



UNIVERSIDAD TECNICA FEDERICO SANTA MARIA

Memoria de Título

Diseño e implementación de un algoritmo para la estimación de estados en sistemas no lineales: Aplicación al estado de carga en baterías de ion-litio

Memoria para optar al título de
Ingeniera Civil Electrónica

Alumna

Trinidad Asunción Castro Quiroz

Profesor Supervisor

Dr. Juan Carlos Agüero

Comisión Co-Referente

Dr. Angel Cedeño Nieto

Dr. César Silva Jiménez

23 de febrero de 2026, Valparaíso, Chile



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): Memoria o trabajo de título Tesis de Postgrado

Título del trabajo: Diseño e implementación de un algoritmo para la estimación de estados en sistemas no lineales: Aplicación al estado de carga en baterías de ion-litio

Nombre del candidato(a): Trinidad Asunción Castro Quiroz

Carrera / Grado: Ingeniería civil electrónica / Ingeniera civil electrónica

Campus: Casa central

Departamento: Electrónica

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, Juan Carlos Agüero Vasquez, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

6 meses 12 meses 2 años 3 años 5 años 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

Fecha: 23-02-2026

Firma: 

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: 23-02-2026

Firma: 

AGRADECIMIENTOS

La culminación de esta memoria marca el cierre de una etapa trascendental en mi vida. Este logro no es solo fruto de mi esfuerzo personal, sino el reflejo del apoyo incondicional de aquellas personas que llevo siempre en mi mente y corazón, a quienes dedico estas líneas.

Agradezco profundamente a mi familia, pilar fundamental que me dio la confianza para perseguir mis sueños. A mis padres, Mariela y Pablo, por su amor infinito y por enseñarme, con su propio ejemplo, el valor del esfuerzo y la resiliencia. A mis hermanos, Amalia y JP, por su compañía y ánimo inagotable; ustedes son mis mejores amigos y confidentes, el refugio donde siempre encontré risas en los momentos difíciles. A mis abuelos y tíos, por su sabiduría y ese cariño que, incluso a la distancia, me impulsó a dar lo mejor de mí. Dedico también un pensamiento especial a quienes ya no están físicamente, pero que sé que confiaron plenamente en que alcanzaría esta meta.

A mis amigos, a quienes considero mi segunda familia desde el primer año. Gracias por ayudarme a poner en perspectiva las preocupaciones, por acompañarme en la soledad y por hacer que mi paso por la universidad se sintiera más ligero. Una mención especial a Fiorella, quien sin ser sansana, se integró como una más en nuestras juntas y me acompañó incondicionalmente en este camino.

A mi pareja, Antonio, mi compañero y confidente. Gracias por tu paciencia infinita, por ser mi compañía incondicional en las largas noches de estudio y por celebrar mis logros con una emoción incluso mayor que la mía.

Expreso mi gratitud a mis profesores, Juan Carlos Agüero, Angel Cedeño y César Silva, quienes guiaron este proceso de investigación con rigor y cercanía, compartiendo su conocimiento y experiencia profesional.

Finalmente, agradecer al Centro Avanzado de Ingeniería Eléctrica y Electrónica ANID AC3E CIA250006, al proyecto Fondecyt ANID 3240181 del profesor Angel Cedeño, y al Proyecto Interno USM 2025 *PI-LIR_25_12*.

RESUMEN

La estimación precisa del estado de carga (SOC) en baterías de ion-litio es fundamental para la gestión energética y la seguridad en sistemas de alto desempeño. Sin embargo, la no linealidad de la relación entre la tensión en circuito abierto (OCV) y el SOC limita la efectividad de los métodos de filtrado clásicos. Este trabajo aborda dicho desafío mediante el diseño e implementación de un algoritmo de estimación basado en el filtro de suma de gaussianas (GSF), dando lugar a una versión modificada denominada en este trabajo GSF-M.

La metodología propuesta utiliza una aproximación lineal por tramos para modelar la no linealidad de la medición. La innovación clave consiste en representar las funciones indicatrices de cada tramo mediante mezclas de gaussianas, lo cual permite derivar expresiones analíticas cerradas durante la etapa de corrección del filtro bayesiano.

El desempeño del GSF-M se evalúa sobre un modelo eléctrico equivalente de una batería de ion-litio, utilizando tanto simulaciones como datos experimentales obtenidos mediante un emulador de celdas programable. Los resultados muestran que el GSF-M logra estimaciones más precisas que los métodos basados en Kalman, alcanzando un desempeño comparable al del filtro de partículas con aproximación PWL (PF-PWL), evidenciado por los bajos valores de error cuadrático medio en todos los escenarios.

En conjunto, los resultados confirman la validez del enfoque propuesto y su potencial aplicación en sistemas de gestión de baterías de ion-litio.

Palabras clave: Estimación de estado, batería de ion-litio, estado de carga (SOC), filtrado bayesiano, filtro de suma de gaussianas, aproximación lineal por tramos, mezcla de gaussianas.

ÍNDICE

AGRADECIMIENTOS	I
RESUMEN	II
ÍNDICE DE FIGURAS	VI
ABREVIACIONES	VII
1. INTRODUCCIÓN	1
1.1. Contexto	1
1.2. Motivación	1
1.3. Descripción del problema	2
1.3.1. El problema de estimación de estados	2
1.3.2. Particularidades del SOC en baterías de ion-litio	2
1.4. Estado del Arte	2
1.4.1. Modelos circuitales	2
1.4.2. Filtrado bayesiano	3
1.5. Contribuciones	4
1.6. Objetivos, Alcances y Limitaciones	4
1.7. Estructura del Documento	5
2. MODELAMIENTO DEL SISTEMA	6
2.1. Definición del Estado de Carga (SOC)	6
2.2. Modelos de Circuito Equivalente para Baterías	7
2.3. Modelo Rint en Espacio de Estados Discreto (Forma Wiener)	10
2.4. Caracterización de la No Linealidad OCV-SOC	11
2.5. Aproximación Lineal por Partes (PWLA) de la Curva OCV-SOC	12
2.6. Parámetros del Modelo Rint	13
	III

3. MARCO TEÓRICO DEL FILTRADO BAYESIANO	16
3.1. Filtrado bayesiano (marco general)	16
3.2. Algoritmos de estimación aproximados	18
3.2.1. Filtro de Kalman extendido (EKF)	18
3.2.2. Filtro de Kalman unscented (UKF)	19
3.2.3. Filtro de partículas (PF)	19
3.2.4. Filtro de suma de gaussianas (GSF)	20
3.2.4.1. Modelo de mezcla de gaussianas	20
3.2.4.2. Algoritmo de filtraje	20
4. DESARROLLO DEL GSF MODIFICADO	22
4.1. Aproximaciones adoptadas	23
4.2. Modelo del Sistema Escalar de Estudio	23
4.3. Formulación Bayesiana y Verosimilitud Aproximada	24
4.4. Modelado de la Verosimilitud con Indicatriz GMM	25
4.5. Algoritmo para el Sistema Escalar	25
4.6. Justificación Matemática: Preservación de la Estructura GMM	27
4.7. Reducción de mezclas gaussianas	29
5. APLICACIÓN DEL GSF MODIFICADO A LA ESTIMACIÓN DEL SOC	32
5.1. Modelo Dinámico	32
5.2. Filtro GSF modificado con entrada exógena	33
5.3. Implementación del Algoritmo	35
6. PRUEBAS Y RESULTADOS	38
6.1. Ajuste de la Función Indicatriz mediante Mezclas Gaussianas	38
6.2. Configuración de Simulación	42
6.3. Métricas de Evaluación	43
6.4. Resultados de Estimación	43
6.5. Análisis Cuantitativo	48
7. CONCLUSIONES	53
7.1. Resumen	53
7.2. Conclusiones	54
7.3. Trabajo Futuro	54
A. IMPLEMENTACIÓN EXPERIMENTAL	56
A.1. Descripción general del sistema	56
A.2. Configuración de la fuente DC programable	57

Resumen	V
A.3. Adquisición y registro de señales	57
A.4. Procedimiento experimental	59
A.5. Consideraciones adicionales	59
BIBLIOGRAFÍA	60

Índice de figuras

2.1. Esquema del modelo Rint para baterías de ion-litio.	8
2.2. Modelo ECM con múltiples redes RC.	9
2.3. Modelo de Thévenin (1RC) para baterías de ion-litio.	9
2.4. Curva OCV-SOC ajustada mediante un polinomio de noveno orden.	11
2.5. Aproximación lineal por partes de la curva OCV-SOC para $L = 10$	13
2.6. Aproximación lineal por partes de la curva OCV-SOC para $L = 50$	13
6.1. Aproximación de la función indicatriz mediante el método LSQ para distintos valores de $K = 5, 10, 15$	39
6.2. Aproximación de la función indicatriz mediante el método fitgmdist para distintos valores de $K = 5, 10, 15$	40
6.3. Comparación del error cuadrático medio entre los métodos LSQ y GMM.	40
6.4. Aproximación final de la función indicatriz mediante GMM.	41
6.5. Señales de corriente y voltaje empleadas en el Experimento 1.	44
6.6. Evolución del error de estimación del SOC en el Experimento 1.	45
6.7. Comparación de la evolución del error de estimación en el Experimento 1 para dos filtros de partículas.	46
6.8. Señales de corriente y voltaje empleadas en el Experimento 2.	46
6.9. Evolución del error de estimación del SOC en el Experimento 2.	47
6.10. Señales experimentales de corriente y voltaje utilizadas en el Experimento 3.	48
6.11. Evolución del error de estimación del SOC en el Experimento 3.	49
6.12. Evolución del SOC en el Experimento 3.	49
6.13. Comparación entre la densidad posterior verdadera y las aproximaciones obtenidas.	50
A.1. Diagrama esquemático del montaje experimental.	57
A.2. Diagrama de Simulink para adquisición y control en dSPACE MicroLabBox.	58

ABREVIACIONES

Mayúsculas

SOC	: state of charge
ECM	: equivalent circuit model
OCV	: open circuit voltage
EKF	: extended Kalman filter
EKF-PWL	: unscented Kalman filter with piecewise linear approximation
UKF	: unscented Kalman filter
UKF-PWL	: extended Kalman filter with piecewise linear approximation
PF	: particle filter
PF-PWL	: particle filter with piecewise linear approximation
GSF	: Gaussian sum filter
GSF-M	: modified Gaussian sum filter
GMM	: Gaussian mixture model
PWLA	: piecewise linear approximation
PWL	: piecewise linear
PDF	: probability density function
DC	: direct current
RMSE	: root mean square error

INTRODUCCIÓN

1.1. Contexto

La estimación de estados constituye una herramienta fundamental en el análisis y control de sistemas dinámicos, ya que permite inferir variables internas no directamente accesibles a partir de mediciones externas y de un modelo del sistema. Su relevancia se evidencia en diversas aplicaciones industriales, incluyendo el sistema estudiado en este trabajo. No obstante, la presencia de no linealidades y fenómenos dependientes del historial de operación dificulta la reconstrucción precisa del estado, motivando el desarrollo de técnicas de filtrado bayesiano no lineal capaces de manejar incertidumbre, variaciones de operación y modelos complejos.

1.2. Motivación

Una aplicación donde la estimación de estados es particularmente crítica es la determinación del estado de carga (SOC) en baterías de ion-litio. Estas baterías se utilizan ampliamente en dispositivos portátiles y son el pilar fundamental de la creciente industria de la electromovilidad a nivel global [1]. Conocer el SOC con precisión permite gestionar la energía disponible, prevenir condiciones de operación inseguras y extender la vida útil del sistema de almacenamiento.

El SOC no puede medirse directamente, ya que no existe un sensor que permita cuantificarlo de manera explícita. En la práctica, la tensión terminal depende de fenómenos como la temperatura, la histéresis y las dinámicas transitorias del voltaje asociadas al modelo interno, por lo que no mantiene una relación directa y única con el SOC. Por otra parte, el conteo de carga, aunque conceptualmente correcto, acumula errores de medición y

requiere conocer con precisión la capacidad de la celda, la cual varía con el envejecimiento. Estas dificultades están ampliamente documentadas en la literatura especializada [2] y hacen necesario el uso de métodos de estimación basados en modelos, capaces de ofrecer valores de SOC precisos y robustos incluso bajo condiciones reales de operación.

1.3. Descripción del problema

1.3.1. El problema de estimación de estados

La estimación de estados busca reconstruir variables internas de un sistema que no pueden medirse directamente, utilizando observaciones disponibles y un modelo matemático. Su importancia radica en aplicaciones donde el acceso a estas variables resulta costoso, lento o simplemente inviable. En la práctica, factores como no linealidades, ruido, incertidumbre de parámetros y variaciones de operación dificultan la estimación, requiriendo métodos capaces de mantener precisión y robustez frente a dichas condiciones. Estas dificultades se amplifican en sistemas como las baterías de ion-litio, donde el estado interno no es directamente observable y la relación entre variables medibles y el SOC es altamente no lineal.

1.3.2. Particularidades del SOC en baterías de ion-litio

El SOC corresponde a la relación entre la cantidad de energía disponible y la capacidad total de la batería. Sin embargo, no puede observarse de manera directa y debe inferirse mediante un modelo que relacione el estado electroquímico interno con variables medibles. Las baterías de ion-litio presentan una dinámica altamente no lineal influida por temperatura, resistencia interna, tasa de carga y descarga, degradación por ciclos e histéresis, fenómenos que afectan de forma distinta a la tensión superficial y al SOC real [2]. Esta disparidad entre magnitudes observables y estados internos vuelve especialmente compleja su estimación bajo condiciones reales.

1.4. Estado del Arte

1.4.1. Modelos circuitales

Los modelos de circuito equivalente (Equivalent Circuit Models, ECM) representan la batería mediante componentes eléctricos pasivos y fuentes dependientes del SOC. El modelo más simple consiste en una fuente de voltaje ideal en serie con una resistencia interna, mientras que modelos como el de Thévenin incluyen redes RC para describir la dinámica transitoria durante la carga y descarga [3]. En el Capítulo 2 se discutirán distintas variantes y se seleccionará el ECM más apropiado para este trabajo.

1.4.2. Filtrado bayesiano

El problema de estimación de estados consiste en reconstruir variables internas x a partir de observaciones y , lo que en el marco bayesiano equivale a calcular la densidad posterior $p(x_t|y_{1:t})$ de manera recursiva mediante las etapas de predicción y actualización [4]. En sistemas no lineales, las integrales requeridas no tienen solución cerrada, lo que motiva el uso de métodos aproximados.

El filtro de Kalman (KF) [5] proporciona una solución exacta para sistemas lineales con ruido gaussiano; su extensión, el filtro de Kalman extendido (EKF), permite tratar sistemas no lineales mediante una linealización local alrededor del estado estimado. En [6] se comparan distintas variantes aplicadas específicamente a la estimación del SOC en baterías de ion-litio, sistema que también es objeto de estudio en este proyecto.

Dentro de los métodos no lineales basados en filtrado de Kalman, el filtro de Kalman unscented (UKF) destaca por su amplio uso en la estimación del SOC de baterías de ion-litio. Estudios como [7] y [8] aplican variantes adaptativas y de orden fraccionario directamente sobre este tipo de sistemas, mostrando mejoras frente al EKF y consolidando al UKF como un método de referencia en este ámbito.

Otro enfoque ampliamente utilizado es el filtro de partículas (PF), que representa la distribución de probabilidad mediante una suma ponderada de partículas. Esta técnica permite aproximar las ecuaciones del filtrado bayesiano de forma numérica. La precisión del estimador mejora al aumentar el número de partículas, aunque esto incrementa el costo computacional. En [9] se evalúa el desempeño del PF en la estimación del SOC, mostrando que, si bien es más lento que el EKF, ofrece una mayor precisión en presencia de ruido en las mediciones.

Una alternativa reciente es el filtro de suma de gaussianas (Gaussian Sum Filter, GSF), propuesto como una opción eficaz para tratar mediciones cuantizadas o sistemas con comportamientos no lineales por tramos [10]. En este enfoque, la distribución posterior se aproxima mediante una suma ponderada de gaussianas, lo que permite capturar mejor distribuciones no gaussianas y dinámicas no lineales. El uso del GSF ha sido aplicado recientemente en [11] y [12] para la estimación del SOC en baterías de ion-litio, mostrando mejoras frente a métodos como EKF y PF, especialmente en contextos con alta no linealidad y ruido no gaussiano.

Complementariamente, en [13] se propone una aproximación de la función indicatriz mediante una combinación de gaussianas, lo que permite adaptar el GSF a sistemas con mediciones cuantizadas o comportamientos por tramos. Esta idea resulta especialmente re-

levante para el caso de estudio de este proyecto, ya que permite mejorar la precisión de la estimación en presencia de datos con estructura no continua.

En conjunto, estos métodos presentan limitaciones cuando la salida del sistema exhibe comportamientos no lineales por tramos o discontinuidades, lo que motiva explorar aproximaciones basadas en PWLA dentro de un marco de filtrado bayesiano.

1.5. Contribuciones

Este trabajo extiende el filtro de suma de gaussianas (GSF), originalmente aplicado a sistemas con salidas cuantizadas, para permitir su uso en sistemas cuya salida se modela mediante funciones lineales por partes (PWLA). Para ello, la función indicatriz que define la pertenencia a cada región del modelo PWL se aproxima mediante una combinación de gaussianas, permitiendo integrar esta estructura dentro del marco del GSF sin recurrir a métodos numéricos costosos. Esta extensión constituye el principal aporte metodológico del trabajo.

La metodología desarrollada se aplica a la estimación del estado de carga en baterías de ion-litio modeladas mediante un ECM, comparándose su desempeño con variantes PWL de estimadores clásicos como EKF-PWL, UKF-PWL y PF-PWL. El análisis considera precisión y eficiencia computacional tanto en simulaciones como en escenarios experimentales.

1.6. Objetivos, Alcances y Limitaciones

El objetivo general es desarrollar y evaluar un estimador basado en el filtro de suma de gaussianas (GSF) para sistemas no lineales, aplicándolo al SOC como caso de estudio. Los objetivos específicos incluyen: seleccionar un modelo ECM adecuado, diseñar e implementar un GSF modificado compatible con aproximaciones PWL, comparar su desempeño frente a métodos PWL de referencia y validar experimentalmente el algoritmo utilizando un emulador de baterías.

El alcance del proyecto incluye el desarrollo teórico, implementación computacional y validación comparativa del estimador propuesto. Entre las limitaciones se consideran el uso de un ECM sin detalles electroquímicos, la ausencia de identificación experimental de parámetros, la validación mediante un emulador sin control activo, la suposición de parámetros constantes en el ECM y la exclusión explícita de efectos de temperatura y envejecimiento.

1.7. Estructura del Documento

El documento comienza con el Capítulo 2, que describe los modelos de circuito equivalente y define el sistema utilizado. Le sigue el Capítulo 3 con los fundamentos del filtrado bayesiano y los métodos de referencia. A continuación, el Capítulo 4 detalla la metodología propuesta, la cual se aplica al sistema de interés en el Capítulo 5. Finalmente, el Capítulo 6 presenta la validación de resultados y el Capítulo 7 expone las conclusiones.

MODELAMIENTO DEL SISTEMA

El modelado del sistema constituye la base sobre la cual se desarrollan las técnicas de estimación del estado de carga presentadas en los capítulos posteriores. En este trabajo, el comportamiento dinámico de la batería de ion-litio se representa mediante un modelo eléctrico equivalente, enfoque que permite capturar las relaciones entre corriente, tensión y estado de carga sin recurrir a la complejidad de una descripción electroquímica detallada. Esta aproximación ofrece un equilibrio adecuado entre fidelidad y carga computacional, siendo ampliamente utilizada en aplicaciones de control y diagnóstico de sistemas de almacenamiento de energía.

De entre las variantes existentes, se selecciona el modelo Rint debido a su estructura compacta y su capacidad para describir las principales características dinámicas de la batería, tales como la caída de tensión debida a la resistencia interna y la variación del voltaje en función del SOC. A partir de esta representación, se derivan las ecuaciones de estado y de medición que gobiernan la dinámica del sistema, constituyendo el marco fundamental para los algoritmos de estimación desarrollados posteriormente.

2.1. Definición del Estado de Carga (SOC)

El estado de carga (SOC) es una variable fundamental que indica la cantidad de energía remanente en una batería respecto a su capacidad máxima. Formalmente, una de las formas más comunes de definir y estimar el SOC es mediante la integración de la corriente a lo largo del tiempo, método conocido como *Coulomb counting*:

$$\Theta(t) = \Theta(t_0) - \frac{1}{Q_N} \int_{t_0}^t \eta(\tau) I(\tau) d\tau, \quad (2.1)$$

donde $\Theta(t)$ es el SOC en el instante t , $\Theta(t_0)$ es el SOC inicial conocido en el instante t_0 , $\eta(\tau)$ representa la eficiencia coulombica, Q_N es la capacidad nominal de la batería e $I(\tau)$ corresponde a la corriente que fluye a través de la batería.

Si bien este método es conceptualmente directo y práctico para seguir los cambios en el SOC, presenta varias desventajas inherentes que limitan su precisión a largo plazo. Entre las principales limitaciones se encuentran: la incertidumbre en la determinación del SOC inicial, la acumulación de errores provenientes de la imprecisión de los sensores de corriente y del tiempo de integración, la incertidumbre y variabilidad de la eficiencia coulombica, y la dificultad de conocer con exactitud la capacidad real de la batería, la cual varía debido a la fabricación, la temperatura y el envejecimiento. Debido a estas limitaciones, el método de *Coulomb counting* a menudo requiere ser complementado con otras técnicas de estimación o calibración periódica para corregir los errores acumulados [14].

2.2. Modelos de Circuito Equivalente para Baterías

Para abordar el problema de estimación del SOC, se han propuesto distintos tipos de modelos. Uno de los más utilizados es el modelo de circuito equivalente (*Equivalent Circuit Model*, ECM), que representa el comportamiento dinámico de la batería mediante componentes eléctricos como resistencias, condensadores y fuentes de voltaje dependientes del estado de carga. Si bien estos modelos presentan ciertas limitaciones, como la variabilidad de sus parámetros con la temperatura o el envejecimiento, constituyen un punto de partida adecuado para el desarrollo de algoritmos de estimación de estado.

Dentro de los ECM, el modelo más básico es el denominado modelo Rint [3]. Este modelo representa la batería mediante una fuente de voltaje ideal, cuyo valor corresponde al voltaje en circuito abierto (OCV), el cual depende del estado de carga $\Theta(t)$, conectada en serie con una resistencia R_0 que representa la resistencia óhmica interna de la celda. La Figura 2.1 muestra el esquema correspondiente al modelo descrito.

El comportamiento de este modelo en tiempo continuo se describe mediante el siguiente sistema de ecuaciones:

$$V(t) = \text{OCV}(\Theta(t)) - R_0 I(t), \quad (2.2)$$

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = -\frac{\eta}{Q_N} I(t), \quad (2.3)$$

donde $V(t)$ es el voltaje terminal medido, $I(t)$ es la corriente, $\text{OCV}(\Theta(t))$ es la función no lineal que relaciona el voltaje en circuito abierto con el estado de carga $\Theta(t)$, R_0 es la resistencia interna, Q_N es la capacidad nominal y η es la eficiencia coulombica.

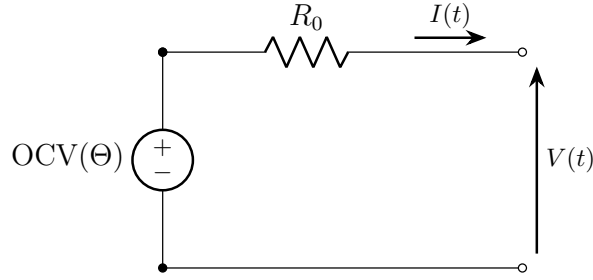


Figura 2.1: Esquema del modelo Rint para baterías de ion-litio.

Si bien la sencillez de este modelo facilita su implementación y análisis, su principal limitación radica en que no captura las dinámicas transitorias del voltaje terminal asociadas a los procesos de polarización que ocurren durante la carga o descarga. Por lo tanto, aunque adecuado para ciertas aplicaciones o como base para modelos más complejos, puede resultar insuficiente cuando la representación precisa de dichas dinámicas es relevante para la estimación.

Para caracterizar las celdas teniendo en cuenta la dinámica de su comportamiento, los modelos ECM permiten incorporar redes RC conectadas en serie con la resistencia interna R_0 . Cada red RC, compuesta por una resistencia y un capacitor en paralelo, tiene como objetivo modelar los distintos procesos de polarización que generan respuestas transitorias en el voltaje terminal durante los procesos de carga y descarga.

La Figura 2.2 ilustra el modelo general con múltiples redes RC, utilizado en aplicaciones donde se requiere una caracterización más detallada de la dinámica del voltaje. Un caso particular es el modelo de Thévenin [3], también denominado modelo 1RC, incorpora una única red RC en serie con la resistencia interna R_0 , tal como se muestra en la Figura 2.3. Su uso es extendido debido a su adecuada relación entre complejidad computacional y capacidad para reproducir las principales dinámicas de polarización.

Las ecuaciones que describen el modelo de Thévenin en tiempo continuo son las siguientes:

$$V(t) = \text{OCV}(\Theta(t)) - R_0 I(t) - U(t), \quad (2.4)$$

$$\frac{d\Theta(t)}{dt} = -\frac{\eta}{Q_N} I(t), \quad (2.5)$$

$$\frac{dU(t)}{dt} = -\frac{1}{R_1 C_1} U(t) + \frac{1}{C_1} I(t), \quad (2.6)$$

donde $U(t)$ representa el voltaje de polarización de la red RC. Este modelo define un sistema dinámico de segundo orden con estados $\Theta(t)$ y $U(t)$.

Para el alcance de este trabajo se opta por utilizar el modelo *Rint* como base para

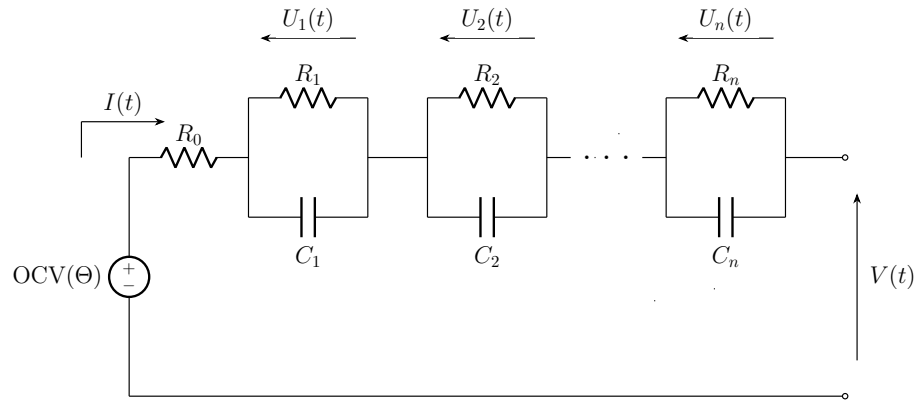


Figura 2.2: Modelo ECM con múltiples redes RC.

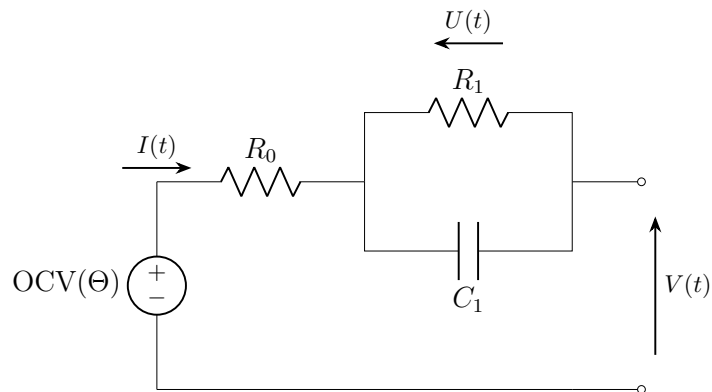


Figura 2.3: Modelo de Thévenin (1RC) para baterías de ion-litio.

el desarrollo y evaluación del algoritmo de estimación. Esta elección se justifica por su simplicidad, que reduce el sistema a un solo estado y facilita el análisis. Además, dado que el objetivo central de la memoria es evaluar el desempeño del estimador basado en el filtro de suma de gaussianas en presencia de una no linealidad representativa, la utilización de modelos de mayor orden no aporta información adicional relevante para los fines de esta investigación. Cabe destacar que la metodología propuesta es extensible a modelos de mayor complejidad si se requiere en aplicaciones futuras.

2.3. Modelo Rint en Espacio de Estados Discreto (Forma Wiener)

Para la implementación del algoritmo de estimación, el modelo continuo presentado en la sección anterior se expresa en forma discreta de espacio de estados. Partiendo de las ecuaciones (2.2) y (2.3), se aplica una discretización temporal con período de muestreo T_s , considerando un esquema de retención de orden cero (*Zero-Order Hold*, ZOH) para la corriente de entrada; es decir, se asume que $I(t)$ permanece constante durante cada intervalo de muestreo. Bajo esta suposición, la ecuación diferencial del estado se escribe como:

$$\Theta_{t+1} = \Theta_t - \frac{\eta T_s}{Q_N} I_t + w_t, \quad (2.7)$$

donde w_t representa un ruido de proceso que modela las incertidumbres en la dinámica y los errores de discretización, con distribución

$$w_t \sim \mathcal{N}(0, Q).$$

La ecuación de salida se obtiene al evaluar la relación de voltaje en los terminales de la batería en el instante discreto t :

$$V_t = \text{OCV}(\Theta_t) - R_0 I_t + v_t, \quad (2.8)$$

donde v_t corresponde al ruido de medición, el cual agrupa las perturbaciones e inexactitudes asociadas a los sensores de voltaje, modelado como

$$v_t \sim \mathcal{N}(0, R).$$

El sistema resultante constituye un modelo de tipo Wiener, en el cual la dinámica del estado es lineal, mientras que la no linealidad se concentra exclusivamente en la ecuación de salida a través de la relación OCV-SOC. Esta característica lo convierte en un caso adecuado para evaluar el desempeño de filtros como el filtro de suma de gaussianas (GSF), capaces de manejar explícitamente la naturaleza no lineal de la medición.

Finalmente, el modelo discreto se expresa en la siguiente forma de espacio de estados:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + w_t, \quad (2.9)$$

$$y_t = g(x_t) + Du_t + v_t, \quad (2.10)$$

donde $A = 1$, $B = -\frac{\eta T_s}{Q_N}$ y $D = -R_0$. Aquí, $x_t = \Theta_t$ representa el estado del sistema, $u_t = I_t$ es la entrada y $g(x_t) = \text{OCV}(\Theta_t)$ es la función no lineal que relaciona el estado con la salida y_t .

2.4. Caracterización de la No Linealidad OCV-SOC

En [15] se presenta la identificación experimental de la relación entre el voltaje en circuito abierto (OCV) y el estado de carga (SOC), a partir de datos del repositorio de la NASA [16] que incluyen distintos perfiles de carga y descarga para la batería Samsung INR 18650–20R [17]. Dado que dicha relación es inherentemente no lineal, se propone ajustarla mediante un polinomio. En este trabajo se emplea el ajuste de noveno orden reportado en [15], cuya expresión analítica se muestra a continuación:

$$\begin{aligned} \text{OCV}(\Theta) = & 2432,02974240497 \Theta^9 - 11733,0588179141 \Theta^8 + 23935,595504352 \Theta^7 \\ & - 26846,6590989558 \Theta^6 + 18023,4299039232 \Theta^5 - 7393,00310798008 \Theta^4 \\ & + 1817,89595072217 \Theta^3 - 253,509864902856 \Theta^2 + 18,5274909641379 \Theta \\ & + 2,92833228838401 \end{aligned} \quad (2.11)$$

En la ecuación anterior, OCV está expresado en volts y Θ es una variable adimensional que varía entre 0 y 1. La curva ajustada, descrita por la ecuación (2.11), se muestra en la Figura 2.4.

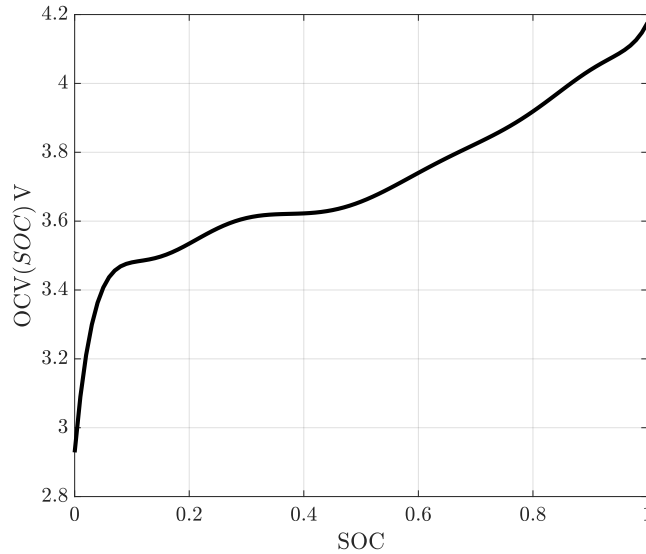


Figura 2.4: Curva OCV-SOC ajustada mediante un polinomio de noveno orden.

2.5. Aproximación Lineal por Partes (PWLA) de la Curva OCV–SOC

Como se mencionó anteriormente, la relación OCV–SOC que modela el comportamiento de la batería es inherentemente no lineal. Para facilitar su tratamiento en algoritmos de estimación, esta función puede aproximarse mediante una función lineal por partes (*Piecewise Linear Approximation*, PWLA) de la forma:

$$\hat{g}(\Theta_t) = \begin{cases} a_1\Theta_t + b_1, & \text{si } \Theta_t \in \mathcal{J}_1, \\ a_2\Theta_t + b_2, & \text{si } \Theta_t \in \mathcal{J}_2, \\ \vdots & \\ a_L\Theta_t + b_L, & \text{si } \Theta_t \in \mathcal{J}_L, \end{cases} \quad (2.12)$$

donde los conjuntos $\mathcal{J}_i = \{\Theta_t \mid \Theta_{i-1} \leq \Theta_t < \Theta_i\}$ corresponden a intervalos disjuntos definidos sobre el dominio $\Theta \in [0, 1]$. Las constantes a_i y b_i representan, respectivamente, la pendiente y el intercepto del i -ésimo segmento que aproxima la función $g(\cdot)$, mientras que L indica el número total de intervalos en los cuales se divide el dominio.

En [18] se propone un método sistemático para obtener los parámetros de la aproximación PWLA, el cual fue implementado en Matlab con el fin de analizar el efecto de la cantidad de intervalos L . El procedimiento consiste en definir el rango de interés sobre el eje Θ_t , dividirlo en L subintervalos y evaluar los valores de la función original $l_j = g(q_j)$ en los nodos q_j . A partir de estos valores, las pendientes a_i y los interceptos b_i de cada segmento se calculan mediante:

$$a_i = \frac{l_i - l_{i-1}}{q_i - q_{i-1}}, \quad (2.13)$$

$$b_i = \frac{q_i l_{i-1} - q_{i-1} l_i}{q_i - q_{i-1}}. \quad (2.14)$$

Estas expresiones permiten construir de forma sistemática cada una de las rectas $a_i\Theta_t + b_i$ que conforman la aproximación lineal por partes de la función de interés. La precisión del procedimiento puede evaluarse comparando la curva aproximada con la función original para distintos valores de L .

Con el fin de ilustrar los resultados, las Figuras 2.5 y 2.6 muestran las aproximaciones PWLA de la curva OCV–SOC para $L = 10$ y $L = 50$, respectivamente. Se observa que al aumentar el número de segmentos, la aproximación lineal por partes converge hacia la curva real, evidenciando la relación directa entre el número de intervalos L y la precisión del ajuste.

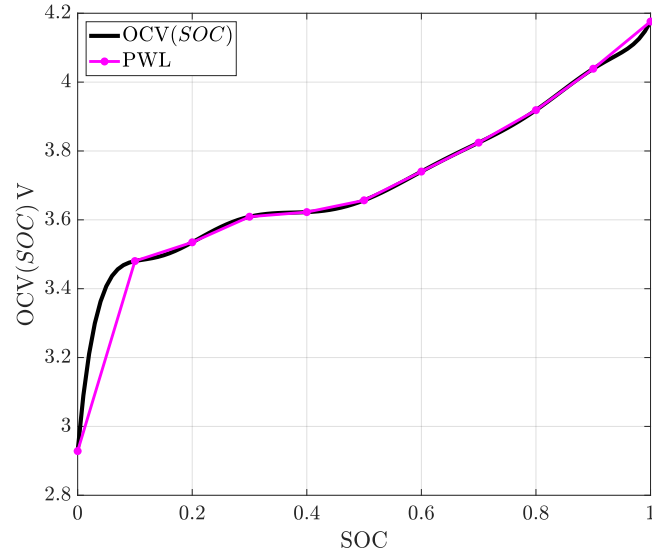


Figura 2.5: Aproximación lineal por partes de la curva OCV–SOC para $L = 10$.

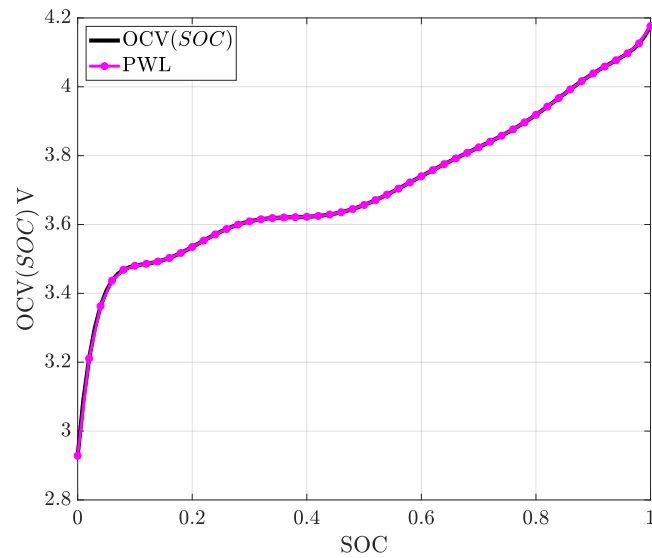


Figura 2.6: Aproximación lineal por partes de la curva OCV–SOC para $L = 50$.

2.6. Parámetros del Modelo Rint

Para la simulación y posterior implementación con datos experimentales, es necesario definir los parámetros que caracterizan el modelo Rint descrito en la Sección 2.3. Dichos

parámetros incluyen tanto las propiedades eléctricas de la batería como las condiciones operacionales y rangos de seguridad especificados por el fabricante.

En este trabajo se considera la celda Samsung INR 18650–20R, ampliamente utilizada en la literatura y presente en el repositorio de datos de la NASA [16], desde donde se identificó la curva OCV–SOC empleada en la Sección 2.4. Los valores nominales y límites de operación se presentan en la Tabla 2.1. Estos parámetros también orientan la selección de componentes en las pruebas de laboratorio, buscando mantener coherencia con el orden de magnitud reportado en la literatura.

Parámetro	Valor
Modelo	Samsung INR 18650–20R
Capacidad nominal Q_N	2000 mAh
Voltaje nominal	3.6 V
Voltaje de corte superior	4.2 V
Voltaje de corte inferior	2.5 V
Corriente máxima (descarga)	22 A (a 25°C)
Rango de temperatura operativa	0 – 50 °C

Tabla 2.1: Especificaciones de la batería Samsung INR 18650–20R [17].

En base a estas especificaciones, se adoptan los parámetros mostrados en la Tabla 2.2 para el modelo Rint empleado en simulación. Estos valores son consistentes con los reportes de la literatura [19, 20] y aseguran la coherencia entre el modelo, los datos experimentales y la emulación de la batería.

Durante las simulaciones, la corriente de entrada I_t se limitará de modo que el voltaje terminal V_t permanezca dentro del rango de operación especificado ($2,5 \text{ V} \leq V_t \leq 4,2 \text{ V}$), lo cual asegura que el estado de carga Θ_t se mantenga dentro de su rango físico $[0, 1]$. Esta restricción es esencial para evitar saturaciones en la función OCV–SOC y garantizar que las condiciones de simulación representen un comportamiento realista de la batería.

Parámetro	Símbolo	Valor	Unidad
Capacidad nominal	Q_N	2.0	Ah
Eficiencia coulombica	η	1.0	–
Resistencia interna	R_0	0.1	Ω
Periodo de muestreo	T_s	1	s

Tabla 2.2: Parámetros adoptados para el modelo Rint utilizado en simulación.

En el entorno experimental, la batería será emulada mediante una fuente DC programable Chroma 62000D Series [21], configurada según los parámetros eléctricos definidos

anteriormente para una celda individual. Información adicional sobre la configuración y operación del emulador se presenta en el Anexo A.2. Este enfoque permite validar el algoritmo de estimación sin los riesgos asociados al uso directo de celdas reales, garantizando al mismo tiempo que la respuesta dinámica del sistema sea consistente con el modelo teórico.

De este modo, el modelo seleccionado ofrece una representación adecuada del comportamiento dinámico de la batería bajo las condiciones de estudio, equilibrando simplicidad y precisión. En consecuencia, esta estructura servirá como base para el diseño e implementación del algoritmo de estimación desarrollado en los capítulos siguientes.

MARCO TEÓRICO DEL FILTRADO BAYESIANO

En este capítulo se presentan los conceptos preliminares necesarios para comprender los métodos de estimación de estado aplicables a sistemas dinámicos no lineales, en particular al caso de baterías de ion-litio. Se introduce el marco del filtrado bayesiano, que permite estimar variables internas del sistema a partir de mediciones observables, y se discuten los desafíos asociados a su implementación exacta en sistemas no lineales.

A continuación, se describen los principales algoritmos de estimación aproximada, incluyendo el filtro de Kalman extendido (EKF), el filtro de Kalman unscented (UKF), el filtro de partículas (PF) y el filtro de suma de gaussianas (GSF), los cuales servirán de base para el desarrollo de la versión modificada del GSF propuesta en capítulos posteriores. Este capítulo tiene como propósito establecer las bases conceptuales y matemáticas que faciliten la comprensión de los métodos de estimación empleados, proporcionando al lector los elementos necesarios para interpretar y comparar las técnicas utilizadas en el presente trabajo.

3.1. Filtrado bayesiano (marco general)

Como se describe en la literatura especializada [4], el problema de estimación de estados consiste en determinar el valor de una variable de estado x a partir de una medición observada y . Desde el enfoque bayesiano, este problema se plantea como la búsqueda de una estimación óptima que minimice una función de costo. Si dicha función de costo es escalar, monótonamente creciente y depende únicamente del error de estimación, entonces

la solución óptima corresponde a la esperanza condicional del estado dada la observación, expresada como:

$$\mathbb{E}\{x|y\} = \int x \cdot p(x|y) dx \quad (3.1)$$

donde $p(x|y)$ representa la función de densidad condicional, es decir, la función que describe la probabilidad de que el sistema se encuentre en el estado x dado que se ha observado y . Resolver el problema de estimación requiere, por tanto, calcular esta esperanza condicional, lo que implica conocer dicha densidad, la cual puede obtenerse mediante el teorema de Bayes.

En términos generales, el objetivo del filtrado es estimar la secuencia de estados $x_{1:t}$ dadas las observaciones $y_{1:t}$. Según el teorema de Bayes, esta distribución se expresa como:

$$p(x_{1:t}|y_{1:t}) = \frac{p(y_{1:t}|x_{1:t}) \cdot p(x_{1:t})}{p(y_{1:t})} \quad (3.2)$$

La distribución $p(x_{1:t})$ puede factorizarse como:

$$p(x_{1:t}) = \prod_{k=1}^t p(x_k|x_{1:k-1}) \quad (3.3)$$

El proceso de filtrado bayesiano se implementa de forma recursiva mediante dos etapas principales que se repiten en cada instante de tiempo:

- **Corrección (measurement update):**

$$p(x_t|y_{1:t}) = \frac{p(y_t|x_t) \cdot p(x_t|y_{1:t-1})}{p(y_t|y_{1:t-1})} \quad (3.4)$$

- **Predicción (time update):**

$$p(x_{t+1}|y_{1:t}) = \int p(x_{t+1}|x_t) \cdot p(x_t|y_{1:t}) dx_t \quad (3.5)$$

De este modo, el problema de estimación de estados se reduce a construir, de forma recursiva, la función de densidad condicional $p(x_t|y_{1:t})$ a partir de una condición inicial, y luego calcular su esperanza condicional $\mathbb{E}\{x_t|y_{1:t}\}$.

En la práctica, las integrales involucradas en estas expresiones suelen ser difíciles de resolver analíticamente o no tienen solución cerrada, especialmente en sistemas no lineales. Por ello, se han desarrollado distintos enfoques aproximados que permiten implementar el filtrado bayesiano de forma computacionalmente viable. Entre ellos se encuentran el filtro de Kalman extendido (EKF), el filtro de partículas (PF) y el filtro de suma de gaussianas (GSF), entre otros. Este marco constituye la base de todos los algoritmos presentados en las siguientes secciones.

3.2. Algoritmos de estimación aproximados

En esta sección se describen los principales algoritmos aproximados utilizados para la estimación de estados en sistemas no lineales, los cuales se enmarcan dentro del esquema de filtrado bayesiano presentado anteriormente. En este trabajo se emplean el EKF, el UKF y el PF como métodos de referencia, mientras que el GSF constituye la base sobre la cual se desarrolla una versión modificada inspirada en [13]. Aunque dicha modificación fue propuesta originalmente para datos cuantizados, aquí se explora su extensión al caso de una no linealidad aproximada mediante funciones lineales por tramos.

3.2.1. Filtro de Kalman extendido (EKF)

El filtro de Kalman proporciona una solución óptima para sistemas lineales con ruidos gaussianos. Sin embargo, en el caso de las baterías de ion-litio, la relación entre el estado de carga (SOC) y la tensión en circuito abierto (OCV) introduce una no linealidad que impide su aplicación directa. Para abordar esta situación, se emplea el filtro de Kalman extendido (EKF) [22], el cual linealiza localmente el modelo alrededor de la estimación del estado.

El sistema se representa en forma discreta de espacio de estados según las ecuaciones (2.7) y (2.8), donde la función no lineal $g(\cdot)$ corresponde a la curva OCV-SOC. Dicha función se aproxima mediante una expansión de Taylor de primer orden en torno al valor estimado $\hat{x}_{t|t-1}$:

$$g(x_t) \approx g(\hat{x}_{t|t-1}) + \left. \frac{\partial g}{\partial x_t} \right|_{x_t=\hat{x}_{t|t-1}} (x_t - \hat{x}_{t|t-1}) \quad (3.6)$$

De este modo, el sistema se aproxima a un modelo lineal variante en el tiempo, expresado como:

$$x_{t+1} = Ax_t + Bu_t + w_t, \quad (3.7)$$

$$y_t = C_t x_t + Du_t + v_t, \quad (3.8)$$

donde la matriz C_t se define como:

$$C_t = \left. \frac{\partial g}{\partial x_t} \right|_{x_t=\hat{x}_{t|t-1}} \quad (3.9)$$

A partir de esta representación linealizada, las ecuaciones del EKF se expresan como:

$$K_t = \Sigma_{t|t-1} C_t^T (R + C_t \Sigma_{t|t-1} C_t^T)^{-1}, \quad (3.10)$$

$$\hat{x}_{t|t} = \hat{x}_{t|t-1} + K_t (y_t - g(\hat{x}_{t|t-1}) - Du_t), \quad (3.11)$$

$$\Sigma_{t|t} = (I - K_t C_t) \Sigma_{t|t-1}, \quad (3.12)$$

$$\hat{x}_{t+1|t} = A \hat{x}_{t|t} + Bu_t, \quad (3.13)$$

$$\Sigma_{t+1|t} = Q + A \Sigma_{t|t} A^T. \quad (3.14)$$

El EKF permite manejar la no linealidad asociada a la curva OCV–SOC mediante una sucesión de linealizaciones locales en torno a la estimación del estado. Sin embargo, su precisión depende fuertemente de la validez de dicha aproximación y de la correcta especificación de las covarianzas de ruido.

3.2.2. Filtro de Kalman unscented (UKF)

El UKF aborda la estimación en sistemas no lineales mediante la unscented transform (UT) [23], la cual permite aproximar la propagación de medias y covarianzas a través de funciones no lineales sin recurrir a linealizaciones explícitas. En lugar de usar derivadas, como en el EKF, el UKF representa la distribución del estado mediante un conjunto determinístico de puntos sigma que capturan exactamente los primeros dos momentos de la distribución gaussiana inicial.

Dados la media m_t y la covarianza P_t , la UT construye $2n + 1$ puntos sigma:

$$X_t^{(0)} = m_t, \quad X_t^{(i)} = m_t + \sqrt{(n + \lambda)P_t} e_i, \quad X_t^{(i+n)} = m_t - \sqrt{(n + \lambda)P_t} e_i, \quad (3.15)$$

donde e_i son los vectores canónicos y λ un parámetro de escalamiento. Estos puntos se propagan directamente a través de las funciones no lineales del sistema, generando las imágenes $\tilde{X}_{t+1}^{(i)}$ que permiten reconstruir la media y la covarianza transformadas mediante promedios ponderados.

De este modo, el UKF maneja la no linealidad capturando mejor la curvatura local de las funciones del modelo y evitando los errores de linealización del EKF, logrando estimaciones más precisas para la media y una aproximación consistente de la covarianza [4].

3.2.3. Filtro de partículas (PF)

El filtro de partículas, también denominado Sequential Importance Sampling (SIS), constituye una técnica para aproximar la distribución a posteriori del estado de un sistema dinámico no lineal y no gaussiano a partir de observaciones ruidosas. Este método representa la densidad $p(x_t | y_{1:t})$ mediante un conjunto de muestras (partículas) y pesos asociados, lo que permite aproximar distribuciones arbitrarias sin requerir hipótesis estrictas de linealidad

o gaussianidad:

$$p(x_t | y_{1:t}) \approx \sum_{i=1}^{N_p} w_t^{(i)} \delta(x_t - x_t^{(i)}), \quad (3.16)$$

donde N_p es el número de partículas, $x_t^{(i)}$ corresponde a la i -ésima partícula y $w_t^{(i)}$ es su peso asociado.

En este trabajo se utiliza la versión denominada bootstrap filter, introducida por Gordon, Salmond y Smith en 1993 [24], en la cual la distribución de importancia se toma igual a la transición del modelo de estados, $q(x_t | x_{t-1}, y_t) = p(x_t | x_{t-1})$. De este modo, cada partícula se propaga a través del modelo dinámico y los pesos se actualizan en función de la verosimilitud de la observación, $w_t^{(i)} \propto p(y_t | x_t^{(i)})$, lo que simplifica la implementación.

El PF ofrece gran flexibilidad y precisión en sistemas no lineales, aunque su principal limitación radica en la degeneración de partículas, lo que exige un número elevado de muestras para mantener estabilidad numérica. En este trabajo se utiliza, al igual que el EKF y el UKF, como método de comparación con el algoritmo propuesto.

3.2.4. Filtro de suma de gaussianas (GSF)

3.2.4.1. Modelo de mezcla de gaussianas

Los modelos de mezcla finita permiten representar distribuciones complejas mediante la combinación de componentes gaussianas. Un caso ampliamente utilizado es el modelo de mezcla de gaussianas (GMM, por sus siglas en inglés) [25, 26], definido como:

$$p(x) = \sum_{i=1}^M \gamma_i \mathcal{N}(x; \mu_i, \Sigma_i), \quad (3.17)$$

donde $x \in \mathbb{R}^n$ representa la variable aleatoria de interés, γ_i son los pesos de mezcla que satisfacen $\gamma_i \geq 0$ y $\sum_{i=1}^M \gamma_i = 1$, mientras que $\mathcal{N}(x; \mu_i, \Sigma_i)$ denota la densidad gaussiana correspondiente. Este modelo resulta especialmente útil para representar distribuciones no gaussianas, como las densidades condicionales $p(y_t | x_t)$, y constituye la base del filtro de suma de gaussianas (GSF).

3.2.4.2. Algoritmo de filtraje

El GSF extiende la formulación bayesiana clásica para manejar sistemas no lineales y no gaussianos, representando la distribución a posteriori del estado como una combinación ponderada de componentes gaussianas:

$$p(x_t | y_{1:t}) = \sum_{k=1}^{M_{t|t}} \gamma_{t|t}^k \mathcal{N}(x_t; \hat{x}_{t|t}^k, \Sigma_{t|t}^k), \quad (3.18)$$

donde cada componente k se actualiza mediante un filtro de Kalman independiente, y los pesos $\gamma_{t|t}^k$ se ajustan según la verosimilitud de cada componente dada la medición.

En [15] se propone aplicar este enfoque a sistemas tipo Wiener, en los cuales la no linealidad se concentra en la ecuación de salida $y_t = g(x_t) + v_t$. En tales casos, la verosimilitud $p(y_t | x_t)$ se aproxima mediante una representación lineal por tramos (PWLA) de la función $g(\cdot)$, y la integración asociada se evalúa mediante una cuadratura de Gauss–Legendre. De esta forma, la verosimilitud se expresa como una mezcla ponderada de gaussianas:

$$p(y_t | x_t) \approx \sum_{j=1}^K \beta_t^{(j)} \mathcal{N}(y_t; a_j x_t + b_j + Du_t, R_j), \quad (3.19)$$

donde los parámetros a_j , b_j y R_j provienen de la PWLA, y los pesos $\beta_t^{(j)}$ se determinan mediante la regla de Gauss–Legendre.

Con esta aproximación, la densidad posterior $p(x_t | y_{1:t})$ se obtiene como combinación de múltiples filtros de Kalman locales, cada uno asociado a una componente gaussiana. Este método maneja de manera más precisa las no linealidades que los enfoques basados en una única linealización, como el EKF.

No obstante, el esquema de cuadratura de Gauss–Legendre provoca un crecimiento exponencial en el número de componentes, incrementando significativamente el costo computacional. Por ello, se requieren estrategias de reducción de mezcla o aproximaciones analíticas alternativas para mantener la viabilidad práctica del algoritmo.

Para asegurar una comparación consistente entre los distintos algoritmos evaluados, todos los métodos utilizan la misma aproximación lineal por tramos (PWLA) de la curva OCV–SOC en la ecuación de medición. Se empleó un número suficientemente alto de segmentos, de modo que la representación PWLA reproduce con alta fidelidad la curva real. Esto permite que las diferencias de desempeño observadas entre EKF, UKF, PF y el método propuesto se deban principalmente a las capacidades de estimación de cada filtro, y no a discrepancias en el modelo utilizado.

En el capítulo siguiente se presenta una formulación alternativa del GSF que constituye el núcleo de este trabajo, basada en la aproximación de la función indicatriz mediante mezclas de gaussianas propuesta en [13].

DESARROLLO DEL GSF MODIFICADO

Se presenta la formulación del filtro de suma de gaussianas modificado (GSF-M), diseñado para sistemas cuya no linealidad se aproxima mediante una linealización por tramos (Piecewise Linear Approximation, PWLA). El desarrollo se basa en una modificación del esquema GSF original, incorporando una aproximación analítica de la función indicatriz que permite mantener una estructura probabilística cerrada dentro del marco del filtrado bayesiano. Para ilustrar los principios del método, se parte del análisis de un sistema escalar simple, previo a su aplicación al modelo de batería de ion-litio en el capítulo siguiente.

En el ámbito del filtrado no lineal, se ha demostrado que los filtros gaussianos convencionales, como el EKF o el UKF, presentan limitaciones cuando la distribución posterior del estado se aleja de una forma unimodal y estrictamente gaussiana. Ito y Xiong [27] propusieron representar la densidad posterior mediante mezclas de gaussianas (GSF), lo que permite capturar comportamientos multimodales y reducir errores de linealización. Wu et al. [28] mostraron que los filtros gaussianos pueden interpretarse como aproximaciones de integración numérica, cuya precisión se degrada ante fuertes no linealidades, mientras que Arasaratnam et al. [29] confirmaron que la suposición unimodal limita la capacidad de los estimadores para describir correctamente la distribución posterior. Estos trabajos motivan el desarrollo de estrategias que conserven la estructura analítica del filtrado gaussiano, pero incorporen una representación más flexible de la posterior.

En este contexto, el presente trabajo introduce una variante del GSF orientada a sistemas con no linealidades aproximadas mediante funciones por tramos. A diferencia del enfoque GSF-PWL de Alcántara [11], que utiliza cuadratura de Gauss-Legendre, se propone

una aproximación suave de la función indicatriz de cada región lineal mediante mezclas gaussianas (GMM), siguiendo la idea de [13]. Esta modificación permite obtener expresiones analíticas para la verosimilitud $p(y_t | x_t)$, manteniendo la estructura probabilística del filtrado bayesiano y reduciendo la dependencia de métodos numéricos o basados en muestreo.

En las siguientes secciones se detallan las aproximaciones adoptadas y la formulación matemática del filtro propuesto, mostrando cómo la sustitución de la función indicatriz por una mezcla gaussiana permite derivar de manera analítica las etapas de predicción y corrección del GSF-M. De esta forma, se establece la base teórica del método, la cual será posteriormente adaptada y validada en un sistema físico.

4.1. Aproximaciones adoptadas

El desarrollo del GSF-M se fundamenta en tres aproximaciones principales:

1. **Aproximación PWL de la no linealidad:** La función no lineal se representa mediante un conjunto de modelos lineales locales, cada uno válido en una región acotada del espacio de estados. Aumentar el número de tramos mejora la precisión de la aproximación y reduce el error de modelado introducido por la segmentación.
2. **Aproximación de la función indicatriz:** Cada región se define mediante una función indicatriz, que aquí se aproxima por una mezcla finita de gaussianas. Esta sustitución elimina la discontinuidad de la función binaria ideal y mantiene el filtrado dentro del dominio gaussiano, permitiendo derivar expresiones analíticas y reduciendo el costo computacional.
3. **Dominio acotado del sistema:** Se considera un dominio de operación finito, coherente con las restricciones físicas del sistema. Las funciones indicatrices y sus aproximaciones gaussianas poseen soporte efectivo dentro de este rango, asegurando la correcta normalización de las densidades y evitando inconsistencias fuera del dominio operativo.

Estas tres aproximaciones constituyen la base conceptual del GSF-M, permitiendo mantener un equilibrio entre precisión, coherencia probabilística y eficiencia computacional.

A partir de estas bases, el capítulo desarrolla la formulación matemática del filtro, mostrando cómo la sustitución de la función indicatriz por una mezcla gaussiana permite obtener expresiones analíticas para las etapas de predicción y corrección.

4.2. Modelo del Sistema Escalar de Estudio

Para ilustrar los principios del método, se introduce este modelo simplificado con fines explicativos. El análisis numérico y experimental se reserva para la aplicación en baterías de ion-litio presentada en el capítulo siguiente.

Se considera el siguiente sistema escalar discreto:

$$x_{t+1} = \alpha x_t + w_t, \quad (4.1)$$

$$y_t = x_t^2 + v_t, \quad (4.2)$$

$$x_{t+1} = \alpha x_t + w_t, \quad (4.3)$$

$$y_t = x_t^2 + v_t, \quad (4.4)$$

donde $x_t \in \mathbb{R}$ es el estado, $y_t \in \mathbb{R}$ es la observación, α es un parámetro escalar que define la dinámica lineal, y w_t, v_t son ruidos gaussianos independientes de media cero y varianzas Q y R respectivamente:

$$w_t \sim \mathcal{N}(0, Q), \quad (4.5)$$

$$v_t \sim \mathcal{N}(0, R). \quad (4.6)$$

La no linealidad del sistema reside en la ecuación de salida (4.4), dada por la función cuadrática $g(x_t) = x_t^2$. Para abordar esta no linealidad mediante el enfoque PWLA, se define una partición del espacio de estados en L intervalos disjuntos:

$$\mathcal{J}_i = \{x_t \mid q_{i-1} \leq x_t < q_i\}, \quad i = 1, \dots, L, \quad (4.7)$$

con $q_0 < q_1 < \dots < q_L$. Dentro de cada intervalo \mathcal{J}_i , la función $g(x_t) = x_t^2$ se aproxima mediante una función afín:

$$x_t^2 \approx a_i x_t + b_i, \quad \text{si } x_t \in \mathcal{J}_i, \quad i = 1, \dots, L, \quad (4.8)$$

donde a_i y b_i son la pendiente y el intercepto del i -ésimo segmento lineal, calculados como se describió en la Sección 2.5.

4.3. Formulación Bayesiana y Verosimilitud Aproximada

El objetivo del filtrado bayesiano es calcular recursivamente la densidad posterior $p(x_t \mid y_{1:t})$. Para el sistema (4.3)-(4.4), la densidad de transición es gaussiana:

$$p(x_{t+1} \mid x_t) = \mathcal{N}(x_{t+1}; \alpha x_t, Q). \quad (4.9)$$

La principal dificultad surge en la etapa de corrección, que requiere la verosimilitud $p(y_t \mid x_t)$. Utilizando la función original $g(x_t) = x_t^2$, la verosimilitud sería $p(y_t \mid x_t) = \mathcal{N}(y_t; x_t^2, R)$, lo cual no permite una solución analítica cerrada para la posterior. Aplicando la aproximación PWLA (4.8), la verosimilitud dentro de cada región \mathcal{J}_i se modela como:

$$p(y_t \mid x_t) \approx \mathcal{N}(y_t; a_i x_t + b_i, R), \quad \text{si } x_t \in \mathcal{J}_i. \quad (4.10)$$

Esta representación transforma el problema de salida no lineal en uno con una salida afín por tramos.

4.4. Modelado de la Verosimilitud con Indicatriz GMM

Como se estableció en la sección anterior, la verosimilitud $p(y_t | x_t)$ se aproxima mediante una función afín por tramos, válida únicamente dentro de la región \mathcal{J}_i correspondiente:

$$p(y_t | x_t) \approx \mathcal{N}(y_t; a_i x_t + b_i, R), \quad \text{si } x_t \in \mathcal{J}_i. \quad (4.11)$$

Para incorporar formalmente esta condición de pertenencia a la región, se utiliza la función indicatriz $\mathcal{I}_{\mathcal{J}_i}(x_t)$, definida como:

$$\mathcal{I}_{\mathcal{J}_i}(x_t) = \begin{cases} 1, & \text{si } x_t \in \mathcal{J}_i, \\ 0, & \text{si } x_t \notin \mathcal{J}_i. \end{cases} \quad (4.12)$$

Con ella, la verosimilitud global $p(y_t | x_t)$ se expresa como una suma sobre las L regiones:

$$p(y_t | x_t) \approx \sum_{i=1}^L \mathcal{N}(y_t; a_i x_t + b_i, R) \cdot \mathcal{I}_{\mathcal{J}_i}(x_t). \quad (4.13)$$

Sin embargo, la naturaleza discontinua de $\mathcal{I}_{\mathcal{J}_i}(x_t)$ impide obtener una solución analítica cerrada al usar esta expresión directamente en el filtrado bayesiano. Para superar esta limitación, se adopta la estrategia propuesta en [13] de aproximar la función indicatriz $\mathcal{I}_{\mathcal{J}_i}(x_t)$ mediante una mezcla finita de K gaussianas (GMM):

$$\mathcal{I}_{\mathcal{J}_i}(x_t) \approx \sum_{j=1}^K \beta_j^{(i)} \mathcal{N}(x_t; \rho_j^{(i)}, \phi_j^{(i)}), \quad (4.14)$$

donde $\{\beta_j^{(i)}, \rho_j^{(i)}, \phi_j^{(i)}\}$ son los parámetros (peso, media y varianza) de la GMM para la región \mathcal{J}_i . Una ventaja de este método es que estos parámetros se obtienen eficientemente escalando un conjunto base $\{\beta_j^*, \rho_j^*, \phi_j^*\}$ precalculado offline para el intervalo $[0, 1]$ [13]. Sustituyendo la aproximación GMM (4.14) en la expresión de la verosimilitud global (4.13), se obtiene la formulación final:

$$p(y_t | x_t) \approx \sum_{i=1}^L \sum_{j=1}^K \beta_j^{(i)} \mathcal{N}(y_t; a_i x_t + b_i, R) \mathcal{N}(x_t; \rho_j^{(i)}, \phi_j^{(i)}). \quad (4.15)$$

Esta expresión modela la verosimilitud como una mezcla de $K \times L$ términos, cada uno siendo un producto de dos densidades gaussianas. Esta estructura es la que permite derivar las ecuaciones analíticas del GSF presentadas en la siguiente sección.

4.5. Algoritmo para el Sistema Escalar

Asumiendo que la densidad predictiva en el paso t , $p(x_t | y_{1:t-1})$, es una GMM con $M_{t|t-1}$ componentes:

$$p(x_t | y_{1:t-1}) = \sum_{l=1}^{M_{t|t-1}} \gamma_{t|t-1}^{(l)} \mathcal{N}(x_t; \hat{x}_{t|t-1}^{(l)}, \Sigma_{t|t-1}^{(l)}) \quad (4.16)$$

el algoritmo GSF se desarrolla de la siguiente manera:

Inicialización: La recursión comienza con una única gaussiana ($M_{1|0} = 1$):

$$p(x_1|y_0) = \mathcal{N}(x_1; \mu_1, P_1) \quad (4.17)$$

con peso $\gamma_{1|0}^{(1)} = 1$, media $\hat{x}_{1|0}^{(1)} = \mu_1$, y varianza $\Sigma_{1|0}^{(1)} = P_1$.

Etapa de Corrección: La densidad posterior $p(x_t|y_{1:t})$ se obtiene utilizando la regla de Bayes, combinando la densidad predictiva (5.1) con la verosimilitud aproximada (4.15). El producto resultante para cada terna de índices (l, i, j) (correspondientes a la componente predictiva l , la región PWLA i , y la componente de la indicatriz j) genera una nueva componente gaussiana posterior n . Este cálculo se realiza eficientemente mediante un procedimiento secuencial de dos pasos tipo Kalman:

Paso 1: Corrección con la medición continua y_t . Se actualiza la componente predictiva l utilizando la observación y_t y el modelo lineal afín (a_i, b_i) correspondiente a la región i . Esto genera una media y varianza intermedias:

$$K_{t,y}^{(i,l)} = \Sigma_{t|t-1}^{(l)} a_i (R + a_i^2 \Sigma_{t|t-1}^{(l)})^{-1} \quad (4.18)$$

$$\hat{x}_{t|t}^{(int)} = \hat{x}_{t|t-1}^{(l)} + K_{t,y}^{(i,l)} (y_t - (a_i \hat{x}_{t|t-1}^{(l)} + b_i)) \quad (4.19)$$

$$\Sigma_{t|t}^{(int)} = (1 - K_{t,y}^{(i,l)} a_i) \Sigma_{t|t-1}^{(l)} \quad (4.20)$$

Paso 2: Fusión con la información de la indicatriz. El resultado intermedio $(\hat{x}_{t|t}^{(int)}, \Sigma_{t|t}^{(int)})$ se fusiona con la información proporcionada por la componente j de la indicatriz GMM $(\rho_j^{(i)}, \phi_j^{(i)})$, la cual actúa como una pseudo-medición directa del estado. Esto produce la media y varianza posteriores finales para la nueva componente n :

$$K_{t,\rho}^{(j)} = \Sigma_{t|t}^{(int)} (\phi_j^{(i)} + \Sigma_{t|t}^{(int)})^{-1} \quad (4.21)$$

$$\hat{x}_{t|t}^{(n)} = \hat{x}_{t|t}^{(int)} + K_{t,\rho}^{(j)} (\rho_j^{(i)} - \hat{x}_{t|t}^{(int)}) \quad (4.22)$$

$$\Sigma_{t|t}^{(n)} = (1 - K_{t,\rho}^{(j)}) \Sigma_{t|t}^{(int)} \quad (4.23)$$

Cálculo del Peso y Normalización. El peso no normalizado $\bar{\gamma}_{t|t}^{(n)}$ para la nueva componente n (asociada a la terna (l, i, j)) se calcula multiplicando los pesos originales $(\gamma_{t|t-1}^{(l)}, \beta_j^{(i)})$ por las verosimilitudes gaussianas correspondientes a las innovaciones de los dos pasos de corrección anteriores:

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{t|t}^{(n)} &= \gamma_{t|t-1}^{(l)} \beta_j^{(i)} \mathcal{N}\left(y_t; a_i \hat{x}_{t|t-1}^{(l)} + b_i, R + a_i^2 \Sigma_{t|t-1}^{(l)}\right) \\ &\quad \times \mathcal{N}\left(\rho_j^{(i)}; \hat{x}_{t|t}^{(int)}, \phi_j^{(i)} + \Sigma_{t|t}^{(int)}\right). \end{aligned} \quad (4.24)$$

El número total de componentes generadas en esta etapa es $M_{t|t} = M_{t|t-1} \times K \times L$. Los pesos finales $\gamma_{t|t}^{(n)}$ se obtienen normalizando la suma de todos los pesos no normalizados:

$$\gamma_{t|t}^{(n)} = \frac{\bar{\gamma}_{t|t}^{(n)}}{\sum_{s=1}^{M_{t|t}} \bar{\gamma}_{t|t}^{(s)}}. \quad (4.25)$$

La densidad posterior resultante es una GMM:

$$p(x_t | y_{1:t}) = \sum_{n=1}^{M_{t|t}} \gamma_{t|t}^{(n)} \mathcal{N}(x_t; \hat{x}_{t|t}^{(n)}, \Sigma_{t|t}^{(n)}) \quad (4.26)$$

Etapa de Predicción: Cada componente posterior n de la GMM $p(x_t | y_{1:t})$ se propaga al siguiente instante de tiempo utilizando la dinámica lineal del sistema (4.9):

$$\gamma_{t+1|t}^{(n)} = \gamma_{t|t}^{(n)}, \quad (4.27)$$

$$\hat{x}_{t+1|t}^{(n)} = \alpha \hat{x}_{t|t}^{(n)}, \quad (4.28)$$

$$\Sigma_{t+1|t}^{(n)} = Q + \alpha^2 \Sigma_{t|t}^{(n)}. \quad (4.29)$$

La densidad predictiva para el tiempo $t+1$, $p(x_{t+1} | y_{1:t})$, es también una GMM con el mismo número de componentes que la posterior ($M_{t+1|t} = M_{t|t}$):

$$p(x_{t+1} | y_{1:t}) = \sum_{n=1}^{M_{t+1|t}} \gamma_{t+1|t}^{(n)} \mathcal{N}(x_{t+1}; \hat{x}_{t+1|t}^{(n)}, \Sigma_{t+1|t}^{(n)}) \quad (4.30)$$

Esta densidad predictiva sirve como entrada para la etapa de corrección en el siguiente paso de tiempo.

4.6. Justificación Matemática: Preservación de la Estructura GMM

La estructura recursiva del filtro se fundamenta en que, si se parte de una distribución gaussiana, las etapas de corrección y predicción preservan la forma de una mezcla de gaussianas (GMM) para todo tiempo t . El proceso se inicia con la distribución a priori, que es una GMM con una sola componente:

$$p(x_1) = p(x_1 | y_{1:0}) = \mathcal{N}(x_1; \mu_1, P_1).$$

A continuación, se demuestra que esta propiedad se mantiene, suponiendo que la distribución predictiva en el instante t , $p(x_t | y_{1:t-1})$, ya es una mezcla de gaussianas:

$$p(x_t | y_{1:t-1}) = \sum_{\ell=1}^{M_{t|t-1}} \gamma_{t|t-1}^{(\ell)} \mathcal{N}(x_t; \hat{x}_{t|t-1}^{(\ell)}, \Sigma_{t|t-1}^{(\ell)}). \quad (4.31)$$

La etapa de corrección, por la regla de Bayes, requiere calcular el producto $p(y_t|x_t)p(x_t|y_{1:t-1})$. Utilizando la expresión descompuesta de la verosimilitud, el producto para cada terna de componentes (ℓ, i, j) involucra tres densidades gaussianas. La forma más directa de resolver este producto triple es de manera secuencial.

Paso 1: Fusión con la medición continua. Primero, se combina la componente predictiva con el modelo de medición. Aplicando la identidad del producto de gaussianas, se obtiene:

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}(x_t; \hat{x}_{t|t-1}^{(\ell)}, \Sigma_{t|t-1}^{(\ell)}) \cdot \mathcal{N}(y_t; a_i x_t + b_i, R) \\ &= \mathcal{N}(y_t; a_i \hat{x}_{t|t-1}^{(\ell)} + b_i, R + a_i^2 \Sigma_{t|t-1}^{(\ell)}) \cdot \mathcal{N}(x_t; \hat{x}_{t|t}^{(\text{int})}, \Sigma_{t|t}^{(\text{int})}), \end{aligned}$$

donde los parámetros de la gaussiana intermedia en x_t corresponden a la primera actualización de Kalman.

Paso 2: Fusión con la información de la indicatriz. A continuación, se multiplica el resultado intermedio por la componente de la indicatriz:

$$\begin{aligned} & \mathcal{N}(x_t; \hat{x}_{t|t}^{(\text{int})}, \Sigma_{t|t}^{(\text{int})}) \cdot \mathcal{N}(x_t; \rho_j^{(i)}, \phi_j^{(i)}) \\ &= \mathcal{N}(\rho_j^{(i)}; \hat{x}_{t|t}^{(\text{int})}, \phi_j^{(i)} + \Sigma_{t|t}^{(\text{int})}) \cdot \mathcal{N}(x_t; \hat{x}_{t|t}^{(n)}, \Sigma_{t|t}^{(n)}), \end{aligned}$$

donde los parámetros de la gaussiana posterior final, $\hat{x}_{t|t}^{(n)}$ y $\Sigma_{t|t}^{(n)}$, corresponden a la segunda actualización de Kalman. El peso no normalizado, $\bar{\gamma}_{t|t}^{(n)}$, se obtiene agrupando todos los pesos originales y las constantes de escalado de ambos productos, que corresponden a las verosimilitudes de ambas innovaciones:

$$\bar{\gamma}_{t|t}^{(n)} = \gamma_{t|t-1}^{(\ell)} \beta_j^{(i)} \mathcal{N}\left(y_t; a_i \hat{x}_{t|t-1}^{(\ell)} + b_i, R + a_i^2 \Sigma_{t|t-1}^{(\ell)}\right) \mathcal{N}\left(\rho_j^{(i)}; \hat{x}_{t|t}^{(\text{int})}, \phi_j^{(i)} + \Sigma_{t|t}^{(\text{int})}\right).$$

La posterior, al ser normalizada, resulta ser una GMM, confirmando que la estructura se preserva.

Finalmente, la etapa de predicción propaga la distribución posterior a través del modelo de transición $p(x_{t+1} | x_t) = \mathcal{N}(x_{t+1}; \alpha x_t, Q)$. Sustituyendo la forma de GMM de la posterior e intercambiando la suma y la integral, la expresión se descompone en una suma de integrales de convolución:

$$p(x_{t+1} | y_{1:t}) = \sum_{n=1}^{M_{t|t}} \gamma_{t|t}^{(n)} \int \mathcal{N}(x_{t+1}; \alpha x_t, Q) \mathcal{N}(x_t; \hat{x}_{t|t}^{(n)}, \Sigma_{t|t}^{(n)}) dx_t.$$

Cada integral se resuelve aplicando la propiedad de la convolución para densidades gaussianas:

$$\int \mathcal{N}(x_{t+1}; \alpha x_t, Q) \mathcal{N}(x_t; \mu, \Gamma) dx_t = \mathcal{N}(x_{t+1}; \alpha \mu, Q + \alpha^2 \Gamma).$$

De esta identidad se obtienen directamente los parámetros de la nueva mezcla predictiva:

$$\hat{x}_{t+1|t}^{(n)} = \alpha \hat{x}_{t|t}^{(n)}, \quad \Sigma_{t+1|t}^{(n)} = Q + \alpha^2 \Sigma_{t|t}^{(n)}, \quad \gamma_{t+1|t}^{(n)} = \gamma_{t|t}^{(n)}.$$

Así, la distribución predictiva $p(x_{t+1} | y_{1:t})$ se expresa como una GMM:

$$p(x_{t+1} | y_{1:t}) = \sum_{n=1}^{M_{t+1|t}} \gamma_{t+1|t}^{(n)} \mathcal{N}(x_{t+1}; \hat{x}_{t+1|t}^{(n)}, \Sigma_{t+1|t}^{(n)}).$$

Dado que las etapas de corrección y predicción preservan la estructura de mezcla gaussiana, queda demostrado que las distribuciones del filtro son GMM para todo t .

Es crucial notar que la obtención de una solución analítica cerrada en la etapa de corrección depende directamente de la aproximación de la función indicatriz $\mathcal{I}_{\mathcal{J}_i}(x_t)$ mediante una GMM (4.14). Esta aproximación transforma la integral restringida a la región \mathcal{J}_i en un producto de gaussianas resoluble analíticamente. Para regiones no acotadas, la aproximación GMM se realiza sobre una versión truncada de la región, gestionando implícitamente la integración en un dominio efectivo acotado.

Una alternativa, especialmente si la aproximación GMM de la indicatriz no fuera suficientemente precisa o para ciertos tipos de regiones, sería emplear métodos de cuadratura numérica como Gauss-Legendre para evaluar directamente la integral sobre \mathcal{J}_i . Sin embargo, la cuadratura introduce errores de aproximación numérica y no resulta en una GMM posterior pura, mientras que el enfoque de indicatriz GMM preserva la estructura GMM analíticamente.

4.7. Reducción de mezclas gaussianas

Un aspecto crítico en la implementación práctica del GSF es la gestión de su complejidad computacional. Como se observa en la etapa de corrección (Sección 4.5), el número de componentes de la mezcla gaussiana ($M_{t|t}$) crece multiplicativamente en cada iteración ($M_{t|t} = M_{t|t-1} \times K \times L$). Este crecimiento exponencial genera una carga computacional rápidamente insostenible [10, 30], volviendo inviable la ejecución en tiempo real cuando se emplean múltiples regiones o componentes. Por ejemplo, una aproximación PWLA con $L = 5$ segmentos y una GMM de $K = 10$ términos multiplicaría por 50 el número de componentes en cada paso.

Para evitar este crecimiento, se aplica un algoritmo de reducción de mezclas gaussianas (GMR) en cada iteración del filtro. El propósito es reemplazar la mezcla resultante por otra con un número fijo y reducido de componentes ($M_{\text{reducido}} \ll M_{t|t}$), preservando en lo posible su forma y sus momentos estadísticos principales (media y varianza).

En la literatura se han propuesto diversos métodos para la reducción de mezclas gaussianas [31]. Entre los enfoques más utilizados se destacan: los algoritmos greedy, que fusionan o eliminan componentes de manera iterativa según su peso o similitud

local [32, 33]; los métodos de optimización, que minimizan una medida de divergencia global entre la mezcla original y la reducida [34]; y los enfoques basados en clustering, que agrupan componentes cercanos en el espacio probabilístico [35]. Cada estrategia implica un compromiso diferente entre precisión y costo computacional, siendo los métodos greedy especialmente adecuados para aplicaciones en tiempo real.

En este trabajo se adopta un método de poda (pruning), perteneciente a la categoría greedy. El procedimiento consiste en descartar los componentes cuyo peso sea inferior a un umbral predefinido y limitar el número total de términos a un máximo permitido, seguido de la renormalización de los pesos restantes [36]. Su simplicidad y bajo costo computacional lo hacen adecuado para entornos de ejecución en tiempo real. El pseudocódigo del esquema de poda propuesto se presenta en el algoritmo 1.

La aplicación sistemática del algoritmo de poda permite mantener acotado el número de componentes del GSF-M en cada instante, evitando el crecimiento exponencial característico del GSF sin reducción. Si bien el descarte de términos de bajo peso puede introducir una leve pérdida de precisión, su impacto sobre la estimación resulta marginal siempre que el número máximo de componentes R_{\max} y el umbral de peso ϵ_{prune} se seleccionen de forma adecuada.

Algoritmo 1 Reducción de mezcla gaussiana mediante poda (Pruning)

Entrada: Mezcla inicial $M_{\text{in}} = \{(\gamma_k, \mu_k, \Sigma_k)\}_{k=1}^{N_{\text{in}}}$, número máximo de componentes R_{max} , umbral de peso ϵ_{prune}

Salida: Mezcla reducida $M_{\text{out}} = \{(\bar{\gamma}_j, \bar{\mu}_j, \bar{\Sigma}_j)\}_{j=1}^{N_{\text{out}}}$

Paso 1. Eliminación de componentes de bajo peso

```

1:  $M_{\text{temp}} \leftarrow \{(\gamma_k, \mu_k, \Sigma_k) : \gamma_k > \epsilon_{\text{prune}}\}$ 
2: if  $M_{\text{temp}} = \emptyset$  then
3:    $M_{\text{out}} \leftarrow \{(1, \mu_{\text{default}}, \Sigma_{\text{default}})\}$ 
4:   return  $M_{\text{out}}$ 
5: end if

```

Paso 2. Limitación del número máximo de componentes

```

6: if  $|M_{\text{temp}}| > R_{\text{max}}$  then
7:   Ordenar  $M_{\text{temp}}$  por peso  $\gamma_k$  (descendente)
8:    $M_{\text{cap}} \leftarrow$  primeros  $R_{\text{max}}$  elementos
9: else
10:   $M_{\text{cap}} \leftarrow M_{\text{temp}}$ 
11: end if

```

Paso 3. Renormalización de pesos

```

12:  $W_{\text{sum}} \leftarrow \sum_{(\gamma_j, \cdot, \cdot) \in M_{\text{cap}}} \gamma_j$ 
13: for cada componente  $(\gamma_j, \mu_j, \Sigma_j)$  en  $M_{\text{cap}}$  hacer
14:    $\bar{\gamma}_j \leftarrow \gamma_j / W_{\text{sum}}$ 
15:   Añadir  $(\bar{\gamma}_j, \mu_j, \Sigma_j)$  a  $M_{\text{out}}$ 
16: end for
17: return  $M_{\text{out}}$ 

```

De esta manera, se completa la formulación del filtro de suma de gaussianas modificado (GSF-M), el cual combina una aproximación analítica de la función indicatriz con estrategias de reducción de mezcla para lograr una implementación computacionalmente viable dentro del marco del filtrado bayesiano. En el siguiente capítulo, esta metodología se aplica al modelo Rint de una batería de ion-litio, adaptando la formulación del GSF-M a un sistema físico con entrada exógena y dinámica no lineal.

APLICACIÓN DEL GSF MODIFICADO A LA ESTIMACIÓN DEL SOC

Tras el desarrollo teórico del GSF-M, se aborda su aplicación al modelo Rint de una batería de ion-litio, con el propósito de evaluar su desempeño en un sistema físico representativo. La formulación incorpora explícitamente la corriente de carga y descarga como entrada exógena, lo que permite describir de manera más realista la evolución temporal del estado de carga (SOC). De este modo, se adapta el formalismo general del GSF-M al caso de un sistema no lineal con entrada, manteniendo la estructura de mezcla gaussiana y el control de la complejidad mediante el procedimiento de reducción de mezcla gaussiana (GMR).

El capítulo desarrolla la descripción del modelo dinámico de la batería, la formulación del filtro modificado considerando la entrada exógena y las consideraciones asociadas a su implementación computacional, preparando la base para su validación mediante simulaciones y datos experimentales.

5.1. Modelo Dinámico

El modelo Rint desarrollado en el Capítulo 2 sirve como punto de partida para el desarrollo presentado en este capítulo. A partir de las ecuaciones (2.9) y (2.10), obtenidas desde su formulación continua, se plantea una extensión del sistema escalar analizado en el Capítulo 4, incorporando una entrada exógena correspondiente a la corriente de carga

o descarga. A pesar de esta modificación, el sistema mantiene su carácter escalar, lo que permite adaptar el algoritmo de filtrado propuesto de manera directa a este caso de interés.

5.2. Filtro GSF modificado con entrada exógena

El filtro de suma de gaussianas modificado se adapta al sistema con entrada siguiendo la estructura general de predicción, corrección y reducción. Durante la etapa de predicción, cada componente gaussiana se propaga mediante el modelo lineal de transición de estado, incorporando el efecto directo de la corriente. En la corrección, la distribución de medición $p(y_t | x_t, u_t)$ se aproxima mediante la función indicatriz suavizada, utilizando mezclas gaussianas. Finalmente, el procedimiento de reducción de mezcla gaussiana se aplica en cada iteración para mantener acotada la complejidad computacional. Esta formulación permite extender el método del capítulo anterior a sistemas controlados o excitados externamente, preservando las propiedades de consistencia y convergencia del estimador.

La estructura general del algoritmo se mantiene idéntica a la presentada en el Capítulo 4, con la diferencia de que la dinámica y la medición ahora dependen explícitamente de la entrada u_t .

Asumiendo que la densidad predictiva en el paso t , $p(x_t | y_{1:t-1})$, es una mezcla gaussiana con $M_{t|t-1}$ componentes:

$$p(x_t | y_{1:t-1}) = \sum_{l=1}^{M_{t|t-1}} \gamma_{t|t-1}^{(l)} \mathcal{N}(x_t; \hat{x}_{t|t-1}^{(l)}, \Sigma_{t|t-1}^{(l)}), \quad (5.1)$$

el algoritmo GSF se desarrolla de la siguiente manera:

Inicialización: La recursión comienza con una única componente gaussiana ($M_{1|0} = 1$):

$$p(x_1 | y_0) = \mathcal{N}(x_1; \mu_1, P_1), \quad (5.2)$$

con peso $\gamma_{1|0}^{(1)} = 1$, media $\hat{x}_{1|0}^{(1)} = \mu_1$ y varianza $\Sigma_{1|0}^{(1)} = P_1$.

Etapa de Corrección:

Paso 1: Corrección con la medición continua y_t .

$$K_{t,y}^{(i,l)} = \Sigma_{t|t-1}^{(l)} a_i (R + a_i^2 \Sigma_{t|t-1}^{(l)})^{-1}, \quad (5.3)$$

$$\hat{x}_{t|t}^{(\text{int})} = \hat{x}_{t|t-1}^{(l)} + K_{t,y}^{(i,l)} (y_t - (a_i \hat{x}_{t|t-1}^{(l)} + b_i + Du_t)), \quad (5.4)$$

$$\Sigma_{t|t}^{(\text{int})} = (1 - K_{t,y}^{(i,l)} a_i) \Sigma_{t|t-1}^{(l)}. \quad (5.5)$$

Paso 2: Fusión con la información de la indicatriz.

$$K_{t,\rho}^{(j)} = \Sigma_{t|t}^{(\text{int})} (\phi_j^{(i)} + \Sigma_{t|t}^{(\text{int})})^{-1}, \quad (5.6)$$

$$\hat{x}_{t|t}^{(n)} = \hat{x}_{t|t}^{(\text{int})} + K_{t,\rho}^{(j)} (\rho_j^{(i)} - \hat{x}_{t|t}^{(\text{int})}), \quad (5.7)$$

$$\Sigma_{t|t}^{(n)} = (1 - K_{t,\rho}^{(j)}) \Sigma_{t|t}^{(\text{int})}. \quad (5.8)$$

Paso 3: Cálculo del peso y normalización.

$$\begin{aligned} \bar{\gamma}_{t|t}^{(n)} &= \gamma_{t|t-1}^{(l)} \beta_j^{(i)} \mathcal{N}\left(y_t; a_i \hat{x}_{t|t-1}^{(l)} + b_i + Du_t, R + a_i^2 \Sigma_{t|t-1}^{(l)}\right) \\ &\quad \times \mathcal{N}\left(\rho_j^{(i)}; \hat{x}_{t|t}^{(\text{int})}, \phi_j^{(i)} + \Sigma_{t|t}^{(\text{int})}\right). \end{aligned} \quad (5.9)$$

El número total de componentes generadas en esta etapa es $M_{t|t} = M_{t|t-1} \times K \times L$. Los pesos finales $\gamma_{t|t}^{(n)}$ se obtienen normalizando la suma de todos los pesos no normalizados:

$$\gamma_{t|t}^{(n)} = \frac{\bar{\gamma}_{t|t}^{(n)}}{\sum_{s=1}^{M_{t|t}} \bar{\gamma}_{t|t}^{(s)}}. \quad (5.10)$$

La densidad posterior resultante es una mezcla gaussiana:

$$p(x_t | y_{1:t}) = \sum_{n=1}^{M_{t|t}} \gamma_{t|t}^{(n)} \mathcal{N}(x_t; \hat{x}_{t|t}^{(n)}, \Sigma_{t|t}^{(n)}). \quad (5.11)$$

Etapas de Predicción:

$$\gamma_{t+1|t}^{(n)} = \gamma_{t|t}^{(n)}, \quad (5.12)$$

$$\hat{x}_{t+1|t}^{(n)} = A \hat{x}_{t|t}^{(n)} + Bu_t, \quad (5.13)$$

$$\Sigma_{t+1|t}^{(n)} = Q + A^\top \Sigma_{t|t}^{(n)} A. \quad (5.14)$$

La densidad predictiva para el tiempo $t + 1$, $p(x_{t+1} | y_{1:t})$, es también una mezcla gaussiana con el mismo número de componentes que la posterior ($M_{t+1|t} = M_{t|t}$):

$$p(x_{t+1} | y_{1:t}) = \sum_{n=1}^{M_{t+1|t}} \gamma_{t+1|t}^{(n)} \mathcal{N}(x_{t+1}; \hat{x}_{t+1|t}^{(n)}, \Sigma_{t+1|t}^{(n)}). \quad (5.15)$$

Esta densidad predictiva sirve como entrada para la etapa de corrección en el siguiente paso de tiempo.

Reducción de componentes:

Como se mencionó en el Capítulo 4, se requiere de un método de gestión de la complejidad para que el algoritmo sea viable computacionalmente. Por lo tanto, junto a los pasos anteriores, es necesario implementar un algoritmo de reducción de mezcla gaussiana en las etapas donde el número de componentes crezca significativamente, evitando así la explosión combinatoria del filtro.

5.3. Implementación del Algoritmo

Esta sección presenta las principales recomendaciones para la implementación computacional del GSF-M en un entorno de simulación. El objetivo es establecer las consideraciones prácticas necesarias para garantizar una ejecución estable, eficiente y numéricamente consistente del método.

En primer lugar, se sugiere adoptar una estructura modular que separe las etapas de corrección, predicción y reducción de mezcla. Esta organización facilita la depuración del código, la reutilización de funciones y la integración del filtro en plataformas de control o entornos de simulación como Matlab/Simulink. Asimismo, se recomienda mantener un número inicial acotado de componentes gaussianas y aplicar el algoritmo de poda de manera sistemática para evitar el crecimiento exponencial de la mezcla.

El intervalo de muestreo debe seleccionarse de acuerdo con la dinámica del sistema y la frecuencia de actualización de las mediciones, de modo que se preserve el equilibrio entre precisión y carga computacional. Además, los parámetros de covarianza del ruido de proceso (Q) y medición (R) deben calibrarse de forma coherente con el nivel de incertidumbre del modelo y los sensores empleados.

Finalmente, los Algoritmos 2, 3 y 4 resumen la estructura general del filtro y las operaciones principales que deben implementarse en cada etapa. Estos esquemas constituyen una guía práctica para la programación del GSF-M, especificando las entradas, salidas y secuencia lógica de ejecución requeridas para su correcta aplicación.

La formulación presentada permite implementar de manera completa el filtro de suma de gaussianas modificado sobre el modelo Rint, incorporando la corriente como entrada exógena y manteniendo el control de la complejidad mediante la reducción de mezcla gaussiana. Con ello, el GSF-M queda adaptado para operar sobre un sistema físico de batería de ion-litio, preservando las propiedades analíticas del filtrado bayesiano y garantizando una ejecución computacional viable. El capítulo siguiente evalúa su desempeño mediante simulaciones y ensayos experimentales, analizando la precisión y eficiencia del estimador propuesto frente a los métodos de referencia.

Algoritmo 2 Ejecución general del filtro de suma de gaussianas modificado (GSF-M)

Entradas: observaciones $\{y_t\}_{t=1}^T$, entradas $\{u_t\}_{t=1}^T$, parámetros del modelo (A, B, Q, R) , límites de mezcla $(\epsilon_{\text{prune}}, R_{\text{max}})$.

Salida: estimaciones del estado $\{\hat{x}_{t|t}\}_{t=1}^T$ y covarianzas asociadas $\{\Sigma_{t|t}\}_{t=1}^T$.

- 1: **Inicializar:** $p(x_1|y_0) = \mathcal{N}(x_1; \mu_1, P_1)$ con $\gamma_{1|0}^{(1)} = 1$
 - 2: **for** $t = 1$ hasta T **hacer**
 - 3: **Etapa de corrección:**
 Aplicar el procedimiento de corrección con la medición considerando la entrada u_t para obtener $p(x_t|y_{1:t}, u_{1:t}) = \sum_n \gamma_{t|t}^{(n)} \mathcal{N}(x_t; \hat{x}_{t|t}^{(n)}, \Sigma_{t|t}^{(n)})$
 - 4: **Etapa de predicción:**
 Propagar cada componente mediante $f(x_t, u_t)$ para obtener $p(x_{t+1}|y_{1:t}) = \sum_n \gamma_{t+1|t}^{(n)} \mathcal{N}(x_{t+1}; \hat{x}_{t+1|t}^{(n)}, \Sigma_{t+1|t}^{(n)})$
 - 5: **Reducción de mezcla:**
 Aplicar el algoritmo de poda si $M_{t|t}$ excede R_{max}
 - 6: **end for**
-

Algoritmo 3 Etapa de corrección del filtro GSF-M

Entradas: densidad predictiva $p(x_t|y_{1:t-1})$, medición y_t , entrada u_t , parámetros de la función $g(x)$ y mezcla indicatriz. **Salida:** densidad posterior $p(x_t|y_{1:t}, u_{1:t})$.

- 1: **for** cada componente $l = 1, \dots, M_{t|t-1}$ **hacer**
 - 2: **for** cada región i de la función $g(x)$ **hacer**
 - 3: **for** cada componente j de la mezcla indicatriz **hacer**
 - 4: Calcular la ganancia de Kalman: $K_{t,y}^{(i,l)} = \Sigma_{t|t-1}^{(l)} a_i (R + a_i^2 \Sigma_{t|t-1}^{(l)})^{-1}$
 - 5: Actualizar media intermedia: $\hat{x}_{t|t}^{(\text{int})} = \hat{x}_{t|t-1}^{(l)} + K_{t,y}^{(i,l)} (y_t - (a_i \hat{x}_{t|t-1}^{(l)} + b_i + Du_t))$
 - 6: Actualizar varianza intermedia: $\Sigma_{t|t}^{(\text{int})} = (1 - K_{t,y}^{(i,l)} a_i) \Sigma_{t|t-1}^{(l)}$
 - 7: Fusionar con la indicatriz:
 $K_{t,\rho}^{(j)} = \Sigma_{t|t}^{(\text{int})} (\phi_j^{(i)} + \Sigma_{t|t}^{(\text{int})})^{-1}$
 $\hat{x}_{t|t}^{(n)} = \hat{x}_{t|t}^{(\text{int})} + K_{t,\rho}^{(j)} (\rho_j^{(i)} - \hat{x}_{t|t}^{(\text{int})})$
 $\Sigma_{t|t}^{(n)} = (1 - K_{t,\rho}^{(j)}) \Sigma_{t|t}^{(\text{int})}$
 - 8: Calcular peso no normalizado:
 $\bar{\gamma}_{t|t}^{(n)} = \gamma_{t|t-1}^{(l)} \beta_j^{(i)} \mathcal{N}(y_t; a_i \hat{x}_{t|t-1}^{(l)} + b_i + Du_t, R + a_i^2 \Sigma_{t|t-1}^{(l)}) \mathcal{N}(\rho_j^{(i)}; \hat{x}_{t|t}^{(\text{int})}, \phi_j^{(i)} + \Sigma_{t|t}^{(\text{int})})$
 - 9: **end for**
 - 10: **end for**
 - 11: **end for**
 - 12: Normalizar pesos: $\gamma_{t|t}^{(n)} = \frac{\bar{\gamma}_{t|t}^{(n)}}{\sum_s \bar{\gamma}_{t|t}^{(s)}}$
-

Algoritmo 4 Etapa de predicción del filtro GSF-M

Entradas: densidad posterior $p(x_t|y_{1:t}, u_{1:t})$, entrada u_t , parámetros del modelo (A, B, Q) .

Salida: densidad predictiva $p(x_{t+1}|y_{1:t})$.

- 1: **for** cada componente $n = 1, \dots, M_{t|t}$ **hacer**
- 2: Propagar la media: $\hat{x}_{t+1|t}^{(n)} = A\hat{x}_{t|t}^{(n)} + Bu_t$
- 3: Propagar la varianza: $\Sigma_{t+1|t}^{(n)} = A\Sigma_{t|t}^{(n)}A^\top + Q$
- 4: Conservar el peso: $\gamma_{t+1|t}^{(n)} = \gamma_{t|t}^{(n)}$
- 5: **end for**
- 6: Construir la densidad predictiva:

$$p(x_{t+1}|y_{1:t}) = \sum_{n=1}^{M_{t|t}} \gamma_{t+1|t}^{(n)} \mathcal{N}(x_{t+1}; \hat{x}_{t+1|t}^{(n)}, \Sigma_{t+1|t}^{(n)})$$

PRUEBAS Y RESULTADOS

Una vez desarrollada la formulación del filtro de suma de gaussianas modificado (GSF-M), se procede a validar su desempeño aplicándolo al modelo Rint de una batería de ion-litio. El estudio considera tanto simulaciones como pruebas experimentales, con el propósito de evaluar la precisión y consistencia del estimador frente al comportamiento real del sistema.

Además, se incluye una comparación con tres métodos de referencia. Los filtros basados en Kalman (EKF-PWL y UKF-PWL) representan el estándar industrial de bajo costo, mientras que el filtro de partículas (PF-PWL) se ha configurado con un número elevado de partículas ($N = 10,000$) para actuar como referencia de desempeño numérico ideal. El objetivo es demostrar que el GSF-M logra acercarse cualitativamente al desempeño de este *ground truth* numérico, superando las limitaciones de los métodos gaussianos simples.

Todas las simulaciones y análisis se realizaron en Matlab, empleando scripts diseñados para ejecutar los cuatro estimadores bajo condiciones equivalentes. Las métricas cuantitativas se calcularon sobre los mismos conjuntos de datos y utilizando el mismo equipo de cómputo, garantizando consistencia tanto en la evaluación del desempeño como en los tiempos de ejecución reportados.

6.1. Ajuste de la Función Indicatriz mediante Mezclas Gaussianas

La función indicatriz cumple un rol esencial en la etapa de corrección del filtro de suma de gaussianas modificado (GSF-M), pues define la región de validez del estado dentro del espacio de medición y determina la ponderación de las componentes de la mezcla. Para obtener una versión suavizada de esta función, se evaluaron dos métodos de aproximación basados en mezclas gaussianas.

El primero corresponde a una aproximación por mínimos cuadrados (LSQ), donde la

función rectangular ideal se aproxima como una suma ponderada de gaussianas distribuidas en el dominio. Sus pesos se obtienen resolviendo un problema de mínimos cuadrados con restricción de no negatividad, logrando una implementación simple aunque dependiente del número de componentes K .

El segundo método, propuesto por Cedeño [13], utiliza un ajuste estadístico mediante modelos de mezcla de gaussianas entrenados con el algoritmo de máxima verosimilitud, implementado en `fitgmdist` de Matlab [37]. Este enfoque ofrece mayor flexibilidad y precisión en los bordes de la región activa, a costa de un mayor tiempo de cómputo que, al realizarse *offline*, no afecta la ejecución del filtro.

Ambos métodos se evaluaron para distintos números de componentes ($K = 5, 10, 15$). Las Figuras 6.1 y 6.2 muestran los resultados, donde el método LSQ produce transiciones más difusas, mientras que el ajuste GMM reproduce mejor la forma ideal.

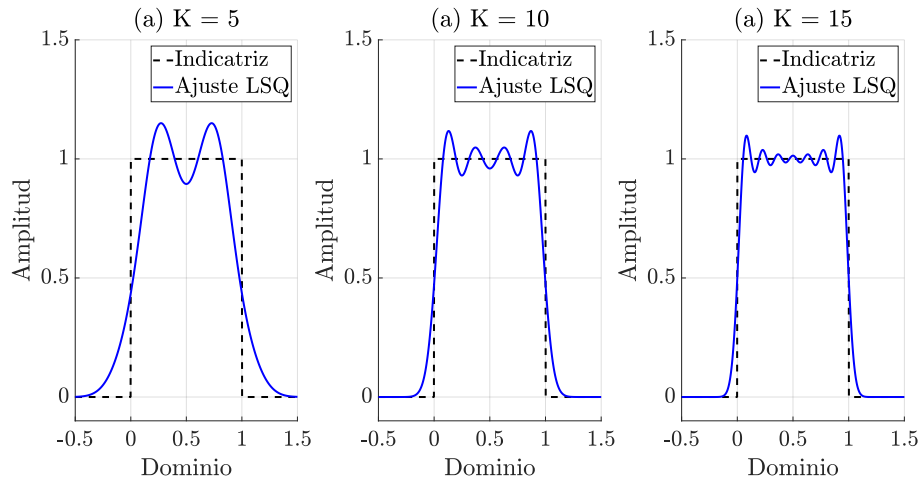


Figura 6.1: Aproximación de la función indicatriz mediante el método LSQ para distintos valores de $K = 5, 10, 15$.

La Figura 6.3 muestra que el método basado en GMM presenta un error cuadrático medio consistentemente menor. Dado que su mayor costo computacional se absorbe en una etapa de entrenamiento *offline* sin afectar la ejecución en tiempo real, se seleccionó este método para priorizar la precisión del estimador.

Finalmente, se adoptó la aproximación obtenida mediante `fitgmdist` con $K = 20$ y 10^7 muestras aleatorias generadas en $[0, 1]$, configuración utilizada también por Cedeño [13]. Se añadió una constante pequeña a las varianzas estimadas para evitar singularidades numéricas y mejorar la suavidad en los bordes del intervalo activo. La mezcla resultante, ilustrada en la Figura 6.4, se empleará en todas las simulaciones posteriores como aproximación fija de la función indicatriz en el filtro GSF-M.

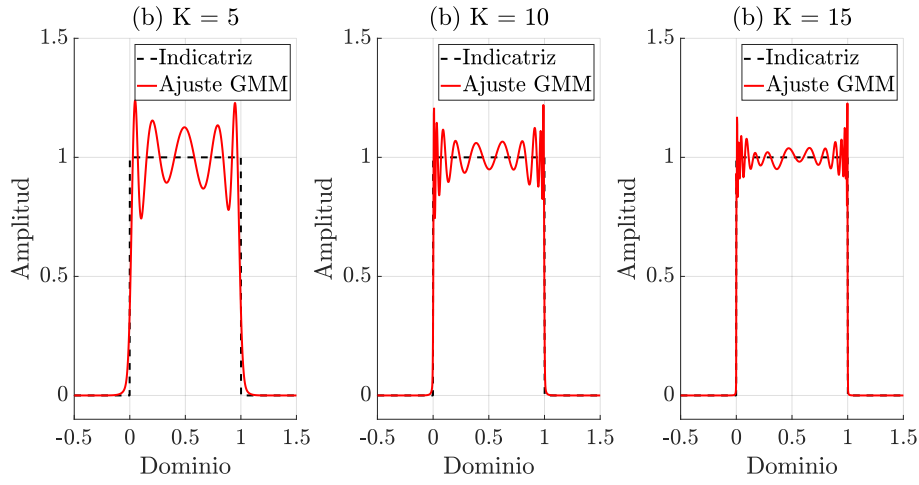


Figura 6.2: Aproximación de la función indicatriz mediante el método fitgmdist para distintos valores de $K = 5, 10, 15$.

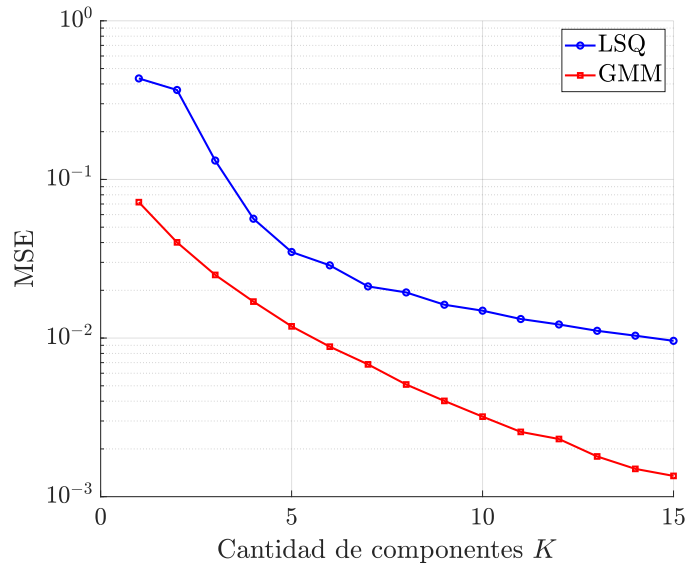


Figura 6.3: Comparación del error cuadrático medio entre los métodos LSQ y GMM.

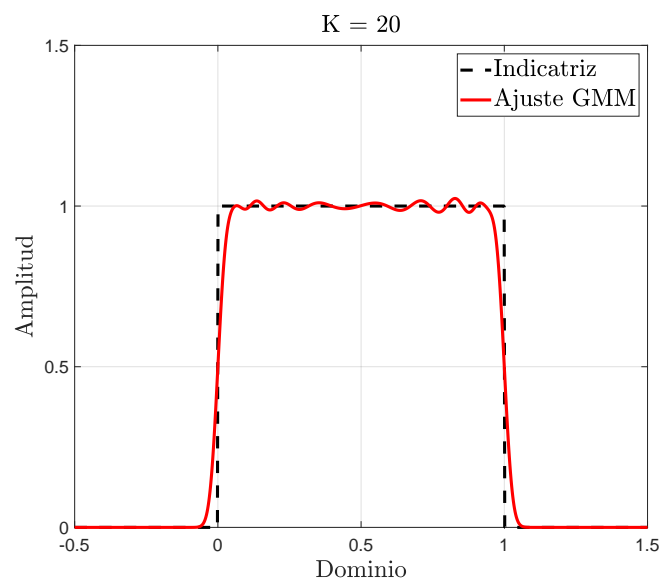


Figura 6.4: Aproximación final de la función indicatriz mediante GMM.

6.2. Configuración de Simulación

Esta sección describe los parámetros del modelo, las condiciones de simulación y los perfiles de corriente utilizados para validar el filtro propuesto. El modelo se basa en las ecuaciones (2.9) y (2.10), cuyas matrices dependen de los parámetros físicos definidos en el Capítulo 2. Se adoptó una eficiencia de carga unitaria ($\eta = 1$) y un período de muestreo de $T_s = 1$ s, resultando:

$$A = 1, \quad B = -\frac{100 \eta T_s}{Q_N \cdot 3600} = -\frac{100}{2 \cdot 3600} \approx -0,0139, \quad D = -R_0 = -0,1 \quad (6.1)$$

La función no lineal $g(x)$ corresponde al polinomio de noveno orden definido en el Capítulo 2, que ajusta la relación OCV-SOC según la ecuación (2.11). Para su evaluación se utilizó una aproximación lineal por partes con 30 tramos. El SOC se expresa en porcentaje dentro del rango $[0, 100]$, lo que introduce un factor de escala adicional en la matriz B .

Las covarianzas del proceso y de medición se fijaron en $Q = 10^{-6}$ y $R = 10^{-4}$, valores que reflejan un sistema suavemente variable y sensores de alta precisión. Las condiciones iniciales fueron $\mu_0 = 70$ y $P_0 = 100$, representando un conocimiento limitado del estado inicial frente a un SOC real de 100 %.

Los perfiles de carga y descarga utilizados en los experimentos se describen utilizando la notación de tasa C (*C-rate*), la cual normaliza la magnitud de la corriente respecto a la capacidad nominal de la batería (Q_N). Una tasa de 1C corresponde a la corriente necesaria para descargar completamente la batería en una hora ($I = 1 \cdot Q_N$). De este modo, una tasa de 0.5C implica una descarga constante de dos horas, mientras que el uso de tasas variables entre 0 y 1C permite evaluar el sistema ante demandas de corriente fluctuantes.

Se definieron tres escenarios de validación con un período de simulación suficiente para cubrir el rango completo de descarga. Los dos primeros corresponden a simulaciones, mientras que el tercero emplea datos medidos en laboratorio.

Experimento 1: Descarga a Corriente Constante (0.5C). Se aplicó una corriente constante de 1 A (0.5C) para evaluar el desempeño del filtro en condiciones cuasiestacionarias.

Experimento 2: Descarga por Escalones de Corriente (0–1C). La corriente varió entre 0 A y 2 A (0–1C), generando transiciones abruptas en la tensión terminal, lo que permite analizar la capacidad de adaptación del filtro.

Experimento 3: Datos Experimentales. Se utilizaron datos medidos de corriente y voltaje obtenidos mediante una fuente DC programable que emuló una batería de ion-litio. La celda fue descargada con escalones de corriente bajo una carga variable. Más detalles se entregan en el apéndice A.

6.3. Métricas de Evaluación

El desempeño de los filtros se evaluó considerando la precisión de estimación y la eficiencia computacional. La precisión se cuantificó mediante la raíz del error cuadrático medio (RMSE), definida como:

$$\text{RMSE} = \sqrt{\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T (x_t - \hat{x}_t)^2} \quad (6.2)$$

donde x_t corresponde al SOC real simulado y \hat{x}_t al valor estimado. La eficiencia computacional se evaluó mediante el tiempo medio de ejecución por iteración, calculado con las funciones `tic/toc` de Matlab [38].

6.4. Resultados de Estimación

En esta sección se presentan los resultados obtenidos en los tres experimentos definidos anteriormente, con el propósito de validar el desempeño del filtro de suma de gaussianas modificado (GSF-M) y compararlo con los estimadores de referencia. En todos los casos se utilizaron los mismos parámetros del modelo, condiciones iniciales y niveles de ruido, garantizando una comparación equitativa.

Los filtros basados en particiones lineales (EKF-PWL, UKF-PWL y PF-PWL) trabajaron sobre la misma partición por tramos de la curva OCV-SOC que el GSF-M, constituida por 50 segmentos lineales. Con ello, todos los algoritmos compartieron una base comparativa homogénea. Como se mencionó, el PF-PWL se configuró con 10,000 partículas para establecer la cota de desempeño alcanzable.

Experimento 1: Descarga a corriente constante (0.5C). En este primer experimento, la batería se descargó a una corriente constante de 1 A durante un tiempo total de 7200 s. Este escenario permite evaluar la coherencia del modelo bajo condiciones cuasiestacionarias. Las señales de entrada y salida utilizadas en la simulación se muestran en la Figura 6.5.

La Figura 6.6 presenta la evolución temporal del error de estimación del SOC. Se observa que los métodos basados en Kalman (EKF-PWL y UKF-PWL) requieren un intervalo prolongado para converger hacia el error nulo, esto se debe a que ambos algoritmos operan bajo aproximaciones locales, mientras el EKF aproxima la no linealidad mediante una linealización local basada en Jacobianos, el UKF realiza una aproximación local de la distribución de probabilidad mediante puntos sigma. En escenarios de inicialización incorrecta, estas aproximaciones locales del problema de estimación resultan insuficientes para capturar la naturaleza de la densidad posterior. En contraste, el GSF-M exhibe una convergencia rápida, prácticamente superpuesta a la del PF-PWL, esto indica que la mezcla

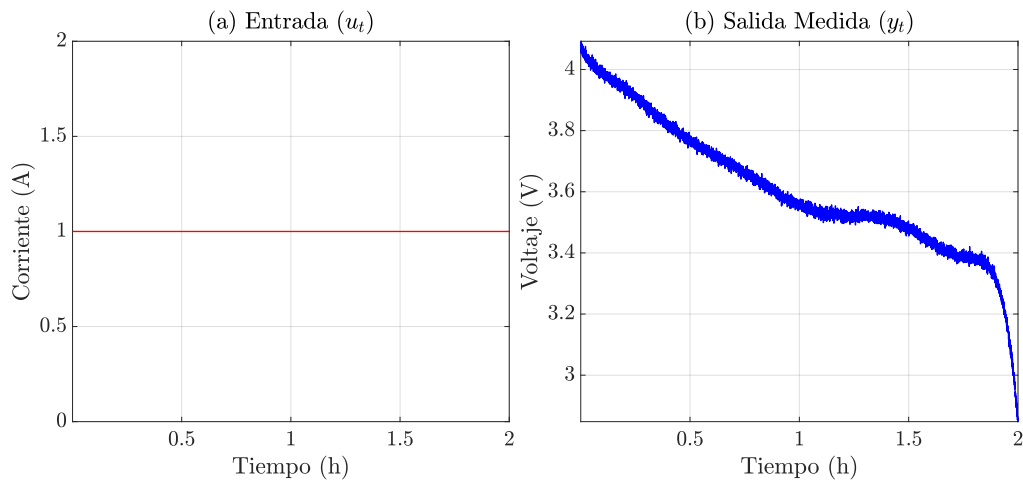


Figura 6.5: Señales de corriente y voltaje empleadas en el Experimento 1.

de gaussianas logra aproximar la densidad posterior con una fidelidad comparable a la solución de partículas en este escenario.

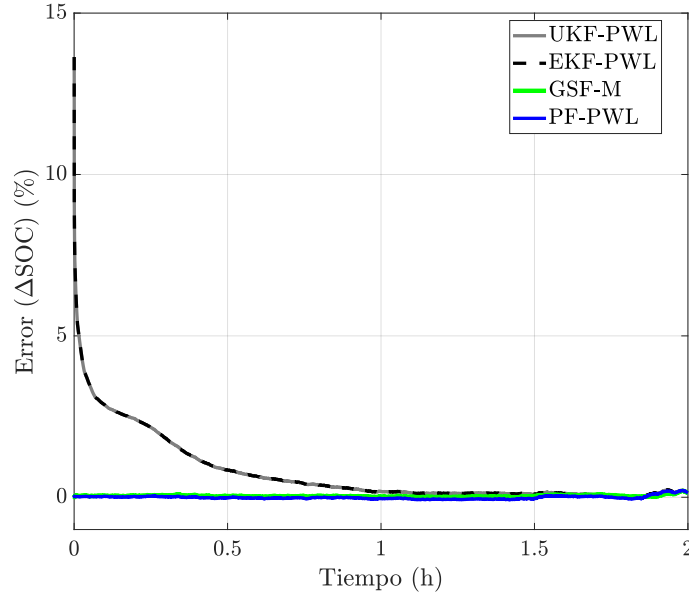


Figura 6.6: Evolución del error de estimación del SOC en el Experimento 1.

A modo de validación adicional, se comparó la evolución del error del PF-PWL con la implementación estándar de Matlab [39] (sin PWL). La Figura 6.7 muestra que ambos enfoques presentan tendencias y magnitudes de error comparables, lo que confirma que la aproximación PWL no degrada significativamente el desempeño del filtro de partículas y valida su uso como referencia para los demás métodos.

Experimento 2: Descarga por Escalones de Corriente (0–1C). En este caso, la corriente varía de forma escalonada entre 0 A y 2 A, generando variaciones abruptas en la tensión terminal. La Figura 6.8 muestra las señales aplicadas.

La Figura 6.9 presenta la evolución del error de estimación. En este escenario dinámico, los métodos Kalman vuelven a mostrar una convergencia lenta. Por el contrario, el GSF-M mantiene un error bajo y una respuesta rápida, exhibiendo un desempeño cualitativamente similar al del PF-PWL. Esto refuerza la hipótesis de que el GSF-M es capaz de capturar la dinámica compleja del sistema con una precisión cercana a la del filtro de partículas.

Experimento 3: Datos Experimentales. Finalmente, se evaluó el desempeño utilizando datos reales obtenidos desde un set-up experimental (ver Apéndice A). Las señales

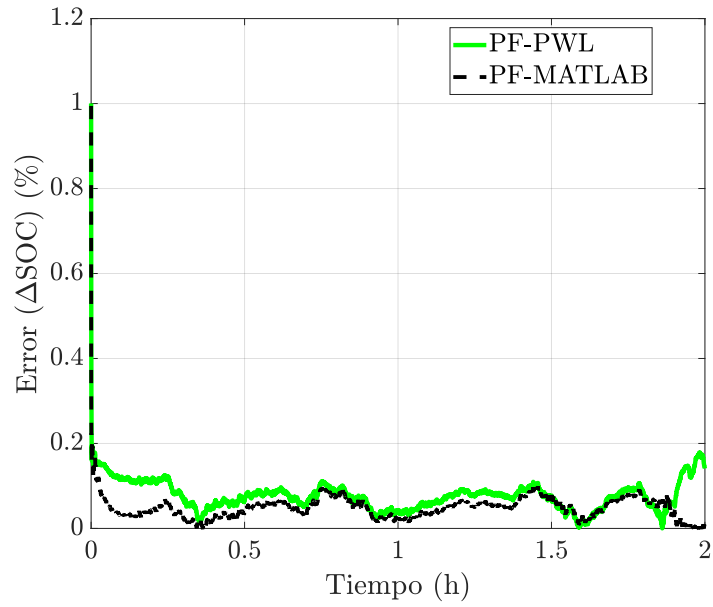


Figura 6.7: Comparación de la evolución del error de estimación en el Experimento 1 para dos filtros de partículas.

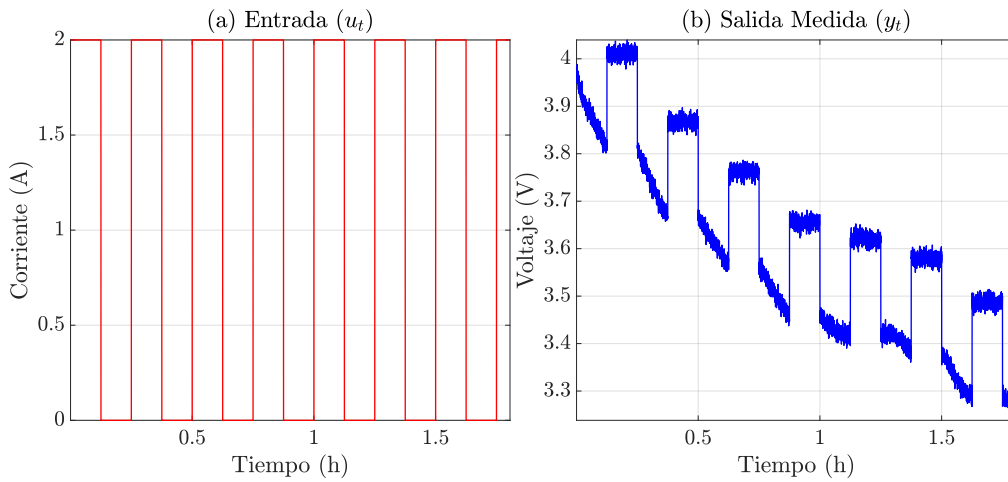


Figura 6.8: Señales de corriente y voltaje empleadas en el Experimento 2.

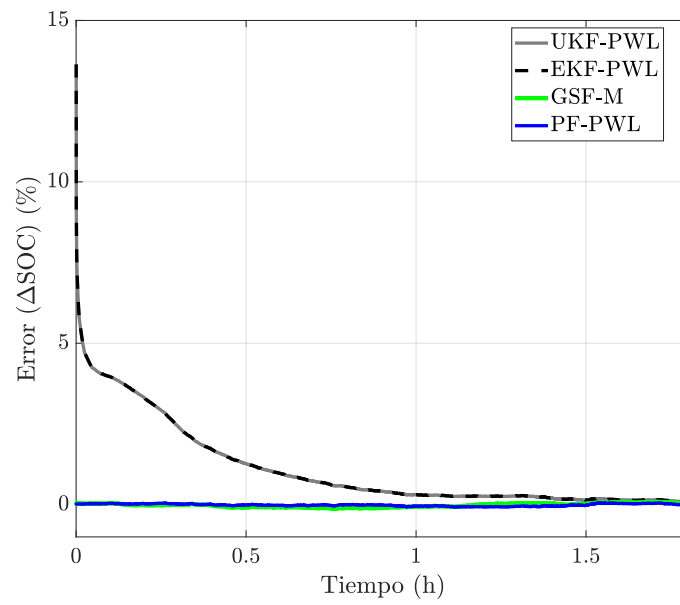


Figura 6.9: Evolución del error de estimación del SOC en el Experimento 2.

medidas se muestran en la Figura 6.10.

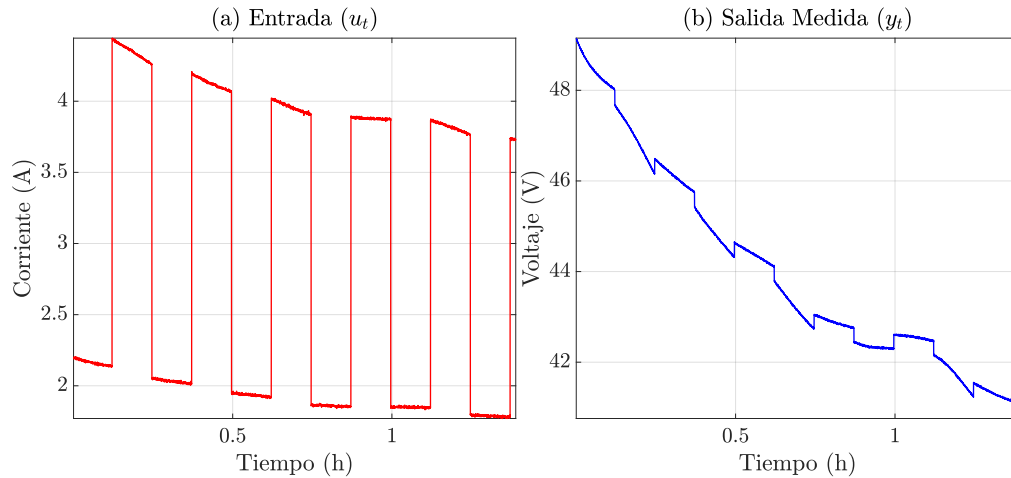


Figura 6.10: Señales experimentales de corriente y voltaje utilizadas en el Experimento 3.

La Figura 6.11 presenta la evolución del error de estimación utilizando como referencia una trayectoria simulada del SOC verdadero. En este caso, los filtros de Kalman muestran una reducción de error gradual pero lenta.

Es notable observar que el GSF-M logra un rendimiento global alineado con el del PF-PWL. De hecho, en la etapa inicial, el GSF-M muestra una convergencia incluso más ágil bajo estas condiciones de incertidumbre. Esta ventaja se atribuye a su estructura determinista, la cual evita el empobrecimiento de muestras que suele limitar la respuesta transitoria de los filtros de partículas, permitiéndole resolver la ambigüedad inicial con mayor eficiencia. La Figura 6.12 permite apreciar cómo el GSF-M se adhiere rápidamente a la trayectoria real, validando su robustez en entornos experimentales.

La Figura 6.13 evidencia la ventaja estructural del GSF-M en la representación de la densidad posterior. A diferencia del EKF-PWL, limitado por su aproximación gaussiana simple, el GSF-M reconstruye fielmente la distribución real del estado. Esta capacidad resulta decisiva frente a un filtro de partículas estándar, el cual podría fallar en este escenario si el número de muestras no logra cubrir la región de alta verosimilitud debido a la incorrecta inicialización. El GSF-M, al operar con una base analítica de mezclas, garantiza la preservación de información en estas regiones críticas desde la primera iteración, logrando así una convergencia robusta sin depender de la variabilidad del muestreo numérico.

6.5. Análisis Cuantitativo

Para obtener una evaluación estadísticamente representativa, se realizaron 100 simulaciones de Monte Carlo por escenario, variando únicamente la semilla de los

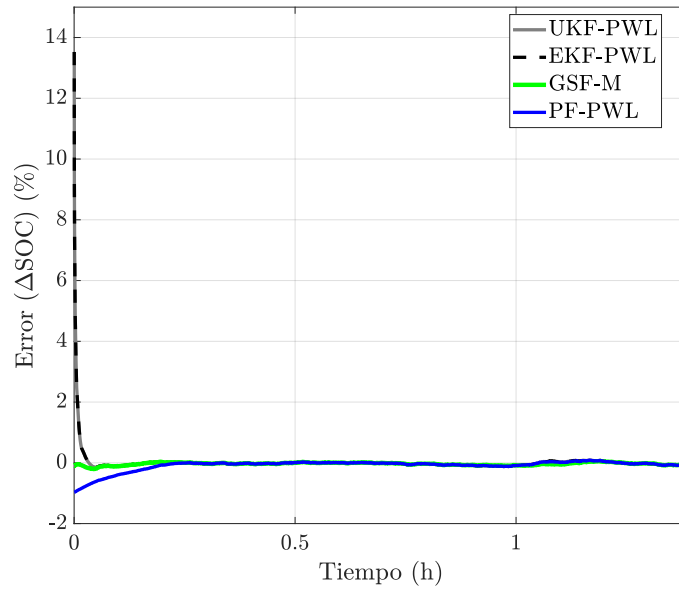


Figura 6.11: Evolución del error de estimación del SOC en el Experimento 3.

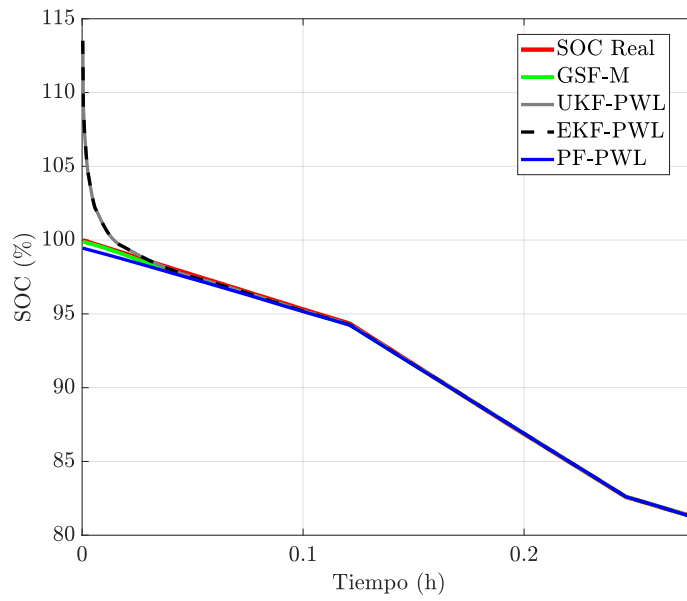


Figura 6.12: Evolución del SOC en el Experimento 3.

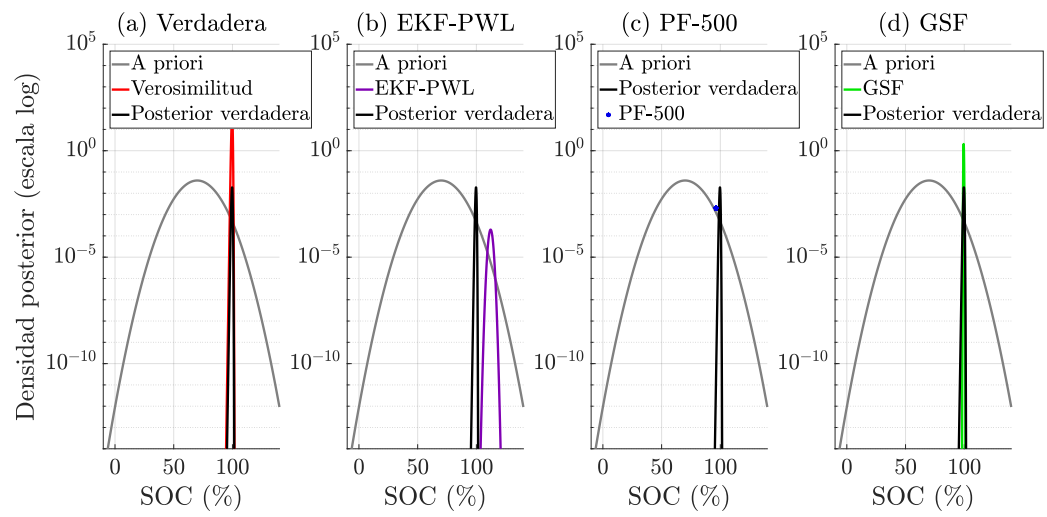


Figura 6.13: Comparación entre la densidad posterior verdadera y las aproximaciones obtenidas.

generadores de ruido de proceso y medición en cada iteración. La Tabla 6.1 resume los resultados obtenidos, presentando el valor medio del RMSE y su desviación estándar para cada método.

En todos los casos, los algoritmos basados en Kalman exhiben los errores promedio más altos. Lo más relevante es que el GSF-M alcanza valores de RMSE cercanos a los del PF-PWL en los tres experimentos, situándose próximo al límite de desempeño numérico establecido por este último. En el caso experimental (Exp. 3), el GSF-M obtiene un desempeño competitivo con la referencia; la ventaja numérica observada en las métricas globales de este escenario se explica principalmente por la rápida velocidad de convergencia del GSF-M ante la incertidumbre inicial, característica que le permite reducir el error acumulado de manera eficiente durante la fase inicial de la estimación.

Tabla 6.1: RMSE y desviación estándar de 100 simulaciones Monte Carlo.

Experimento	Métrica	EKF-PWL	UKF-PWL	PF-PWL	GSF-M
Exp. 1: 0.5C	RMSE (%)	1.1375	1.1375	0.0870	0.1448
	Std. Dev.	0.1627	0.1627	0.0433	0.1019
Exp. 2: 0-1C	RMSE (%)	1.4387	1.4387	0.0795	0.2249
	Std. Dev.	0.2185	0.2185	0.0445	0.1918
Exp. 3: Real	RMSE (%)	0.3985	0.3985	0.0610	0.0559
	Std. Dev.	0.0009	0.0009	0.0096	0.0047

Finalmente, la Tabla 6.2 detalla el tiempo medio de ejecución por paso. Si bien el GSF-M registra el mayor costo computacional, este valor resulta marginal considerando dinámica del sistema, donde los procesos de relajación poseen constantes de tiempo del orden de cientos de segundos [20]. Dado que esto permite operar con períodos de muestreo amplios, la carga computacional del algoritmo no compromete la implementación en tiempo real, justificándose este incremento como un compromiso aceptable a cambio de la robustez obtenida.

En conjunto, los resultados demuestran que la integración del modelo lineal por tramos con la aproximación de la indicatriz mediante mezclas de gaussianas permite al estimador manejar eficientemente fuertes no linealidades. Esta estrategia conjunta facilita alcanzar un desempeño cualitativamente similar al del PF-PWL, superando las limitaciones de convergencia observadas en los filtros basados en Kalman.

Tabla 6.2: Tiempo medio de ejecución por filtro en 100 simulaciones Monte Carlo.

Experimento	Métrica	EKF-PWL	UKF-PWL	PF-PWL	GSF-M
Exp. 1: 0.5C	Media (ms)	0.080	0.088	1.499	4.530
	Std. Dev. (ms)	0.001	0.001	0.010	0.049
Exp. 2: 0-1C	Media (ms)	0.081	0.089	1.485	4.557
	Std. Dev. (ms)	0.001	0.001	0.006	0.020
Exp. 3: Real	Media (ms)	0.077	0.085	1.526	4.548
	Std. Dev. (ms)	0.001	0.001	0.006	0.021

CONCLUSIONES

7.1. Resumen

En este trabajo se desarrolló e implementó un estimador de estado basado en un filtro de suma de gaussianas modificado (GSF-M) para la estimación del estado de carga (SOC) en baterías de ion-litio, utilizando el modelo eléctrico Rint como base. La innovación principal consistió en la integración de un modelo lineal por tramos (PWL) con una aproximación de la función indicatriz mediante mezclas de gaussianas. Esta estrategia conjunta permitió derivar expresiones analíticas cerradas para las etapas del filtrado bayesiano, evitando la necesidad de integración numérica en tiempo real.

Se implementó un entorno de simulación en Matlab para evaluar el desempeño del GSF-M y compararlo con métodos de referencia: el filtro de Kalman extendido (EKF-PWL), el filtro de Kalman unscented (UKF-PWL) y el filtro de partículas (PF-PWL). El protocolo de validación abarcó escenarios de descarga a corriente constante, perfiles dinámicos escalonados y un caso de estudio basado en mediciones experimentales reales. Todo el análisis cuantitativo fue respaldado por 100 simulaciones de Monte Carlo para garantizar la validez estadística de los resultados.

Los resultados evidencian que el GSF-M entrega estimaciones precisas del SOC, alcanzando un nivel de error comparable al de la referencia numérica (PF-PWL) y superando significativamente a los filtros basados en Kalman. Su principal fortaleza se identificó en la etapa transitoria bajo alta incertidumbre inicial, donde su estructura de mezcla le permite reducir el error de estimación con mayor rapidez que los métodos de referencia.

7.2. Conclusiones

La presente investigación abordó el desafío de estimar el estado de carga en baterías de ion-litio, cumpliendo satisfactoriamente con los objetivos generales y específicos planteados. El trabajo culminó con la formulación y validación del filtro de suma de gaussianas modificado (GSF-M), demostrando que la sustitución de la función indicatriz por una mezcla de gaussianas constituye una solución efectiva para incorporar modelos lineales por tramos dentro de un esquema bayesiano cerrado. A partir de la evidencia experimental y simulada recopilada, se desprenden las siguientes conclusiones respecto al desempeño, costo computacional y estructura del estimador propuesto.

En cuanto a precisión y convergencia, los filtros basados en Kalman presentaron consistentemente los mayores errores debido a las limitaciones inherentes de la aproximación local. Por el contrario, el GSF-M logró un desempeño cercano al límite numérico establecido por el filtro de partículas configurado con un alto número de muestras. Si bien en simulaciones ideales el método de referencia obtuvo errores marginalmente menores, en el escenario experimental el GSF-M mostró una ventaja práctica relevante: una rápida velocidad de convergencia ante condiciones iniciales inciertas. Esta característica es atribuible a su capacidad para preservar información sobre la distribución real del estado sin sufrir el empobrecimiento de muestras que caracteriza a los métodos estocásticos en las primeras iteraciones.

Respecto a la viabilidad computacional, si bien el GSF-M conlleva un costo mayor que los filtros de Kalman y superior al del filtro de partículas utilizado en este estudio, los tiempos de ejecución obtenidos resultan compatibles con la dinámica característica de las baterías de ion-litio. Este incremento en el costo de cómputo se justifica plenamente como un compromiso de diseño necesario para obtener una estimación robusta, analíticamente consistente y libre de la variabilidad aleatoria del muestreo.

Finalmente, la estructura de mezcla de gaussianas demostró ser eficaz para representar densidades de probabilidad tanto complejas como angostas. Así, el método propuesto conjuga la flexibilidad del filtrado de partículas con la naturaleza determinista de los filtros gaussianos, ofreciendo una solución robusta para aplicaciones con condiciones iniciales críticas.

7.3. Trabajo Futuro

Como trabajo futuro se propone ampliar el estudio realizado en esta memoria en varias direcciones. En primer lugar, se plantea evaluar el desempeño del filtro de suma de gaussianas modificado (GSF-M) utilizando modelos de batería de mayor orden que incorporen efectos capacitivos y dinámicas internas adicionales, con el fin de analizar su comportamiento frente a modelos más representativos de la dinámica real del sistema.

En segundo lugar, resulta de interés estudiar el efecto de distintas condiciones iniciales

y diversos perfiles de ruido, incluyendo variaciones en la varianza del ruido de proceso y medición. Esto permitiría caracterizar con mayor detalle la robustez del GSF-M frente a incertidumbres más amplias y entornos de operación heterogéneos.

Asimismo, se sugiere investigar estrategias de poda, reducción y reponderación de las componentes gaussianas con el propósito de controlar el crecimiento del número de mezclas sin degradar la precisión del estimador. Esta línea puede complementarse con el estudio de métodos de reducción más avanzados que permitan mejorar la representación de las densidades manteniendo tiempos de cómputo razonables.

Finalmente, sería de interés aplicar el enfoque propuesto a otros sistemas no lineales, explorando su desempeño bajo distintos modelos dinámicos y perfiles de ruido, con el fin de evaluar la generalidad del método y su potencial aplicación en otros contextos.

IMPLEMENTACIÓN EXPERIMENTAL

Este anexo describe el montaje y los procedimientos utilizados para la obtención de los datos experimentales empleados en la validación del filtro de suma de Gaussianas modificado (GSF-M). Se detallan la configuración de los instrumentos, la sincronización entre dispositivos y las condiciones bajo las cuales se llevaron a cabo las pruebas.

A.1. Descripción general del sistema

El sistema experimental se diseñó con el objetivo de emular el comportamiento eléctrico de una batería de ion-litio y registrar las variables necesarias para la estimación del estado de carga (SOC). El montaje se compone de tres elementos principales:

1. Una *fente DC programable Chroma 62060D-600* [21], utilizada como emulador de batería.
2. Una unidad de adquisición y control *dSPACE MicroLabBox (DS1202)* [40], encargada del registro de las señales de entrada y salida (corriente y tensión) y del control del cambio de carga mediante el accionamiento de un relé.
3. Un computador de control ejecutando *ControlDesk* (interfaz de *dSPACE*) y el *SoftPanel* [41] de Chroma para la configuración del emulador de batería.

La Figura A.1 muestra un esquema general de la interconexión entre la fuente DC y la carga variable utilizada. El relé SW_1 es controlado por una señal de la dSPACE, mientras

que la corriente y la tensión se registran a través de sus entradas analógicas. En el circuito de carga se emplearon dos resistencias de $R = 10 \Omega$ y 1 kW conectadas en serie, de modo que la carga pudiera variar entre 20Ω y 10Ω según el estado del interruptor.

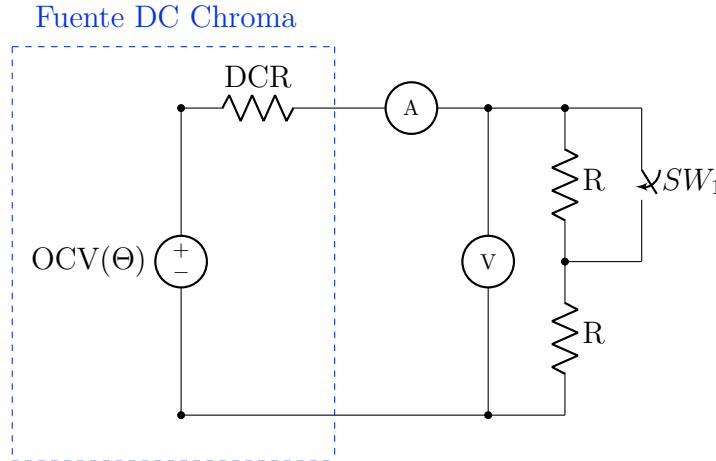


Figura A.1: Diagrama esquemático del montaje experimental.

A.2. Configuración de la fuente DC programable

La fuente DC *Chroma 62060D-600* se configuró mediante su software asociado *SoftPanel* en modo *Battery Simulator*, lo que permite reproducir el comportamiento de una o varias celdas de ion-litio, definiendo su interconexión en serie o en paralelo dentro del software.

El dispositivo se comunica con el computador a través de una conexión USB, lo que permitió fijar límites de corriente y tensión para la operación segura, así como configurar los parámetros correspondientes al modelo de batería a emular. En particular, se cargó la curva OCV-SOC descrita en la ecuación 2.11 mediante un archivo *.xlsx* con los valores correspondientes. Además, se definió una resistencia interna (*DCR*) de 0.1Ω , correspondiente a R_0 en el modelo Rint, y una capacidad nominal de 5 Ah para asegurar un periodo de descarga suficientemente prolongado (aproximadamente $0.5C-1C$).

Se configuraron 12 celdas en serie para emular una batería con una tensión nominal de 45 V , de manera que el voltaje máximo de operación no superara los 50 V , límite considerado seguro para el laboratorio sin necesidad de protecciones adicionales.

A.3. Adquisición y registro de señales

La unidad *dSPACE MicroLabBox (DS1202)* se empleó tanto para el control del interruptor SW_1 (comando de cambio de carga) como para la adquisición de señales,

operando de forma sincronizada con la fuente DC. Las señales de tensión y corriente fueron adquiridas mediante los canales analógicos de la dSPACE, con una frecuencia de muestreo de 1 Hz.

El control y la adquisición se implementaron en un modelo de SIMULINK, posteriormente asociado a un proyecto en *ControlDesk* para su ejecución en la dSPACE, como se muestra en la Figura A.2.

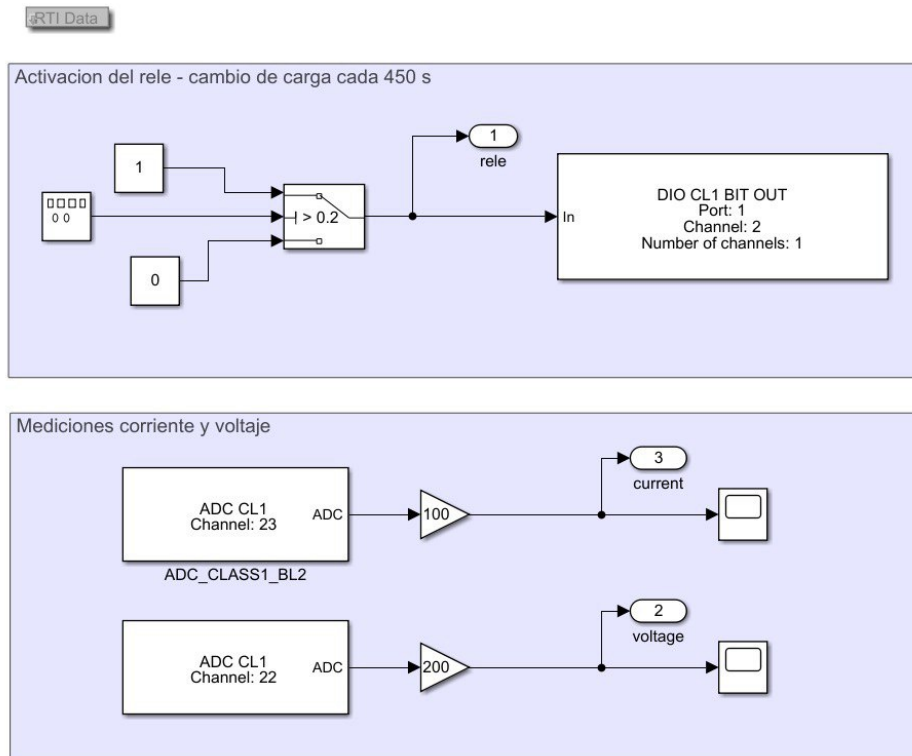


Figura A.2: Diagrama de Simulink para adquisición y control en dSPACE MicroLabBox.

Para la medición de corriente se utilizó un sensor *LEM PR30* [42], mientras que la tensión se registró mediante una sonda diferencial *Pintek DP-025* [43]. Ambos sensores se conectaron a las entradas analógicas de la dSPACE, considerando el reescalamiento de señales necesario para ajustar las ganancias y evitar sobrecargas en los canales de entrada.

La adquisición y visualización de los datos se realizaron en el entorno *ControlDesk*, que permitió monitorear las variables en tiempo real y exportarlas en formato *.mat* para su análisis posterior en Matlab. Previo a cada ensayo, se efectuó la calibración de los canales analógicos para compensar desplazamientos de nivel (*offsets*) y ganancias, minimizando así los errores sistemáticos.

A.4. Procedimiento experimental

El procedimiento seguido para la adquisición de los datos experimentales se resume en las siguientes etapas:

1. Inicialización de la fuente DC y configuración de los parámetros de operación descritos en la Sección A.2.
2. Carga del modelo de adquisición y control en la dSPACE, verificando las conexiones de los sensores según lo indicado en la Sección A.3.
3. Inicio sincronizado de la adquisición en la dSPACE y activación del *output* de la fuente DC.
4. Ejecución de la descarga controlada de la celda emulada hasta alcanzar un nivel de carga cercano a 0%.
5. Exportación de los datos registrados en formato *.mat* para su posterior análisis mediante los filtros EKF, PF-PWL y GSF-M, conforme al procedimiento de validación presentado en el Capítulo 6.

A.5. Consideraciones adicionales

Durante las pruebas se mantuvieron condiciones ambientales estables (temperatura entre 22 y 25 °C) con el fin de reducir la influencia térmica en las mediciones. El valor inicial de SOC se fijó en 99.9%, asegurando la consistencia entre simulaciones y experimentos, dado que la fuente no permitía establecer un valor inicial de 100%. El procedimiento descrito permite reproducir completamente los resultados experimentales presentados en el Capítulo 6, bajo el mismo entorno de hardware y software.

BIBLIOGRAFÍA

- [1] International Energy Agency, “Global ev outlook 2024: Moving towards battery dominance,” 2024, accessed: 2025-11-12. [Online]. Available: <https://www.iea.org/reports/global-ev-outlook-2024>
- [2] G. L. Plett, *Battery Management Systems, Volume II: Equivalent-Circuit Methods*, 2nd ed. Artech House, 2020.
- [3] H. He, R. Xiong, and J. Fan, “Evaluation of lithium-ion battery equivalent circuit models for state of charge estimation by an experimental approach,” *Energies*, vol. 4, no. 4, pp. 582–598, 2011. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/1996-1073/4/4/582>
- [4] S. Särkkä, *Bayesian Filtering and Smoothing*, ser. IMS Textbooks. Cambridge, UK: Cambridge University Press, 2013.
- [5] R. E. Kalman, “A new approach to linear filtering and prediction problems,” *Journal of Basic Engineering*, vol. 82, no. 1, pp. 35–45, 1960.
- [6] S. Ngonchaiyaphum, P. Boupha, N. Thammawongsa, N. Bootthanu, S. Saengsala, and B. Boribun, “Simplified battery modeling for accelerated kalman filter soc estimation,” in *2025 13th International Electrical Engineering Congress (iEECON)*, 2025, pp. 1–6.
- [7] H. Du, G. Liu, J. Zhang, G. Tian, and S. Wang, “Soc estimation of lithium-ion batteries based on adaptive ukf,” in *2021 IEEE 4th International Conference on Renewable Energy and Power Engineering (REPE)*, 2021, pp. 137–140.
- [8] W. Zhang, C. Li, D. Hou, and Y. Zhu, “Improved ukf algorithm based on fractional order model for soc estimation,” in *2024 International Conference on Artificial Intelligence and Power Systems (AIPS)*, 2024, pp. 169–172.
- [9] T. Zahid, G. Xu, W. Li, L. Zhao, and K. Xu, “Performance analysis of particle filter for soc estimation of lifep04 battery pack for electric vehicles,” in *2014 IEEE International Conference on Information and Automation (ICIA)*, 2014, pp. 1061–1065.

- [10] Ángel L. Cedeño, R. A. González, B. I. Godoy, R. Carvajal, and J. C. Agüero, “On filtering and smoothing algorithms for linear state-space models having quantized output data,” *Mathematics*, vol. 11, no. 6, 2023. [Online]. Available: <https://www.mdpi.com/2227-7390/11/6/1414>
- [11] I. E. Alcántara, A. L. Cedeño, C. A. Silva, and J. C. Agüero, “Li-ion battery soc estimation via gaussian sum filtering and piecewise linear approximation,” in *2024 IEEE ANDESCON*. IEEE, September 2024.
- [12] Y. Wang, D. Wei, K. T. Chau, and S. E. Li, “Gaussian-sum-filter-based state of charge estimation for lithium-ion batteries,” *IEEE Transactions on Transportation Electrification*, 2025.
- [13] A. L. Cedeño, R. A. González, B. I. Godoy, and J. C. Agüero, “Filtering in multivariate systems with quantized measurements using a gaussian mixture-based indicator approximation,” in *Proceedings of the 64th IEEE Conference on Decision and Control*, Rio de Janeiro, Brazil, 2025, pp. 1–6, in press.
- [14] Z. Li, J. Huang, B. Y. Liaw, and J. Zhang, “On state-of-charge determination for lithium-ion batteries,” *Journal of Power Sources*, vol. 348, pp. 281–301, 2017.
- [15] I. E. A. Rojas, “Estimación del estado de carga en baterías li-ion usando una aproximación lineal por partes y el filtro suma de gaussianas,” Tesis de Magíster, Universidad Técnica Federico Santa María, Valparaíso, Chile, julio 2025.
- [16] B. Bole, C. Kulkarni, and M. Daigle, “Randomized battery usage data set,” <https://www.nasa.gov/content/prognostics-center-of-excellence-data-set-repository>, 2014, nASA Prognostics Data Repository, NASA Ames Research Center, Moffett Field, CA.
- [17] E. B. D. Samsung SDI Co. Ltd., *Lithium-ion rechargeable cell for power tools. Model name: INR18650-20R*, South Korea, 2011, datasheet.
- [18] A. L. Cedeño, R. Orellana, R. Carvajal, and J. C. Agüero, “A bayesian filtering method for wiener state-space systems utilizing a piece-wise linear approximation,” in *IFAC-PapersOnLine*, vol. 56, no. 2, 2023, pp. 10 246–10 251.
- [19] X. Liu, Y. Jin, S. Zeng, X. Chen, Y. Feng, S. Liu, and H. Liu, “Online identification of power battery parameters for electric vehicles using a decoupling multiple forgetting factors recursive least squares method,” *CSEE Journal of Power and Energy Systems*, vol. 6, no. 3, pp. 735–742, 2020.
- [20] R. M. S. Santos, C. L. G. d. S. Alves, E. C. T. Macedo, J. M. M. Villanueva, and L. V. Hartmann, “Estimation of lithium-ion battery model parameters using experimental

- data,” in *2017 2nd International Symposium on Instrumentation Systems, Circuits and Transducers (INSCIT)*, 2017, pp. 1–6.
- [21] Chroma ATE Inc., “62000d series bidirectional dc power supply, datasheet,” <https://www.chromaate.com/>, 2022, revision 06/2022.
- [22] A. Gelb and Others, *Applied Optimal Estimation*. MIT Press, 1974, capítulo 6.
- [23] S. Julier, J. Uhlmann, and H. Durrant-Whyte, “A new approach for filtering nonlinear systems,” in *Proceedings of 1995 American Control Conference - ACC’95*, vol. 3, 1995, pp. 1628–1632 vol.3.
- [24] N. J. Gordon, D. J. Salmond, and A. F. Smith, “Novel approach to nonlinear/non-gaussian bayesian state estimation,” in *IEE Proceedings F (Radar and Signal Processing)*, vol. 140, no. 2. IET, 1993, pp. 107–113.
- [25] G. J. McLachlan and D. Peel, *Finite mixture models*. New York: John Wiley & Sons, 2000.
- [26] S. Frühwirth-Schnatter, G. Celeux, and C. P. Robert, Eds., *Handbook of mixture analysis*. Boca Raton: CRC Press, 2019.
- [27] K. Ito and K. Xiong, “Gaussian filters for nonlinear filtering problems,” *IEEE Transactions on Automatic Control*, vol. 45, no. 5, pp. 910–927, May 2000.
- [28] Y. Wu, D. Hu, M. Wu, and X. Hu, “A numerical-integration perspective on gaussian filters,” *IEEE Transactions on Signal Processing*, vol. 54, no. 8, pp. 2910–2921, Aug. 2006.
- [29] I. Arasaratnam, S. Haykin, and R. J. Elliott, “Discrete-time nonlinear filtering algorithms using gauss-hermite quadrature,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 5, pp. 953–977, May 2007.
- [30] A. L. Cedeño, R. Albornoz, R. Carvajal, B. I. Godoy, and J. C. Agüero, “A two-filter approach for state estimation utilizing quantized output data,” *Sensors*, vol. 21, no. 21, p. 7675, 2021. [Online]. Available: <https://doi.org/10.3390/s21227675>
- [31] Q. Zhang, A. G. Zhang, and J. Chen, “Gaussian mixture reduction with composite transportation divergence,” 2023.
- [32] A. R. Runnalls, “Kullback-leibler approach to gaussian mixture reduction,” *IEEE Transactions on Aerospace and Electronic Systems*, vol. 43, no. 3, pp. 989–999, 2007.
- [33] I. Arasaratnam, S. Haykin, and R. J. Elliott, “Discrete-Time Nonlinear Filtering Algorithms Using Gauss–Hermite Quadrature,” *Proceedings of the IEEE*, vol. 95, no. 5, pp. 953–977, May 2007.

- [34] M. F. Huber and U. D. Hanebeck, “Progressive Gaussian mixture reduction,” in *2008 11th International Conference on Information Fusion*. IEEE, 2008, pp. 1–8.
- [35] D. Schieferdecker and M. F. Huber, “Gaussian mixture reduction via clustering,” in *2009 12th International Conference on Information Fusion*. IEEE, 2009, pp. 1536–1543.
- [36] Y. Xu, Y. Fang, W. Peng, and Y. Wu, “An Efficient Gaussian Sum Filter Based on Prune-Cluster-Merge Scheme,” *IEEE Access*, vol. 7, pp. 150 992–151 005, 2019.
- [37] MathWorks, *fitgmdist: Gaussian Mixture Model Fitting Function*, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, USA, 2024, accessed: 2025-10-27. [Online]. Available: <https://la.mathworks.com/help/stats/fitgmdist.html>
- [38] —, *Tic: Iniciar el cronómetro temporizador*, The MathWorks, Inc., Natick, Massachusetts, USA, 2024, accessed: 2025-11-9. [Online]. Available: <https://la.mathworks.com/help/matlab/ref/tic.html>
- [39] —, *particleFilter*, MathWorks, 2025, disponible en: <https://www.mathworks.com/help/control/ref/particlefilter.html>.
- [40] dSPACE GmbH, *MicroLabBox Product Brochure*, dSPACE GmbH, Rathenaustraße 26, 33102 Paderborn, Germany, January 2020, product brochure for dSPACE MicroLabBox (DS1202) hardware platform. [Online]. Available: <https://www.dspace.com>
- [41] Chroma ATE Inc., *Programmable Bidirectional DC Power Supply 62000D Series Software User’s Manual*, Chroma ATE Inc., 66 Huaya 1st Road, Guishan, Taoyuan 33383, Taiwan, October 2020, user manual for the 62000D Series Soft Panel software. [Online]. Available: <https://www.chromaate.com>
- [42] LEM HEME Ltd., *PR30 Series High Performance AC/DC Oscilloscope Probes*, Lancashire, United Kingdom, 1998, issue 3, Document PR30-3br.
- [43] PINTEK Electronic Co., Ltd., *DP-25/DP-50/DP-100 High Voltage Differential Probe Instruction Manual*, New Taipei City, Taiwan, 2024, version 07, January 2024.