

UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA

DEPARTAMENTO DE INDUSTRIAS SANTIAGO

FORMULACIONES BASADAS EN FLUJOS EN REDES PARA UN

PROBLEMA DE RUTEO EN LAST MILE

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE INGENIERO CIVIL

INDUSTRIAL

AUTOR

ÁLVARO JAVIER CORREA MALDONADO

PROFESOR GUÍA: VÍCTOR ALBORNOZ S.

PROFESOR CORREFERENTE: LLUIS M. PLÀ ARAGONÉS

SANTIAGO, 25 DE ABRIL, 2019.

AGRADECIMIENTOS

Quisiera agradecer en primer lugar a familia, las personas que nunca dejan de apoyarte por más difícil que sea la vida en algunos momentos. En especial agradezco a mi madre Mireya por el constante apoyo a lo largo de los 6 años, por cada palabra, abrazo y consejo cuando lo necesité, agradezco a mi padre Christian por siempre creer en mí y por recordarme siempre que tengo las condiciones de lograr lo que me proponga.

Agradezco a los amigos obtenidos en la universidad, especialmente a los que se han dedicado a ser una compañía más allá del estudio, a los que me aceptaron en sus casas en periodo de pruebas y los que ya se convirtieron en más familia que amigos.

Por último, quiero dar las gracias al profesor Víctor, quién apoyo mi presente trabajo en todo momento sin declinar las ideas, quién ayudo en la búsqueda de información y quién me aclaró todos los tipos de dudas que se me presentaron.

RESUMEN EJECUTIVO

En el presente trabajo se busca analizar y proponer formulaciones matemáticas algebraicas para un problema específico de ruteo de última milla que apoya procesos de transporte y distribución del e-commerce, el problema específico se basa en el problema del vendedor viajero (TSP) con reemplazo de drones. Este problema es analizado debido al alza del e-commerce abordado por las grandes compañías con la nueva tecnología que reduce los costos de transporte reemplazando la energía de combustibles que usan los vehículos por la energía eléctrica usada por los drones.

Los distintos modelos se diferencian en la forma de eliminación de sub-tours que puede producir el TSP. Los modelos que se analizan son: MTZ, F1 y F2. Se resuelven 15 instancias distintas variando la cantidad de drones que estarán a disposición en distintas bases de datos. Los modelos son resueltos con AMPL utilizando el solver CPLEX.

Como conclusión se obtiene que los modelos no tienen diferencia en su valor óptimo escogido, pero si existe diferencia en el tamaño del problema y en los tiempos de ejecución de los solver. Obteniendo como los modelos más recomendables los modelos F1 y luego en F2 (en ese orden). El modelo MTZ no es un buen modelo para este problema por los tiempos de ejecución alto.

Palabras Clave: “Last mile”, “Problema del Vendedor Viajero (TSP) con reemplazo de drones”, “E-commerce”, Problema de Ruteo de Vehículo (VRP).

ÍNDICE

1	INTRODUCCIÓN.....	1
1.1	Problema De Investigación.....	1
1.2	Objetivos.....	3
1.2.1	Objetivo General	3
1.2.2	Objetivos Específicos	3
2	MARCO TEÓRICO.....	4
2.1	E-Commerce en Chile	4
2.2	Courier en Chile	5
2.3	Problema de enrutamiento de vehículos (VRP).....	6
2.4	Problema del vendedor viajero o viajante de comercio (TSP)	10
2.4.1	Formulación del TSP sin eliminación de sub-tours:	11
2.5	Formulación Miller-Tucker-Zemlin (MTZ)	14
2.6	Formulaciones basadas en flujo	15
2.7	Tipos de restricciones para un VRP	18
2.8	Algoritmos y Heurísticas	23
2.9	Revisión de literatura.....	24
3	METODOLOGÍA	29
3.1	TSP con reemplazo de drones.....	29
3.1.1	Formulación MTZ.....	31
3.1.2	Formulación F1	32

3.1.3	Formulación F2	33
4	RESULTADOS	35
4.1	Base de datos	35
4.2	Modelos en el AMPL	36
4.3	Caso de estudio	37
4.4	Resultados de Escenarios.....	41
5	CONCLUSIONES	52
6	REFERENCIAS	53
7	ANEXOS	57
7.1	Tablas de Base de Datos.....	57
7.2	Anexo A: Lenguaje AMPL Modelo MTZ.....	60
7.3	Anexo B: Lenguaje AMPL Modelo F1	61
7.4	Anexo C: Lenguaje AMPL Modelo F2	62
7.5	Anexo D: Lenguaje AMPL Base de datos de 16 clientes	63
7.6	Anexo E: Lenguaje AMPL Base de datos de 20 clientes.....	64
7.7	Anexo F: Lenguaje AMPL Base de datos de 23 clientes	65
7.8	Anexo G: Lenguaje AMPL Base de datos de 27 clientes	67
7.9	Anexo H: Lenguaje AMPL Base de datos de 28 clientes	69

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 1: Máximo de drones.....	36
Tabla 2: Resultado de la instancia de 16 clientes.	38
Tabla 3: Clientes visitados por drones para el modelo MTZ.	38
Tabla 4: Clientes visitados por el vehículo y su secuencia para el modelo MTZ.	38
Tabla 5: Resultado de los clientes visitados por drones para el modelo F1.....	39
Tabla 6: Flujos de productos entregados por el vehículo entre los nodos para el modelo F1.	39
Tabla 7: Resultado de los clientes visitados por drones para el modelo F1.....	40
Tabla 8: Flujos de productos recogidos por el vehículo entre los nodos para el modelo F1.	40
Tabla 9: Instancias para los modelos	43
Tabla 10: Tamaño de las instancias con 2 drones a disposición.	44
Tabla 11: Tamaño de las instancias con 3 drones a disposición.	45
Tabla 12: Tamaño de las instancias con 4 drones a disposición.	45
Tabla 13: Resultados de valores óptimos en (min) y tiempos de ejecución en (s).	47
Tabla 14: Promedios de tiempos de ejecución.	47
Tabla 15: Resultados Modelos Relajados.	48
Tabla 16: Valores Óptimos: Modelo Original v/s Modelo Relajado.	49
Tabla 17: Matriz de tiempos de viaje para el vehículo con 16 clientes en minutos.	57
Tabla 18: Matriz de tiempos de viaje para el vehículo con 20 clientes en minutos.	57
Tabla 19: Matriz de tiempos de viaje para el vehículo con 23 clientes en minutos.	58
Tabla 20: Matriz de tiempos de viaje para el vehículo con 27 clientes en minutos.	58
Tabla 21: Matriz de tiempos de viaje para el vehículo con 28 clientes en minutos.	59

Tabla 22: Tiempos de viaje para el drone desde el centro de distribución hacia cada nodo con 16 clientes en minutos.....	59
Tabla 23: Tiempos de viaje para el drone desde el centro de distribución hacia cada nodo con 20 clientes en minutos.....	59
Tabla 24: Tiempos de viaje para el drone desde el centro de distribución hacia cada nodo con 23 clientes en minutos.....	59
Tabla 25: Tiempos de viaje para el drone desde el centro de distribución hacia cada nodo con 27 clientes en minutos.....	60
Tabla 26: Tiempos de viaje para el drone desde el centro de distribución hacia cada nodo con 28 clientes en minutos.....	60

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 1: Ejemplo de subtours.....	13
------------------------------------	----

1 INTRODUCCIÓN

1.1 Problema De Investigación

El e-commerce (comercio electrónico) ha sido durante años un buen método de compra para todos los usuarios, ya que trae ventajas como la comodidad de recibir un producto en un lugar determinado y la adquisición de un producto a menor costo gracias a la búsqueda que logra el cliente en distintos sitios webs. Es por esto que tanto para los distribuidores que trabajan en esta área o las empresas que poseen sus propios canales de distribución para las entregas de sus productos es muy importante tener un eficiente proceso de entrega de pedidos; los resultados de este proceso no son fáciles de determinar a simple vista cuando son cientos de clientes con demandas diarias.

Del proceso de venta y compra en el e-commerce y courier, el último paso que es entregar el producto al cliente se le denomina 'last mile', esta distribución juega un papel importante en el servicio hacia el cliente, además las demandas de entrega diaria y los diferentes horarios de disponibilidad están distribuidos espacialmente. "La última milla se ha convertido en el cuello de botella (proceso que representa la capacidad máxima de producción) del comercio electrónico" (Zhou, Baldacci, Vigo, & Wang, 2018).

"Desde la última década, el mercado del comercio electrónico se caracteriza por un enorme crecimiento y cambios. Este crecimiento ha causado y aún causa desafíos importantes dentro de la entrega al cliente, especialmente en aquella parte de la cadena de suministro conocida como the last mile" (Ahmed & Kanchan, 2017). Lo que sucede esencialmente es que el cliente no recibe el producto a tiempo, y esto produce una insatisfacción del mismo y una pérdida de valor a la empresa, muchos clientes de estos

devuelven sus pedidos lo que genera que hay que inventariar nuevamente un producto y se pierde más tiempo de lo pronosticado (Schrotenboer, Wruck, Jan Roodbergen, Veenstra, & Dijkstra, 2017).

Los problemas presentados en “the last mile” se pueden resolver a través de modelos complejos de ruteo de vehículos, estos resuelven las necesidades de abaratar costos al momento de transportar los productos, agrega valor a la imagen que tiene el consumidor con la empresa que lo atendió, y además logra satisfacer una mayor demanda de clientes. Por lo que se busca mejorar indicadores (KPI) como costo, distancia y tiempo (Al-Nawayseh, Alnabhan, Al-Debei, & Balachandran, 2013).

Actualmente existen empresas que lideran la logística del enrutamiento de vehículos, tales como DISC, eRoute Logistics y OptimoRoute (Vehicle routing: Driving Transformation, 2016), entre otras. Todas ellas ocupan diferentes modelos basados en algoritmos, heurísticas, simulación, etc. Los modelos más recientes se basan en problemas clásicos de ruteo vehicular y ayudarán a construir nuevos modelos para el problema de la última milla. Problemas de enrutamiento de vehículos (VRP) como los expuestos en Toth & Vigo (2002) pueden ser abordados con métodos exactos y heurísticos desarrollados para el VRP y algunas de sus principales variantes, haciendo hincapié en los problemas prácticos comunes a VRP. Para lograr un buen resultado es esencial decidir qué solicitudes de entrega aceptar y qué ventanas de tiempo ofrecer a qué consumidores (Cleophas & Ehmke, 2014). Los métodos resultantes más eficientes que se obtengan podrán ser ocupados desde una empresa dedicada al e-commerce, y por ello la importancia en la búsqueda de nuevas metodologías en el problema de “last mile”.

1.2 Objetivos

1.2.1 Objetivo General

Analizar y proponer formulaciones matemáticas alternativas para un problema específico de ruteo de última milla que apoya procesos de transporte y distribución del e-commerce.

1.2.2 Objetivos Específicos

- Estudiar métodos y modelos de VRP y TSP actuales aplicables al contexto de la última milla.
- Formular modelos de TSP con reparto de drones con distintas formas (restricciones) de eliminación de sub-tours.
- Implementación computacional para los modelos formulados en un lenguaje algebraico.
- Resolver modelos para diversas instancias con un software computacional con el fin de analizar y comparar sus resultados.

2 MARCO TEÓRICO

2.1 E-Commerce en Chile

“El e-commerce en Chile ha crecido fuertemente en los últimos años. Sin ir más lejos, según datos entregados por Cámara de Comercio de Santiago (CNC), en el último Cyber Day las ventas online aumentaron un 24% en relación con el año 2016, lo que se traduce en 45 millones de visitas a los sitios asociados y en transacciones totales superiores a los US\$ 145 millones. Los resultados lograron que este evento se transformara en el de mayores ventas en la historia del comercio electrónico local” (Pulso, 2017). Además, un artículo presentado por Durán (2019) señala que el gerente de estudios de la Cámara de Comercio de Santiago (CCS) y director del centro de Economía Digital de la CCS, George Lever, dijo “nuestras estimaciones apuntan a un crecimiento del 30% del e-commerce en 2018, que se debiera mantener este año”.

El e-commerce sin duda ha beneficiado a los clientes, por tener una facilidad en la compra y sin duda ha beneficiado a las Pymes, en la facilidad de promocionar sus productos, además de la compra rápida que existe vía online.

La mayoría de las Pymes que están en Chile no hacen su propio despacho a domicilio, al igual que muchas tiendas grandes, es decir, se pide a un tercero que haga la entrega de los productos, por lo que se tiene que saber finalmente como trabaja el Courier en Chile.

2.2 Courier en Chile

El Courier es la industria de mensajería, o el transporte de productos. Se lucha constantemente en hacer llegar el producto solicitado por el cliente lo más rápido posible. Las empresas dedicadas al Courier son usualmente las encargadas de la última milla, son este tipo de empresas las que tienen que organizar múltiples pedidos para cada día y trayectos para cada vehículo.

“Una de las partes fundamentales del e-Commerce, es por supuesto, el área de logística. Entregar un buen despacho es vital para las tiendas online. Para eso, se debe contar con una empresa que preste el servicio de logística que cuente con una amplia cobertura, rápido tiempo de entrega, bajos costes de transporte, responsabilidad y eficiencia” (Dávila, 2018).

En este trabajo se describe brevemente los mejores servicios de Courier en Chile, dentro de los cuales están:

- Blue express se caracteriza por la prioridad de envío, la empresa ofrece distintas promociones para elegir la rapidez del envío nacionalmente. La empresa posee un equipo de clasificación de productos para poder manipular de mejor forma los productos frágiles, además posee un sistema que permite saber al cliente dónde se encuentra su producto.
- Correos Chile, empresa pública chilena que se caracteriza por tener la mayor cobertura hacia todo el país. Correos Chile busca disminuir la huella de carbono de sus procesos haciendo su visión y misión enfocadas en la sustentabilidad.

- Atenas, empresa que realiza entregas de gran tamaño, la industria a la que atiende está enfocada en las empresas de retail.
- Chilexpress, primero en la categoría Courier en Chile, al igual que Correos Chile buscan disminuir su huella de carbono enfocándose en ser una empresa sustentable. Chilexpress dependiendo del lugar de origen y destino promete y asegura recepciones rápidas (Ej: Si recibe dentro de la Región Metropolitana un producto antes de las 16:00 hrs., el producto llegará a su destino antes de dos horas).
- Starken se caracteriza por competir en precios con las demás empresas, además de asegurar la calidad del envío del producto, prohibiendo los envíos de sustancias peligrosas y separando los productos más frágiles.
- DHL es la empresa de logística con mayor alcance global, con presencia en más de 220 países. Caracterizada por su experiencia busca entregar al cliente eficiencia y eficacia en la entrega de sus productos.
- LET enfocada en nichos, se especializa en inspeccionar los riesgos.

2.3 Problema de enrutamiento de vehículos (VRP)

Debido al aumento de tecnología a nivel general, cada día se puede reducir los costos operacionales de transporte, con distintas técnicas y modelos. Para el e-commerce es conveniente tratar temas como la última milla para generar una reducción en sus costos. “Las áreas urbanas representan grandes desafíos para las organizaciones logísticas para una mejor eficiencia económica a fin de satisfacer los requisitos del vendedor y del cliente” (Ahmed &

Kanchan, 2017). Sin embargo, de parte del vendedor se busca reducir sus costos y, de parte del consumidor se desea mejores tiempos de entrega.

Desde las últimas décadas el problema de ruteo de vehículos se ha vuelto esencial para el minorista de retail, en donde existe de manera clara la posibilidad de disminuir los tiempos de entrega al cliente y el costo que produce tener más tiempo el vehículo en la calle. Disminuir los tiempos de entrega no sólo entrega la posibilidad de disminuir costos, sino que también trae consigo una mayor lealtad con el cliente y un mejor servicio hacia este.

“El proceso de transporte involucra todas las etapas de los sistemas de producción y distribución y representa un componente relevante (generalmente del 10% al 20%) del costo final de los bienes.” (Toth & Vigo, 2002). Es decir, se puede producir un ahorro significativo al poder aplicar modelos de ruta de vehículos.

Todos los días se transportan grandes cantidades de mercancías a través de vehículos de largos recorridos (con gran capacidad de carga como los camiones), pero este tipo de vehículos son inapropiados para entregar uno a uno a los clientes debido a las cargas pequeñas que tendrían que llevar los camiones, la distribución de la última milla trata este tema, tema complejo por los diferentes horarios que manejan los clientes que están distribuidos espacialmente. (Zhou, Baldacci, Vigo, & Wang, 2018)

La distribución de bienes se refiere al servicio de entrega a un conjunto de clientes, esto se hace con un conjunto de vehículos, que están situados en uno o más depósitos. La manera en que se eligen las rutas es teniendo en cuenta que todos los clientes son satisfechos por la entrega de la empresa, que a la vez busca reducir su costo de transporte global al mínimo. (Toth & Vigo, 2002)

El problema de ruteo de vehículos puede estar enfocado a distintos escenarios, dependiendo del caso que lo limite, por lo que existen distintos tipos de modelos o heurísticas para distintos problemas.

En este tipo de problemas se tiene siempre que considerar sus componentes principales como: red de clientes y depósitos, vehículos, conductores, etc. Además de las limitaciones operacionales que tiene y los objetivos que se tienen que alcanzar. (Toth & Vigo, 2002).

La red se representa a través de un grafo, cuyos arcos representan secciones de camino y los vértices corresponden a las uniones de dichos caminos, pudiendo ser dirigido o no dirigido, dependiendo si las calles pueden ser atravesadas en una sola dirección o en ambos sentidos (Gómez Muñoz, 2015). A cada arco se le asigna un valor numérico, que puede tener distintos significados dependiendo de lo que se quiera minimizar, el valor puede representar un costo de transporte, puede representar la distancia de un nodo a otro nodo, o puede representar tiempo de demora de un nodo a otro; si se quisiera representar en tiempo, debiese variar el valor ya que no es el mismo tiempo de demora en horarios distintos, es decir, el tiempo de viaje varía según mes, día, hora, etc.

Para el problema se tienen que considerar tanto las características de los clientes como la de los vehículos:

Características de clientes:

- Demanda.
- Horario en que se le puede entregar el pedido.
- Ubicación

Características de vehículos:

- Capacidad máxima
- Tiempo disponible
- Alcance geográfico
- Costo (expresado en $[\$/hora]$ o $[km/hora]$ dependiendo de las cifras)

Además, el problema presenta características determinadas como la zona en la que está satisfaciendo la demanda, número de puntos de partida (origen), flota de vehículos disponibles, demanda total a satisfacer.

Los problemas de ruta de vehículos se pueden determinar según la restricción esencial que tienen, ejemplo para un problema de flota de camiones entre regiones es probable que su restricción sea de capacidad máxima (CVRP), pero para el caso del e-commerce su restricción esencial serán las ventanas de tiempo (VRPTW), pero para este caso no se podrá dejar de lado la primera restricción, aunque en muchos casos diarios de una ruta no se llegue al límite de la restricción de capacidad es necesario tomarla en cuenta. Existen diferentes tipos de problemas de ruta de vehículos abordados desde distintos puntos de vista, pero no necesariamente excluyentes de otro.

Algunos problemas básicos son (Toth & Vigo, 2002):

- VRP con restricción de capacidad (CVRP): Se limita la capacidad de los vehículos.
- VRP con restricción de distancia y capacidad (DCVRP): Se limita la capacidad de los vehículos y la distancia a recorrer.
- VRP con backhous (VRPB): Problema de entrega y recolecta

- VRP con ventanas de tiempo (VRPTW): Las entregas para satisfacer al cliente se deben cumplir dentro de un intervalo de tiempo determinado.
- VRP con recogida y entrega (VRPPD): Traslado de productos desde puntos de origen en donde se recoge el producto, y se lleva a puntos de destino (cliente).
- VRP con entrega y recolecta y ventanas de tiempo (VRPBTW): Problema de entrega y recolecta que se deben cumplir en un intervalo de tiempo.
- VRP con recogidas y entregas en ventanas de tiempos (VRPPDTW): Traslado de productos desde puntos de origen en donde se recoge el producto, y se lleva a puntos de destino en un intervalo de tiempo.

Para el caso del e-commerce interesa estudiar el VRP con ventanas de tiempo, pero el modelo a la vez depende de restricciones de capacidad (CVRP).

2.4 Problema del vendedor viajero o viajante de comercio (TSP)

El problema del vendedor viajero es un problema de transporte en el que se determina en que orden serán visitados los clientes, ciudades, regiones, etc., por un vendedor ambulante o vehículo, asumiendo valores conocidos como: las distancias, tiempos o costos de transporte que existen entre los clientes o lugares por visitar. El problema determina según sus parámetros la ruta más corta, más rápida o la menos costosa. Es clave notar que no siempre la ruta más corta es la menos costosa o la más rápida, por lo que el problema debe ser resuelto según algún enfoque. La ruta menos costosa implica menores costos totales de servicio que podría implicar menor precio de transporte para el cliente, pero no necesariamente la entrega

más rápida. O visto desde otro punto de vista la ruta más rápida podría ser la más costosa lo que implica un mayor precio hacia el cliente.

Una de las últimas tecnologías agregadas es hacer este problema con ayuda de drones, buscando reemplazar el costo de combustible con costos en energía eléctrica.

“Recientemente ha surgido un nuevo método de distribución en el que se despliegan pequeños vehículos aéreos no tripulados (UAV), también conocidos como drones, para ayudar a la entrega de paquetes. Por un lado, hay cuatro ventajas de usar un avión no tripulado para la entrega: puede operarse sin un piloto humano, evita la congestión de las redes de carreteras tradicionales, es más rápido que los camiones y tienen costos de transporte por kilómetro más bajos. Por otro lado, debido a que los drones funcionan con baterías, su distancia de vuelo y la altura alcanzada tienen límites. En contraste, un camión o un automóvil tienen la ventaja de la capacidad de viaje de largo alcance. Puede transportar carga grande y pesada con una diversidad de tamaño, pero también es pesada lenta y tiene un costo de transporte mucho mayor.” (Minh Ha, Deville, Dung Pham, & Hoàng Hà, 2018).

El problema en la última milla agregando drones puede ser visto desde dos puntos de vistas, el primer punto de vista es que varios drones se mantengan en el centro de distribución y exista un recorrido para el vehículo que vaya a los lugares que el drone no puede alcanzar debido a su límite, el segundo punto de vista es que el drone vaya dentro del vehículo y mientras el vehículo hace algunos repartos, el drone pueda hacerlos en paralelo, es decir, que se hagan dos entregas al mismo tiempo para que después el drone vuelva al vehículo.

2.4.1 Formulación del TSP sin eliminación de sub-tours:

El problema del vendedor viajero es uno de los problemas más usados para resolver o para probar modelos de optimización. El problema busca hallar la ruta más corta, más rápida o la menos costosa para un vendedor viajero que debe atender a distintos clientes. Desde lo más básico el problema se define de la siguiente forma:

Conjuntos:

A : Conjunto de arcos que pueden ser recorridos por el vehículo.

N : Conjunto de nodos que representan los clientes o destinos que tienen que ser recorridos por el vehículo.

N_0 : Conjunto de destinos y el punto de partida u origen.

Parámetros:

c_{ij} : Costo, tiempo o distancia que existe en el viaje desde el nodo i al nodo j .

Variables:

x_{ij} : variable binaria, es 1 si el vehículo pasa por el arco (i,j) , y 0 si no lo hace.

Función Objetivo:

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} * x_{ij} \quad (2.1)$$

Restricciones:

$$\sum_{j \in N} x_{0j} = 1 \quad (2.2)$$

$$\sum_{i \in N} x_{i0} = 1 \quad (2.3)$$

$$\sum_{i \in N_0} x_{ij} = 1 \quad \forall (j \in N) \quad (2.4)$$

$$\sum_{j \in N_0} x_{ij} = 1 \quad \forall (i \in N) \quad (2.5)$$

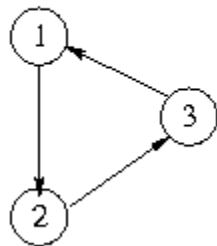
$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall ((i,j) \in A) \quad (2.6)$$

El problema busca minimizar los costos de transporte, distancia recorrida o tiempo total de viaje como se indica en (2.1). La restricción (2.2) indica que el vehículo debe salir del centro de distribución, la restricción (2.3) indica que debe volver, las restricciones (2.4) y (2.5) indican que el vehículo debe visitar todos los clientes y la restricción (2.6) indica la naturaleza de la variable.

Como se puede observar en este problema se pueden producir sub-tours, tal como lo indica la figura 1, como se puede observar en la figura se designaron 2 rutas, una ruta de longitud de tres nodos y otra de longitud de 2 nodos. Los sub-tours se producen si el problema genera más de un recorrido, esencialmente el problema es que sólo un recorrido contendrá al centro de distribución.

Figura 1: Ejemplo de subtours

Subtour length = 3



Subtour length = 2



Fuente: Mathematical Programming Glossary

Para esto hay distintas formas que al crear restricciones eliminan estos sub-tours, a continuación, se presentan algunas formulaciones que evitan este problema.

2.5 Formulación Miller-Tucker-Zemlin (MTZ)

Las restricciones de eliminación de sub-tours de Miller-Tucker-Zemlin (MTZ) y la versión mejorada de Desrochers y Laporte, han sido y siguen siendo de uso regular para modelar una variedad de problemas de enrutamiento (Bektaş & Gouveia, 2014). El objetivo del modelo MTZ es hacer una secuencia en el orden en que los nodos serán recorridos por el vehículo.

Para el formular el modelo MTZ y excluir subtours (Pataki, 2003) se mantiene la función objetivo (2.1) y las restricciones (2.2)-(2.6), además, se agregan los siguientes datos:

Parámetros adicionales:

Max: Número de nodos que recorrerá el vehículo.

Variables adicionales:

u_i : Orden en el que el nodo es visitado

Restricciones adicionales:

$$u_0 = 1 \quad (2.7)$$

$$u_i \geq 2 \quad \forall (i \in N) \quad (2.8)$$

$$u_i \leq Max \quad \forall (i \in N) \quad (2.9)$$

$$u_i - u_j + (Max - 1)x_{ij} \leq Max - 2 \quad \forall ((i, j) \in A) \quad (2.10)$$

$$u_i \in \mathbb{Z}_0^+ \quad \forall (i \in N) \quad (2.11)$$

La restricción (2.7) indica que el primer nodo visitado es el centro de distribución, la restricción (2.8) indica que todos los nodos deben ser visitados después del centro de distribución, la restricción (2.9) indica que el número de orden no es mayor al número de nodos por visitar. La restricción (2.10) indica que si el vehículo pasa por un arco (i, j) se le asigna al destino j un orden superior en 1 con respecto al origen i . Y por último la restricción (2.11) indica la naturaleza de la variable.

2.6 Formulaciones basadas en flujo

En este caso la(s) variable(s) agregadas al TSP son de tipo continuas y de esta forma se evita agregar la(s) restricción(es) de que sean enteras (Orman & Williams, 2007). Se presentarán a continuación tres formulaciones de flujo: F1, F2 y F3.

Formulación F1:

La formulación por flujo en sub-tours se basa en que a medida que el automóvil haga cada entrega, la cantidad de productos que queda en el automóvil sea la correspondiente, en este caso será la entrega de un producto, por lo que el flujo irá disminuyendo a medida que el vehículo pase por cada cliente.

La formulación mantiene todos sus conjuntos, parámetros y variables, con datos adicionales.

Parámetros adicionales:

Max: Número de nodos que recorrerá el vehículo.

Variables adicionales:

f_{ij} : flujo de productos que existe en el trayecto del arco desde i a j .

La formulación de flujo F1 mantiene la función objetivo (2.1) al igual que las restricciones (2.2)-(2.6). Y se agregan las siguientes restricciones:

$$f_{ij} \leq (Max - 1) * x_{ij} \quad \forall ((i, j) \in A) \quad (2.12)$$

$$\sum_{j \in N} f_{0j} = Max - 1 \quad (2.13)$$

$$\sum_{i \in N} f_{ij} - \sum_{i \in N} f_{ji} = 1 \quad (2.14)$$

$$f_{ij} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall ((i, j) \in A) \quad (2.15)$$

La restricción (2.12) indica el máximo flujo que puede tener el vehículo en el arco si este es ocupado. La restricción (2.13) indica que el flujo máximo que sale desde un nodo i será la suma de todos los lugares visitados por el vehículo excepto el centro de distribución. La restricción (2.14) indica que en cada nodo dejará un producto. La restricción (2.15) indica la naturaleza de la variable.

Formulación F2:

La formulación F2 se basa en que el flujo posee dos tipos de productos, un producto es el que se irá dejando en cada cliente y otro producto será el que se irá recogiendo. En este

caso se agregan dos variables adicionales al problema original, manteniendo la función objetivo (2.1) y las restricciones (2.2)-(2.6).

Parámetros adicionales:

Max: Número de nodos que recorrerá el vehículo.

Variables adicionales:

f_{ij} : flujo del producto 1 que existe en el trayecto del arco desde i a j .

g_{ij} : flujo del producto 2 que existe en el trayecto del arco desde i a j .

Restricciones adicionales:

$$\sum_{j:j \neq 0} f_{0j} - f_{j0} = Max - 1 \quad (2.16)$$

$$\sum_{j:i \neq j} f_{ij} - f_{ji} = -1 \quad \forall i \in N \quad (2.17)$$

$$\sum_{j:j \neq 0} g_{0j} - g_{j0} = -(Max - 1) \quad (2.18)$$

$$\sum_{j:i \neq j} g_{ij} - g_{ji} = 1 \quad \forall i \in N \quad (2.19)$$

$$\sum_j f_{ij} + g_{ij} = Max - 1 \quad \forall i \in N_0 \quad (2.20)$$

$$f_{ij} + g_{ij} = (Max - 1) * x_{ij} \quad \forall i \in N_0 \quad (2.21)$$

$$f_{ij}, g_{ij} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall ((i, j) \in A) \quad (2.22)$$

La restricción (2.16) indica que el vehículo debe salir con la cantidad de productos 1 necesarios para satisfacer a los clientes, la restricción (2.17) indica que en cada nodo se deja

un producto 1, la restricción (2.18) indica que el vehículo debe llegar con la cantidad de productos 2 que se recolectó de cada cliente, la restricción (2.19) indica que en cada nodo se recolectó un producto 2, la restricción (2.20) indica que la suma de productos 1 y 2 siempre será igual a los clientes por atender (esto debido a que por cada nodo donde se deja un producto, se recoge otro), la restricción (2.21) permite que haya flujo en el arco que se haga parte de la ruta y la restricción (2.22) describe la naturaleza de las variables.

2.7 Tipos de restricciones para un VRP

Problema de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad (CVRP):

Dentro del problema de ruteo de vehículos se encuentra el problema con restricciones de capacidad, la capacidad se refiere al límite de productos que puede llevar un vehículo, o al número de kilos, o también a los metros cuadrados que puede cargar. La capacidad máxima será definida generalmente por el tipo de vehículo que se emplea.

“En el CVRP, todos los clientes corresponden a entregas y las demandas son deterministas, conocidas de antemano, y no pueden dividirse. Los vehículos son idénticos y están basados en un único depósito central, y solo se imponen las restricciones de capacidad para los vehículos. El objetivo es minimizar el costo total (es decir, una función ponderada del número de rutas y su longitud o tiempo de viaje) para atender a los clientes” (Toth & Vigo, 2002).

Notación y Formulación del CVRP:

El CVRP se formula según la teoría de grafos de la siguiente forma: Se tiene un grafo $G = (N, A)$, donde $N = \{0, 1, \dots, Max\}$ es el conjunto de vértices o nodos y A el conjunto de aristas entre cada dos vértices. Se denota por 0 el vértice que representa el depósito de los vehículos y los vértices en $\{1, \dots, Max\}$ los distintos clientes. Para una arista $a = [i, j]$ se denota por c_{ij} el costo de ir de i a j . Existe una flota de K vehículos, cada uno con capacidad Q (asumiendo todos los vehículos con iguales características en este caso). Se denota por d_i la demanda del cliente i . Por último, se crea una variable de decisión binaria x_{ij} que indica si el vehículo transita o recorre la arista (Correa Espinal, Cogollo Flores, & Salazar López, 2011). Por otro lado si $c_{ij} = c_{ji}$ la matriz de costos es simétrica y por ende el problema se denota por (SCVRP), éste caso se da generalmente cuando las distancias entre nodos representan los costos, en caso contrario el problema será asimétrico (ACVRP), caso que sucede cuando son los tiempos que representan los costos (Toth & Vigo, 2002).

Si el problema es simétrico se cumple la desigualdad triangular en costos (Toth & Vigo, 2002):

$$c_{ik} + c_{kj} \geq c_{ij} \quad (2.29)$$

Como se mencionó anteriormente, esto sucede cuando los costos son representados con las distancias euclidianas.

Ya con las definiciones, se procede a definir la formulación del problema matemático:

- Función objetivo:

$$\text{Min} \sum_{(i,j) \in A} c_{ij} * x_{ij} \quad (2.30)$$

- Restricciones (s.a.):

- Todo vehículo sale del depósito y llega al depósito:

$$\sum_{j \in \Delta^+(0)} x_{0j} = K \quad (2.31)$$

$$\sum_{i \in \Delta^-(0)} x_{i0} = K \quad (2.32)$$

- Cada cliente es visitado sólo una vez:

$$\sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ij} = 1 \quad \forall i \in N \quad (2.33)$$

$$\sum_{i \in \Delta^-(j)} x_{ij} = 1 \quad \forall j \in N \quad (2.34)$$

- Conexión de nodos, y si un cliente supera la cantidad máxima, no sea visitado por el mismo vehículo:

$$\sum_{i \in N} d_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ij} \leq C \quad \forall (i, j) \in A \quad (2.35)$$

$$x_{ij} \in \{0, 1\} \quad \forall (i, j) \in A \quad (2.36)$$

La función objetivo (2.30) busca minimizar los costos de transporte de los vehículos. Las restricciones (2.31) y (2.32) buscan que todos los vehículos sean ocupados y que las rutas contengan al centro de distribución, las restricciones (2.33) y 2.34) buscan que todos los clientes sean visitados, la restricción (2.35) indica que en cada ruta no se supere la capacidad de los vehículos y la restricción (2.36) indica la naturaleza de la variable.

El CVRP puede tener distintas variantes y es por esto que se pueden agregar distintas restricciones, como lo que implica un costo de no satisfacer a un cliente, o tener restricciones

de grupo de clientes (sean visitados por un vehículo en especial), etc. Para el problema del retail se toma en cuenta las ventanas de tiempo para el problema ya descrito, es por esto que se verá el VRP con ventanas de tiempo en el siguiente punto.

Problema de ruteo de vehículos con ventanas de tiempo (VRPTW):

El VRPTW corresponde al problema en que los clientes designan una hora en las que quiere que llegue su producto, tienen un tiempo designado para la recepción del producto que han encargado, y es lógico, hoy en día una de las ventajas que tiene el e-commerce es la reducción del tiempo que se ahorra el cliente en estar viendo artículos en alguna vitrina, más bien lo hace por medio del internet.

El objetivo del VRPTW es, además de minimizar la flota y los tiempos/costos de viaje, minimizar los tiempos de espera, recién definidos (Mediorreal Carrillo, 2014).

Así los VRP con ventanas de tiempo es la extensión de CVRP, pero en este caso cada cliente está asociado a un intervalo de tiempo $[a_i, b_i]$ (Ventana de tiempo). Los vehículos tienen su tiempo de viaje en el que será considerado el tiempo de servicio hacia el cliente, además todos los vehículos saldrán al mismo tiempo en su viaje (instante 0) (Toth & Vigo, 2002).

Notación y formulación para VRPTW:

El cliente tiene que ser atendido en un intervalo $[a_i, b_i]$, los vehículos poseen un tiempo de viaje de origen a destino t_{ij} para cada arco $(i, j) \in A$, y además se cuenta con un tiempo adicional s_i que representa el servicio hacia el cliente i . El servicio se debe realizar

en la ventana de tiempo asociada al cliente, si el vehículo llega antes de la ventana de tiempo, puede esperar hasta el inicio del intervalo (Toth & Vigo, 2002).

Cabe notar que el problema por ser de ventanas de tiempo es un problema asimétrico, debido a que se busca minimizar los tiempos y flota de vehículos.

Algunas de las restricciones que se pueden considerar dentro de la naturaleza del problema, agregando a un conjunto de K circuitos en un cierto instante del día son: todos los circuitos tienen el origen (centro de distribución), todos los clientes están dentro de un circuito, la suma de las demandas de un circuito no excede la capacidad del vehículo (Toth & Vigo, 2002).

Con la misma notación que se ocupa en el CVRP se formula el problema matemático (Toth & Vigo, 2002):

$$\text{Min} \sum_{k \in K} \sum_{(i,j) \in EA} c_{ij} x_{ijk} \quad (2.37)$$

- Restricciones (s.a.):

$$\sum_{k \in K} \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk} = 1 \quad \forall i \in N \quad (2.38)$$

$$\sum_{j \in \Delta^+(0)} x_{0jk} = 1 \quad \forall k \in K \quad (2.39)$$

$$\sum_{i \in \Delta^-(j)} x_{ijk} - \sum_{i \in \Delta^+(j)} x_{ijk} = 0 \quad \forall k \in K, j \in N \quad (2.40)$$

$$\sum_{i \in \Delta^-(n+1)} x_{in+1,k} = 1 \quad \forall k \in K \quad (2.41)$$

$$x_{ijk}(w_{ij} + s_i + t_{ij} - w_{jk}) \leq 0 \quad \forall k \in K, (i,j) \in E \quad (2.42)$$

$$a_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk} \leq w_{ik} \leq b_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk} \quad \forall k \in K, i \in N \quad (2.43)$$

$$E \leq w_{ik} \leq L \quad \forall k \in K, i \in \{0, n+1\} \quad (2.44)$$

$$\sum_{i \in N} d_i \sum_{j \in \Delta^+(i)} x_{ijk} \leq C \quad \forall k \in K \quad (2.45)$$

$$x_{ijk} \geq 0 \quad \forall k \in K, (i, j) \in A \quad (2.46)$$

$$x_{ijk} \in \{0, 1\} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A \quad (2.47)$$

$$w_{ij} + s_i + t_{ij} - w_{jk} \leq (1 - x_{ijk})M_{ij} \quad \forall k \in K, (i, j) \in A \quad (2.48)$$

La función objetivo (2.37) busca minimizar los costos de transporte. La restricción (2.38) dice que para todos los nodos sale al menos un vehículo hacia un destino, la restricción (2.39) señala que todos los vehículos inician su viaje en el centro de distribución, la restricción (2.40) señala que todos los nodos son visitados una vez, la restricción (2.41) complementa la restricción (2.39) para la ruta del vehículo, la restricción (2.42), (2.43), (2.44) y (2.45) son parte de la viabilidad del problema. Para la restricción (2.48) es donde se toma en cuenta una constante grande M y las variables de tiempo donde se comienza la entrega en w . Las restricción (2.46) y (2.47) son parte de la naturaleza de la variable.

2.8 Algoritmos y Heurísticas

Los algoritmos pueden resultar beneficiosos para este tipo de problemas como lo es el VRPTW o CVRP; la combinación de pasos a seguir puede llegar a una solución rápida y factible en un menor tiempo que lo hace el modelo con algún tipo de software general de programación entera, los algoritmos para tratar el VRP siguen siempre pasos donde puedan acercarse al cumplimiento de las restricciones, los pasos dependerán del caso a estudiar y cuáles

serán sus restricciones más relevantes, dependerá de los límites que se marquen en el problema.

2.9 Revisión de literatura

Para poder obtener un modelo adecuado es necesario explicar que no existe un modelo perfecto, el modelo fabricado depende esencialmente del lugar en que se aplicará la última milla, si existe discriminación de conductores, si existe ventanas de tiempo, si los vehículos son distintos, etc.

En Bélgica la última milla fue modelado como un ruteo de vehículos capacitado, es decir, solo fue considerado la capacidad máxima de productos que poseían los vehículos, con la diferencia que se agregan transportadores externos, esto con el fin de calcular las emisiones emitidas en la zona (Cárdenas, Beckers, & Vanelslander, 2017).

En otro artículo se observa la entrega de la última milla con ubicaciones de entrega itinerante (Reyes, Savelsbergh, & Alejandro, 2017), en este artículo se puede observar que si ocupa las respectivas restricciones de ventanas de tiempo y aún más le da al cliente la posibilidad de que la entrega sea en el maletero de su automóvil, es decir, la entrega se hará en donde esté el cliente en el tiempo del día. Para esto el cliente tiene que otorgar el seguimiento del gps del automóvil durante el día en que se le hará la entrega. La clara diferencia con el modelo clásico es que el cliente entrega un nuevo conjunto en los lugares de interés para la entrega. Para comparar de forma más clara, la diferencia primordial es agrega un subíndice a las variables a_i y b_i que indiquen que ahora la ventana de tiempo es variable, es así como la restricción 2.43 cambia a:

$$a_{ic} \sum_{j \in \Delta+(i)} x_{ijk} \leq w_{ik} \leq b_{ic} \sum_{j \in \Delta+(i)} x_{ijk} \quad \forall k \in K, i \in N, c \in C \quad (2.49)$$

Agregando que C será el conjunto de ventanas de tiempo, tomando en cuenta también que este conjunto hará variar los arcos, ya que el punto final varía.

Otro modelo se enfoca esencialmente en el crowdsourcing (externalización de la entrega basada en la amistad), esto es básicamente externalizar la entrega a alguien que esté cercano al lugar, existiendo una discriminación en la aceptación del conductor (que sea amigo del cliente). Este tipo de modelo no tomaría en cuenta las ventanas de tiempo si es que el cliente acepta que el producto si puede ser retirado por un amigo, por lo tanto, el modelo debiese ser el mismo a menos que el cliente exija el pedido a casa (Devaria, Nikolaeva, & He, 2017).

Por otro lado, Michael Schneider propone un modelo que modifica el clásico VRPTW en que agrega tiempos específicos para el conductor (VRPTWDST), el incorpora la decisión de la fuerza de trabajo para ocupar sus conductores de la manera más beneficiosa, incorporando así el conocimiento del conductor, asignado en el problema un conductor adecuado y familiarizado con la región y el cliente (Schneider, 2016). Para la resolución de este problema en el que se agregó un conjunto de ventanas de tiempo para cada conductor y además la familiarización de el con la región, se ocupa una metaheurística considerando la minimización de la duración del trabajo y en segunda instancia la minimización de las distancias recorridas.

Por otro lado, una evolución reciente en la logística puede integrar el uso de aviones no tripulados (drones) en donde se puede combinar el uso de un vehículo y drones que puedan satisfacer distintos pedidos. En el artículo de Mbiadou Saleu, Deroussi, Feillet, Grangeon, &

Quilliot (2018) se formula un modelo en donde se toma en cuenta un vehículo y varios drones, es decir, se formula un modelo de TSP con reemplazo de drones. El modelo de este artículo que se presenta a continuación, es el que será modificado para comparar las distintas formas de eliminación de subtour.

Conjuntos:

A : Conjunto de Arcos.

N : Conjunto de destinos.

N_0 : Conjunto de destinos incluyendo el origen.

N_d : Conjunto de destinos que pueden ser satisfechos por los drones.

M : Conjunto de drones.

Parámetros:

d_{ij} : tiempo que demora el vehículo entre el destino i y el destino j .

d'_i : tiempo que demora un drone en el viaje del centro de distribución y el destino i .

Variables:

x_{ij} : variable binaria que es 1 si el vehículo pasa por el arco (i,j) , 0 en otro caso.

y_{im} : variable binaria que es 1 si el cliente i es atendido por el drone m , 0 en otro caso.

z_i : variable binaria que es 1 si es el cliente i es atendido por el vehículo, 0 por el drone.

T : Tiempo total del servicio.

Función objetivo:

$$\min T \quad (2.50)$$

Restricciones:

$$T \geq \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} * x_{ij} \quad (2.51)$$

$$T \geq \sum_{i \in N_d} d'_i * y_{im} \quad \forall m \in M \quad (2.52)$$

$$z_i = 1 \quad \forall (i \in N \setminus N_d) \quad (2.53)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = z_i \quad \forall (i \in N) \quad (2.54)$$

$$\sum_{1 \leq m \leq M} y_{im} = 1 - z_i \quad \forall (i \in N_d) \quad (2.55)$$

$$\sum_{(0,j) \in A} x_{0j} \leq 1 \quad (2.56)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = \sum_{(k,l) \in A} x_{kl} \quad \forall (i \in N) \quad (2.57)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall ((i,j) \in A) \quad (2.58)$$

$$y_{im} \in \{0,1\} \quad \forall i \in N, m \in M \quad (2.59)$$

$$z_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in N \quad (2.60)$$

$$T \geq 0 \quad (2.61)$$

La función objetivo (2.50) indica la minimización del tiempo total. La restricción (2.51) y la restricción (2.52) indican que la variable T se minimizará al tiempo que sea mayor entre el tiempo de viaje del vehículo y el mayor tiempo de viaje de todos los drones. La restricción (2.53) indica que todos los clientes que no pueden ser satisfechos por los drones debido a la distancia son abastecidos por el vehículo. La restricción (2.54) indica que, si el cliente es

satisfecho por el vehículo, entonces existe un arco ocupado por el vehículo que va desde i a j , y si no es satisfecho por el vehículo entonces no existe ningún arco activo para ese cliente. La restricción (2.55) indica que, si el cliente no es satisfecho por el vehículo, existe un drone que lo debe satisfacer. La restricción (2.56) indica que el vehículo debe salir del centro de distribución. La restricción (2.57) indica que si el vehículo ocupa un arco para dirigirse al nodo i también debe ocupar un arco para salir del mismo. Las restricciones (2.58)-(2.61) indican la naturaleza de las variables.

3 METODOLOGÍA

La finalidad del presente trabajo es poder observar las diferencias que existen en las distintas formulaciones de eliminación de sub-tours para el problema del vendedor viajero con el complemento de drones en el centro de distribución. Para esto se ocupará distintos modelos que serán descritos para luego ser resueltos en el software AMPL, en el cual se aplicará el solver CPLEX para resolver los distintos escenarios. Cabe destacar que CPLEX ocupa el método Branch and Bound para resolver el problema.

3.1 TSP con reemplazo de drones

Como se mencionó antes se ocupará el modelo del artículo “Mbiadou Saleu, Deroussi, Feillet, Grangeon, & Quilliot, 2018” con posibles modificaciones:

Conjuntos:

A : Conjunto de Arcos.

N : Conjunto de destinos.

N_0 : Conjunto de destinos incluyendo el origen.

N_d : Conjunto de destinos que pueden ser satisfechos por los drones.

M : Conjunto de drones.

Parámetros:

d_{ij} : tiempo que demora el vehículo entre el destino i y el destino j .

d'_i : tiempo que demora un drone en el viaje del centro de distribución y el destino i .

Variables:

x_{ij} : variable binaria que es 1 si el vehículo pasa por el arco (i,j) , 0 en otro caso.

y_{im} : variable binaria que es 1 si el cliente i es atendido por el dron m , 0 en otro caso.

z_i : variable binaria que es 1 si el cliente i es atendido por el vehículo, 0 por el dron.

T : Tiempo total del servicio.

Función objetivo:

$$\min T \quad (3.1)$$

Restricciones:

$$T \geq \sum_{(i,j) \in A} d_{ij} * x_{ij} \quad (3.2)$$

$$T \geq \sum_{i \in N_d} d'_i * y_{im} \quad \forall m \in M \quad (3.3)$$

$$z_i = 1 \quad \forall (i \in N \setminus N_d) \quad (3.4)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = z_i \quad \forall (i \in N) \quad (3.5)$$

$$\sum_{1 \leq m \leq M} y_{im} = 1 - z_i \quad \forall (i \in N_d) \quad (3.6)$$

$$\sum_{(0,j) \in A} x_{0j} \leq 1 \quad (3.7)$$

$$\sum_{(i,j) \in A} x_{ij} = \sum_{(k,i) \in A} x_{ki} \quad \forall (i \in N) \quad (3.8)$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} \quad \forall ((i,j) \in A) \quad (3.9)$$

$$y_{im} \in \{0,1\} \quad \forall i \in N, m \in M \quad (3.10)$$

$$z_i \in \{0,1\} \quad \forall i \in N \quad (3.11)$$

$$T \geq 0 \quad (3.12)$$

$$\sum_{i \in N} y_{im} \leq 1 \quad \forall m \in M \quad (3.13)$$

El modelo con sus restricciones ya fue explicado en (2.9), en este caso se agrega la restricción (3.13) que indica que cada dron puede satisfacer sólo un cliente. La restricción se agrega ya que el modelo no contabiliza una recarga del dron por lo que podrá hacer un solo viaje.

3.1.1 Formulación MTZ

Para que el modelo sea coherente se hacen modificaciones para que se entregue un resultado viable.

Parámetros adicionales:

Max: Número de nodos que recorrerá el vehículo.

Variables adicionales:

u_i : variable entera que indica el orden en que es visitado el cliente i por el vehículo.

Para el modelo se mantiene la función objetivo 3.1 y las restricciones 3.2-3.13 y se agregan las siguientes restricciones:

$$u_0 = 1 \quad (3.14)$$

$$u_i \geq 2 \quad \forall (i \in N) \quad (3.15)$$

$$u_i \leq \sum_{j \in N} z_j \quad \forall (i \in N) \quad (3.16)$$

$$u_i - u_j + 1 \leq (Max - 1)(1 - x_{ij}) \quad \forall ((i, j) \in A) \quad (3.17)$$

$$u_i \in \mathbb{Z}^+ \quad \forall i \in N \quad (3.18)$$

Como se puede observar la restricción (3.16) es la modificación de la restricción (2.8), esta fue modificada ya que en este caso algunos clientes serán atendidos por drones lo que implica que la secuencia del vehículo será menor. Por otro lado, la restricción (3.17) es un reorden de la restricción (2.9).

3.1.2 Formulación F1

Para que el modelo sea coherente se hacen modificaciones para que se entregue un resultado viable.

Parámetros adicionales:

Max: Número de nodos que recorrerá el vehículo.

Variables adicionales:

f_{ij} : flujo que existe en el trayecto del arco desde i a j .

La formulación de flujo F1 mantiene la función objetivo (3.1) al igual que las restricciones (3.2)-(3.13). Y se agregan las siguientes restricciones:

$$f_{ij} \leq (Max - 1) * x_{ij} \quad \forall ((i, j) \in A) \quad (3.19)$$

$$\sum_{j \in N} f_{0j} = \sum_{k \in N} z_k - 1 \quad (3.20)$$

$$\sum_{i, \in N} f_{ij} - \sum_{i, \in N} f_{ji} = z_k \quad (3.21)$$

$$f_{ij} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall ((i, j) \in A) \quad (3.22)$$

La restricción (3.20) y (3.21) fueron modificadas debido a que algunos clientes serán atendidos por drones por lo que la restricción (3.20) explica que el flujo con el que debe salir el vehículo debe ser igual a los clientes que atenderá y la restricción (3.21) que el vehículo dejará un producto al cliente sólo si este es visitado.

3.1.3 Formulación F2

La formulación F2 se basa en que el flujo posee dos tipos de productos, en este caso de agregan dos variables adicionales al problema original y se hacen las modificaciones a las restricciones (2.15)-(2.21).

Parámetros adicionales:

Max: Número de nodos que recorrerá el vehículo.

Variables adicionales:

f_{ij} : flujo del producto 1 que existe en el trayecto del arco desde i a j .

g_{ij} : flujo del producto 2 que existe en el trayecto del arco desde i a j .

La formulación de flujo F2 mantiene la función objetivo (3.1) al igual que las restricciones (3.2)-(3.13). Y se agregan las siguientes restricciones:

$$\sum_{j \in N} f_{0j} - f_{j0} = \sum_{k \in N_0} z_k - 1 \quad (3.23)$$

$$\sum_{j \in N} f_{ij} - f_{ji} = -z_i \quad \forall i \in N \quad (3.24)$$

$$\sum_{j \in N} g_{0j} - g_{j0} = -\left(\sum_{k \in N_0} z_k - 1\right) \quad (3.25)$$

$$\sum_{j \in N} g_{ij} - g_{ji} = z_i \quad \forall i \in N \quad (3.26)$$

$$f_{ij} + g_{ij} = (Max - 1) * x_{ij} \quad \forall i \in N_0 \quad (3.27)$$

$$\sum_{j \in N_0} f_{ij} + g_{ij} = (Max - 1) * \sum_{k \in N_0} z_k \quad \forall i \in N_0 \quad (3.28)$$

$$f_{ij}, g_{ij} \in \mathbb{R}^+ \quad \forall ((i, j) \in A) \quad (3.29)$$

4 RESULTADOS

4.1 Base de datos

Para los escenarios a analizar es necesario poder tener un base de datos que indique los tiempos existentes entre el centro de distribución (nodo 0) y los clientes (nodos a visitar), además de los tiempos entre clientes que recorrería el vehículo. Para esto se toma una base de datos que entrega las distancias en kilómetros entre todos los nodos. Para tener la base de datos en unidad de tiempo se asume que:

- El vehículo hace sus viajes a una velocidad promedio de $50 \left[\frac{km}{h} \right]$.
- Los drones harán sus viajes a una velocidad promedio de $30 \left[\frac{km}{h} \right]$.
- Los drones no podrán recorrer más de $40 [km]$, es decir, no podrán satisfacer a un cliente a más de $20[km]$.
- El vehículo posee capacidad ilimitada y recorrido ilimitado.
- Los clientes no poseen una ventana de tiempo específica para la recepción de su producto.

Las bases de datos a analizar serán de 16, 20, 23, 27 y 28 clientes, es decir, se componen de 17, 21, 24, 28 y 29 nodos cada una. Las bases de datos en unidad de tiempo se presentan en Anexos en la sección 7.1.

Lo primero a indicar es la cantidad de clientes que pueden llegar a satisfacer los drones en caso de tener una cantidad de drones ilimitada, esto debido a los clientes que se encuentran

a menos de 20 [km] de distancia, notar que no se pondrá una flota de drones mayor a los clientes que están dentro de este radio en ningún caso debido que afecta directamente al tamaño del problema y serán innecesarios. Esto se puede ver reflejado en la siguiente tabla.

Tabla 1: Máximo de drones

Base de Datos (Clientes a satisfacer)	Clientes dentro de un radio de 20 [km]
16	6
20	7
23	12
27	20
28	19

Fuente: Elaboración propia.

Para las diversas instancias a resolver con las bases de datos ya descritas considerar que las características del computador y del software son:

- Procesador: Intel Core i5 de 2.2 [GHz].
- Memoria Ram: 4 [GB].
- Software de interfaz de lenguaje algebraico: AMPL IDE Versión: 3.5.0.
- Versión del software de optimización: CPLEX 12.7.

4.2 Modelos en el AMPL

Para poder trasladar los modelos al lenguaje AMPL y que tenga una correcta sintaxis podría ser necesario agregar algunos datos o quitar otros.

Conjuntos: Los conjuntos se mantienen de la misma forma que como se describió en 3.1 con la diferencia que no existe un conjunto de arcos A debido a que es tedioso formar todos los arcos (i, j) para distintas bases de datos, para esto cada vez que se necesite ocupar un “ $(i, j) \in A$ ” es simplemente reemplazado por “ $i \in N, j \in N$ ”. Luego como el conjunto N_d depende del parámetro d'_i , el conjunto N_d agregará los nodos i , tal que, $d'_i \neq 0$. Para la restricción (3.4) se crea un conjunto $Nn_d = N \setminus N_d$, de manera que al conjunto se agregarán los nodos i , tal que, $d'_i = 0$.

Parámetros: Los parámetros en el AMPL se escriben tal y como se describen; para el caso de los clientes que no pueden ser satisfechos por los drones se rellenará con 0.

Restricciones: Como se dijo en los anteriormente en la descripción de los conjuntos, no se pasó a lenguaje AMPL el conjunto de arcos por lo cual se tendrán todas las variables adicionales de la forma x_{ii} , esto implica que se agregue en el AMPL una restricción que indica $x_{ii} = 0, \forall i \in N_0$.

4.3 Caso de estudio

Primero se comprueba que los distintos modelos deben llegar a la misma solución en cuanto a la solución óptima del problema, además de la ruta del vehículo. Para esto es necesario escoger un escenario aleatorio para comparar su elección de la ruta óptima y su solución. El caso escogido es el de 16 clientes con 6 clientes dentro del radio de 20 [km] que pueden ser satisfechos por algún dron. Se presentará el caso hipotético en el que se tuvieran los 6 drones para saber si en el caso óptimo se ocupa el máximo de drones que se tienen.

Se resuelven los tres modelos (MTZ, F1 y F2) y entregan los siguientes resultados:

Tabla 2: Resultado de la instancia de 16 clientes.

	MTZ	F1	F2
Valor Óptimo (min)	231.72	231.72	231.72
Tiempo de Ejecución (s)	2.547	0.454	1.25

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar todos los modelos entregan la misma solución para el valor óptimo, pero aún queda por comprobar si es que los modelos escogen la misma ruta vehicular. A continuación, se entregan las variables que indican la ruta que hará el vehículo, los clientes que son satisfechos por los drones y por cuáles drones.

Resultado para el modelo MTZ:

Tabla 3: Clientes visitados por drones para el modelo MTZ.

Drone\Cliente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 4: Clientes visitados por el vehículo y su secuencia para el modelo MTZ.

Cliente	0	1	2	4	6	8	9	10	11	13	14	15	16
Secuencia Cronológica	1	6	9	5	13	4	7	8	3	11	10	2	12

Fuente: Elaboración propia.

La variable en este caso indica en que orden es visitado el nodo, ordenando la secuencia, la ruta queda de la siguiente forma:

Ruta: 0-15-11-8-4-1-9-10-2-14-13-16-6.

Resultado para el modelo F1:

Tabla 5: Resultado de los clientes visitados por drones para el modelo F1.

Drone\Cliente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 6: Flujos de productos entregados por el vehículo entre los nodos para el modelo F1.

Origen\Destino	0	1	2	4	6	8	9	10	11	13	14	15	16
0	0	0	0	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	7	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	3	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11
8	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0	0
9	0	5	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	9	0	0
14	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0

Fuente: Elaboración propia.

En este caso la variable indica el flujo de los productos que repartirá a los clientes, por lo que para ordenar la ruta se ordena del mayor flujo al menor flujo, ordenando la secuencia, la ruta queda de la siguiente forma:

Ruta: 0-6- 16-13-14-2-10-9-1-8-11-15-0.

Resultado para el modelo F2:

Tabla 7: Resultado de los clientes visitados por drones para el modelo F1.

Drone\Cliente	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0
3	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 8: Flujos de productos recogidos por el vehículo entre los nodos para el modelo F1.

Origen\Destino	0	1	2	4	6	8	9	10	11	13	14	15	16
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	0	0	8	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0	0	0	0	0	0	0	5	0	0	0	0	0
4	0	0	0	0	0	9	0	0	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	1
8	0	0	0	0	0	0	0	0	10	0	0	0	0
9	0	7	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	6	0	0	0	0	0	0
11	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	11	0
13	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	3	0	0
14	0	0	4	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
15	0	12	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	2	0	0	0

Fuente: Elaboración propia.

En este caso la variable indica el flujo de los productos que recogerá de los clientes, por lo que para ordenar la ruta se ordena del menor flujo al mayor flujo, ordenando la secuencia, la ruta queda de la siguiente forma:

Ruta: 0-6- 16-13-14-2-10-9-1-8-11-15-0.

Como se puede observar las rutas que dan solución a los modelos F1 y F2 son las mismas pero el modelo MTZ escoge otra ruta, la ruta escogida por el modelo MTZ se puede decir que es la misma que los otros sólo que en distinta dirección, esto se debe a que el problema descrito es simétrico es decir $d_{ij} = d_{ji}$, por lo que la solución siempre contiene dos rutas como solución óptima y escoger cualquiera de ellas es indiferente.

Se puede observar también que los clientes que deben satisfacer los clientes son los mismos, pero con la diferencia que no son los mismos drones, en este caso sucede que no existe diferencia en escoger un drone u otro, lo que hace que sea indiferente para la solución del problema. Por último, notar que no fueron ocupados los 6 drones por lo que hay dos clientes dentro del radio de 20 [km] que fueron satisfechos por el vehículo.

4.4 Resultados de Escenarios

Para cada modelo el problema es resuelto con 2, 3 y 4 drones a disposición, es decir, de los clientes que estén dentro del radio de 20 [km], desde el centro de distribución, solo podrán ser satisfechos por los drones 2, 3 y 4 clientes, creando de esta forma 45 instancias diferentes, cabe destacar que no se pueden comparar los modelos para bases de datos distintas

ya que se posee un máximo de drones a ocupar lo que afecta directamente al tamaño del problema.

Tabla 9: Instancias para los modelos

Instancia	Nodos (Clientes)	Modelo	Drones a disposición
1	16	MTZ	2
2	16	MTZ	3
3	16	MTZ	4
4	16	F1	2
5	16	F1	3
6	16	F1	4
7	16	F2	2
8	16	F2	3
9	16	F2	4
10	20	MTZ	2
11	20	MTZ	3
12	20	MTZ	4
13	20	F1	2
14	20	F1	3
15	20	F1	4
16	20	F2	2
17	20	F2	3
18	20	F2	4
19	23	MTZ	2
20	23	MTZ	3
21	23	MTZ	4
22	23	F1	2
23	23	F1	3
24	23	F1	4
25	23	F2	2
26	23	F2	3
27	23	F2	4
28	27	MTZ	2
29	27	MTZ	3
30	27	MTZ	4
31	27	F1	2
32	27	F1	3
33	27	F1	4
34	27	F2	2
35	27	F2	3
36	27	F2	4
37	28	MTZ	2
38	28	MTZ	3
39	28	MTZ	4
40	28	F1	2
41	28	F1	3
42	28	F1	4
43	28	F2	2
44	28	F2	3
45	28	F2	4

Fuente: Elaboración propia.

Luego de poseer todas las instancias del problema se comparan los tamaños de los modelos en las siguientes tablas.

Tabla 10: Tamaño de las instancias con 2 drones a disposición.

Instancia	Modelo	Nodos (Clientes)	Variables	Restricciones
1	MTZ	16	356	391
4	F1	16	628	408
7	F2	16	917	442
10	MTZ	20	524	568
13	F1	20	944	589
16	F2	20	1385	631
19	MTZ	23	671	709
22	F1	23	1223	733
25	F2	23	1799	781
28	MTZ	27	895	921
31	F1	27	1651	949
34	F2	27	2435	1005
37	MTZ	28	956	988
40	F1	28	1824	1017
43	F2	28	2609	1075

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 11: Tamaño de las instancias con 3 drones a disposición.

Instancia	Modelo	Nodos (Clientes)	Variables	Restricciones
2	MTZ	16	372	403
5	F1	16	644	420
8	F2	16	933	454
11	MTZ	20	544	583
14	F1	20	964	604
17	F2	20	1405	646
20	MTZ	23	694	722
23	F1	23	1246	746
26	F2	23	1822	794
29	MTZ	27	922	930
32	F1	27	1678	958
35	F2	27	2462	1014
38	MTZ	28	984	999
41	F1	28	1796	1028
44	F2	28	2637	1086

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 12: Tamaño de las instancias con 4 drones a disposición.

Instancia	Modelo	Nodos (Clientes)	Variables	Restricciones
2	MTZ	16	372	403
5	F1	16	644	420
8	F2	16	933	454
11	MTZ	20	544	583
14	F1	20	964	604
17	F2	20	1405	646
20	MTZ	23	694	722
23	F1	23	1246	746
26	F2	23	1822	794
29	MTZ	27	922	930
32	F1	27	1678	958
35	F2	27	2462	1014
38	MTZ	28	984	999
41	F1	28	1796	1028
44	F2	28	2637	1086

Fuente: Elaboración propia.

En el tamaño de las instancias se puede observar que el tamaño del modelo más pequeño, independiente de la base de datos e independiente de los drones a disposición lo posee el modelo MTZ, seguido del modelo de flujo F1. Esto podría indicar que el modelo MTZ debería poder resolver el problema en menor tiempo que los otros 2 modelos. A continuación, se presentan los resultados para los modelos en su función objetivo (valor óptimo) y su tiempo de resolución.

Tabla 13: Resultados de valores óptimos en (min) y tiempos de ejecución en (s).

Nodos (Clientes)	Drones a disposición	Valor Óptimo	Tmpo. De Ejecución MTZ	Tmpo. De Ejecución F1	Tmpo. De Ejecución F2
16	2	240	5.922	0.671	1.391
16	3	236.04	4.781	0.86	1.235
16	4	231.72	4.656	0.609	0.688
20	2	317.64	0.969	0.594	1
20	3	316.56	1.218	0.797	1.406
20	4	315.24	1.5	0.547	1
23	2	144.48	214.172	0.921	2.422
23	3	140.76	286.625	2.485	2.468
23	4	136.44	213.844	1.421	1.953
27	2	166.44	2.188	1.172	1.297
27	3	156	1.391	1.047	0.875
27	4	149.4	2.719	1.547	3.406
28	2	220.32	8.156	1.453	1.594
28	3	211.68	9.515	1.36	1.578
28	4	204.12	17.969	1.516	2.093

Fuente: Elaboración propia.

Los valores óptimos para los 3 modelos expuestos son el mismo para los distintos casos, de esto se deduce que los modelos llegan a una solución óptima y no existe una diferencia en la solución de la ruta que debe tomar el vehículo y los clientes que deben ser satisfechos por los drones.

Con respecto a los tiempos de ejecución se puede observar que el modelo de flujo F1 es el modelo que menos tiempo demora en ser resuelto por el solver CPLEX, con los tiempos se procede a calcular los respectivos promedios de cada modelo.

Tabla 14: Promedios de tiempos de ejecución.

MTZ	F1	F2
51.71	1.13	1.63

Fuente: Elaboración propia.

Se puede observar que es el modelo F1 quien supera por un 43.5% al modelo de flujo F2 y a su vez por un 4463% al modelo MTZ. Esto quiere decir que los tamaños no afectan directamente a los tiempos de ejecución. Para saber qué es lo que afecta a los tiempos de resolución se tiene que resolver el problema de forma relajada (variables binarias del modelo se reemplazan por la restricción de que estén en el intervalo $[0,1]$) y comparar los valores óptimos de la función con respecto al modelo original. Los resultados del modelo relajado se presentan a continuación en la tabla 15.

Tabla 15: Resultados Modelos Relajados.

Nodos (Clientes)	Drones a disposición	MTZ		F1		F2	
		Valor Óptimo	Tmpo. De Ejecución	Valor Óptimo	Tmpo. De Ejecución	Valor Óptimo	Tmpo. De Ejecución
16	2	174.57	0.062	201.05	0.031	201.05	0.031
16	3	171.015	0.109	197.327	0.032	197.327	0.047
16	4	167.535	0.063	194.765	0.031	194.765	0.047
20	2	258.012	0.079	285.49	0.031	285.49	0.063
20	3	254.334	0.063	281.838	0.031	281.838	0.047
20	4	250.854	0.063	279.324	0.031	279.324	0.062
23	2	102.297	0.079	116.931	0.047	116.931	0.063
23	3	98.353	0.078	113.212	0.047	113.212	0.062
23	4	94.513	0.094	109.7	0.047	109.7	0.063
27	2	155.547	0.078	159.173	0.063	159.173	0.109
27	3	142.489	0.079	149.629	0.062	149.629	0.078
27	4	134.489	0.109	141.143	0.062	141.143	0.094
28	2	186.15	0.078	193.664	0.063	193.664	0.078
28	3	176.417	0.093	184.113	0.047	184.113	0.093
28	4	167.147	0.094	175.952	0.078	175.952	0.109

Fuente: Elaboración propia.

Como se puede observar para los problemas relajados el tiempo de ejecución es bastante menor para los tres modelos, es decir, el tiempo que toma cada modelo en llegar a

la solución óptima se diferencian en las repeticiones que tendrán en el algoritmo de Branch and Bound para las variables binarias para llegar a la solución óptima. También se observa que los modelos de flujos obtienen el mismo valor de solución óptima a diferencia de los valores óptimos obtenido por el modelo MTZ. Se procede a comparar los valores óptimos obtenidos del modelo relajado con el modelo original:

Tabla 16: Valores Óptimos: Modelo Original v/s Modelo Relajado.

Nodos (Clientes)	Drones a disposición	Valor Óptimo Modelo Original	Valor Óptimo MTZ Modelo Relajado	Valor Óptimo F1 y F2 Modelo Relajado	Error % MTZ	Error % F1 y F2
16	2	240	174.57	201.05	27%	16%
16	3	236.04	171.015	197.327	28%	16%
16	4	231.72	167.535	194.765	28%	16%
20	2	317.64	258.012	285.49	19%	10%
20	3	316.56	254.334	281.838	20%	11%
20	4	315.24	250.854	279.324	20%	11%
23	2	144.48	102.297	116.931	29%	19%
23	3	140.76	98.353	113.212	30%	20%
23	4	136.44	94.513	109.7	31%	20%
27	2	166.44	155.547	159.173	7%	4%
27	3	156	142.489	149.629	9%	4%
27	4	149.4	134.489	141.143	10%	6%
28	2	220.32	186.15	193.664	16%	12%
28	3	211.68	176.417	184.113	17%	13%
28	4	204.12	167.147	175.952	18%	14%

Fuente: Elaboración propia.

Al comparar los resultados se aprecia que el modelo MTZ relajado está siempre más alejado de la del valor óptimo que los modelos de flujo F1 y F2, lo que afirma que el modelo MTZ obtiene mayores tiempos de ejecución debido a las iteraciones que tiene que hacer el algoritmo de Branch and Bound para llegar a la solución óptima.

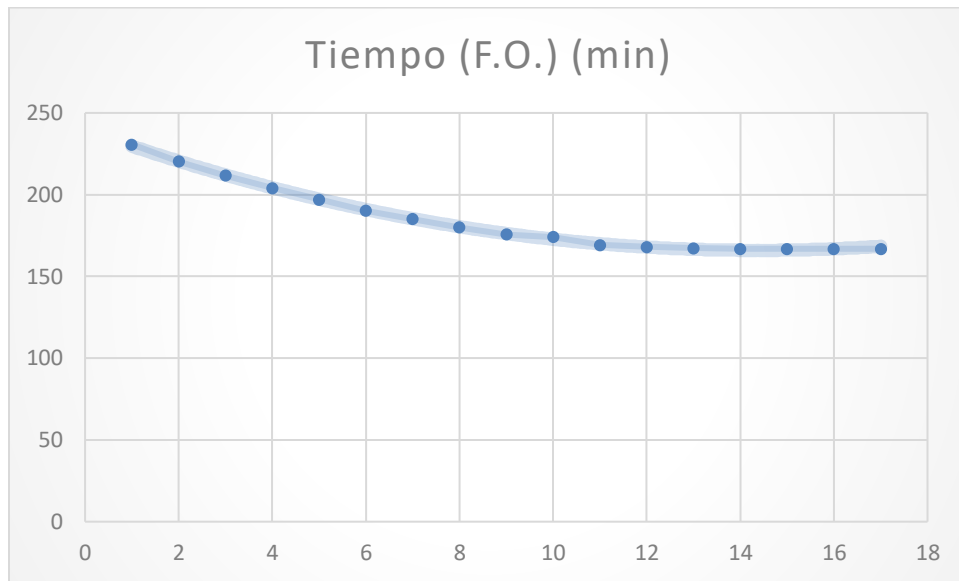
El modelo escogido para resolver problemas de TSP con reemplazo de drones es el modelo de flujo F1. Con este modelo se procede a hacer un análisis de sensibilidad con respecto a los drones con la base de datos de 28 clientes.

Gráfico 1: Drones A Disposición v/s Tiempo De Ejecución Del Solver



Fuente: Elaboración propia.

El gráfico 1 muestra como varía el tiempo de ejecución o resolución del solver si es que se van variando la disponibilidad de los drones. Como se puede observar el gráfico es bastante variado y no recibe una curva que se acomode a su tendencia. Se puede observar que el tiempo de resolución aumenta a medida que aumentan la disponibilidad de los drones en rango de 6 drones o más, esto se puede deber a que el tiempo de ejecución del solver depende de muchos factores externos al modelo. Por otro lado, a medida que se aumenta la disponibilidad de los drones aumenta consigo el tamaño del problema ya que agrega variables binarias al modelo, por lo que el tiempo de ejecución debería aumentar.

Gráfico 2: Drones A Disposición v/s Valor Óptimo

Fuente: Elaboración propia.

En el gráfico 2 se puede observar que a medida que los drones a disposición aumentan, el valor óptimo del modelo decrece. Por otro lado, el resultado para este caso es el mismo para 14 drones a disposición que para 15, 16 y 17 drones a disposición, en este caso el modelo siempre se pudo resolver entonces con un máximo de 14 drones pero el modelo que tiene como objetivo minimizar el tiempo no discrimina en si es mejor la solución con 14 drones o con 17, lo que significa que para la toma de decisión debe ser hecho con algún factor externo, por ejemplo: una comparación de costos.

5 CONCLUSIONES

Luego del análisis realizado a los distintos escenarios producidos en un TSP con reemplazo de drones se pueden obtener las siguientes conclusiones:

- Las formulaciones de MTZ, F1 y F2 no presentan diferencias en los resultados de la ruta que debe hacer el vehículo y los clientes que debe visitar cada drone, por lo tanto, tampoco presenta diferencias en el valor óptimo o tiempo total aplicado.
- El tamaño de cada modelo para los distintos escenarios no es determinante para obtener el mejor tiempo de ejecución, el tiempo de ejecución será determinado por la naturaleza del problema y las iteraciones que tenga que realizar para resolver el problema.
- El valor óptimo decrece a medida que los drones a disposición aumentan, es decir, una inversión en la nueva tecnología es beneficioso para el reparto para el cliente.
- La mejor alternativa para resolver este tipo de problemas es un modelo de flujo F1, ya que en un problema real el tamaño de la base de datos crece lo que implica que el tiempo de ejecución también lo hará. Por lo tanto, para el modelo MTZ los tiempos serán demasiado elevados en comparación con el modelo F1.
- El modelo MTZ, es el modelo con mayor tiempo de ejecución debido a que su primera iteración del algoritmo de Branch and Bound entrega una solución más alejada del valor óptimo que la que entregan los modelos de flujos.

6 REFERENCIAS

- Ahmed, S., & Kanchan, S. (2017). A meta-heuristic clustering model to optimize city-logistics resource requirements considering first mile and last mile value stream map. *Proceedings of the International Conference on Industrial Engineering and Operations Management* (págs. 417-418). Marruecos: 7th Annual Conference on Industrial Engineering and Operations Management, IEOM 2017; Hotel Sofitel Rabat Jardin des RosesRabat.
- Al-Nawayseh, M. K., Alnabhan, M. M., Al-Debei, M. M., & Balachandran, W. (Enero de 2013). An adaptive decision support system for last mile logistics in e-commerce: A study on online grocery shopping. *International Journal of Decision Support System Technology*, 5(1), 40-65. doi:10.4018/jdsst.2013010103
- Bektaş, T., & Gouveia, L. (1 de Agosto de 2014). Requiem for the Miller–Tucker–Zemlin subtour elimination constraints? *European Journal of Operational Research*, 236(3), 820-832. doi:https://doi.org/10.1016/j.ejor.2013.07.038
- Cárdenas, I., Beckers, J., & Vanellander, T. (Septiembre de 2017). E-commerce last-mile in Belgium: Developing an external cost delivery index. *Research in Transportation Business & Management*, 24, 123-129. doi:https://doi.org/10.1016/j.rtbm.2017.07.006
- Cleophas, C., & Ehmke, J. F. (2014). ¿Cuándo las entregas son rentables? *Ingeniería de Sistemas de Negocios e Información*, 153-163.

- Correa Espinal, A., Cogollo Flores, J., & Salazar López, J. (Diciembre de 2011). Solución de problemas de ruteo de vehículos con restricciones de capacidad usando la teoría de grafos. *Revista Avances en Sistemas e Informática*, 8(3), 27-32.
- Dávila, J. (26 de Abril de 2018). *Las 8 mejores empresas de logística para eCommerce en Chile*. Obtenido de Marketing 4 Ecommerce: <https://marketing4ecommerce.cl/mejores-servicios-de-logistica-para-ecommerce-en-chile/>
- Devaria, A., Nikolaeva, A. G., & He, Q. (Septiembre de 2017). Crowdsourcing the last mile delivery of online orders by exploiting the social networks of retail store customers. *Transportation Research Part E: Logistics and Transportation Review*, 105, 105-122. doi:<https://doi.org/10.1016/j.tre.2017.06.011>
- Durán, J. J. (3 de Enero de 2019). El dulce momento del e-commerce en Chile seguirá en 2019: Proyectan ventas por US\$6.500 millones. *Emol*. Obtenido de https://www.emol.com/noticias/Economia/2019/01/03/932899/Especialistas-apuntan-a-la-consolidacion-del-crecimiento-del-ecommerce-en-el-2019.html?code=AQBRA8MpniAs04o5bLQ93N-ggSfGyLHQf6kemzMCMLYUJid7HQzA91oVMm7Yf6VUeAGqTZH62cWev79wKZpF89FCqcC_kCPBz47HGmydrF
- Gómez Muñoz, S. M. (2015). *Exploración de heurísticas primales en la solución de problemas en el ruteo de vehículos*. Tesis de Grado, Universidad Técnica Federico Santa María, Departamento de Industrias, Valparaíso.
- Mbiadou Saleu, R. G., Deroussi, L., Feillet, D., Grangeon, N., & Quilliot, A. (Diciembre de 2018). An iterative two-step heuristic for the parallel drone scheduling traveling salesman problem. 72(4), 459-474. doi:10.1002/net.21846

- Mediorreal Carrillo, A. F. (2014). *Modelo de ruteo de vehículos para la distribución de las empresas*. PONTIFICIA UNIVERSIDAD JAVERIANA, DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA INDUSTRIAL, Bogotá.
- Minh Ha, Q., Deville, Y., Dung Pham, Q., & Hoàng Hà, M. (Enero de 2018). On the min-cost Traveling Salesman Problem with Drone. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 86, 597-621. doi:<https://doi.org/10.1016/j.trc.2017.11.015>
- Orman, A., & Williams, H. (2007). A Survey of Different Integer Programming Formulations of the Travelling Salesman Problem. En K. E.J., G. C., & B. H. Springer (Ed.), *Optimisation, Econometric and Financial Analysis* (Vol. 9, págs. 91-104). doi:https://doi.org/10.1007/3-540-36626-1_5
- Pataki, G. (2003). Teaching Integer Programming Formulations Using the Traveling Salesman Problem. *SIAM Review*, 45(1), 116-123.
- Pulso. (21 de Agosto de 2017). E-commerce en Chile: oportunidades para las pyme. *Pulso La Tercera*. Obtenido de <http://www.pulso.cl/empresas-mercados/e-commerce-chile-oportunidades-las-pyme/>
- Reyes, D., Savelsbergh, M., & Alejandro, T. (Julio de 2017). Vehicle routing with roaming delivery locations. *Transportation Research Part C: Emerging Technologies*, 80, 71-91. doi:<https://doi.org/10.1016/j.trc.2017.04.003>
- Schneider, M. (1 de Abril de 2016). The vehicle-routing problem with time windows and driver-specific times. *European Journal of Operational Research*, 250(1), 101-119. doi:<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2015.09.015>
- Schrotenboer, A. H., Wruck, S., Jan Roodbergen, K., Veenstra, M., & Dijkstra, A. S. (2017). Enrutamiento de selector de pedidos con devoluciones de productos y retrasos de interacción. *Revista Internacional de Investigación de la Producción*, 6394-6406.

Toth, P., & Vigo, D. (2002). *The Vehicle Routing Problem*. (P. Toth, & D. Vigo, Edits.) Philadelphia: SIAM.

Vehicle routing: Driving Transformation. (2016). *ORMS Today*.

Zhou, L., Baldacci, R., Vigo, D., & Wang, X. (1 de Marzo de 2018). A Multi-Depot Two-Echelon Vehicle Routing Problem with Delivery Options Arising in the Last Mile Distribution. *European Journal of Operational Research*, 265(2), 765-778.
doi:<https://doi.org/10.1016/j.ejor.2017.08.011>

7 ANEXOS

7.1 Tablas de Base de Datos.

Tabla 17: Matriz de tiempos de viaje para el vehículo con 16 clientes en minutos.

Nodo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
0	0.00	75.96	30.84	10.92	49.44	18.00	9.60	16.08	31.08	60.60	42.36	38.88	8.40	25.32	32.16	29.52	14.52
1	75.96	0.00	46.80	79.32	27.24	58.56	68.64	63.60	66.60	34.68	33.84	76.56	68.04	55.92	50.40	89.40	62.16
2	30.84	46.80	0.00	27.36	20.28	13.44	23.52	18.48	44.64	31.44	13.20	52.44	22.92	8.88	6.36	56.64	17.04
3	10.92	79.32	27.36	0.00	45.96	14.40	9.24	12.60	21.00	57.12	38.88	28.80	3.24	21.84	28.68	28.44	10.08
4	49.44	27.24	20.28	45.96	0.00	32.04	42.12	37.08	40.56	23.52	7.32	50.52	41.52	29.16	23.88	63.36	35.64
5	18.00	58.56	13.44	14.40	32.04	0.00	7.56	4.08	31.68	43.20	24.96	39.48	9.96	12.60	14.76	43.68	4.20
6	9.60	68.64	23.52	9.24	42.12	7.56	0.00	3.48	27.84	53.28	35.04	35.64	5.64	18.00	24.84	39.84	3.48
7	16.08	63.60	18.48	12.60	37.08	4.08	3.48	0.00	29.88	48.24	30.00	37.68	8.16	12.96	19.80	41.88	4.32
8	31.08	66.60	44.64	21.00	40.56	31.68	27.84	29.88	0.00	59.40	42.24	11.40	22.68	39.12	45.96	24.24	28.32
9	60.60	34.68	31.44	57.12	23.52	43.20	53.28	48.24	59.40	0.00	18.48	69.36	52.68	40.32	28.80	82.20	46.80
10	42.36	33.84	13.20	38.88	7.32	24.96	35.04	30.00	42.24	18.48	0.00	52.20	34.44	22.08	16.80	65.04	28.56
11	38.88	76.56	52.44	28.80	50.52	39.48	35.64	37.68	11.40	69.36	52.20	0.00	30.48	46.92	53.76	18.84	36.12
12	8.40	68.04	22.92	3.24	41.52	9.96	5.64	8.16	22.68	52.68	34.44	30.48	0.00	17.40	24.24	34.68	6.60
13	25.32	55.92	8.88	21.84	29.16	12.60	18.00	12.96	39.12	40.32	22.08	46.92	17.40	0.00	6.84	51.12	11.52
14	32.16	50.40	6.36	28.68	23.88	14.76	24.84	19.80	45.96	28.80	16.80	53.76	24.24	6.84	0.00	57.96	18.36
15	29.52	89.40	56.64	28.44	63.36	43.68	39.84	41.88	24.24	82.20	65.04	18.84	34.68	51.12	57.96	0.00	40.32
16	14.52	62.16	17.04	10.08	35.64	4.20	3.48	4.32	28.32	46.80	28.56	36.12	6.60	11.52	18.36	40.32	0.00

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 18: Matriz de tiempos de viaje para el vehículo con 20 clientes en minutos.

Nodo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
0	0.00	61.20	76.20	10.92	46.20	18.60	13.20	15.60	58.80	44.40	18.60	8.16	73.20	78.60	57.60	31.80	30.60	54.00	20.40	28.80	45.60
1	61.20	0.00	42.60	49.80	70.20	57.00	57.60	60.00	72.60	38.40	45.60	52.80	43.20	28.20	9.72	57.60	52.80	32.40	53.40	34.80	16.80
2	76.20	42.60	0.00	72.60	46.80	59.40	68.40	64.80	35.40	84.00	76.80	69.00	84.60	70.20	52.20	50.40	90.60	75.00	90.00	70.80	59.40
3	10.92	49.80	72.60	0.00	42.00	14.40	9.36	11.64	55.20	33.60	7.56	3.24	62.40	66.60	45.60	28.20	28.20	41.40	19.20	16.80	33.60
4	46.20	70.20	46.80	42.00	0.00	28.80	38.40	34.20	14.40	70.80	51.60	38.40	100.20	90.00	69.00	15.00	78.00	79.20	59.40	57.60	57.60
5	18.60	57.00	59.40	14.40	28.80	0.00	11.52	4.32	42.00	43.80	24.00	10.92	72.60	73.80	52.80	15.00	44.40	51.60	31.80	30.60	40.80
6	13.20	57.60	68.40	9.36	38.40	11.52	0.00	3.48	51.00	42.00	19.20	5.76	70.80	75.00	54.60	24.00	38.40	50.40	26.40	24.60	42.00
7	15.60	60.00	64.80	11.64	34.20	4.32	3.48	0.00	46.80	44.40	21.00	8.04	73.20	77.40	55.80	19.80	42.00	52.80	28.80	26.40	44.40
8	58.80	72.60	35.40	55.20	14.40	42.00	51.00	46.80	0.00	75.00	64.20	51.60	103.80	93.00	72.00	27.60	81.60	82.80	72.00	61.80	60.60
9	44.40	38.40	84.00	33.60	70.80	43.80	42.00	44.40	75.00	0.00	28.80	36.00	30.00	34.20	29.40	57.00	18.00	9.24	28.20	18.00	22.20
10	18.60	45.60	76.80	7.56	51.60	24.00	19.20	21.00	64.20	28.80	0.00	10.80	57.60	61.80	41.40	37.20	21.00	37.20	15.00	12.00	28.80
11	8.16	52.80	69.00	3.24	38.40	10.92	5.76	8.04	51.60	36.00	10.80	0.00	65.40	70.20	49.80	24.60	31.80	45.60	20.40	20.40	37.20
12	73.20	43.20	84.60	62.40	100.20	72.60	70.80	73.20	103.80	30.00	57.60	65.40	0.00	22.80	35.40	85.80	48.00	21.60	58.20	46.80	41.40
13	78.60	28.20	70.20	66.60	90.00	73.80	75.00	77.40	93.00	34.20	61.80	70.20	22.80	0.00	20.40	78.00	52.20	25.80	63.00	51.00	33.60
14	57.60	9.72	52.20	45.60	69.00	52.80	54.60	55.80	72.00	29.40	41.40	49.80	35.40	20.40	0.00	57.00	46.20	22.80	48.60	30.60	12.60
15	31.80	57.60	50.40	28.20	15.00	15.00	24.00	19.80	27.60	57.00	37.20	24.60	85.80	78.00	57.00	0.00	58.20	65.40	45.00	47.40	45.60
16	30.60	52.80	90.60	28.20	78.00	44.40	38.40	42.00	81.60	18.00	21.00	31.80	48.00	52.20	46.20	58.20	0.00	27.00	10.44	24.60	33.60
17	54.00	32.40	75.00	41.40	79.20	51.60	50.40	52.80	82.80	9.24	37.20	45.60	21.60	25.80	22.80	65.40	27.00	0.00	37.80	26.40	19.80
18	20.40	53.40	90.00	19.20	59.40	31.80	26.40	28.80	72.00	28.20	15.00	20.40	58.20	63.00	48.60	45.00	10.44	37.80	0.00	18.60	36.60
19	28.80	34.80	70.80	16.80	57.60	30.60	24.60	26.40	61.80	18.00	12.00	20.40	46.80	51.00	30.60	47.40	24.60	26.40	18.60	0.00	18.00
20	45.60	16.80	59.40	33.60	57.60	40.80	42.00	44.40	60.60	22.20	28.80	37.20	41.40	33.60	12.60	45.60	33.60	19.80	36.60	18.00	0.00

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 19: Matriz de tiempos de viaje para el vehículo con 23 clientes en minutos.

Nodo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
0	0.00	30.84	22.44	10.92	18.00	9.60	15.60	16.08	29.16	22.20	25.68	8.40	32.64	26.28	35.16	6.48	25.32	34.80	32.16	31.32	21.00	30.00	23.04	14.52
1	30.84	0.00	23.52	27.36	13.44	23.52	20.04	18.48	25.08	10.32	26.76	22.92	21.60	9.96	6.00	26.28	8.88	16.68	6.36	5.16	15.36	11.88	27.36	17.04
2	22.44	23.52	0.00	18.96	11.52	10.56	7.08	7.56	34.32	14.88	5.88	14.52	37.80	20.64	27.84	11.04	9.72	11.76	16.56	24.00	9.12	10.68	28.20	11.88
3	10.92	27.36	18.96	0.00	14.40	9.24	12.12	12.60	19.08	18.72	22.20	3.24	22.56	17.88	31.68	9.84	21.84	31.32	28.68	27.84	17.52	26.52	12.96	10.08
4	18.00	13.44	11.52	14.40	0.00	7.56	6.72	4.08	22.80	4.80	14.76	9.96	23.16	9.48	17.76	14.28	12.60	17.28	14.76	11.76	3.84	12.60	14.28	4.20
5	9.60	23.52	10.56	9.24	7.56	0.00	3.00	3.48	25.92	14.88	13.80	5.64	29.40	16.68	27.84	3.72	18.00	21.12	24.84	24.00	9.12	22.68	19.80	3.48
6	15.60	20.04	7.08	12.12	6.72	3.00	0.00	2.64	27.48	11.40	10.32	7.68	30.96	16.08	24.36	5.16	14.52	19.68	21.36	20.52	5.64	19.20	21.36	5.04
7	16.08	18.48	7.56	12.60	4.08	3.48	2.64	0.00	27.00	9.84	10.80	8.16	27.36	13.44	22.80	6.96	12.96	16.32	19.80	15.72	3.60	17.64	18.48	4.32
8	29.16	25.08	34.32	19.08	22.80	25.92	27.48	27.00	0.00	24.84	37.56	20.76	3.48	15.12	29.76	28.56	37.20	46.68	44.04	19.92	26.64	41.88	8.52	26.40
9	22.20	10.32	14.88	18.72	4.80	14.88	11.40	9.84	24.84	0.00	18.12	14.28	19.08	7.44	14.64	17.64	4.44	13.92	10.32	10.80	6.72	9.12	16.32	8.40
10	25.68	26.76	5.88	22.20	14.76	13.80	10.32	10.80	37.56	18.12	0.00	17.76	41.04	23.88	31.08	10.08	19.20	17.64	22.44	27.24	12.36	16.56	31.44	15.12
11	8.40	22.92	14.52	3.24	9.96	5.64	7.68	8.16	20.76	14.28	17.76	0.00	25.08	18.36	27.24	6.36	17.40	26.88	24.24	23.40	13.08	22.08	13.20	6.60
12	32.64	21.60	37.80	22.56	23.16	29.40	30.96	27.36	3.48	19.08	41.04	25.08	0.00	11.64	26.28	32.04	23.52	33.00	27.24	16.44	27.00	28.20	8.88	29.88
13	26.28	9.96	20.64	17.88	9.48	16.68	16.08	13.44	15.12	7.44	23.88	18.36	11.64	0.00	16.08	20.40	11.88	21.36	15.60	8.28	12.48	16.56	11.52	12.48
14	35.16	6.00	27.84	31.68	17.76	27.84	24.36	22.80	29.76	14.64	31.08	27.24	26.28	16.08	0.00	30.60	15.00	18.48	8.16	9.84	19.68	13.68	31.68	21.36
15	6.48	26.28	11.04	9.84	14.28	3.72	5.16	6.96	28.56	17.64	10.08	6.36	32.04	20.40	30.60	0.00	20.76	22.80	27.60	26.76	11.88	25.44	22.44	7.20
16	25.32	8.88	9.72	21.84	12.60	18.00	14.52	12.96	37.20	4.44	19.20	17.40	23.52	11.88	15.00	20.76	0.00	9.48	6.84	10.80	6.84	4.80	21.84	11.52
17	34.80	16.68	11.76	31.32	17.28	21.12	19.68	16.32	46.68	13.92	17.64	26.88	33.00	21.36	18.48	22.80	9.48	0.00	10.32	21.12	13.44	4.68	31.32	21.00
18	32.16	6.36	16.56	28.68	14.76	24.84	21.36	19.80	44.04	10.32	22.44	24.24	27.24	15.60	8.16	27.60	6.84	10.32	0.00	10.80	13.68	5.52	28.68	18.36
19	31.32	5.16	24.00	27.84	11.76	24.00	20.52	15.72	19.92	10.80	27.24	23.40	16.44	8.28	9.84	26.76	10.80	21.12	10.80	0.00	16.08	16.32	19.80	17.52
20	21.00	15.36	9.12	17.52	3.84	9.12	5.64	3.60	26.64	6.72	12.36	13.08	27.00	12.48	19.68	11.88	6.84	13.44	13.68	16.08	0.00	11.52	18.12	5.64
21	30.00	11.88	10.68	26.52	12.60	22.68	19.20	17.64	41.88	9.12	16.56	22.08	28.20	16.56	13.68	25.44	4.68	4.80	5.52	16.32	11.52	0.00	26.52	16.20
22	23.04	27.36	28.20	12.96	14.28	19.80	21.36	18.48	8.52	16.32	31.44	13.20	8.88	11.52	31.68	22.44	21.84	31.32	28.68	19.80	18.12	26.52	0.00	20.28
23	14.52	17.04	11.88	10.08	4.20	3.48	5.04	4.32	26.40	8.40	15.12	6.60	29.88	12.48	21.36	7.20	11.52	21.00	18.36	17.52	5.64	16.20	20.28	0.00

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 20: Matriz de tiempos de viaje para el vehículo con 27 clientes en minutos.

Nodo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
0	0.00	4.08	9.84	16.32	21.60	6.24	18.24	30.84	6.96	14.40	17.88	24.60	31.92	12.36	20.16	27.00	9.84	11.40	27.24	13.80	13.32	7.80	26.40	7.20	10.32	16.68	24.60	11.64
1	4.08	0.00	14.88	18.36	10.68	23.64	13.92	27.12	25.32	4.92	5.88	17.76	17.76	24.48	17.04	16.44	21.12	10.44	18.00	24.48	7.80	13.44	18.48	30.96	12.60	8.52	12.36	15.48
2	9.84	14.88	0.00	26.40	33.12	9.36	38.64	28.68	42.00	36.00	18.12	19.20	32.64	28.32	32.88	32.52	29.76	32.04	25.80	24.12	37.56	22.08	16.08	32.28	46.32	21.00	15.00	26.28
3	16.32	18.36	26.40	0.00	20.76	16.32	23.04	13.20	13.68	23.04	14.28	14.40	7.20	6.96	8.28	15.48	11.52	4.08	10.32	7.20	27.24	12.24	4.68	24.96	19.44	21.60	21.84	20.04
4	21.60	10.68	33.12	20.76	0.00	11.40	19.92	6.12	29.28	15.72	28.56	33.72	6.00	14.28	24.24	26.16	33.00	21.00	24.12	29.40	15.72	10.56	32.16	15.72	5.04	18.00	35.52	6.12
5	6.24	23.64	9.36	16.32	11.40	0.00	6.24	16.68	11.76	28.56	13.32	24.60	36.00	8.04	17.52	24.36	29.04	36.24	19.44	25.68	31.92	15.96	5.52	33.36	18.00	6.72	13.68	33.48
6	18.24	13.92	38.64	23.04	19.92	6.24	0.00	28.44	17.28	40.56	8.64	20.28	13.32	25.08	29.88	27.72	14.64	25.92	30.12	14.52	19.80	24.36	20.64	36.96	17.64	24.72	39.36	21.36
7	30.84	27.12	28.68	13.20	6.12	16.68	28.44	0.00	7.68	4.68	24.00	18.96	5.76	10.92	32.40	14.52	19.80	17.52	27.60	34.80	10.08	21.84	29.04	12.48	15.96	27.24	18.12	20.28
8	6.96	25.32	42.00	13.68	29.28	11.76	17.28	7.68	0.00	12.84	23.04	6.84	33.72	19.20	31.20	38.64	10.80	19.20	28.80	31.08	37.80	24.96	29.04	34.32	20.28	8.16	37.08	20.64
9	14.40	4.92	36.00	23.04	15.72	28.56	40.56	4.68	12.84	0.00	17.88	16.08	18.48	16.68	12.48	24.00	18.24	10.20	3.00	10.56	11.16	18.36	12.48	8.64	14.04	6.12	23.40	16.80
10	17.88	5.88	18.12	14.28	28.56	13.32	8.64	24.00	23.04	17.88	0.00	30.96	22.92	35.16	10.56	22.44	25.92	7.56	26.28	19.08	9.72	10.56	12.72	17.16	8.16	7.68	17.52	38.40
11	24.60	17.76	19.20	14.40	33.72	24.60	20.28	18.96	6.84	16.08	30.96	0.00	8.52	19.80	14.88	32.88	17.28	26.64	41.40	13.56	23.04	29.16	34.56	41.64	23.52	30.96	37.32	20.88
12	31.92	17.76	32.64	7.20	6.00	36.00	13.32	5.76	33.72	18.48	22.92	8.52	0.00	13.80	9.96	20.16	13.68	6.72	18.00	21.12	9.84	8.52	15.36	22.68	6.84	10.32	17.28	
13	12.36	24.48	28.32	6.96	14.28	8.04	25.08	10.92	19.20	16.68	35.16	19.80	13.80	0.00	30.96	25.44	31.20	16.32	23.52	30.48	4.32	24.12	15.24	12.60	3.84	6.12	19.80	7.32
14	20.16	17.04	32.88	8.28	24.24	17.52	29.88	32.40	31.20	12.48	10.56	14.88	9.96	30.96	0.00	24.12	18.12	27.00	11.28	16.32	23.64	10.92	18.36	10.92	5.88	6.72	13.20	12.72
15	27.00	16.44	32.52	15.48	26.16	24.36	27.72	14.52	38.64	24.00	22.44	32.88	20.16	25.44	24.12	0.00	15.24	5.76	26.16	9.36	6.36	11.76	22.80	15.36	15.12	7.68	19.08	25.80
16	9.84	21.12	29.76	11.52	33.00	29.04	14.64	19.80	10.80	18.24	25.92	17.28	13.68	31.20	18.12	15.24	0.00	36.00	31.32	33.84	22.32	29.16	36.60	5.64	28.20	18.84	18.60	7.32
17	11.40	10.44	32.04	4.08	21.00	36.24	25.92	17.52	19.20	10.20	7.56	26.64	6.72	16.32	27.00	5.76	36.00	0.00	28.68	24.36	27.72	17.52	21.96	30.36	7.92	21.12	12.00	12.60
18	27.24	18.00	25.80	10.32	24.12	19.44	30.12	27.60	28.80	3.00	26.28	41.40	18.00	23.52	11.28	26.16	31.32	28.68	0.00	21.48	13.44	28.20	6.24	12.72	18.00	15.24	18.24	13.56
19	13.80	24.48	24.12	7.20	29.40	25.68	14.52	34.80	31.08	10.56	19.08	13.56	21.12	30.48	16.32	9.36	33.84	24.36	21.48	0.00	18.36	18.24	16.20	19.68	14.28	26.40	19.56	9.48
20	31.32	7.80	37.56	27.24	15.72	31.92	19.8																					

Tabla 21: Matriz de tiempos de viaje para el vehículo con 28 clientes en minutos.

Nodo	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
0	0.00	12.84	28.92	22.80	14.88	9.60	37.92	9.12	18.24	18.84	33.96	15.96	13.56	35.64	27.36	15.48	41.76	33.12	22.56	18.00	7.80	40.92	22.08	8.04	26.52	20.28	12.96	5.40	20.04
1	12.84	0.00	17.76	16.44	10.56	15.24	40.32	21.96	16.08	11.40	30.48	21.60	12.12	28.08	21.00	21.12	31.80	23.88	21.84	8.04	5.04	33.36	32.52	17.52	30.12	12.60	22.92	16.68	9.48
2	28.92	17.76	0.00	44.88	20.52	31.08	61.08	38.04	26.04	27.84	58.92	37.44	33.60	46.92	49.44	41.88	50.64	42.72	42.60	24.48	21.84	52.20	50.04	35.04	50.88	13.92	40.44	32.76	9.24
3	22.80	16.44	44.88	0.00	24.24	28.08	26.64	23.04	29.76	5.04	14.04	34.44	9.48	12.84	4.56	14.52	18.24	10.32	8.16	8.40	16.44	18.12	28.68	16.20	16.44	29.04	19.80	27.36	24.60
4	14.88	10.56	20.52	24.24	0.00	7.32	47.04	24.24	5.52	19.20	38.28	13.44	19.56	38.64	28.80	27.84	37.68	34.44	28.56	18.60	7.80	43.92	36.00	21.00	36.84	6.84	26.40	14.52	11.64
5	9.60	15.24	31.08	28.08	7.32	0.00	46.32	16.92	8.64	20.04	42.12	6.60	18.84	39.72	32.64	27.12	43.44	35.52	27.84	19.68	10.20	45.00	29.88	17.64	36.12	14.16	22.56	7.20	22.20
6	37.92	40.32	61.08	26.64	47.04	46.32	0.00	27.96	52.56	30.48	24.24	52.68	28.20	30.48	25.20	22.44	37.56	31.92	18.48	33.84	38.52	35.76	20.16	29.88	11.40	52.44	22.80	37.68	52.20
7	9.12	21.96	38.04	23.04	24.24	16.92	27.96	0.00	25.56	22.56	32.64	23.16	15.72	36.24	27.96	11.76	41.28	34.68	21.24	25.92	16.92	41.52	12.96	6.84	22.80	29.40	5.16	9.72	29.16
8	18.24	16.08	26.04	29.76	5.52	8.64	52.56	25.56	0.00	24.72	43.80	10.68	25.08	44.16	34.32	33.36	43.20	39.96	34.08	24.12	13.32	49.44	38.52	26.52	42.36	8.64	31.92	15.84	13.32
9	18.84	11.40	27.84	5.04	19.20	20.04	30.48	22.56	24.72	0.00	19.08	26.40	9.00	19.08	17.88	15.84	23.16	15.24	12.00	3.36	11.40	23.16	28.92	15.72	20.28	24.00	19.32	22.68	19.56
10	33.96	30.48	58.92	14.04	38.28	42.12	24.24	32.64	43.80	19.08	0.00	48.48	21.12	12.72	9.48	19.32	19.80	16.92	11.40	22.44	30.48	12.36	33.48	25.80	14.04	43.08	25.92	36.96	38.64
11	15.96	21.60	37.44	34.44	13.44	6.60	52.68	23.16	10.68	26.40	48.48	0.00	25.20	46.08	39.00	33.48	49.80	41.88	34.20	26.04	16.56	51.36	37.20	24.00	42.48	20.28	28.92	13.44	28.56
12	13.56	12.12	33.60	9.48	19.56	18.84	28.20	15.72	25.08	6.84	21.12	25.20	0.00	22.32	14.04	9.00	27.72	19.80	9.72	10.20	11.04	27.60	22.08	8.88	18.00	24.96	12.48	18.96	24.72
13	35.64	28.08	46.92	12.84	38.64	39.72	30.48	36.24	44.16	17.88	12.72	46.08	22.32	0.00	8.28	22.92	7.08	4.20	15.00	20.04	30.60	5.28	37.08	29.40	20.28	39.24	29.52	40.20	34.56
14	27.36	21.00	49.44	4.56	28.80	32.64	25.20	27.96	34.32	9.60	9.48	39.00	14.04	8.28	0.00	14.64	14.64	6.72	6.72	12.96	21.00	13.56	28.80	21.12	15.00	33.60	21.24	31.92	29.16
15	15.48	21.12	41.88	14.52	27.84	27.12	22.44	11.76	33.36	15.84	19.32	33.48	9.00	22.92	14.64	0.00	29.28	21.36	7.92	19.20	19.32	28.20	14.16	7.44	11.04	33.24	6.60	18.60	33.00
16	41.76	31.80	50.64	18.24	37.68	43.44	37.56	41.28	43.20	23.16	19.80	49.80	27.72	7.08	14.64	29.28	0.00	7.92	21.36	23.76	34.32	9.24	43.44	34.44	27.36	42.96	35.88	45.60	38.28
17	33.12	23.88	42.72	10.32	34.44	35.52	31.92	34.68	39.96	15.24	16.92	41.88	19.80	4.20	6.72	21.36	7.92	0.00	13.44	15.84	26.40	9.48	35.52	27.84	21.72	35.04	27.96	37.68	30.96
18	22.56	21.84	42.60	8.16	28.56	27.84	18.48	21.24	34.08	12.00	11.40	34.20	9.72	15.00	6.72	7.92	21.36	13.44	0.00	15.36	20.04	20.28	21.48	14.40	8.28	33.96	14.52	25.56	33.72
19	18.00	8.04	24.48	8.40	18.60	19.68	33.84	25.92	24.12	3.36	22.44	26.04	10.20	20.04	12.96	19.20	23.76	15.84	15.36	0.00	10.56	25.32	32.28	19.08	23.64	20.64	22.68	21.84	16.20
20	7.80	5.04	21.84	16.44	7.80	10.20	38.52	16.92	13.32	11.40	30.48	16.56	11.04	30.60	21.00	19.32	34.32	26.40	20.04	10.56	0.00	35.88	27.48	12.48	28.32	13.20	17.88	11.64	12.96
21	40.92	33.36	52.20	18.12	43.92	45.00	35.76	41.52	49.44	23.16	12.36	51.36	27.60	5.28	13.56	28.20	9.24	9.48	20.28	25.32	35.88	0.00	42.36	34.68	25.56	44.52	34.80	45.48	39.84
22	22.08	32.52	50.04	28.68	36.00	29.88	20.16	12.96	38.52	28.92	33.48	37.20	22.08	37.08	28.80	14.16	43.44	35.52	21.48	32.28	27.48	42.36	0.00	14.52	19.44	41.40	9.60	22.68	41.04
23	8.04	17.52	35.04	16.20	21.00	17.64	29.88	6.84	26.52	15.72	25.80	24.00	8.88	29.40	21.12	7.44	34.44	27.84	14.40	19.08	12.48	34.68	14.52	0.00	18.48	26.40	4.92	11.16	26.16
24	26.52	30.12	50.88	16.44	36.84	36.12	11.40	22.80	42.36	20.28	14.04	42.48	18.00	20.28	15.00	11.04	27.36	21.72	8.28	23.64	28.32	25.56	19.44	18.48	0.00	42.24	17.64	29.64	42.00
25	20.28	12.60	13.92	29.04	6.84	14.16	52.44	29.40	8.64	24.00	43.08	20.28	24.96	39.24	33.60	33.24	42.96	35.04	33.96	20.64	13.20	44.52	41.40	26.40	42.24	0.00	31.80	21.36	4.68
26	12.96	22.92	40.44	19.80	26.40	22.56	22.80	5.16	31.92	19.32	25.92	28.92	12.48	29.52	21.24	6.60	35.88	27.96	14.52	22.68	17.88	34.80	9.60	4.92	17.64	31.80	0.00	14.88	31.56
27	5.40	16.68	32.76	27.36	14.52	7.20	37.68	9.72	15.84	22.68	36.96	13.44	18.96	40.20	31.92	18.60	45.60	37.68	25.56	21.84	11.64	45.48	22.68	11.16	29.64	21.36	14.88	0.00	23.88
28	20.04	9.48	9.24	24.60	11.64	22.20	52.20	29.16	13.32	19.56	38.64	28.56	24.72	34.56	29.16	33.00	38.28	30.36	33.72	16.20	12.96	39.84	41.04	26.16	42.00	4.68	31.56	23.88	0.00

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 22: Tiempos de viaje para el dron desde el centro de distribución hacia cada nodo con 16 clientes en minutos.

Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
d' (min)	-	-	18.2	-	30	16	26.8	-	-	-	-	14	-	-	-	24.2

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 23: Tiempos de viaje para el dron desde el centro de distribución hacia cada nodo con 20 clientes en minutos.

Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	
d' (min)	-	-	18.2	-	31	22	26	-	-	31	13.6	-	-	-	-	-	-	-	34	-	-

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 24: Tiempos de viaje para el dron desde el centro de distribución hacia cada nodo con 23 clientes en minutos.

Nodo	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
d' (min)	-	37.4	18.2	30	16	26	26.8	-	37	-	14	-	-	-	10.8	-	-	-	-	35	-	38.4	24.2

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 25: Tiempos de viaje para el dron desde el centro de distribución hacia cada nodo con 27 clientes en minutos.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27
d'	6.8	16.4	27.2	36.0	10.4	30.4	-	11.6	24.0	29.8	-	-	20.6	33.6	-	16.4	19.0	-	23.0	22.2	13.0	-	12.0	17.2	27.8	-	19.4

Fuente: Elaboración propia.

Tabla 26: Tiempos de viaje para el dron desde el centro de distribución hacia cada nodo con 28 clientes en minutos.

N	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25	26	27	28
d'	21.4	-	38.0	24.8	16.0	-	15.2	30.4	31.4	-	26.6	22.6	-	-	25.8	-	-	37.6	30.0	13.0	-	36.8	13.4	-	33.8	21.6	9.0	33.4

Fuente: Elaboración propia.

7.2 Anexo A: Lenguaje AMPL Modelo MTZ

```

param C:= 16; #número de clientes (se modifica dependiendo de la base de
datos)

set N:= 1..C;
set N0:= 0..C;
set I:= 0..C;
set J:= 0..C;
set M:= 1..4; #Conjunto de drones a disposición (se modifica dependiendo de
la instancia)

param dp{i in N};

set Nd:={i in N: dp[i]<>0};
set Nnd:={i in N: dp[i]=0};

param d{i in I,j in J};
param Max:=C+1;

var x{i in I,j in J} >=0, binary;
var z{i in N0} >=0, binary;
var y{i in N, m in M} >=0, binary;
var u{i in N0} >=0, integer;
var T >=0;

minimize TiempoTotal: T;

subject to Radicional{m in M}: sum{i in N} y[i,m]<=1;
subject to r1: T >= sum{i in I, j in J} d[i,j]*x[i,j];
subject to r2{m in M}: T >= sum{i in N} dp[i]*y[i,m];
subject to r4{i in N0}: sum{j in J} x[i,j]=z[i];
subject to r5{i in N}: sum{m in M} y[i,m]=1-z[i];
subject to r6: sum{j in J} x[0,j] <= 1;
subject to r7{i in N}: sum{j in J} x[i,j]= sum{k in I} x[k,i];

```

```

subject to r8: u[0]=1;
subject to r9{i in N}: u[i] >= 2;
subject to r10{i in N}: u[i] <= sum{j in N0} z[j];
subject to r11{i in N, j in N}: u[i]-u[j]+1 <= (Max-1)*(1-x[i,j]);

subject to ra{i in N0}: x[i,i]=0;
subject to ray{i in Nnd, m in M}: y[i,m]=0;
subject to raz{i in Nnd}: z[i]=1;

```

7.3 Anexo B: Lenguaje AMPL Modelo F1

```

param C:= 16; #número de clientes (se modifica dependiendo de la base de
datos)

set N:= 1..C;
set N0:= 0..C;
set I:= 0..C;
set J:= 0..C;
set M:= 1..4; #Conjunto de drones a disposición (se modifica dependiendo de
la instancia)

param dp{i in N};

set Nd:={i in N: dp[i]<>0};
set Nnd:={i in N: dp[i]=0};

param d{i in I, j in J};
param Max:=C+1;;

var x{i in I, j in J} >=0, binary;
var z{i in N0} >=0, binary;
var y{i in N, m in M} >=0, binary;
var f{i in I, j in J} >=0;
var T >=0;

minimize TiempoTotal: T;

subject to Radicional{m in M}: sum{i in N} y[i,m]<=1;
subject to r1: T >= sum{i in I, j in J} d[i,j]*x[i,j];
subject to r2{m in M}: T >= sum{i in N} dp[i]*y[i,m];
subject to r4{i in N0}: sum{j in J} x[i,j]=z[i];
subject to r5{i in N}: sum{m in M} y[i,m]=1-z[i];
subject to r6: sum{j in J} x[0,j] <= 1;
subject to r7{i in N}: sum{j in J} x[i,j]= sum{k in I} x[k,i];

subject to r8{i in I, j in J}: f[i,j] <= (Max-1)*x[i,j];
subject to r9: sum{j in J} f[0,j] <= sum{k in N0} z[k] -1;
subject to r10{j in N}: sum{i in N0} (f[i,j]-f[j,i])=z[j];

subject to ra{i in N0}: x[i,i]=0;
subject to ray{i in Nnd, m in M}: y[i,m]=0;

```

```
subject to raz{i in Nnd}: z[i]=1;
```

7.4 Anexo C: Lenguaje AMPL Modelo F2

```
param C:= 16; #número de clientes (se modifica dependiendo de la base de
datos)

set N:= 1..C;
set N0:= 0..C;
set I:= 0..C;
set J:= 0..C;
set M:= 1..4; #Conjunto de drones a disposición (se modifica dependiendo de
la instancia)

param dp{i in N};

set Nd:={i in N: dp[i]<>0};
set Nnd:={i in N: dp[i]=0};

param d{i in I,j in J};
param Max:=C+1;;

var x{i in I,j in J} >=0, binary;
var z{i in N0} >=0, binary;
var y{i in N, m in M} >=0, binary;
var f{i in I, j in J} >=0;
var g{i in I, j in J} >=0;
var T >=0;

minimize TiempoTotal: T;

subject to Radicional{m in M}: sum{i in N} y[i,m]<=1;
subject to r1: T >= sum{i in I, j in J} d[i,j]*x[i,j];
subject to r2{m in M}: T >= sum{i in N} dp[i]*y[i,m];
subject to r4{i in N0}: sum{j in J} x[i,j]=z[i];
subject to r5{i in N}: sum{m in M} y[i,m]=1-z[i];
subject to r6: sum{j in J} x[0,j] <= 1;
subject to r7{i in N}: sum{j in J} x[i,j]= sum{k in I} x[k,i];

subject to r8: sum{j in J}(f[0,j]-f[j,0]) = sum{k in N0}z[k] - 1;
subject to r9{i in N}: sum{j in J}(f[i,j]-f[j,i])= -z[i];
subject to r10: sum{j in J}(g[0,j]-g[j,0]) = 1 - sum{k in N0}z[k];
subject to r11{i in N}: sum{j in J}(g[i,j]-g[j,i])= z[i];
subject to r12{i in N0,j in N0}: f[i,j]+g[i,j]<= (Max -1)*x[i,j];
subject to r13{i in N0}: sum{j in N0}(f[i,j]+g[i,j]) <= (Max -1)*(sum{k in N0}
z[k]);

subject to ra{i in N0}: x[i,i]=0;
subject to ray{i in Nnd,m in M}: y[i,m]=0;
subject to raz{i in Nnd}: z[i]=1;
```

7.5 Anexo D: Lenguaje AMPL Base de datos de 16 clientes

```

param d:
  0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10     11
  12     13     14     15     16:=
0      0.00   75.96  30.84  10.92  49.44  18.00   9.60   16.08  31.08  60.60  42.36
      38.88   8.40   25.32  32.16  29.52  14.52
1      75.96   0.00   46.80  79.32  27.24  58.56  68.64  63.60  66.60  34.68  33.84
      76.56  68.04  55.92  50.40  89.40  62.16
2      30.84  46.80   0.00   27.36  20.28  13.44  23.52  18.48  44.64  31.44  13.20
      52.44  22.92  8.88   6.36   56.64  17.04
3      10.92  79.32  27.36   0.00   45.96  14.40   9.24   12.60  21.00  57.12  38.88
      28.80  3.24   21.84  28.68  28.44  10.08
4      49.44  27.24  20.28  45.96   0.00   32.04  42.12  37.08  40.56  23.52  7.32
      50.52  41.52  29.16  23.88  63.36  35.64
5      18.00  58.56  13.44  14.40  32.04   0.00   7.56   4.08   31.68  43.20  24.96
      39.48  9.96   12.60  14.76  43.68  4.20
6      9.60   68.64  23.52  9.24   42.12  7.56   0.00   3.48   27.84  53.28  35.04
      35.64  5.64   18.00  24.84  39.84  3.48
7      16.08  63.60  18.48  12.60  37.08  4.08   3.48   0.00   29.88  48.24  30.00
      37.68  8.16   12.96  19.80  41.88  4.32
8      31.08  66.60  44.64  21.00  40.56  31.68  27.84  29.88  0.00   59.40  42.24
      11.40  22.68  39.12  45.96  24.24  28.32
9      60.60  34.68  31.44  57.12  23.52  43.20  53.28  48.24  59.40  0.00   18.48
      69.36  52.68  40.32  28.80  82.20  46.80
10     42.36  33.84  13.20  38.88  7.32   24.96  35.04  30.00  42.24  18.48  0.00
      52.20  34.44  22.08  16.80  65.04  28.56
11     38.88  76.56  52.44  28.80  50.52  39.48  35.64  37.68  11.40  69.36  52.20
      0.00   30.48  46.92  53.76  18.84  36.12
12     8.40   68.04  22.92  3.24   41.52  9.96   5.64   8.16   22.68  52.68  34.44
      30.48  0.00   17.40  24.24  34.68  6.60
13     25.32  55.92  8.88   21.84  29.16  12.60  18.00  12.96  39.12  40.32  22.08
      46.92  17.40  0.00   6.84   51.12  11.52
14     32.16  50.40  6.36   28.68  23.88  14.76  24.84  19.80  45.96  28.80  16.80
      53.76  24.24  6.84   0.00   57.96  18.36
15     29.52  89.40  56.64  28.44  63.36  43.68  39.84  41.88  24.24  82.20  65.04
      18.84  34.68  51.12  57.96  0.00   40.32
16     14.52  62.16  17.04  10.08  35.64  4.20   3.48   4.32   28.32  46.80  28.56
      36.12  6.60   11.52  18.36  40.32  0.00;

```

```

param dp:=
1      0
2      0
3      18.2
4      0
5      30
6      16
7      26.8
8      0
9      0
10     0
11     0
12     14
13     0

```

14 0
 15 0
 16 24.2;

7.6 Anexo E: Lenguaje AMPL Base de datos de 20 clientes

param d:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
0	0.00	61.20	76.20	10.92	46.20	18.60	13.20	15.60	58.80	44.40	18.60	
	8.16	73.20	78.60	57.60	31.80	30.60	54.00	20.40	28.80	45.60		
1	61.20	0.00	42.60	49.80	70.20	57.00	57.60	60.00	72.60	38.40	45.60	
	52.80	43.20	28.20	9.72	57.60	52.80	32.40	53.40	34.80	16.80		
2	76.20	42.60	0.00	72.60	46.80	59.40	68.40	64.80	35.40	84.00	76.80	
	69.00	84.60	70.20	52.20	50.40	90.60	75.00	90.00	70.80	59.40		
3	10.92	49.80	72.60	0.00	42.00	14.40	9.36	11.64	55.20	33.60	7.56	
	3.24	62.40	66.60	45.60	28.20	28.20	41.40	19.20	16.80	33.60		
4	46.20	70.20	46.80	42.00	0.00	28.80	38.40	34.20	14.40	70.80	51.60	
	38.40	100.20	90.00	69.00	15.00	78.00	79.20	59.40	57.60	57.60		
5	18.60	57.00	59.40	14.40	28.80	0.00	11.52	4.32	42.00	43.80	24.00	
	10.92	72.60	73.80	52.80	15.00	44.40	51.60	31.80	30.60	40.80		
6	13.20	57.60	68.40	9.36	38.40	11.52	0.00	3.48	51.00	42.00	19.20	
	5.76	70.80	75.00	54.60	24.00	38.40	50.40	26.40	24.60	42.00		
7	15.60	60.00	64.80	11.64	34.20	4.32	3.48	0.00	46.80	44.40	21.00	
	8.04	73.20	77.40	55.80	19.80	42.00	52.80	28.80	26.40	44.40		
8	58.80	72.60	35.40	55.20	14.40	42.00	51.00	46.80	0.00	75.00	64.20	
	51.60	103.80	93.00	72.00	27.60	81.60	82.80	72.00	61.80	60.60		
9	44.40	38.40	84.00	33.60	70.80	43.80	42.00	44.40	75.00	0.00	28.80	
	36.00	30.00	34.20	29.40	57.00	18.00	9.24	28.20	18.00	22.20		
10	18.60	45.60	76.80	7.56	51.60	24.00	19.20	21.00	64.20	28.80	0.00	
	10.80	57.60	61.80	41.40	37.20	21.00	37.20	15.00	12.00	28.80		
11	8.16	52.80	69.00	3.24	38.40	10.92	5.76	8.04	51.60	36.00	10.80	
	0.00	65.40	70.20	49.80	24.60	31.80	45.60	20.40	20.40	37.20		
12	73.20	43.20	84.60	62.40	100.20	72.60	70.80	73.20	103.80	30.00	57.60	
	65.40	0.00	22.80	35.40	85.80	48.00	21.60	58.20	46.80	41.40		
13	78.60	28.20	70.20	66.60	90.00	73.80	75.00	77.40	93.00	34.20	61.80	
	70.20	22.80	0.00	20.40	78.00	52.20	25.80	63.00	51.00	33.60		
14	57.60	9.72	52.20	45.60	69.00	52.80	54.60	55.80	72.00	29.40	41.40	
	49.80	35.40	20.40	0.00	57.00	46.20	22.80	48.60	30.60	12.60		
15	31.80	57.60	50.40	28.20	15.00	15.00	24.00	19.80	27.60	57.00	37.20	
	24.60	85.80	78.00	57.00	0.00	58.20	65.40	45.00	47.40	45.60		
16	30.60	52.80	90.60	28.20	78.00	44.40	38.40	42.00	81.60	18.00	21.00	
	31.80	48.00	52.20	46.20	58.20	0.00	27.00	10.44	24.60	33.60		
17	54.00	32.40	75.00	41.40	79.20	51.60	50.40	52.80	82.80	9.24	37.20	
	45.60	21.60	25.80	22.80	65.40	27.00	0.00	37.80	26.40	19.80		
18	20.40	53.40	90.00	19.20	59.40	31.80	26.40	28.80	72.00	28.20	15.00	
	20.40	58.20	63.00	48.60	45.00	10.44	37.80	0.00	18.60	36.60		
19	28.80	34.80	70.80	16.80	57.60	30.60	24.60	26.40	61.80	18.00	12.00	
	20.40	46.80	51.00	30.60	47.40	24.60	26.40	18.60	0.00	18.00		
20	45.60	16.80	59.40	33.60	57.60	40.80	42.00	44.40	60.60	22.20	28.80	
	37.20	41.40	33.60	12.60	45.60	33.60	19.80	36.60	18.00	0.00;		

```

param dp:=
1 0
2 0
3 18.2
4 0
5 31
6 22
7 26
8 0
9 0
10 31
11 13.6
12 0
13 0
14 0
15 0
16 0
17 0
18 34
19 0
20 0;

```

7.7 Anexo F: Lenguaje AMPL Base de datos de 23 clientes

```

param d:
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11
12 13 14 15 16 17 18 19 20 21 22
23:=
0 0.00 30.84 22.44 10.92 18.00 9.60 15.60 16.08 29.16 22.20 25.68
8.40 32.64 26.28 35.16 6.48 25.32 34.80 32.16 31.32 21.00 30.00
23.04 14.52
1 30.84 0.00 23.52 27.36 13.44 23.52 20.04 18.48 25.08 10.32 26.76
22.92 21.60 9.96 6.00 26.28 8.88 16.68 6.36 5.16 15.36 11.88
27.36 17.04
2 22.44 23.52 0.00 18.96 11.52 10.56 7.08 7.56 34.32 14.88 5.88
14.52 37.80 20.64 27.84 11.04 9.72 11.76 16.56 24.00 9.12 10.68
28.20 11.88
3 10.92 27.36 18.96 0.00 14.40 9.24 12.12 12.60 19.08 18.72 22.20
3.24 22.56 17.88 31.68 9.84 21.84 31.32 28.68 27.84 17.52 26.52
12.96 10.08
4 18.00 13.44 11.52 14.40 0.00 7.56 6.72 4.08 22.80 4.80 14.76
9.96 23.16 9.48 17.76 14.28 12.60 17.28 14.76 11.76 3.84 12.60
14.28 4.20
5 9.60 23.52 10.56 9.24 7.56 0.00 3.00 3.48 25.92 14.88 13.80
5.64 29.40 16.68 27.84 3.72 18.00 21.12 24.84 24.00 9.12 22.68
19.80 3.48
6 15.60 20.04 7.08 12.12 6.72 3.00 0.00 2.64 27.48 11.40 10.32
7.68 30.96 16.08 24.36 5.16 14.52 19.68 21.36 20.52 5.64 19.20
21.36 5.04

```

7	16.08	18.48	7.56	12.60	4.08	3.48	2.64	0.00	27.00	9.84	10.80
	8.16	27.36	13.44	22.80	6.96	12.96	16.32	19.80	15.72	3.60	17.64
	18.48	4.32									
8	29.16	25.08	34.32	19.08	22.80	25.92	27.48	27.00	0.00	24.84	37.56
	20.76	3.48	15.12	29.76	28.56	37.20	46.68	44.04	19.92	26.64	41.88
	8.52	26.40									
9	22.20	10.32	14.88	18.72	4.80	14.88	11.40	9.84	24.84	0.00	18.12
	14.28	19.08	7.44	14.64	17.64	4.44	13.92	10.32	10.80	6.72	9.12
	16.32	8.40									
10	25.68	26.76	5.88	22.20	14.76	13.80	10.32	10.80	37.56	18.12	0.00
	17.76	41.04	23.88	31.08	10.08	19.20	17.64	22.44	27.24	12.36	16.56
	31.44	15.12									
11	8.40	22.92	14.52	3.24	9.96	5.64	7.68	8.16	20.76	14.28	17.76
	0.00	25.08	18.36	27.24	6.36	17.40	26.88	24.24	23.40	13.08	22.08
	13.20	6.60									
12	32.64	21.60	37.80	22.56	23.16	29.40	30.96	27.36	3.48	19.08	41.04
	25.08	0.00	11.64	26.28	32.04	23.52	33.00	27.24	16.44	27.00	28.20
	8.88	29.88									
13	26.28	9.96	20.64	17.88	9.48	16.68	16.08	13.44	15.12	7.44	23.88
	18.36	11.64	0.00	16.08	20.40	11.88	21.36	15.60	8.28	12.48	16.56
	11.52	12.48									
14	35.16	6.00	27.84	31.68	17.76	27.84	24.36	22.80	29.76	14.64	31.08
	27.24	26.28	16.08	0.00	30.60	15.00	18.48	8.16	9.84	19.68	13.68
	31.68	21.36									
15	6.48	26.28	11.04	9.84	14.28	3.72	5.16	6.96	28.56	17.64	10.08
	6.36	32.04	20.40	30.60	0.00	20.76	22.80	27.60	26.76	11.88	25.44
	22.44	7.20									
16	25.32	8.88	9.72	21.84	12.60	18.00	14.52	12.96	37.20	4.44	19.20
	17.40	23.52	11.88	15.00	20.76	0.00	9.48	6.84	10.80	6.84	4.68
	21.84	11.52									
17	34.80	16.68	11.76	31.32	17.28	21.12	19.68	16.32	46.68	13.92	17.64
	26.88	33.00	21.36	18.48	22.80	9.48	0.00	10.32	21.12	13.44	4.80
	31.32	21.00									
18	32.16	6.36	16.56	28.68	14.76	24.84	21.36	19.80	44.04	10.32	22.44
	24.24	27.24	15.60	8.16	27.60	6.84	10.32	0.00	10.80	13.68	5.52
	28.68	18.36									
19	31.32	5.16	24.00	27.84	11.76	24.00	20.52	15.72	19.92	10.80	27.24
	23.40	16.44	8.28	9.84	26.76	10.80	21.12	10.80	0.00	16.08	16.32
	19.80	17.52									
20	21.00	15.36	9.12	17.52	3.84	9.12	5.64	3.60	26.64	6.72	12.36
	13.08	27.00	12.48	19.68	11.88	6.84	13.44	13.68	16.08	0.00	11.52
	18.12	5.64									
21	30.00	11.88	10.68	26.52	12.60	22.68	19.20	17.64	41.88	9.12	16.56
	22.08	28.20	16.56	13.68	25.44	4.68	4.80	5.52	16.32	11.52	0.00
	26.52	16.20									
22	23.04	27.36	28.20	12.96	14.28	19.80	21.36	18.48	8.52	16.32	31.44
	13.20	8.88	11.52	31.68	22.44	21.84	31.32	28.68	19.80	18.12	26.52
	0.00	20.28									
23	14.52	17.04	11.88	10.08	4.20	3.48	5.04	4.32	26.40	8.40	15.12
	6.60	29.88	12.48	21.36	7.20	11.52	21.00	18.36	17.52	5.64	16.20
	20.28	0.00;									

param dp:=
1 0.0

```

2      37.4
3      18.2
4      30.0
5      16.0
6      26.0
7      26.8
8      0.0
9      37.0
10     0.0
11     14.0
12     0.0
13     0.0
14     0.0
15     10.8
16     0.0
17     0.0
18     0.0
19     0.0
20     35.0
21     0.0
22     38.4
23     24.2;

```

7.8 Anexo G: Lenguaje AMPL Base de datos de 27 clientes

param d:

	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23
	24	25	26	27:=								
0	0.00	4.08	9.84	16.32	21.60	6.24	18.24	30.84	6.96	14.40	17.88	
	24.60	31.92	12.36	20.16	27.00	9.84	11.40	27.24	13.80	13.32	7.80	
	26.40	7.20	10.32	16.68	24.60	11.64						
1	4.08	0.00	14.88	18.36	10.68	23.64	13.92	27.12	25.32	4.92	5.88	
	17.76	17.76	24.48	17.04	16.44	21.12	10.44	18.00	24.48	7.80	13.44	
	18.48	30.96	12.60	8.52	12.36	15.48						
2	9.84	14.88	0.00	26.40	33.12	9.36	38.64	28.68	42.00	36.00	18.12	
	19.20	32.64	28.32	32.88	32.52	29.76	32.04	25.80	24.12	37.56	22.08	
	16.08	32.28	46.32	21.00	15.00	26.28						
3	16.32	18.36	26.40	0.00	20.76	16.32	23.04	13.20	13.68	23.04	14.28	
	14.40	7.20	6.96	8.28	15.48	11.52	4.08	10.32	7.20	27.24	12.24	
	4.68	24.96	19.44	21.60	21.84	20.04						
4	21.60	10.68	33.12	20.76	0.00	11.40	19.92	6.12	29.28	15.72	28.56	
	33.72	6.00	14.28	24.24	26.16	33.00	21.00	24.12	29.40	15.72	10.56	
	32.16	15.72	5.04	18.00	35.52	6.12						
5	6.24	23.64	9.36	16.32	11.40	0.00	6.24	16.68	11.76	28.56	13.32	
	24.60	36.00	8.04	17.52	24.36	29.04	36.24	19.44	25.68	31.92	15.96	
	5.52	33.36	18.00	6.72	13.68	33.48						
6	18.24	13.92	38.64	23.04	19.92	6.24	0.00	28.44	17.28	40.56	8.64	
	20.28	13.32	25.08	29.88	27.72	14.64	25.92	30.12	14.52	19.80	24.36	
	20.64	36.96	17.64	24.72	39.36	21.36						

7	30.84	27.12	28.68	13.20	6.12	16.68	28.44	0.00	7.68	4.68	24.00
	18.96	5.76	10.92	32.40	14.52	19.80	17.52	27.60	34.80	10.08	21.84
	29.04	12.48	15.96	27.24	18.12	20.28					
8	6.96	25.32	42.00	13.68	29.28	11.76	17.28	7.68	0.00	12.84	23.04
	6.84	33.72	19.20	31.20	38.64	10.80	19.20	28.80	31.08	37.80	24.96
	29.04	34.32	20.28	8.16	37.08	20.64					
9	14.40	4.92	36.00	23.04	15.72	28.56	40.56	4.68	12.84	0.00	17.88
	16.08	18.48	16.68	12.48	24.00	18.24	10.20	3.00	10.56	11.16	18.36
	12.48	8.64	14.04	6.12	23.40	16.80					
10	17.88	5.88	18.12	14.28	28.56	13.32	8.64	24.00	23.04	17.88	0.00
	30.96	22.92	35.16	10.56	22.44	25.92	7.56	26.28	19.08	9.72	10.56
	12.72	17.16	8.16	7.68	17.52	38.40					
11	24.60	17.76	19.20	14.40	33.72	24.60	20.28	18.96	6.84	16.08	30.96
	0.00	8.52	19.80	14.88	32.88	17.28	26.64	41.40	13.56	23.04	29.16
	34.56	41.64	23.52	30.96	37.32	20.88					
12	31.92	17.76	32.64	7.20	6.00	36.00	13.32	5.76	33.72	18.48	22.92
	8.52	0.00	13.80	9.96	20.16	13.68	6.72	18.00	21.12	9.84	8.52
	8.52	15.36	22.68	6.84	10.32	17.28					
13	12.36	24.48	28.32	6.96	14.28	8.04	25.08	10.92	19.20	16.68	35.16
	19.80	13.80	0.00	30.96	25.44	31.20	16.32	23.52	30.48	4.32	24.12
	15.24	12.60	3.84	6.12	19.80	7.32					
14	20.16	17.04	32.88	8.28	24.24	17.52	29.88	32.40	31.20	12.48	10.56
	14.88	9.96	30.96	0.00	24.12	18.12	27.00	11.28	16.32	23.64	10.92
	18.36	10.92	5.88	6.72	13.20	12.72					
15	27.00	16.44	32.52	15.48	26.16	24.36	27.72	14.52	38.64	24.00	22.44
	32.88	20.16	25.44	24.12	0.00	15.24	5.76	26.16	9.36	6.36	11.76
	22.80	15.36	15.12	7.68	19.08	25.80					
16	9.84	21.12	29.76	11.52	33.00	29.04	14.64	19.80	10.80	18.24	25.92
	17.28	13.68	31.20	18.12	15.24	0.00	36.00	31.32	33.84	22.32	29.16
	36.60	5.64	28.20	18.84	18.60	7.32					
17	11.40	10.44	32.04	4.08	21.00	36.24	25.92	17.52	19.20	10.20	7.56
	26.64	6.72	16.32	27.00	5.76	36.00	0.00	28.68	24.36	27.72	17.52
	21.96	30.36	7.92	21.12	12.00	12.60					
18	27.24	18.00	25.80	10.32	24.12	19.44	30.12	27.60	28.80	3.00	26.28
	41.40	18.00	23.52	11.28	26.16	31.32	28.68	0.00	21.48	13.44	28.20
	6.24	12.72	18.00	15.24	18.24	13.56					
19	13.80	24.48	24.12	7.20	29.40	25.68	14.52	34.80	31.08	10.56	19.08
	13.56	21.12	30.48	16.32	9.36	33.84	24.36	21.48	0.00	18.36	18.24
	16.20	19.68	14.28	26.40	19.56	9.48					
20	13.32	7.80	37.56	27.24	15.72	31.92	19.80	10.08	37.80	11.16	9.72
	23.04	9.84	4.32	23.64	6.36	22.32	27.72	13.44	18.36	0.00	10.08
	15.24	10.80	23.40	10.80	24.12	28.32					
21	7.80	13.44	22.08	12.24	10.56	15.96	24.36	21.84	24.96	18.36	10.56
	29.16	8.52	24.12	10.92	11.76	29.16	17.52	28.20	18.24	10.08	0.00
	34.92	28.56	35.52	17.76	27.12	32.76					
22	26.40	18.48	16.08	4.68	32.16	5.52	20.64	29.04	29.04	12.48	12.72
	34.56	8.52	15.24	18.36	22.80	36.60	21.96	6.24	16.20	15.24	34.92
	0.00	18.60	8.88	34.32	15.60	13.44					
23	7.20	30.96	32.28	24.96	15.72	33.36	36.96	12.48	34.32	8.64	17.16
	41.64	15.36	12.60	10.92	15.36	5.64	30.36	12.72	19.68	10.80	28.56
	18.60	0.00	9.00	4.56	21.36	15.60					
24	10.32	12.60	46.32	19.44	5.04	18.00	17.64	15.96	20.28	14.04	8.16
	23.52	22.68	3.84	5.88	15.12	28.20	7.92	18.00	14.28	23.40	35.52
	8.88	9.00	0.00	24.60	14.40	33.72					

25	16.68	8.52	21.00	21.60	18.00	6.72	24.72	27.24	8.16	6.12	7.68
	30.96	6.84	6.12	6.72	7.68	18.84	21.12	15.24	26.40	10.80	17.76
	34.32	4.56	24.60	0.00	17.40	25.56					
26	24.60	12.36	15.00	21.84	35.52	13.68	39.36	18.12	37.08	23.40	17.52
	37.32	10.32	19.80	13.20	19.08	18.60	12.00	18.24	19.56	24.12	27.12
	15.60	21.36	14.40	17.40	0.00	11.28					
27	11.64	15.48	26.28	20.04	6.12	33.48	21.36	20.28	20.64	16.80	38.40
	20.88	17.28	7.32	12.72	25.80	7.32	12.60	13.56	9.48	28.32	32.76
	13.44	15.60	33.72	25.56	11.28	0.00;					

```

param dp:=
1      6.8
2      16.4
3      27.2
4      36.0
5      10.4
6      30.4
7      0.0
8      11.6
9      24.0
10     29.8
11     0.0
12     0.0
13     20.6
14     33.6
15     0.0
16     16.4
17     19.0
18     0.0
19     23.0
20     22.2
21     13.0
22     0.0
23     12.0
24     17.2
25     27.8
26     0.0
27     19.4;

```

7.9 Anexo H: Lenguaje AMPL Base de datos de 28 clientes

```

param d:
      0      1      2      3      4      5      6      7      8      9      10     11
12    13     14     15     16     17     18     19     20     21     22     23
24    25     26     27     28:=
0     0.00   12.84  28.92  22.80  14.88  9.60   37.92  9.12   18.24  18.84  33.96
      15.96  13.56  35.64  27.36  15.48  41.76  33.12  22.56  18.00  7.80   40.92
      22.08  8.04   26.52  20.28  12.96  5.40   20.04

```

1	12.84	0.00	17.76	16.44	10.56	15.24	40.32	21.96	16.08	11.40	30.48
	21.60	12.12	28.08	21.00	21.12	31.80	23.88	21.84	8.04	5.04	33.36
	32.52	17.52	30.12	12.60	22.92	16.68	9.48				
2	28.92	17.76	0.00	44.88	20.52	31.08	61.08	38.04	26.04	27.84	58.92
	37.44	33.60	46.92	49.44	41.88	50.64	42.72	42.60	24.48	21.84	52.20
	50.04	35.04	50.88	13.92	40.44	32.76	9.24				
3	22.80	16.44	44.88	0.00	24.24	28.08	26.64	23.04	29.76	5.04	14.04
	34.44	9.48	12.84	4.56	14.52	18.24	10.32	8.16	8.40	16.44	18.12
	28.68	16.20	16.44	29.04	19.80	27.36	24.60				
4	14.88	10.56	20.52	24.24	0.00	7.32	47.04	24.24	5.52	19.20	38.28
	13.44	19.56	38.64	28.80	27.84	37.68	34.44	28.56	18.60	7.80	43.92
	36.00	21.00	36.84	6.84	26.40	14.52	11.64				
5	9.60	15.24	31.08	28.08	7.32	0.00	46.32	16.92	8.64	20.04	42.12
	6.60	18.84	39.72	32.64	27.12	43.44	35.52	27.84	19.68	10.20	45.00
	29.88	17.64	36.12	14.16	22.56	7.20	22.20				
6	37.92	40.32	61.08	26.64	47.04	46.32	0.00	27.96	52.56	30.48	24.24
	52.68	28.20	30.48	25.20	22.44	37.56	31.92	18.48	33.84	38.52	35.76
	20.16	29.88	11.40	52.44	22.80	37.68	52.20				
7	9.12	21.96	38.04	23.04	24.24	16.92	27.96	0.00	25.56	22.56	32.64
	23.16	15.72	36.24	27.96	11.76	41.28	34.68	21.24	25.92	16.92	41.52
	12.96	6.84	22.80	29.40	5.16	9.72	29.16				
8	18.24	16.08	26.04	29.76	5.52	8.64	52.56	25.56	0.00	24.72	43.80
	10.68	25.08	44.16	34.32	33.36	43.20	39.96	34.08	24.12	13.32	49.44
	38.52	26.52	42.36	8.64	31.92	15.84	13.32				
9	18.84	11.40	27.84	5.04	19.20	20.04	30.48	22.56	24.72	0.00	19.08
	26.40	6.84	17.88	9.60	15.84	23.16	15.24	12.00	3.36	11.40	23.16
	28.92	15.72	20.28	24.00	19.32	22.68	19.56				
10	33.96	30.48	58.92	14.04	38.28	42.12	24.24	32.64	43.80	19.08	0.00
	48.48	21.12	12.72	9.48	19.32	19.80	16.92	11.40	22.44	30.48	12.36
	33.48	25.80	14.04	43.08	25.92	36.96	38.64				
11	15.96	21.60	37.44	34.44	13.44	6.60	52.68	23.16	10.68	26.40	48.48
	0.00	25.20	46.08	39.00	33.48	49.80	41.88	34.20	26.04	16.56	51.36
	37.20	24.00	42.48	20.28	28.92	13.44	28.56				
12	13.56	12.12	33.60	9.48	19.56	18.84	28.20	15.72	25.08	6.84	21.12
	25.20	0.00	22.32	14.04	9.00	27.72	19.80	9.72	10.20	11.04	27.60
	22.08	8.88	18.00	24.96	12.48	18.96	24.72				
13	35.64	28.08	46.92	12.84	38.64	39.72	30.48	36.24	44.16	17.88	12.72
	46.08	22.32	0.00	8.28	22.92	7.08	4.20	15.00	20.04	30.60	5.28
	37.08	29.40	20.28	39.24	29.52	40.20	34.56				
14	27.36	21.00	49.44	4.56	28.80	32.64	25.20	27.96	34.32	9.60	9.48
	39.00	14.04	8.28	0.00	14.64	14.64	6.72	6.72	12.96	21.00	13.56
	28.80	21.12	15.00	33.60	21.24	31.92	29.16				
15	15.48	21.12	41.88	14.52	27.84	27.12	22.44	11.76	33.36	15.84	19.32
	33.48	9.00	22.92	14.64	0.00	29.28	21.36	7.92	19.20	19.32	28.20
	14.16	7.44	11.04	33.24	6.60	18.60	33.00				
16	41.76	31.80	50.64	18.24	37.68	43.44	37.56	41.28	43.20	23.16	19.80
	49.80	27.72	7.08	14.64	29.28	0.00	7.92	21.36	23.76	34.32	9.24
	43.44	34.44	27.36	42.96	35.88	45.60	38.28				
17	33.12	23.88	42.72	10.32	34.44	35.52	31.92	34.68	39.96	15.24	16.92
	41.88	19.80	4.20	6.72	21.36	7.92	0.00	13.44	15.84	26.40	9.48
	35.52	27.84	21.72	35.04	27.96	37.68	30.36				
18	22.56	21.84	42.60	8.16	28.56	27.84	18.48	21.24	34.08	12.00	11.40
	34.20	9.72	15.00	6.72	7.92	21.36	13.44	0.00	15.36	20.04	20.28
	21.48	14.40	8.28	33.96	14.52	25.56	33.72				

19	18.00	8.04	24.48	8.40	18.60	19.68	33.84	25.92	24.12	3.36	22.44
	26.04	10.20	20.04	12.96	19.20	23.76	15.84	15.36	0.00	10.56	25.32
	32.28	19.08	23.64	20.64	22.68	21.84	16.20				
20	7.80	5.04	21.84	16.44	7.80	10.20	38.52	16.92	13.32	11.40	30.48
	16.56	11.04	30.60	21.00	19.32	34.32	26.40	20.04	10.56	0.00	35.88
	27.48	12.48	28.32	13.20	17.88	11.64	12.96				
21	40.92	33.36	52.20	18.12	43.92	45.00	35.76	41.52	49.44	23.16	12.36
	51.36	27.60	5.28	13.56	28.20	9.24	9.48	20.28	25.32	35.88	0.00
	42.36	34.68	25.56	44.52	34.80	45.48	39.84				
22	22.08	32.52	50.04	28.68	36.00	29.88	20.16	12.96	38.52	28.92	33.48
	37.20	22.08	37.08	28.80	14.16	43.44	35.52	21.48	32.28	27.48	42.36
	0.00	14.52	19.44	41.40	9.60	22.68	41.04				
23	8.04	17.52	35.04	16.20	21.00	17.64	29.88	6.84	26.52	15.72	25.80
	24.00	8.88	29.40	21.12	7.44	34.44	27.84	14.40	19.08	12.48	34.68
	14.52	0.00	18.48	26.40	4.92	11.16	26.16				
24	26.52	30.12	50.88	16.44	36.84	36.12	11.40	22.80	42.36	20.28	14.04
	42.48	18.00	20.28	15.00	11.04	27.36	21.72	8.28	23.64	28.32	25.56
	19.44	18.48	0.00	42.24	17.64	29.64	42.00				
25	20.28	12.60	13.92	29.04	6.84	14.16	52.44	29.40	8.64	24.00	43.08
	20.28	24.96	39.24	33.60	33.24	42.96	35.04	33.96	20.64	13.20	44.52
	41.40	26.40	42.24	0.00	31.80	21.36	4.68				
26	12.96	22.92	40.44	19.80	26.40	22.56	22.80	5.16	31.92	19.32	25.92
	28.92	12.48	29.52	21.24	6.60	35.88	27.96	14.52	22.68	17.88	34.80
	9.60	4.92	17.64	31.80	0.00	14.88	31.56				
27	5.40	16.68	32.76	27.36	14.52	7.20	37.68	9.72	15.84	22.68	36.96
	13.44	18.96	40.20	31.92	18.60	45.60	37.68	25.56	21.84	11.64	45.48
	22.68	11.16	29.64	21.36	14.88	0.00	23.88				
28	20.04	9.48	9.24	24.60	11.64	22.20	52.20	29.16	13.32	19.56	38.64
	28.56	24.72	34.56	29.16	33.00	38.28	30.36	33.72	16.20	12.96	39.84
	41.04	26.16	42.00	4.68	31.56	23.88	0.00;				

param dp:=
1 21.4
2 0.0
3 38.0
4 24.8
5 16.0
6 0.0
7 15.2
8 30.4
9 31.4
10 0.0
11 26.6
12 22.6
13 0.0
14 0.0
15 25.8
16 0.0
17 0.0
18 37.6
19 30.0
20 13.0
21 0.0
22 36.8
23 13.4

24	0.0
25	33.8
26	21.6
27	9.0
28	33.4;