \frac{A}{2\gamma} e^{-2\frac{\gamma}{A}T} - \frac{A}{2\gamma} \right) & -\frac{1}{2A} \left( T - \frac{A}{2\gamma} e^{-2\frac{\gamma}{A}T} + \frac{A}{2\gamma} \right) \end{bmatrix} \quad (5.86)$$

## 5.5. Pre Estabilización de la Planta

Luego de obtener el modelo del sistema en en variables de estado de tiempo discreto, se puede analizar matemáticamente la estabilidad/inestabilidad de la planta. Para esto, se muestra un gráfico del plano  $z$ .

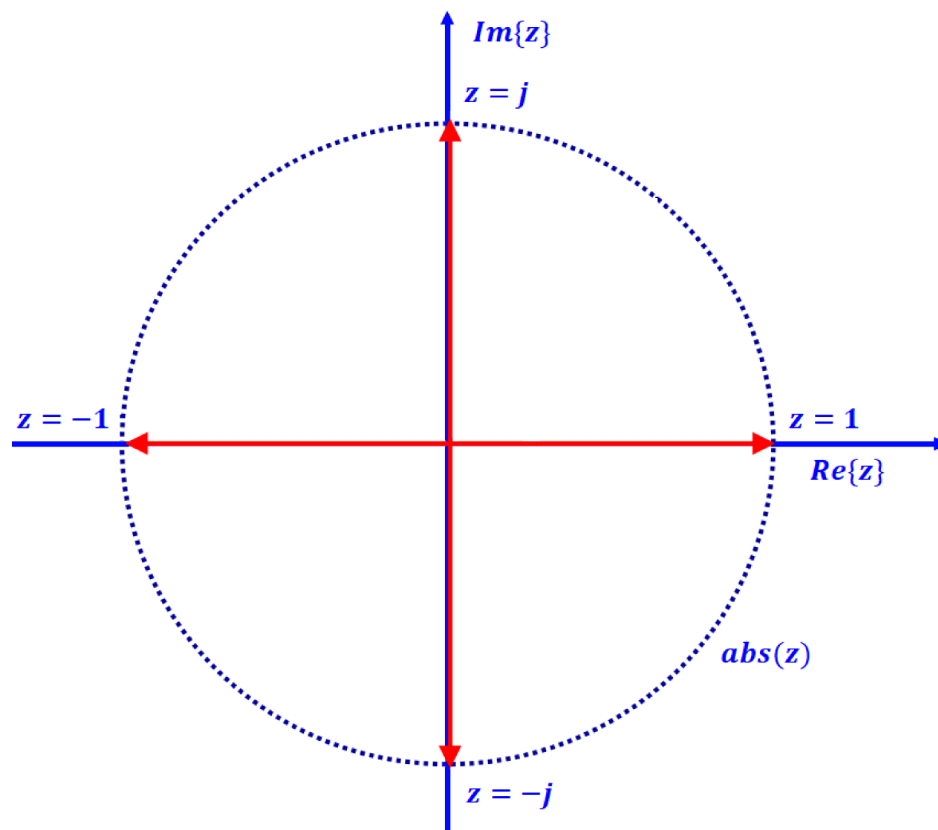


Figura 5.2: Plano  $z$

Del gráfico de la Figura 5.2 se desprende que los polos van a ser estables si están dentro del círculo unitario

y van a ser inestables si están en el borde o fuera del círculo unitario. Si la planta tiene al menos un polo inestable, entonces es inestable.

Para encontrar los polos de la planta, primero hay que calcular la función de transferencia discreta de la planta:

$$H(z) = C(zI - A_d)^{-1}B_d \quad (5.87)$$

Al resolver la ecuación 5.87, se encuentran los siguientes polos de la planta:

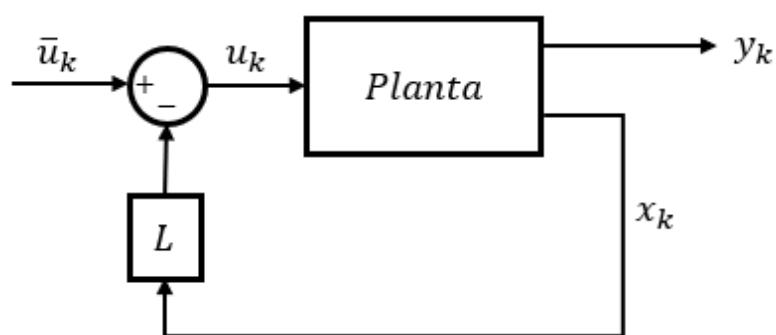
$$polos = (z - 1)(z - e^{-2\frac{\gamma}{A}T}) \quad (5.88)$$

De la ecuación 5.88 se ve que la planta tiene un polo inestable en  $z = 1$  y un polo estable en  $z = e^{-2\frac{\gamma}{A}T}$ , por lo que la planta es inestable.

La planta al ser un sistema inestable, es decir, que sus polos  $\lambda\{A_d\} \geq 1$ , hay que pre estabilizarla, una forma de hacer esto es mediante la siguiente ley de control:

$$u_k = -Lx_k + \bar{u}_k \quad (5.89)$$

Siendo este su diagrama:



**Figura 5.3:** Diagrama de la Ley de Control

Si nos centramos por un momento solo en que:

$$u_k = -Lx_k \quad (5.90)$$

se necesita calcular la matriz de ganancia óptima  $L$  de manera que esta ley de control minimice la siguiente función de costos:

$$J(u_k) = \sum_{k=1}^{\infty} (x_k^T Q x_k + u_k^T R u_k) \quad (5.91)$$

con la condición de que  $R > 0$  y  $Q \geq 0$ . Para el modelo en variables de estado en tiempo discreto que se ha estado trabajando:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (5.92)$$

Para encontrar el valor de  $L$ , primero hay que encontrar la solución de horizonte infinito,  $P$ , de la ecuación de

Riccati de tiempo discreto:

$$A^T P A - P - A^T P B (B^T P B + R)^{-1} B^T P A + Q = 0 \quad (5.93)$$

Teniendo  $P$ , se puede calcular la matriz  $L$ :

$$L = (B^T P B + R)^{-1} B^T P A \quad (5.94)$$

Todos estos cálculos se pueden obtener de manera fácil en MATLAB con el comando `dlqr` [12]:

$$[L, P, polos] = dlqr(A_d, B_d, Q, R) \quad (5.95)$$

que entrega la matriz  $L$ , la matriz  $P$  y la nueva ubicación de los polos estabilizados. En este caso, la matriz  $L$  va a ser de  $2 \times 2$ :

$$L = \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_3 & \ell_4 \end{bmatrix} \quad (5.96)$$

Reemplazando la ecuación 5.89 en 5.92 se llega al nuevo sistema:

$$x_{k+1} = (A_d - B_d L)x_k + B_d \bar{u}_k \quad (5.97)$$

con  $\bar{A} = A_d - B_d L$  donde los nuevos polos  $\lambda\{\bar{A}\} < 1$ .

Con lo que el nuevo sistema de la planta estabilizada se representa así:

$$x_{k+1} = \bar{A}x_k + B_d \bar{u}_k \quad (5.98)$$

$$y_k = Cx_k \quad (5.99)$$

## 6 | Implementación del Sistema de Control

En este capítulo se procede a describir el proceso de implementación de MPC con ADMM para el sistema de Estanques Acoplados, el cual se hará mediante el software matemático MATLAB, junto con su entorno de programación visual Simulink. Se va a explicar en qué consiste este software, qué herramientas ofrece y cómo interactuar con esta plataforma.

### 6.1. MATLAB

Es una plataforma de programación y cálculo numérico. Se usa para analizar datos, generar gráficos, desarrollar algoritmos y crear modelos y aplicaciones. Integra el análisis numérico, cálculo matricial, proceso de señales y visualización gráfica en un entorno completo. Combina un entorno de escritorio perfeccionado para el análisis iterativo y los procesos de diseño con un lenguaje de programación que expresa las matemáticas de matrices y arreglos directamente [13].

La plataforma de MATLAB está optimizada para resolver problemas científicos y de ingeniería. El lenguaje de MATLAB, basado en matrices, es la forma más natural del mundo para expresar las matemáticas computacionales. Las gráficas integradas facilitan la visualización de los datos y la obtención de información a partir de ellos. Una vasta biblioteca de herramientas (*Toolboxes*) integradas le permite empezar a trabajar inmediatamente con algoritmos esenciales para su dominio. El entorno de escritorio invita a experimentar, explorar y descubrir. Todas estas herramientas y funciones de MATLAB están probadas rigurosamente y diseñadas para trabajar juntas [14]. Estos *toolboxes* cubren en la actualidad prácticamente casi todas las áreas principales en el mundo de la ingeniería y la simulación.

Se utiliza en una gran variedad de áreas de aplicación, como lo son los sistemas de control, *machine learning*, *deep learning*, procesamiento de señales, mantenimiento predictivo, entre otros.

Dentro de sus características principales se encuentran:

- Lenguaje de alto nivel para cálculos científicos y de ingeniería.
- Entorno de escritorio optimizado para la exploración iterativa, el diseño y la solución de problemas.
- Gráficas para visualizar datos y herramientas para crear diagramas personalizados.

- Aplicaciones para ajustar curvas, clasificar datos, analizar señales, ajustar sistemas de control y muchas otras tareas.
- Toolboxes complementarias para una amplia variedad de aplicaciones científicas y de ingeniería.
- Herramientas para crear aplicaciones con interfaces de usuario personalizadas.
- Interfaces para C/C++, Java®, .NET, Python, SQL, Hadoop y Microsoft® Excel®.
- Opciones de implementación libres de derechos para compartir programas de MATLAB con los usuarios finales.

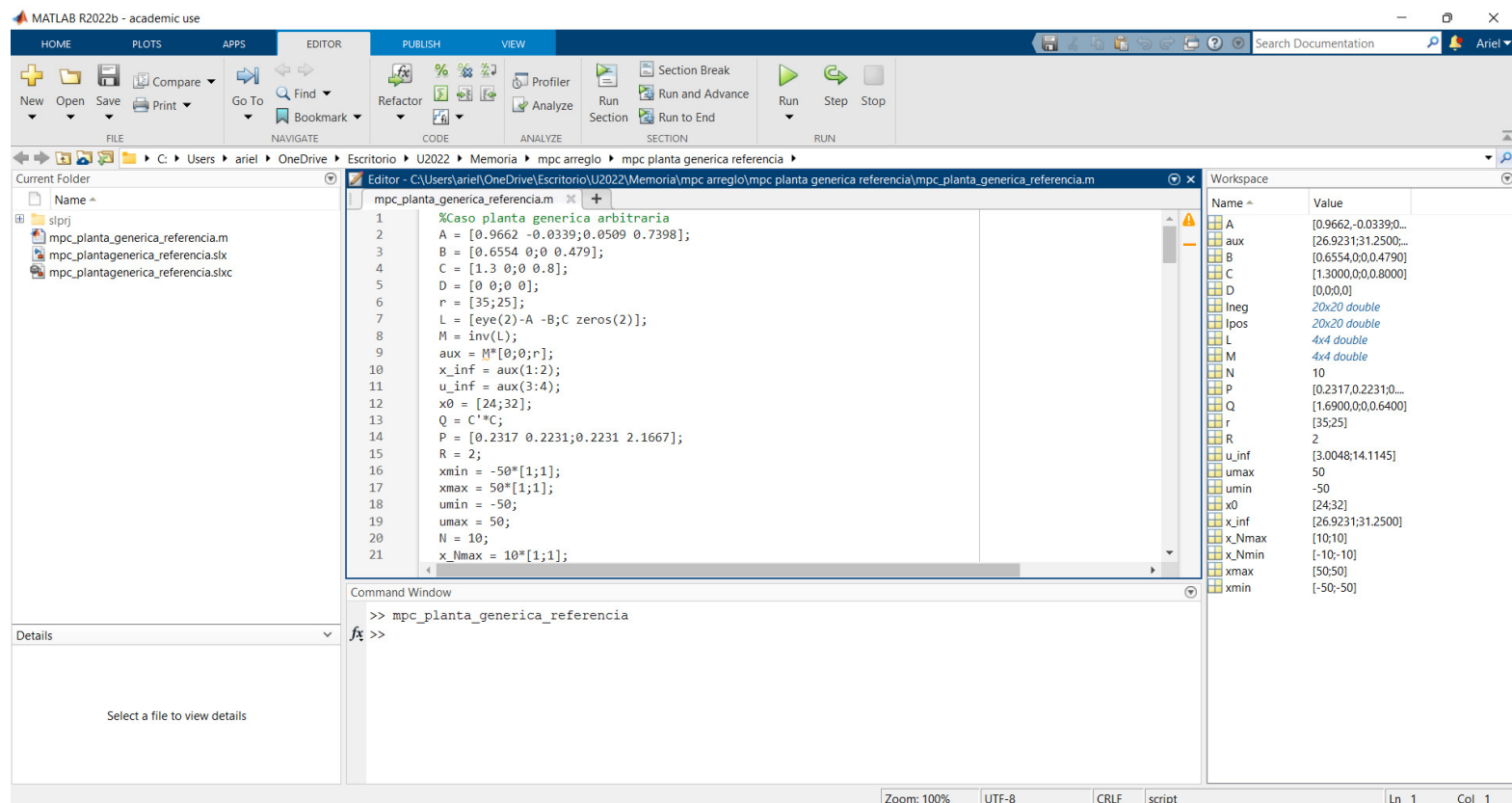


Figura 6.1: Entorno de MATLAB

En la Figura 6.1 se aprecian las siguientes secciones del software:

- **Menú Principal:** Se encuentra en todo el borde superior. Desde acá se pueden abrir archivos editores de texto, etc.
- **Ubicación en Carpeta:** Se encuentra en la esquina superior izquierda, debajo del menú. Acá podemos ver la carpeta donde se ha guardado el archivo.
- **Workspace:** Se encuentra en la parte derecha. Aquí se muestran todas las variables compiladas.
- **Ventana de Comandos:** Se encuentra en la parte central inferior. Acá se escriben los comandos para trabajar directamente.
- **Script:** Se encuentra arriba de la ventana de comandos. Funciona similar a un bloc de notas, esto para no trabajar directamente en la ventana de comandos.

## 6.2. Simulink

Es un entorno de programación visual, un *toolbox* especial, que funciona sobre el entorno de programación Matlab para el modelado, simulación y análisis de sistemas dinámicos. Puede simular sistemas lineales y sistemas

no lineales, modelos en tiempo continuo y modelos en tiempo discreto, y sistemas híbridos de los anteriormente mencionados [15].

El interfaz principal es una herramienta gráfica para la descripción del sistema mediante diagramas de bloques. Permite el diseño basado en modelos, el cual se emplea para la simulación multidominio, la generación automática de código y la comprobación y verificación continuas de sistemas embebidos.

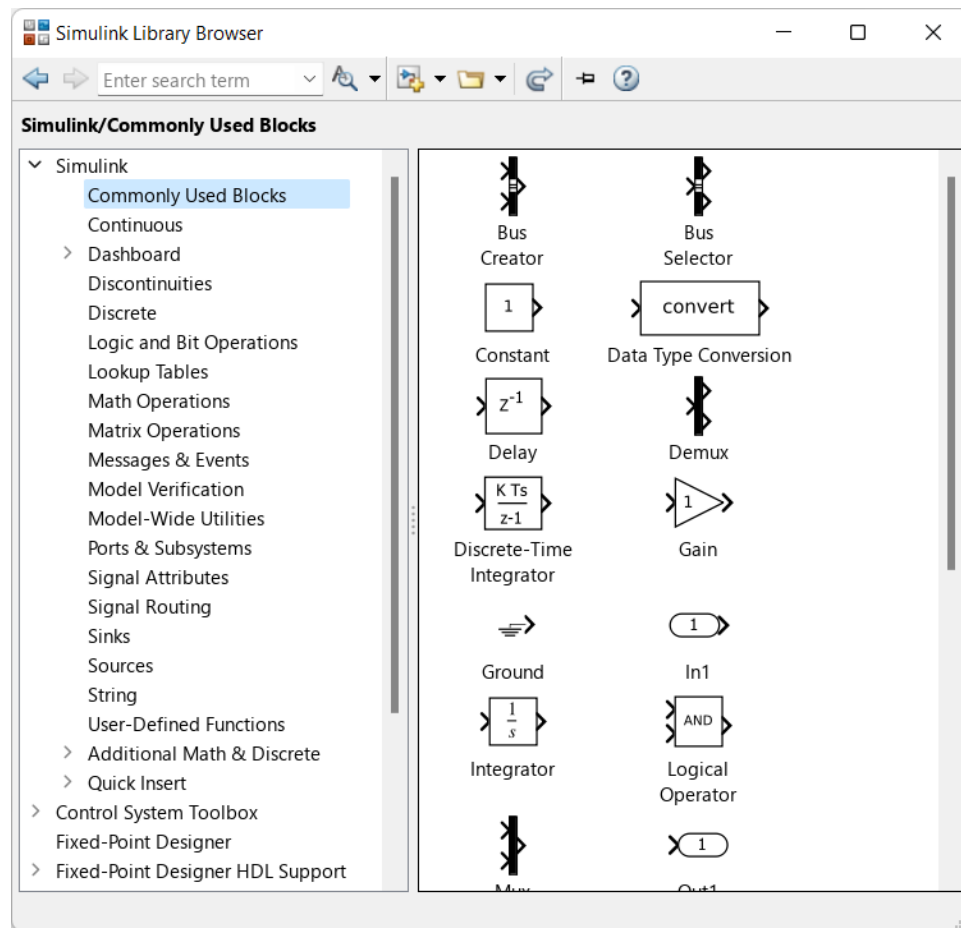


Figura 6.2: Biblioteca de Simulink

Realizando un esquema en Simulink, este se puede conectar con la información que se tiene en MATLAB.

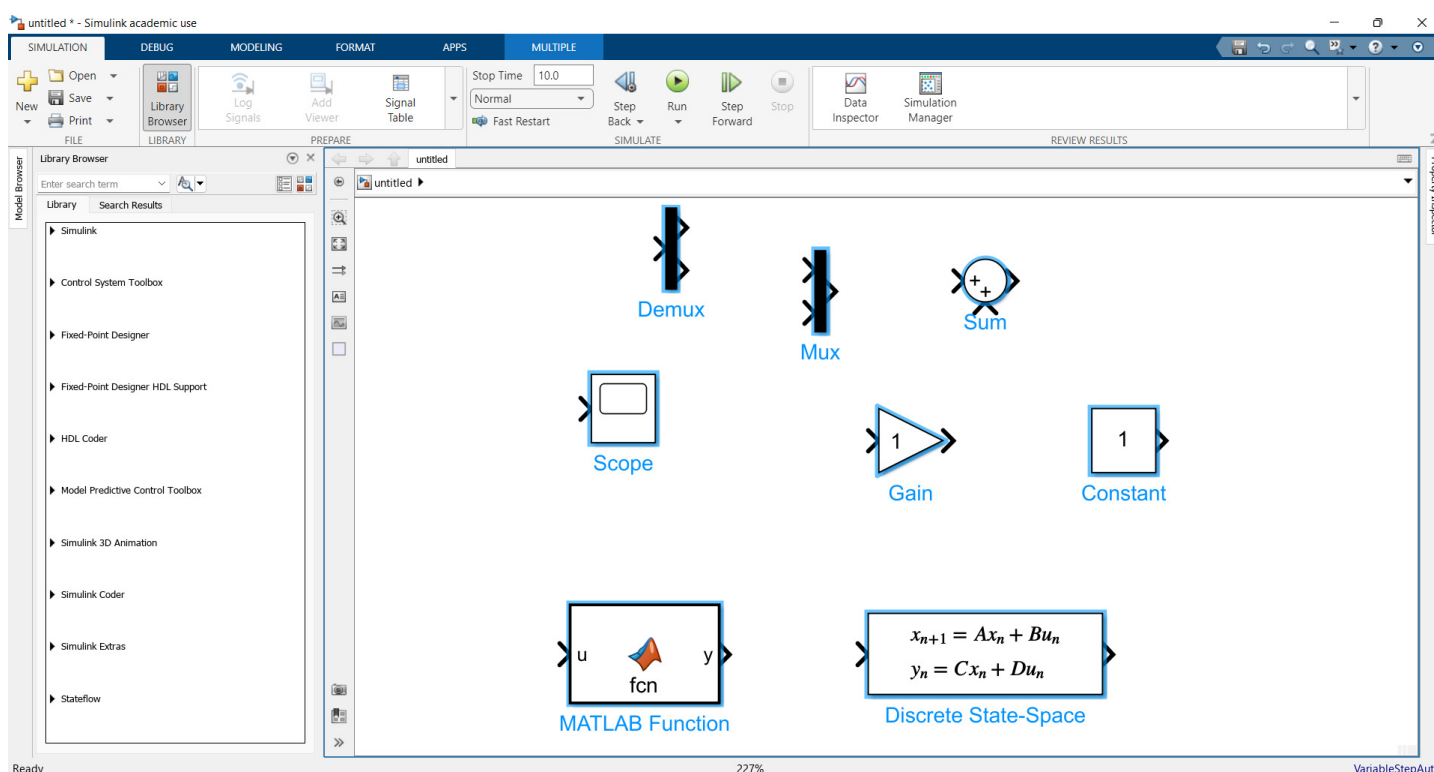


Figura 6.3: Entorno de Simulink

En la Figura 6.3 se aprecia el entorno de trabajo de Simulink y algunos de los bloques que se usan para la implementación de MPC.

- **MATLAB Function:** Este bloque permite crear una función en código de la misma forma que se haría en el entorno de MATLAB. Es útil porque desde MATLAB no se pueden llamar funciones a Simulink.
- **Discrete State-Space:** Este bloque permite crear un sistema en variables de estado en tiempo discreto, por lo que no es necesario tener que crear el sistema con otro tipo de bloques. A este bloque hay que entregarle las matrices  $A, B, C, D$ , las condiciones iniciales y el tiempo de muestreo.
- **Mux y Demux:** El mux junta señales escalares o vectoriales en un solo vector. El demux separa señales que están en un solo vector en señales escalares o vectoriales.
- **Gain:** Es una ganancia que se multiplica con el vector de datos con el que se conecta.
- **Constant:** Es para especificar constantes, ya sean escalares, vectores o matrices.
- **Sum:** Suma o resta entradas.
- **Scope:** Muestra de manera gráfica las señales medidas temporalmente.

### 6.3. Estanques Acoplados

Con todo lo explicado anteriormente, se procede a implementar la planta de Estanques Acoplados para aplicarle control MPC usando el método de optimización ADMM.

Al ser un sistema real, primero se considera el sistema en tiempo continuo:

$$\dot{x}(t) = A_c x(t) + B_c u(t) \quad (6.1)$$

$$y(t) = C x(t) + D u(t) \quad (6.2)$$

El modelo al ser linealizado, la matriz  $A_c$  depende del punto de operación que se escoja, para este caso se elige  $h_{1Q} = 7$  y  $h_{2Q} = 5$ . Las matrices quedan con los siguientes valores:

$$A_c = \begin{bmatrix} -0,0428 & 0,0428 \\ 0,0428 & -0,0428 \end{bmatrix} \quad B_c = \begin{bmatrix} 0,01 & 0 \\ 0 & -0,01 \end{bmatrix} \quad (6.3)$$

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad D = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6.4)$$

Para este problema se da el caso particular en que la matriz  $C$  es igual a la identidad y  $D$  es nula, por lo que la salida va a ser igual al estado.

Como MPC utiliza sistemas de tiempo discreto, hay que discretizar el sistema de tiempo continuo, esto se puede hacer como se mostró en el capítulo 5, pero también se pueden usar las distintas funciones que ofrece MATLAB para

esto. En este caso se usaron las funciones *ss*, *c2d* y *ssdata*.

Para el sistema en tiempo discreto:

$$x_{k+1} = A_d x_k + B_d u_k \quad (6.5)$$

$$y_k = C x_k + D u_k \quad (6.6)$$

Las matrices quedaron con los siguientes valores, usando un tiempo de muestreo  $T = 1[s]$ :

$$A_d = \begin{bmatrix} 0,959 & 0,041 \\ 0,041 & 0,959 \end{bmatrix} \quad B_d = \begin{bmatrix} 0,0098 & -0,0002 \\ 0,0002 & -0,0098 \end{bmatrix} \quad (6.7)$$

Recordar que las matrices  $C$  y  $D$  quedan iguales para sistemas de tiempo continuo y sistemas de tiempo discreto.

Al calcular los autovalores  $\lambda\{A_d\}$ , se encuentran los siguientes polos de la planta:

$$polos = (z - 1)(z - 0,9179) \quad (6.8)$$

Como este sistema en tiempo discreto es inestable porque tiene un polo en  $z = 1$ , primero se le hace una ley de control para asegurar que el sistema sea estable, usando  $u_k = -Lx_k + \bar{u}_k$ , se calcula la matriz  $L$  con la función *dlqr*:

$$L = \begin{bmatrix} 0,5253 & 0,4697 \\ -0,4697 & -0,5253 \end{bmatrix} \quad (6.9)$$

con esto el sistema cambia a:

$$x_{k+1} = \bar{A}_d x_k + B_d \bar{u}_k \quad (6.10)$$

$$y_k = C x_k + D u_k \quad (6.11)$$

y la matriz  $\bar{A}$  tiene los siguientes valores:

$$\bar{A} = \begin{bmatrix} 0,9537 & 0,0457 \\ 0,0457 & 0,9537 \end{bmatrix} \quad (6.12)$$

Ahora se calculan los autovalores  $\lambda\{\bar{A}\}$  para encontrar los nuevos polos.

$$polos = (z - 0,99)(z - 0,9174) \quad (6.13)$$

De la ecuación 6.13 se ve que los dos polos son estables, por lo que ahora el sistema es estable.

Con esto, la función de costo a minimizar es la siguiente:

$$J(x_k, \bar{u}_k) = \sum_{k=0}^{N-1} (x_k^T \Omega x_k + u_k^T \Gamma \bar{u}_k) + x_N^T \Omega_N x_N \quad (6.14)$$

Esta función de costo a minimizar tiene un horizonte  $N$  sujeto a las restricciones, que se han visto en el capítulo

2 y 3, a las que se encuentra sometida la planta. A continuación se mencionan los valores escogidos de algunos de los parámetros:

1. Horizonte

$$N = 10 \quad (6.15)$$

2. Estado inicial

$$x_0 = \begin{bmatrix} h_{1Q} \\ h_{2Q} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \end{bmatrix} \quad (6.16)$$

3. Limitaciones en la señal de entrada

$$u^{max} = \begin{bmatrix} u_1^{max} \\ u_2^{max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 10 \\ 10 \end{bmatrix} \quad (6.17)$$

$$u^{min} = \begin{bmatrix} u_1^{min} \\ u_2^{min} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.18)$$

4. Limitaciones de los estados

$$x^{max} = \begin{bmatrix} h_1^{max} \\ h_2^{max} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 30 \\ 30 \end{bmatrix} \quad (6.19)$$

$$x^{min} = \begin{bmatrix} h_1^{min} \\ h_2^{min} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} \quad (6.20)$$

5. Restricciones en el estado final

$$x_N^{max} = x^{max} \quad (6.21)$$

$$x_N^{min} = x^{min} \quad (6.22)$$

Luego hay que llevarlo a la Formulación Sparse, como se vio en el capítulo 2, para luego implementar el método de optimización ADMM como se vio en el capítulo 4.

Para el valor de  $\rho$ , se escogen valores y se simula para ver que sea un valor adecuado, en este caso se elige el siguiente:

$$\rho = 1,5 \quad (6.23)$$

En el siguiente capítulo se presentan la simulaciones con su respectivo análisis.

## 7 | Resultados de las Simulaciones

### 7.1. Simulaciones en Estado Cero

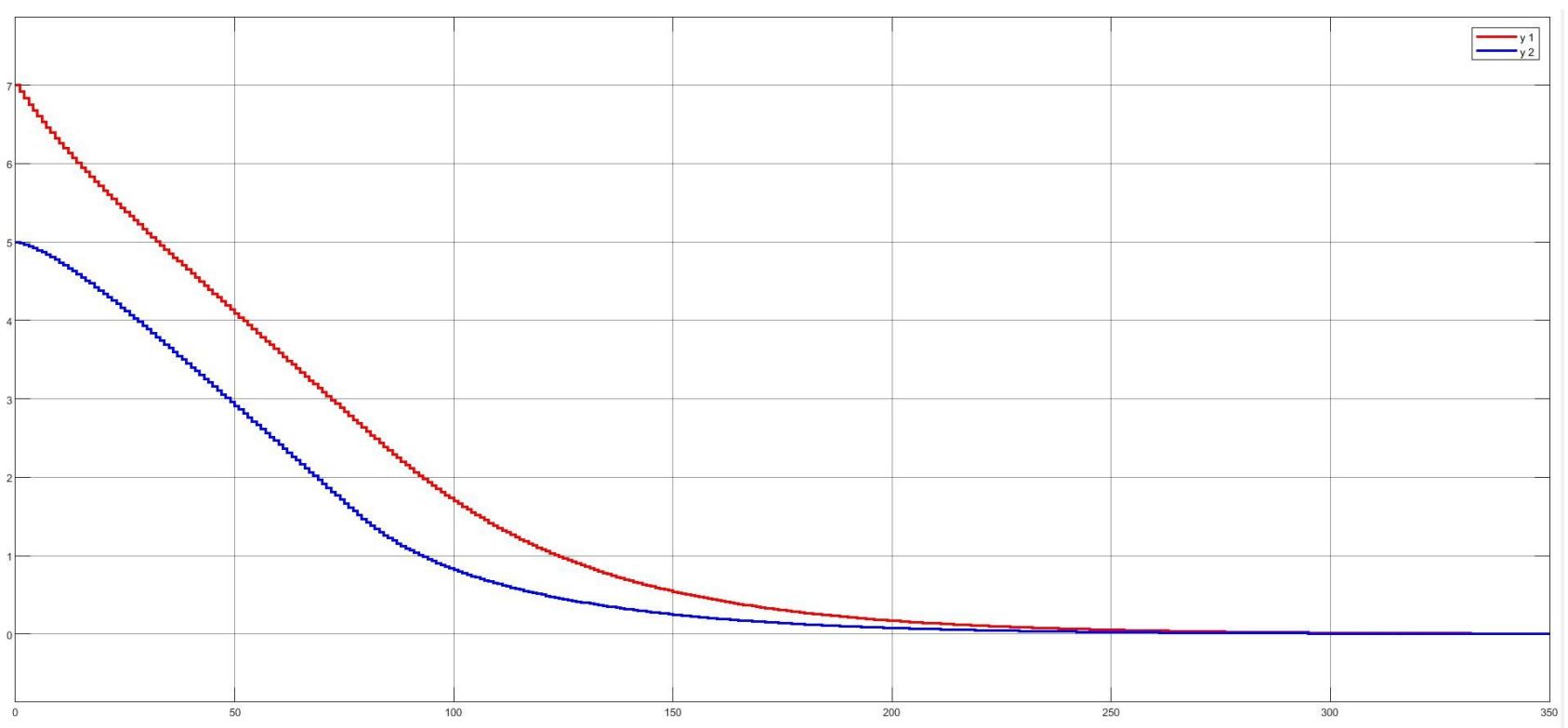
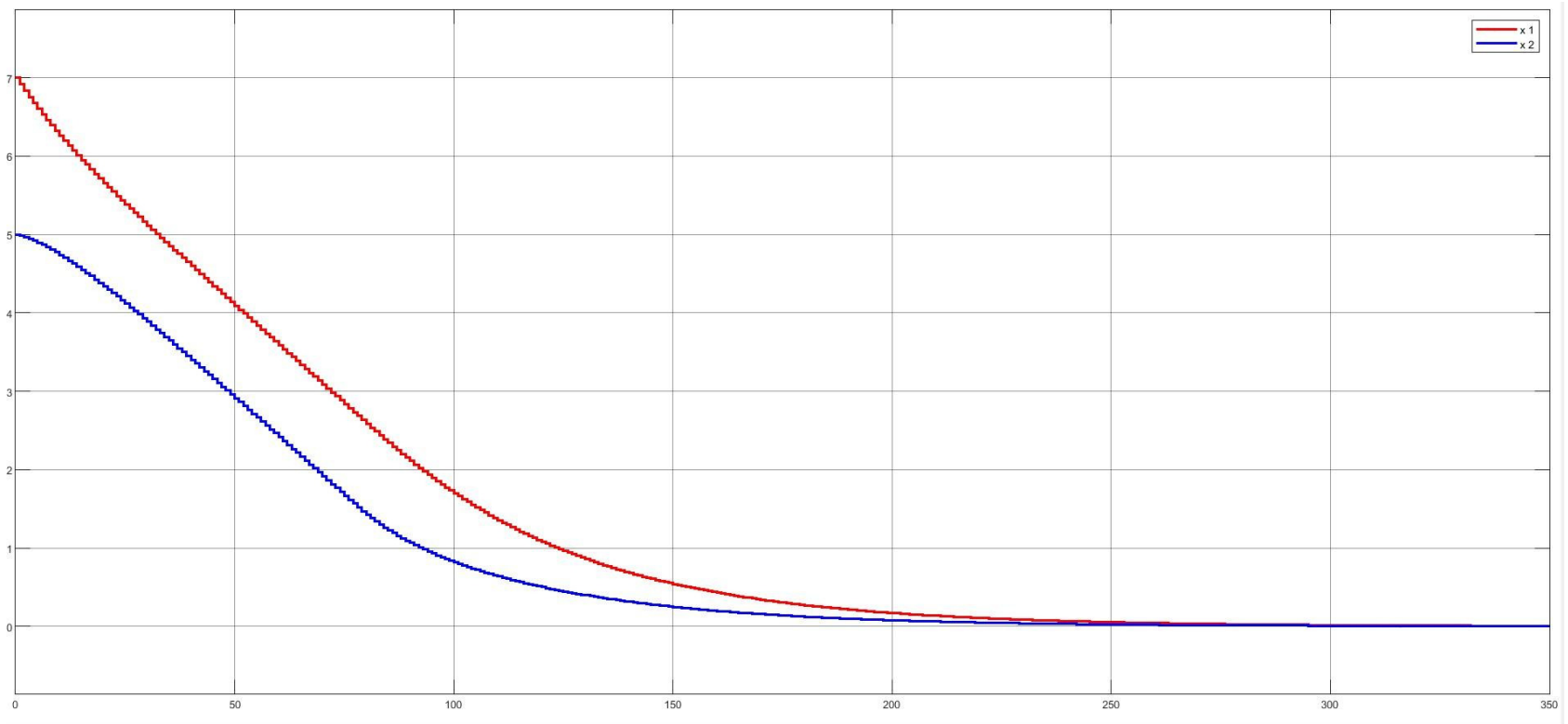
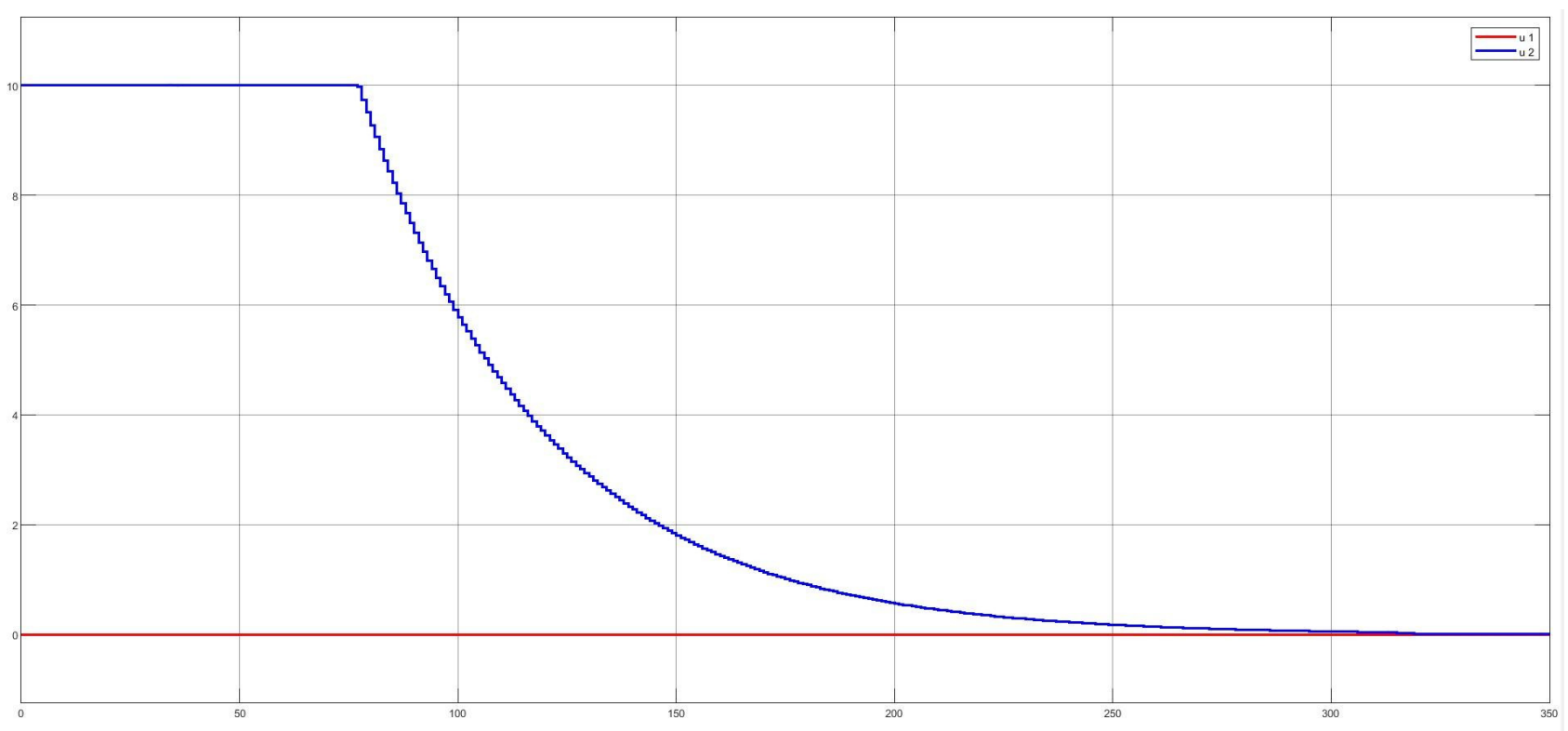


Figura 7.1: Gráfico de las salidas  $y_k$

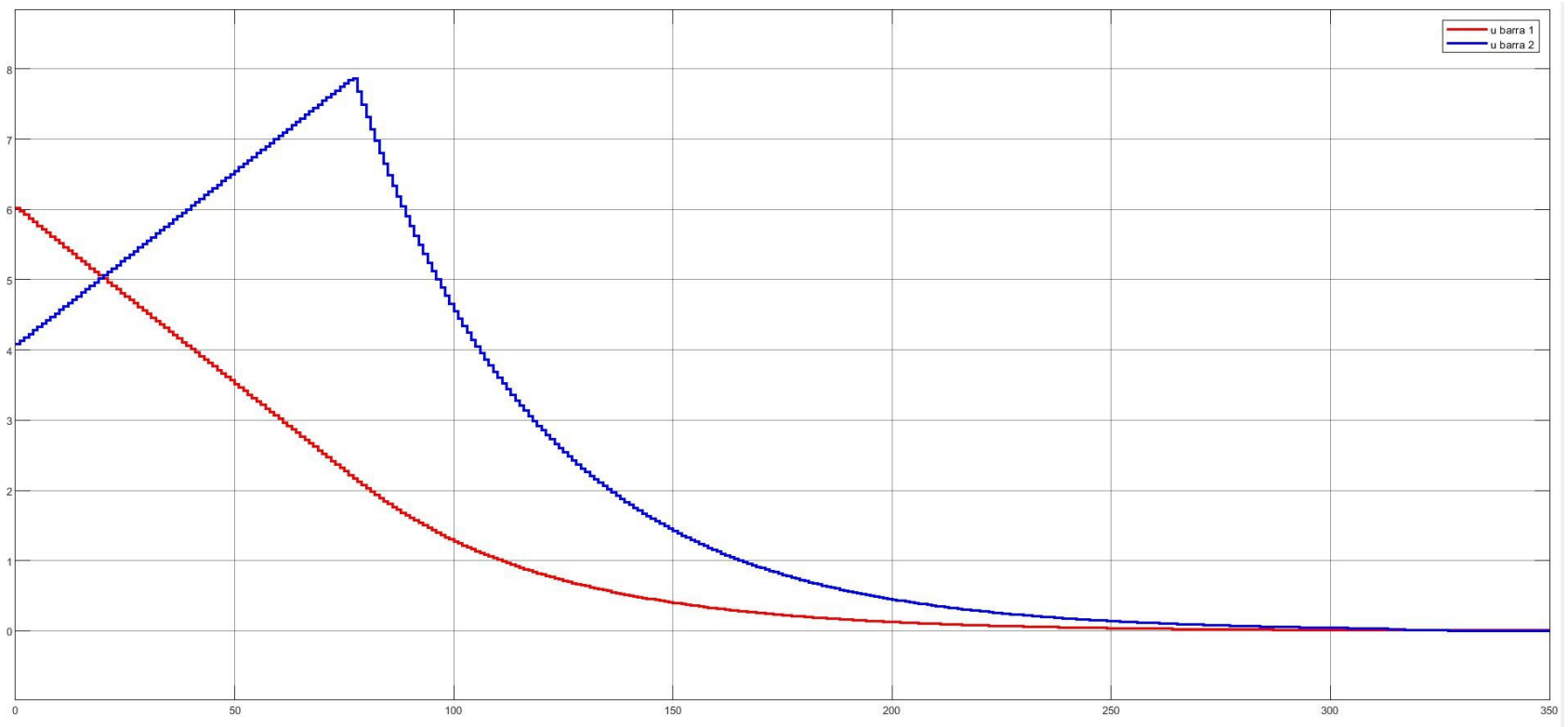
Como se aprecia en el gráfico de la Figura 7.1, las salidas llegan a cero después de pasado un tiempo como se esperaba. La caída a cero no es de forma exponencial como se esperaría, en una gran parte se ve lineal, esto se debe a las restricciones de la entrada  $u_k$  que se satura por no poder llegar al valor necesario para actuar de forma óptima.

**Figura 7.2:** Gráfico de los estados  $x_k$ 

Como se aprecia en el gráfico de la Figura 7.2, los estados llegan a cero después de pasado un tiempo como se esperaba. Los gráficos de las Figuras 7.1 y 7.2 son iguales porque para este caso particular que se está analizando,  $y_k = x_k$ .

**Figura 7.3:** Gráfico de las entradas  $u_k$ 

Como se puede ver en el gráfico de la Figura 7.3,  $u_2$  se satura en 10, esto debido a que por la restricción impuesta,  $u_k$  no puede ser superior a 10. Como se ve, transcurrido un tiempo  $u_2$  llega a cero y una vez que cae de 10 tiene una forma exponencial, mientras  $u_1$  es cero todo el tiempo.


**Figura 7.4:** Gráfico de  $\bar{u}_k$ 

Como se ve en la Figura 7.4  $\bar{u}_1$  y  $\bar{u}_2$  llegan a cero después de pasado un tiempo. También se aprecia que  $\bar{u}_2$  parte aumentando para luego empezar a descender, esto se entiende revisando los gráficos de las Figuras 7.3 y 7.2 y recordando que  $\bar{u}_k = u_k + Lx_k$ , donde  $L$  fue definida en 5.96.

$$\begin{bmatrix} \bar{u}_1 \\ \bar{u}_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \ell_1 & \ell_2 \\ \ell_3 & \ell_4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \quad (7.1)$$

El que interesa analizar es  $\bar{u}_2$ :

$$\bar{u}_2 = u_2 + \ell_3 x_1 + \ell_4 x_2 \quad (7.2)$$

Como se aprecia en el gráfico de la Figura 7.3,  $u_2$  se satura en 10 durante un tiempo que va de 0 a 76,8 segundos, momento en el que empieza disminuir, ahora interesa analizar cuando  $u_2$  es 10 que es cuando  $\bar{u}_2$  aumenta.  $\ell_3$  y  $\ell_4$  son negativos, según lo calculado en 6.9, y  $x_1$  y  $x_2$  disminuyen, por lo que:

$$\bar{u}_2 = 10 \underbrace{-\ell_3 x_1 - \ell_4 x_2}_{\text{disminuye}} \quad (7.3)$$

Si a algo negativo que disminuye con el tiempo se le suma 10, ese resultado va a ir aumentando, por esta razón,  $\bar{u}_2$  primero aumenta y luego cuando  $u_2$  deja de estar saturado empieza a disminuir hasta llegar a cero.

- Tiempo de Asentamiento

El tiempo de asentamiento es el tiempo en que un sistema dinámico se demora en estabilizarse para que la salida del sistema alcance la referencia deseada. Generalmente el criterio que se usa para que se considere que la salida ha llegado a la referencia es cuando se ha cargado o descargado un 98 % según corresponda.

Para calcular el tiempo de asentamiento se va a usar la ayuda de los cursores del gráfico.

1. Tiempo de Asentamiento para  $y_1$

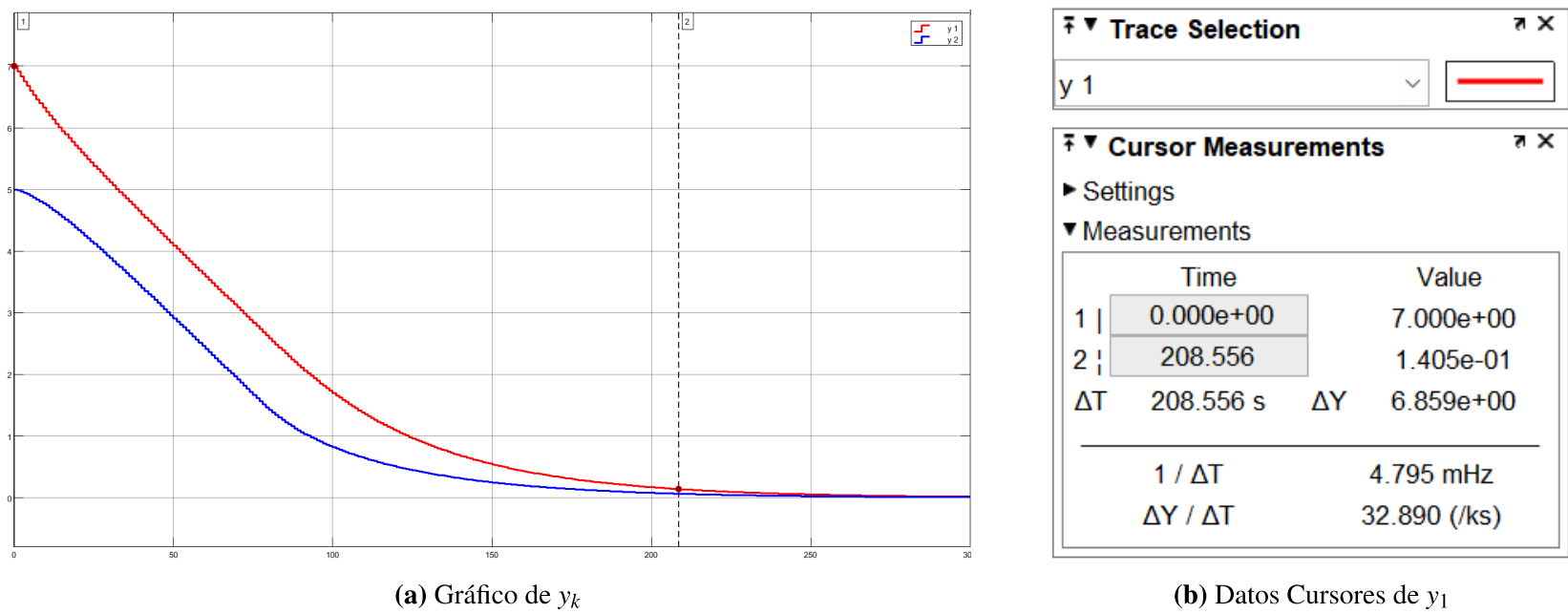


Figura 7.5: Tiempo de Asentamiento de  $y_1$

Como se ve en el gráfico y los datos del cursor de la Figura 7.5,  $y_1$  parte descargándose desde el valor 7 hasta llegar a 0. Como se tiene que descargar un 98 %,  $y_1$  tiene que llegar al valor 0,14, para así calcular el tiempo de asentamiento, el cual se calcula usando la ayuda de los cursores, el cual da que es aproximadamente 208 segundos.

2. Tiempo de Asentamiento para  $y_2$

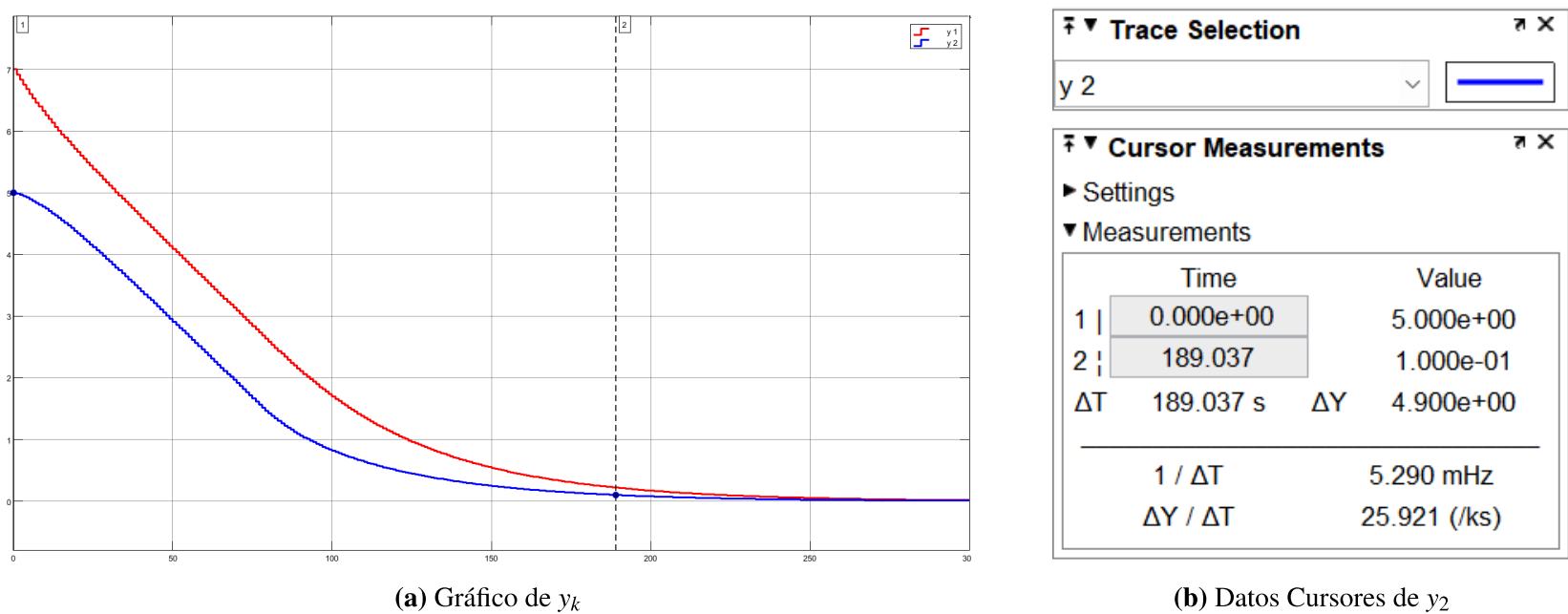


Figura 7.6: Tiempo de Asentamiento de  $y_2$

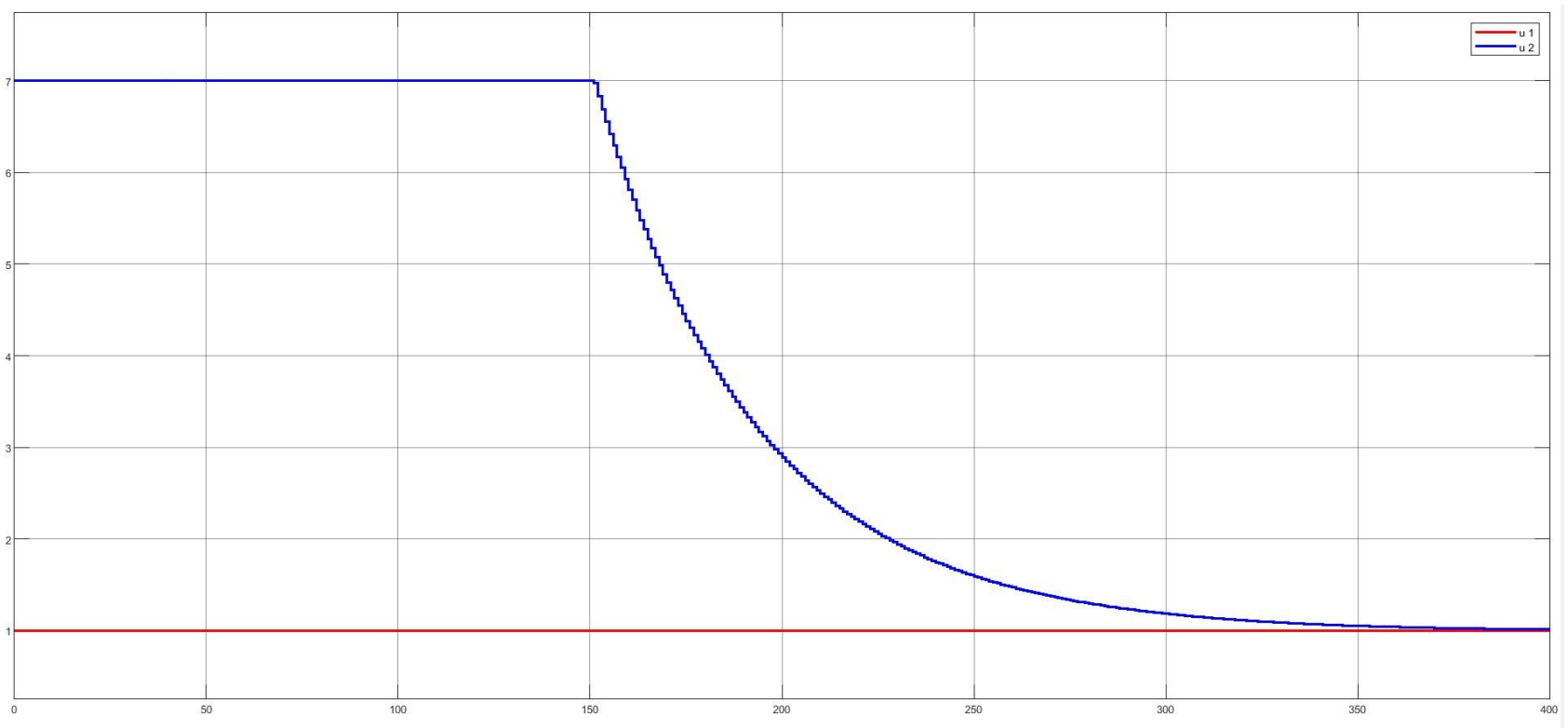
Como se ve en el gráfico y los datos del cursor de la Figura 7.6,  $y_2$  parte descargándose desde el valor 5 hasta llegar a 0. Como se tiene que descargar un 98 %,  $y_2$  tiene que llegar al valor 0,1, para así calcular el tiempo de asentamiento, el cual se calcula usando la ayuda de los cursores, el cual da que es aproximadamente 189 segundos.

### 7.1.1. Cambios en las Restricciones

Se hacen cambios en las restricciones para ver cómo responde el sistema a distintos valores de restricciones.

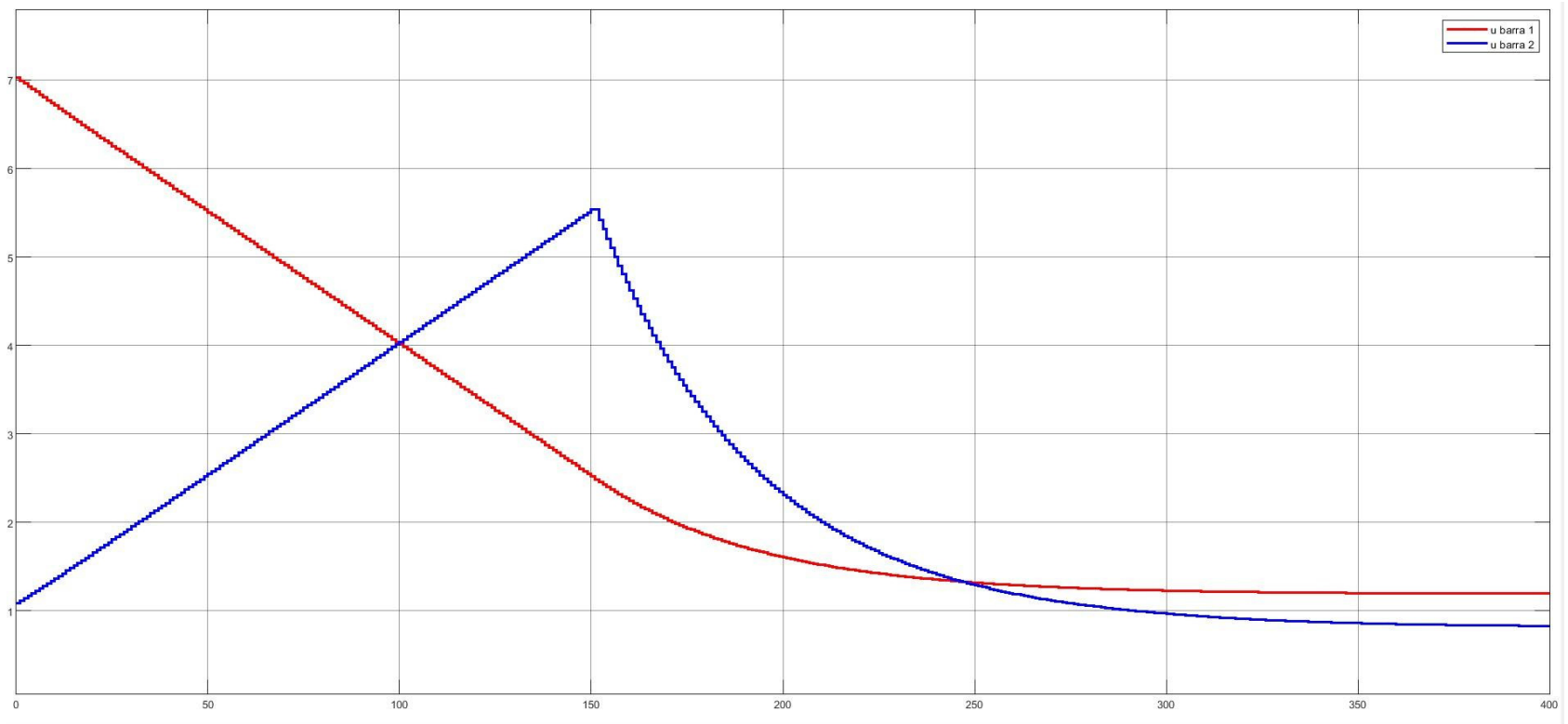
En primera instancia se le hacen cambios a las restricciones de las entradas  $u_k$ , en  $u^{max}$  y  $u^{min}$ .

$$\blacksquare u^{max} = \begin{bmatrix} 7 \\ 7 \end{bmatrix} \text{ y } u^{min} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



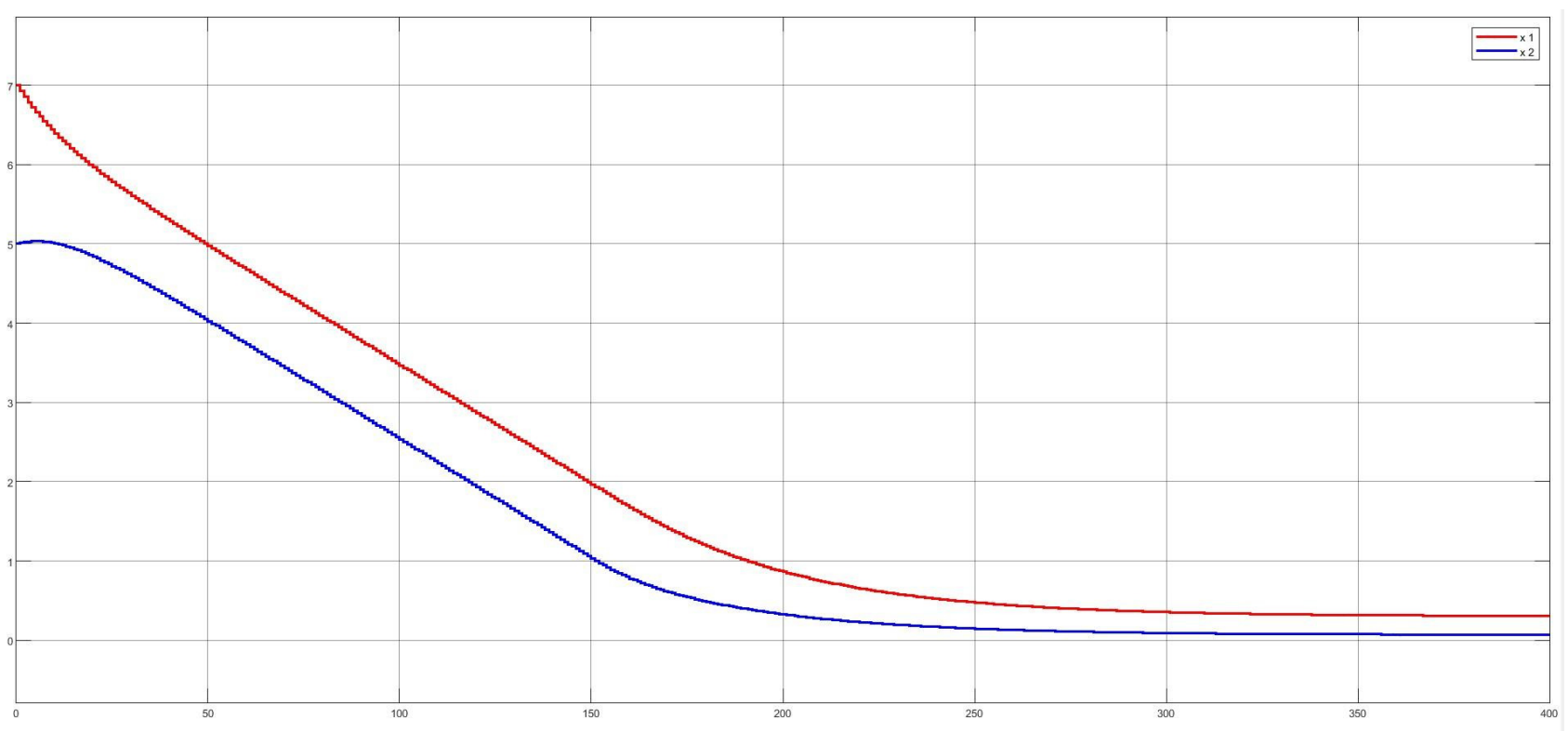
**Figura 7.7:** Gráfico de las entradas  $u_k$

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.7, la restricción  $u^{max}$  es más pequeña que antes, por esta razón la actuación (entrada)  $u_2$  se queda más tiempo saturada en  $u^{max}$  y se demora más tiempo en llegar al estado deseado, mientras que  $u_1$  todo el tiempo mantiene el mismo valor. Como  $u^{min}$  es 1, no es posible que  $u_k$  llegue a cero, por lo que se queda en 1 respetando la restricción impuesta, por esta razón  $u_1$  siempre es 1 en vez de 0 y  $u_2$  cae hasta 1 en vez de llegar a 0.

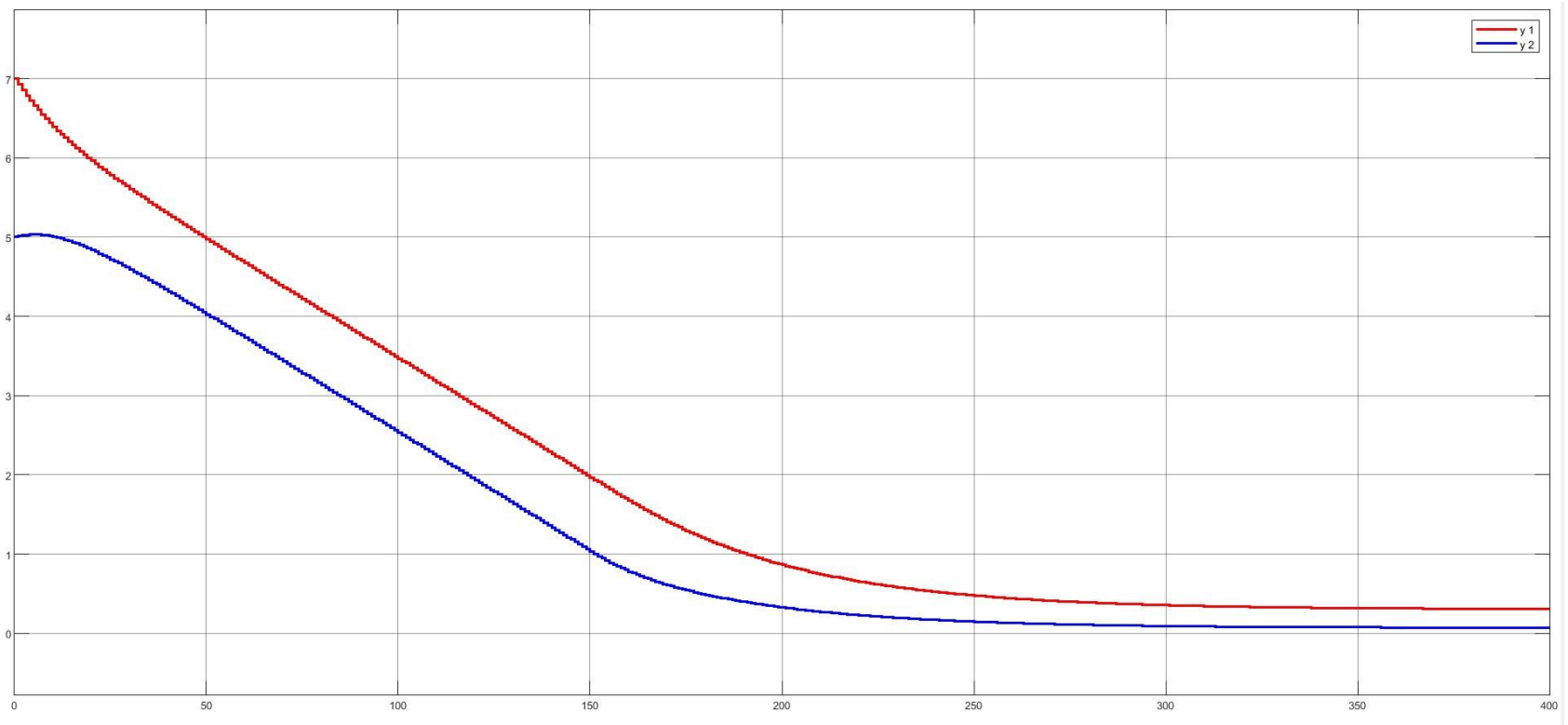


**Figura 7.8:** Gráfico de  $\bar{u}_k$

Como  $u_k$  no llega a cero por la restricción impuesta,  $\bar{u}_k$  no es posible que llegue a cero al depender de  $u_k$  y  $x_k$ , por lo que en estado estacionario queda con otros valores como muestra el gráfico de la Figura 7.8.



**Figura 7.9:** Gráfico de los estados  $x_k$

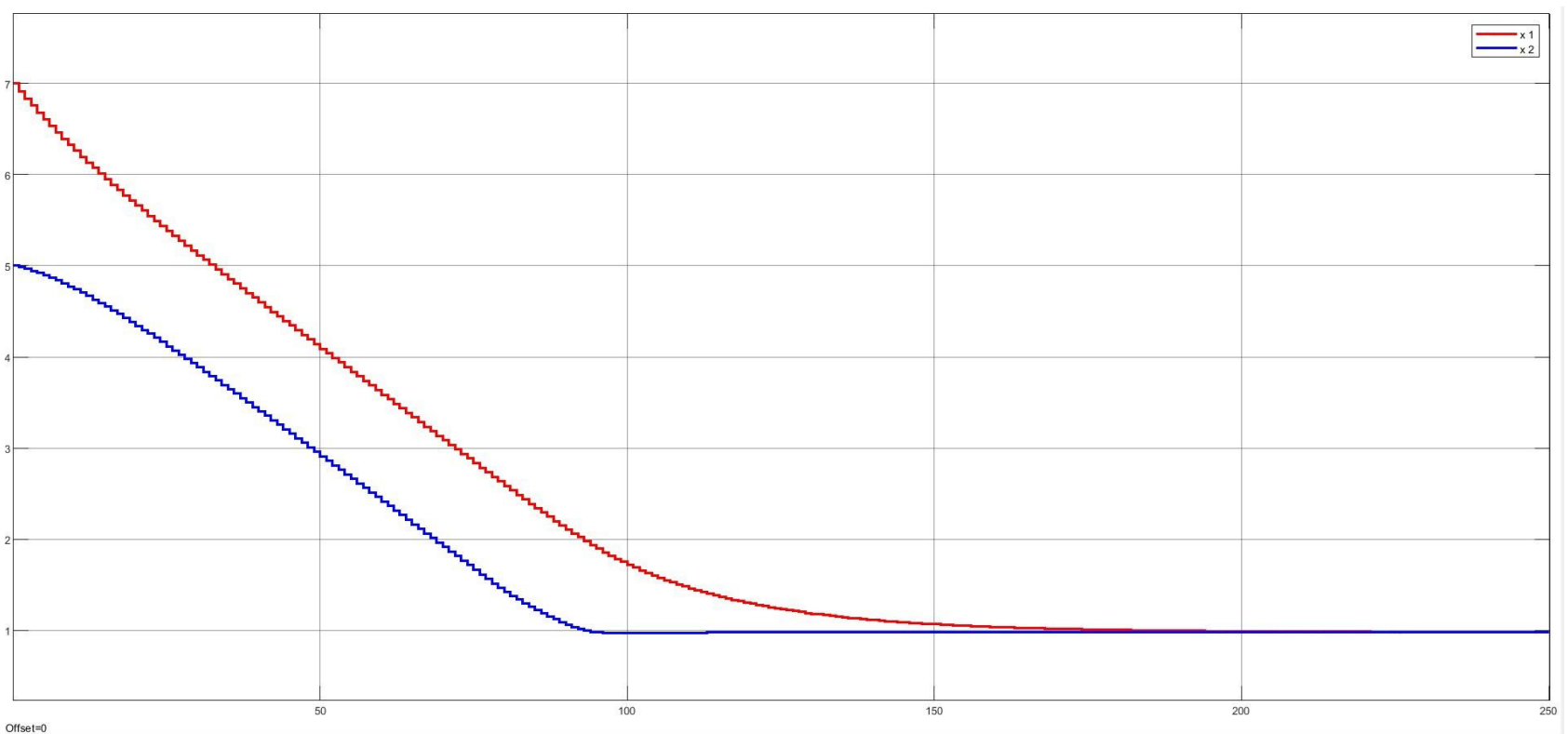


**Figura 7.10:** Gráfico de las salidas  $y_k$

Como se aprecia en los gráficos de las Figuras 7.9 y 7.10, los estados y las salidas se aproximan a cero pero no logran llegar a cero, esto se debe a la restricción impuesta en la actuación (entrada)  $u^{min}$ , que impide que la actuación (entrada) llegue a cero, haciendo que los estados y las salidas no logren llegar exactamente a cero.

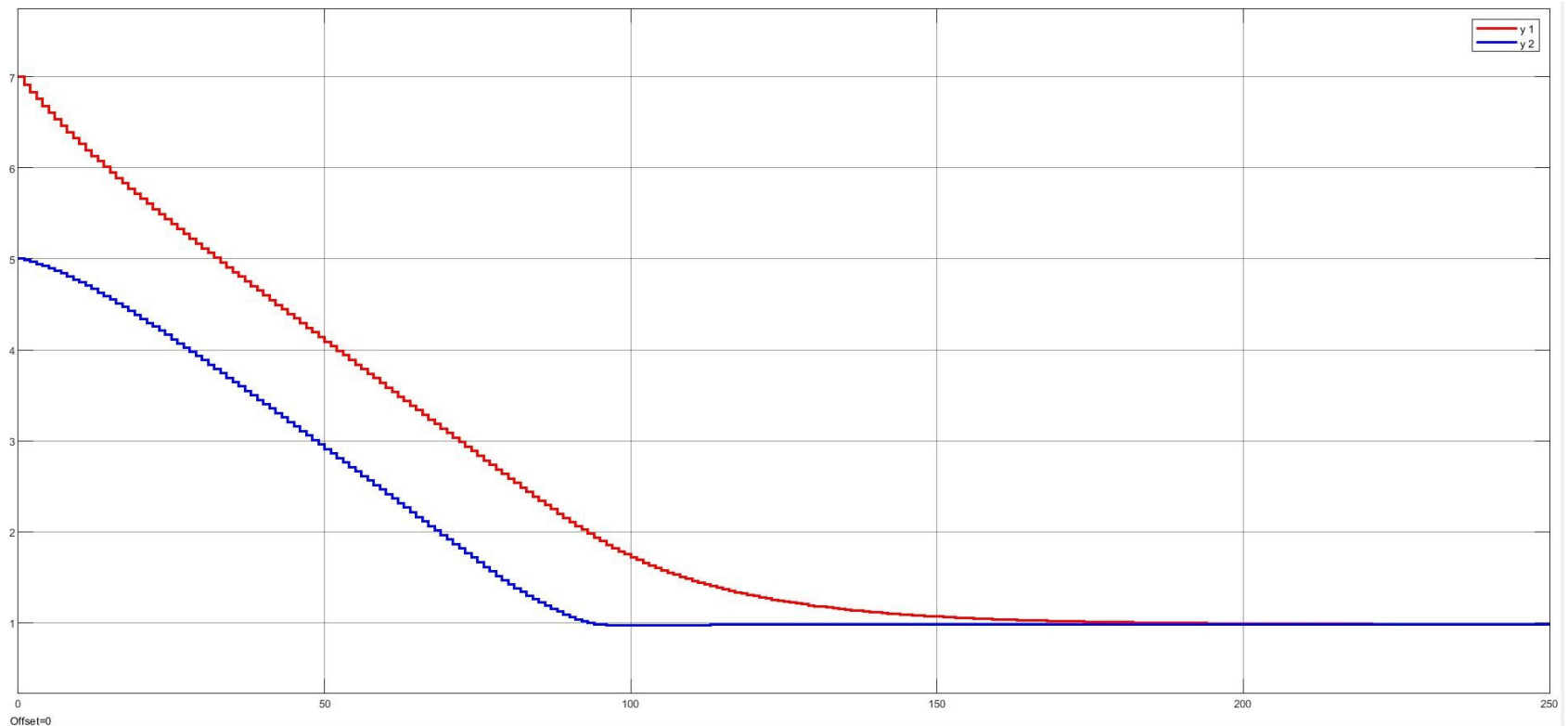
En segunda instancia se le hacen cambios a las restricciones de los estados  $x_k$ , en  $x^{min}$ .

$$\blacksquare x^{min} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$



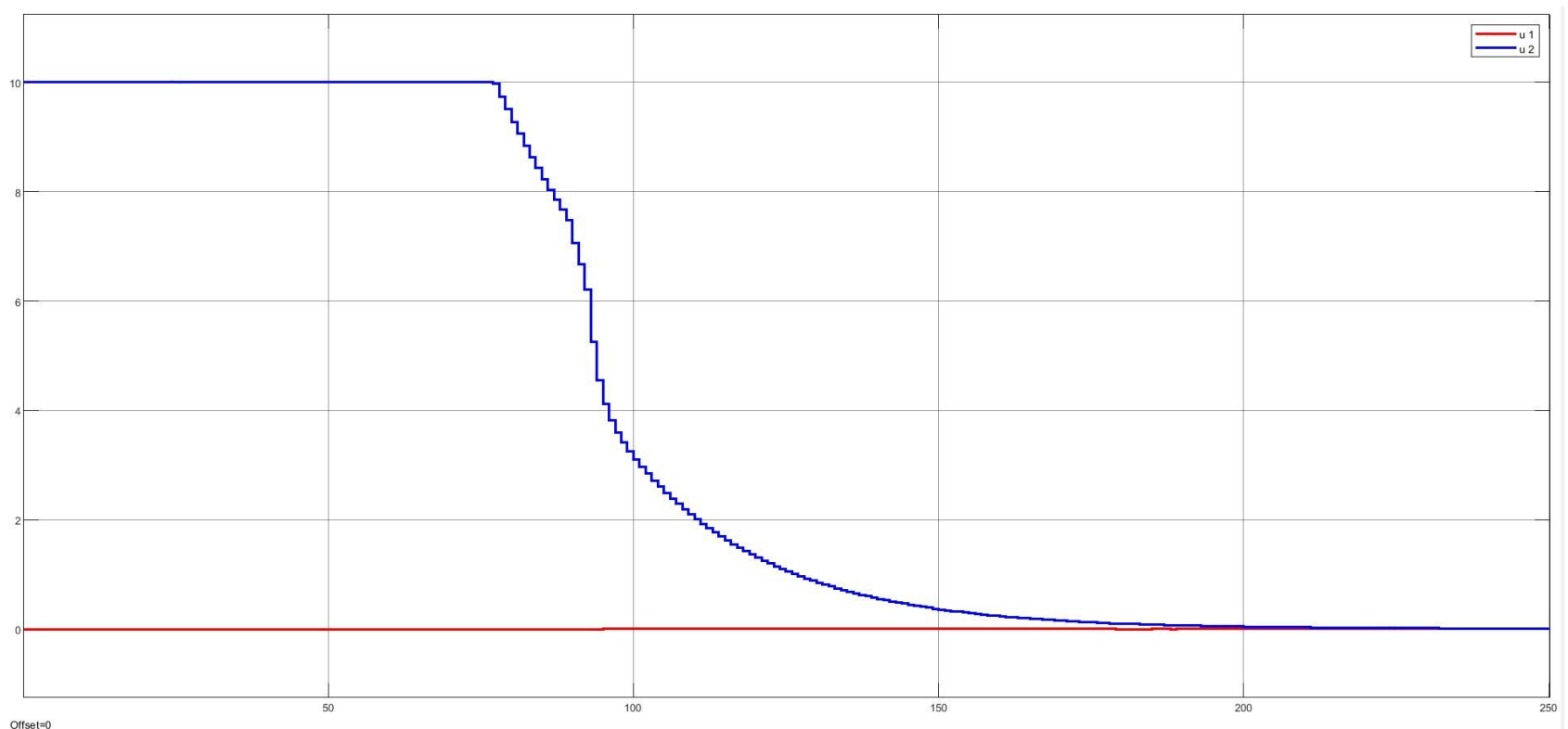
**Figura 7.11:** Gráfico de los estados  $x_k$

En el gráfico de la Figura 7.11 se ve que los estados llegan al valor 1, esto debido a que cumple con la restricción impuesta por  $x^{min}$  del valor mínimo que pueden tomar los estados.



**Figura 7.12:** Gráfico de las salidas  $y_k$

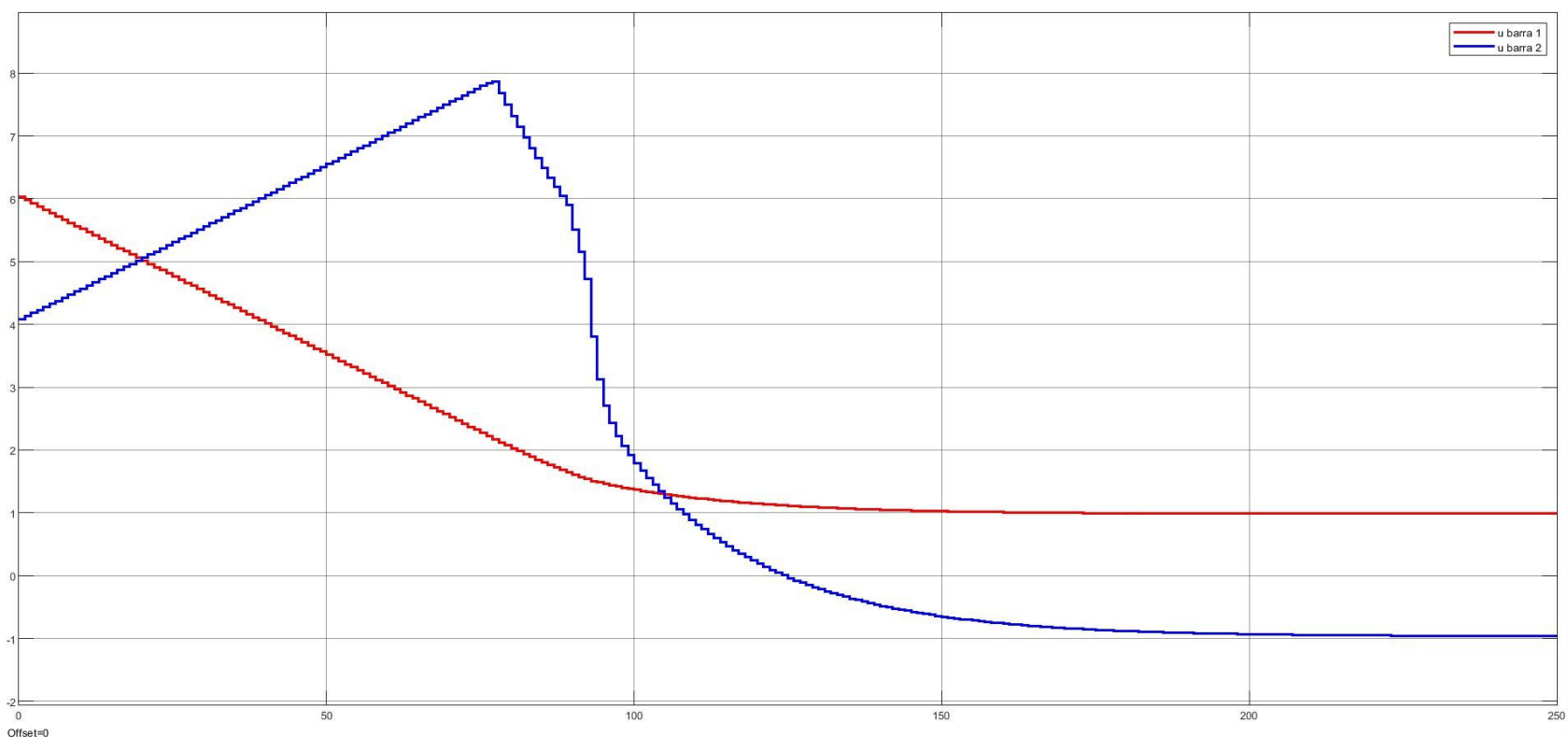
Como se ve en el gráfico de la Figura 7.12, las salidas llegan al valor 1, esto debido a la restricción impuesta en  $x^{min}$ , y como  $y_k = x_k$ ,  $y_k$  también tiene que cumplir con la restricción impuesta a los estados.



**Figura 7.13:** Gráfico de las entradas  $u_k$

Como se puede ver en el gráfico de la Figura 7.13, la actuación  $u_k$  si llega a cero en estado estacionario, esto es debido a que cuando ambos estados llegan al valor 1 llegan a un punto de equilibrio, por lo tanto, no se necesita

actuación (entrada) para ninguno de los dos estados.



**Figura 7.14:** Gráfico de  $\bar{u}_k$

Como se puede ver en el gráfico de la Figura 7.14  $\bar{u}_k$  no llega a cero en estado estacionario, esto porque depende de  $u_k$  y  $Lx_k$ , y aunque  $u_k$  si llega a cero,  $x_k$  no llega a cero por la restricción impuesta.

## 7.2. Simulaciones con Seguimiento a Referencia

Para esta simulación se escoge como valor de referencia:

$$y_\infty \rightarrow r = \begin{bmatrix} 8 \\ 6,5 \end{bmatrix} \quad (7.4)$$

Con este valor de  $r$  da el siguiente valor para  $\bar{u}_\infty$ :

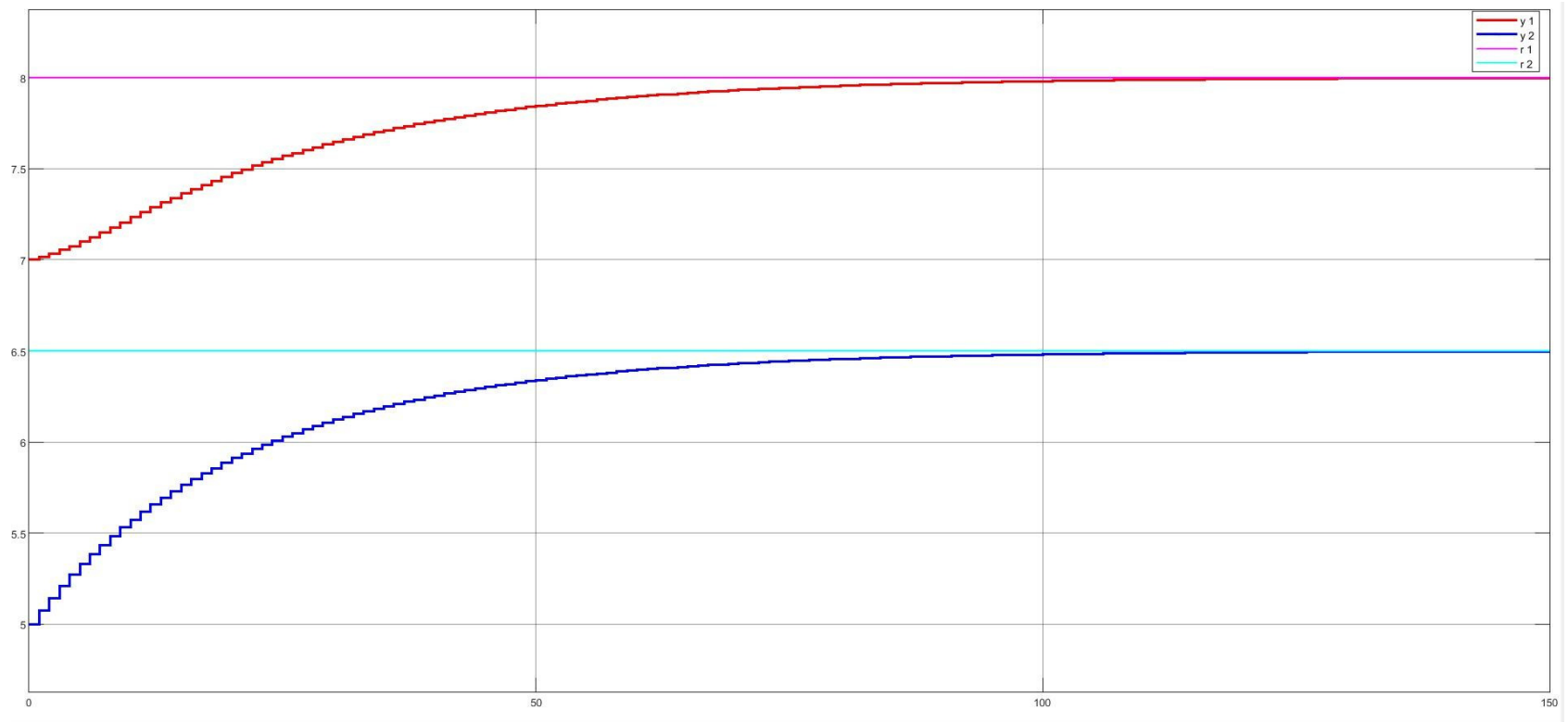
$$\bar{u}_\infty = \begin{bmatrix} 13,6779 \\ -0,7498 \end{bmatrix} \quad (7.5)$$

El valor de  $x_\infty$  es el siguiente:

$$x_\infty = \begin{bmatrix} 8 \\ 6,5 \end{bmatrix} \quad (7.6)$$

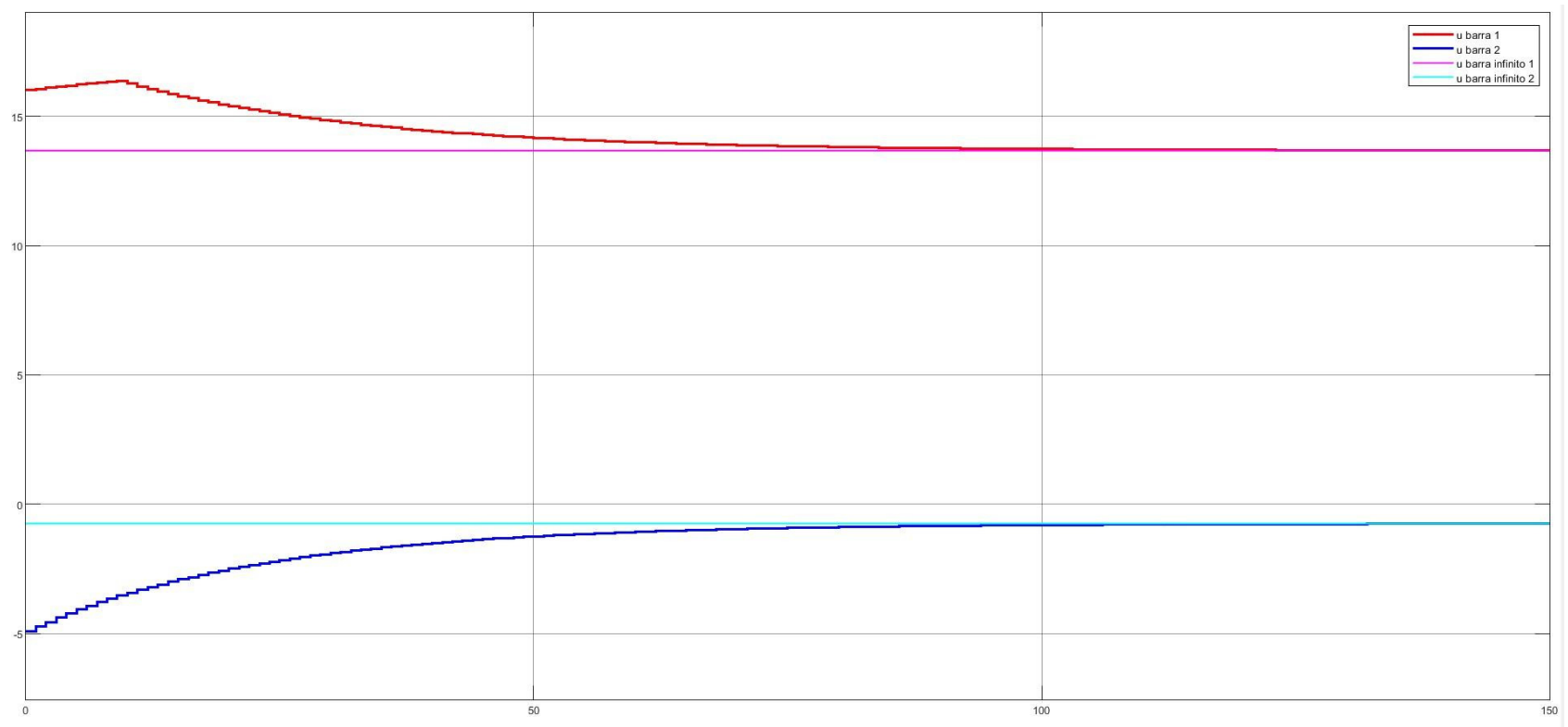
Con  $\bar{u}_\infty$  y  $x_\infty$  se calcula el valor de  $u_\infty$ :

$$u_\infty = \begin{bmatrix} 6,4223 \\ 6,4223 \end{bmatrix} \quad (7.7)$$



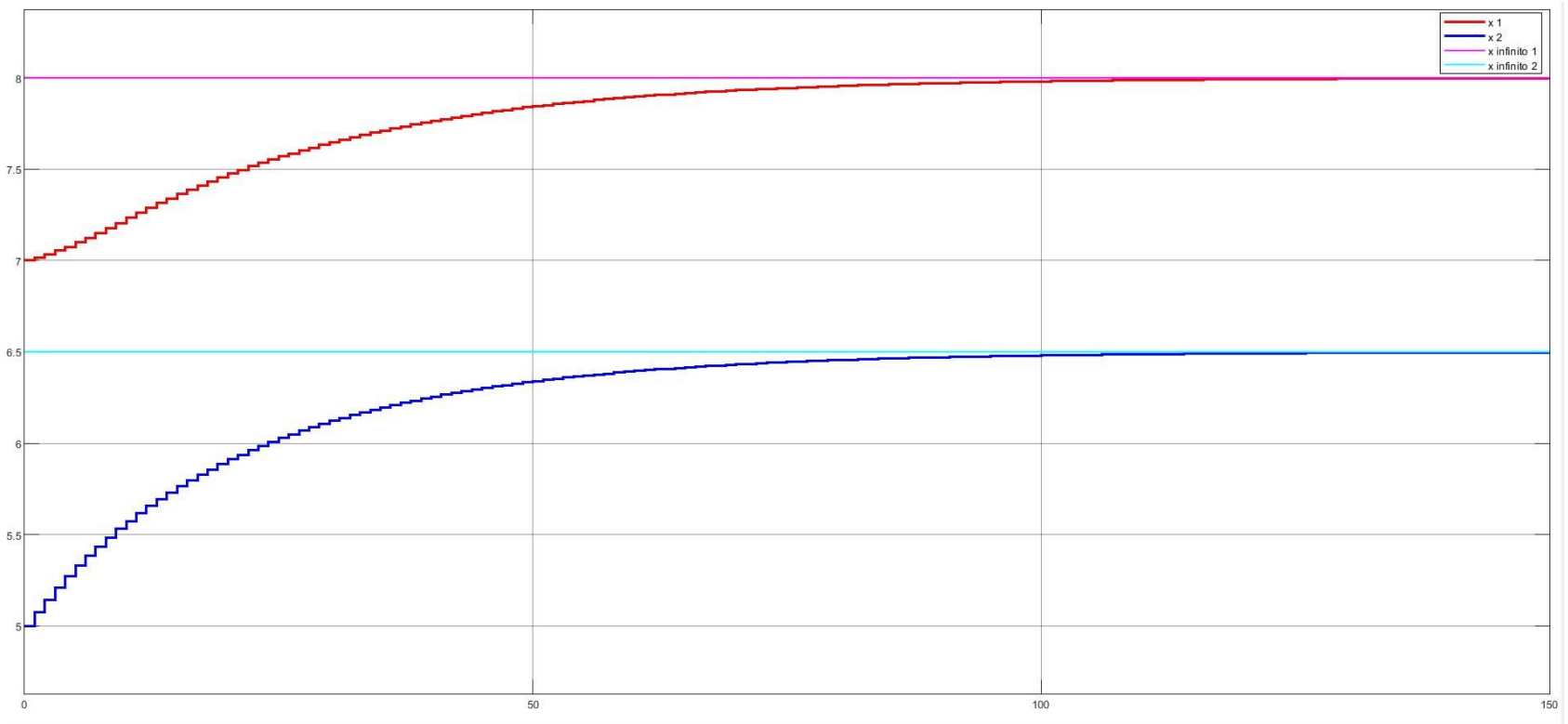
**Figura 7.15:** Gráfico de las salidas  $y_k$

Del gráfico de la Figura 7.15 se aprecia que ambas salidas  $y_1$  e  $y_2$  llegan a sus referencias  $r_1$  y  $r_2$  respectivamente.



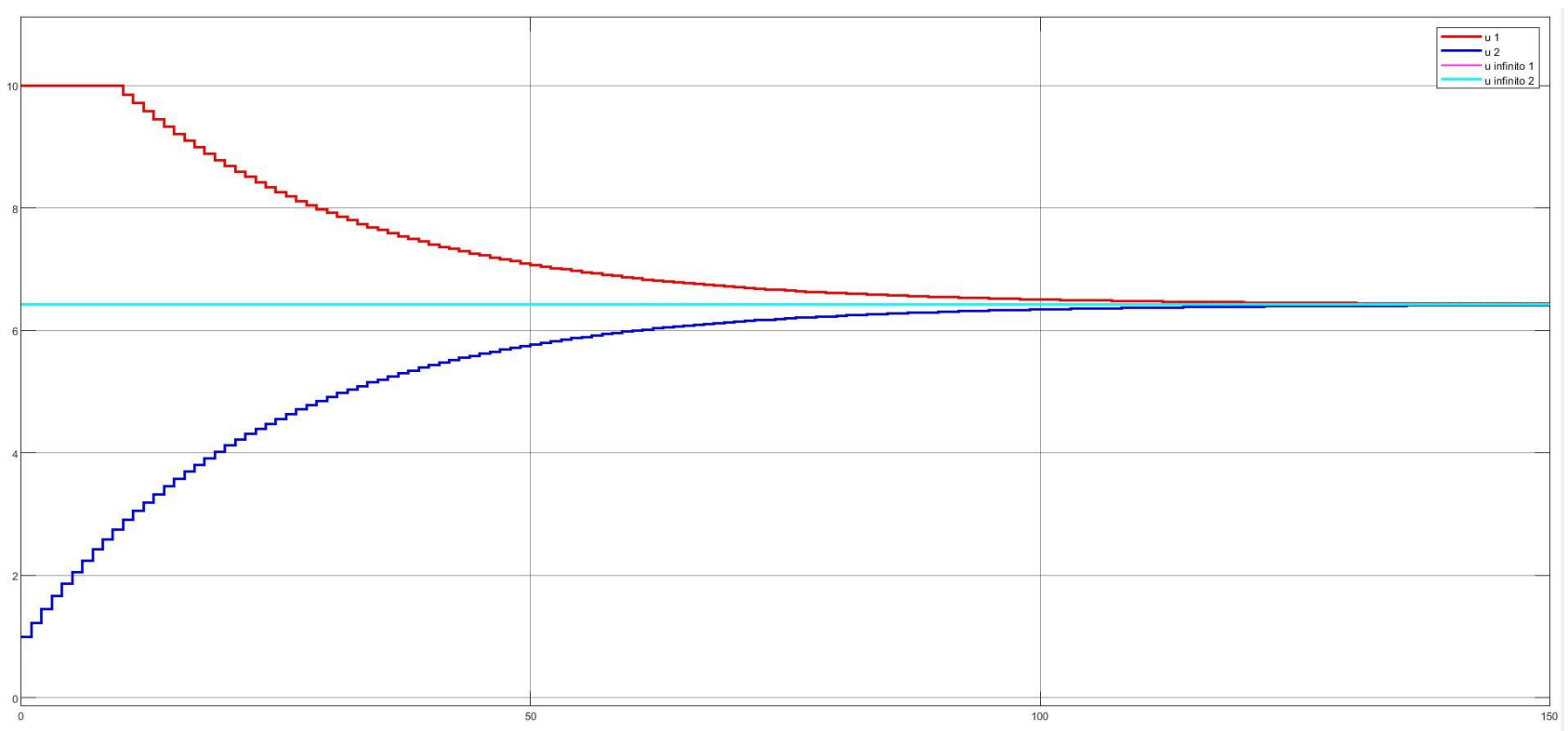
**Figura 7.16:** Gráfico de  $\bar{u}_k$

Del gráfico de la Figura 7.16 se aprecia que  $\bar{u}_1$  y  $\bar{u}_2$  llegan a su valor estacionarios  $\bar{u}_{\infty 1}$  y  $\bar{u}_{\infty 2}$  respectivamente.



**Figura 7.17:** Gráfico de los estados  $x_k$

Del gráfico de la Figura 7.17 se aprecia que ambos estados  $x_1$  y  $x_2$  llegan a su valor estacionario  $x_{\infty 1}$  y  $x_{\infty 2}$  respectivamente.



**Figura 7.18:** Gráfico de las entradas  $u_k$

Del gráfico de la Figura 7.18 se aprecia que las entradas  $u_1$  y  $u_2$  llegan a su valor estacionario  $u_{\infty 1}$  y  $u_{\infty 2}$ , que en este caso  $u_{\infty 1} = u_{\infty 2}$ . También se aprecia que  $u_1$  se satura durante un tiempo en 10, esto ya que la entrada debería ser mayor pero por la restricción impuesta no puede ser mayor a 10.

- Tiempo de Asentamiento

Para calcular el tiempo de asentamiento se va a usar la ayuda de los cursores del gráfico.

1. Tiempo de Asentamiento para  $y_1$

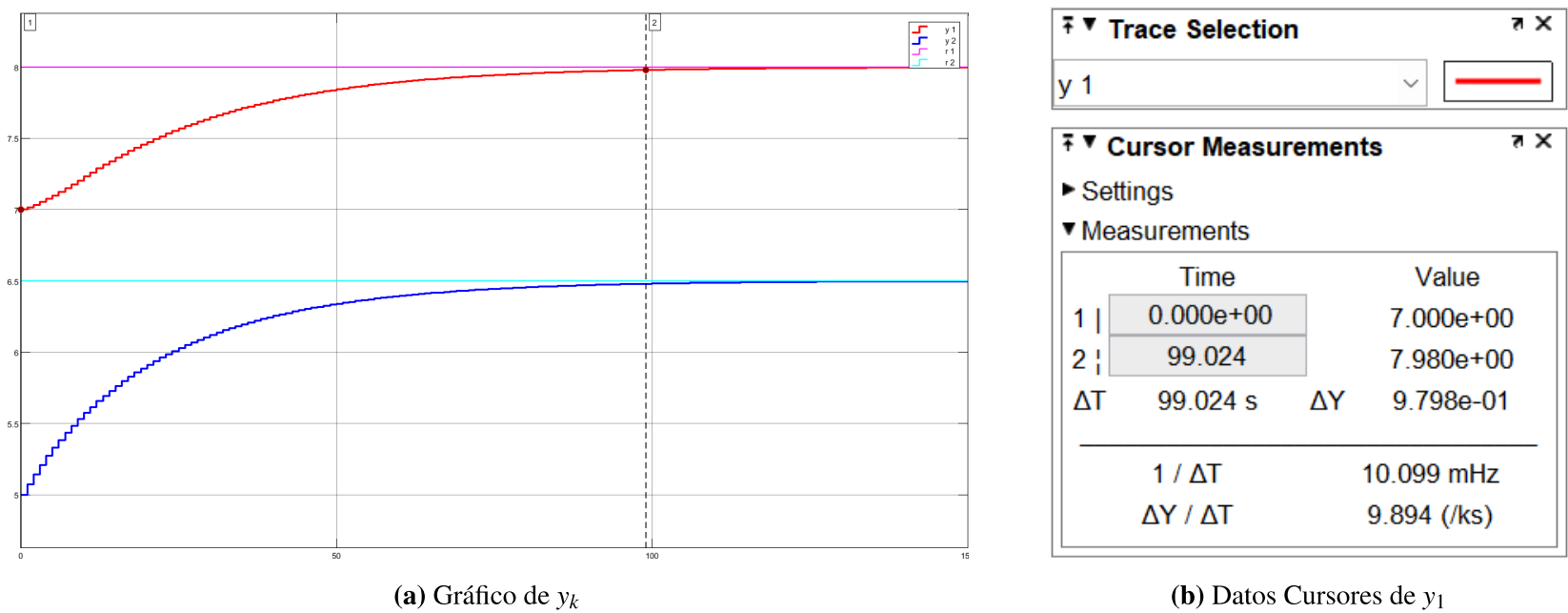


Figura 7.19: Tiempo de Asentamiento de  $y_1$

Como se ve en el gráfico y los datos del cursor de la Figura 7.19,  $y_1$  parte cargándose desde el valor 7 hasta llegar a 8. Como se tiene que cargar un 98 %,  $y_1$  tiene que llegar al valor 7,98, para así calcular el tiempo de asentamiento, el cual se calcula usando la ayuda de los cursores, el cual da que es aproximadamente 99 segundos.

2. Tiempo de Asentamiento para  $y_2$

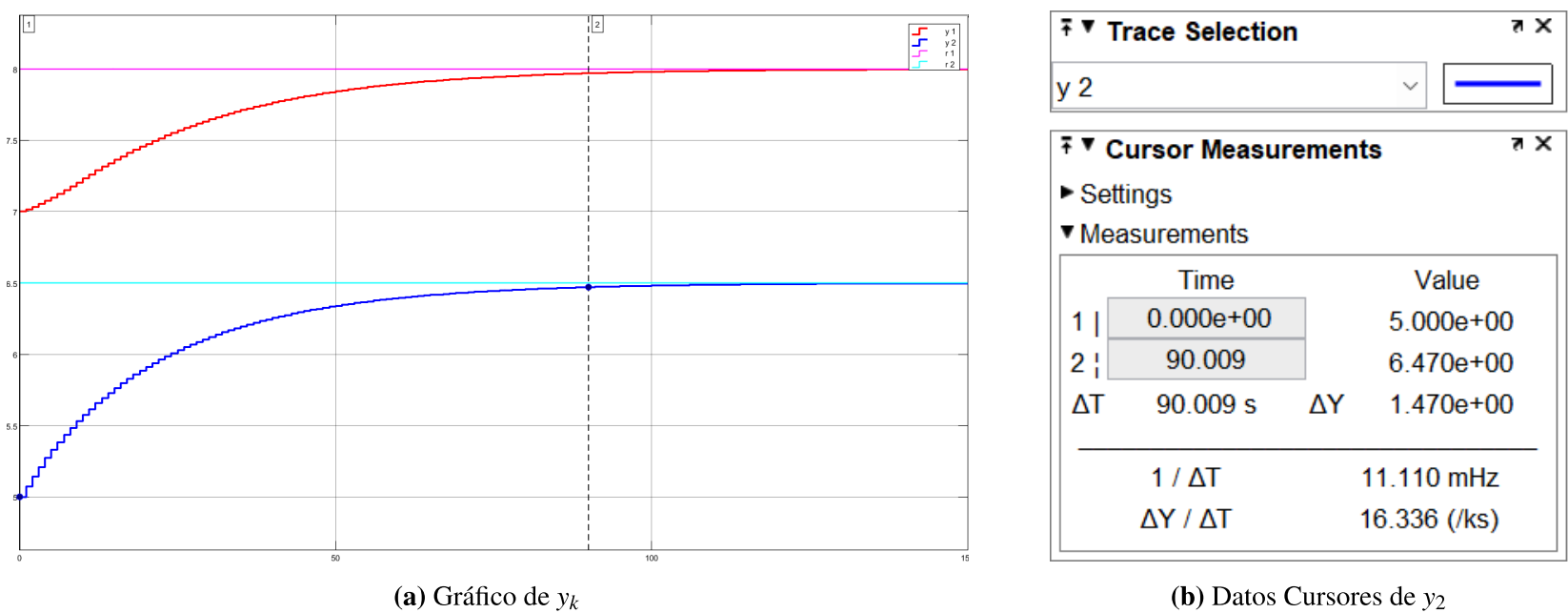
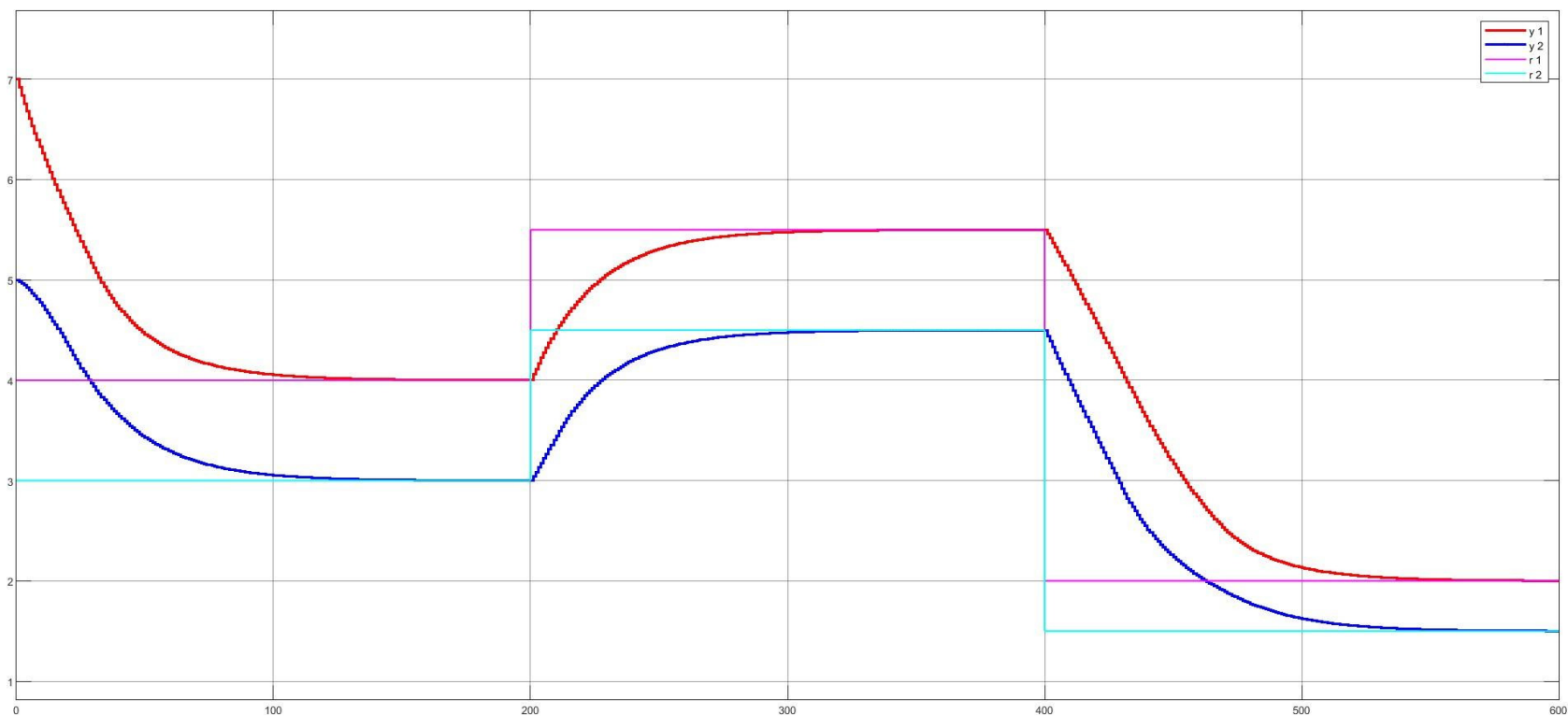


Figura 7.20: Tiempo de Asentamiento de  $y_2$

Como se ve en el gráfico y los datos del cursor de la Figura 7.20,  $y_2$  parte cargándose desde el valor 5 hasta llegar a 6,5. Como se tiene que cargar un 98 %,  $y_2$  tiene que llegar al valor 6,47, para así calcular el tiempo de asentamiento, el cual se calcula usando la ayuda de los cursores, el cual da que es aproximadamente 90 segundos.

### 7.2.1. Cambios en la Referencia

Ahora se simula cambiando las dos referencias al mismo tiempo en dos ocasiones, dando los siguientes gráficos:



**Figura 7.21:** Gráfico de las salidas  $y_k$

Como se aprecia en la Figura 7.21, la salida  $y_k$  si logra seguir la referencia  $r$  cuando hay cambios de  $r$  como se aprecia en el gráfico, en este caso se cambió la referencia dos veces.

El valor de  $r$  primero está en  $\begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$  hasta los 200 segundos cuando cambia a  $\begin{bmatrix} 4,5 \\ 5,5 \end{bmatrix}$  hasta los 400 segundos cuando cambia a  $\begin{bmatrix} 2 \\ 1,5 \end{bmatrix}$ .

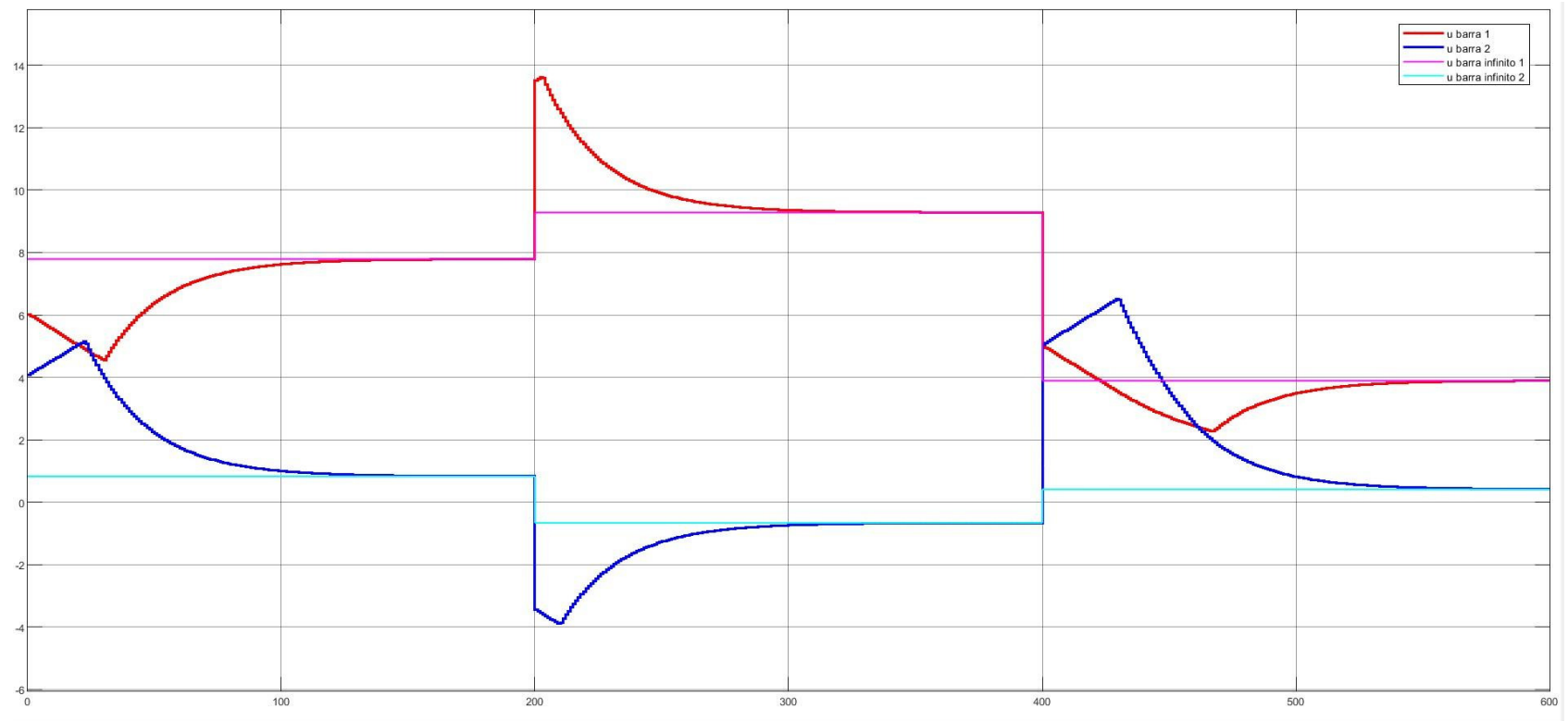


Figura 7.22: Gráfico de  $\bar{u}_k$

Con el cambio en la referencia  $r$ ,  $\bar{u}_k$  también va a cambiar en esos instantes, para luego volver al nuevo  $\bar{u}_\infty$  en estado estacionario como se muestra en el gráfico de la Figura 7.22.

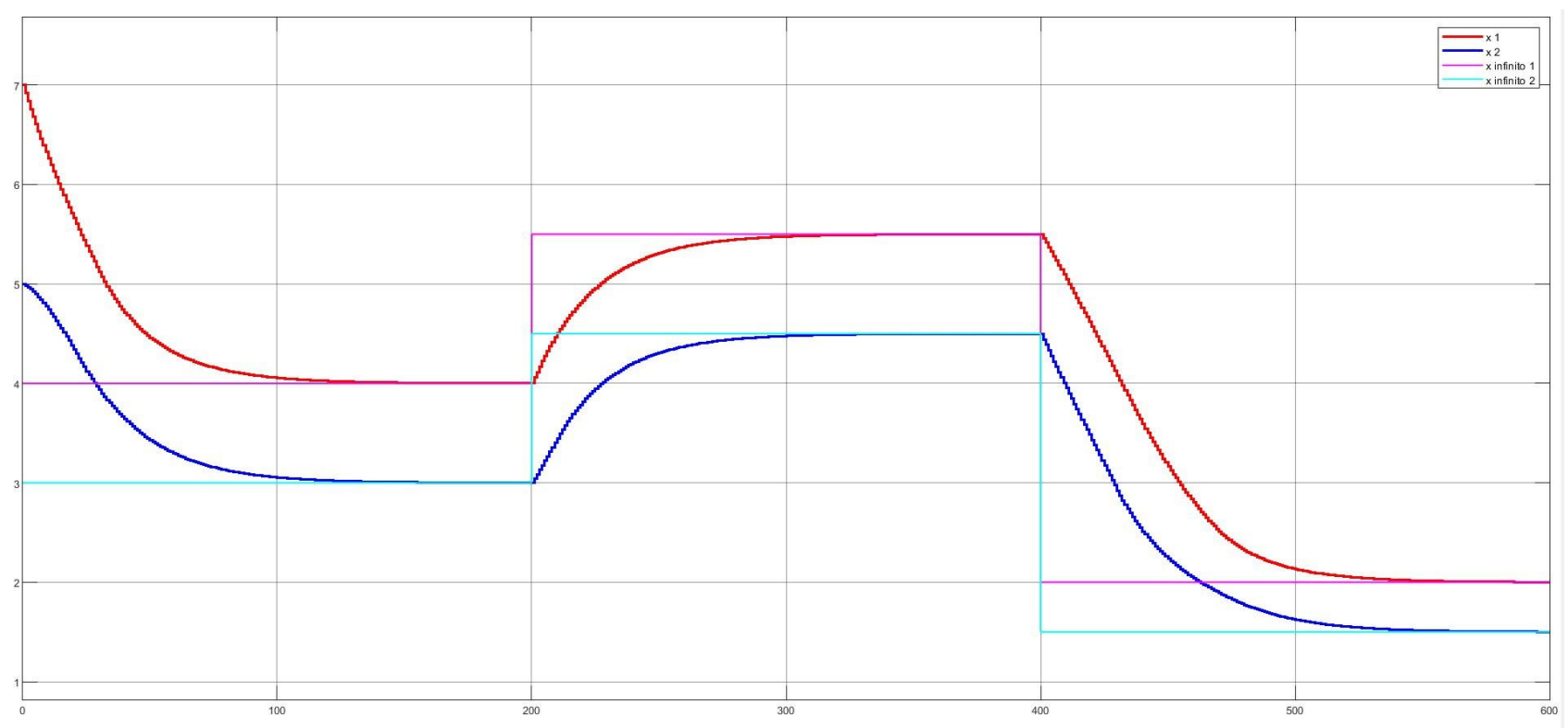
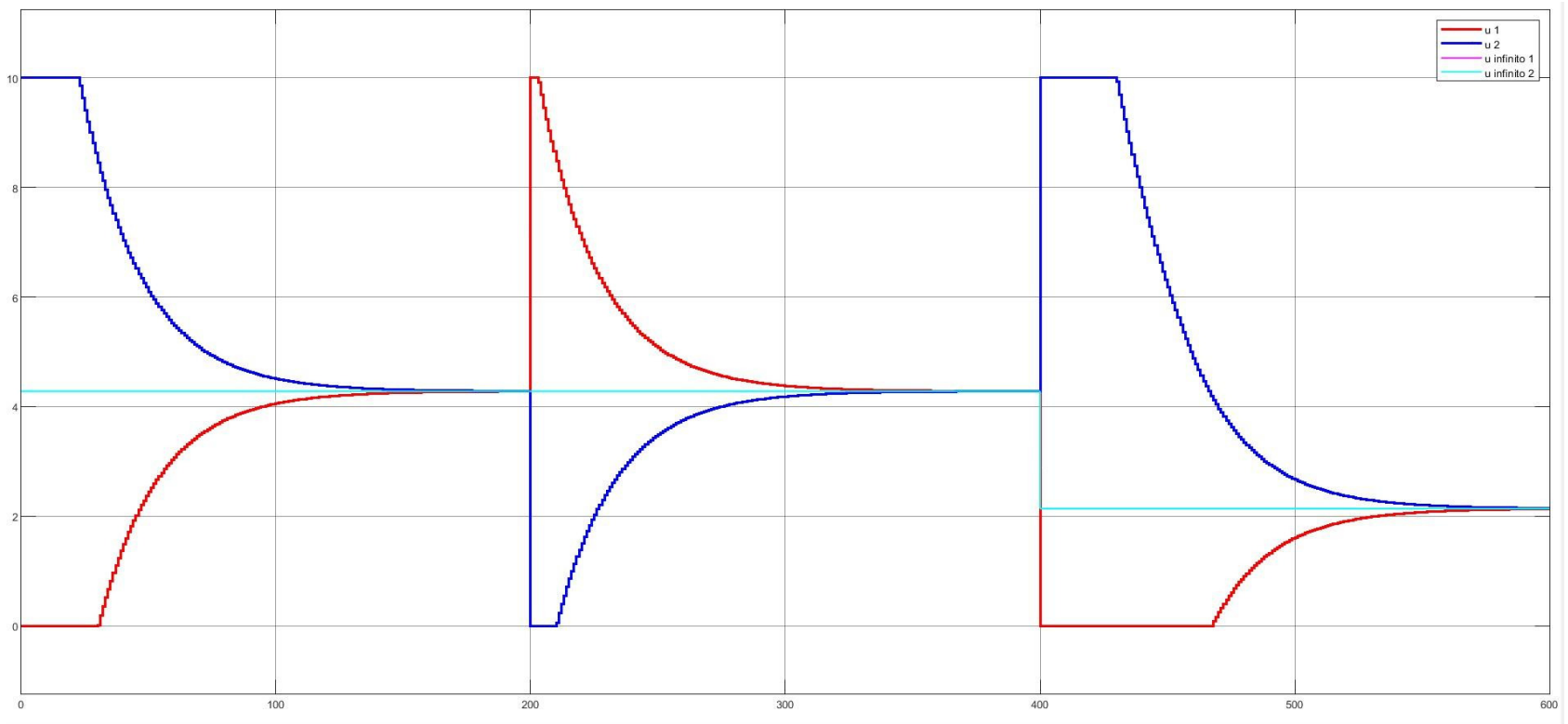


Figura 7.23: Gráfico de los estados  $x_k$

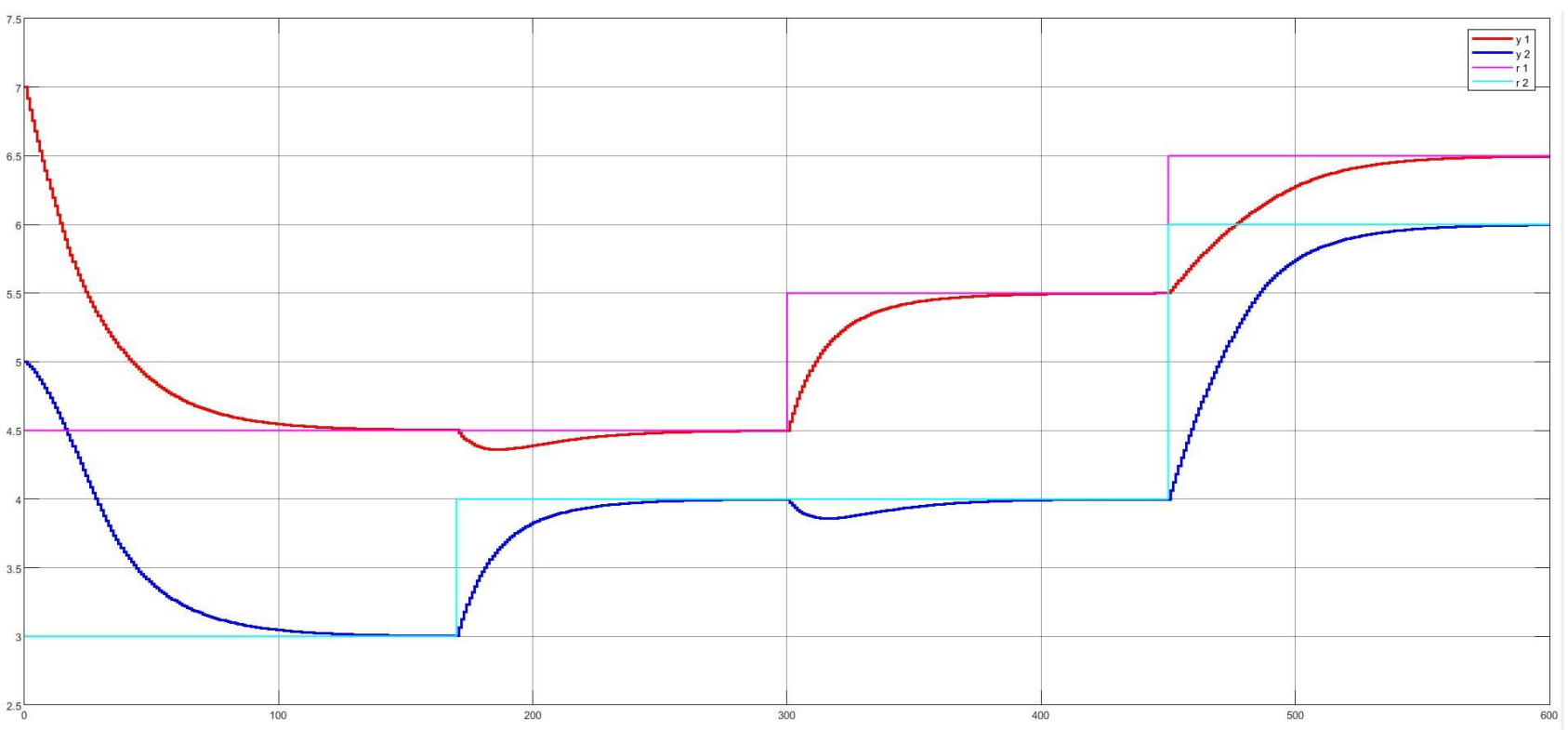
Como se ve en el gráfico de la Figura 7.23, los estados cambian al mismo tiempo que las salidas, esto porque  $y_k = x_k$ .



**Figura 7.24:** Gráfico de las entradas  $u_k$

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.24, la entrada  $u_k$  también se ve afectada por el cambio de referencia. Como se ve, la actuación (entrada) a la que se tiene que llegar cuando se hace el primer cambio de referencia, es al mismo valor en el que se encontraba, esto debido a que la diferencia de altura entre  $y_1$  e  $y_2$  se mantiene. Como en el primer instante de tiempo se está disminuyendo el nivel de los estanques,  $u_1$  es mucho mayor que  $u_2$  hasta que se equilibran, mientras que en el segundo instante como se está aumentando el nivel de los estanques,  $u_2$  es mucho mayor que  $u_1$  hasta que se equilibran.

Ahora se hacen cambios en cada referencia en momentos distintos, para ver cómo responde el sistema frente a estos cambios, y el último cambio en ambas referencias se hace al mismo tiempo:



**Figura 7.25:** Gráfico de las salidas  $y_k$

Como se aprecia en el gráfico de la Figura 7.25, la referencia  $r$  parte en  $r_1 = 4,5$  y  $r_2 = 3$ , a los 170 segundos  $r_2$  cambia a 4, esto genera una pequeña perturbación en  $y_1$  lo que provoca que  $y_1$  baje un poco su nivel, logrando volver a su referencia  $r_1$  con el paso del tiempo. Luego, a los 300 segundos  $r_1$  cambia a 5,5 lo que provoca una pequeña perturbación en  $y_2$  que luego de un tiempo vuelve a su referencia  $r_2$ . Finalmente, a los 450 segundos  $r_1$  y  $r_2$  cambian a 6,5 y 6 respectivamente, para que luego de un tiempo las salidas  $y_k$  vuelvan a llegar a sus referencias  $r$ .

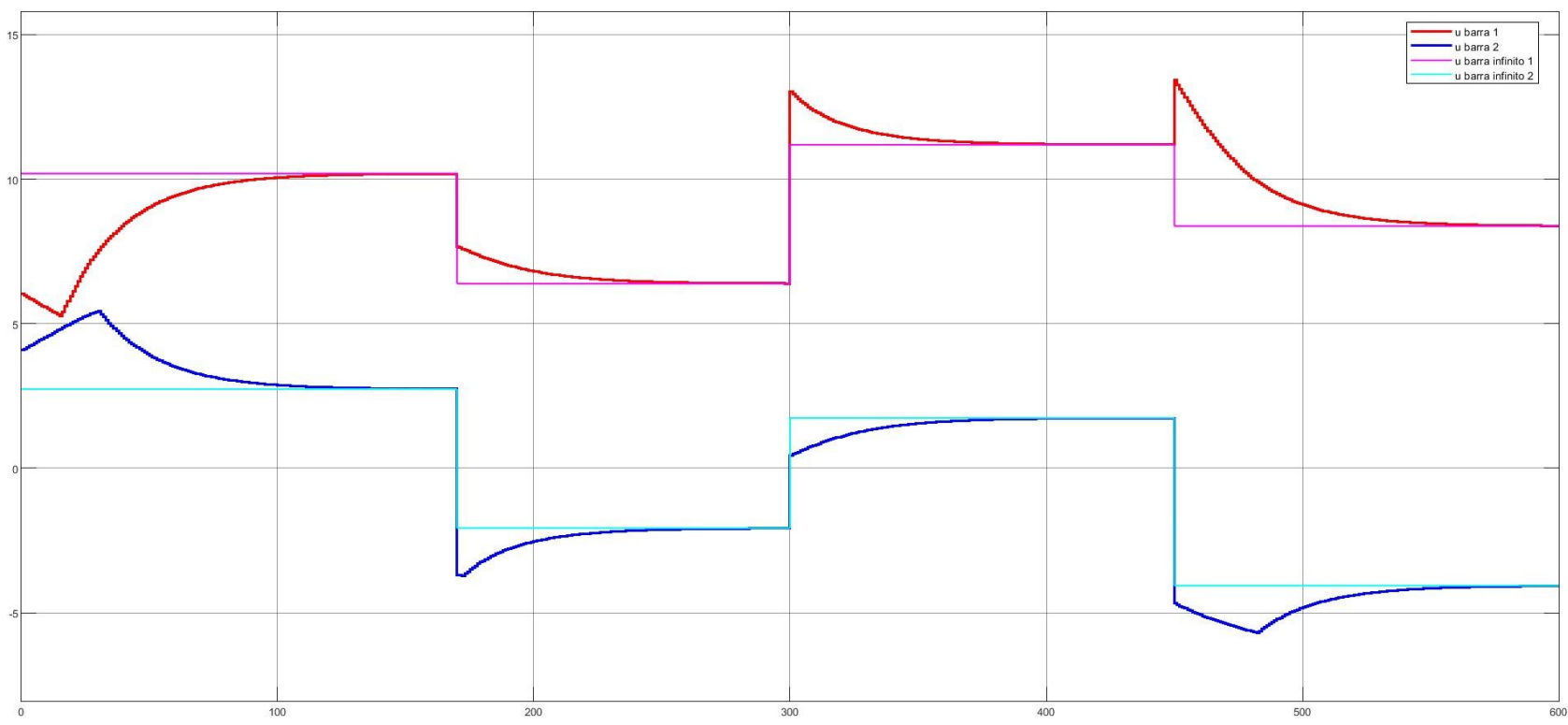
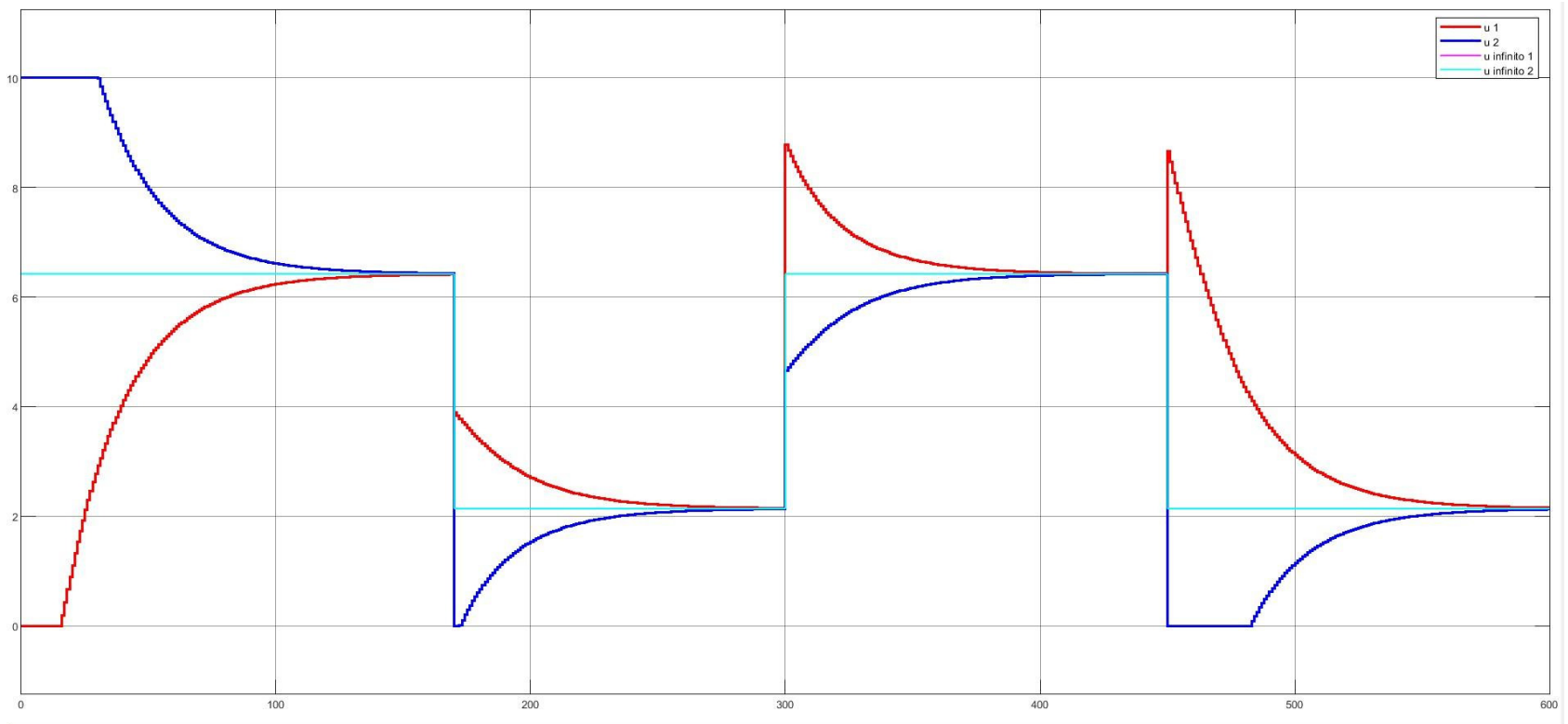


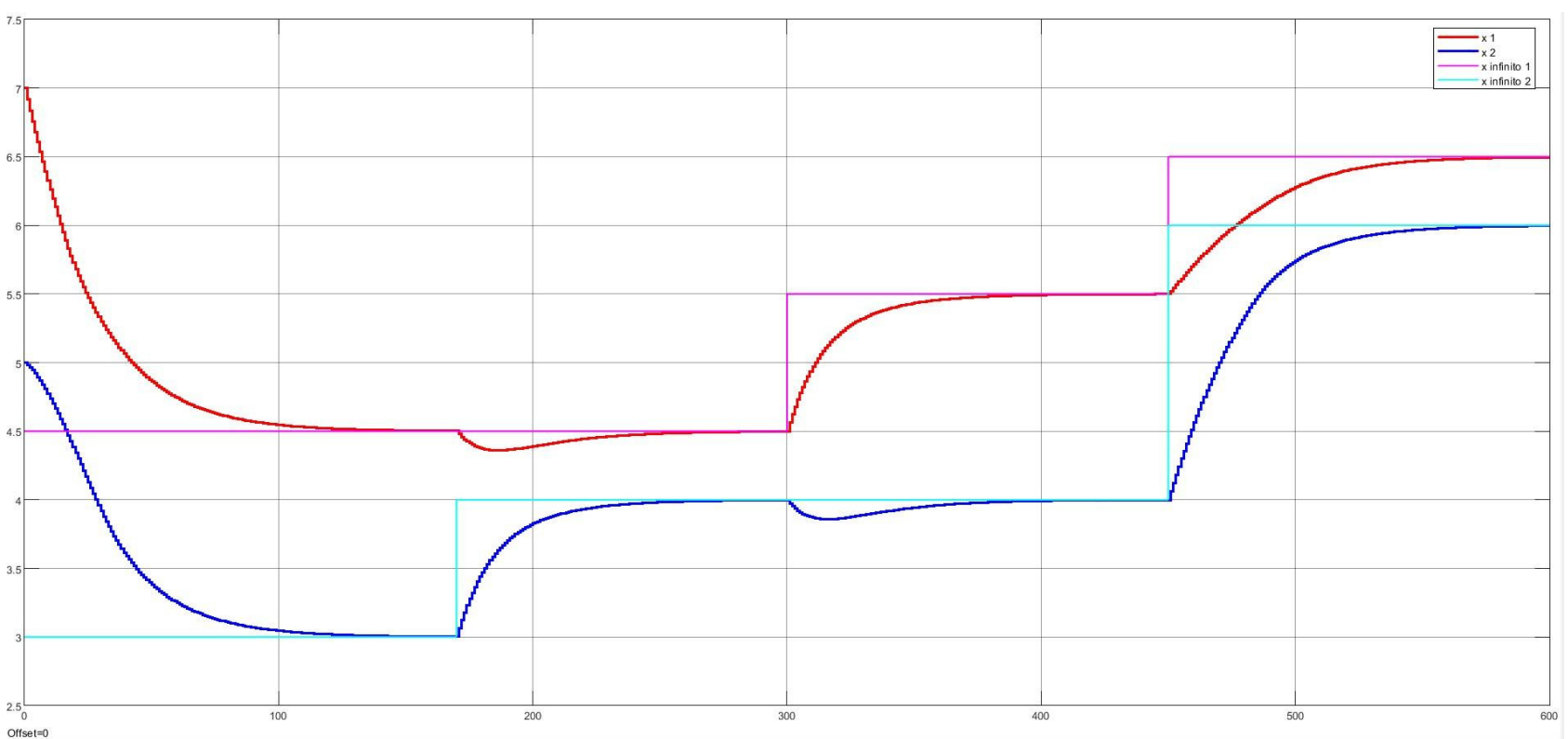
Figura 7.26: Gráfico de  $\bar{u}_k$

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.26,  $\bar{u}_\infty$  cambia en todos los instantes en que cambia la referencia  $r$ .  $\bar{u}_{\infty 1}$  no cambia solo cuando cambia  $r_1$ , también cambia cuando cambia  $r_2$ , y lo mismo pasa con  $\bar{u}_{\infty 2}$ . Por lo que  $\bar{u}_k$  cambia para seguir a  $\bar{u}_\infty$ .



**Figura 7.27:** Gráfico de las entradas  $u_k$

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.27,  $u_\infty$  cambia en todos los momentos en que cambia alguna de las referencias al igual que pasa con  $\bar{u}_\infty$ . Por lo que en cada cambio de  $u_\infty$ ,  $u_k$  cambia para seguir a  $u_\infty$ .



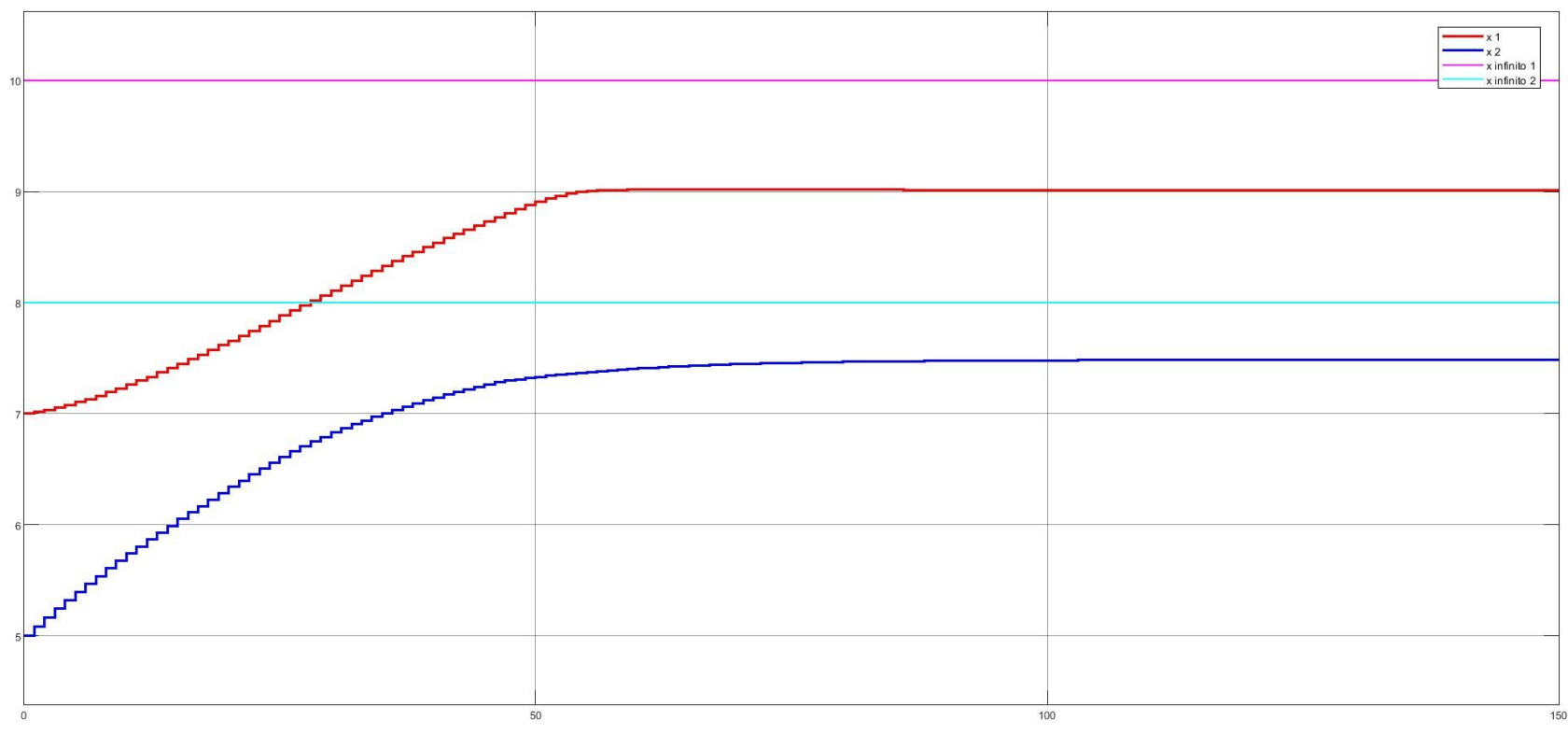
**Figura 7.28:** Gráfico de los estados  $x_k$

Del gráfico de la Figura 7.28 no hay mucho más que agregar ya que viene siendo el mismo análisis que en el gráfico de la Figura 7.25, ya que  $y_k = x_k$ .

### 7.2.2. Cambios en las Restricciones

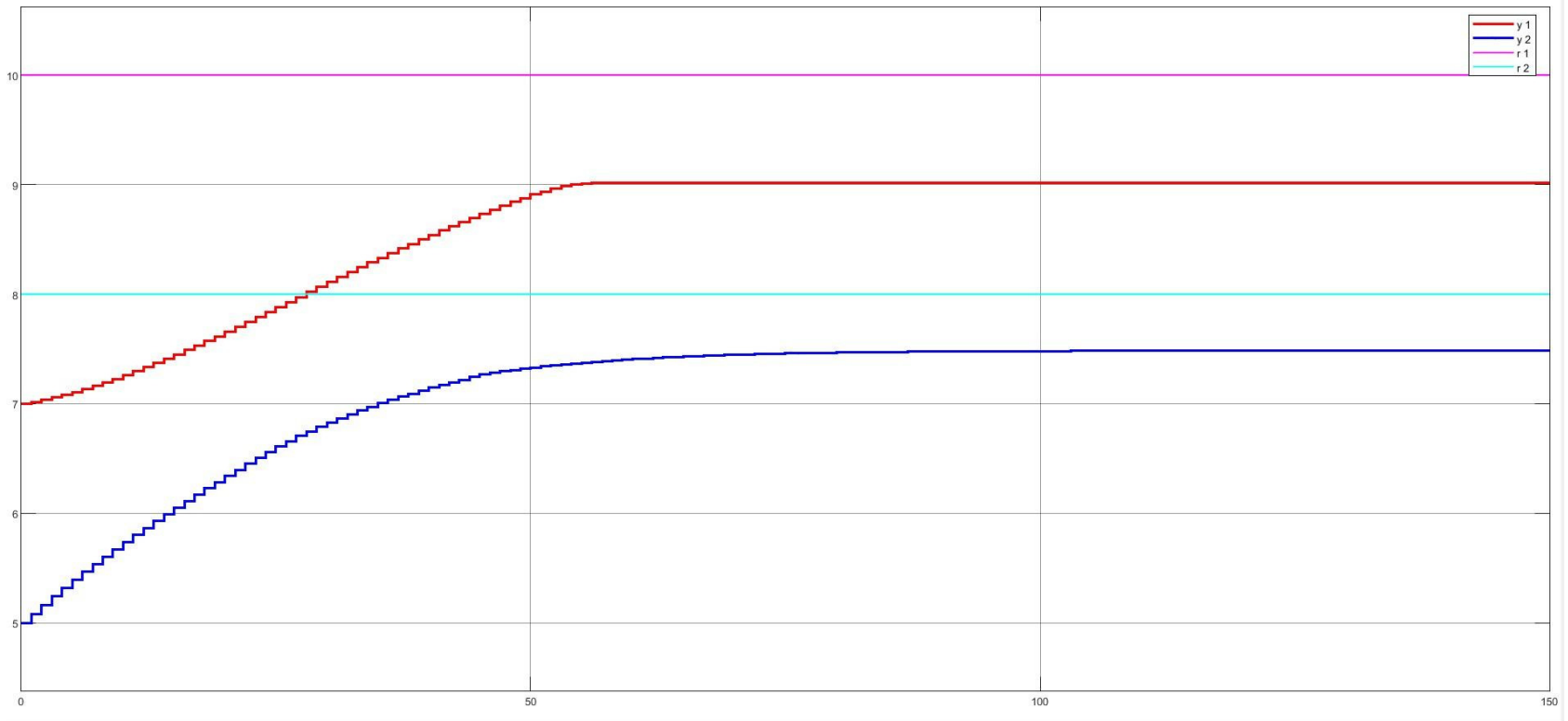
Anteriormente se hizo cambios en las restricciones de  $u^{max}$ ,  $u^{min}$  y  $x^{min}$ , ahora se va a hacer un cambio en la restricción de  $x^{max}$ .

$$\blacksquare x^{max} = \begin{bmatrix} 9 \\ 9 \end{bmatrix}$$



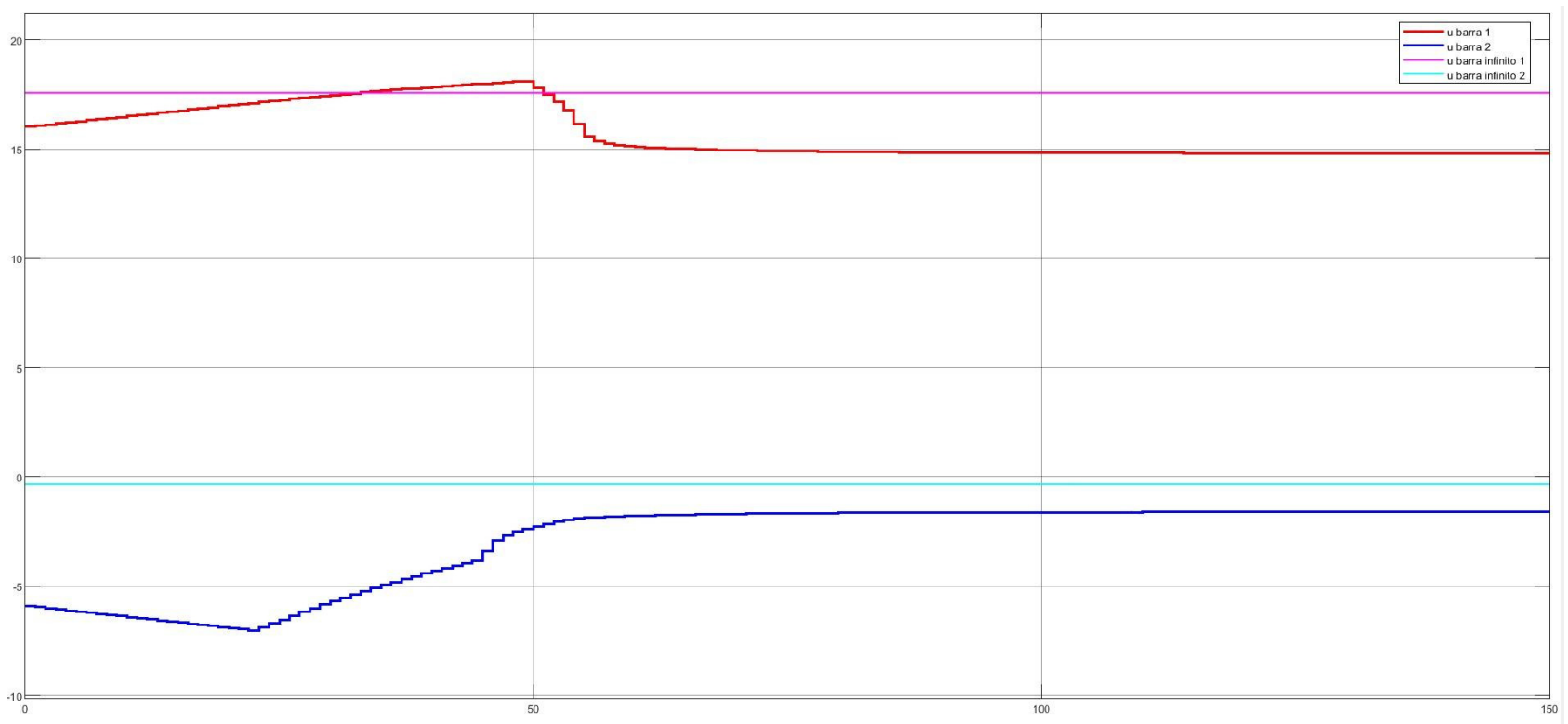
**Figura 7.29:** Gráfico de los estados  $x_k$

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.29,  $x_1$  no puede llegar a su valor en estado estacionario  $x_{\infty 1}$  esto por la restricción impuesta en  $x^{max}$ , ya que  $x_{\infty 1}$  es mayor que el valor máximo que puede alcanzar  $x_1$  por la restricción impuesta. Al no poder llegar  $x_1$  a su valor en estado estacionario, provoca que  $x_2$  tampoco logre llegar a su valor en estado estacionario aunque  $x_{\infty 2}$  sea menor que la restricción  $x^{max}$ .



**Figura 7.30:** Gráfico de las salidas  $y_k$

En el gráfico de la Figura 7.30 se ve que la salida  $y_k$  no sigue a la referencia  $r$ . Como  $y_k = x_k$  y se quiere que  $y_1$  siga una referencia mayor permitida a la que puede llegar el estado  $x_1$ , no es posible que  $y_1$  llegue a la referencia  $r_1$ , porque se está respetando la restricción impuesta por  $x^{max}$ . Y como se explicó anteriormente para  $x_2$ ,  $y_2$  tampoco logra seguir su referencia  $r_2$ .



**Figura 7.31:** Gráfico de  $\bar{u}_k$

En el gráfico de la Figura 7.31, se ve que  $\bar{u}_k$  no logra seguir su valor en estado estacionario  $\bar{u}_\infty$ , esto ya que por lo explicado anteriormente  $x_k$  no sigue a  $x_\infty$ , y como  $\bar{u}_k$  de uno de los parámetros que depende es de  $x_k$ , no es posible que llegue a su valor de referencia.

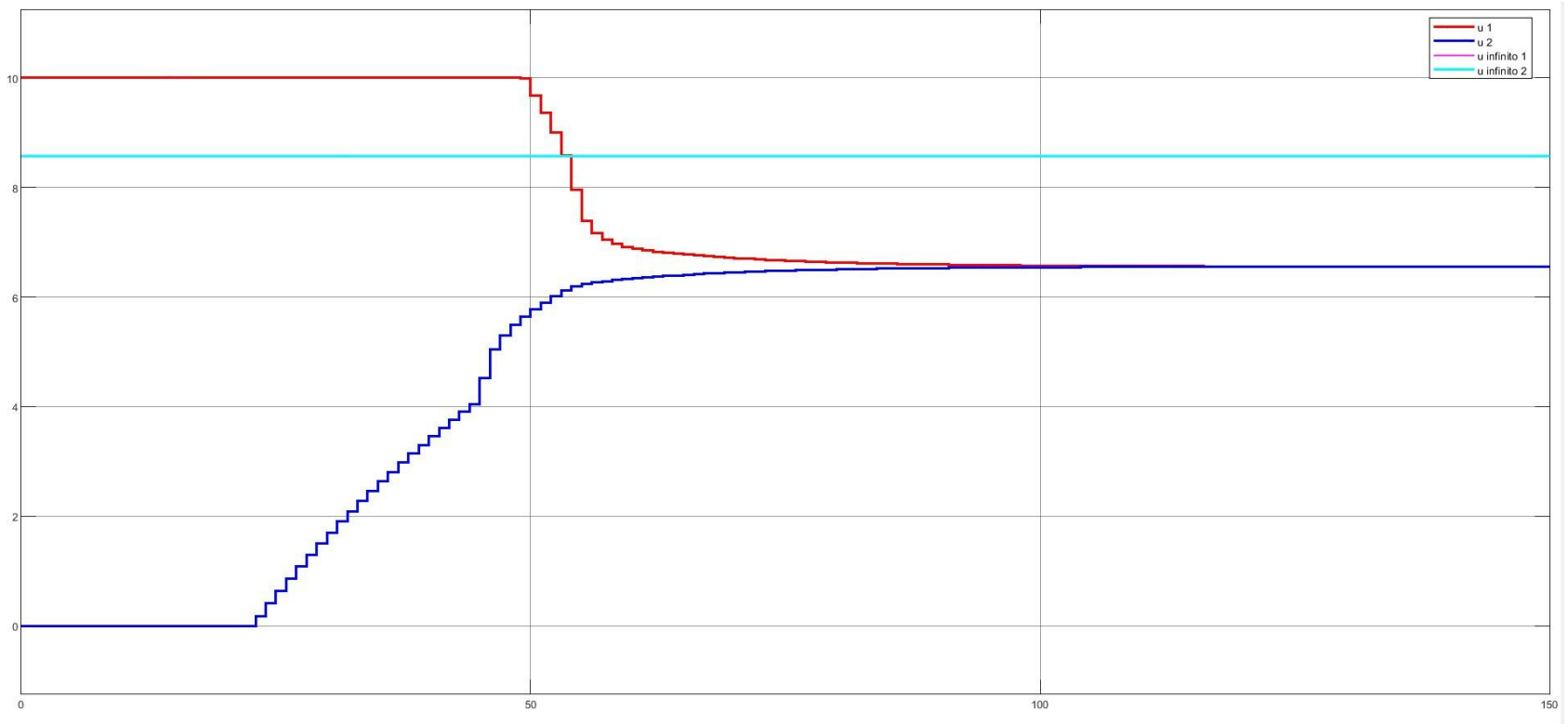


Figura 7.32: Gráfico de las entradas  $u_k$

En el gráfico de la Figura 7.32 se ve que  $u_k$  no sigue a  $u_\infty$ , esto porque como  $x_1$  no puede seguir a  $x_{1\infty}$ ,  $u_1$  no va a poder seguir a  $u_{1\infty}$ . Como  $u_1$  converge al mismo valor que  $u_2$  y  $u_1$  al no poder llegar a  $u_{1\infty}$ ,  $u_2$  tampoco va a llegar a  $u_{2\infty}$ , por esta razón  $x_2$  no logra seguir a  $x_{2\infty}$  e  $y_2$  no logra seguir a  $r_2$  a pesar de que  $x_{2\infty}$  si cumple con estar por debajo de la restricción impuesta por  $x^{max}$ .

### 7.3. Simulaciones en Estado Cero utilizando Observadores

Cuando se usan observadores para controlar, también se parte llevando todo al estado cero como se hizo anteriormente.

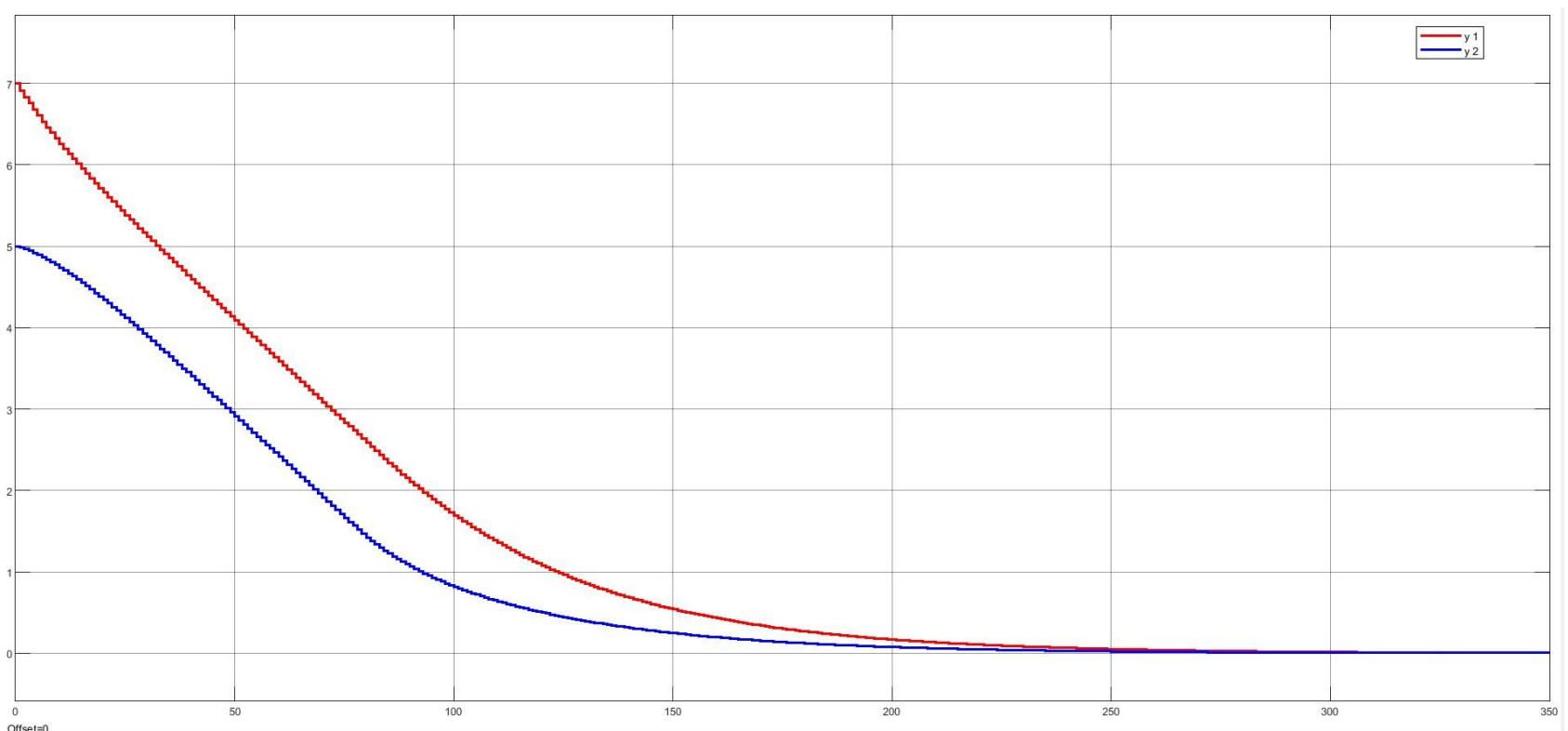
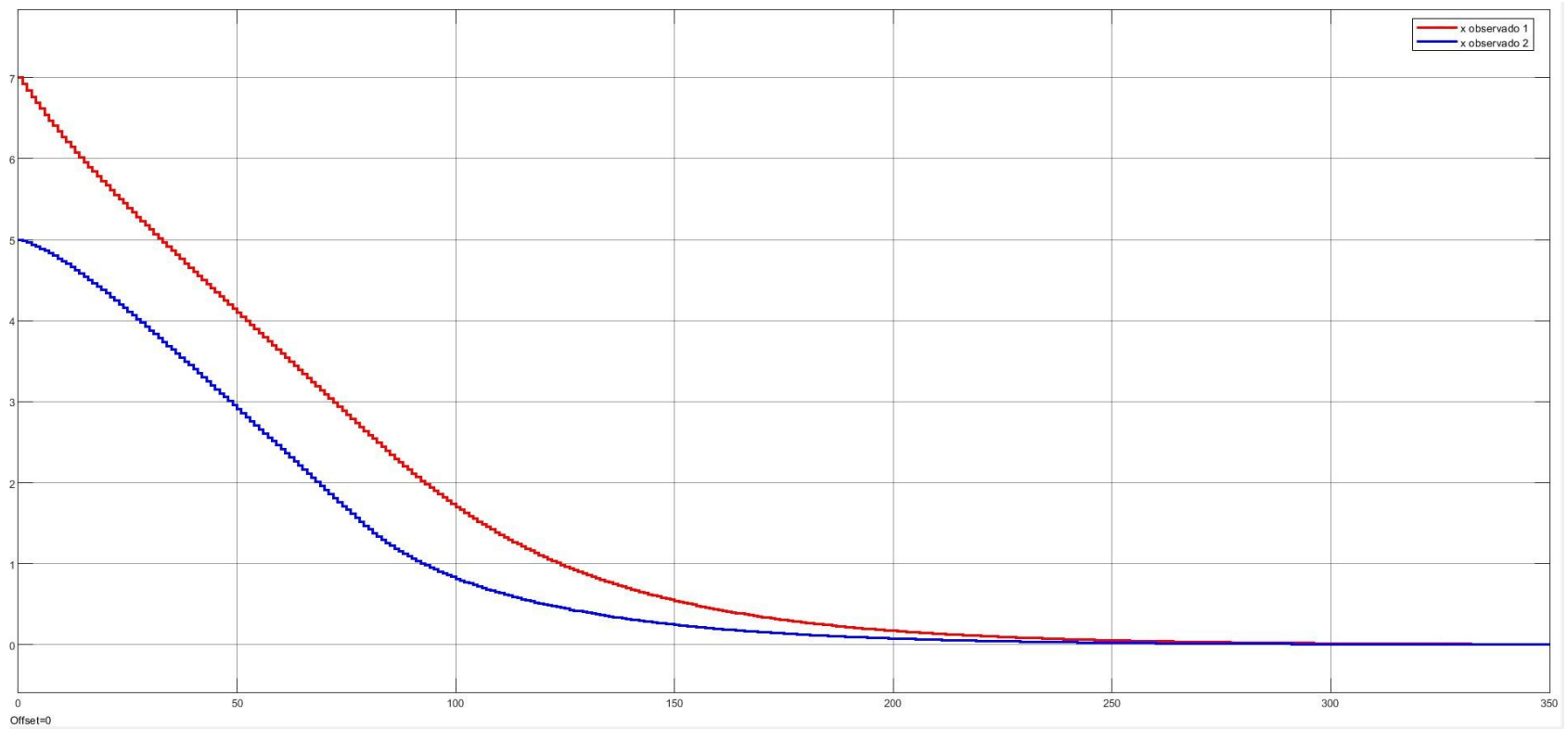
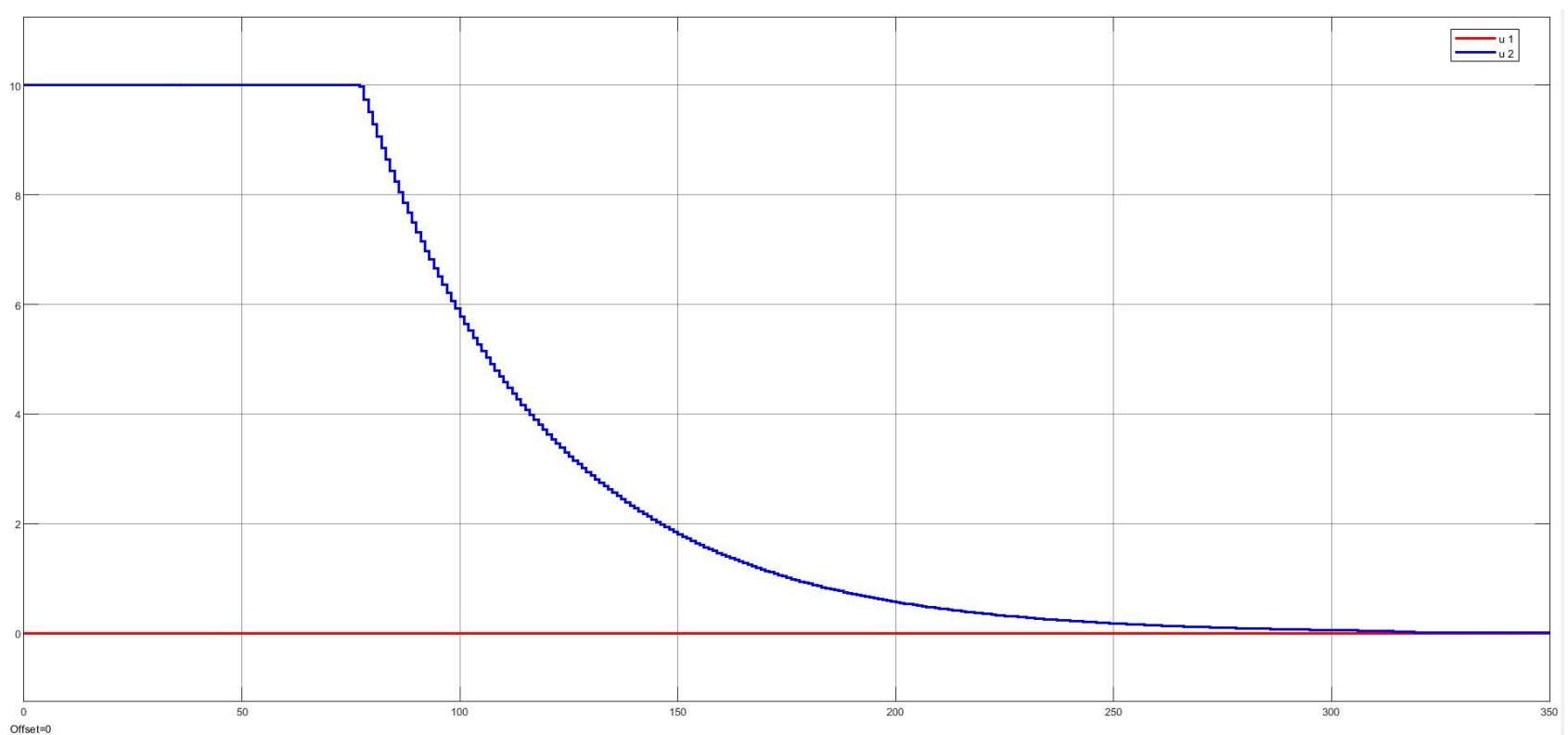


Figura 7.33: Gráfico de las salidas  $y_k$

**Figura 7.34:** Gráfico de los estados  $\hat{x}_k$ 

Como se ve en los gráficos de las Figuras 7.33 y 7.34 las salidas  $y_k$  y los estados observados  $\hat{x}_k$  llegan al estado cero transcurrido un tiempo.

**Figura 7.35:** Gráfico de las entradas  $u_k$ 

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.35,  $u_k$  llega al estado cero después de pasado un tiempo, durante un tiempo  $u_2$  se encuentra saturado.

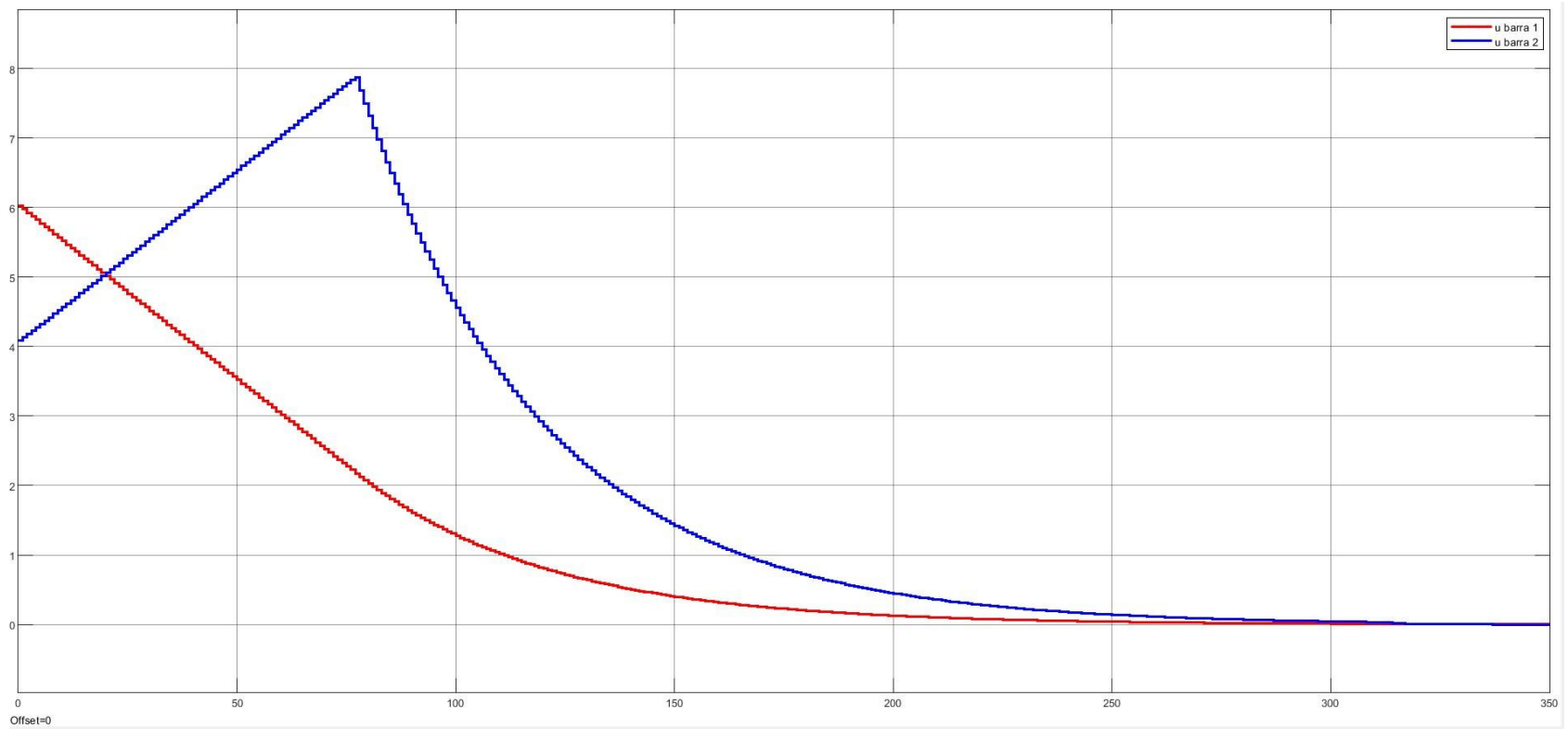


Figura 7.36: Gráfico de  $\bar{u}_k$

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.36, después de un tiempo  $\bar{u}_k$  llega al estado cero.

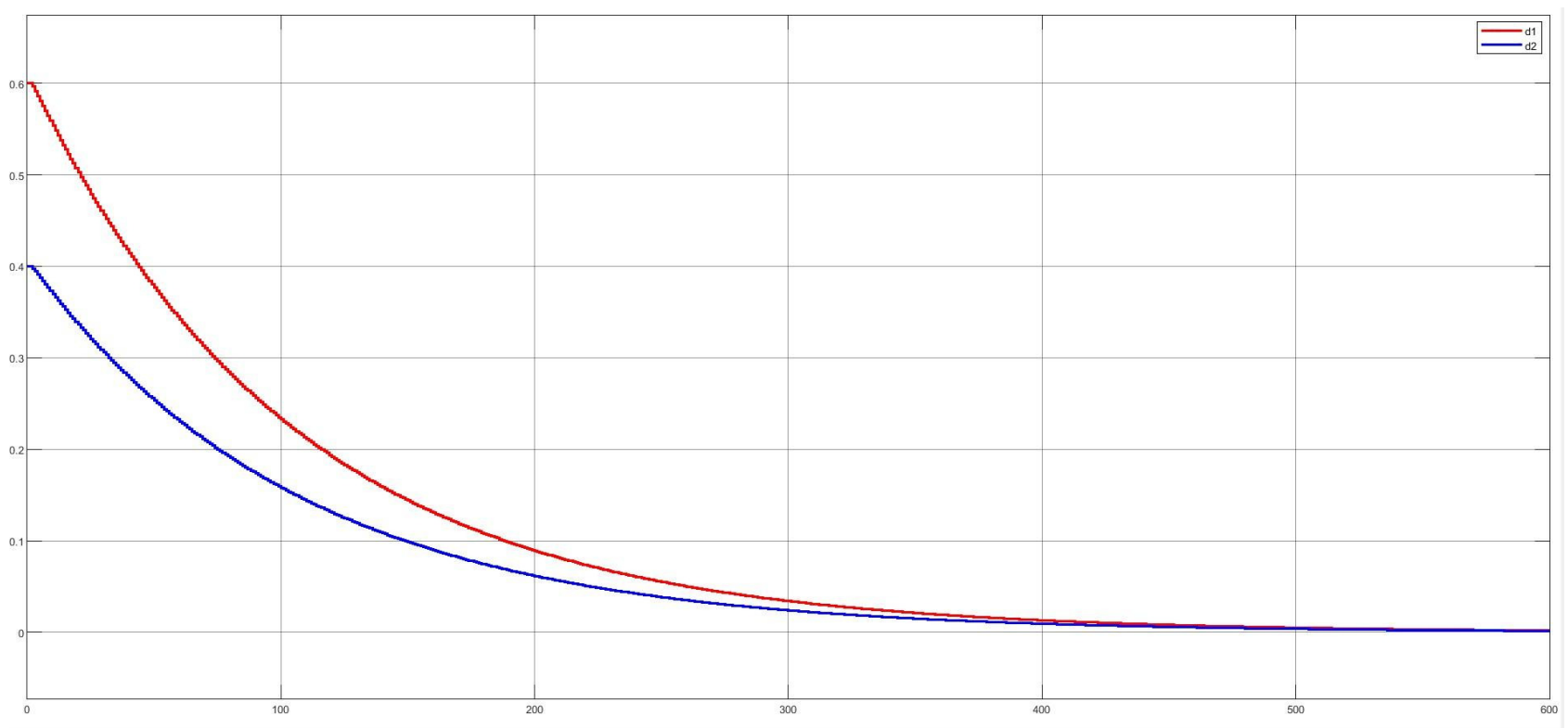


Figura 7.37: Gráfico de las perturbaciones  $d_k$

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.37, la perturbación observada  $\hat{d}_k$  llega a cero después de pasado un tiempo, otra cosa que se observa es que a diferencia de  $y_k$ ,  $\hat{x}_k$ ,  $\bar{u}_k$  y  $u_k$ , la perturbación observada  $hat{d}_k$  se demora bastante más tiempo en llegar al estado cero.

### 7.3.1. Cambios en las Restricciones

En esta instancia se hacen cambios en las restricciones de la entrada  $u_k$  para  $u^{min}$  y  $u^{max}$ , también se cambia la restricción del estado  $x_k$ ,  $x^{min}$ .

$$\blacksquare u^{min} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, u^{max} = \begin{bmatrix} 6 \\ 6 \end{bmatrix} \text{ y } x^{min} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}$$

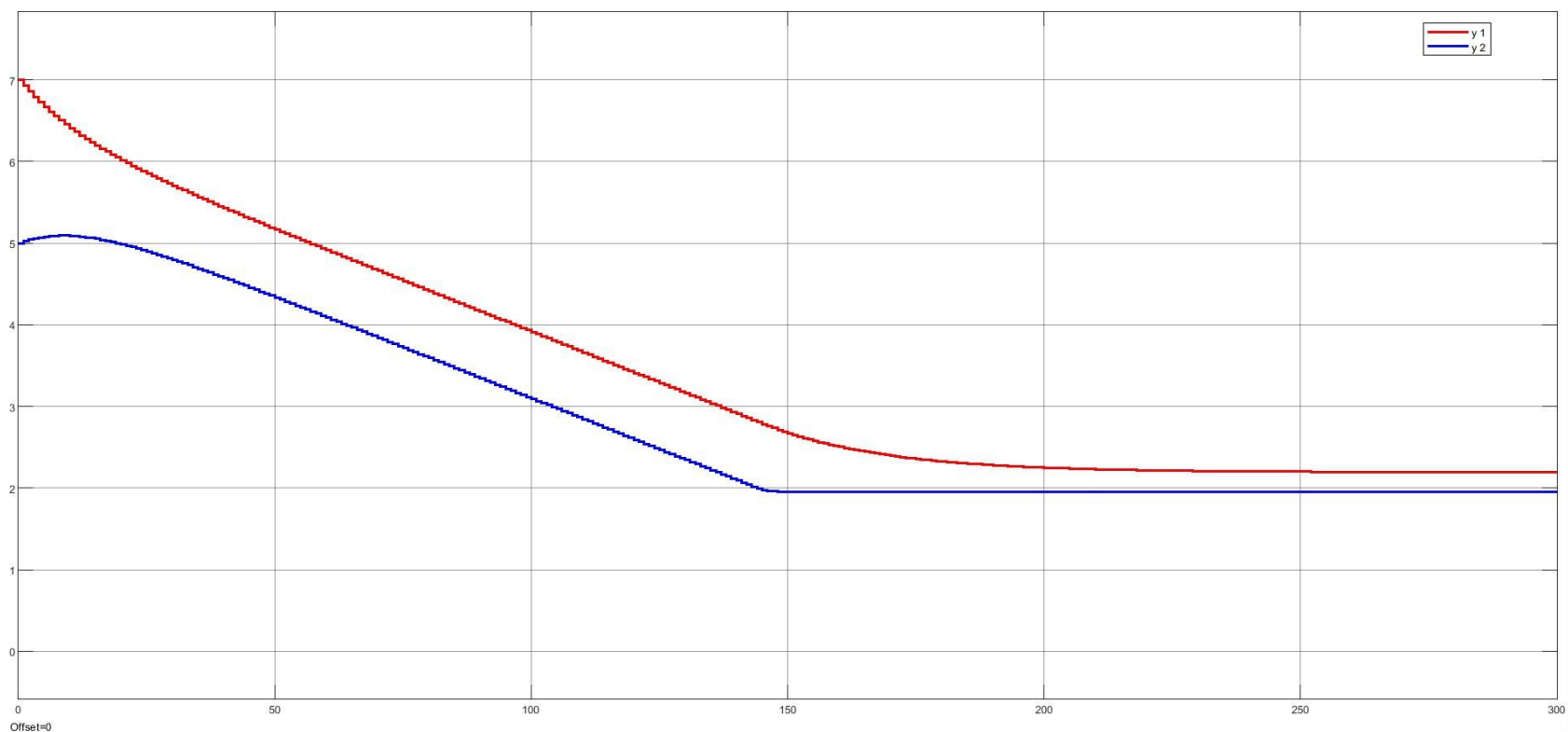


Figura 7.38: Gráfico de las salidas  $y_k$

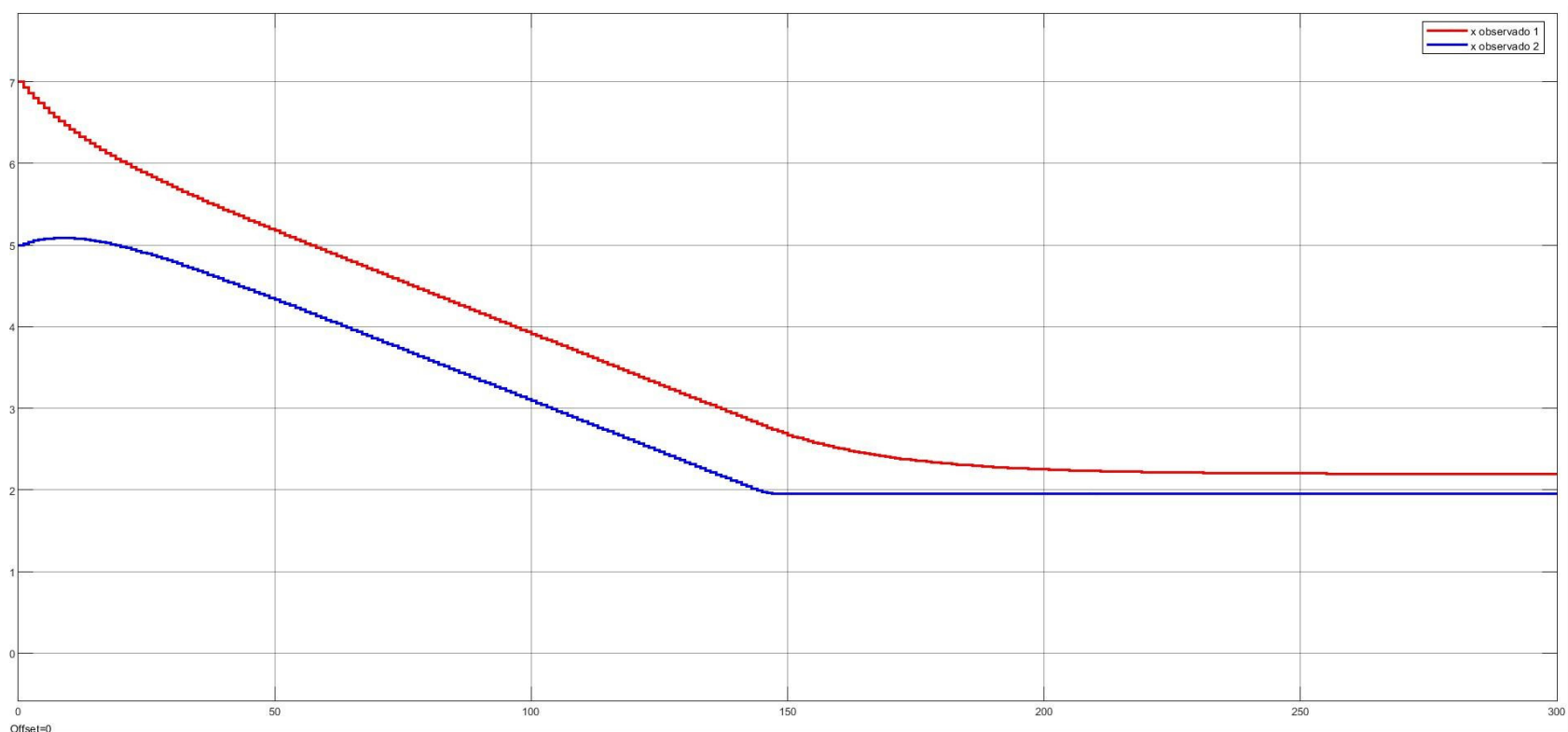
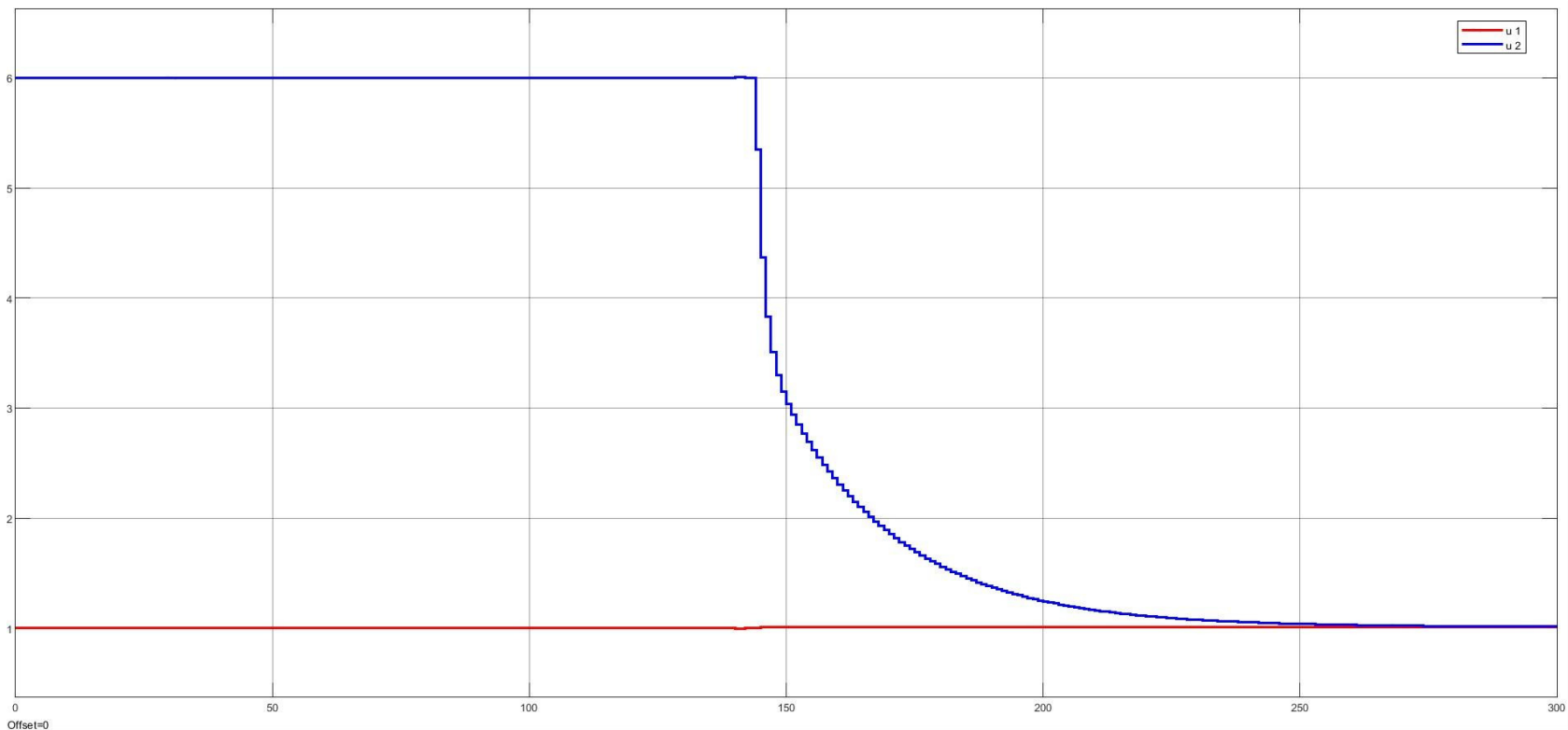


Figura 7.39: Gráfico de los estados  $x_k$

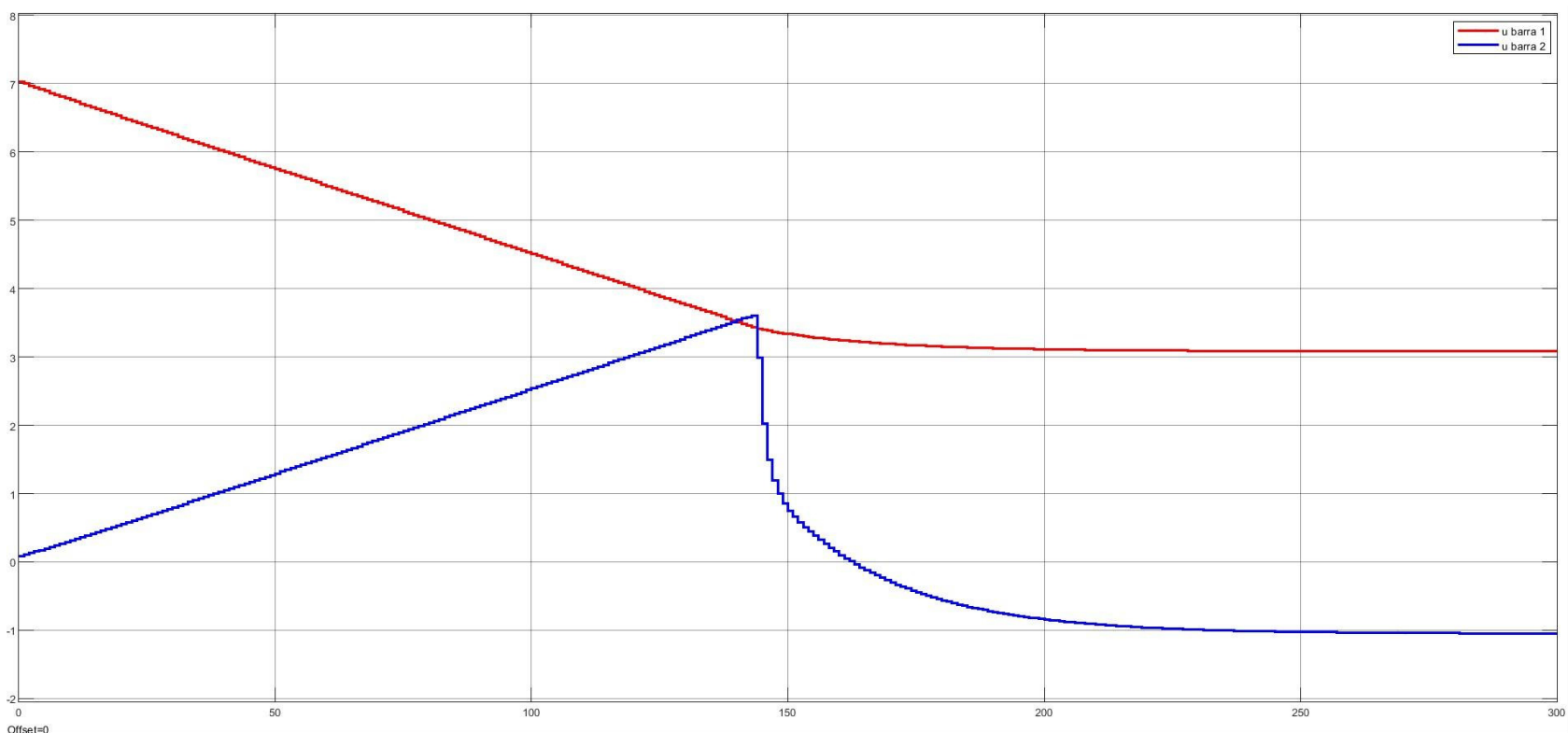
Como se ve en los gráficos de las Figuras 7.38 y 7.39,  $y_2$  y  $x_2$  llegan al valor 2 después de un tiempo, esto

forzado por la restricción  $x^{min}$ . Se observa que  $y_1$  y  $x_1$  no llegan al valor 2 pero están muy cercanos, esto se debe a que la actuación (entrada)  $u_k$ .



**Figura 7.40:** Gráfico de las entradas  $u_k$

Como se observa en el gráfico de la Figura 7.40,  $u_2$  se satura en 6 respetando la restricción impuesta por  $u^{max}$ , mientras que  $u_1$  no baja de 1 siendo siempre constante y luego de un tiempo  $u_2$  llega al valor 1. Como  $u_k$  no llega al valor cero, a  $x_2$  le falta un poco para llegar al valor 2 de  $x^{min}$ .



**Figura 7.41:** Gráfico de  $\bar{u}_k$

Como se ve en el gráfico de la figura 7.41,  $\bar{u}_k$  no llega a cero, esto porque depende de  $x_k$  y  $u_k$  los cuales están

restringidos para que no lleguen a cero.

Para la perturbación observada, el gráfico es el mismo que en la Figura 7.37.

## 7.4. Simulaciones con Seguimiento a Referencia utilizando Observadores con Perturbaciones

Para esta simulación se escoge como valor de referencia:

$$y_{\infty} \rightarrow r = \begin{bmatrix} 17 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (7.8)$$

Con este valor de  $r$  da el siguiente valor para  $\bar{u}_{\infty}$  una vez que la perturbación estimada  $\hat{d}$  logra estimar correctamente el valor de la perturbación  $d$ :

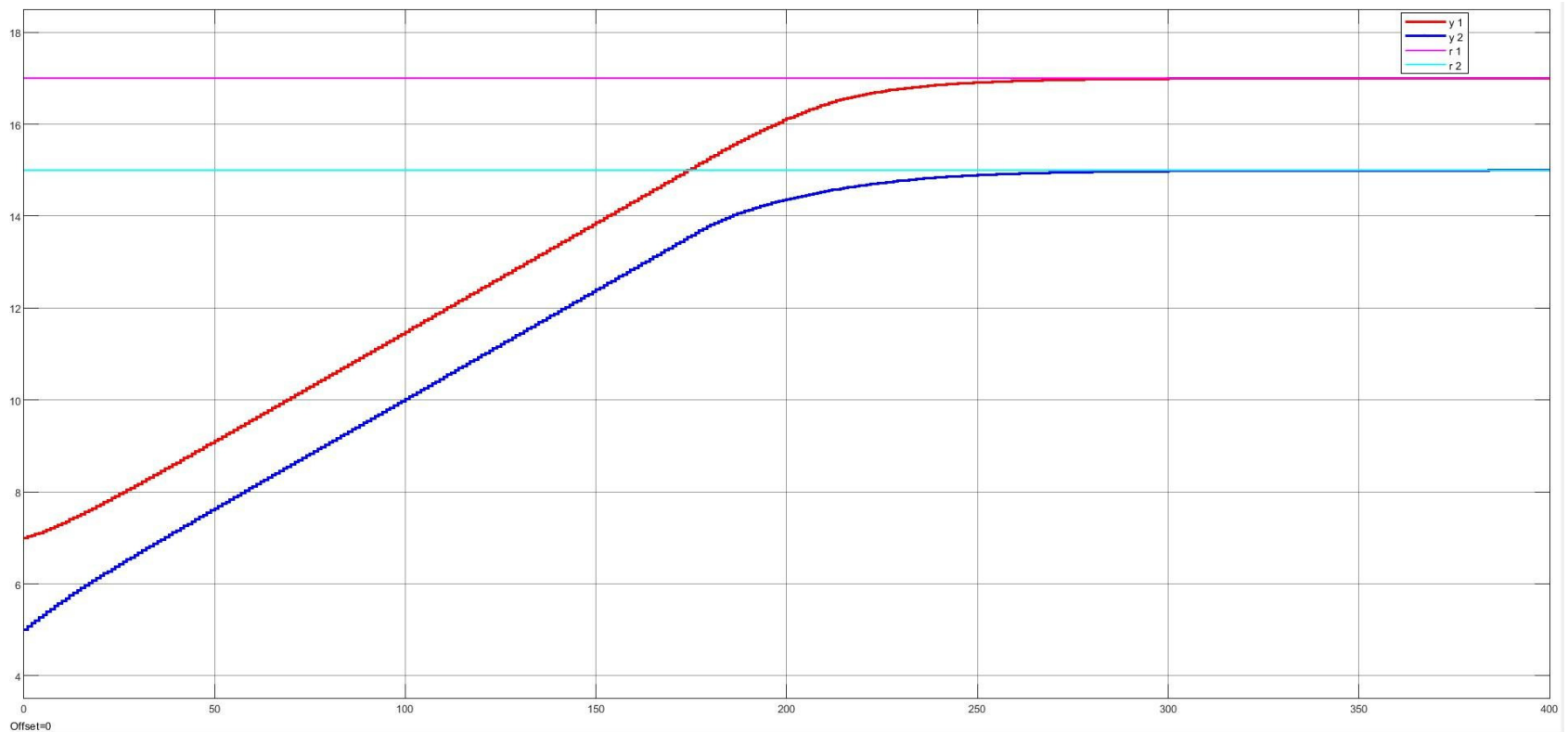
$$\bar{u}_{\infty} = \begin{bmatrix} 23,5389 \\ -8,8015 \end{bmatrix} \quad (7.9)$$

El valor de  $x_{\infty}$  es el siguiente:

$$x_{\infty} = \begin{bmatrix} 17 \\ 15 \end{bmatrix} \quad (7.10)$$

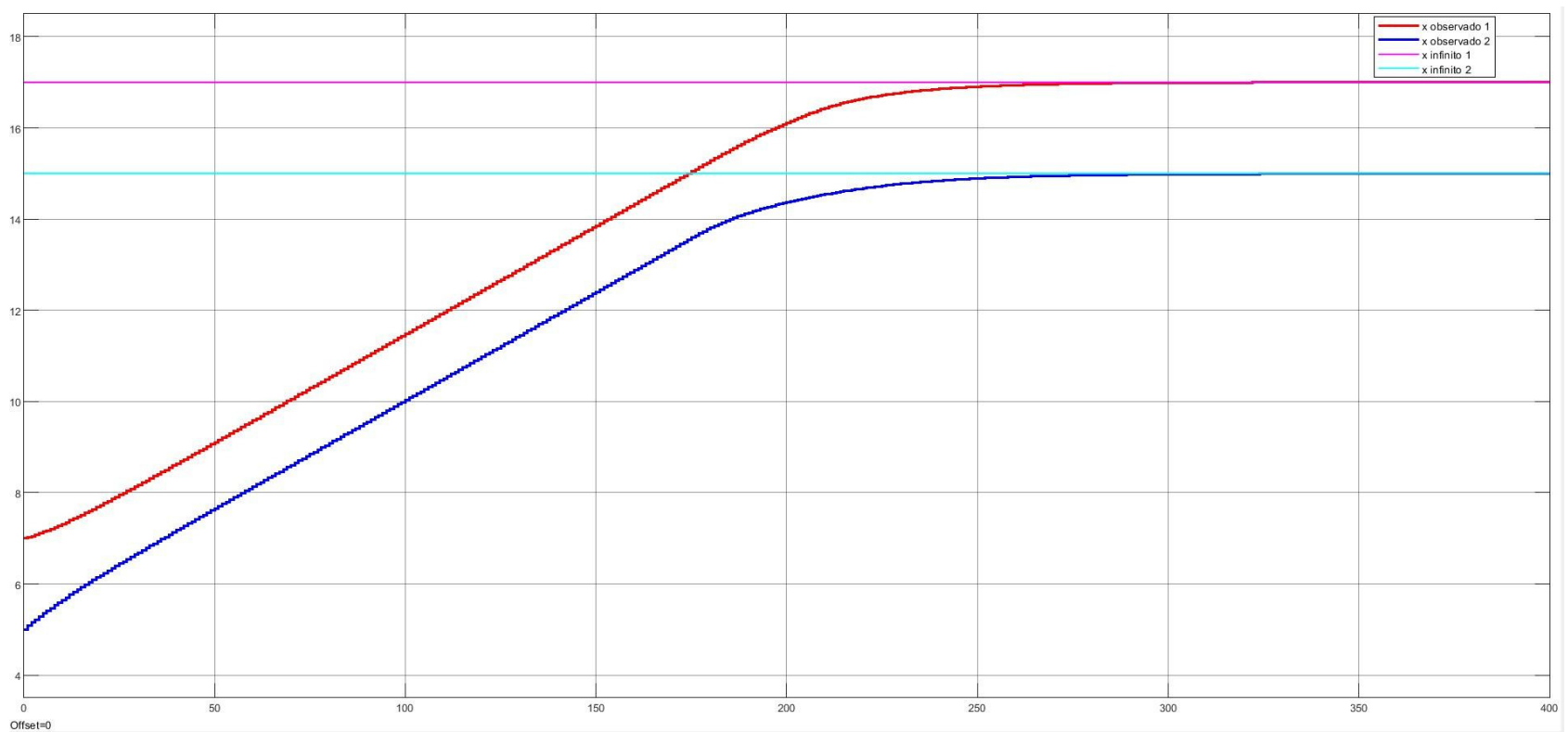
Con  $\bar{u}_{\infty}$  y  $x_{\infty}$  se calcula el valor de  $u_{\infty}$ :

$$u_{\infty} = \begin{bmatrix} 7,5631 \\ 7,0631 \end{bmatrix} \quad (7.11)$$



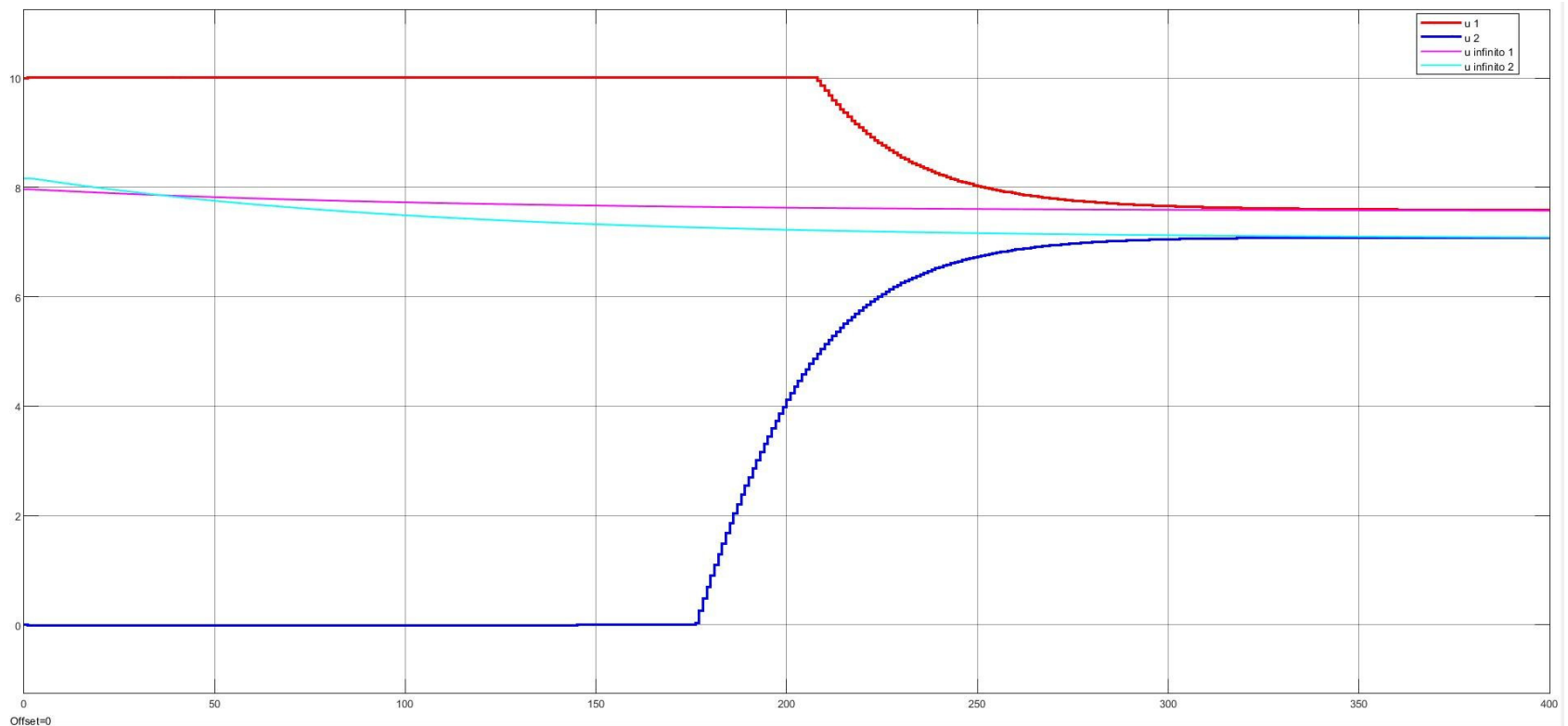
**Figura 7.42:** Gráfico de las salidas  $y_k$

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.42, las salidas  $y_k$  si logran seguir la referencia  $r$  después de pasado un tiempo. El seguimiento a la referencia  $r$  no es de forma exponencial como se esperaría, mucho tiempo se ve una salida lineal, esto se debe a las restricciones de la entrada  $u_k$  que se satura por no poder llegar al valor necesario para actuar de forma óptima.



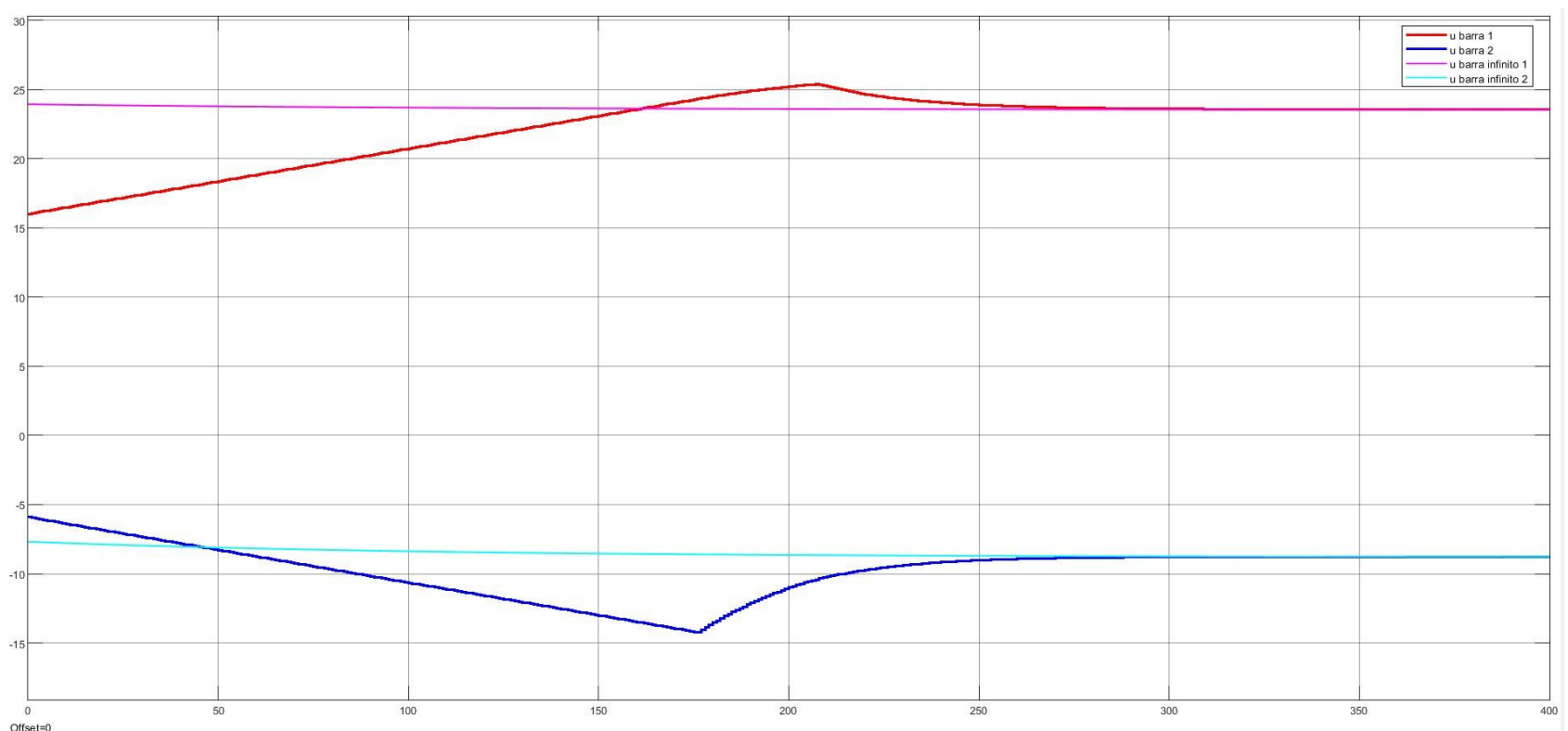
**Figura 7.43:** Gráfico de los estados  $x_k$

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.43, los estados estimados  $\hat{x}_k$  si logran seguir a  $x_\infty$  después de pasado un tiempo. Como se ve en ambos gráficos,  $y_k$  y  $\hat{x}_k$  se demora bastante en llegar a  $r$  y  $x_\infty$  respectivamente, esto se debe a  $u_k$ .



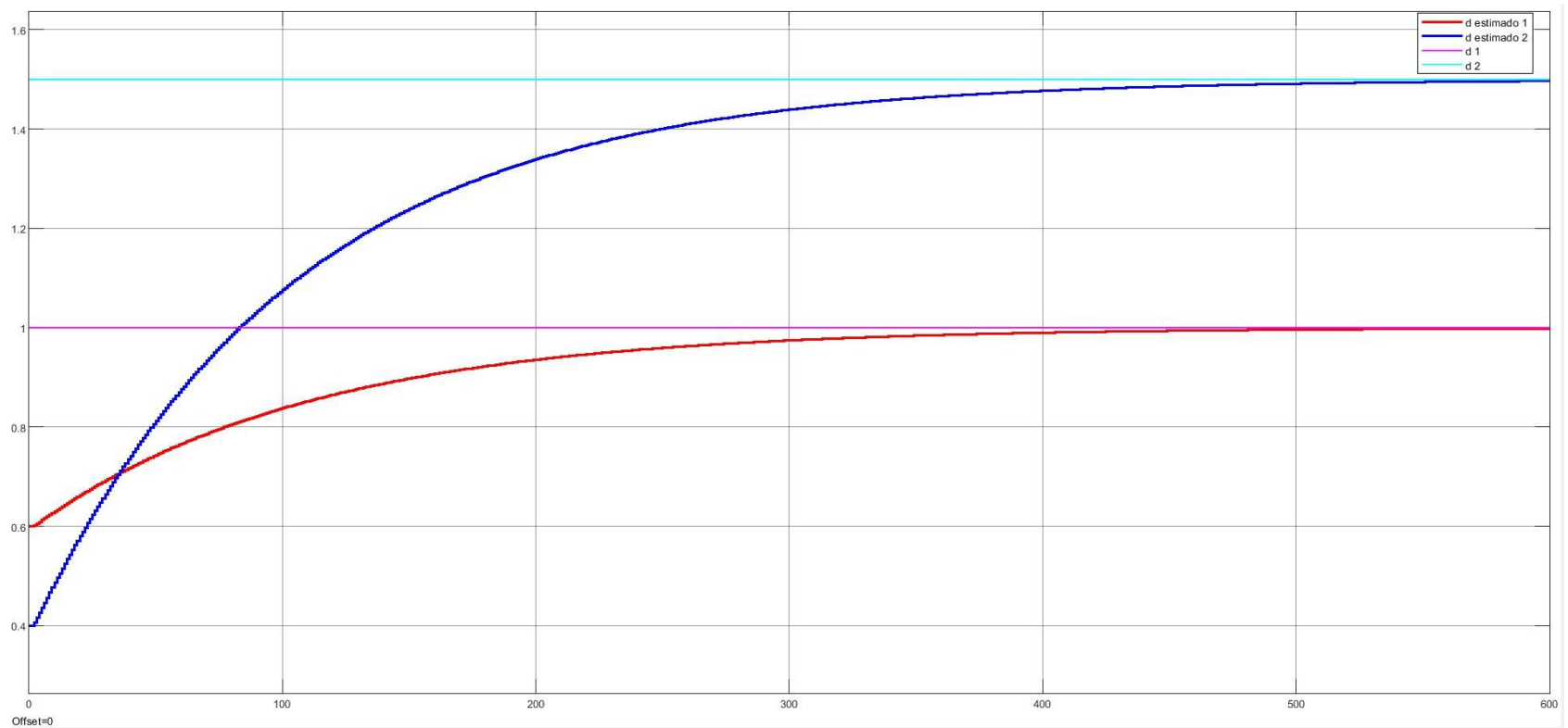
**Figura 7.44:** Gráfico de las entradas  $u_k$

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.44, la entrada  $u_k$  si llega a  $u_\infty$  después de un tiempo. Se ve que  $u_k$  está saturado un gran tiempo antes de que converja a  $u_\infty$ , esto debido a las restricciones en la entrada, por esta razón es que  $y_k$  y  $\hat{x}_k$  se demoran en llegar a  $r$  y  $x_\infty$  respectivamente. También se aprecia que  $u_\infty$  va cambiando con el tiempo, esto se debe a que depende de  $x_\infty$  y  $\bar{u}_\infty$  los cuales para ser calculados necesitan la estimación de la perturbación  $\hat{d}$ , la cual va cambiando con el tiempo hasta que la estimación de la perturbación  $\hat{d}$  logra estimar correctamente a la perturbación  $d$ .



**Figura 7.45:** Gráfico de  $\bar{u}_k$

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.45,  $\bar{u}_k$  si converge a  $\bar{u}_\infty$  después de un tiempo. Se ve que  $\bar{u}_\infty$  también cambia su valor porque para calcularse depende de la estimación de la perturbación  $\hat{d}$ , la cual cambia hasta que estima correctamente la perturbación  $d$ .

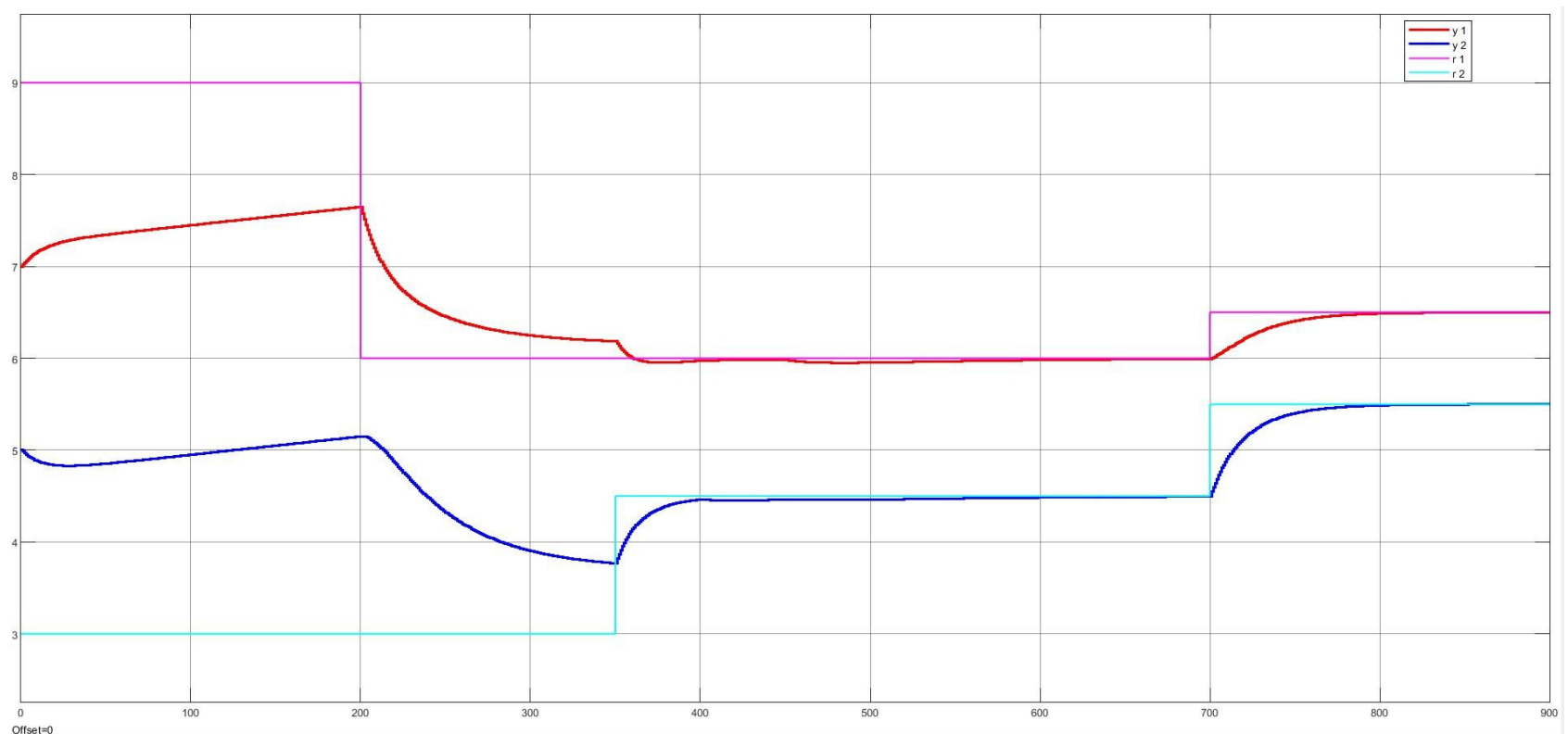


**Figura 7.46:** Gráfico de las perturbaciones  $d_k$

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.46, se consigue estimar la perturbación observada  $\hat{d}_k$  después de pasado un tiempo.

### 7.4.1. Cambios en la Referencia

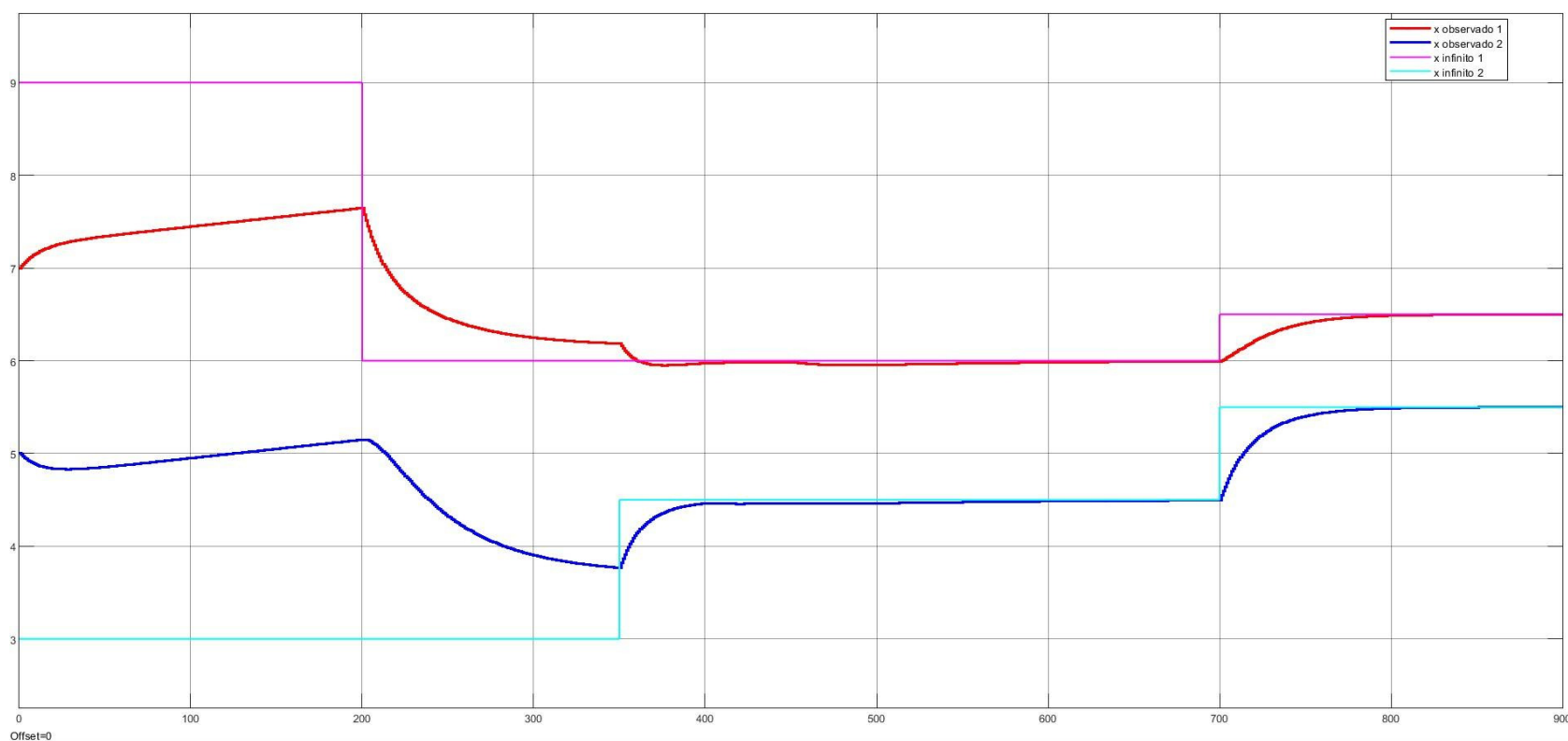
Ahora se simula cambiando las referencias, primero en tiempos distintos y luego al mismo tiempo.



**Figura 7.47:** Gráfico de las salidas  $y_k$

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.47, en primera instancia  $y_1$  no logra seguir a la referencia  $r_1$  cuando

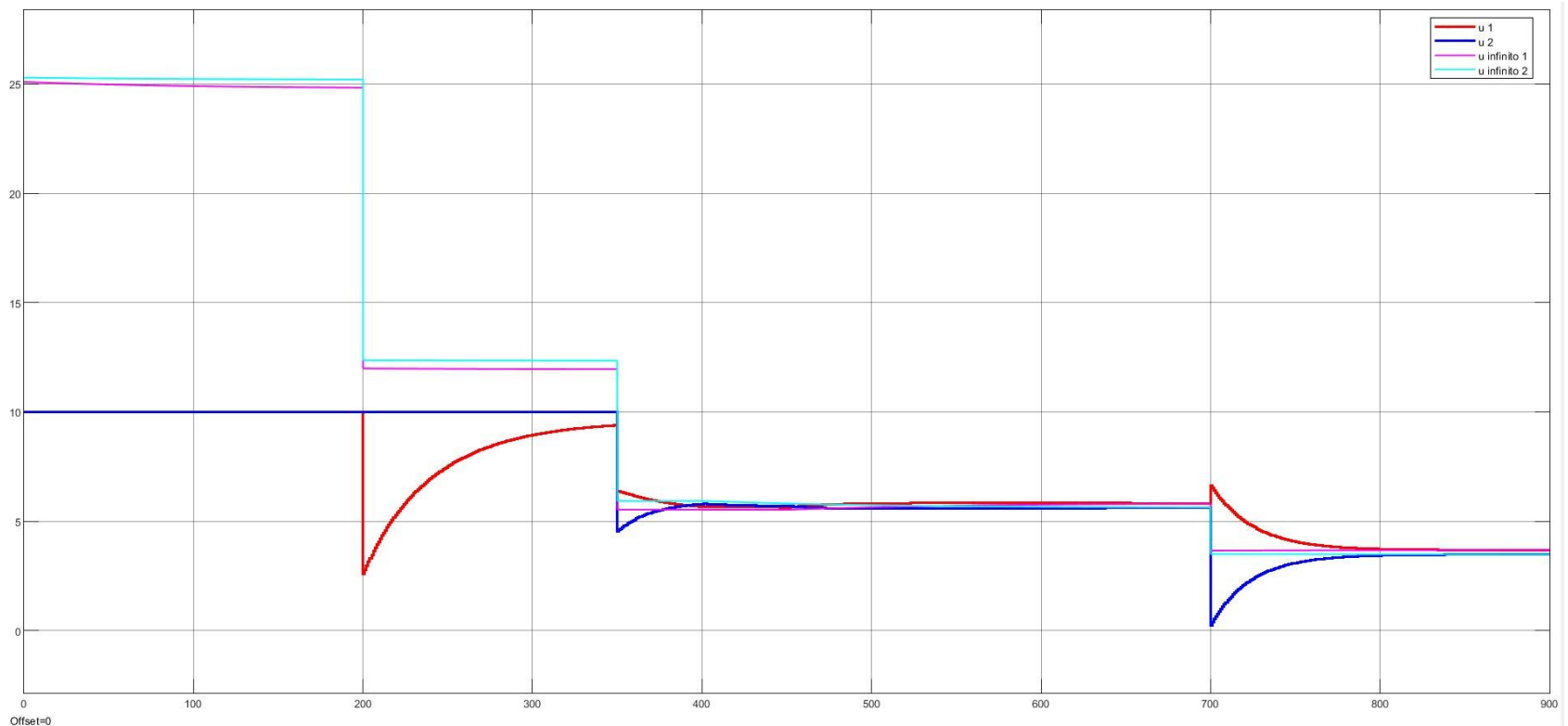
esta tiene un valor de 9. En segunda instancia cuando  $r_1$  cambia su valor a 6,  $y_1$  tampoco logra seguir a  $r_1$  hasta que  $r_2$  cambia, con lo que también cambia  $y_2$ , con lo que  $y_1$  si logra seguir a  $r_1$ . En tercera instancia cuando  $r_1$  cambia su valor a 6,5,  $y_1$  si sigue la referencia. En primera instancia  $y_2$  no logra seguir a la referencia  $r_1$  cuando esta tiene un valor de 3, y cuando  $r_1$  cambia su referencia con lo que también cambia  $y_1$ ,  $y_2$  se acerca más a su referencia pero sin lograr alcanzarla todavía. En segunda instancia cuando  $r_2$  cambia su valor a 4,5,  $y_2$  si alcanza su referencia sin problemas. En tercera instancia cuando  $r_2$  cambia su valor a 5,5,  $y_2$  no tiene problema en seguir su referencia.



**Figura 7.48:** Gráfico de los estados observados  $\hat{x}_k$

Como  $y_k = \hat{x}_k$ , se debe hacer el mismo análisis de antes. Como se ve en el gráfico de la Figura 7.48, en primera instancia  $\hat{x}_1$  no logra seguir a  $x_{1\infty}$  cuando este tiene un valor de 9. En segunda instancia cuando  $x_{1\infty}$  cambia su valor a 6,  $\hat{x}_1$  tampoco logra seguir a  $x_{1\infty}$  hasta que  $x_{2\infty}$  cambia, con lo que también cambia  $\hat{x}_2$ . En tercera instancia cuando  $x_{1\infty}$  cambia su valor a 6,5,  $\hat{x}_1$  si sigue a  $x_{1\infty}$ . En primera instancia  $\hat{x}_2$  no logra seguir a  $x_{1\infty}$  cuando este tiene un valor de 3, y cuando  $x_{1\infty}$  cambia su referencia con lo que también cambia  $\hat{x}_1$ ,  $\hat{x}_2$  se acerca más a  $x_{2\infty}$  pero sin lograr alcanzarlo todavía. En segunda instancia cuando  $x_{2\infty}$  cambia su valor a 4,5,  $\hat{x}_2$  si alcanza a  $x_{2\infty}$  sin problemas. En tercera instancia cuando  $x_{2\infty}$  cambia su valor a 5,5,  $\hat{x}_2$  no tiene problema en seguir a  $x_{2\infty}$ .

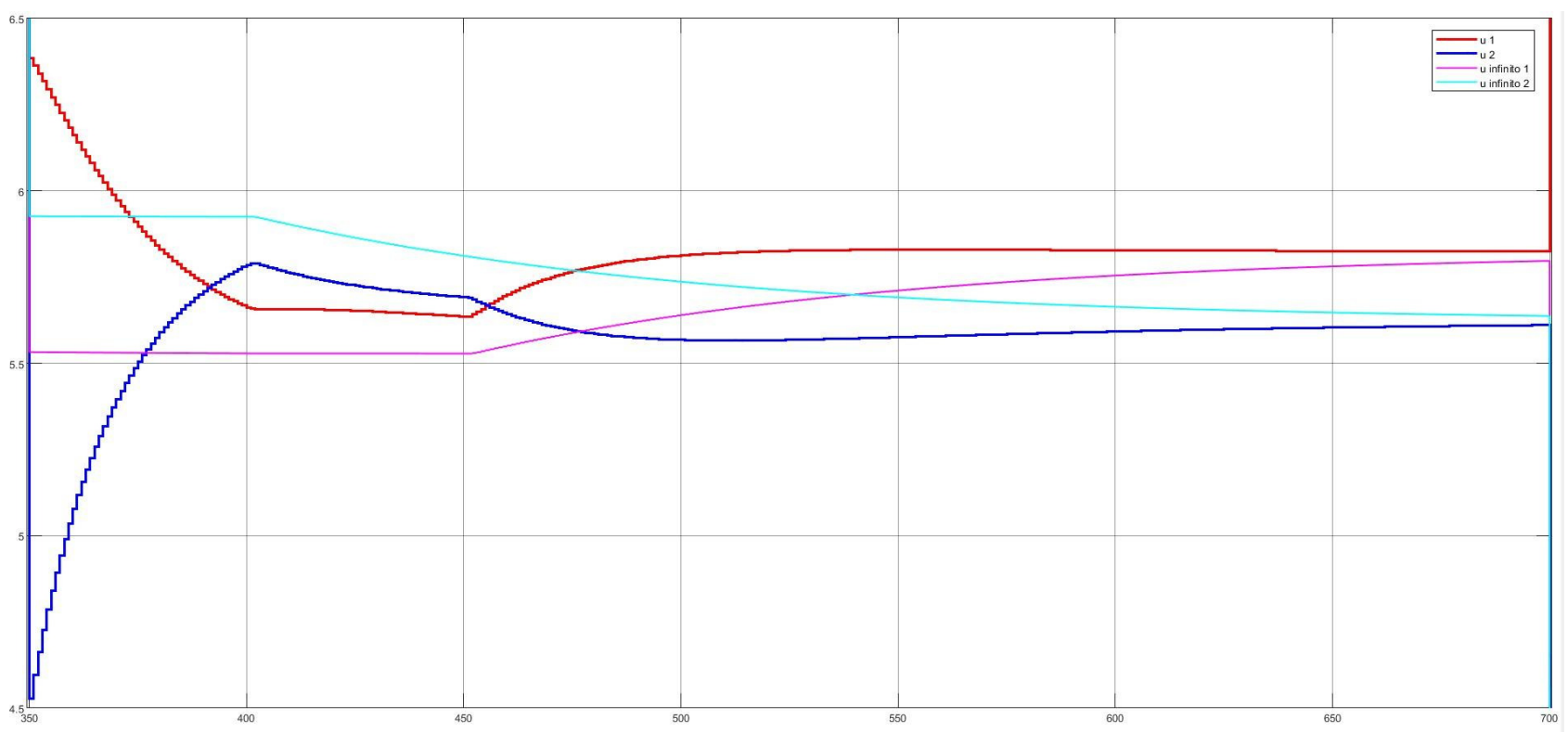
Que el sistema de control no logre que  $y_k$  siga la referencia  $r$ , no implica que el sistema de control no funcione o este malo. Esto se explica en las limitaciones y restricciones que se le han impuesto al sistema, en este caso particular en la restricción de la entrada  $u_k$ , correspondiente a  $u^{max}$ .



**Figura 7.49:** Gráfico de las entradas  $u_k$

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.49, hasta los 350 segundos no va a ser posible que las salidas  $y_k$  sigan a las referencias  $r$ , esto porque por las restricciones impuestas por  $u^{max}$ ,  $u_k$  no va a poder superar el valor de 10 quedando saturado en ese valor, y como se ve en el gráfico, para que  $y_k$  siga a la referencia  $r$ ,  $u_k$  tiene que ser mucho mayor a 10 como lo muestra  $u_{\infty}$ . Por esta razón es que las salidas  $y_k$  no logran alcanzar a las referencias  $r$ , por lo que este no es un problema en el sistema de control, sino que el problema viene porque la entrada no logra ser la necesaria para alcanzar las referencias  $r$ .

A continuación se muestra la parte del gráfico de la Figura 7.49 que va entre los segundos 350 y 700 para apreciar de mejor forma las señales que se ven tan juntas.



**Figura 7.50:** Gráfico de las Entradas  $u_k$  entre los 350 y 700 segundos

En el gráfico de la Figura 7.50 se ve cómo  $u_1$  intenta seguir a  $u_{1\infty}$  y  $u_2$  intenta seguir a  $u_{2\infty}$  que cambian con el paso del tiempo debido a la estimación de la perturbación  $\hat{d}$ . Como se ve,  $u_k$  no alcanza a seguir a  $u_{\infty}$  en ese intervalo de tiempo debido a que en los 700 segundos hay un cambio en la referencia  $r$  con lo que hay un brusco cambio en  $u_k$ .

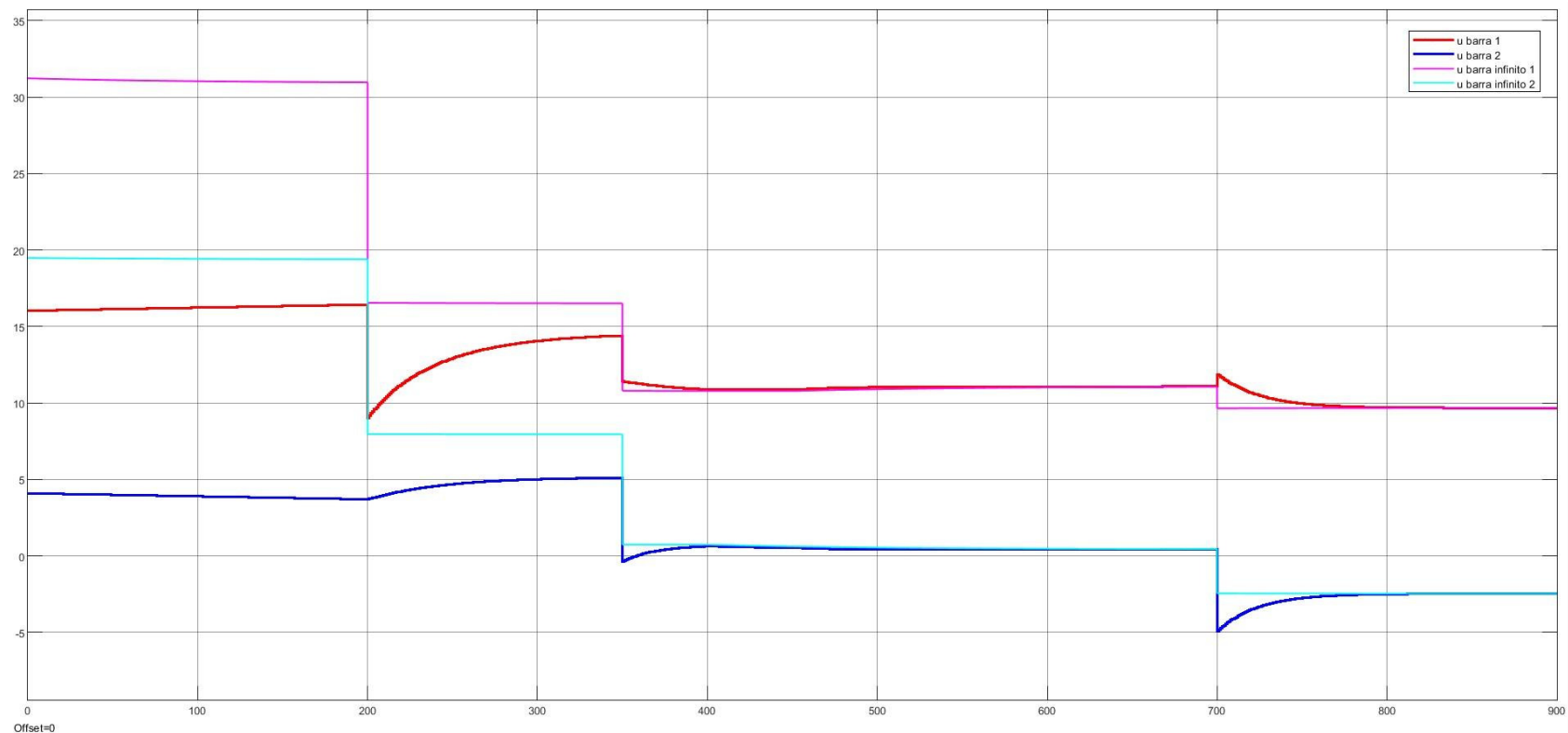


Figura 7.51: Gráfico de  $\bar{u}_k$

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.51,  $\bar{u}_k$  no logra seguir a  $\bar{u}_{\infty}$ , esto debido a que depende de  $u_k$  y  $\hat{x}_k$ , hasta los 350 segundos donde se ve que  $\bar{u}_k$  si va a empezar a seguir a  $\bar{u}_{\infty}$ . Como se ve en el gráfico, hay unos pequeños cambios, estos se deben a las perturbaciones  $d_k$ , las que influyen en el cálculo de  $\bar{u}_k$  y  $\bar{u}_{\infty}$ .

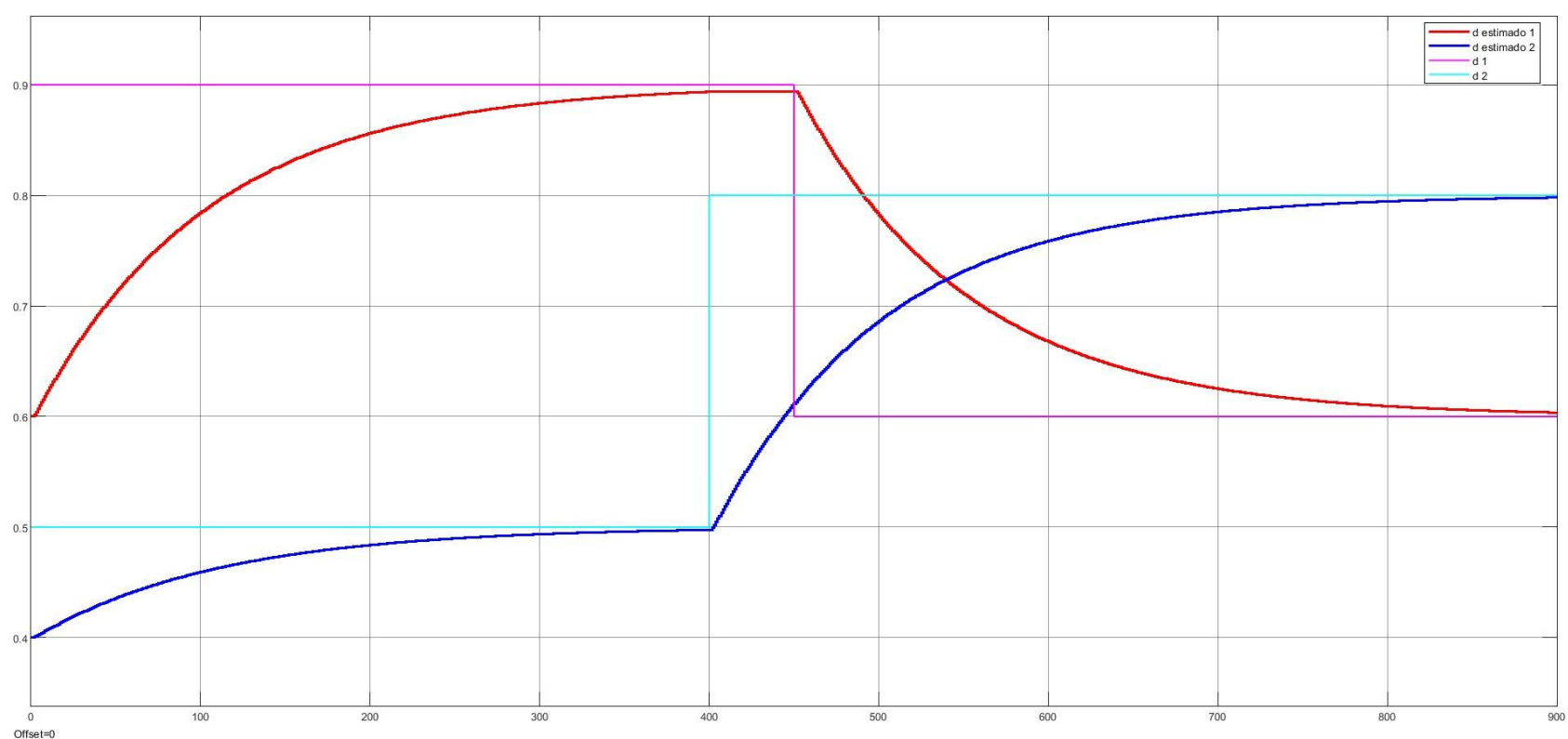


Figura 7.52: Gráfico de las perturbaciones  $d_k$

Como se ve en el gráfico de la Figura 7.52, la perturbación observada  $d_k$  logra seguir a la perturbación original después de pasado un tiempo. Se hacen cambios en la perturbación  $d$  en distintos instantes de tiempo y se ve que la estimación de la perturbación observada  $d_k$  si logra seguir a la perturbación original  $d$  nuevamente después de pasado un tiempo.

## 8 | Conclusiones

En este capítulo se presentan las conclusiones de este trabajo de memoria y también se proponen algunas recomendaciones y posibles direcciones a tomar en cuenta para trabajos futuros.

### 8.1. Conclusión

En este trabajo se ha presentado la parte teórica y de simulaciones de un sistema de Estanques Acoplados utilizando el método avanzado de control de procesos MPC. Este sistema se linealizó y se simuló para cuatro casos, se partió de lo más básico a lo más complejo.

El primer caso es llevar todo al estado cero con el sistema de control. El segundo caso es realizar un seguimiento a referencia, lo que significa mover el punto de operación del sistema de control. El tercer caso es llevar todo al estado cero pero ahora estimando los estados mediante observadores. El cuarto caso es realizar un seguimiento a referencia moviendo el punto de operación del sistema de control, estimando los estados y las perturbaciones de entrada mediante observadores, y con esto implementar acción integral, logrando corregir el error entre la referencia y la salida, obteniendo error cero en estado estacionario.

Antes de hacer el control, se pre estabiliza la planta para así cumplir con los requerimientos de un sistema de control estable y aplicar toda la teoría de sistemas de control.

Respecto a ADMM, se estudió y validó que este algoritmo de optimización funcionase correctamente para MPC en un entorno de simulaciones.

Respecto a MPC, se utilizó la formulación sparse para la formulación del problema de control. Se validó que el sistema de control respetase las restricciones impuestas en el problema de control.

### 8.2. Trabajos Futuros

Respecto a trabajos futuros se propone lo siguiente:

- Probar que el sistema de control hecho en este trabajo con simulaciones funcione con los Estanques Acoplados, utilizando Quarc, DSpace u otra tecnología que esté a disposición.
- Validar hasta qué punto el modelo lineal hecho en este trabajo se comporta de buena manera con la planta que es de tipo no lineal.
- Implementar MPC no lineal para este mismo sistema y compararlos.
- Implementar estos algoritmos en otras plataformas que sean libres para obtener mayor versatilidad.
- Para este mismo sistema, agregar acción integral en el lazo para lograr referencia perfecta en estado estacionario utilizando deltas de entrada en vez de observadores.

# Bibliografía

- [1] A. Ulbig, M. Arnold, S. Chatzivasileiadis y G. Andersson, “Framework for Multiple Time-Scale Cascaded MPC Application in Power Systems,” *IFAC Proceedings Volumes*, vol. 44, págs. 10 472-10 480, 2011.
- [2] E. F. Camacho y C. B. Alba, *Model predictive control*. Springer science & business media, 2013.
- [3] W. H. Kwon y S. H. Han, *Receding horizon control: model predictive control for state models*. Springer Science & Business Media, 2006.
- [4] S. Wright, J. Nocedal et al., “Numerical optimization,” *Springer Science*, vol. 35, n.º 67-68, pág. 7, 1999.
- [5] Y. Saad, *Iterative methods for sparse linear systems*. SIAM, 2003.
- [6] R. J. Mantz, “Observadores de estados,” *Catedra, Departamento de electrotécnia, Facultad de ingeniería, Universidad nacional de La Plata, Argentina*, 2003.
- [7] G. Espinosa-Paredes y A. V. Rodríguez, *Aplicaciones de programación no lineal*. OmniaScience, 2016.
- [8] S. Boyd, N. Parikh, E. Chu, B. Peleato y J. Eckstein, “Distributed Optimization and Statistical Learning via the Alternating Direction Method of Multipliers,” *Foundations and Trends® in Machine Learning*, vol. 3, n.º 1, págs. 1-122, 2011.
- [9] R. Tibshirani, “Alternating Direction Method of Multipliers,” en *Notes for Convex Optimization: Machine Learning 10-725*, 2019.
- [10] T. V. Dang, K. Ling y J. Maciejowski, “Embedded ADMM-based QP solver for MPC with polytopic constraints,” en *2015 European Control Conference (ECC)*, 2015, págs. 3446-3451. doi: [10.1109/ECC.2015.7331067](https://doi.org/10.1109/ECC.2015.7331067).
- [11] S. Garrido y L. Moreno, *Control de Procesos*. feb. de 2019, págs. 150-156.
- [12] MathWorks, *dlqr*, visitado 02-2023. dirección: <https://www.mathworks.com/help/control/ref/dlqr.html>.
- [13] MathWorks, *MATLAB*, visitado 02-2023. dirección: <https://www.mathworks.com/products/matlab.html>.
- [14] MathWorks, *MATLAB Product Description*, visitado 02-2023. dirección: [https://www.mathworks.com/help/matlab/learn\\_matlab/product-description.html](https://www.mathworks.com/help/matlab/learn_matlab/product-description.html).
- [15] MathWorks, *Simulation and Model-Based Design*, visitado 02-2023. dirección: <https://www.mathworks.com/products/simulink.html>.

# A | Códigos MATLAB

## A.1. Estado Cero

```

1  clc
2  clear all
3  close all
4  %Estanques Acoplados
5  %Valores necesarios
6  Ar = 100;
7  kappa = 12.11;
8  h1q = 7;
9  h2q = 5;
10 gamm = kappa/(2*sqrt(h1q-h2q));
11
12 %Variables de Estado en Tiempo Continuo
13 Ac = [-gamm/Ar gamm/Ar;gamm/Ar -gamm/Ar];
14 Bc = [1/Ar 0;0 -1/Ar];
15 C = eye(2);
16 D = [0 0;0 0];
17 x0 = [h1q;h2q];
18 Gp=ss(Ac,Bc,C,D);
19
20 %Variables de Estado en Tiempo Discreto
21 T = 1;
22 Gpz1=c2d(Gp,T);
23 [Ad,Bd,C,D]=ssdata(Gpz1);
24 [L,P,pol]=dlqr(Ad,Bd,eye(2),eye(2));
25 A = Ad;
26 B = Bd;
27 Ax = A-B*L
28
29 %Constantes
30 N = 10;
31 umin = [0;0];
32 umax = [10;10];
33 xmin = [0;0];
34 xmax = [30;30];
35 x_Nmax = xmax;
36 x_Nmin = xmin;
37 Gamma=0.1*eye(size(B,2));
38 Omega=C'*C;

```

```

39 [Linf, OmegaN, ~] = dlqr(A, B, Omega, Gamma);
40
41 %Determinando las dimensiones del sistema
42 n = size(Ax, 1); %n=2 para A de 2x2
43 m = size(B, 2); %m=2 para B de 2x2
44 p = size(C, 1); %p=2 para C de 2x2
45
46 %Construccion de matrices
47 J = [eye(n); -eye(n); -L; L];
48 JN = [eye(n); -eye(n)];
49 E = [zeros(n, m); zeros(n, m); eye(m); -eye(m)];
50
51 %Matrices funcion de costo
52 H = blkdiag(kron(eye(N), blkdiag(Omega, Gamma)), OmegaN);
53 H = (H + H') / 2;
54 h = zeros(size(H, 1), 1);
55
56 %Matrices restriccion igualdad
57 In = eye(n);
58 f = [Ax, B, -In];
59 F = [];
60 col_F = (N + 1) * n + N * m;
61 for i = 1 : 1 : N
62     if i == 1
63         F = [-In, zeros(n, col_F - n)];
64     end
65     M = [zeros(n, (i - 1) * (n + m)), f, zeros(n, col_F - ((i - 1) * (n + m) + (2 * n + m)))]];
66     F = [F; M];
67 end
68 f = [-x0; zeros(size(F, 1) - n, 1)];
69 s1 = size(F, 1) - n;
70 zer = zeros(s1, 1);
71
72 %Matrices restriccion desigualdad
73 G = blkdiag(kron(eye(N), [J, E]), JN);
74 dx = [xmax; -xmin];
75 du = [umax; -umin];
76 dN = [x_Nmax; -x_Nmin];
77 g = [kron(ones(N, 1), [dx; du]); dN];

```

## A.2. Seguimiento a Referencia

```

1  clc
2  clear all
3  close all
4  %Estanques Acoplados
5  %Valores necesarios
6  Ar = 100;
7  kappa = 12.11;
8  h1q = 7;
9  h2q = 5;
10 gamm = kappa / (2 * sqrt(h1q - h2q));

```

```

11
12 %Variables de Estado en Tiempo Continuo
13 Ac = [-gamm/Ar gamm/Ar;gamm/Ar -gamm/Ar];
14 Bc = [1/Ar 0;0 -1/Ar];
15 C = eye(2);
16 D = [0 0;0 0];
17 x0 = [h1q;h2q];
18 Gp=ss(Ac,Bc,C,D);
19
20 %Variables de Estado en Tiempo Discreto
21 T = 1;
22 Gpz1=c2d(Gp,T);
23 [Ad,Bd,C,D]=ssdata(Gpz1);
24 [L,P,pol]=dlqr(Ad,Bd,eye(2),eye(2));
25 A = Ad;
26 B = Bd;
27 Ax = A-B*L
28
29 %Constantes
30 N = 10;
31 umin = [0;0];
32 umax = [10;10];
33 xmin = [0;0];
34 xmax = [30;30];
35 x_Nmax = xmax;
36 x_Nmin = xmin;
37 Gamma=0.1*eye(size(B,2));
38 Omega=C'*C;
39 [Linf,Omegan,~]=dlqr(A,B,Omega,Gamma);
40
41 %seguimiento a referencia
42 r = [8;6.5];
43 inv1 = inv(eye(size(Ax,1))-Ax);
44 inv2 = inv(C*inv1*B);
45 u_barra_inf = inv2*r;
46 x_inf = inv1*B*u_barra_inf;
47 u_inf = u_barra_inf-L*x_inf;
48
49 %Determinando las dimensiones del sistema
50 n = size(Ax,1); %n=2 para A de 2x2
51 m = size(B,2); %m=2 para B de 2x2
52 p = size(C,1); %p=2 para C de 2x2
53
54 %Construccion de matrices
55 J=[eye(n);-eye(n);-L;L];
56 JN=[eye(n);-eye(n)];
57 E=[zeros(n,m);zeros(n,m);eye(m);-eye(m)];
58
59 %Matrices funcion de costo
60 H = blkdiag(kron(eye(N),blkdiag(Omega,Gamma)),Omegan);
61 H=(H+H')/2;
62 h = zeros(size(H,1),1);
63
64 %Matrices restriccion igualdad
65 In = eye(n);

```

```

66 f = [Ax, B, -In];
67 F = [];
68 col_F = (N+1)*n+N*m;
69     for i=1:1:N
70         if i == 1
71             F = [-In, zeros(n, col_F-n)];
72         end
73         M = [zeros(n, (i-1)*(n+m)), f, zeros(n, col_F - ((i-1)*(n+m) + (2*n+m)))]];
74         F = [F;M];
75     end
76 f=[-x0; zeros(size(F,1)-n,1)];
77 s1=size(F,1)-n;
78 zer=zeros(s1,1);
79
80 %Matrices restriccion desigualdad
81 G = blkdiag(kron(eye(N), [J, E]), JN);
82 dx=[xmax-x_inf; -xmin+x_inf];
83 du=[umax+L*x_inf-u_barra_inf; -umin-L*x_inf+u_barra_inf];
84 dN=[x_Nmax-x_inf; -x_Nmin+x_inf];
85 g=[kron(ones(N,1), [dx; du]); dN];

```

### A.3. Estado Cero utilizando Observadores

```

1  clc
2  clear all
3  close all
4  %Estanques Acoplados
5  %Valores necesarios
6  Ar = 100;
7  kappa = 12.11;
8  h1q = 7;
9  h2q = 5;
10 gamm = kappa/(2*sqrt(h1q-h2q));
11
12 %Variables de Estado en Tiempo Continuo
13 Ac = [-gamm/Ar gamm/Ar; gamm/Ar -gamm/Ar];
14 Bc = [1/Ar 0; 0 -1/Ar];
15 C = eye(2);
16 D = [0 0; 0 0];
17 x0 = [h1q; h2q];
18 Gp=ss(Ac, Bc, C, D);
19
20 %Variables de Estado en Tiempo Discreto
21 T = 1;
22 Gpz1=c2d(Gp, T);
23 [Ad, Bd, C, D]=ssdata(Gpz1);
24 [L, P, pol]=dlqr(Ad, Bd, eye(2), eye(2));
25 A = Ad;
26 B = Bd;
27 Ax = A-B*L
28
29 %Constantes

```

```

30 N = 10;
31 umin = [0;0];
32 umax = [10;10];
33 xmin = [0;0];
34 xmax = [30;30];
35 x_Nmax = xmax;
36 x_Nmin = xmin;
37 Gamma=0.1*eye(size(B,2));
38 Omega=C'*C;
39 [Linf, OmegaN, ~]=dlqr(A,B,Omega,Gamma);
40
41 %observador para perturbacion
42 Az = [Ax B; zeros(size(B,2), size(Ax,1)) eye(size(B,2))];
43 Bz = [B; zeros(size(B,2))];
44 Cz = [C zeros(size(C,1), size(B,2))];
45 d0 = [0.6;0.4];
46
47 R1 = eye(size(Az,1));
48 R2 = eye(size(Bz,2));
49 [F1,~,~]=dlqr(Az',Cz',R1,R2);
50 Lz = F1';
51
52 A_obs = Az-Lz*Cz;
53 B_obs = [Bz Lz];
54 C_obs = eye(size(Cz,2));
55 D_obs = zeros(size(C_obs));
56
57 %Determinando las dimensiones del sistema
58 n = size(Ax,1); %n=2 para A de 2x2
59 m = size(B,2); %m=2 para B de 2x2
60 p = size(C,1); %p=2 para C de 2x2
61
62 %Construccion de matrices
63 J=[eye(n);-eye(n);-L;L];
64 JN=[eye(n);-eye(n)];
65 E=[zeros(n,m); zeros(n,m); eye(m);-eye(m)];
66
67 %Matrices funcion de costo
68 H = blkdiag(kron(eye(N), blkdiag(Omega,Gamma)), OmegaN);
69 H=(H+H')/2;
70 h = zeros(size(H,1),1);
71
72 %Matrices restriccion igualdad
73 In = eye(n);
74 f = [Ax,B,-In];
75 F = [];
76 col_F = (N+1)*n+N*m;
77 for i=1:1:N
78     if i == 1
79         F = [-In, zeros(n, col_F-n)];
80     end
81     M = [zeros(n, (i-1)*(n+m)), f, zeros(n, col_F - ((i-1)*(n+m) + (2*n+m)))]];
82     F = [F;M];
83 end
84 f=[-x0; zeros(size(F,1)-n,1)];

```

```

85 s1=size(F,1)-n;
86 zer=zeros(s1,1);
87
88 %Matrices restriccion desigualdad
89 G = blkdiag(kron(eye(N),[J,E]),JN);
90 dx=[xmax;-xmin];
91 du=[umax;-umin];
92 dN=[x_Nmax;-x_Nmin];
93 g=[kron(ones(N,1),[dx;du]);dN];

```

#### A.4. Seguimiento a Referencia utilizando Observadores con Perturbaciones

```

1  clc
2  clear all
3  close all
4  %Estanques Acoplados
5  %Valores necesarios
6  Ar = 100;
7  kappa = 12.11;
8  h1q = 7;
9  h2q = 5;
10 gamm = kappa/(2*sqrt(h1q-h2q));
11
12 %Variables de Estado en Tiempo Continuo
13 Ac = [-gamm/Ar gamm/Ar;gamm/Ar -gamm/Ar];
14 Bc = [1/Ar 0;0 -1/Ar];
15 C = eye(2);
16 D = [0 0;0 0];
17 x0 = [h1q;h2q];
18 Gp=ss(Ac,Bc,C,D);
19
20 %Variables de Estado en Tiempo Discreto
21 T = 1;
22 Gpz1=c2d(Gp,T);
23 [Ad,Bd,C,D]=ssdata(Gpz1);
24 [L,P,pol]=dlqr(Ad,Bd,eye(2),eye(2));
25 A = Ad;
26 B = Bd;
27 Ax = A-B*L
28
29 %Constantes
30 N = 10;
31 umin = [0;0];
32 umax = [10;10];
33 xmin = [0;0];
34 xmax = [30;30];
35 x_Nmax = xmax;
36 x_Nmin = xmin;
37 Gamma=0.1*eye(size(B,2));
38 Omega=C'*C;

```

```

39 [Linf, OmegaN, ~] = dlqr(A, B, Omega, Gamma);
40
41 %observador para perturbacion
42 Az = [Ax B; zeros(size(B,2), size(Ax,1)) eye(size(B,2))];
43 Bz = [B; zeros(size(B,2))];
44 Cz = [C zeros(size(C,1), size(B,2))];
45 d0 = [0.6; 0.4];
46
47 R1 = eye(size(Az,1));
48 R2 = eye(size(Bz,2));
49 [F1, ~, ~] = dlqr(Az', Cz', R1, R2);
50 Lz = F1';
51
52 A_obs = Az - Lz * Cz;
53 B_obs = [Bz Lz];
54 C_obs = eye(size(Cz,2));
55 D_obs = zeros(size(C_obs));
56
57 %Seguimiento a referencia con perturbacion
58 r = [4.5; 3];
59 d = [1; 1.5];
60 inv1 = inv(eye(size(Ax,1)) - Ax);
61 inv2 = inv(C * inv1 * B);
62 u_barra_inf = inv2 * r - d;
63 x_inf = inv1 * B * (u_barra_inf + d);
64 u_inf = u_barra_inf - L * x_inf;
65
66 %Determinando las dimensiones del sistema
67 n = size(Ax,1); %n=2 para A de 2x2
68 m = size(B,2); %m=2 para B de 2x2
69 p = size(C,1); %p=2 para C de 2x2
70
71 %Construccion de matrices
72 J = [eye(n); -eye(n); -L; L];
73 JN = [eye(n); -eye(n)];
74 E = [zeros(n,m); zeros(n,m); eye(m); -eye(m)];
75
76 %Matrices funcion de costo
77 H = blkdiag(kron(eye(N), blkdiag(Omega, Gamma)), OmegaN);
78 H = (H + H') / 2;
79 h = zeros(size(H,1), 1);
80
81 %Matrices restriccion igualdad
82 In = eye(n);
83 f = [Ax, B, -In];
84 F = [];
85 col_F = (N+1)*n + N*m;
86 for i = 1:1:N
87     if i == 1
88         F = [-In, zeros(n, col_F - n)];
89     end
90     M = [zeros(n, (i-1)*(n+m)), f, zeros(n, col_F - ((i-1)*(n+m) + (2*n+m)))]];
91     F = [F; M];
92 end
93 f = [-x0; zeros(size(F,1) - n, 1)];

```

```

94 s1=size(F,1)-n;
95 zer=zeros(s1,1);
96
97 %Matrices restriccion desigualdad
98 G = blkdiag(kron(eye(N),[J,E]),JN);
99 dx=[xmax-x_inf;-xmin+x_inf];
100 du=[umax+L*x_inf-u_barra_inf;-umin-L*x_inf+u_barra_inf];
101 dN=[x_Nmax-x_inf;-x_Nmin+x_inf];
102 g=[kron(ones(N,1),[dx;du]);dN];

```

## A.5. ADMM del Diagrama Simulink

```

1 %=====
2 % Quadratic programing (QP) problem solution:
3 %           min 0.5 x'*H*x + h'*x
4 %           s.t   F*x = f
5 %           G*x <= g
6 %   x       : Optimal solution of qp problem
7 %=====
8
9   n=size(H,1);
10  q=size(G,1);
11  p=size(F,1);
12
13  x=1*ones(n,1);
14  z=0.5*ones(q,1);
15  tau=0.5*ones(q+p,1);
16
17  A=[G; F];
18  B=[eye(q); zeros(p,q)];
19  c=[g; f];
20  ep=1e-9; ed=1e-9;
21
22  rho=1.5;%%Se tiene que escoger este valor
23  rk=A*x+B*z-c;
24  sk=rho*A'*B*(z); k=0;
25  while norm(rk)>=ep || norm(sk)>=ed
26      k=k+1;
27      x=-(H+rho*A'*A)\(h+rho*A'*(B*z+tau-c));
28      z=max(0,-G*x-tau(1:q)+g);
29      tau=tau+A*x+B*z-c;
30      if k==5000; break; end %%Se tiene que escoger este valor
31  end
32  u_barra = x(3:4);
33  end

```

Para seguimiento a referencia, hay que cambiar la línea 32 por:

```

1   u_barra = x(3:4)+u_barra_inf;

```

## B | Diagramas Simulink

### B.1. Diagrama Estado Cero

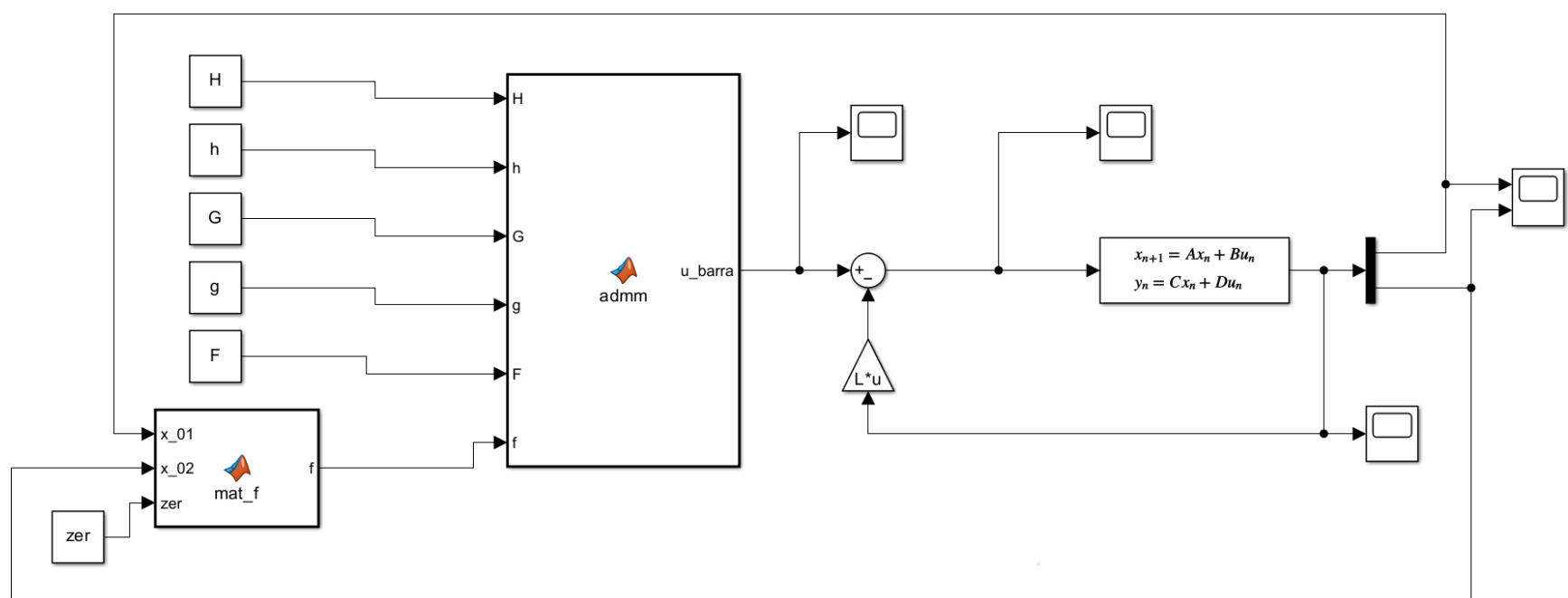


Figura B.1: Diagrama Simulink Estado Cero

#### B.1.1. MATLAB Function mat\_f

```

1 function f = mat_f(x_01, x_02, zer)
2
3 x0 = [x_01; x_02];
4
5 f = [-x0; zer];
6 end

```

## B.2. Diagrama Seguimiento a Referencia

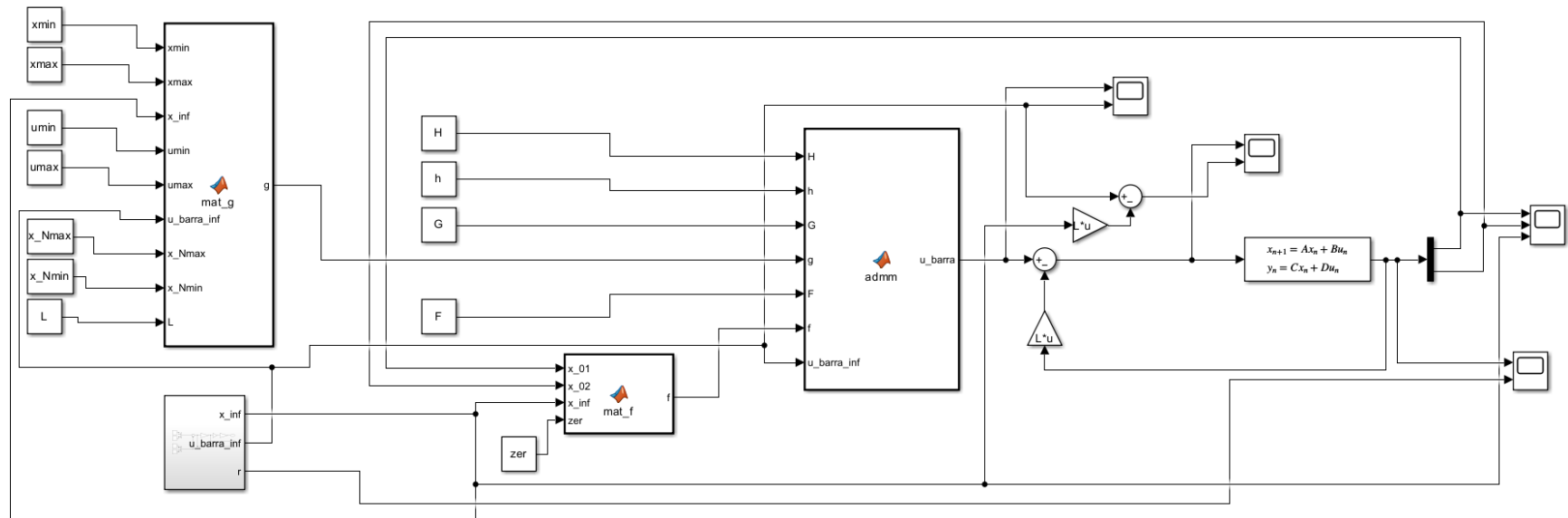


Figura B.2: Diagrama Simulink Seguimiento a Referencia

### B.2.1. MATLAB Function mat\_f

```

1 function f = mat_f(x_01, x_02, x_inf, zer)
2
3 x0 = [x_01; x_02] - x_inf;
4
5 f = [-x0; zer];
6 end

```

### B.2.2. MATLAB Function mat\_g

```

1 function g = mat_g(xmin, xmax, x_inf, umin, umax, u_barra_inf, x_Nmax, x_Nmin, L)
2
3 dx = [xmax - x_inf; -xmin + x_inf];
4 du = [umax + L * x_inf - u_barra_inf; -umin - L * x_inf + u_barra_inf];
5 dN = [x_Nmax - x_inf; -x_Nmin + x_inf];
6 g = [kron(ones(10, 1), [dx; du]); dN];
7 end

```

### B.2.3. Subsystem

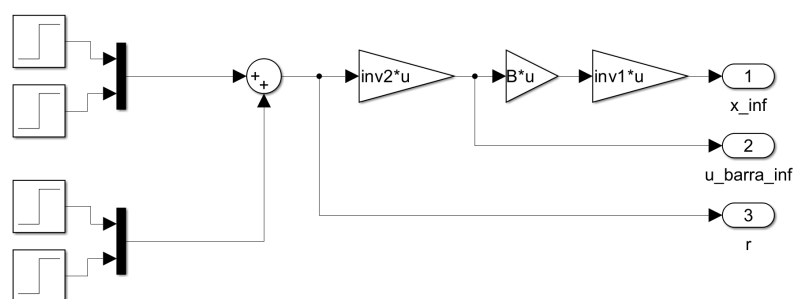


Figura B.3: Subsystem, outputs: x\_inf, u\_barra\_inf, r

### B.3. Diagrama Estado Cero utilizando Observadores

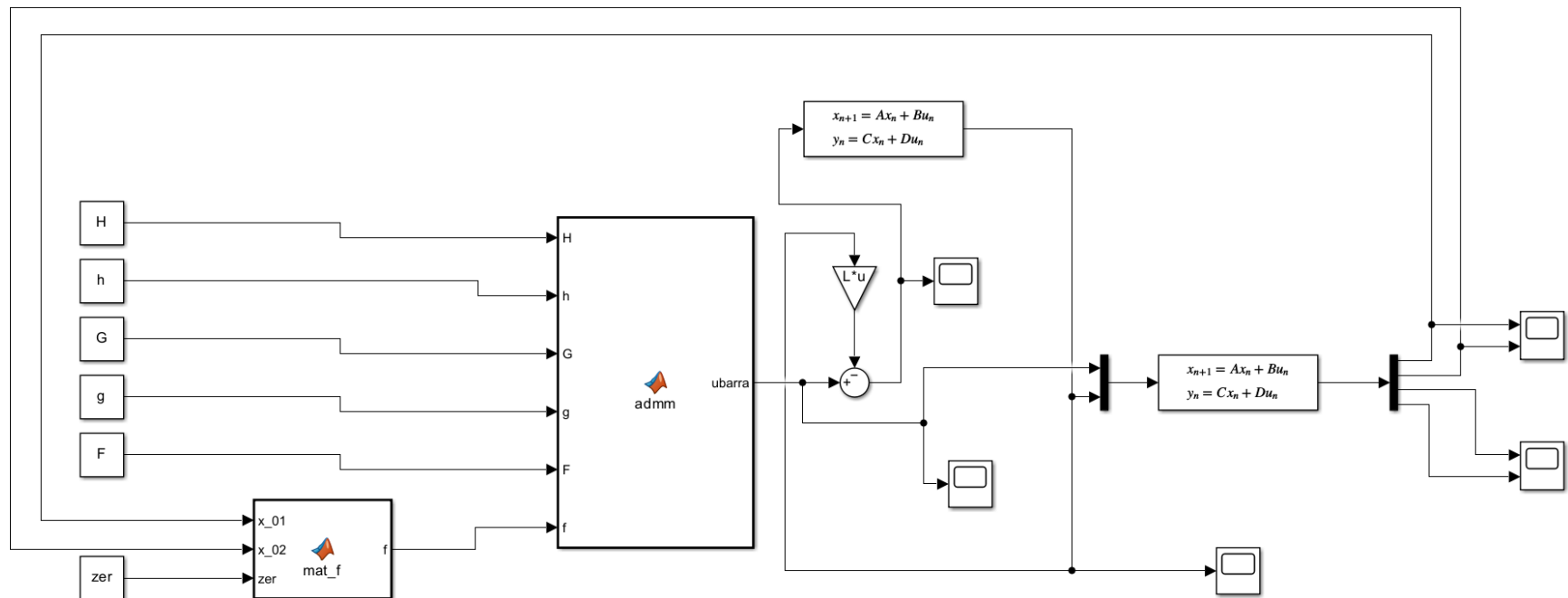


Figura B.4: Diagrama Simulink Estado Cero utilizando Observadores con Perturbaciones

#### B.3.1. MATLAB Function mat\_f

```

1 function f = mat_f(x_01, x_02, zer)
2
3 x0 = [x_01; x_02];
4
5 f = [-x0; zer];
6 end

```

### B.4. Diagrama Seguimiento a Referencia utilizando Observadores con Perturbaciones

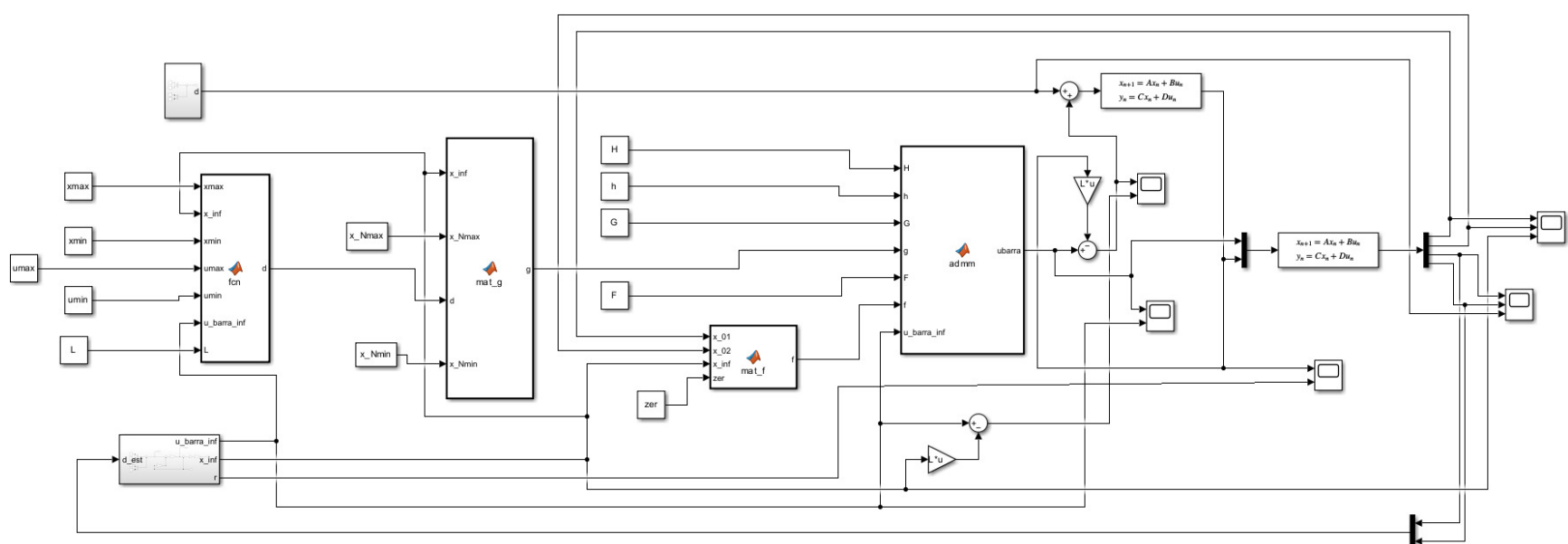


Figura B.5: Diagrama Simulink Seguimiento a Referencia utilizando Observadores con Perturbaciones

**B.4.1. MATLAB Function mat\_f**

```

1 function f = mat_f(x_01,x_02,x_inf,zer)
2
3 x0 = [x_01;x_02]-x_inf;
4
5 f=[-x0;zer];
6 end

```

**B.4.2. MATLAB Function mat\_g**

```

1 function g = mat_g(x_inf,x_Nmax,d,x_Nmin)
2
3 dN=[x_Nmax-x_inf;-x_Nmin+x_inf];
4 g=[kron(ones(10,1),d);dN];
5 end

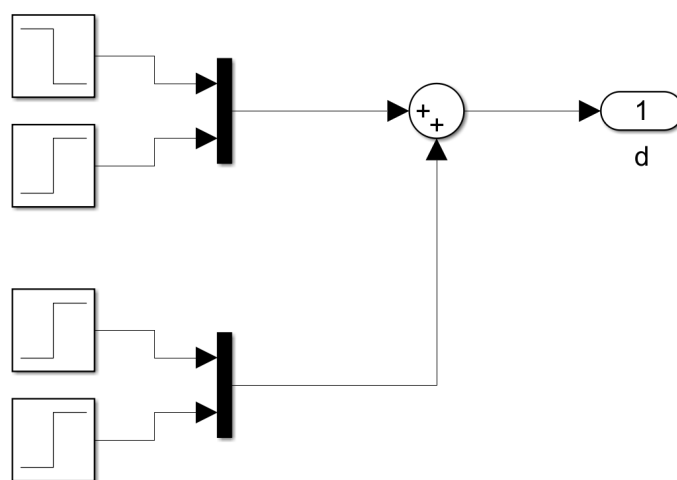
```

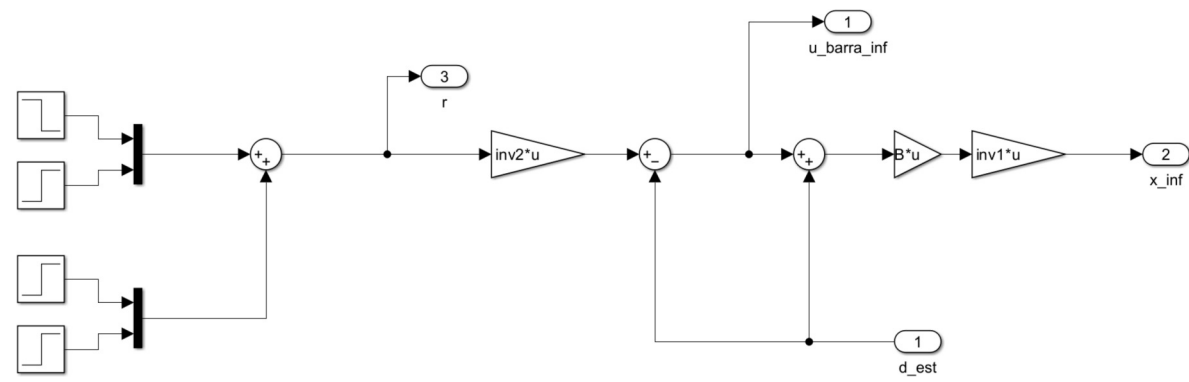
**B.4.3. MATLAB Function fcn**

```

1 function d = fcn(xmax,x_inf,xmin,umax,umin,u_barra_inf,L)
2 d=ones(8,1);
3 dx=[xmax-x_inf;-xmin+x_inf];
4 du=[umax+L*x_inf-u_barra_inf;-umin-L*x_inf+u_barra_inf];
5 d=[dx;du];
6 end

```

**B.4.4. Subsystem****Figura B.6:** Diagrama Simulink Seguimiento a Referencia utilizando Observadores con Perturbaciones

**B.4.5. Subsystem 1****Figura B.7:** Diagrama Simulink Seguimiento a Referencia utilizando Observadores con Perturbaciones