

**UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA**

DEPARTAMENTO DE ELECTRÓNICA

**ESTUDIO DE ESTRATEGIAS COLABORATIVAS  
PARA LA IDENTIFICACIÓN DE UN SISTEMA DE  
DOS AGENTES BAJO ACCIÓN INTEGRAL**

Tesis de Grado presentada por

**Cristóbal Huidobro Marín**

como requisito parcial para optar al título de

**Ingeniero Civil Electrónico**

y al grado de

**Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica**

Director de Tesis

Dr. Francisco Vargas Parra

Codirector de Tesis

Dr. Patricio Valenzuela

Valparaíso, 2023.



TÍTULO DE LA TESIS:

**ESTUDIO DE ESTRATEGIAS COLABORATIVAS PARA LA IDENTIFICACIÓN DE UN SISTEMA DE DOS AGENTES BAJO ACCIÓN INTEGRAL**

AUTOR:

**Cristóbal Huidobro Marín**

TRABAJO DE TESIS, presentado en cumplimiento parcial de los requisitos para el título de Ingeniero Civil Electrónico y el grado de Magíster en Ciencias de la Ingeniería Electrónica de la Universidad Técnica Federico Santa María.

**Director de Tesis**

Dr. Francisco Vargas

---

**Codirector de Tesis**

Dr. Patricio Valenzuela

---

**Examinador Interno**

Dr. Hector Ramírez

---

**Examinador Externo**

Dr. Andrés Peters

---

**Examinador Externo**

Dr. Rodrigo González

---

Valparaíso, 2023.



Dedicado a mi familia



---

---

# AGRADECIMIENTOS

En un principio quiero agradecer a mi familia por todo el apoyo y cariño que siempre me han dado, nada de esto habría sido posible sin ustedes. Sobre todo mi madre Carmen, quien ha sido mi pilar fundamental toda mi vida, gracias por estar ahí para mí cada vez que lo he necesitado. Gracias también a mi padre Coque y a mis hermanos: Consue, Zion, Camila y Martín, son personas increíbles y me siento muy afortunado de tenerlos en mi vida y compartir con ustedes. También quiero agradecer a otros miembros de mi familia, mi tía Collo, por la cercanía que siempre ha tenido con nosotros, y mis primos, con quienes crecí y siempre han sido de los lazos de amistad más importantes en mi vida. Principalmente Andrés y Francisco, mi paso por la universidad no habría sido el mismo sin haber coincidido con ustedes en esta, y siempre voy a extrañar nuestras tarde de ensayo en la sala de música, por supuesto muchas gracias también a mis primos Ignacio, France, Montse y varios integrantes más que se me van quedando en el tintero.

Evidentemente, estos últimos meses no habrían sido lo mismo para mí sin todo el apoyo y compañía de Cande. Eres la mejor compañera que pude haber encontrado y te agradezco por hacer que este periodo, el cual puede conllevar tanto estrés y cansancio, haya sido realmente especial para mi. Te amo muchísimo. Espero nos sigamos brindando todo este cariño y contención en las próximas etapas de nuestras vidas.

Debo agradecer también a los amigos que conocí en la universidad, quienes hicieron que mi paso por esta fuera mucho más ameno. Por supuesto a Felipe y Diego, con quienes compartí mucho en los últimos años, en parte por nuestro paso juntos por el postgrado y el trabajo de los trenes, a Francisco y Chipi, con quienes fui cercanos desde el primer año, y a muchos otros: Sofi, Diego, Rodrigo, Richi, Vicho, Cepeda, etc. También a otros amigos como Bárbara, y mis compañeros Juanpi y Alonso, a quienes no conocí en la universidad, pero con quienes coincidí en esta y fueron siempre amistades muy importantes para mí.

Muchas gracias también a los profesores Francisco, Andrés y Patricio por guiar el trabajo realizado en esta tesis de la manera que lo hicieron. Me sentí realmente afortunado por toda su buena disposición ante cualquier duda o ayuda, su disponibilidad para hacer reuniones con tanta frecuencia, su comprensión ante cualquier inconveniente, y en general su simpatía y su apoyo para poder llevar adelante esta investigación.

Si bien mi trabajo allá y los tópicos de investigación de este no tienen ninguna relación ni cercanía con el trabajo realizado en esta tesis, me parece pertinente agradecer al equipo AIO de INRIA Paris, y sobre todo a Filip, quien fue mi supervisor, debido a que mi estadía en ese equipo marcó un punto pivotal para mí dentro mi paso por el postgrado. Gracias

por alimentar mi interés por investigar, y por todo el compañerismo y calidez con el que fui recibido.

Agradezco finalmente al proyecto ANID FONDECYT 11221365, al proyecto ANID FONDECYT regular 1241813, al FONDEQUIP EQM230181 y el apoyo otorgado por la Dirección de Postgrado y Programas (DPP) de la Universidad por las becas que me permitieron cursar el programa de Magíster.

---

---

# CONTENIDO

<b>AGRADECIMIENTOS</b>	<b>I</b>
<b>ÍNDICE DE FIGURAS</b>	<b>VI</b>
<b>RESUMEN</b>	<b>IX</b>
<b>ABSTRACT</b>	<b>X</b>
<b>1. INTRODUCCIÓN</b>	<b>1</b>
1.1. Sistemas Multi-Agente	1
1.2. Identificación de Sistemas Multi-Agente	2
1.2.1. Estimación colaborativa	3
1.3. Identificación de sistemas no estables	4
1.4. Aplicación: Pelotones de Vehículos	5
1.5. Objetivos	7
1.6. Contribución de la Tesis	8
1.7. Publicaciones asociadas a la Tesis	8
1.8. Organización de la Tesis	9
<b>2. PRELIMINARES</b>	<b>10</b>
2.1. Notación	10
2.2. Sistemas dinámicos	10
2.2.1. Función de transferencia	11
2.2.2. Sistemas multi-agente	11
2.3. Probabilidad y Procesos estocásticos	12
2.3.1. Operador esperanza y momentos	12
2.3.2. Independencia y condicionalidad	13
2.3.3. Variables aleatorias Gaussianas	14
2.3.4. Procesos estocásticos	14
2.3.5. Estimación de parámetros	15
2.3.6. Simulaciones de Monte-Carlo	16
	<b>III</b>

2.4. Identificación de sistemas	16
2.4.1. Estimador de mínimos cuadrados	17
2.4.2. Método de predicción de error	17
2.5. Razón de decaimiento	19
2.6. Análisis de sistemas con integración	20
2.6.1. Momentos de sistemas de integración	20
2.6.2. Aplicación del estimador mínimos cuadrados en sistemas con integración	24
<b>3. MARCO DE TRABAJO</b>	<b>26</b>
3.1. Configuración del sistema	26
3.2. Entradas del sistema	27
3.3. Problema de identificación y métricas de desempeño	28
3.3.1. Minimización de la función de costo	28
3.3.2. Evaluación estadística del estimador encontrado	29
3.4. Esquemas de estimación	30
3.4.1. Esquema 1: Agentes sin comunicación	31
3.4.2. Esquema 2: Eliminación de la integración	32
3.4.3. Esquema 3: Comunicación en la entrada	32
3.4.4. Esquema 4: Comunicación en la salida:	33
3.5. Configuraciones de las funciones de transferencia	34
3.6. Métodos de estimación	36
3.6.1. Mínimos cuadrados	36
3.6.2. Estimación numérica	36
3.7. Suposiciones sobre los sistemas	37
3.7.1. Evaluación de la suposición en señales de interés	39
<b>4. ESTIMACIÓN ANALÍTICA DE LA GANANCIA DE UN SISTEMA</b>	<b>43</b>
4.1. Configuración del Sistema	43
4.2. Preliminar: Razón de decaimiento de sistemas estables	44
4.3. Identificación de un sistema de un agente	46
4.4. Estudio de esquemas de dos agentes	49
4.4.1. Esquema 1: Agentes sin comunicación	49
4.4.2. Esquema 2: Eliminación de integración	54
4.4.3. Esquema 3: Comunicación en la entrada	57
4.4.4. Esquema 4: Comunicación en la salida	60
4.5. Simulaciones del sistema	61
4.6. Resumen de los resultados para la identificación de ganancia	62
<b>5. ESTIMACIÓN ANALÍTICA DE DOS PARÁMETROS LINEALES</b>	<b>65</b>
5.1. Configuración del Sistema	65
5.2. Identificación de un sistema de un agente.	66
5.2.1. Extensión a sistemas con polo estable distinto de 0.	69

---

5.2.2.	Impacto en la varianza de la distribución de los parámetros	72
5.3.	Estudio de esquemas de dos agentes	74
5.3.1.	Esquema 1: Agentes sin comunicación	75
5.3.2.	Esquema 2: Eliminación de integración	78
5.3.3.	Esquema 3: Comunicación en la entrada	81
5.3.4.	Esquema 4: Comunicación en la salida	85
5.4.	Simulaciones del sistema	86
5.5.	Resumen de los resultados para la identificación de dos parámetros	87
<b>6.</b>	<b>RESULTADOS NUMÉRICOS UTILIZANDO EL MÉTODO PEM</b>	<b>89</b>
6.1.	Análisis de sesgo	89
6.1.1.	Estimación de polo en sistema de segundo orden	90
6.1.2.	Estimación de dos parámetros en sistema de segundo orden	91
6.2.	Razón de decaimiento de la varianza	92
6.2.1.	Estimación de polo en sistema de segundo orden	92
6.2.2.	Estimación de dos parámetros en sistema de segundo orden	93
6.3.	Resumen de Resultados	96
6.3.1.	Estimación de polo en sistema de segundo orden	96
6.3.2.	Estimación de dos parámetros en sistema de segundo orden	97
<b>7.</b>	<b>EXTENSIONES DEL TRABAJO</b>	<b>100</b>
7.1.	Integradores múltiples y sistemas de orden superior	100
7.1.1.	Identificación de parámetros en el numerador	101
7.1.2.	Identificación de un vector de parámetros no lineal en su estimación	103
7.2.	Identificación de sistemas simplificados	104
7.2.1.	Simplificación de numerador en sistema de segundo orden	105
7.2.2.	Simplificación de ceros y polos	106
7.3.	Dominancia estocástica	106
<b>8.</b>	<b>CONCLUSIONES</b>	<b>110</b>
	<b>REFERENCIAS</b>	<b>113</b>

---

---

# Índice de figuras

1.1. Esquema del impacto de la integración en pelotón de vehículos	7
2.1. Representación gráfica de un sistema multi-agente con $m$ agentes.	12
3.1. Esquema de dos agentes dentro de una red de agentes interconectados.	27
3.2. Esquema de la comunicación en la entrada de dos agentes dentro de una red.	32
3.3. Esquema de la comunicación en la salida de dos agentes dentro de una red.	33
3.4. Evolución de $X_N$ para distintas naturalezas del vector $U_N$	40
3.5. Evolución de $X_N$ para distintas naturalezas del vector $U_N$	41
3.6. Evolución de $X_N$ para distintas naturalezas del vector $U_N$	41
4.1. Evolución de $\text{Var}_{u_j}$ al aumentar número de muestras	54
4.2. Media muestral para el valor estimado del parámetro $b_1 = 0,8$ (arriba) y para la varianza del parámetro estimado (abajo) con $u_1(t)$ y $u_2(t)$ de media 0, considerando tamaños muestrales que varían de 10 a $10^5$ muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de $10^4$ realizaciones para cada tamaño muestral.	62
4.3. Media muestral para el valor estimado del parámetro $b_1 = 0,8$ (arriba), varianza del parámetro estimado (al medio) y error cuadrático medio del parámetro estimado (abajo) con $u_1(t)$ de media 4 y $u_2(t)$ de media $-4$ , considerando tamaños muestrales que varían de 10 a $10^5$ muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de $10^4$ realizaciones para cada tamaño muestral.	63
5.1. Evolución de $\text{Var}_{u_j}$ al aumentar número de muestras	78
5.2. Media muestral para el valor estimado de los parámetros (arriba) y para la varianza de los parámetro estimados (abajo) con $u_1(t)$ y $u_2(t)$ de media 0, considerando tamaños muestrales que varían de 10 a $10^5$ muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de $10^4$ realizaciones para cada tamaño muestral.	86
5.3. Media muestral para el valor estimado de los parámetros (arriba) y para la varianza de los parámetro estimados (abajo) con $u_1(t)$ de media 4 y $u_2(t)$ de media $-4$ , considerando tamaños muestrales que varían de 10 a $10^5$ muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de $10^4$ realizaciones para cada tamaño muestral.	87

- 
- 6.1. Media muestral para el valor estimado del parámetro  $p_1^0 = 0,8$  (arriba) y para la varianza del parámetro estimado (abajo) con  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de media 0, considerando tamaños muestrales que varían de 10 a  $10^5$  muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones para cada tamaño muestral. 93
- 6.2. Media muestral para el valor estimado del parámetro  $p_1^0 = 0,8$  (arriba), varianza del parámetro estimado (al medio) y error cuadrático medio del parámetro estimado (abajo) con  $u_1(t)$  de media 4 y  $u_2(t)$  de media  $-4$ , considerando tamaños muestrales que varían de 10 a  $10^5$  muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones para cada tamaño muestral. 94
- 6.3. Media muestral para el valor estimado de  $b_1^0 = 0,1$  (arriba) y para la varianza de su estimación (abajo) con  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de media 0, considerando tamaños muestrales que varían de 10 a  $10^5$  muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones para cada tamaño muestral. 95
- 6.4. Media muestral para el valor estimado de  $p_1^0 = 0,8$  (arriba) y para la varianza de su estimación (abajo) con  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de media 0, considerando tamaños muestrales que varían de 10 a  $10^5$  muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones para cada tamaño muestral. 96
- 6.5. Media muestral para para el valor estimado de  $b_1^0 = 0,1$  (arriba), varianza de su estimación(al medio) y error cuadrático medio de su estimación con  $u_1(t)$  de media 4 y  $u_2(t)$  de media  $-4$ , considerando tamaños muestrales que varían de 10 a  $10^5$  muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones para cada tamaño muestral. 97
- 6.6. Media muestral para el valor estimado de  $p_1^0 = 0,8$  (arriba), varianza de su estimación (al medio) y error cuadrático medio de su estimación (abajo) con  $u_1(t)$  de media 4 y  $u_2(t)$  de media  $-4$ , considerando tamaños muestrales que varían de 10 a  $10^5$  muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones para cada tamaño muestral. 98
- 7.1. Resultados de la estimación del polo  $p_1$  al incluir integración del sistema y al cancelarla 105
- 7.2. Resultados de la estimación del polo  $p_1$  al incluir integración del sistema y al cancelarla 107



---

---

# RESUMEN

La identificación paramétrica de sistemas dinámicos Multi-Agente es un área que ha generado interés creciente en el último tiempo. Esta suele realizarse bajo la suposición de que los sistemas a identificar son estables, o aplicando lazos de control para estabilizarlos, debido a que gran parte de las herramientas convencionales de identificación requieren estabilidad en los sistemas. Sin embargo, la integración, una dinámica no estable, es una característica común en varios sistemas, en particular sistemas que poseen masa, y el considerarla dentro del problema de identificación de un sistema puede ser de interés debido a las propiedades estadísticas que esta conlleva. Motivado por el problema de un pelotón de vehículos, el trabajo de esta tesis considera un sistema compuesto de dos agentes, y estudia el uso de distintos esquemas colaborativos que buscan lograr que cada agente identifique sus parámetros correctamente. Los esquemas utilizados toman en cuenta la integración de los sistemas para estimar los parámetros, y son contrastados con un esquema en el cual la integración es cancelada antes de realizar la estimación.

En el presente trabajo se realiza la identificación de distintas estructuras de agentes, bajo los distintos esquemas propuestos en cada caso, utilizando el método de predicción de error (PEM). Para cada caso se analizan propiedades estadísticas de los estimadores obtenidos, tales como el sesgo y la razón de decaimiento de la varianza de la estimación. En algunas estructuras, en las cuales la estimación a realizar es lineal sobre el vector de parámetros y es posible obtener expresiones cerradas de los estimadores, estas propiedades son caracterizadas analíticamente y complementadas con simulaciones, mientras que para otras estructuras, en las que la estimación no es lineal en los parámetros, estas propiedades son obtenidas numéricamente a través de simulaciones. Los resultados obtenidos muestran que es posible estimar los parámetros de sistemas con integración correctamente bajo un esquema colaborativo, y que para algunas estructuras, el identificar el sistema sin estabilizarlo logra una razón de decaimiento en la varianza más rápida que la obtenida al identificar sistemas estables. La contribución principal de la tesis es ilustrar como las dinámicas integrales de un sistema marginalmente estable pueden ayudar en la identificación de este, logrando que se requiera una cantidad menor de muestras para obtener estimaciones confiables, además de definir un marco de trabajo para la identificación Multi-Agente de sistemas bajo presencia de integración.

Los resultados son complementados con un estudio que relaciona la cantidad de integradores necesarios para identificar una cantidad determinada de parámetros con la razón de decaimiento deseada, y otras características de la identificación bajo efecto integral.

---

---

# ABSTRACT

System parameter identification has been a topic of increasing interest in recent years. Generally, it is performed either under the assumption that the systems to identify are stable, or applying a stabilizing control loop, since most conventional system identification tools require that the systems to identify are stable. However, integration, which is a non-stable dynamic, is a common characteristic in many systems, particularly in systems with mass, and it may be of interest to consider it in the identification problem due to the statistic properties inherent to it. Motivated by a vehicular platoon problem, this thesis work considers a system made of two agents, and studies the use of different collaborative schemes where the goal is for each agent to correctly identify its own parameters. These schemes take the integral dynamics of the systems into account to perform the estimation of the parameters, and they are compared to a scheme where we cancel the integration before performing the estimation.

This present works performs the identification of various structures of agents, under the different proposed schemes in each case, using the prediction error method (PEM). For each case, we analyze different statistical properties of the resulting estimators, such as the estimation bias and the decay rate of the variance of the estimation. In some of these structures, where the estimation is lineal in the parameters vector and it is possible to obtain closed-form expression of the estimators, these properties are characterized analytically and complemented with simulations, while for other structures, in which the estimation is not linear over the parameters vector, these properties are obtained over numerical simulations. The results of this work show that it is possible to correctly estimate the parameters of a system with integration under a cooperative setting, and that for some of these structures, identifying the system without prior stabilization allows a quicker decay decay rate in the variance of the estimation than the one obtained when identifying stable systems. The main contribution of this thesis is to illustrate how using the integral dynamics of a marginally stable system can help its identification, allowing a much lower number of samples to obtain a reliable estimation, and to define a framework for the identification of multi-agent systems with integration.

These results are complemented with a study that relates the amount of needed integrators to estimate a given quantity of parameters with a desired decay rate in its variance, as well as other characteristics of system identification under integral action.

# INTRODUCCIÓN

En este capítulo se pone en contexto el trabajo realizado en esta tesis, presentando la motivación detrás de este, y explicando sus objetivos. En primer lugar se contextualiza acerca de los sistemas Multi-Agente y la identificación de ellos, explorando distintas estrategias colaborativas que se han realizado a través de los años para la estimación entre agentes. Luego, se presenta el trabajo existente sobre el área de identificación en sistemas no estables, exponiendo las dificultades que esto conlleva y el interés en problemas de identificación que esta puede significar. Los puntos anteriores son complementados con un ejemplo de sistema Multi-Agente marginalmente estable correspondiente a un pelotón de vehículos, cuya identificación es considerada como la aplicación principal que motiva el problema planteado en esta tesis. Finalmente, se plantean los objetivos a realizar en la tesis y las contribuciones del trabajo realizado, concluyendo el capítulo con una breve descripción de los capítulos posteriores.

## 1.1. Sistemas Multi-Agente

Los sistemas Multi-Agente corresponden a sistemas compuestos por varios sub-sistemas inteligentes, denominados agentes, los cuales poseen cierto grado de autonomía para efectuar las acciones que le permitan llegar a su objetivo, y son capaces de interactuar y transferir información con los otros sub-sistemas. Este proceso de interacción, en general, corresponde a realizar acciones análogas a comportamientos sociales, tales como comunicación o colaboración entre ellos [1]. Los sistemas Multi-Agente son capaces de modelar problemas más complejos que sistemas de un solo agente, comúnmente dividiendo el problema general del sistema en distintas tareas individuales para cada agente específico [2]. En el caso del control de un sistema Multi-Agente, cada agente toma sus propias acciones de control basándose en la información otorgada por los otros agentes, tales como entradas, salidas o acciones de control, y análogamente, debe comunicar su propia información para que los otros agentes puedan realizar sus acciones.

Los sistemas Multi-Agente corresponden a paradigmas de modelado presentes en muchas aplicaciones actuales y futuras del mundo real, y el análisis de ellos presenta muchos desafíos en la actualidad. La mayoría de estos desafíos están relacionados a la complejidad que aparece cuando el número de agentes aumenta [3] y a fenómenos propios de la comunicación entre estos. En particular, la comunicación entre sistemas Multi-Agente es comúnmente realizada a través de redes inalámbricas, donde los fenómenos estocásticos inherentes a

redes de estas características juegan un rol significativo en la estabilidad, la escalabilidad [4] y en la identificabilidad [5], [6], [7] de la red de sistemas Multi-Agente.

En particular, en esta tesis, se trabajará con sistemas cuyos agentes se describen a partir de modelos dinámicos, comúnmente utilizados para explicar fenómenos físicos, donde la salida depende de la entrada y de cantidades inerciales propias del sistema. Los modelos dinámicos utilizados se presentan con mayor detalle en el capítulo 2.

## 1.2. Identificación de Sistemas Multi-Agente

El uso de métodos paramétricos para la identificación de sistemas es un tema de gran relevancia en aplicaciones del mundo real. Esto se debe a que algunos sistemas, en los cuales se conoce cierto modelo o estructura matemática, pueden cambiar sus propiedades dinámicas a través del tiempo, requiriendo un ajuste en la caracterización de sus parámetros dentro de esa misma estructura. Esto puede ocurrir a largo plazo debido a características propias del funcionamiento normal del sistema, como el desgaste de sus materiales (*wear and tear*), o de forma espontánea debido a la presencia de perturbaciones, como por ejemplo falla de sensores o de actuadores, cambios en las condiciones externas al sistema o accidentes. Los cambios dinámicos pueden ser particularmente importantes si se consideran múltiples agentes que interactúan entre ellos físicamente o a cierta proximidad [8]. Al considerar sistemas con varios agentes, el implementar algoritmos de identificación de manera *on-line* sobre el sistema puede resultar aún más complejo, debido a que surgen distintos aspectos prácticos respecto a los cuales se deben tomar decisiones, tales como el proceso de sincronización entre agentes, el sensado o la topología necesaria para la comunicación, cuya complejidad puede aumentar si el número de sub-sistemas aumenta [9].

La identificación de sistemas dinámicos Multi-Agente interconectados a través de distintas topologías de redes, en donde los agentes suelen ser modelados como módulos dentro de la red de comunicación del sistema, ha sido un área de investigación que ha recibido bastante atención en los últimos años [4]. Un punto en el que se han enfocado algunos trabajos, y que será de particular interés en el desarrollo a realizar en esta tesis, corresponde al análisis de los aspectos estadísticos de los sistemas a identificar, tales como la consistencia de los estimadores utilizados y la razón de convergencia de propiedades relacionadas a la varianza y el error cuadrático medio de la estimación [6]. Otro punto de interés en los trabajos recientes corresponde al análisis de propiedades fundamentales de la configuración del proceso de identificación, tales como la información disponible y la identificabilidad del sistema. En el trabajo realizado en [10] se formalizan conceptos sobre el nivel de información otorgada por la base de datos sobre la que se realiza la identificación, y se definen condiciones basadas en estos conceptos para que la identificación de un módulo dentro de la red sea consistente. Respecto a la identificabilidad de los sistemas, los autores de [11] desarrollan un análisis generalizado sobre la identificabilidad de un módulo dentro de un sistema Multi-Agente y el trabajo de [5] introduce nociones sobre la identificabilidad de la red completa.

Para ilustrar un caso más específico, un ejemplo de sistemas dinámicos Multi-Agente cercano al tema de interés de esta tesis, sobre cuya identificación existe bastante trabajo, son los sistemas en cascada. En el trabajo realizado en [12], los autores concluyen que no es posible mejorar los resultados asintóticos de la estimación de un sub-sistema en cascada utilizando la salida de su sucesor si las dinámicas del segundo sub-sistema son un factor del

primero. Estos resultados son extendidos para el caso de sistemas en cascada paralelo-serial en [13]. Mas recientemente, los autores de [14] utilizan técnicas de estimación paramétrica para sistemas en cascada no lineales, el trabajo en [15] describe un método asintóticamente eficiente para estimar simultáneamente todos los parámetros en una estructura serial de sistemas interconectados en cascada, y en [16] se describe la aplicación de métodos de identificación de muestras finitas para un red en cascada con mediciones ruidosas.

En general, para realizar la identificación de sistemas Multi-Agente, se suponen condiciones de estabilidad dentro de los sistemas a identificar en los nodos. Es común entonces, que en los casos en que los sistemas a identificar no sean necesariamente estables, la estimación de los parámetros se realice utilizando métodos en lazo cerrado. Un ejemplo de esto es [17], donde este tipo de métodos es generalizado para el caso de la identificación local de agentes dentro de un sistema Multi-Agente.

### 1.2.1. Estimación colaborativa

En general, cuando se realiza la identificación de sistemas distribuidos, estos se modelan a través de una red compuesta de varios nodos, correspondientes a los sub-sistemas (agentes en el caso de sistemas Multi-Agente). La colaboración entre nodos de una red ha sido una herramienta altamente explorada para explorar las dificultades que aparecen al aumentar la complejidad del sistema y poder llevar a cabo distintas técnicas de identificación. A continuación se exponen brevemente algunas estrategias de colaboración comúnmente utilizadas.

El estudio de identificación de sistemas distribuidos interconectados ha sido de interés desde hace bastante tiempo, algunos trabajos tempranos al respecto son presentados en [18] [19] y [20], donde el enfoque principal corresponde a desarrollar esquemas y técnicas descentralizados para simplificar la identificación de sub-sistemas de la red. Desde ese entonces, se han desarrollado y estudiado distintas herramientas colaborativas para abordar la identificación de esta clase de sistemas. El estudio general de la estimación realizada de forma distribuida y descentralizada se ha abordado más recientemente en [21] [22] [23] y [24]. En el trabajo realizado en [25] se plantea el uso de estimación distribuida para el caso específico de sistemas Multi-Agente bajo una configuración de líder-seguidores, la cual, como será observado más adelante, es relevante dada la configuración de sistemas propuesta en este tesis y la motivación de esta.

Recientemente, se han explorado diversas técnicas colaborativas más específicas para identificar sistemas distribuidos, en general enfocándose en las dificultades que pueden surgir respecto al proceso de comunicación entre los nodos de la red. Un ejemplo de eso es [26], donde para el caso de comunicación de redes cuya comunicación no es confiable, se utilizan algoritmos de transmisión por protocolos Gossip entre una red de sensores, los cuales permiten que distintos nodos puedan unirse o abandonar la red de manera libre, para llegar a la identificación correcta de un parámetro. Otra herramienta utilizada para la estimación cooperativa de sistemas en redes corresponde a algoritmos de consenso, los cuales buscan que distintos nodos lleguen a un acuerdo a partir de conjuntos de datos transmitidos de manera distribuida [27]. Ciertos trabajos relevantes al respecto se llevan a cabo en [22], donde estas herramientas son aplicadas a sistemas Multi-Agente trabajando con métodos de lazo cerrado, y en [28], donde se generalizan condiciones de persistencia de excitación necesaria para la identificabilidad del problema y se aplican algoritmos de consenso de un estimador tipo PI.

La identificación de sistemas en redes también se ha estudiado a través de técnicas de difusión. El interés del uso de este tipo de técnicas es evidenciado en [29], donde se muestra que las estrategias de difusión pueden otorgar mejoras en el error cuadrático medio de la estimación y en las condiciones necesarias para la estabilidad de la red en relación con otras estrategias como las de consenso. Otros trabajos relevantes se han llevado a cabo en [30], donde se formula y evalúa el desempeño de este tipo de técnicas al realizar la identificación sobre redes adaptivas, y [24], donde se presentan algoritmos que explotan el procesamiento temporal y espacial para realizar la identificación mediante métodos difusos. Más recientemente, el trabajo realizado en [31] desarrolla métodos difusos para obtener resultados generales en la identificación para una familia de distribuciones exponenciales y en [32] se busca obtener un análisis teórico completo de estrategias difusas e incrementales para realizar la identificación de sistemas dispersos en redes adaptivas.

Recientemente, también ha ganado bastante atención la estimación de nodos a través de mecanismos gatillados por eventos, los cuales son atractivos particularmente por su eficiencia en consumo, debido a que estos evitan realizar transmisiones innecesarias. Un estudio del uso de estas técnicas para la estimación de redes de sensores se despliega en [3]. En [33] se utilizan redes neuronales para identificación de sistemas no-lineales a través de estimación basada en eventos.

Cabe notar que, si bien existe mucha investigación respecto a las distintas estrategias colaborativas disponibles para estimar sistemas distribuidos en redes, y particularmente sistemas Multi-Agente, esta se suele realizar suponiendo estabilidad dentro de los nodos de la red.

### 1.3. Identificación de sistemas no estables

Como se mencionó anteriormente, la mayoría del trabajo existente en identificación de sistemas dinámicos suele basarse en el supuesto de que los sistemas a identificar cumplen cierta definición de estabilidad, ya sea suponiendo ciertas condiciones en las entradas y los modelos que aseguren este comportamiento o realizando la identificación en lazo cerrado. Si los sistemas a identificar no son estables, varias herramientas convencionales para la identificación de sistemas no pueden ser aplicadas directamente, en particular aquellas que hacen uso del dominio de la frecuencia, por el no-cumplimiento de las leyes de Parseval. La no estabilidad también puede producir dificultades debido a la magnitud de los valores que se pueden producir en las señales del sistema, al ser estas no necesariamente acotadas. Este impacto puede ser aún más importante en el caso de sistemas Multi-Agente, debido a las posibles relaciones físicas de interacción o de proximidad entre los distintos agentes.

Existen estudios acerca de la identificación de sistemas estrictamente inestables desde hace algunas décadas. En [34] se estudia la convergencia de la estimación de los parámetros de un sistema inestable ARMA, donde se obtienen algunos resultados que evidencian el aumento en la rapidez de convergencia de estos para los parámetros auto-regresivos del sistema, y se prueba la necesidad de señales de entrada no acotadas para que este aumento en la rapidez de convergencia se traduzca a los parámetros auto-regresivos. También existen trabajos que caracterizan las distribuciones a las que converge la estimación de los parámetros de sistemas autorregresivos inestables. La distribución resultante con el estimador de mínimos cuadrados se expone en [35], mientras que [36] presenta una prueba detallada de

la distribución resultante al utilizar el estimador de máxima verosimilitud.

También existen trabajos en los que se ha analizado la estimación de sistemas con integración, en general enfocándose en sistemas auto-regresivos. Algunos resultados respecto a esto, que serán de particular interés para esta tesis, se presentan en el capítulo 10 de [37] y en [38], donde, enfocándose en el orden de probabilidad propio de la estimación del polo integral del sistema, se ilustra como el identificar un sistema con integración puede ser más rápido que identificar un sistema estable. El trabajo de [37] se centra en un sistema con integración simple, mientras que en [38], se estudia el caso de doble integración. Un caso de identificación paramétrica de sistemas marginalmente estables bajo una estructura más general se aborda en [39], donde, luego de exponer algunas de las dificultades que conlleva identificar un sistema cuyo estado aumenta indefinidamente, se presenta un método predictivo que permite obtener cotas superiores sub-lineales para la penalización obtenida a partir de la minimización realizada.

La identificación de sistemas con integración también ha sido abordada en aplicaciones econométricas. Particularmente en modelos de series de tiempo, en los que los polos integrales son comúnmente conocidos como raíces unitarias. En [40] se desarrollan metodologías que permiten detectar la presencia de raíces unitarias para sistemas ARMA de cualquier orden, mientras que en [41] se realizan distintas pruebas para la identificación de un parámetro de un modelo econométrico panel, mostrando que, para ese tipo de modelos, varias de las pruebas comunes en el área no permiten identificar los parámetros de interés cuando existen raíces unitarias.

La identificación de sistemas no estables ha sido, sin embargo, un tema cuya investigación ha sido muy esporádica. Donde para el caso específico de sistemas con integración, esta se ha limitado generalmente a detectar las dinámicas integrales de un sistema y no al análisis de otros parámetros presentes en sistemas con estas dinámicas. La siguiente sección ilustra un ejemplo de un sistema Multi-Agente en el cual se presenta el interés que esto último puede conllevar.

## 1.4. Aplicación: Pelotones de Vehículos

Una aplicación importante de un sistema Multi-Agente corresponde al problema de un pelotón de vehículos autónomos [42], en el que varios vehículos navegan en fila de forma organizada. Este tópico ha sido de gran interés durante los últimos años y ha dado lugar a la investigación de diversas tecnologías para el control y el transporte de grupos de vehículos, entre los que se encuentra el Cooperative Adaptive Cruise Control (CACC) [43], que busca aumentar la seguridad y desempeño en el control longitudinal de vehículos autónomos [44] utilizando algún tipo de sistema de comunicación colaborativo entre los agentes. Comúnmente, los vehículos del pelotón son modelados a partir de sistemas con integración simple, debido a las dinámicas de inercia del sistema [45].

Existen trabajos recientes que exploran la identificación paramétrica en vehículos. En [46], se analiza el problema de identificación y control vehicular en un pelotón unidimensional bajo la política de time-headway, planteando topologías comunes para las estructuras de comunicación de un pelotón, y en [9] se realiza la identificación de vehículos en pelotón bajo distintas estructuras de redes, utilizando una topología basada solamente en las mediciones de velocidad de los vehículos, y una topología que considera tanto la velocidad como

la distancia relativa, probando que esta última permite que la varianza de los parámetros a estimar logre ser hasta cinco veces menor que el considerar solo velocidad. En aquellos trabajos, la estimación de los parámetros es realizada con métodos de lazo cerrado, utilizando los lazos de control del pelotón para esta, y considerando entonces que las señales asociadas son estables. Sin embargo, en caso de que la naturaleza del problema no permita la estabilización del sistema, o solo con el fin de investigar el impacto de la integración en los procesos de identificación, es de interés realizar la estimación de los vehículos considerando las dinámicas inestables asociadas a estos.

Un ejemplo intuitivo que ilustra como un conjunto de vehículos en línea pueden ser modelados como un sistema compuesto de varios agentes, y que plantea una motivación de las aplicaciones posibles del trabajo realizado en esta tesis, corresponde a tomar el sub-sistema de dos vehículos consecutivos de un pelotón y modelar la distancia relativa entre los vehículos como la salida común. Donde, sean  $y_1(t)$  y  $y_2(t)$  las posiciones de los dos vehículos y  $e(t)$  ruido de medición, una medición de esta distancia puede ser modelada como

$$y_{rel}(t) = y_1(t) - y_2(t) + e(t). \quad (1.4.1)$$

En particular, si las salidas de los sistemas se modelan como  $y_i(t) = G_i(q)u_i(t)$ , donde  $G_i(q)$ ,  $i \in \{1, 2\}$  es una función de transferencia con integración simple que corresponde a la función de transferencia del vehículo  $i$  y  $u(i)$  es su entrada, esta salida puede ser modelada como un sistema Multi-Agente MISO dado por

$$y_{rel}(t) = G_1(q)u_1(t) - G_2(q)u_2(t) + e(t). \quad (1.4.2)$$

El modelado del sistema se puede complejizar si además de las salidas medidas por cada agente como la distancia relativa con su predecesor o sucesor [47], se consideran señales transmitidas entre vehículos. De esta forma, se pueden aplicar distintas topologías de información, como interacción con el líder, o interacción con más vehículos [48], las cuales para el caso de la identificación, pueden permitir que los vehículos posean suficiente información para poder estimar sus parámetros de forma consistente.

**Observación 1.4.1.** *Si bien un sistema de vehículos bajo cierta regla de seguimiento entre ellos en pelotón puede ser considerado como un sistema de lazo cerrado, en el cual se ejerce control en relación a distancias o velocidades entre los vehículos según la política implementada, se puede realizar identificación tomando en cuenta la acción integral del sistema al considerar la posición absoluta del vehículo como la salida de este. Por un lado, si cada vehículo tiene acceso directo al valor de su actuación en cada instante, esto se puede realizar considerando las dinámicas de “lazo abierto” de los vehículos considerando la actuación y la posición o distancia recorrida como el par entrada-salida considerado para cada vehículo. Sin embargo, bajo el supuesto que el vehículo líder opera a partir de alguna ley de control sobre su velocidad, la identificación se puede realizar también en lazo cerrado considerando la integración inherente a la posición absoluta de los agentes.*

Para ilustrar esto de forma más clara, se expone un ejemplo donde se considera que el agente 1 es el líder, y  $v_1$  es la referencia de seguimiento de su velocidad. En este caso, la referencia de la posición  $r_1$  del agente 1 estará dada por

$$r_1 = \frac{z}{z-1}v_1. \quad (1.4.3)$$

Luego, si se considera que las posiciones deseadas para los agentes  $r_1$  y  $r_2$  estén separadas a partir de cierta referencia  $r_{12}$ , se tiene

$$r_1 - r_2 = r_{12} \quad (1.4.4)$$

$$r_2 = \frac{z}{z-1}v_1 - r_{12}, \quad (1.4.5)$$

de manera que la referencia de entrada para el lazo cerrado del segundo vehículo también tendrá un componente integral. Es directo observar que este comportamiento se transmitirá a todos los agentes del pelotón, y se aplica también a otras leyes de control como incluir componentes de velocidad y relaciones entre distintos agentes. Para fines de la identificación de los sistemas, este componente integral propio de las referencias de entrada a los agentes puede ser incluida dentro del sistema a estimar. Un ejemplo gráfico de esto se ilustra en la figura 1.1, donde se observa que el sistema  $G_i(z)$  es conformado por el sistema de lazo cerrado estable  $G_{cli}(z)$  y las dinámicas integrales propias de su referencia  $r_i(t)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

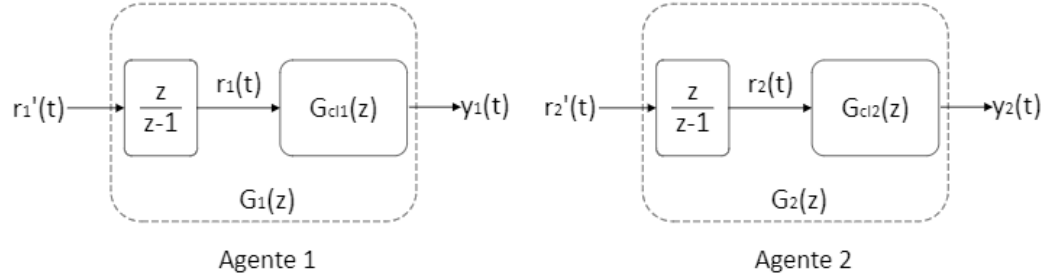


Figura 1.1: Esquema del impacto de la integración en pelotón de vehículos

## 1.5. Objetivos

En el trabajo realizado en esta tesis se busca estudiar la identificación paramétrica de un sistema compuesto por dos agentes, cuya descripción general está dada por

$$y(t) = G_1(q)u_1(t) + G_2(q)u_2(t) + e(t), \quad (1.5.1)$$

y en el cual se considera que ambos agentes poseen acción integral, de forma que estos son marginalmente estables. Cabe notar que esta descripción permite modelar pelotones de vehículos a partir de medidas relativas entre ellos, como se evidencia en (1.4.2).

En general, los procesos de identificación de sistemas dinámicos suponen condiciones de estabilidad dentro de las dinámicas de los sistemas o las señales asociadas para realizar el proceso de estimación [6] [15], o estabilizan las señales realizando la identificación en lazo cerrado [17], [46]. Sin embargo, a pesar de las dificultades que implica identificar sistemas inestables debido a la no estacionalidad del problema y el no cumplimiento de leyes de Parseval, ciertos de los resultados obtenidos en [37] y [38] indican que puede ser de interés incluir la integración dentro de la identificación de un sistema ya que esta puede acelerar las propiedades de convergencia de un estimador.

El objetivo principal de la tesis es lograr implementar estrategias colaborativas entre los agentes, las cuales permitan que ellos puedan realizar la estimación de sus parámetros incluyendo sus propiedades integrales dentro del proceso de identificación. En particular, se busca analizar la presencia de sesgo y la razón de decaimiento de la varianza de la estimación de los parámetros, y comparar estos resultados con estrategias análogas las cuales no tomen en cuenta la integración del sistema para realizar la identificación.

## 1.6. Contribución de la Tesis

Las contribuciones de esta tesis se exponen en los siguientes puntos

- Si bien existen trabajos esporádicos en los que se realiza identificación de sistemas que incluyen integración, estos suelen estar enfocados a sistemas auto-regresivos o sistemas ARMA en los cuales se analizan las propiedades de estimación del polo integral. En general no existe mayor análisis de la identificación de sistemas racionales con ruido aditivo como el planteado en este trabajo, en los que se incluya la integración. Por lo tanto se busca desarrollar un marco de trabajo que formalice propiedades fundamentales acerca de la identificación de sistemas con integración de este tipo.
- La identificación colaborativa de sistemas Multi-Agente suele suponer estabilidad para realizar la identificación de sus sub-sistemas. En este trabajo se aplica el marco desarrollado para la identificación de sistemas con integración a una configuración de un sistema de dos agentes, motivado por la aplicación de pelotones de vehículos, y se trabajan distintos esquemas de comunicación ente los agentes. Si bien, el enfoque de la investigación realizada no está centrado en la complejidad presente al identificar sistemas sobre redes y el componente Multi-Agente considerado es muy simple, el trabajo puede sentar de base para el uso de integración en la identificación de redes más complejas.
- El trabajo realizado extrae resultados para la estimación de los parámetros bajo distintas topologías de comunicación y para distintas configuraciones de la función de transferencia de los agentes en cada caso, utilizando el método de predicción de error. Para las estructuras en las que el estimador otorgado por este método corresponde al estimador de mínimos cuadrados, esta estimación se desarrolla analíticamente, otorgando expresiones cerradas para el sesgo y la varianza de la estimación, que ilustran como la presencia de la integración puede generar una razón de decaimiento más rápida en la varianza del estimador que al identificar sistemas estables. Para otras estructuras, se realizan simulaciones de Monte-Carlo para obtener resultados numéricos que evidencian estas propiedades. En general, se obtienen resultados que expresan el interés en incluir la integración dentro de la identificación de sistemas dinámicos.

## 1.7. Publicaciones asociadas a la Tesis

- **Cristóbal Huidobro**, Francisco J Vargas, Andrés A Peters and Patricio E Valenzuela, “Cooperative identification of multi-agent systems in presence of integral action: Insights from a two-agent framework.” *IFAC-PapersOnLine*, 56(2):10216–10221, 2023.

**Abstract:** This article addresses the parameter inference problem on dynamical systems in a cooperative setting. The dynamical systems contain integral action, which is of practical interest within cyber-physical systems. Given this dynamical characteristic of the problem, existing statistical results on system Identification are not straightforwardly applicable and hence adaptations are required. To this end, a formulation of the problem is presented and results highlighting the challenges of the given setup are discussed. Insights from a two-agent framework are used to formulate results and the next research steps on the topic, where the benefit of performing open-loop Identification on the variance of the parameter is highlighted and bias issues are discussed.

## 1.8. Organización de la Tesis

A continuación se detalla el resto de los capítulos de este trabajo de tesis:

- **Capítulo 2.** Este capítulo de preliminares expone conceptos básicos y desarrolla resultados técnicos que serán de utilidad para el desarrollo de la tesis.
- **Capítulo 3.** Se expone el marco de trabajo bajo el que se trabajará. Se formula el problema a resolver, se describe la metodología que se utilizará, y se presentan las estructuras de los sistemas con los que se trabajará.
- **Capítulo 4.** Se realiza el desarrollo analítico utilizando mínimos cuadrados para la identificación de un sistema con un parámetro a estimar, comparando los resultados para el sesgo y la varianza de la estimación para los distintos esquemas propuestos.
- **Capítulo 5.** Se realiza el desarrollo analítico utilizando mínimos cuadrados para la identificación de un sistema con dos parámetros a estimar, comparando los resultados para el sesgo y la varianza de la estimación para los distintos esquemas propuestos y observando la diferencia al caso de un solo parámetro.
- **Capítulo 6.** Se desarrollan resultados numéricos a partir de simulaciones de Monte-Carlo para sistemas cuya identificación es no lineal en los parámetros a estimar, observando nuevamente las propiedades estadísticas de los distintos esquemas.
- **Capítulo 7.** Se presentan resultados que extienden el desarrollo realizado en los capítulos anteriores.
- **Capítulo 8.** Se presentan las conclusiones del trabajo realizado y se discuten posibilidades acerca del trabajo futuro.

# PRELIMINARES

En este capítulo, se introduce la notación, conceptos, propiedades y resultados técnicos necesarios para el desarrollo que se realiza en esta tesis. En primer lugar se presenta la notación que se utilizará. Luego se introducen conceptos de sistemas dinámicos y la extensión de estos a sistemas de más agentes. Después se introducen nociones de probabilidad y procesos estocásticos. Posteriormente se presenta el concepto de identificación de sistemas y se describen métodos asociados a ello. Más adelante se define la manera en que la razón de decaimiento será tratada en esta tesis. Finalmente se introducen ciertos resultados técnicos respecto a las propiedades de sistemas con integración, y la aplicación del estimador de mínimos cuadrados a estos.

## 2.1. Notación

Para el trabajo realizado en esta tesis,  $\mathbb{R}$ ,  $\mathbb{N}$ ,  $\mathbb{Z}$  y  $\mathbb{C}$  representan el conjunto de números reales, el conjunto de números naturales, el conjunto de números enteros y el conjunto de números complejos respectivamente. Las señales escritas en minúscula, tales como  $x(t)$ , representan señales en tiempo discreto,  $t \in \mathbb{Z}$ , y las señales en mayúscula  $X(z)$ , representan la transformada  $\mathcal{Z}$  de la señal respectiva,  $z \in \mathbb{C}$ . La letra  $q$  representa el operador discreto de retardo en el tiempo, tal que  $qx(t) := x(t+1)$ . Comúnmente, para un proceso estocástico estacionario  $x(t)$ , su media y su varianza serán denotadas por  $\mu_x$  y  $\sigma_x^2$ . También, se denotará  $\mathcal{E}_\theta \{X\}$  la esperanza  $\mathcal{E} \{X\}$  parametrizada en un vector de parámetros  $\theta$ .

## 2.2. Sistemas dinámicos

Un sistema es una noción general que puede ser descrita como el objeto resultante de la interconexión de distintos elementos. Las entradas del sistema corresponden a señales que estimulan el sistema y afectan el comportamiento de este, y las salidas del sistemas son señales utilizadas para observar el comportamiento de estas.

En esta tesis se trabajará con sistemas dinámicos, que son sistemas cuya respuesta, además de depender de las entradas, depende de cantidades que son almacenadas dentro de este. Además, los sistemas trabajados en esta tesis serán lineales e invariantes en el tiempo (LTI) y de tiempo discreto. En este caso, los componentes dinámicos de los sistemas se manifiestan a través de ecuaciones de diferencia.

En general, la estructura de un sistema dinámico, LTI, de una entrada  $u(t)$  y una salida  $y(t)$  (SISO) está dado por

$$y(t) = - \sum_{k_y=1}^m a_{k_y} y(t - k_y) + \sum_{k_u=0}^n b_{k_u} u(t - k_u), \quad (2.2.1)$$

con  $a_{k_y}, b_{k_u} \in \mathbb{R}$ ,  $k_y \in \{1, \dots, m\}$ ,  $k_u \in \{0, \dots, n\}$ ,  $n, m \in \mathbb{N}$ .

### 2.2.1. Función de transferencia

El sistema (2.2.1) también puede describirse a partir de su función de transferencia  $G(z)$ , la cual está definida a partir de la transformada  $\mathcal{Z}$  del sistema y satisface

$$Y(z) = G(z)U(z), \quad (2.2.2)$$

siendo  $U(z)$  y  $Y(z)$  las transformadas  $\mathcal{Z}$  de  $u(t)$  y  $y(t)$  respectivamente.

La función de transferencia  $G(z)$  puede obtenerse a partir de (2.2.1) y sigue la siguiente estructura:

$$G(z) = \frac{\sum_{k_u=0}^n b_{k_u} z^{-k_u}}{1 + \sum_{k_y=1}^m a_{k_y} z^{-k_y}}. \quad (2.2.3)$$

Comúnmente, un sistema LTI suele escribirse de forma similar en el dominio del tiempo utilizando el operador de retardo temporal  $q$ , de modo que

$$y(t) = G(q^{-1})u(t), \quad (2.2.4)$$

con

$$G(q^{-1}) = \frac{\sum_{k_u=0}^n b_{k_u} q^{-k_u}}{1 + \sum_{k_y=1}^m a_{k_y} q^{-k_y}}. \quad (2.2.5)$$

**Observación 2.2.1.** *Es importante destacar que la expresión (2.2.5) corresponde a un abuso de notación, ya que en el dominio del tiempo, la operación que se efectúa entre el sistema y su entrada para obtener la salida corresponde a una convolución y no a una multiplicación como sucede el dominio de la frecuencia. Sin embargo, debido a su utilidad práctica, esta notación será utilizada a lo largo de esta tesis.*

### 2.2.2. Sistemas multi-agente

Para el trabajo realizado en esta tesis, se consideran sistemas multi-agente, los cuales pueden ser considerados como sistemas dinámicos de múltiples entradas y una salida (MISO). En los sistemas considerados, teóricamente, la salida está dada por la superposición de las salidas generadas por la interacción de la entrada y la función de transferencia de cada agente  $i$ , de forma que, para  $m$  agentes,  $m \in \mathbb{N}$ ,

$$y(t) = \sum_{i=1}^m y_i(t) \quad (2.2.6)$$

$$= \sum_{i=1}^m G_i(q^{-1})u_i(t). \quad (2.2.7)$$

En la práctica, se considera que habrá una señal de ruido  $e(t)$  asociada a la medición de esta salida, la cual se agrega aditivamente a la suma de las salidas de los sistemas, de forma que la salida del sistema multi-agente está dada por

$$y(t) = \sum_{i=1}^m G_i(q^{-1})u_i(t) + e(t). \quad (2.2.8)$$

La figura 2.1 representa un esquema gráfico de la estructura de un sistema multi-agente y la relación entre sus entradas y salida.

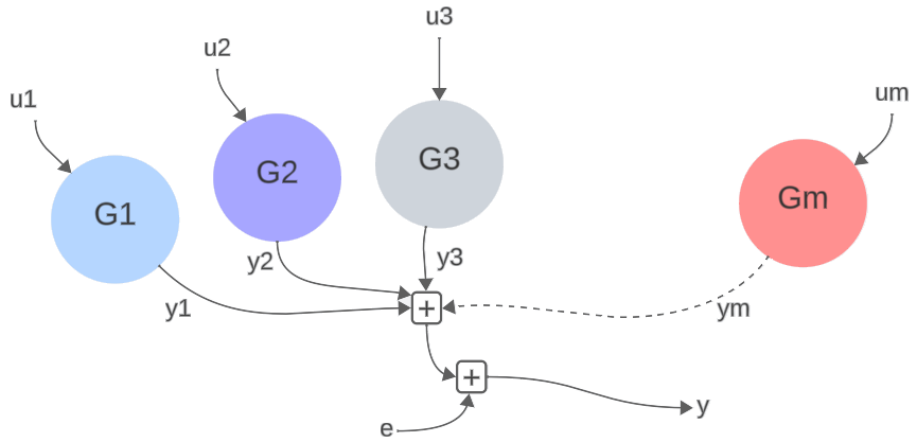


Figura 2.1: Representación gráfica de un sistema multi-agente con  $m$  agentes.

## 2.3. Probabilidad y Procesos estocásticos

En esta sección se presentan conceptos de probabilidad y procesos aleatorios que serán utilizados en este trabajo.

### 2.3.1. Operador esperanza y momentos

Se considera una variable aleatoria  $X$  definida en un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathcal{F}, P_r)$  [49], si  $f_X(x)$  es la función de densidad de probabilidad de esta variable y  $g(X)$  es una función de  $X$ , la esperanza de  $g(X)$  se define como

$$\mathcal{E}\{g(X)\} = \int_{\mathbb{R}^n} g(x)f_X(x)dx. \quad (2.3.1)$$

$\mathcal{E}\{\cdot\}$  es denominado operador esperanza y permite definir características de la variable aleatoria para evaluar su desempeño estadístico [50]. A continuación se presentan algunas de estas, las cuales serán utilizadas a lo largo de esta tesis.

- El valor esperado o media de una variable aleatoria  $X$  está dado por  $\mathcal{E}\{X\}$ . En algunos casos se referirá a el mediante la notación  $\mu_X$ . También es conocido como el primer momento de  $X$ .

- La matriz de covarianza de  $X$  es definida como  $\text{Cov}(X) = \mathcal{E} \{(X - \mu_X)(X - \mu_X)^T\}$  y su varianza como  $\text{Var}(X) = \text{Trace}(\text{Cov}(X))$ . Además la varianza  $\text{Var } x_i$  del  $i$ -ésimo elemento  $x_i$  del vector aleatorio  $X$  está dado por el  $i$ -ésimo elemento de la diagonal de  $\text{Cov}(X)$ , con  $i \in \{1, \dots, N\}$ . En algunos casos se referirá a la varianza de  $x_i$  mediante la notación  $\sigma_{x_i}^2$ .
- El segundo momento de  $X$  está dado por  $E\{XX^T\}$ . Similarmente a la varianza, el segundo momento de cada elemento  $x_i$  perteneciente a  $X$  corresponde al  $i$ -ésimo elemento de la diagonal de  $\mathcal{E} \{XX^T\}$ . Nótese que si el valor esperado de  $X$  es igual a cero, el segundo momento de  $X$  es equivalente a su matriz de covarianza.
- Si se consideran dos variables aleatorias  $X$  e  $Y$ , la covarianza cruzada entre  $X$  e  $Y$  está dada por  $\mathcal{E} \{(X - \mu_x)(Y - \mu_y)\}$ .

### 2.3.2. Independencia y condicionalidad

A menudo se trabajará con múltiples variables aleatorias cuyos valores pueden tener impacto entre sí. A continuación se presentan algunas nociones acerca de las relaciones entre variables aleatorias distintas y la manera en el que el conocimiento sobre ellas impacta en algunas expresiones matemáticas. Estas definiciones pueden ser observadas en el capítulo 2 de [50].

**Definición 2.3.1.** Sean dos variables aleatorias conjuntamente distribuidas  $X$  e  $Y$ , se dice que  $X$  e  $Y$  son no correlacionadas si su covarianza cruzada es igual a cero.

**Definición 2.3.2.** Sean dos variables aleatorias conjuntamente distribuidas  $X$  e  $Y$ , se dice que  $X$  e  $Y$  son independientes si

$$f_{XY}(x, y) = f_X(x)f_Y(y), \quad \forall x, y \quad (2.3.2)$$

Dos variables aleatorias independientes siempre serán no-correlacionadas, sin embargo, lo opuesto no necesariamente se cumple. Además si  $X$  e  $Y$  son variables independientes entre sí, para todo par de funciones medibles  $g(X)$  e  $h(Y)$ , se satisface

$$\mathcal{E} \{g(X)h(Y)\} = \mathcal{E} \{g(X)\} \mathcal{E} \{h(Y)\}. \quad (2.3.3)$$

**Definición 2.3.3.** Sean dos variables aleatorias conjuntamente distribuidas  $X$  e  $Y$ , la densidad de probabilidad condicional de  $X$  dado  $Y$  está dada por

$$f_{X|Y}(x) = \frac{f_{XY}(x, Y)}{f_Y(Y)} \quad (2.3.4)$$

El operador esperanza puede ser modificado para aplicarse a densidades de probabilidad condicionales, resultando en la esperanza condicional. Si se considera  $g(X, Y)$  una función medible, la esperanza condicional de  $g(X, Y)$  dado  $Y$  está dada por

$$\mathcal{E} \{g(X, Y)|Y\} = \int_{\mathbb{R}^n} g(x, y) f_{X|Y}(x) dx, \quad (2.3.5)$$

y la matriz de covarianza condicional de  $X$  dado  $Y$  corresponde a

$$\text{Cov}(X|Y) = \mathcal{E} \{(X - \mathcal{E} \{X|Y\})(X - \mathcal{E} \{X|Y\})^T | Y\}. \quad (2.3.6)$$

### 2.3.3. Variables aleatorias Gaussianas

Una variable aleatoria  $X$  se dice Gaussiana si esta tiene una función de densidad de probabilidad que satisface

$$f_X(x) = \frac{1}{(2\pi)^{\frac{n}{2}} \sqrt{\text{Det}(\text{Cov}(X)^2)}} e^{-\frac{1}{2}(x-\mu_X)^T (\text{Cov}(X)^2)^{-1} (x-\mu_X)}. \quad (2.3.7)$$

Las variables aleatorias  $X_1, X_2, \dots, X_N$  son conjuntamente Gaussianas si la variable aleatoria  $[X_1 \ X_2 \ \dots \ X_N]$  es Gaussiana.

Si dos variables  $X$  e  $Y$  conjuntamente Gaussianas son no correlacionadas entre si, entonces  $X$  e  $Y$  son independientes.

### 2.3.4. Procesos estocásticos

Dado un espacio de probabilidad  $(\Omega, \mathbb{F}, \mathbb{P})$ , un proceso estocástico  $X(t)$  es una función  $\Omega \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^n$ , donde  $\mathbb{T}$  es un conjunto de índices. En otras palabras, un proceso estocástico puede ser visto como una función cuyo valor en cada índice  $t \in \mathbb{T}$  es una variable aleatoria [50].

Para efectos de esta tesis, se trabajará con procesos estocásticos en tiempo discreto, es decir  $\mathbb{T} \subseteq \mathbb{Z}$ .

**Definición 2.3.4.** Sean  $X(t)$  e  $Y(t)$  dos procesos estocásticos definidos sobre el mismo conjunto de probabilidad y bajo el mismo índice  $\mathbb{T}$ , de dimensiones  $n_X$  y  $n_Y$  respectivamente. La función de covarianza cruzada entre  $X$  e  $Y$  es una función  $R_{XY} : \mathbb{T} \times \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}^{n_X \times n_Y}$  tal que para cada  $t, \tau \in \mathbb{T}, t + \tau \in \mathbb{T}$ ,

$$R_{XY}(t + \tau, t) = \mathcal{E} \{ (X(t + \tau) - \mu_x(t + \tau))(Y(t) - \mu_y(t))^T \}. \quad (2.3.8)$$

La función de auto-covarianza de  $X(t)$  es definida como  $R_X(t + \tau, t) = R_{XX}(t + \tau, t)$ .

A continuación, se presentan ciertas características específicas de algunos procesos estocásticos, las cuales, en el caso de cumplirse, facilitan la caracterización del proceso y de su auto-covarianza.

**Definición 2.3.5.** Un proceso estocástico es estrictamente estacionario si su distribución es independiente del índice  $k$ . Formalmente, el proceso será estrictamente estacionario si y solo si

$$F_{x(t_0), \dots, x(t_n)}(x(t_0), \dots, x(t_n)) = F_{x(t_0 + \tau), \dots, x(t_n + \tau)}(x(t_0 + \tau), \dots, x(t_n + \tau)), \quad (2.3.9)$$

para todo  $\{t_0, \dots, t_n\} \in \mathbb{T}$  y  $\tau \in \mathbb{T}$  tal que  $t_i + \tau \in \mathbb{T}$ , y  $n \in \mathbb{N}_0$ .

**Definición 2.3.6.** Un proceso estocástico definido para  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  es estacionario en sentido amplio (WSS) si su media  $\mu(t)$  es constante para todo  $t \in \mathbb{Z}$  y su auto-covarianza es una función que depende solamente de  $\tau$  para todo  $k, \tau \in \mathbb{Z}$ , de forma que

$$\mu_X = \mu_X(t) \quad R_X(\tau) = R_X(\tau + t, t). \quad (2.3.10)$$

**Definición 2.3.7.** *Un proceso estocástico definido para  $\mathbb{T} = \mathbb{Z}$  es asintóticamente estacionario en sentido amplio (a-WSS) [51] si existen  $a \in \mathbb{R}^{n_x}$  y  $f(\tau)$  una función finita en  $\tau$  tal que*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \mu_X(t) = a, \quad \lim_{t \rightarrow \infty} R_X(t + \tau, t) = f(\tau), \quad (2.3.11)$$

en este caso se define  $\mu_X(t) = a$  y  $R_X(\tau) = f(\tau)$ .

Un ejemplo de un proceso estocástico que aparecerá frecuentemente en los sistemas desarrollados en este trabajo es el ruido blanco, el cual corresponde a una secuencia de variables aleatorias no correlacionadas entre si. Formalmente este se define como

**Definición 2.3.8.** *Un proceso estocástico  $X$  con índices en  $\mathbb{T}$  es ruido blanco si y solo si se cumple*

$$\mathcal{E} \{ (X(t) - \mu_X(k))(X(t + \tau) - \mu_X(k + \tau))^T \} = 0, \quad \forall \tau \neq 0, \quad k, k + \tau \in \mathbb{T}. \quad (2.3.12)$$

Si un proceso estocástico blanco es Gaussiano, entonces los elementos de su covarianza para  $\tau \neq 0$  serán independientes entre si.

### 2.3.5. Estimación de parámetros

Sea  $X$  una variable aleatoria cuya función de distribución depende de un parámetro determinístico pero desconocido  $\theta \in \mathbb{R}^m$ . Dada una secuencia de variables aleatorias  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  i.i.d que se comportan como  $X$ , un estimador  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  corresponde a una variable aleatoria dada por  $F(X_1, X_2, \dots, X_n)$ , donde  $F$  es una función medible [52]. Cada realización de  $\hat{\theta}$  corresponde a una estimación de  $\theta$ .

**Definición 2.3.9.** *Un estimador  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  es insesgado si y solo si, sin importar el valor de  $\theta$  se satisface*

$$\mathcal{E} \{ \hat{\theta} \} = \theta, \quad (2.3.13)$$

y  $\hat{\theta}$  es asintóticamente insesgado si, sin importar el valor de  $\theta$ ,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E} \{ \hat{\theta} \} = \theta. \quad (2.3.14)$$

**Definición 2.3.10.** *Un estimador  $\hat{\theta}$  de  $\theta$  es consistente [53], si y solo si, sin importar el valor de  $\theta$  se satisface*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} Pr \{ \|\theta - \hat{\theta}\| > \varepsilon \} = 0, \quad (2.3.15)$$

para todo  $\varepsilon > 0$ .

**Observación 2.3.1.** *Si un estimador es tal que*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{E} \{ \hat{\theta} \} = \theta, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \text{Var}(\hat{\theta}) = 0, \quad (2.3.16)$$

entonces, este estimador es consistente.

### 2.3.6. Simulaciones de Monte-Carlo

**Teorema 2.3.1** (Ley de los grandes números). *Sea una secuencia de variables aleatorias  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  i.i.d que se comportan como  $X$ , tales que  $|\mathcal{E}\{X\}| < \infty$ , y definiendo la media muestral  $\bar{X}_n$  como*

$$\bar{X}_n = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad (2.3.17)$$

la ley de los grandes números [54] establece que  $\bar{X}_n$  converge a  $\mathcal{E}\{X\}$  al aumentar infinitamente el número de muestras, de forma que

$$Pr\left(\lim_{n \rightarrow \infty} \bar{X}_n = \mathcal{E}\{X\}\right) = 1 \quad (2.3.18)$$

Las simulaciones de Monte-Carlo son métodos estadísticos que corresponden a realizar  $n$  experimentos  $\{X_1, X_2, \dots, X_n\}$  aleatorios e idénticamente distribuidos de la variable aleatoria  $X$  (llamados realizaciones), y calcular su media muestral  $\bar{X}_n$ . Si el número  $n$  es lo suficientemente grande, según la ley de los grandes números el valor de la media muestral convergerá con probabilidad 1 al valor esperado  $\mathcal{E}\{X\}$  de  $X$ . [55]

## 2.4. Identificación de sistemas

La identificación de sistemas corresponde al proceso de caracterizar matemáticamente un sistema dinámico a partir de un conjunto de información disponible, con el fin de obtener un modelo adecuado para la aplicación que se quiera efectuar sobre el sistema. El proceso de identificación requiere de tres entidades básicas [56].

- El conjunto de datos experimentales  $\mathcal{Z}$ . Este conjunto está dado por las cantidades medidas en los experimentos de recolección de datos, que son de interés para realizar la identificación. Generalmente consiste de mediciones de variables del sistema, modeladas como entradas, salidas o estados de este, en distintos instantes de tiempo. Las relaciones entre estas variables permiten extraer información sobre el sistema y lograr escoger un modelo por sobre otro.
- El conjunto de modelos candidatos  $\mathcal{M}$ . Corresponde a una colección de modelos dentro de la cual se espera que se encuentre el modelo adecuado para representar el sistema. La obtención del conjunto de modelos puede obtenerse de diferentes formas, ya sea a partir de conocimiento previo de ciertas dinámicas físicas del sistema, o simplemente a través un ajuste de datos, observando el comportamiento de las distintas variables al ver el sistema como una “caja negra”.

En algunos casos, se considera que se tiene cierto conocimiento sobre la estructura de la función de transferencia del sistema, por lo que el problema de identificación se reduce a determinar el vector de parámetros  $\hat{\theta}$  adecuado para escoger un modelo de entre un conjunto de funciones de transferencia que cumplen la estructura elegida  $G(q^{-1}, \theta)$ , de tal forma que  $\mathcal{M} = \{G(q^{-1}, \theta)\}$ . Esto se conoce como identificación paramétrica, y es la clase de identificación que será llevada a cabo en esta tesis.

- El método de identificación. Corresponde al método utilizado para determinar el modelo adecuado que tenga mejor desempeño dentro del conjunto de modelos  $\mathcal{M}$  a partir

del vector de datos disponibles  $\mathbf{Z}$ . Generalmente se utilizan estimadores o métodos estadísticos que definen algún criterio de desempeño para evaluar los distintos modelos candidatos, como por ejemplo la minimización de alguna función de costo. Los métodos de identificación utilizados en esta tesis son el método de mínimos cuadrados, y el método de predicción de error, los cuales son descritos con mayor detalle a continuación.

### 2.4.1. Estimador de mínimos cuadrados

Se considera un sistema cuya estructura satisface

$$y(t) = \varphi^T(t)\theta + e(t), \quad (2.4.1)$$

donde  $y(t) \in \mathbb{R}$  es la salida del sistema,  $\varphi(t) \in \mathbb{R}^n$  es un vector de cantidades conocidas, llamadas regresores,  $\theta \in \mathbb{R}^n$  corresponde al vector de parámetros a estimar y  $e(t)$  corresponde a una señal del sistema no conocida, como ruido de medición por ejemplo.

El método de mínimos cuadrados busca obtener una estimación del vector de parámetros  $\theta$  a partir de mediciones de la salida  $y(t)$  y el vector de regresores  $\varphi(t)$  para cada instante  $t$  desde 1 hasta cierto número  $N$ . Para realizar esto se plantea el sistema de ecuaciones dado por

$$Y = \Phi\theta + E, \quad (2.4.2)$$

con  $Y = [y(1) \ y(2) \ \cdots \ y(N)]^T$ ,  $\Phi = [\varphi(1) \ \varphi(2) \ \cdots \ \varphi(N)]^T$  y  $E = [e(1) \ e(2) \ \cdots \ e(N)]^T$ .

Como  $Y$  no corresponde exactamente a  $\Phi\theta$  debido a la presencia de la señal  $e(t)$ , es de interés aumentar el número de muestras lo máximo posible para mejorar la estimación. Sin embargo, si el número de muestras considerado es superior al número de parámetros a estimar, es decir  $N > n$ , el sistema no tendrá solución exacta.

Por lo tanto, para resolver el sistema de ecuaciones, se busca minimizar el error del modelo utilizado respecto al sistema, el cual para un instante  $t$  dado se define como

$$\varepsilon(t, \theta) = y(t) - \varphi^T(t)\theta. \quad (2.4.3)$$

El estimador de mínimos cuadrados corresponde al estimador que minimiza la norma cuadrática de  $\varepsilon(t, \theta)$  dada por

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t, \theta). \quad (2.4.4)$$

Este estimador está dado por [57]

$$\hat{\theta}_{LS} = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y. \quad (2.4.5)$$

### 2.4.2. Método de predicción de error

Para ciertas aplicaciones, como por ejemplo el control de una planta, el modelo que se utiliza para identificar un sistema será empleado para predecir la salida de este en un

instante  $t$  dado. Por lo tanto, es de interés comparar la salida del sistema, dada por  $y(t)$ , con el valor predicho de esta a partir del modelo utilizado y de los datos existentes hasta el instante anterior  $t - 1$  [57]. El método de predicción de error define un predictor a partir de esta información, denotado por  $\hat{y}(t|t - 1, \theta)$ , y busca encontrar el vector de parámetros  $\hat{\theta}$  que minimice cierta función del error de estimación  $\varepsilon(t|t - 1, \theta)$ , definido como

$$\varepsilon(t|t - 1, \theta) = y(t) - \hat{y}(t|t - 1, \theta). \quad (2.4.6)$$

En particular, si se considera un conjunto de modelos lineales cuya estructura esté descrita por

$$y(t) = G(q^{-1}, \theta)u(t) + H(q^{-1}, \theta)e(t), \quad (2.4.7)$$

para llevar a cabo el método de predicción de error, se debe determinar la estructura de los filtros  $W_y(q^{-1}, \theta)$  y  $W_u(q^{-1}, \theta)$  estrictamente propios del predictor

$$\hat{y}(t|t - 1) = W_y(q^{-1}, \theta)y(t) + W_u(q^{-1}, \theta)u(t) \quad (2.4.8)$$

y escoger el criterio respecto al error de estimación  $\varepsilon(t|t - 1|\theta)$  que será utilizado para evaluar el desempeño de un modelo y determinar el vector de parámetros  $\theta_{opt}$  adecuado para describir el sistema.

Para la identificación realizada en esta tesis, el predictor utilizado corresponderá al *one-step ahead predictor* [56], el cual está dado por

$$W_y(q^{-1}, \theta) = [1 - H^{-1}(q^{-1}, \theta)], \quad W_u(q^{-1}, \theta) = H^{-1}(q^{-1}, \theta)G(q^{-1}, \theta). \quad (2.4.9)$$

Nótese que si  $H(q^{-1}, \theta) = 1$ , este predictor corresponde a

$$\hat{y}(t|t - 1) = G(q^{-1}, \theta)u(t). \quad (2.4.10)$$

Por otra parte, el criterio utilizado corresponderá a la minimización la función de costo  $V_N(\theta)$ , la cual corresponde a la norma cuadrática del vector de predicción de error  $\varepsilon(t|t - 1, \theta)$  con datos desde 1 hasta cierto valor  $N$ , de forma que

$$V_N(\theta) = \frac{1}{N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t|t - 1, \theta). \quad (2.4.11)$$

**Observación 2.4.1.** *Si la estructura del sistema puede ser escrita como (2.4.1), se considera el one-step ahead predictor como predictor y se utiliza la norma cuadrática del vector de predicción como criterio de desempeño, el estimador dado por el método de predicción de error corresponde al estimador de mínimos cuadrados [56].*

**Observación 2.4.2.** *En esta tesis, frecuentemente se trabajará con sistemas de dos agentes, donde el predictor deberá tomar en consideración la información otorgada por ambas entradas y ambos conjuntos de modelos. La extensión del método de predicción de error al aumentar el número de agentes es bastante directa y consiste en reescribir el one-step ahead prediction error (2.4.8) como*

$$\hat{y}(t|t - 1) = W_y(q^{-1}, \theta)y(t) + W_{u_1}(q^{-1}, \theta)u_1(t) + W_{u_2}(q^{-1}, \theta)u_2(t), \quad (2.4.12)$$

con  $W_y(q^{-1}, \theta)$  de (2.4.9) y

$$W_{u_i}(q^{-1}, \theta)u_i(t) = H(q^{-1}, \theta)G_i(q^{-1}, \theta), \quad (2.4.13)$$

siendo  $G_i(q^{-1}, \theta)$  la estructura de la función de transferencia del  $i$ -ésimo agente,  $i \in \{1, 2\}$ .

## 2.5. Razón de decaimiento

Se considera una sucesión  $F(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$ . Se dice que esta sucesión tiene una razón de decaimiento de  $M(n)$ , si tanto  $F(n)$  y  $M(n)$  convergen a 0, y se satisface  $F(n) = O_{\Theta}(M(n))$ , siendo  $M(n) : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{R}$  una función de  $n$ .

$O_{\Theta}(M(n))$  corresponde a la cota ajustada asintótica definida en [58] como

**Definición 2.5.1.**  $F(n) = O_{\Theta}(M(n))$  si existen constantes  $c_1, c_2, n_0 \in \mathbb{R}^+$  tales que  $\forall n > n_0$  se cumple

$$0 \leq c_1 M(n) \leq F(n) \leq c_2 M(n). \quad (2.5.1)$$

**Observación 2.5.1.** Como se observa en [58], la cota ajustada asintótica normalmente es referida en la literatura mediante la letra  $\Theta$ , para este trabajo se utilizará la notación  $O_{\Theta}$ , debido a que  $\Theta$  será utilizado más adelante para referirse a los conjuntos a los que pertenecen los parámetros de estimación.

Como la razón de decaimiento será utilizada para evaluar el desempeño de sucesiones convergentes a 0, al comparar dos sucesiones  $F_1(n)$  y  $F_2(n)$  tales que  $F_1(n)$  tiene una razón de decaimiento de  $M_1(n)$  y  $F_2(n)$  tiene una razón de decaimiento de  $M_2(n)$ , se considera que  $F_1(n)$  tiene una razón o un orden de decaimiento más rápida que  $F_2(n)$  si se cumple

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{M_1(n)}{M_2(n)} = 0. \quad (2.5.2)$$

En otras palabras, se dice que la razón de decaimiento de una sucesión aumenta en rapidez si esa sucesión converge más rápidamente a cero.

**Observación 2.5.2.** En algunos trabajos similares de identificación paramétrica en los que se obtienen resultados de convergencia, se analizan ciertas propiedades asintóticas directamente sobre el estimador o en algún proceso estocástico, en lugar de utilizar medidas estadísticas de estos (capítulo 10 de [37]). Para esos casos comúnmente las secuencias son evaluadas a través de los órdenes de probabilidad  $O_p$  y  $o_p$ , definidas en [59], las cuales definen cotas superiores para el comportamiento de una secuencia aleatoria. En términos coloquiales, una secuencia es  $O_p(f_n)$  si no alcanza órdenes superiores (en magnitud, no rapidez) a  $f_n$ , y una secuencia es  $o_p(f_n)$  si tiene un orden estrictamente inferior a  $f_n$ .

En el trabajo realizado en esta tesis, la razón de decaimiento es comúnmente utilizada como evaluación para el valor esperado de la varianza de un estimador, la cual es un proceso determinístico en lugar de estocástico. La notación  $O_p$  y  $o_p$  corresponde a extensiones estocásticas de cotas asintóticas equivalentes para sucesiones determinísticas comúnmente definidas como  $O$  y  $o$  [58], por lo que resultaría razonable aplicar esas cotas en las sucesiones aplicadas. Sin embargo, al evaluar una serie determinística de la naturaleza de la que se está trabajando (la varianza de un proceso estocástico), es posible aplicar cotas inferiores además de superiores y obtener el orden preciso de la sucesión, dado por  $O_{\Theta}$ . En efecto, el conjunto de las funciones que satisface  $O_{\Theta}$  corresponde a la unión de las funciones que satisfacen  $O$  y las funciones que no satisfacen  $o$ .

## 2.6. Análisis de sistemas con integración

La integración es una característica presente en los modelos de muchos sistemas, en particular, suele ser parte de las dinámicas de sistemas con masa. Sin embargo, como los sistemas con integración son no estables, algunas señales relacionadas a estos sistemas, tales como su salida pueden ser no acotadas. Esto significa que puede haber dificultades al aplicar directamente ciertas herramientas de identificación de sistemas en este tipo de sistemas. En esta sección se realiza un análisis de sistemas con integración para poder trabajar más fácilmente con estos.

### 2.6.1. Momentos de sistemas de integración

En primer lugar, para poder abordar las dificultades que puedan aparecer al realizar la identificación de estos, en esta sección se presentan ciertos resultados preliminares respecto a las estadísticas de un sistema con integración.

**Teorema 2.6.1.** *Varianza de un integrador.*  
Se considera el siguiente proceso estocástico:

$$z(t) = z(t-1) + u(t) \quad (2.6.1)$$

para  $t > 0$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , donde  $z(0) = 0$  y  $u(t)$  es un proceso estacionario con media 0 y función de auto-covarianza  $R_u(\tau)$ , con  $R_u(-\tau) = R_u(\tau)$  para todo  $\tau > 0$ . Definiendo  $t_{min} := \min(t_1, t_2)$  y  $t_{max} := \max(t_1, t_2)$ . Entonces, para todo  $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{E}\{z(t_1)z(t_2)\} = t_{min} \sum_{\tau=-(t_{min}-1)}^{t_{min}-1} \left[1 - \frac{|\tau|}{t_{min}}\right] R_u(\tau) + \sum_{k_1=t_{min}+1}^{t_{max}} \sum_{k_2=1}^{t_{min}} R_u(k_1 - k_2). \quad (2.6.2)$$

Además, para todo  $t \in \mathbb{N}$ ,

$$\text{Var}(z(t)) = t \sum_{\tau=-(t-1)}^{t-1} \left[1 - \frac{|\tau|}{t}\right] R_u(\tau) \quad (2.6.3)$$

*Demostración.*  $z(t)$  se puede escribir en función de  $u(t)$  como:

$$z(t) = \sum_{k=1}^t u(k) \quad (2.6.4)$$

Entonces,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\{z(t_1)z(t_2)\} &= \mathcal{E}\left\{\sum_{k_1=1}^{t_1} u(k_1) \sum_{k_2=1}^{t_2} u(k_2)\right\} \\
&= \sum_{k_1=1}^{t_1} \sum_{k_2=1}^{t_2} \mathcal{E}\{u(k_1)u(k_2)\} \\
&= \sum_{k_1=1}^{t_1} \sum_{k_2=1}^{t_2} R_u(k_1 - k_2)
\end{aligned} \tag{2.6.5}$$

La suma (2.6.5) puede ser reescrita utilizando  $t_{min}$  y  $t_{max}$  como

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}\{z(t_1)z(t_2)\} &= \sum_{k_1=1}^{t_{min}} \sum_{k_2=1}^{t_{min}} R_u(k_1 - k_2) + \sum_{k_1=t_{min}+1}^{t_{max}} \sum_{k_2=1}^{t_{min}} R_u(k_1 - k_2) \\
&= \sum_{\tau=-(t_{min}-1)}^{t_{min}-1} [t_{min} - |\tau|] R_u(\tau) + \sum_{k_1=t_{min}+1}^{t_{max}} \sum_{k_2=1}^{t_{min}} R_u(k_1 - k_2).
\end{aligned}$$

La expresión (2.6.3) se obtiene de (2.6.2) haciendo  $t_1 = t_2$  y observando que la segunda expresión en el lado derecho de la igualdad (2.6.3) desaparece cuando  $t_1 = t_2$ .  $\square$

**Observación 2.6.1.** En la configuración descrita en el Teorema 2.6.1, si  $\{u(t)\}$  es una secuencia de ruido blanco, entonces

$$\mathcal{E}\{z(t_1)z(t_2)\} = t_{min}R_u(0), \tag{2.6.6}$$

y la varianza de  $z(t)$  está dada por

$$\text{Var}(z(t)) = tR_u(0). \tag{2.6.7}$$

**Corolario 2.6.1.** Se consideran las suposiciones expuestas en el teorema 2.6.1, que  $u(t)$  tiene un espectro bien definido, y

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \left| \sum_{\tau=-(t-1)}^{t-1} |\tau| R_u(\tau) \right| < \infty. \tag{2.6.8}$$

Entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(z(t))}{t} = \Phi_u(0), \tag{2.6.9}$$

donde  $\Phi_u : [-\pi, \pi] \rightarrow \mathbb{R}_0^+$  es la densidad espectral de potencia de  $u(t)$ .

*Demostración.* Del teorema 2.6.1, se extrae

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(z(t))}{t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \sum_{\tau=-(t-1)}^{t-1} \left[ 1 - \frac{|\tau|}{t} \right] R_u(\tau) \quad (2.6.10)$$

$$= \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_u(\tau) - \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{\tau=-(t-1)}^{t-1} |\tau| R_u(\tau) \quad (2.6.11)$$

De (2.6.8),

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{\tau=-(t-1)}^{t-1} |\tau| R_u(\tau) = 0. \quad (2.6.12)$$

Finalmente  $\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} R_u(\tau) = \Phi_u(0)$ .  $\square$

**Corolario 2.6.2.** *Considerando las suposiciones expuestas en el teorema 2.6.1 y el corolario 2.6.1, y considerando que*

$$\sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |R_u(\tau)| < \infty, \quad (2.6.13)$$

*la cual es una condición que, generalmente, se cumple para señales con un espectro bien definido. Entonces, para  $d$  finito en  $\mathbb{N}$ , también se satisface*

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}\{z(t)z(t+d)\}}{t} = \Phi_u(0). \quad (2.6.14)$$

*Demostración.* Del teorema 2.6.1 y el corolario 2.6.1,

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{E}\{z(t)z(t+d)\}}{t} = \Phi_u(0) + \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k_1=t+1}^{t+d} \sum_{k_2=1}^t R_u(k_1 - k_2), \quad (2.6.15)$$

luego, (2.6.14) se cumple si y solo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k_1=t+1}^{t+d} \sum_{k_2=1}^t R_u(k_1 - k_2) = 0. \quad (2.6.16)$$

Ordenando los términos de la sumatoria anterior se reescribe la condición como

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \sum_{k_1=1}^d \sum_{\tau=k_1}^{k_1+t-1} R_u(\tau) = 0. \quad (2.6.17)$$

Luego

$$\left| \sum_{k_1=1}^d \sum_{\tau=k_1}^{k_1+t-1} R_u(\tau) \right| \leq \sum_{k_1=1}^d \sum_{\tau=k_1}^{k_1+t-1} |R_u(\tau)| \quad (2.6.18)$$

$$\leq \sum_{k_1=1}^d \sum_{\tau=1}^{d+t-1} |R_u(\tau)| \quad (2.6.19)$$

$$= d \sum_{\tau=1}^{d+t-1} |R_u(\tau)| \quad (2.6.20)$$

$$\leq d \sum_{\tau=-\infty}^{\infty} |R_u(\tau)| \quad (2.6.21)$$

Finalmente, de esto y (2.6.13) se satisface (2.6.17).  $\square$

**Teorema 2.6.2.** *Segundo momento de un integrador con valor continuo.*  
Se considera el siguiente proceso estocástico

$$z(t) = z(t-1) + u(t) \quad (2.6.22)$$

para  $t > 0$ ,  $t \in \mathbb{N}$ , donde  $z(0) = 0$  y  $u(t)$  es un proceso de ruido blanco con media  $C$  y varianza  $\sigma_u^2$ . Entonces, para todo  $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ ,

$$\mathcal{E} \{z(t_1)z(t_2)\} = t_{\min} \sigma_u^2 + t_1 t_2 C^2, \quad (2.6.23)$$

y la varianza de  $z(t)$  está dada por

$$\text{Var } z(t) = t \sigma_u^2 + t^2 C^2. \quad (2.6.24)$$

*Demostración.*  $u(t)$  se puede escribir como:

$$u(t) = C + \bar{u}(t), \quad (2.6.25)$$

donde  $\bar{u}(t)$  es un proceso de ruido blanco con media 0 y varianza  $\sigma_u^2$ . Luego,  $z(t)$  se puede expresar en función de  $\bar{u}(t)$  y  $C$  como

$$z(t) = \sum_{k=1}^t (C + \bar{u}(k)). \quad (2.6.26)$$

Luego, la expresión  $\mathcal{E}\{z(t_1)z(t_2)\}$  puede ser escrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\{z(t_1)z(t_2)\} &= \mathcal{E}\left\{\sum_{k_1=1}^{t_1}(C+\bar{u}(k_1))\sum_{k_2=1}^{t_2}(C+\bar{u}(k_2))\right\} \\ &= \sum_{k_1=1}^{t_1}\sum_{k_2=1}^{t_2}\mathcal{E}\{(C+\bar{u}(k_1))(C+\bar{u}(k_2))\} \\ &= \sum_{k_1=1}^{t_1}\sum_{k_2=1}^{t_2}C^2 + C\mathcal{E}\{\bar{u}(k_1)\} + C\mathcal{E}\{\bar{u}(k_2)\} + \mathcal{E}\{\bar{u}(k_1)\bar{u}(k_2)\}.\end{aligned}\quad (2.6.27)$$

Como  $\mathcal{E}\{\bar{u}(t)\} = 0$ , la expresión (2.6.27) puede ser reescrita como

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\{z(t_1)z(t_2)\} &= \mathcal{E}\{\bar{z}(t_1)\bar{z}(t_2)\} + \sum_{k_1=1}^{t_1}\sum_{k_2=1}^{t_2}C^2 \\ &= \mathcal{E}\{\bar{z}(t_1)\bar{z}(t_2)\} + t_1t_2C,\end{aligned}\quad (2.6.28)$$

con  $\bar{z}(t) = \sum_{k=1}^t u(k)$ .

Finalmente, a partir de la observación 2.6.1, se cumple  $\mathcal{E}\{\bar{z}(t_1)\bar{z}(t_2)\} = \min(t_1, t_2)\sigma_u^2$ , cumpliéndose la expresión (2.6.23). La expresión para la varianza es obtenida igualando  $t_1 = t_2 = t$ .  $\square$

**Observación 2.6.2.** *El comportamiento de los momentos de sistemas con integración, los cuales crecen lineal o cuadráticamente en relación al índice  $t$  dependiendo del caso, provoca que comúnmente aparecerán sumatorias con aquellos términos al analizar este tipo de sistemas, en específico para caracterizar el estimador de mínimos cuadrados. A continuación se despliegan los dos primeros casos de la fórmula de Faulhaber [60], el cual es un resultado algebraico que se utilizará a lo largo de esta tesis.*

**Lema 2.6.1.** *Sumas de  $N - 1$  primeros términos.*

$$\sum_{t=1}^{N-1} t = \frac{N(N-1)}{2}, \quad (2.6.29)$$

$$\sum_{t=1}^{N-1} t^2 = \frac{N(N-1)(2N-1)}{6}. \quad (2.6.30)$$

## 2.6.2. Aplicación del estimador mínimos cuadrados en sistemas con integración

Se considera un sistema estocástico dado por

$$z(t) = \frac{1}{1-q^{-1}}y(t) + e(t), \quad (2.6.31)$$

donde  $z(0) = 0$ ,  $e(t)$  es ruido blanco independiente de  $y(t)$  y  $z(t)$ , e  $y(t)$  es la salida de un sistema estable, el cual puede ser escrito como

$$y(t) = \phi^T(t)\theta, \quad (2.6.32)$$

donde  $\phi(t) \in \mathbb{R}^n$  es un vector de regresores no correlacionado con  $e(t)$ , y  $\theta \in \mathbb{R}^n$  es un vector de parámetros determinísticos pero desconocidos. El objetivo es estimar el vector de parámetros  $\theta$ .

Se observa que es fácil describir la salida de  $z(t)$  de forma compatible con mínimos cuadrados si se considera la diferencia  $\bar{z}(t) = z(t) - z(t-1)$  como la salida del sistema, de forma que

$$\begin{aligned}\bar{z}(t) &= y(t) + \bar{e}(t) \\ &= \phi^T(t)\theta + \bar{e}(t),\end{aligned}\tag{2.6.33}$$

donde  $\bar{e}(t) = e(t) - e(t-1)$ .

Sin embargo, el realizar esta operación sería equivalente a aplicar un filtro derivativo  $1 - q^{-1}$  que cancelaría la integración asociada a  $z(t)$  y estabilizaría las señales del sistema, perdiéndose las propiedades y los momentos examinados en la sección anterior.

Si se busca incluir esta integración dentro de las salidas de las señales y del proceso de identificación utilizando mínimos cuadrados, considerando  $\phi(0) = 0$ , el sistema puede expresarse directamente en función de la salida  $z(t)$  como

$$z(t) = \varphi(t)^T \theta + e(t),\tag{2.6.34}$$

donde  $\varphi(t) = \sum_{k=1}^t \phi(k)$  será el vector de regresores del sistema.

Esta expresión permite utilizar mínimos cuadrados para sistemas con integración manteniendo las características inestables de estos, y será utilizada a lo largo de esta tesis para sistemas con integración que satisfagan las condiciones para que su estimador de mínimos cuadrados corresponda al entregado por el método PEM.

# MARCO DE TRABAJO

En este capítulo se presenta el marco del trabajo que se realizará a lo largo de esta tesis. Primero se describe la configuración del sistema multi-agente con la que se trabajará y se detallan las entradas que alimentarán a los agentes. Luego, se especifica la función de costo que se minimizará para la estimación de los parámetros y las métricas estadísticas utilizadas para evaluar el desempeño de los estimadores. Se describen después los esquemas de estimación de los agentes en los que se centrará el trabajo y las distintas configuraciones de las funciones de transferencia que se tomarán en consideración, definiendo así los casos de estudio para la tesis. Más adelante se presentan los métodos de estimación que se aplicarán a cada caso. Finalmente se presentan ciertas suposiciones sobre señales asociadas a los sistemas trabajados, acompañadas de simulaciones que corroboran el cumplimiento de estas suposiciones para algunas señales de interés.

### 3.1. Configuración del sistema

Si bien el estudio de esquemas colaborativos para la identificación de sistemas dinámicos en redes ha generado gran interés recientemente, los trabajos asociados a aquello suponen generalmente estabilidad en los sistemas. Al enfocar el trabajo en sistemas que no son estables, el análisis se enfocará principalmente en los efectos que tiene la integración al ser parte inherente del problema de identificación, motivando como trabajo futuro el rol que esta puede tener al aumentar la escala y la complejidad de las redes. De esta forma se considerará un sistema dos agentes, como se observa en la figura 3.1, donde este podría ser interpretado como una sub-sección de una red con más agentes.

Se considera entonces el sistema de tiempo discreto, lineal e invariante en el tiempo, con múltiples entradas y una salida, dado por:

$$y(t) = G_1(q)u_1(t) + G_2(q)u_2(t) + e(t), \quad (3.1.1)$$

donde  $t \in \mathbb{N}$  corresponde al índice temporal,  $q$  es el operador de desplazamiento temporal discreto,  $G_1(q)$  y  $G_2(q)$  son funciones de transferencia reales, racionales y estrictamente propias correspondientes a los agentes 1 y 2 respectivamente,  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  son las entradas respectivas a cada agente,  $y(t) \in \mathbb{R}$  es la salida compartida del sistema y  $e(t)$  es un proceso i.i.d., el cual es independiente con las señales de entrada. Se considera que  $y(0) = u_1(0) = u_2(0) = 0$ .

Se considera además que ambos agentes poseen integración simple. De esta forma, las

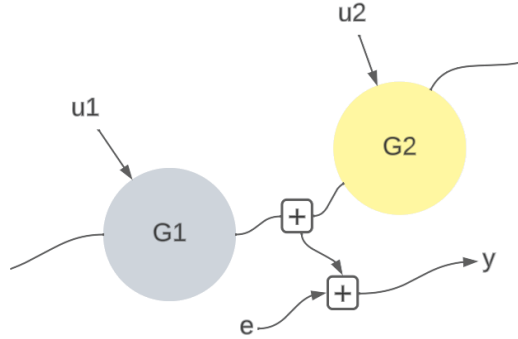


Figura 3.1: Esquema de dos agentes dentro de una red de agentes interconectados.

funciones de transferencias  $G_1(q)$  y  $G_2(q)$  pueden ser factorizadas por

$$G_i(q) = \frac{q}{q-1} G_{i,s}(q), \quad (3.1.2)$$

donde  $G_{i,s}, i \in \{1, 2\}$  son funciones de transferencias racionales, reales, estrictamente propias y estrictamente estables.

## 3.2. Entradas del sistema

Para la alimentación de los sistemas, se considerarán tres tipos de señales distintas para las entradas  $u_i(t)$ , debido a las propiedades que estas otorgan para la identificabilidad de los agentes o la facilidad del análisis:

- En primer lugar se considerarán señales determinísticas de valor constante. De tal forma que  $u_1(t) = C_1$  y  $u_2(t) = C_2$ , con  $C_1$  y  $C_2 \in \mathbb{R}$ .

Si bien estas señales solo son persistentemente excitantes de orden 1, y no ofrecen condiciones robustas sobre identificabilidad, al ser señales determinísticas, pueden facilitar el análisis de los estimadores y establecer preliminarmente propiedades del desempeño de estos. Este tipo de entradas se utilizará solamente cuando se estudie la estimación de forma analítica y no será implementada en las simulaciones.

- También se considerarán señales de ruido blanco Gaussiano de media cero, independientes entre sí. Donde las varianzas de  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  estén dadas por  $\sigma_{u_1}^2$  y  $\sigma_{u_2}^2$  respectivamente.

Estas señales son de interés debido a que son persistentemente excitantes de orden infinito. Permitiendo por lo tanto proveer información en frecuencia suficiente para la identificación de cualquier conjunto de modelos, según lo indicado en el capítulo 12.3 de [56].

- Finalmente se considerarán señales de ruido blanco Gaussiano independientes entre sí, sumadas a valores constantes. De forma que  $u_1(t) = C_1 + \tilde{u}_1(t)$  y  $u_2(t) = C_2 + \tilde{u}_2(t)$ . Donde  $\tilde{u}_1$  y  $\tilde{u}_2$  son señales de ruido blanco de media cero y varianzas  $\sigma_{u_1}^2$  y  $\sigma_{u_2}^2$  respectivamente.

Estas entradas pueden permitir observar el efecto de valores continuos en el desempeño de los estimadores manteniendo la identificabilidad del sistema.

Cabe destacar que, para todas estas entradas, se considerarán las condiciones iniciales  $u_i(t) = 0 \forall t < 0$ .

### 3.3. Problema de identificación y métricas de desempeño

El objetivo de la identificación realizada en esta tesis consiste en que cada uno de los agentes de (3.1.1) sea capaz de identificar su propia función de transferencia  $G_i, i \in \{1, 2\}$  basándose en la información a la que tiene acceso según los distintos esquemas evaluados. A continuación se expone la minimización que realizará cada agente para estimar sus parámetros correspondientes, y las métricas que se utilizarán para evaluar el desempeño de los estimadores obtenidos.

#### 3.3.1. Minimización de la función de costo

El problema de identificación del sistema corresponde a estimar los parámetros  $\theta_i^{\text{opt}}$  que minimicen una función del *one step ahead prediction error*, dado por

$$\varepsilon(t|t-1, \theta_i) = y(t) - \hat{y}(t|t-1, \theta_i), \quad (3.3.1)$$

considerando  $\hat{y}(t|t-1, \theta_i) = \mathcal{E}_{\theta_i} \{y(t) | \mathbf{Z}_{i,t-1}\}$ , donde  $\mathbf{Z}_{i,t-1}$  es el vector de información disponible para el agente  $G_i, i \in \{1, 2\}$  hasta el instante  $t-1$ .

En algunos de los esquemas estudiados, los agentes realizarán la estimación de sus parámetros independientemente, en este caso la minimización a realizar corresponde a

$$\theta_i^{\text{opt}} = \arg \inf_{\theta_i \in \Theta_i} \frac{1}{2N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t|t-1, \theta_i), \quad (3.3.2)$$

y el conjunto de modelos al que cada agente  $G_i, i \in \{1, 2\}$  tiene acceso está dado por

$$\mathcal{M}_{\Theta_i} := \{G_i(q, \theta_i) : \theta_i \in \Theta_i\}, \quad (3.3.3)$$

donde  $\Theta_i \subseteq \mathbb{R}^{n_i}$  son conjuntos compactos para  $i \in \{1, 2\}$ .

En otros esquemas, los agentes realizarán la identificación de forma conjunta, donde la minimización corresponde a

$$(\theta_1^{\text{opt}}, \theta_2^{\text{opt}}) = \arg \inf_{(\theta_1, \theta_2) \in \Theta_1 \times \Theta_2} \frac{1}{2N} \sum_{t=1}^N \varepsilon^2(t|t-1, \theta_1, \theta_2). \quad (3.3.4)$$

En aquel caso, se supone también que cada agente tiene acceso al conjunto de modelos utilizado por el otro agente, de manera que

$$\mathcal{M}_{\Theta_1, \Theta_2} := \{G_1(q, \theta_1), G_2(q, \theta_2) : \theta_1 \in \Theta_1, \theta_2 \in \Theta_2\}. \quad (3.3.5)$$

Para cada conjunto de modelos,  $G_i(q, \theta_i)$  son funciones de transferencia reales y racionales en  $q$ , parametrizadas por  $\theta_i \in \Theta_i$ . Además, se supone que las funciones de transferencia verdaderas de los sistemas  $G_i(q)$  están contenidas en el conjunto de modelos. De esta forma, existe un  $\theta_i^o \in \Theta_i$  tal que  $G_i(q, \theta_i^o) = G_i(q), i \in \{1, 2\}$ .

### 3.3.2. Evaluación estadística del estimador encontrado

La presencia de ruido de medición en el sistema genera que el error de predicción y las funciones de costo (3.3.2) y (3.3.4) posean características estocásticas. Esto implica que el estimador  $\hat{\theta}_i^{opt}$  que minimice el costo también tendrá componentes aleatorias y puede general distintos resultados al repetir distintas realizaciones del experimento de estimación. Por lo tanto, se utilizarán medidas estadísticas para estudiar el comportamiento de este estimador y evaluar el desempeño de los distintos esquemas.

#### Condicionamiento

Para que los sistemas puedan estimar sus parámetros, estos tendrán acceso a distintas señales, las cuales son especificadas en los vectores de información  $\mathbf{Z}_{i,N}$  de la sección 3.4. Estas señales, en general, incluyen cantidades como las entradas del sistema que se está identificando, o algún tipo de salida, los cuales son valores necesarios para realizar la estimación haciendo uso del método de predicción de error (Capítulo 7 de [57]).

Las entradas utilizadas según la sección 3.2 pueden ser consideradas determinísticas en el sentido de que corresponden a secuencias que pueden ser reproducidas al repetir un experimento (Capítulo 8 de [56]). Sin embargo, en algunos de estos casos estas entradas corresponderán a realizaciones de señales aleatorias, por lo tanto, para caracterizar el comportamiento del estimador considerando estas entradas, las cantidades estadísticas (media y varianza) de este serán condicionadas sobre el vector de información  $\mathbf{Z}_{i,N}$ .

#### Sesgo

En primer lugar, es de interés saber si los esquemas propuestos permiten determinar el valor de los parámetros correctamente, por lo que nos interesa obtener el sesgo de cada estimador  $\hat{\theta}_i$  para un parámetro  $\theta_{0,i}$ , el cual está dado por:

$$\text{Bias}(\hat{\theta}_i|\mathbf{Z}_{i,N}) = \theta_{0,i} - \mathcal{E} \left\{ \hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N} \right\}. \quad (3.3.6)$$

#### Varianza

Gran parte del impacto de este trabajo se centra en la eficiencia de la estimación bajo los distintos esquemas, por lo que es necesario determinar cantidades que evalúen el desempeño de estos estimadores. Para esto se utilizará la varianza condicional, donde para el  $k$ -ésimo elemento  $\hat{\theta}_{i,k}$  del estimador  $\hat{\theta}_i$ , con  $k \in \{1, \dots, N\}$  y  $\theta_i \in \mathbb{R}^N$ , esta está dada por

$$\text{Var}(\hat{\theta}_{i,k}|\mathbf{Z}_{i,N}) = \mathcal{E} \left\{ \left( \hat{\theta}_{i,k} - \mathcal{E} \left\{ \hat{\theta}_{i,k} | \mathbf{Z}_{i,N} \right\} \right)^2 | \mathbf{Z}_{i,N} \right\}, \quad (3.3.7)$$

y, a su vez, corresponde al  $k$ -ésimo elemento de la matriz de covarianza condicional del estimador  $\hat{\theta}_i$ , dada por

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_i|\mathbf{Z}_{i,N}) = \mathcal{E} \left\{ \left( \hat{\theta}_i - \mathcal{E} \left\{ \hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N} \right\} \right) \left( \hat{\theta}_i - \mathcal{E} \left\{ \hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N} \right\} \right)^T | \mathbf{Z}_{i,N} \right\}, \quad (3.3.8)$$

Se tomará también en cuenta el error cuadrático medio de los estimadores, donde para cada elemento  $\theta_{i,k}$ , este corresponde a:

$$\text{MSE}(\hat{\theta}_{i,k} | \mathbf{Z}_{i,N}) = \mathcal{E} \left\{ \left( \hat{\theta}_{i,k} - \theta_{i,k} \right)^2 | \mathbf{Z}_{i,N} \right\}, \quad (3.3.9)$$

donde,  $\theta_{i,k}$  corresponde al valor real del  $k$ -ésimo elemento del vector de parámetros  $\theta_i$ .

Cabe notar que el error cuadrático medio y la varianza están relacionados por

$$\text{MSE}(\hat{\theta}_{i,k}) = \text{Var}(\hat{\theta}_{i,k}) + \text{Bias}(\hat{\theta}_{i,k})^2, \quad (3.3.10)$$

lo que indica que si el estimador es insesgado, la varianza y el error cuadrático medio de este son equivalentes. Por lo tanto, en los casos que se evidencie falta de sesgo, se utilizará solamente la varianza del estimador como medida de desempeño de este.

### Varianza para entradas no determinísticas

En general existe una relación directa entre la entrada utilizada y las expresiones obtenidas para caracterizar la varianza del estimador. Esto es particularmente evidente si se emplea el método de mínimos cuadrados para realizar la minimización, en cuyo caso la varianza dependerá directamente de los regresores del sistema, los cuales están formados por combinaciones lineales de la entrada, como se analizará con mayor detalle en el capítulo 4.

Por lo tanto, en los casos en los que el sistema sea alimentado con ruido, los componentes aleatorios correspondientes a la entrada también serán reflejados en la varianza del estimador. Entonces, para poder realizar el análisis y extraer características de la varianza, se utilizarán propiedades estadísticas de ella, en particular su valor esperado  $\mathcal{E} \left\{ \text{Var}(\hat{\theta}_{i,k} | \mathbf{Z}_{i,N}) \right\}$ , dado por los elementos diagonales de

$$\mathcal{E} \left\{ \text{Cov}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) \right\} = \mathcal{E} \left\{ \mathcal{E} \left\{ \left( \hat{\theta}_i - \mathcal{E} \left\{ \hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N} \right\} \right) \left( \hat{\theta}_i - \mathcal{E} \left\{ \hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N} \right\} \right)^T | \mathbf{Z}_{i,N} \right\} \right\}. \quad (3.3.11)$$

En los casos donde esto aplique, comúnmente se referirá a la expresión (3.3.11) como la covarianza de estimación y a sus componentes diagonales como la varianza de estimación de sus respectivos parámetros, a pesar de ser realmente el valor medio de esta.

**Nota 3.3.1.** *En general, la propiedad de la varianza que será de mayor interés para el trabajo de esta tesis, y en la cual se centrará el análisis, es su razón de decaimiento.*

## 3.4. Esquemas de estimación

Para examinar la manera en que la cooperación influye en la estimación, se consideran distintos esquemas en la comunicación entre los agentes, los cuales contemplan distintas topologías para el vector de información  $\mathbf{Z}_{i,N}$  al que los agentes tienen acceso y en algunos casos, manipulaciones a sus entradas.

### Preliminar: Estudio de agentes aislados

En primer lugar, para definir puntos de comparación y para facilitar el análisis de los esquemas posteriores, se considerará el caso en el que cada agente demanda al otro agente que su entrada sea igual a cero durante la recolección de datos.

Para esto, cada agente tiene acceso a la salida del sistema y su propia entrada, de forma que el vector de información para cada agente esté dado por

$$\mathbf{Z}_{i,N} = \{(u_i(k), y(k))\}_{k=1}^N, \quad (3.4.1)$$

pero en este caso la salida para cada agente estará dada por

$$y(t) = G_i(q)u_i(t) + e(t), \quad (3.4.2)$$

donde  $G_i(q)$ ,  $i \in \{1, 2\}$  es la función de transferencia del agente activo.

De esta forma el error de predicción para cada agente corresponde a

$$\varepsilon(t|t-1, \theta_i) = (G_i(q) - G_i(q, \theta_i))u_i(t) + e(t). \quad (3.4.3)$$

Este caso es equivalente a trabajar con sistemas de un agente, y rompe con la premisa de identificar sistemas multi-agente en funcionamiento y utilizando cantidades relativas, sin embargo, debido a las similitudes en el error de predicción (3.4.3) con el de alguno de los casos expuestos, el análisis de sistemas simples con integración puede servir de base para el análisis de los esquemas de interés.

A continuación se presentan los esquemas de dos agentes a estudiar.

#### 3.4.1. Esquema 1: Agentes sin comunicación

En primer lugar se considera un esquema en el cual no existe comunicación entre los agentes, esto quiere decir que cada agente  $G_i(q)$  tiene acceso solamente a su propia entrada  $u_i(t)$  y a la salida compartida  $y(t)$ . De esta forma, el vector de información para cada agente  $G_i(q)$  está dado por (3.4.1), pero no se realiza la demanda al otro agente descrita en la parte preliminar.

Considerando este vector de información, el predictor de la salida  $\hat{y}(t|t-1, \theta_i)$  para cada agente  $G_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  está dado por

$$\hat{y}(t|t-1, \theta_i) = G_i(q, \theta_i)u_i(t), \quad (3.4.4)$$

y el error de predicción para el agente  $i$  está dado por

$$\varepsilon(t|t-1, \theta_i) = (G_i(q) - G_i(q, \theta_i))u_i(t) - G_j(q)u_j(t) + e(t), \quad (3.4.5)$$

con  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ , donde  $G_j(q)$  y  $u_j(t)$  corresponden a la función de transferencia y la entrada del otro agente, respectivamente.

En este caso, los agentes realizan su estimación de forma independiente, por lo que la minimización a realizar está dada por (3.3.2).

Según el capítulo 8 de [56], si los agentes fueran estables, la estimación de los parámetros en este caso sería estable y consistente. Sin embargo, este no es el caso, y la integración presente en los agentes puede provocar que algunas de las cantidades presentes sean no acotadas.

En particular, (3.4.5) indica intuitivamente que, a medida que la función de transferencia estimada  $G_i(q, \theta_i)$  se acerca a la función de transferencia real  $G_i(q)$ , el error de predicción está fuertemente ligado a la salida del otro agente y la función de costo (3.3.2) a su varianza. Al ser esta no necesariamente acotada para señales estables (como por ejemplo las entradas descritas en la sección 3.1) al aumentar el número de muestras  $N$ , puede haber problemas en la correcta identificación de los parámetros. A raíz de esto se proponen los siguientes esquemas como posibles soluciones.

### 3.4.2. Esquema 2: Eliminación de la integración

En este esquema, el vector de información para los agentes es el mismo que en el esquema 1, pero la diferencia radica en que el siguiente filtro es aplicado a las entradas:

$$\tilde{u}_i(t) = \frac{q-1}{q} u_i(t), \quad (3.4.6)$$

donde  $u_i(t)$ ,  $i \in \{1, 2\}$  son las entradas pre-filtradas y  $\tilde{u}_i(t)$  son las nuevas entradas al sistema. El propósito de este filtrado es cancelar la integración de los sistemas y poder estabilizar las salidas de estos, de manera de evitar las dificultades que la inestabilidad produce en las herramientas de identificación. Cabe notar que, en los casos que esto corresponda, la identificación resultante para un agente filtrando las entradas de esta forma, es similar a utilizar el estimador de mínimos cuadrados por diferencias (2.6.33).

Al igual que en el esquema anterior, los agentes realizarán su estimación de forma independiente, por lo que la minimización a realizar está dada por (3.3.2).

### 3.4.3. Esquema 3: Comunicación en la entrada

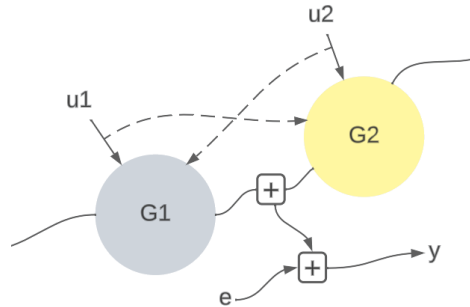


Figura 3.2: Esquema de la comunicación en la entrada de dos agentes dentro de una red.

Además de acceso a su propia entrada y a la salida compartida, en este esquema cada agente tiene acceso a la entrada del otro agente, por lo que el vector de información para cada agente  $G_i(q)$  está dado por

$$\mathbf{Z}_{i,N} = \{(u_1(k), u_2(k), y(k))\}_{k=1}^N. \quad (3.4.7)$$

Cabe notar que, a diferencia de los esquemas anteriores, los agentes tienen acceso a señales correspondientes al otro agente (en este caso la entrada), las cuales en general no serían

medibles por el mismo agente, por lo tanto en la práctica sería necesario cierto nivel de interacción o comunicación entre los agentes. Una descripción gráfica de la comunicación de los agentes bajo este esquema puede ser observada en la figura 3.2.

Considerando este vector de información, el predictor de la salida  $\hat{y}(t|t-1, \theta_i)$  para ambos agentes está dado por

$$\hat{y}(t|t-1, \theta_1, \theta_2) = G_1(q, \theta_1)u_1(t) + G_2(q, \theta_2)u_2(t), \quad (3.4.8)$$

y el error de predicción para los agentes corresponde a

$$\varepsilon(t|t-1, \theta_1, \theta_2) = (G_1(q) - G_1(q, \theta_1))u_1(t) + (G_2(q) - G_2(q, \theta_2))u_2(t) + e(t), \quad (3.4.9)$$

En este caso, ambos agentes tienen acceso a exactamente la misma información. Por lo tanto, la estimación se realizará de forma conjunta, de forma que la minimización está dada por (3.3.4).

#### 3.4.4. Esquema 4: Comunicación en la salida:

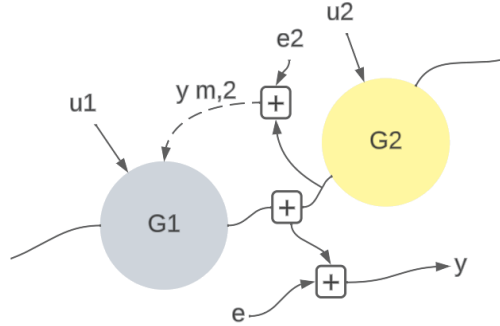


Figura 3.3: Esquema de la comunicación en la salida de dos agentes dentro de una red.

Además de acceso a su propia entrada y la salida compartida, en este esquema cada agente  $G_i$  tiene acceso a una medición  $y_{m,j}(t)$  de la salida absoluta del otro agente, dada por

$$y_{m,j}(t) = G_j(q)u_j(t) + e_j(t), \quad (3.4.10)$$

donde  $j \in \{1, 2\}$  es el índice del agente en el cual no se está realizando la identificación y  $e_j(t)$  es un proceso i.i.d. independiente de las entradas  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  y del ruido de medición  $e(t)$ .

Al igual que en el esquema 3, en este caso se requiere un nivel de colaboración entre los agentes de manera que puedan tener acceso a la medición de salida del otro. El esquema de comunicación de este esquema para la identificación del agente 1 se observa en la figura 3.3.

En este caso, el vector de información para cada agente  $G_i(q)$  está dado por

$$\mathbf{Z}_{i,N} = \{(u_i(k), y_{m,j}(k), y(k))\}_{k=1}^N. \quad (3.4.11)$$

Considerando este vector de información, el predictor de la salida  $\hat{y}(t|t-1, \theta_i)$  para cada agente  $G_i$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $i \neq j$  está dado por

$$\hat{y}(t|t-1, \theta_i) = G_i(q, \theta_i)u_i(t) \quad (3.4.12)$$

y el error de predicción para cada agente por

$$\varepsilon(t|t-1, \theta_i) = (G_i(q) - G_i(q, \theta_i))u_i(t) + e(t) - e_j(t). \quad (3.4.13)$$

Los agentes realizarán la estimación de forma independiente, por lo que la minimización está dada por (3.3.2).

**Observación 3.4.1.** *El uso de una medición de la salida individual de uno de los agentes puede parecer poco práctico, debido a que anteriormente se mencionó que la identificación de los agentes es realizada a través de salidas compartidas entre los agentes. Sin embargo, este esquema puede ser utilizado para la transmisión de información de agentes en línea en el que se conoce la salida absoluta de un solo agente. Por ejemplo, un pelotón de vehículos en el que se considere como conocida la posición del líder.*

*En particular, si existe una medición de la salida absoluta del primer agente*

$$y_1(t) = G_1(q)u_1(t) + e_1(t), \quad (3.4.14)$$

*y el  $k$ -ésimo agente posee una medición de una salida compartida con su agente predecesor*

$$y_{k,k-1} = G_k(q)u_k(t) + G_{k-1}(q)u_{k-1}(t) + e_k(t), \quad (3.4.15)$$

*entonces, cada agente puede reconstruir una medición de su propia salida absoluta  $y_k = y_{k,k-1} - y_{k-1}$ , la cual es transmitida por cada agente a su sucesor. El valor de esta salida estará dada por*

$$y_k = G_k(q)u_k(t) + \sum_{r=1}^k (-1)^{k-r} e_r(t). \quad (3.4.16)$$

*Luego, la relación entre dos agentes consecutivos puede ser descrita a partir del esquema 4, donde  $y_{k,k-1}$  sería la salida compartida entre los dos agentes y  $y_{k-1}$  la medición de la salida absoluta correspondiente al agente anterior. Cabe notar, sin embargo, que el ruido asociado a la medición de un agente aumentará constantemente en varianza al aumentar el número de agentes, al ser la suma de los ruidos de medición de todos los agentes anteriores. El componente  $(-1)^{k-r}$  no tiene ningún impacto en el análisis debido a las propiedades del ruido blanco, y es solo consecuencia de la manera en la que los ruidos fueron definidos en las señales.*

## 3.5. Configuraciones de las funciones de transferencia

Para la estimación de (3.1.1), se considerará que los agentes  $G_1(q)$  y  $G_2(q)$  tendrán la misma estructura, pero el sistema será heterogéneo, de forma que  $\theta_1 \neq \theta_2$ .

A continuación se presentarán las distintas configuraciones para las funciones de transferencia de los agentes en las que se enfocará el trabajo.

### 1. Caso 1: Estimación de ganancia.

En primer lugar se considerarán agentes de primer orden, cuya función de transferencia está dada por

$$G_i(q) = \frac{b_i^0}{q-1}, \quad (3.5.1)$$

donde la ganancia  $b_i^0$ ,  $i \in \{1, 2\}$  es el parámetro a identificar para cada agente.

En este caso, las funciones de transferencia consideradas para los conjuntos de modelos (3.3.3) y (3.3.5) para ambos agentes corresponden a

$$G_i(q, \theta_i) = \frac{b_i}{q-1}, \quad b_i \in \mathbb{R}, \quad (3.5.2)$$

de forma que  $\theta_i = b_i$  y  $\Theta_i = \mathbb{R}$ .

### 2. Caso 2: Estimación de dos parámetros en el numerador.

Para este caso se considerarán agentes de segundo orden, cuya función de transferencia está dada por

$$G_i(q) = \frac{b_{1,i}^0 q + b_{2,i}^0}{q(q-1)}, \quad (3.5.3)$$

donde  $b_{1,i}^0$  y  $b_{2,i}^0$  son los parámetros a identificar para cada agente  $G_i(q)$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

Las funciones de transferencia consideradas para los conjuntos de modelos (3.3.3) y (3.3.5) para cada agente corresponden a

$$G_i(q, \theta) = \frac{b_{1,i} q + b_{2,i}}{q(q-1)}, \quad b_{1,i}, b_{2,i} \in \mathbb{R}, \quad (3.5.4)$$

de forma que  $\theta_i = \{b_{1,i}, b_{2,i}\}$  y  $\Theta_i = \mathbb{R}^2$ .

Esta configuración permite estudiar el comportamiento de la estimación de múltiples parámetros en un sistema manteniendo las facilidades para el análisis que permite incluir solo coeficientes del numerador en la estimación, lo que se explica con mayor detalle en la sección 3.6.1.

### 3. Caso 3: Estimación de un polo.

Para este caso se considerarán agentes de segundo orden, cuya función de transferencia está dada por

$$G_i(q) = \frac{\beta_i q + 1}{(q-1)(q-p_i^0)}, \quad (3.5.5)$$

donde  $p_i^0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $|p_i^0| < 1$  es el parámetro a identificar para cada agente y  $\beta_i$  es un parámetro conocido.

Las funciones de transferencia consideradas para los conjuntos de modelos (3.3.3) y (3.3.5) para cada agente corresponden a

$$G_i(q, \theta_i) = \frac{\beta_i q + 1}{(q-1)(q-p_i)}, \quad p_i \in \mathbb{R}, \quad |p_i| < 1, \quad (3.5.6)$$

de forma que  $\theta_i = p_i$  y  $\Theta_i = \{p_i \in \mathbb{R} \mid |p_i| < 1\}$ .

### 4. Caso 4: Estimación de dos parámetros

Para este caso se consideran agentes de segundo orden como en el caso anterior, pero esta vez la estimación del parámetro en el numerador es considerada dentro del problema, por lo tanto, la función de transferencia está dada por

$$G_i(q) = \frac{b_i^0 q + 1}{(q-1)(q-p_i^0)}, \quad (3.5.7)$$

donde  $p_i^0$  y  $b_i^0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ ,  $|p_i^0| < 1$  son los parámetros para identificar para cada agente. Las funciones de transferencia consideradas para los conjuntos de modelos (3.3.3) y (3.3.5) para cada agente corresponden a

$$G_i(q, \theta_i) = \frac{b_i q + 1}{(q-1)(q-p_i)}, \quad p_i, b_i \in \mathbb{R}, \quad |p_i| < 1, \quad (3.5.8)$$

de forma que  $\theta_i = \{b_i, p_i\}$  y  $\Theta_i = \{\{b_i, p_i\} \in \mathbb{R}^2, |p_i| < 1\}$ .

Esta configuración puede ser utilizada modelar, por ejemplo, sistemas de vehículos.

**Nota 3.5.1.** *Las combinaciones entre los esquemas de estimación descritos en la sección 3.4 y las configuraciones de las funciones de transferencia descritas en esta sección constituyen los casos de estudio para el trabajo en esta tesis.*

## 3.6. Métodos de estimación

A continuación se exponen los métodos de estimación que se utilizarán para minimizar las funciones de costo definidas en (3.3.2) y (3.3.4). Las herramientas disponibles dependerán de las configuraciones de las funciones de transferencia de los agentes.

### 3.6.1. Mínimos cuadrados

Las configuraciones de sistemas de forma (3.1.1) generalmente no cumplen las características para que su estimador de mínimos cuadrados corresponda al estimador obtenido a partir del método PEM, sin embargo esto si sucede para familias de funciones de transferencias que son lineales en los parámetros a identificar.

En particular, los sistemas cuyas funciones de transferencia correspondan a los casos 1 y 2 de la sección 3.5 pueden ser reescritos según la forma (2.6.31), por lo que su estimador de mínimos cuadrados es compatible con el método PEM, y en el caso de incluir la integración dentro de este, el sistema será descrito a partir de sus regresores según (2.6.34).

Los detalles de la estructura de los regresores para cada uno de estos casos y las extensiones del uso del estimador de mínimos cuadrados para un sistema de dos agentes basándose en los distintos esquemas de interés se desarrollarán con más detalle durante los próximos dos capítulos.

### 3.6.2. Estimación numérica

En los sistemas de forma (3.1.1) donde hayan polos en los parámetros a identificar el método PEM no coincide con el estimador de mínimos cuadrados, por lo tanto para casos como esos, la inferencia paramétrica será realizada minimizando directamente la función de costo (3.3.2) o (3.3.4) según corresponda, a partir de funciones numéricas de MATLAB. La estimación numérica también será realizada para los sistemas compatibles con mínimos cuadrados, en aquel caso para complementar los resultados analíticos.

Se utilizará principalmente el comando `fminsearch`, un solver de programación no lineal que permite encontrar el valor mínimo de la función ingresada. Esta herramienta puede ser

aplicada para ejecutar el método PEM si se ingresa la función de costo ((3.3.2) o (3.3.4) dependiendo del caso) como la función a minimizar sobre el vector de parámetros  $\theta$ . Cabe notar que este es un método iterativo, por lo que se deben especificar los puntos iniciales en la minimización y los criterios de tolerancia para el paso de cambio en la función objetivo y el valor que minimiza aquella función. En general, estas herramientas se operarán en modo usuario, ya que el énfasis principal no está enfocado en la optimización ni la precisión numérica de la identificación mediante solvers. Sin embargo, al haber casos en los cuales la identificación es no convexa, es importante definir valores iniciales adecuados debido a la posible presencia de mínimos locales. En este caso se utilizarán los valores reales de los parámetros como puntos iniciales.

Para asegurar robustez en las simulaciones y evitar posibles errores numéricos intrínsecos del solver utilizado, se hará uso también de herramientas complementarias a `fminsearch`. Para los casos compatibles con mínimos cuadrados, se realizará la estimación numérica utilizando directamente este método, calculando (2.4.5) para cada esquema. Mientras que para los casos no compatibles se utilizará la herramienta de MATLAB `nsqnonlin`, la cual reajusta curvas para resolver problemas de mínimos cuadrados no lineales. Este solver minimiza la suma de los cuadrados de las funciones ingresadas, por lo tanto corresponde al método PEM si se le ingresa el vector de errores de predicción (3.3.1) escalado en  $\frac{1}{\sqrt{2N}}$ , resultando en la minimización de las funciones de costo (3.3.2) o (3.3.4). No se hará mayor énfasis en esta herramienta si los resultados obtenidos con esta son equivalentes a los obtenidos con `fminsearch`.

### 3.7. Suposiciones sobre los sistemas

Tal como se explicó en la sección 3.3.2, debido a la naturaleza de las señales con las cuales se alimenta el sistema para realizar su identificación, las medidas de desempeño aplicadas a los valores estimados poseen cierto grado de aleatoriedad. Entonces, en algunos casos, para poder analizar las características de estas medidas, se deben aplicar cantidades estadísticas sobre estas mismas, como la media de la varianza al estimar (3.3.11) por ejemplo. Como se describe en la sección anterior, en el desarrollo de algunos casos se utilizará el estimador de mínimos cuadrados para obtener expresiones analíticas de estas cantidades, este análisis puede resultar complejo y no necesariamente otorga expresiones cerradas de las medidas de interés. Por lo tanto, considerando estructuras recurrentes relacionadas a los esquemas de estimación propuestos, se propone el siguiente supuesto para facilitar el análisis asegurando que se conserven las propiedades de interés a extraer de este.

**Suposición 3.7.1.** *Se considera la secuencia  $X_N$  dada por*

$$X_N = U_N^T \Delta^T \Delta U_N, \quad (3.7.1)$$

donde  $\Delta \in \mathbb{R}^{N \times N}$  corresponde a

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \dots & 0 \\ 1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{bmatrix}, \quad (3.7.2)$$

y  $U_N \in \mathbb{R}^{N \times k}$  es una matriz aleatoria.

Se supone que  $U_N$  es tal que  $X_N$  es invertible y que existe un  $C \in \mathbb{R}$  tal que

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \text{Diag} \left( \mathcal{E} \{X_N^{-1}\} \right) \limsup_{N \rightarrow \infty} \left( \text{Diag} \left( \mathcal{E} \{X_N\}^{-1} \right) \right)^{-1} \leq CI_{k \times k}. \quad (3.7.3)$$

**Teorema 3.7.1.** *Se considera  $X_N$  de (3.7.1) y  $U_N$  tal que se cumple la suposición 3.7.1. Luego, si el  $i$ -ésimo elemento de la diagonal de  $\mathcal{E} \{X_N^{-1}\}$  cumple  $O_{\Theta}(M_i(N))$ ,  $i \in \{1, \dots, k\}$ , entonces el  $i$ -ésimo elemento de la diagonal de  $\mathcal{E} \{X_N\}^{-1}$  también cumplirá  $\Theta(M_i(N))$ . Donde  $M_i(N)$  es una función en  $N$ .*

*Demostración.* Se observa que  $X_N$  es una matriz positiva definida. Luego, como el operador inverso es convexo en el dominio de matrices definidas positivas, a partir de la desigualdad de Jensen [61] se cumple

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{X_N^{-1}\} &\geq \mathcal{E} \{X_N\}^{-1} \\ \mathcal{E} \{X_N^{-1}\} - \mathcal{E} \{X_N\}^{-1} &\geq 0. \end{aligned} \quad (3.7.4)$$

Como  $\mathcal{E} \{X_N^{-1}\}$  y  $\mathcal{E} \{X_N\}^{-1}$  son matrices simétricas,  $\mathcal{E} \{X_N^{-1}\} - \mathcal{E} \{X_N\}^{-1}$  también lo es.

Luego, al ser  $\mathcal{E} \{X_N^{-1}\} - \mathcal{E} \{X_N\}^{-1}$  semi-positiva definida y simétrica, todos sus elementos diagonales son no negativos, por lo que

$$\begin{aligned} \text{Diag} \left( \mathcal{E} \{X_N^{-1}\} - \mathcal{E} \{X_N\}^{-1} \right) &\geq 0 \\ \text{Diag} \left( \mathcal{E} \{X_N^{-1}\} \right) - \text{Diag} \left( \mathcal{E} \{X_N\}^{-1} \right) &\geq 0 \\ \text{Diag} \left( \mathcal{E} \{X_N^{-1}\} \right) &\geq \text{Diag} \left( \mathcal{E} \{X_N\}^{-1} \right). \end{aligned} \quad (3.7.5)$$

Por otra parte, considerando el supuesto 3.7.1, como  $\text{Diag} \left( \mathcal{E} \{X_N^{-1}\} \right)$  y  $\left( \text{Diag} \left( \mathcal{E} \{X_N\}^{-1} \right) \right)^{-1}$  son matrices diagonales, de (3.7.3) se tiene

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \text{Diag} \left( \mathcal{E} \{X_N^{-1}\} \right) \leq C \limsup_{N \rightarrow \infty} \text{Diag} \left( \mathcal{E} \{X_N\}^{-1} \right) \quad (3.7.6)$$

Uniendo (3.7.5) y (3.7.6), se obtiene

$$\limsup_{N \rightarrow \infty} \text{Diag} \left( \mathcal{E} \{X_N\}^{-1} \right) \leq \limsup_{N \rightarrow \infty} \text{Diag} \left( \mathcal{E} \{X_N^{-1}\} \right) \limsup_{N \rightarrow \infty} \leq C \text{Diag} \left( \mathcal{E} \{X_N\}^{-1} \right). \quad (3.7.7)$$

Finalmente, los elementos diagonales de  $\mathcal{E} \{X_N^{-1}\}$  están acotados por los elementos diagonales de  $\mathcal{E} \{X_N\}^{-1}$  por la izquierda y por los elementos de  $C\mathcal{E} \{X_N\}^{-1}$  por la derecha. Como tanto los elementos de  $\mathcal{E} \{X_N\}^{-1}$  como los de  $C\mathcal{E} \{X_N\}^{-1}$  satisfacen  $O_{\Theta}(M_i(N))$ , los elementos de  $\mathcal{E} \{X_N^{-1}\}$  también satisfarán  $O_{\Theta}(M_i(N))$ .  $\square$

**Observación 3.7.1.** *Existen relaciones entre el teorema y supuesto recién expuestos y ciertos resultados obtenidos en el capítulo 10 de [37]. En particular, si  $U_N$  corresponde a una*

columna de ruido blanco con media cero y varianza  $\sigma_u^2$ , cuyo  $i$ -ésimo elemento está denotado por  $u(t)$ ,  $t \in \{1, \dots, N\}$ ,  $X_N$  puede ser descrita como

$$X_N = \sum_{t=1}^N z(t)^2, \quad (3.7.8)$$

con  $z(t) = \sum_{k=1}^t u(k)$ . En [37], se realizan cálculos respecto al orden en probabilidad de la secuencia estocástica  $X_N$ , obteniéndose  $X_N^{-1} = O_p(N^{-2})$ , lo cual motiva el supuesto 3.7.9 generando cierta intuición respecto al comportamiento del valor esperado de  $X_N^{-1}$ . En efecto, es bastante directo comprobar que  $\mathcal{E}\{X_N\}$  es de orden  $N^2$  (el desarrollo de esta expresión se ejecuta en el capítulo 4), y si la suposición 3.7.1 se cumple, a partir del teorema 3.7.1,  $\mathcal{E}\{X_N^{-1}\}$  sería también de orden  $N^{-2}$ .

### 3.7.1. Evaluación de la suposición en señales de interés

Las secuencias de forma  $X_N^{-1}$ , con  $X_N$  descrita en la suposición 3.7.1, corresponden a una estructura que aparecerá con frecuencia en el desarrollo de la estimación con mínimos cuadrados para sistemas con integración, en general para representar matrices de covarianza, y en las que  $U_N$  normalmente es una matriz aleatoria cuyas columnas están relacionadas a las entradas de los agentes. Esto es desarrollado y detallado en los capítulos 4 y 5, sin embargo, preliminarmente, es de interés verificar el cumplimiento de la suposición 3.7.1 para las señales que serán utilizadas para el desarrollo de aquellos capítulos.

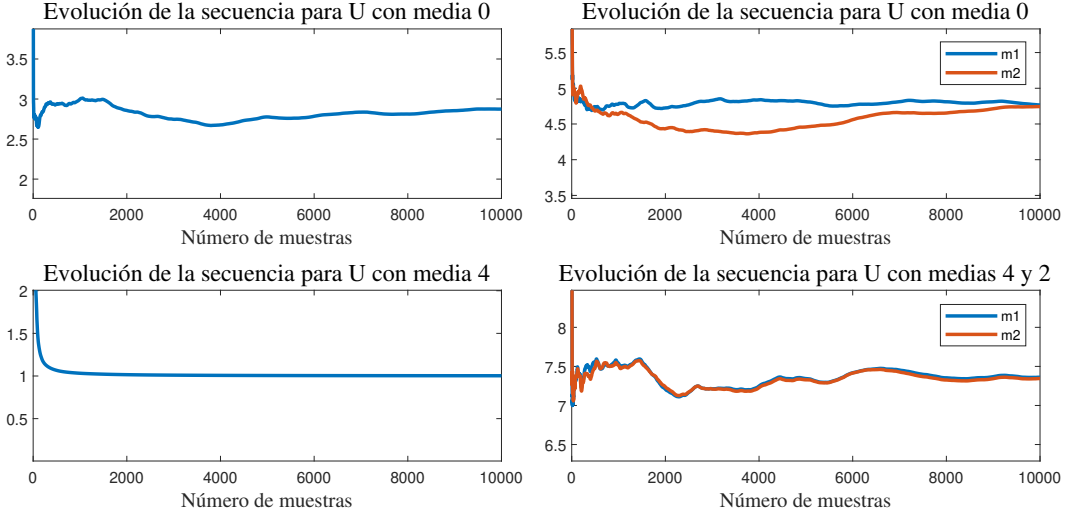
Para esto, se evalúa numéricamente la expresión

$$\text{Diag}(\mathcal{E}\{X_N^{-1}\}) \left( \text{Diag}(\mathcal{E}\{X_N\}^{-1}) \right)^{-1}, \quad (3.7.9)$$

con  $X_N$  de 3.7.1, bajo distintas naturalezas de la matriz aleatoria  $U_N$ .

Para cada una de las señales  $U_N$  evaluadas, se realiza una simulación de Monte-Carlo de  $\mathcal{E}\{X_N\}$  y  $\mathcal{E}\{X_N^{-1}\}$ , con el fin de estimar (3.7.9) a partir de las respectivas medias muestrales. En cada caso la simulación de Monte-Carlo contiene  $10^3$  realizaciones de un largo de  $N = 10^4$  muestras cada una. Las simulaciones son realizadas para 6 naturalezas distintas de la matriz  $U_N$ . Además, para cada naturaleza de  $U_N$  estudiada, las simulaciones fueron realizadas con  $U_N$  de medias cero y  $U_N$  de medias distintas de cero, como será indicado en cada figura. En cada figura,  $m_i$  corresponde al  $i$ -ésimo valor de la diagonal de (3.7.9).

1. En primer lugar, se considera  $U_N = [u(1) \ u(2) \ \dots \ u(N)]^T$ , donde  $u(t)$ ,  $t \in \{1, N\}$  es una señal de ruido blanco Gaussiano. En este caso, la evolución de (3.7.9) se ilustra en la figura 3.4a, donde la media y la varianza de  $u(t)$  son las especificadas en la figura.
2. Se considera  $U_N = \begin{bmatrix} u_1(1) & u_1(2) & \dots & u_1(N) \\ u_2(1) & u_2(2) & \dots & u_2(N) \end{bmatrix}^T$ , donde  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  son señales de ruido blanco Gaussiano independientes entre si. La evolución de (3.7.9) se ilustra en la figura 3.4a, con las medias y varianzas para  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  especificadas en la figura.
3. Se considera  $U_N$  una matriz tal que su primera columna sea una señal de ruido blanco Gaussiano, y que su segunda columna sea idéntica a la primera pero desplazada por



(a)  $U_N$  ruido blanco Gaussiano de una columna de varianza 10.

(b)  $U_N$  ruido blanco Gaussiano con dos columnas de varianzas 10 y 5 respectivamente.

Figura 3.4: Evolución de  $X_N$  para distintas naturalezas del vector  $U_N$

una unidad, de modo que

$$U_N = \begin{bmatrix} u(1) & u(2) & \cdots & u(N) \\ 0 & u(2) & \cdots & u(N-1) \end{bmatrix}^T \quad (3.7.10)$$

con  $u(t)$ ,  $t \in \{1, N\}$  ruido blanco Gaussiano. El comportamiento de (3.7.9) se ilustra en la figura 3.5a con  $u(t)$  de varianza 10 y las medias indicadas en la figura.

4. Se considera  $U_N$  una matriz  $\mathbb{R}^{N \times 4}$  dada por

$$U_N = [U_{N1} \quad U_{N2}], \quad (3.7.11)$$

donde  $U_{N1}$  y  $U_{N2} \in \mathbb{R}^{n \times 2}$  están dadas por (3.7.10), y las señales  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  asociadas a  $U_{N1}$  y  $U_{N2}$  son independientes entre sí. El comportamiento de (3.7.9) para este caso se ilustra en la figura 3.5b, donde  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  tienen varianzas 10 y 5 respectivamente, y las medias respectivas descritas en la figura.

5. Se considera  $U_N$  una matriz con la estructura descrita en (3.7.10), pero en la cual  $u(t)$  es ruido coloreado dado por

$$u(t) = \frac{1}{1 - 0,8q^{-1}} \tilde{u}(t), \quad (3.7.12)$$

donde  $\tilde{u}(t)$  es ruido blanco Gaussiano. El comportamiento de (3.7.9) para este caso se ilustra en la figura 3.6a, donde  $\tilde{u}(t)$  posee los valores medios descritos en la figura y varianza 10.

6. Finalmente se considera  $U_N$  dado por

$$U_N = \begin{bmatrix} \bar{u}(1) & \bar{u}(2) & \cdots & \bar{u}(N) \\ 0 & u(1) & \cdots & u(N-1) \end{bmatrix}, \quad (3.7.13)$$

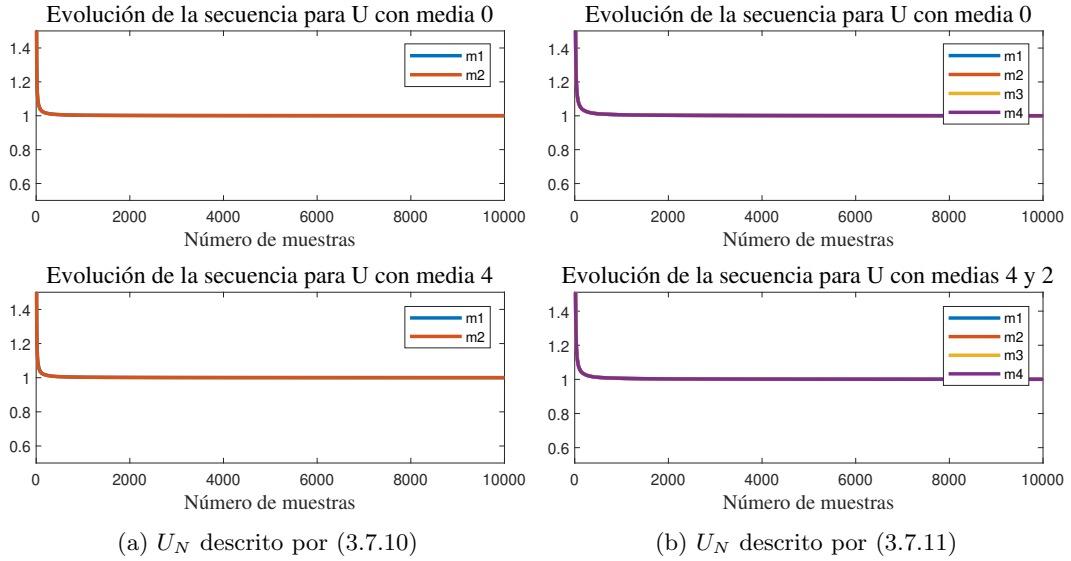


Figura 3.5: Evolución de  $X_N$  para distintas naturalezas del vector  $U_N$

donde  $\bar{u}(t)$  corresponde a  $u(t)$  filtrado por (3.4.6) y  $u(t)$  es ruido blanco Gaussiano. El comportamiento de (3.7.9) para este caso se ilustra en la figura 3.6b, donde  $u(t)$  posee los valores medios descritos en la figura y varianza 10.

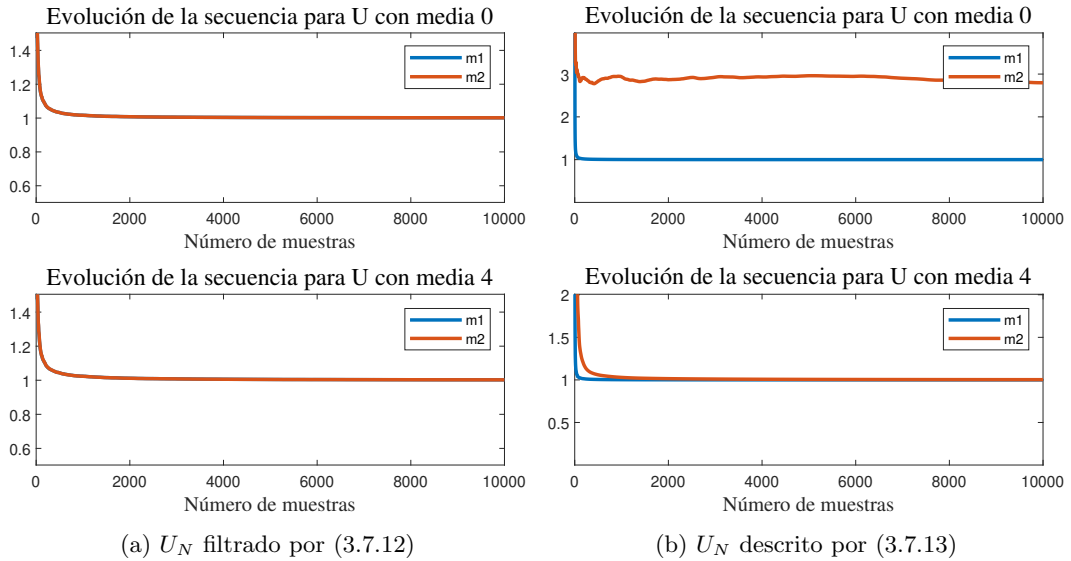


Figura 3.6: Evolución de  $X_N$  para distintas naturalezas del vector  $U_N$

Se observa de las figuras que, para todas las naturalezas de  $U_N$  evaluadas, la expresión (3.7.9) es acotada al aumentar el número de muestras, de lo cual se puede deducir que todas

estas matrices  $U_N$  son tales que se cumple la suposición 3.7.1. Además, cabe notar que para algunas de estas señales  $U_N$ , (3.7.9) tiende a  $I$ , lo que implica que, para esos casos, se satisface  $\lim_{N \rightarrow \infty} \text{Diag}(\mathcal{E}\{X_N^{-1}\}) = \lim_{N \rightarrow \infty} \text{Diag}(\mathcal{E}\{X_N\}^{-1})$ .

# ESTIMACIÓN ANALÍTICA DE LA GANANCIA DE UN SISTEMA

En este capítulo se desarrolla analíticamente la estimación de la ganancia de un agente de primer orden perteneciente a un sistema Multi-Agente, correspondiente al caso 1 de la sección 3.5, utilizando el estimador de mínimos cuadrados, el cual concuerda con el método PEM para la configuración descrita. La estimación es realizada bajo cada esquema de estimación descrito en 3.4. Para cada caso, se determina primero la presencia o ausencia de sesgo en los estimadores, y luego se examina la razón de decaimiento de la varianza de la estimación al aumentar el número de muestras, con el fin de determinar la eficiencia otorgada por cada esquema. Se hace particular énfasis en el impacto de la integración en la eficiencia de la identificación.

### 4.1. Configuración del Sistema

Para la identificación a realizar en este capítulo, se considera un sistema conformado por dos agentes, de primer orden cada uno, cuyas funciones de transferencia están descritas en el caso 1 de la sección 3.5.

Entonces, el sistema está dado por

$$y(t) = \frac{b_1^0}{q-1}u_1(t) + \frac{b_2^0}{q-1}u_2(t) + e(t), \quad (4.1.1)$$

donde cada agente  $i$  busca estimar el valor de su parámetro  $b_i^0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

Para realizar la identificación, se considerarán los tres tipos de señales descritas en la sección 3.2 como entradas  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$ , y  $e(t)$  será una señal de ruido blanco con media cero y varianza  $\sigma_e^2$ .

Cabe notar que para la estimación de  $b_1^0$  y  $b_2^0$  del sistema descrito en (4.1.1), el estimador de mínimos cuadrados corresponde al estimador obtenido a través de la minimización otorgada por el método de predicción de error (PEM), por lo que este será el estimador utilizado para la identificación de los parámetros.

## 4.2. Preliminar: Razón de decaimiento de sistemas estables

En primer lugar, para poder visualizar el impacto de los resultados que se obtendrán para la razón de decaimiento de la varianza al estimar sistemas bajo presencia de integración, es importante conocer, como punto de referencia, el comportamiento de estas propiedades si el sistema a identificar fuera estable. Se considera

$$y(t) = \frac{b_i^0}{q - \rho_i} u_i(t) + e(t), \quad (4.2.1)$$

con  $|\rho_i| < 1$ .

**Teorema 4.2.1.** *Se considera el sistema estable de primer orden dado por (4.2.1). Entonces, al utilizar el método PEM, la razón de decaimiento de la varianza de la estimación es de  $N^{-1}$  para cada una de las entradas descritas en la sección 3.2.*

*Demostración.* Como el sistema es estable, y suponiendo que, tal como fue descrito en la sección 3.5 para las configuraciones de sistemas con integración, el sistema real se encuentra dentro del conjunto de modelos propuestos  $\mathcal{M}_{\Theta_i}$ , entonces se puede aplicar la expresión asintótica para la varianza de  $\hat{\theta}$  dada por la sección 9.3 de [56]. De forma que

$$\text{Cov}(\hat{\theta} | \mathbf{Z}_{i,N}) \sim \frac{1}{N} \frac{\sigma_e^2}{\mathcal{E} \{ \varphi(t, \theta)^2 \}}, \quad (4.2.2)$$

con  $\varphi(t, \theta) = \frac{\partial}{\partial \theta} \hat{y}(t|t-1, \theta)$ . La naturaleza de esa expresión indica que la razón de decaimiento de la covarianza será de  $N^{-1}$  siempre que el segundo momento de  $\varphi(t, \theta)$  sea acotado, lo cual deberá cumplirse debido a la estabilidad asociada a los regresores del sistema. Se realizará de todos modos el detalle específico de esta expresión para los tres tipos de entradas de interés.

Considerando que  $\hat{y}(t|t-1, \theta) = \frac{b_i^0}{q - \rho_i} u_i(t)$ , se obtiene

$$\varphi(t, \theta) = \frac{1}{q - \rho_i} u_i(t) = \sum_{k=1}^{t-1} \rho_i^{t-1-k} u_i(k), \quad (4.2.3)$$

de forma que el segundo momento puede ser expresado como

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ \varphi(t, \theta)^2 \} &= \mathcal{E} \left\{ \left( \sum_{k=1}^{t-1} \rho_i^{t-1-k} u_i(k) \right)^2 \right\} \\ &= \sum_{k_1=1}^{t-1} \sum_{k_2=1}^{t-1} \rho_i^{t-1-k_1} \rho_i^{t-1-k_2} \mathcal{E} \{ u_i(k_1) u_i(k_2) \}. \end{aligned} \quad (4.2.4)$$

Se analiza esta expresión para los tres tipos de entradas utilizadas.

- Si  $u_i(t)$  es una constante  $C$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} \{ \varphi(t, \theta)^2 \} &= C^2 \sum_{k_1=1}^{t-1} \rho_i^{t-1-k_1} \sum_{k_2=1}^{t-1} \rho_i^{t-1-k_2} \\
&= C^2 \sum_{k_1=0}^{t-2} \rho_i^{k_1} \sum_{k_2=0}^{t-2} \rho_i^{k_2} \\
&= C^2 \left( \frac{1 - \rho_i^{t-1}}{1 - \rho_i} \right)^2,
\end{aligned} \tag{4.2.5}$$

luego, asintóticamente,  $\mathcal{E} \{ \varphi(t, \theta)^2 \}$  tiende a  $\frac{C^2}{(1-\rho_i)^2}$ , por lo que

$$\text{Cov}(\hat{\theta}) \sim \frac{1}{N} \frac{\sigma_e^2}{C^2} (1 - \rho_i)^2 \tag{4.2.6}$$

- Si  $u_i(t)$  es ruido blanco de media 0 y varianza  $\sigma_u^2$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} \{ \varphi(t, \theta)^2 \} &= \sigma_u^2 \sum_{k=1}^{t-1} (\rho_i^{t-1-k})^2 \\
&= \sigma_u^2 \sum_{k=0}^{t-2} \rho_i^{2k} \\
&= \sigma_u^2 \frac{1 - \rho_i^{2(t-1)}}{1 - \rho_i^2},
\end{aligned} \tag{4.2.7}$$

luego, asintóticamente,  $\mathcal{E} \{ \varphi(t, \theta)^2 \}$  tiende a  $\frac{\sigma_u^2}{1-\rho_i^2}$ , por lo que

$$\text{Cov}(\hat{\theta}) \sim \frac{1}{N} \frac{\sigma_e^2}{\sigma_u^2} (1 - \rho_i^2) \tag{4.2.8}$$

- Si  $u_i(t)$  es una señal de ruido blanco  $\tilde{u}_i(t)$  de media 0 y varianza  $\sigma_u^2$  sumado a una constante  $C$ ,

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} \{ \varphi(t, \theta)^2 \} &= \sum_{k_1=1}^{t-1} \sum_{k_2=1}^{t-1} \rho_i^{t-1-k_1} \rho_i^{t-1-k_2} \mathcal{E} \{ (C + \tilde{u}_i(k_1))(C + \tilde{u}_i(k_2)) \} \\
&= C^2 \sum_{k_1=1}^{t-1} \rho_i^{t-1-k_1} \sum_{k_2=1}^{t-1} \rho_i^{t-1-k_2} + \sigma_u^2 \sum_{k=1}^{t-1} (\rho_i^{t-1-k})^2,
\end{aligned} \tag{4.2.9}$$

Luego, a partir de los resultados anteriores,

$$\text{Cov}(\hat{\theta}) \sim \frac{\sigma_e^2}{N} \left( \frac{1}{\sigma_u^2} (1 - \rho_i^2) + \frac{1}{C^2} (1 - \rho_i)^2 \right) \tag{4.2.10}$$

□

**Observación 4.2.1.** *Es bastante directo comprobar que el estimador será también insesgado, de modo que la razón de decaimiento para la varianza se aplica también para el error cuadrático medio, el desarrollo para comprobar esto es el mismo que se realizará en el teorema 4.3.1 para sistemas con integración.*

**Observación 4.2.2.** *Debido a la naturaleza de la expresión (4.2.2) la razón de decaimiento de  $N^{-1}$  es una propiedad que se puede generalizar fácilmente a la identificación de sistemas estables de orden y cantidad de parámetros arbitrarios.*

### 4.3. Identificación de un sistema de un agente

Como se indica en la sección 3.4, se comenzará estudiando el comportamiento del estimador considerando que cada agente hace que su entrada sea cero cuando el otro agente realiza la estimación. Esto es equivalente a analizar sistemas de un solo agente, y si bien no hay un componente Multi-Agente en este caso, los resultados obtenidos sirven de base para facilitar el análisis de la identificación bajo los esquemas propuestos.

En este caso, la salida para el agente activo  $G_i$ ,  $i \in \{1, 2\}$  está dada por

$$y(t) = \frac{b_i^0}{q-1} u_i(t) + e(t). \quad (4.3.1)$$

Este sistema puede escribirse en base a regresores de la forma (2.6.34), donde  $\varphi(t)^T = \sum_{k=1}^{t-1} u_i(k)$  y  $\theta = b_i^0$ , por lo tanto, la minimización de (3.3.2) es obtenida a través del estimador de mínimos cuadrados.

De esta forma, y considerando que  $y(0) = u_i(0) = 0$ , el sistema puede ser descrito por (2.4.2), y su estimador de mínimos cuadrados está dado por (2.4.5), con

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ u_i(1) \\ u_i(1) + u_i(2) \\ \vdots \\ \sum_{t=1}^{N-1} u_i(t) \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}. \quad (4.3.2)$$

A continuación se evalúa el sesgo y la razón de decaimiento de este estimador.

#### Sesgo del estimador

**Teorema 4.3.1.** *Se considera el sistema dado por (4.3). Si se utiliza el método PEM para estimar  $b_i^0$ , entonces la estimación es insesgada para todas las entradas definidas en la sección 3.2.*

*Demostración.* Para poder determinar la existencia de sesgo del estimador (3.3.6), se debe calcular la esperanza del estimador condicionada al vector de información, dada por

$$\begin{aligned}\mathcal{E}\{\hat{\theta}|\mathbf{Z}_{i,N}\} &= \mathcal{E}\left\{(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^TY|\mathbf{Z}_{i,N}\right\} \\ &= \mathcal{E}\left\{(\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi^T(\Phi b_i^0 + E)|\mathbf{Z}_{i,N}\right\} \\ &= \theta + (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi\mathcal{E}\{E\}.\end{aligned}\quad (4.3.3)$$

Se observa que  $\Phi^T\Phi$  es invertible, ya que cumple  $\Phi^T\Phi = \sum_{t=1}^{N-1} z^2(k) \geq 0$ , con  $z_i(k) = \sum_{i=1}^k u_i(i)$ . Además,  $e(t)$  es ruido blanco de media cero, por lo que la esperanza del vector  $E$  es cero también. Entonces  $\mathcal{E}\{\hat{\theta}|\mathbf{Z}_{i,N}\} = \theta$  y el estimador será insesgado para todas las entradas de interés.  $\square$

### Varianza del estimador

**Teorema 4.3.2.** *Se considera el sistema dado por (4.3). Si se utiliza el método PEM para realizar la estimación de  $b_i$ , entonces la estimación es consistente para todas las entradas descritas en la sección 3.2. Además la razón de decaimiento de la varianza de la estimación es de  $N^{-2}$  cuando el sistema es alimentado con ruido blanco de media cero, y de  $N^{-3}$  cuando el sistema es alimentado con una señal constante o ruido blanco de media distinta de cero.*

*Demostración.* A partir de la expresión (3.3.8) y considerando el resultado del teorema 4.3.1 para el sesgo del estimador, se obtiene que la varianza del estimador de mínimos cuadrados está dada por

$$\begin{aligned}\text{Var}(\hat{\theta}|\mathbf{Z}_{i,N}) &= \mathcal{E}\left\{(\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T|\mathbf{Z}_{i,N}\right\} \\ &= (\Phi^T\Phi)^{-1}\Phi\mathcal{E}\{EE^T\}\Phi^T(\Phi^T\Phi)^{-1}.\end{aligned}\quad (4.3.4)$$

Como  $e(t)$  es una señal de ruido blanco, se cumple que  $\mathcal{E}\{EE^T\} = \sigma_e^2 I$ , por lo que la varianza del estimador corresponde a

$$\text{Var}(\hat{\theta}|\mathbf{Z}_{i,N}) = (\Phi^T\Phi)^{-1}\sigma_e^2. \quad (4.3.5)$$

Considerando los regresores (4.3.2), la varianza puede ser descrita matricialmente como

$$\text{Var}(\hat{\theta}|\mathbf{Z}_{i,N}) = \frac{\sigma_e^2}{U^T\Delta^T\Delta U}, \quad (4.3.6)$$

con

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u_i(1) \\ u_i(2) \\ \vdots \\ u_i(N-1) \end{bmatrix}. \quad (4.3.7)$$

Nótese que la varianza posee la misma estructura que  $X_N$  descrita en la suposición 3.7.1, donde el vector  $U$ , para entradas Gaussianas, corresponde al vector  $U_N$  simulado en la figura 3.4a. Entonces, es razonable suponer que este vector cumple la suposición 3.7.1 para las entradas de la sección 3.2.

A continuación, se presenta el valor de la razón de decaimiento de la varianza de estimación para cada una de las entradas de interés.

- En primer lugar, se considera la entrada  $u_i(t) = C$ , donde  $C \in \mathbb{R}$ ,  $C \neq 0$  es un valor constante.

Luego, a partir de la expresión (2.6.30) del lema 2.6.1, se obtiene

$$\text{Var}(\hat{\theta}|\mathbf{Z}_{i,N}) = \frac{\sigma_e^2}{\sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)^2} \quad (4.3.8)$$

$$= \frac{6\sigma_e^2}{C^2(N-2)(N-1)(2N-3)}. \quad (4.3.9)$$

Por lo tanto, la razón de decaimiento de la varianza del estimador es de  $N^{-3}$ .

- Se considera como entrada  $u_i(t)$  una señal de ruido blanco Gaussiano con media 0 y varianza  $\sigma_{u_i}^2$ .

En este caso, debido a que la entrada es estocástica, pero conocida, se debe trabajar a partir de la esperanza de la varianza condicionada, correspondiente a la expresión (3.3.11). En este caso, esta está dada por

$$\mathcal{E} \left\{ \text{Var}(\hat{\theta}|\mathbf{Z}_{i,N}) \right\} = \mathcal{E} \left\{ \frac{\sigma_e^2}{\sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)^2} \right\}. \quad (4.3.10)$$

Se considera que el vector  $U$  cumple la suposición 3.7.1, lo cual es respaldado por los resultados observados en la parte superior de la figura 3.4a. Luego, a partir del teorema 3.7.1, la razón de decaimiento de  $\mathcal{E} \left\{ \text{Var}(\hat{\theta}|\mathbf{Z}_{i,N}) \right\}$  es equivalente a la razón de decaimiento de  $\frac{\sigma_e^2}{\mathcal{E}\{U^T \Delta^T \Delta U\}}$ .

Considerando el teorema 2.6.1 y el lema 2.6.1, se obtiene

$$\begin{aligned} \frac{\sigma_e^2}{\mathcal{E}\{U^T \Delta^T \Delta U\}} &= \frac{\sigma_e^2}{\mathcal{E}\left\{\sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)^2\right\}} \\ &= \frac{\sigma_e^2}{\sum_{t=1}^{N-1} \mathcal{E}\{z_i(t)^2\}} \\ &= \frac{\sigma_e^2}{\sum_{t=1}^{N-1} t\sigma_u^2} \\ &= \frac{2\sigma_e^2}{N(N-1)\sigma_{u_i}^2}. \end{aligned} \quad (4.3.11)$$

De esta forma, la razón de decaimiento de la varianza del estimador es de  $N^{-2}$ .

- Finalmente, se considera como entrada una señal de ruido blanco Gaussiano con media  $C \neq 0$  y varianza  $\sigma_{u_i}^2$ .

Análogamente al punto anterior, se debe trabajar con la esperanza de la varianza condicionada (4.3.10). Se considera nuevamente que el vector  $U$  satisface la suposición 3.7.1, lo cual es respaldado por el comportamiento observado en la parte inferior de la figura 3.4a. Luego, a partir del teorema 3.7.1, la razón de decaimiento de  $\mathcal{E} \{ \text{Var}(\theta | \mathbf{Z}_{i,N}) \}$  es equivalente a la razón de decaimiento de  $\frac{\sigma_e^2}{\mathcal{E} \{ U^T \Delta^T \Delta U \}}$ .

Utilizando el resultado del teorema 2.6.2, se obtiene

$$\mathcal{E} \{ U^T \Delta^T \Delta U \} = \mathcal{E} \left\{ \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)^2 \right\} = \sum_{t=1}^{N-1} t^2 C + t \sigma_u^2. \quad (4.3.12)$$

Y, a partir de (4.3.8) y (4.3.11), se observa que esto corresponde a

$$\mathcal{E} \{ U^T \Delta^T \Delta U \} = \frac{C^2(N-2)(N-1)(2N-3)}{6} + \frac{N(N-1)}{2} \sigma_{u_i}^2. \quad (4.3.13)$$

Luego, es fácil ver que  $\frac{\sigma_e^2}{\mathcal{E} \{ U^T \Delta^T \Delta U \}}$  posee una razón de decaimiento de  $N^{-3}$ , por lo que la razón de decaimiento de la varianza del estimador es también de  $N^{-3}$ .

□

## 4.4. Estudio de esquemas de dos agentes

Habiendo observado el comportamiento de la estimación de la ganancia  $b_i^0$  para sistemas de un agente con integración, se realizará la estimación de este parámetro para sistemas de dos agentes, bajo cada uno de los esquemas descritos en la sección 3.4.

### 4.4.1. Esquema 1: Agentes sin comunicación

En primer lugar, se considera el esquema 1, descrito en la sección 3.4.1, en el cual no existe comunicación entre los agentes.

Como, en este caso, para la identificación de un agente  $i$  las dinámicas del otro agente  $j$  son desconocidas, estas pueden ser consideradas como parte del ruido. De esta forma el sistema (4.1.1) puede ser reescrito como

$$y(t) = \frac{b_i^0}{q-1} u_i(t) + \tilde{e}(t), \quad (4.4.1)$$

con  $\tilde{e}(t) = \frac{b_j}{q-1} u_j(t) + e(t)$ , y considerando  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ ,  $i \neq j$ .

Luego, análogamente a la sección 4.3, las primeras  $N$  muestras del sistema pueden ser expresadas mediante (2.4.2), y el estimador de mínimos cuadrados está dado por (2.4.5),

con

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ u_i(1) \\ u_i(1) + u_i(2) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{N-1} u_i(k) \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \theta = b_i^0, E = \Phi_j b_j + \bar{E}, \quad (4.4.2)$$

donde

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} 0 \\ u_j(1) \\ u_j(1) + u_j(2) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{N-1} u_j(k) \end{bmatrix}, \bar{E} = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}. \quad (4.4.3)$$

Se evalúa el sesgo y la varianza del estimador.

### Sesgo del estimador

**Teorema 4.4.1.** *Se considera el sistema (4.1.1) bajo el esquema 1 de la sección 3.4. Si se utiliza el método PEM para realizar la estimación de  $b_i^0$  del agente  $i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , esta estimación es insesgada si las entradas a los agentes son señales de ruido blanco de media cero, y sesgada si la entrada es una señal constante, o una señal de ruido blanco con media distinta a cero.*

*Demostración.* Para este caso, la esperanza del estimador está dada por

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ \hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N} \} &= \mathcal{E} \{ (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T Y | \mathbf{Z}_{i,N} \} \\ &= \mathcal{E} \{ (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T (\Phi b_i^0 + E) | \mathbf{Z}_{i,N} \} \\ &= \theta_i + (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathcal{E} \{ \Phi_j b_j + \bar{E} \} \\ &= \theta_i + b_j (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathcal{E} \{ \Phi_j \} + (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathcal{E} \{ \bar{E} \}. \end{aligned} \quad (4.4.4)$$

Como, análogamente a lo visto para el caso de los agentes aislados en el teorema 4.3.1, se satisface  $\mathcal{E} \{ \bar{E} \} = 0$  y  $\Phi^T \Phi \neq 0$ , el sesgo del estimador estará dado por

$$\text{Bias}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) = b_j (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathcal{E} \{ \Phi_j \}. \quad (4.4.5)$$

Esto ilustra que el sesgo depende no solo de los valores la entrada del agente  $i$  pero también de la entrada  $u_j$  del agente  $j$ .

A continuación, se evalúa su valor para los tipos de entradas descritas en 3.2.

- Si se consideran dos entradas constantes  $u_i = C_i \neq 0$  y  $u_j = C_j \neq 0$ , las matrices  $\Phi$  y

$\Phi_j$  están dadas por

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ C_i \\ 2C_i \\ \vdots \\ (N-1)C_i \end{bmatrix}, \Phi_j = \begin{bmatrix} 0 \\ C_j \\ 2C_j \\ \vdots \\ (N-1)C_j \end{bmatrix}, \quad (4.4.6)$$

luego, el estimador es sesgado, y el sesgo corresponde a

$$\text{Bias}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) = b_j \frac{C_j}{C_i}, \quad (4.4.7)$$

- Si se consideran  $u_i$  y  $u_j$  dos señales de ruido blanco Gaussiano de media 0 y varianzas  $\sigma_{u_i}^2$  y  $\sigma_{u_j}^2$  respectivamente, se cumple  $\mathcal{E}\{\Phi_j\} = 0$ , por lo que el estimador será insesgado.
- Finalmente, si se consideran  $u_i$  y  $u_j$  señales de ruido blanco con medias  $C_i$  y  $C_j$  respectivamente y varianzas  $\sigma_{u_i}^2$  y  $\sigma_{u_j}^2$  respectivamente, las matrices  $\Phi$  y  $\Phi_j$  se pueden descomponer en  $\Phi = \Phi_c + \tilde{\Phi}$  y  $\Phi_j = \Phi_{j,c} + \tilde{\Phi}_j$ , con

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 0 \\ C_i \\ 2C_i \\ \vdots \\ (N-1)C_i \end{bmatrix}, \Phi_{j,c} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_j \\ 2C_j \\ \vdots \\ (N-1)C_j \end{bmatrix} \quad (4.4.8)$$

y

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{u}_i(1) \\ \tilde{u}_i(1) + \tilde{u}_i(2) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_i(k) \end{bmatrix}, \tilde{\Phi}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{u}_j(1) \\ \tilde{u}_j(1) + \tilde{u}_j(2) \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{N-1} \tilde{u}_j(k) \end{bmatrix}, \quad (4.4.9)$$

donde  $\tilde{u}_i$  y  $\tilde{u}_j$  son señales de ruido blanco Gaussiano con media 0 y varianzas  $\sigma_i^2$  y  $\sigma_j^2$  respectivamente.

Luego, como  $\mathcal{E}\{\tilde{\Phi}_j\} = 0$  y  $\mathcal{E}\{\Phi_{j,c}\} = \Phi_{j,c}$ , el sesgo está dado por

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) &= b_j (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \Phi_{j,c} \\ &= b_j (\Phi^T \Phi)^{-1} (\Phi_c^T \Phi_{j,c} + \tilde{\Phi}^T \Phi_{j,c}). \end{aligned} \quad (4.4.10)$$

Finalmente, el sesgo corresponde a

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) &= b_j \frac{C_i C_j \sum_{t=1}^{N-1} t^2 + C_j \sum_{t=1}^{N-1} \tilde{z}_i(t) t}{\sum_{t=1}^{N-1} (C_i t + \tilde{z}_i(t))^2} \\ &= \frac{b_j C_j \sum_{t=1}^{N-1} (C_i^2 t^2 + C_i t \tilde{z}_i(t))}{C_i \sum_{t=1}^{N-1} (C_i t + \tilde{z}_i(t))^2}, \end{aligned} \quad (4.4.11)$$

donde  $\tilde{z}(t) = \sum_{k=1}^t \tilde{u}(k)$ .

Por lo tanto el estimador será sesgado a menos que se cumpla

$$\sum_{t=1}^{N-1} (C_i t^2 + t \tilde{z}_i(t)) = 0. \quad (4.4.12)$$

□

**Observación 4.4.1.** *En los casos en que la estimación de  $b_i^0$  otorga resultados sesgados, el sesgo dependerá tanto de la entrada del agente  $i$  como de la entrada del agente  $j$ , el cual es un valor desconocido para cada agente.*

### Varianza del estimador

Debido a que el estimador será insesgado solamente en el caso en que las entradas de los agentes sean secuencias de ruido blanco de media 0, el análisis de la varianza se centrará en esas señales de entrada.

**Conjetura 1.** *Para el sistema descrito en (4.1.1), bajo el marco del esquema 1, si las entradas a ambos sistemas corresponden a señales de ruido blanco de media cero, entonces, al utilizar el método PEM para estimar el parámetro  $b_i^0$ , la estimación será insesgada, pero no consistente.*

Para evaluar la validez de esta conjetura, se debe comprobar que la varianza de la estimación no decaiga a cero al aumentar el número de muestras. Se considera la ecuación (3.3.8), tomando en cuenta los resultados del teorema 4.4.1, que especifica que el estimador es no sesgado para las entradas consideradas. Luego, la varianza corresponde a

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\theta}_i) &= \mathcal{E} \left\{ (\hat{\theta} - \theta)(\hat{\theta} - \theta)^T \right\} \\ &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathcal{E} \{ E E^T \} \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1} \\ &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathcal{E} \{ (b_j \Phi_j + \bar{E})(b_j \Phi_j + \bar{E})^T \} \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1}. \end{aligned} \quad (4.4.13)$$

Tomando en cuenta los regresores del sistema dados por (4.4.2) y (4.4.3), la varianza puede ser descrita por

$$\text{Var}(\hat{\theta}_i) = \frac{(U_i^+)^T \Delta^T \mathcal{E} \{ (b_j \Delta U_j^+ + \bar{E})(b_j \Delta U_j^+ + \bar{E})^T \} \Delta U_i^+}{(U_i^+)^T \Delta^T \Delta U_i^+}, \quad (4.4.14)$$

con  $\Delta$  de (4.3.6), y

$$\begin{aligned} U_i &= \begin{bmatrix} u_i(1) \\ u_i(2) \\ \vdots \\ u_i(N-1) \end{bmatrix}, \quad U_j = \begin{bmatrix} u_j(1) \\ u_j(2) \\ \vdots \\ u_j(N-1) \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix} \\ \Delta^+ &= [ 0 \mid \Delta ], \quad U_i^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ U_i \end{bmatrix}, \quad U_j^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ U_j \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4.15)$$

Desarrollando esta expresión, se obtiene

$$\text{Var}(\hat{\theta}_i) = \frac{(U_i^+)^T \Delta^T \mathcal{E} \{b_j^2 \Delta U_j^+ (U_j^+)^T \Delta^T + \bar{E} \bar{E}^T + b_j \Delta U_j^+ \bar{E}^T + \bar{E} (U_j^+)^T \Delta^T b_j\} \Delta U_i^+}{(U_i^T \Delta^T \Delta U_i)^2} \quad (4.4.16)$$

Luego, considerando que  $u_j(t)$  e  $e(t)$  son dos señales con media cero independientes entre si, se cumple  $\mathcal{E} \{U_j^+ \bar{E}^T\} = \mathcal{E} \{\bar{E} (U_j^+)^T\} = 0$ , por lo tanto la varianza está dada por

$$\begin{aligned} \text{Var}(\hat{\theta}_i) &= \frac{(U_i^+)^T \Delta^T \mathcal{E} \{b_j^2 \Delta U_j^+ (U_j^+)^T \Delta^T + \bar{E} \bar{E}^T\} \Delta U_i^+}{(U_i^T \Delta^T \Delta U_i)^2} \\ &= b_j^2 \frac{U_i^T \Delta^T \Delta \mathcal{E} \{U_j U_j^T\} \Delta^T \Delta U_i}{U_i^T \Delta^T \Delta U_i U_i^T \Delta^T \Delta U_i} + \frac{U_i^T \Delta^T \mathcal{E} \{\bar{E} \bar{E}^T\} \Delta U_i}{(U_i^T \Delta^T \Delta U_i)^2}. \end{aligned} \quad (4.4.17)$$

Finalmente, como  $e(t)$  y  $u_j(t)$  son señales de ruido blanco de media cero, se obtiene

$$\text{Var}(\hat{\theta}_i) = \text{Var}_{u_j} + \text{Var}_e, \quad (4.4.18)$$

con

$$\text{Var}_{u_j} = b_j^2 \sigma_{u_j}^2 \frac{U_i^T \Delta^T \Delta \Delta^T \Delta U_i}{U_i^T \Delta^T \Delta U_i U_i^T \Delta^T \Delta U_i}, \quad \text{Var}_e = \frac{\sigma_e^2}{U_i^T \Delta^T \Delta U_i}. \quad (4.4.19)$$

Nótese que  $\text{Var}_e$  corresponde a la varianza descrita en (4.3.6), cuya razón de decaimiento se especifica en el teorema 4.3.2 al realizar la identificación de un sistema aislado, por lo tanto basta solo con estudiar la razón de decaimiento de  $\text{Var}_{u_j}$ , la parte de la varianza influenciada por la presencia del otro agente, para determinar el comportamiento de la varianza del parámetro.

Se evidencia de (4.4.17) y (4.4.19) que las expresiones para el numerador y el denominador de  $\text{Var}_{u_j}$  son bastante similares. En particular considerando que la matriz  $\Delta$  ilustra la parte integrativa del proceso, se observa que esta está incluida en igual manera en ambos factores. Intuitivamente, esto podría indicar que la varianza no decrece a 0 al aumentar indefinidamente el número de muestras, de forma que el estimador no sería consistente.

Para corroborar la intuición respecto a  $\text{Var}_{u_j}$ , se realiza una simulación de Monte-Carlo para ilustrar numéricamente la evolución de aquella expresión en relación al número de muestras. La figura 4.1 muestra los resultados de una simulación de  $10^4$  realizaciones de 1 a 100 muestras cada una, para  $b_j = 1$ ,  $\sigma_{u_i}^2 = 0,1$  y  $\sigma_{u_j}^2 = 1$ . Se observa que  $\text{Var}_{u_j}$  no decae infinitamente hacia cero al aumentar el número de muestras, si no que se estaciona en un valor constante, por lo tanto, tal como lo indica la conjetura 1, la estimación del  $b_1$  no es consistente en este caso.

Del teorema 4.4.1 y la conjetura 1, se extrae que la estimación de ganancia en un sistema de dos agentes con integración entre los cuales no existe ningún tipo de comunicación, donde cada sub-sistema tiene acceso solamente a su entrada y a la salida común, no otorga resultados satisfactorios. En particular, si las entradas poseen valores continuos, la estimación de la ganancia será sesgada, y si las entradas son señales de ruido blanco de media cero, la estimación, a pesar de ser insesgada, será no consistente.

A continuación, se estudiará la estimación de este parámetro bajo las soluciones propuestas, correspondientes a los esquemas 2, 3 y 4, para observar si la eliminación de la integración o la comunicación entre agentes permite eliminar los problemas presentes en la identificación, y para también determinar el desempeño que estos esquemas permiten obtener.

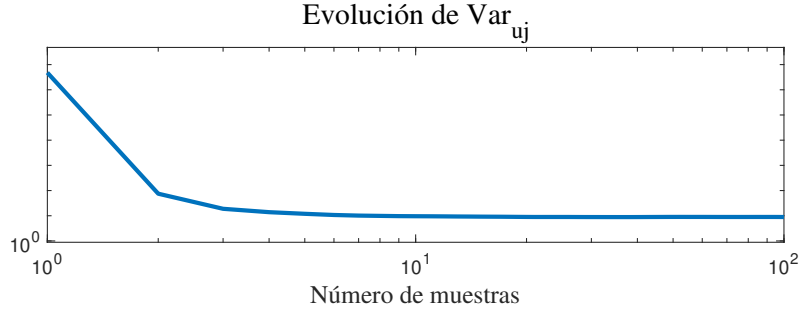


Figura 4.1: Evolución de  $\text{Var}_{u_j}$  al aumentar número de muestras

#### 4.4.2. Esquema 2: Eliminación de integración

Se realiza la estimación considerando el esquema 2 de la sección 3.4.2. Para este esquema, nuevamente no existe comunicación entre los agentes, de forma que el sistema es descrito por la ecuación (4.4.1), sin embargo, como la entrada es filtrada por (3.4.6), este puede ser reescrito por

$$y(t) = \frac{b_i^0}{q} u_i(t) + \tilde{e}(t), \quad (4.4.20)$$

con  $\tilde{e}(t) = \frac{b_j^0}{q} u_j(t) + e(t)$ ,  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ ,  $i \neq j$ .

Luego, las primeras  $N$  muestras del sistema pueden ser expresadas como

$$Y = \Phi\theta + E, \quad (4.4.21)$$

con

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ u_i(1) \\ u_i(2) \\ \vdots \\ u_i(N-1) \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \quad (4.4.22)$$

$\theta = b_i^0$  y  $E = b_j\Phi_j + \bar{E}$ , donde

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} 0 \\ u_j(1) \\ u_j(2) \\ \vdots \\ u_j(N-1) \end{bmatrix}, \bar{E} = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}. \quad (4.4.23)$$

Y el estimador de mínimos cuadrados está dado por (2.4.5). A continuación se evalúa su sesgo y varianza.

### Sesgo del estimador

**Teorema 4.4.2.** *Se considera el sistema (4.1.1) bajo el esquema 2 de la sección 3.4. Si se utiliza el método PEM para estimar  $b_i^0$ , entonces la estimación es insesgada si las entradas a los agentes son señales de ruido blanco de media cero, y sesgada si las entradas son señales constantes, o señales de ruido blanco con media distinta a cero.*

*Demostración.* El desarrollo de la esperanza del estimador es equivalente al del esquema 1, por lo que el sesgo está dado por (4.4.5). Luego, se evalúa esta expresión para las entradas de interés.

- Si se consideran dos entradas constantes  $u_i = C_i \neq 0$  y  $u_j = C_j \neq 0$ , las matrices  $\Phi$  y  $\Phi_j$  están dadas por

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 \\ C_i \\ C_i \\ \vdots \\ C_i \end{bmatrix}, \Phi_j = \begin{bmatrix} 0 \\ C_j \\ C_j \\ \vdots \\ C_j \end{bmatrix}, \quad (4.4.24)$$

luego, el estimador es sesgado, y el sesgo está dado por

$$\text{Bias}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) = b_j \frac{C_j}{C_i}, \quad (4.4.25)$$

- Si se consideran  $u_i$  y  $u_j$  dos señales de ruido blanco Gaussiano de media 0 y varianzas  $\sigma_{u_i}^2$  y  $\sigma_{u_j}^2$  respectivamente, se cumple  $\mathcal{E}\{\Phi_j\} = 0$ , por lo que el estimador será insesgado.
- Finalmente, si se consideran  $u_i$  y  $u_j$  señales de ruido blanco con medias  $C_i$  y  $C_j$  respectivamente y varianzas  $\sigma_{u_i}^2$  y  $\sigma_{u_j}^2$  respectivamente. Las matrices  $\Phi$  y  $\Phi_j$  se pueden descomponer en  $\Phi = \Phi_c + \tilde{\Phi}$  y  $\Phi_j = \Phi_{j,c} + \tilde{\Phi}_j$ , al igual como se hizo para el esquema 1, con

$$\Phi_c = \begin{bmatrix} 0 \\ C_i \\ C_i \\ \vdots \\ C_i \end{bmatrix}, \Phi_{j,c} = \begin{bmatrix} 0 \\ C_j \\ C_j \\ \vdots \\ C_j \end{bmatrix} \quad (4.4.26)$$

y

$$\tilde{\Phi} = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{u}_i(1) \\ \tilde{u}_i(2) \\ \vdots \\ \tilde{u}_i(N-1) \end{bmatrix}, \tilde{\Phi}_j = \begin{bmatrix} 0 \\ \tilde{u}_j(1) \\ \tilde{u}_j(2) \\ \vdots \\ \tilde{u}_j(N-1) \end{bmatrix}, \quad (4.4.27)$$

donde  $\tilde{u}_i$  y  $\tilde{u}_j$  son señales de ruido blanco Gaussiano con media 0 y varianzas  $\sigma_i^2$  y  $\sigma_j^2$  respectivamente.

Luego, como  $\mathcal{E}\{\tilde{\Phi}_j\} = 0$  y  $\mathcal{E}\{\Phi_{j,c}\} = \Phi_{j,c}$ , el sesgo está dado por

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) &= b_j (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \Phi_{j,c} \\ &= b_j (\Phi^T \Phi)^{-1} (\Phi_c^T \Phi_{j,c} + \tilde{\Phi}^T \Phi_{j,c}) \\ &= b_j \frac{(N-1)C_i C_j + C_j \sum_{t=1}^{N-1} \tilde{u}_i(t)}{\sum_{t=1}^{N-1} (C_i + \tilde{u}_i(t))^2} \\ &= b_j \frac{C_i C_j + C_j \frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^{N-1} \tilde{u}_i(t)}{\frac{1}{N-1} \sum_{t=1}^{N-1} (C_i + \tilde{u}_i(t))^2}. \end{aligned} \quad (4.4.28)$$

En este caso, se observa que  $\tilde{u}_i(t)$  al ser ruido blanco Gaussiano, es un proceso estacionario ergódico, y que por lo tanto  $(C_i + \tilde{u}_i(t))^2$  será también ergódico. Luego, según el capítulo 5 de [57], el sesgo convergerá con probabilidad casi segura a

$$\text{Bias}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) = b_j \frac{C_i C_j + C_j \mathcal{E}\{\tilde{u}_i(t)\}}{\mathcal{E}\{(C_i + \tilde{u}_i(t))^2\}} \quad (4.4.29)$$

$$= b_j \frac{C_i C_j}{C_i^2 + \sigma_{u_i}^2}. \quad (4.4.30)$$

Entonces, el estimador es sesgado. □

**Observación 4.4.2.** *Al igual que en la identificación realizada bajo el esquema 1, en los casos en que la estimación de  $b_i^0$  otorga resultados sesgados, el sesgo dependerá tanto de la entrada del agente  $i$  como de la entrada del agente  $j$ , la cual es una señal desconocida para cada agente.*

### Varianza del estimador

Al igual al esquema anterior, como el estimador solo es insesgado si las entradas  $u_i(t)$  y  $u_j(t)$  son señales de ruido blanco con media 0, el análisis de la varianza del estimador se centrará en aquel caso.

**Teorema 4.4.3.** *Se considera el sistema (4.1.1) bajo el esquema 2 de la sección 3.4. Si se utiliza el método PEM para la estimación de  $b_i^0$  del agente  $i$ , entonces la estimación es consistente cuando las entradas a los agentes son señales de ruido blanco de media cero. Además, la razón de decaimiento de la varianza del estimador es de  $N^{-1}$ .*

*Demostración.* Se observa que en el sistema (4.4.20),  $\tilde{e}(t)$  es una señal de ruido blanco de varianza  $\sigma_e^2 + b_j^2 \sigma_{u_j}^2$ . Luego, el sistema es equivalente a (4.2.1), con  $p_1^0 = 0$ .

Por lo tanto, según lo desarrollado en (4.2.8), la varianza del estimador se comportará como

$$\text{Cov}(\hat{\theta}) \sim \frac{1}{N} \frac{\sigma_e^2 + b_j^2 \sigma_{u_j}^2}{\sigma_u^2}. \quad (4.4.31)$$

□

De los teoremas 4.4.2 y 4.4.3, se extrae que, para la estimación de ganancia en sistemas de dos agentes de primer orden con integración, filtrar las entradas con el fin de eliminar la integración de los sistemas no elimina el sesgo si se utilizan entradas con valor continuo distinto de 0, pero permite hacer que la estimación sea consistente además de insesgada cuando la entrada es ruido blanco Gaussiano. Sin embargo, debido a la estabilidad de las señales resultantes, la razón de decaimiento en este caso se reduce a  $N^{-1}$ .

A continuación se presenta el desarrollo para las estrategias comunicativas, las cuales realizan la estimación incluyendo la integración dentro de ella.

### 4.4.3. Esquema 3: Comunicación en la entrada

Se realiza la estimación considerando el esquema 3, descrito en la sección 3.4.3. Para este esquema, cada agente comparte su entrada con el otro agente para realizar la identificación, de forma que el vector de información está dado por (3.4.7). Como el conjunto de modelos al que se tiene acceso corresponde a (3.3.5), se realizará la identificación de  $b_1$  y  $b_2$  de forma conjunta.

Análogamente a los casos anteriores, las primeras  $N$  muestras del sistema pueden ser expresadas mediante (2.4.2), y el estimador de mínimos cuadrados está dado por (2.4.5), con

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ u_1(1) & u_2(1) \\ u_1(1) + u_1(2) & u_2(1) + u_2(2) \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{N-1} u_1(k) & \sum_{k=1}^{N-1} u_2(k) \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \end{bmatrix}. \quad (4.4.32)$$

Se analiza el sesgo y la varianza del estimador.

#### Sesgo del estimador

**Teorema 4.4.4.** *Se considera el sistema dado por (4.1.1) bajo el esquema 3 de la sección 3.4. Al utilizar el método PEM para estimar el vector de parámetros  $\theta$ , la estimación es insesgada si las entradas son ruido blanco, tanto de media cero como de media distinta de cero. Por otro lado, si las entradas corresponden a valores constantes, no se poseerá información suficiente para determinar los parámetros correctamente.*

*Demostración.* Como  $e(t)$  es una señal de ruido blanco, considerando (3.3.6), el estimador será insesgado siempre que  $\Phi^T \Phi$  sea invertible.

En este caso,

$$\Phi^T \Phi = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t) & \sum_{t=1}^{N-1} z_2(t)^2 \end{bmatrix} \quad (4.4.33)$$

con  $z_i(t) = \sum_{k=1}^t u_i(t)$ , con  $i \in \{1, 2\}$ .

Luego, el determinante de esta matriz está dado por

$$\text{Det}(\Phi^T \Phi) = \sum_{t_1=1}^{N-1} \sum_{t_2=1}^{N-1} z_1(t_1)^2 z_2(t_2)^2 - z_1(t_1) z_2(t_1) z_1(t_2) z_2(t_2), \quad (4.4.34)$$

lo cual es 0 para el caso en que  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  sean valores constantes, de modo que los parámetros no pueden ser obtenidos para esta clase de entrada.

Si  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  son señales de ruido blanco independientes entre sí, se puede tener un indicio de que la matriz  $\Phi^T \Phi$  no sea singular evaluando su valor esperado  $\mathcal{E} \{ \Phi^T \Phi \}$ . Nótese que, para una cantidad finita  $N$  de muestras,  $\Phi^T$  es una matriz  $\mathbb{R}^{N \times 2}$  persistentemente excitante de orden  $N - 1$  cuya matriz de covarianza está dada por  $\mathcal{E} \{ \Phi^T \Phi \}$ . A partir del capítulo 3 de [57] se puede extraer que al ser  $\Phi^T$  persistentemente excitante,  $\mathcal{E} \{ \Phi^T \Phi \}$  será invertible. □

### Varianza del estimador

Debido a que el sistema no es identificable para el caso en que las entradas son constantes, el análisis de la varianza del estimador bajo este esquema se centra en los casos en que la entrada es una señal Gaussiana.

**Teorema 4.4.5.** *Se considera el sistema (4.1.1) bajo el esquema 2 de la sección 3.4. Si se utiliza el método PEM para realizar la estimación del vector de parámetros  $\theta$ , entonces, esta estimación es consistente si las entradas a los agentes son señales de ruido blanco, tanto de media cero como de media distinta de cero. Además la razón de decaimiento de la varianza del estimador es de  $N^{-2}$  para ambos casos.*

*Demostración.* Como  $e(t)$  es una señal de ruido blanco, la matriz de covarianza del estimador estará dada por

$$\text{Cov}(\hat{\theta} | \mathbf{Z}_{i,N}) = (\Phi^T \Phi)^{-1} \sigma_e^2. \quad (4.4.35)$$

Considerando los regresores (4.4.32), esta puede ser descrita como

$$\text{Cov}(\hat{\theta} | \mathbf{Z}_{i,N}) = (U^T \Delta^T \Delta U)^{-1} \sigma_e^2, \quad (4.4.36)$$

con  $\Delta$  de (4.3.7) y

$$U = \begin{bmatrix} u_1(1) & u_2(1) \\ u_1(2) & u_2(2) \\ \vdots & \vdots \\ u_1(N-1) & u_2(N-1) \end{bmatrix}. \quad (4.4.37)$$

Nuevamente, la matriz de covarianza posee la misma estructura que  $X_N$  descrita en la suposición 3.7.1, donde este vector  $U$ , para entradas Gaussianas, corresponde al vector  $U_N$  simulado en la figura 3.4b, por lo tanto este vector cumple la suposición 3.7.1 para las entradas Gaussianas de la sección 3.2.

A continuación se presenta la razón de decaimiento de esta varianza para aquellas entradas.

- Se consideran como entradas  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$ , dos señales de ruido blanco Gaussiano de media 0 y varianzas  $\sigma_{u_1}^2$  y  $\sigma_{u_2}^2$  respectivamente.

Similarmente a como fue realizado en casos anteriores para entradas de este tipo, se trabaja con la esperanza de la varianza condicionada (3.3.11). En este caso esta está dada por

$$\mathcal{E} \left\{ \text{Cov}(\hat{\theta} | \mathbf{Z}_{i,N}) \right\} = \sigma_e^2 \mathcal{E} \left\{ \left[ \begin{array}{cc} \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t) & \sum_{t=1}^{N-1} z_2(t)^2 \end{array} \right]^{-1} \right\}. \quad (4.4.38)$$

Se considera que el vector  $U$  es tal que se cumple la suposición 3.7.1, lo que es respaldado por los resultados de la parte superior de la figura 3.4b. Luego, a partir del teorema 3.7.1, la razón de decaimiento de los elementos diagonales de  $\mathcal{E} \{ \text{Cov}(\theta | \mathbf{Z}_{i,N}) \}$ , correspondientes a la varianza de la estimación de cada uno de los parámetros, es equivalente a la razón de decaimiento de los elementos diagonales de  $\sigma_e^2 \mathcal{E} \{ U^T \Delta^T \Delta U \}^{-1}$ .

A partir del teorema 2.6.1, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ U^T \Delta^T \Delta U \} &= \mathcal{E} \left\{ \left[ \begin{array}{cc} \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t) & \sum_{t=1}^{N-1} z_2(t)^2 \end{array} \right] \right\} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{u_1}^2 \sum_{t=1}^{N-1} t & 0 \\ 0 & \sigma_{u_2}^2 \sum_{t=1}^{N-1} t \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\sigma_{u_1}^2 N(N-1)}{2} & 0 \\ 0 & \frac{\sigma_{u_2}^2 N(N-1)}{2} \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (4.4.39)$$

Por lo tanto,

$$(\mathcal{E} \{ U^T \Delta^T \Delta U \})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{2}{\sigma_{u_1}^2 N(N-1)} & 0 \\ 0 & \frac{2}{\sigma_{u_2}^2 N(N-1)} \end{bmatrix}. \quad (4.4.40)$$

Luego, la razón de decaimiento de la varianza de la estimación de cada uno de los parámetros para entradas Gaussianas de media cero es de  $N^{-2}$ .

- Se consideran como entradas  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$ , dos señales de ruido blanco Gaussiano de medias  $C_1$  y  $C_2$  respectivamente y varianzas  $\sigma_{u_1}^2$  y  $\sigma_{u_2}^2$  respectivamente.

Análogamente al caso con media cero, se debe trabajar con la esperanza de la varianza condicionada (4.4.38). Se considera nuevamente que el vector  $U$  satisface la suposición 3.7.1, lo que es respaldado por los resultados de la parte inferior de la figura 3.4b. Luego, a partir del teorema 3.7.1, la razón de decaimiento de los elementos diagonales de  $\mathcal{E} \{ \text{Cov}(\theta | \mathbf{Z}_{i,N}) \}$  es equivalente a la razón de decaimiento de los elementos diagonales de  $\sigma_e^2 \mathcal{E} \{ U^T \Delta^T \Delta U \}^{-1}$ .

A partir del teorema 2.6.2 se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} \{U^T \Delta^T \Delta U\} &= \mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t) & \sum_{t=1}^{N-1} z_2(t)^2 \end{bmatrix} \right\} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} \sigma_{u_1}^2 t + C_1^2 t^2 & \sum_{t=1}^{N-1} C_1 C_2 t \\ \sum_{t=1}^{N-1} C_1 C_2 t & \sum_{t=1}^{N-1} \sigma_{u_2}^2 t + C_2^2 t^2 \end{bmatrix} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{N(N-1)(3\sigma_{u_1}^2 + (2N-1)C_1^2)}{6} & \frac{N(N-1)(2N-1)C_1 C_2}{6} \\ \frac{N(N-1)(2N-1)C_1 C_2}{6} & \frac{N(N-1)(3\sigma_{u_2}^2 + (2N-1)C_2^2)}{6} \end{bmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.4.41}$$

Por lo tanto,

$$(\mathcal{E} \{U^T \Delta^T \Delta U\})^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{6(3\sigma_{u_2}^2 + (2N-1)C_2^2)}{N(N-1)(9\sigma_{u_1}^2 \sigma_{u_2}^2 + (2N-1)C_1^2 C_2^2)} & \frac{6(2N-1)C_1 C_2}{N(N-1)(9\sigma_{u_1}^2 \sigma_{u_2}^2 + (2N-1)C_1^2 C_2^2)} \\ \frac{6(2N-1)C_1 C_2}{N(N-1)(9\sigma_{u_1}^2 \sigma_{u_2}^2 + (2N-1)C_1^2 C_2^2)} & \frac{6(3\sigma_{u_2}^2 + (2N-1)C_2^2)}{N(N-1)(9\sigma_{u_1}^2 \sigma_{u_2}^2 + (2N-1)C_1^2 C_2^2)} \end{bmatrix}. \tag{4.4.42}$$

Luego, como los elementos diagonales de  $\mathcal{E} \{U^T \Delta^T \Delta U\}$  decrecen con un orden de  $N^{-2}$ , la varianza de la estimación de ambos parámetros posee un orden de decaimiento de  $N^{-2}$ , tal como en el caso con media cero.

□

De los teoremas 4.4.4 y 4.4.5, se extrae que el esquema con comunicación en la entrada de los agentes permite realizar la estimación de la ganancia de los agentes de forma insesgada y consistente. Sin embargo, este esquema no permite determinar los parámetros cuando se utilizan valores constantes como entradas a los sistemas. Además la razón de convergencia es de  $N^{-2}$  para ruido blanco, ya sea con media 0 o distinta de 0. Obteniéndose una mejora respecto al desempeño al eliminar la integración del sistema, pero no se observa la mejora al agregar un valor constante a la entrada como en el caso de un agente.

#### 4.4.4. Esquema 4: Comunicación en la salida

Se realiza finalmente la estimación considerando el esquema 4, descrito en la sección 3.4.4. En este esquema, cada agente comparte una medición de su salida con el otro agente para realizar la identificación, de forma que el vector de información está dado por (3.4.11).

Nótese que en este caso, al tomar en cuenta la medición  $y_{m,j}(t)$  del agente  $j$ , dada por (3.4.10), la salida del agente  $i$ ,  $i \in \{1, 2\}$ , corresponde a

$$y(t) = \frac{b_i^0}{q-1} u_i(t) + e(t) - e_j(t), \tag{4.4.43}$$

con  $\{i, j\} = \{1, 2\}$ ,  $i \neq j$ , y donde  $e_j(t)$  es el ruido de la medición de la salida del agente  $j$ , siendo este ruido blanco de media 0 y varianza  $\sigma_{e_j}^2$ .

El sistema puede ser reescrito como

$$y(t) = \frac{b_i^0}{q-1} u_i(t) + \bar{e}(t), \tag{4.4.44}$$

con  $\bar{e}(t) = e(t) + e_j(t)$  una señal de ruido blanco con media 0 y varianza  $\sigma_e^2 + \sigma_{e_j}^2$ .

Luego el sistema resultante es equivalente al sistema de un agente. Por lo que el proceso de identificación será el mismo al desarrollado en la sección 4.3.

### Sesgo del estimador

A partir del teorema 4.3.1, se puede concluir que la estimación de la ganancia es insesgada para cada una de las entradas de interés.

### Varianza del estimador

A partir del teorema 4.3.2, se puede concluir que la estimación de la ganancia es consistente para cada una de las entradas de interés. En particular, cuando las entradas  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de los sistemas corresponden a señales de ruido blanco de media 0, la razón de decaimiento será de  $N^{-2}$ , mientras que cuando las entradas son valores constantes o ruido blanco de medias distintas a 0, la razón de decaimiento será de  $N^{-3}$ .

Al igual que en el caso de la comunicación en la entrada, los resultados muestran que la comunicación en la salida del sistema permite un mejor desempeño en la varianza de la estimación de la ganancia que el eliminar la integración.

## 4.5. Simulaciones del sistema

Para corroborar los resultados respecto al sesgo y la varianza obtenidos en este capítulo, se realizan una simulación de Monte-Carlo para realizar numéricamente la estimación de la ganancia del agente 1 de un sistema de forma (4.1.1), bajo los esquemas 2, 3 y 4 de la sección 3.4, que son los únicos que generan resultados consistentes para algunas entradas. Las simulaciones son realizadas solamente considerando entradas Gaussianas, tanto de medias 0 como de medias distintas a 0, debido a que las entradas de carácter constante no son adecuadas para todos los esquemas estudiados, específicamente para el esquema 2, debido a no ser persistentemente excitantes.

Para estas simulaciones se considera  $b_1 = 0,8$ ,  $b_2 = 0,88$  y  $\sigma_{u_1}^2 = \sigma_{u_2}^2 = \sigma_e^2 = 1$ . Se realiza una simulación de Monte-Carlo con entradas de media  $\mu_{u_1} = \mu_{u_2} = 0$ , y una simulación de Monte-Carlo con entradas de medias  $\mu_{u_1} = 4$  y  $\mu_{u_2} = -4$ .

Para cada caso la simulación fue hecha sobre 21 tamaños de muestras distintos, espaciados uniformemente en la escala logarítmica entre 10 y  $10^5$  muestras. Para cada tamaño en el rango entre 10 y  $10^3$ , se simularon  $10^6$  realizaciones, mientras que para cada rango entre  $10^3$  y  $10^5$ , se computaron  $10^4$  realizaciones.

La evolución del sesgo y la varianza de las simulaciones se muestran en la figura 4.2 para las entradas de media cero, y en la figura 4.3 para las entradas de media distinta de cero. Para esas entradas, también se incluye el error cuadrático medio de la estimación, para ilustrar las diferencias de este respecto a la varianza cuando el parámetro es sesgado.

Se observa en las figuras que el sesgo de los sistemas y la razón de decaimiento concuerdan con los resultados desarrollados anteriormente para cada esquema en este capítulo. Donde solo hay sesgo al identificar el parámetro con el esquema 2 utilizando entradas de media

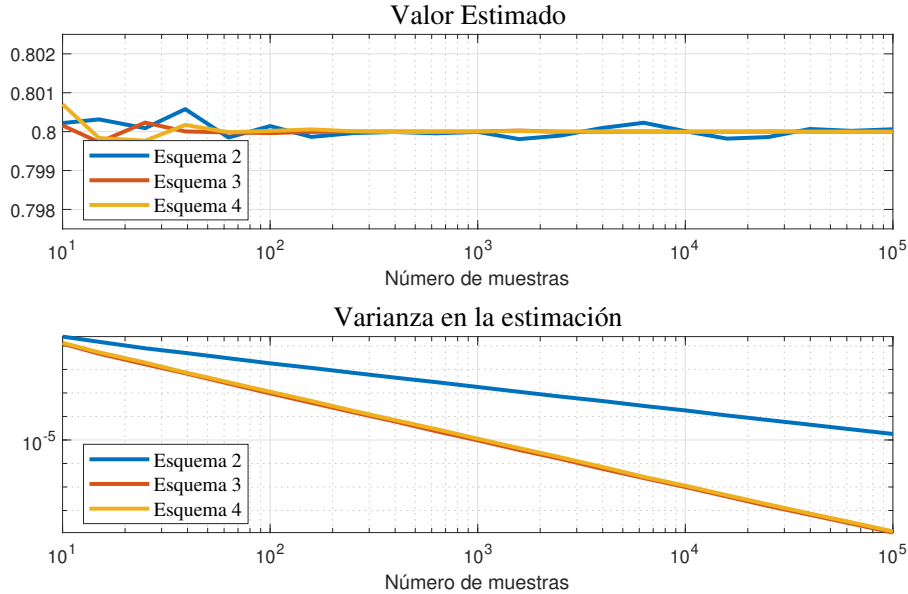


Figura 4.2: Media muestral para el valor estimado del parámetro  $b_1 = 0,8$  (arriba) y para la varianza del parámetro estimado (abajo) con  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de media 0, considerando tamaños muestrales que varían de 10 a  $10^5$  muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones para cada tamaño muestral.

distinta de cero, y la varianza converge con una razón más rápida con los esquemas 3 y 4 que con el esquema 2.

## 4.6. Resumen de los resultados para la identificación de ganancia

El desarrollo anterior evidencia el interés en incluir la integración dentro del problema de identificación de ganancia en sistemas de primer orden. En 4.3 se observa que, para el caso de un agente, la varianza de la identificación de la ganancia en sistemas con integración decrece con un orden de  $N^{-2}$  al utilizar ruido blanco de media cero como entrada y  $N^{-3}$  al utilizar señales constantes o ruido blanco con media distinta de cero como entrada. Esto refleja una razón de decaimiento más rápida que en la estimación de sistemas estables, donde para todos los casos, la varianza de la estimación decrece con una razón de  $N^{-1}$ .

Respecto a la identificación colaborativa de sistemas de 2 agentes, en 4.4 se corrobora la necesidad de información extra para la correcta identificación de los parámetros en sistemas de forma (3.1.1). La estimación de estos sistemas sin que exista comunicación entre ellos, ilustrada por el esquema 1, otorga resultados sesgados al utilizar entradas con media distinta de cero, y resultados insesgados pero no consistentes al utilizar ruido blanco con media cero como entrada. Mientras que la eliminación de la integración, ilustrada por el esquema 2, permite una estimación insesgada y consistente de la ganancia al utilizar entradas de ruido

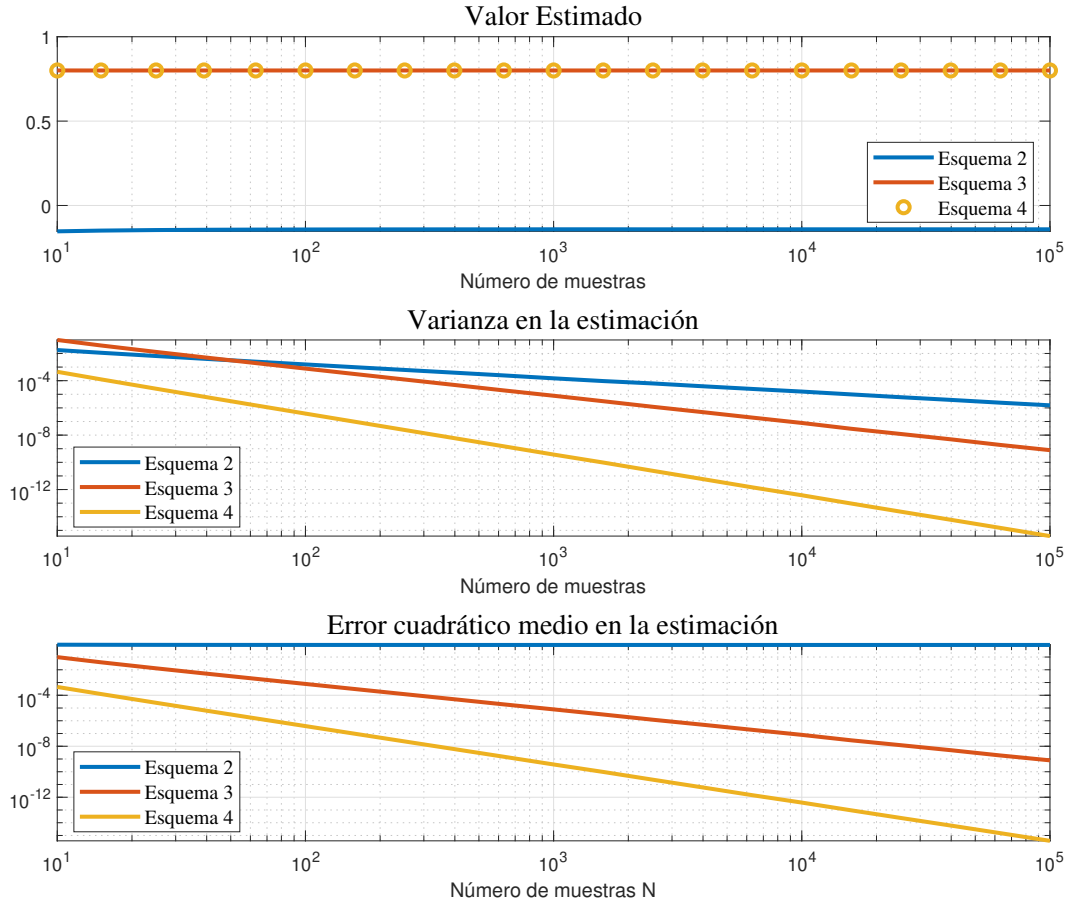


Figura 4.3: Media muestral para el valor estimado del parámetro  $b_1 = 0,8$  (arriba), varianza del parámetro estimado (al medio) y error cuadrático medio del parámetro estimado (abajo) con  $u_1(t)$  de media 4 y  $u_2(t)$  de media  $-4$ , considerando tamaños muestrales que varían de 10 a  $10^5$  muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones para cada tamaño muestral.

blanco con media cero, pero la razón de decaimiento de la varianza de la estimación en este caso se reduce a  $N^{-1}$ . Además, no se elimina el sesgo para entradas con media distinta de cero. El desarrollo efectuado en la sección 4.2 indica que en general, los esquemas que intenten estabilizar los sistemas, no tendrán un decaimiento más rápido que  $N^{-1}$  en la varianza.

Los esquemas 3 y 4, los cuales utilizan la transmisión de información entre agentes los para realizar la identificación de estos, permiten hacer uso de la mejora que la integración otorga en el decaimiento de la varianza de la estimación. El esquema 3 no permite identificar los parámetros correctamente si la entrada es un valor constante, pero logra una estimación insesgada y consistente, con razón de decaimiento en la varianza de  $N^{-2}$ , para los otros dos casos. Mientras tanto, el esquema 4 conserva todas las propiedades presentes en la estimación de un solo agente con integración. Cabe notar que, si bien el esquema 4 permite un mejor

desempeño en el decaimiento de la varianza, el requerimiento de una medida externa para la salida absoluta de uno de los agentes puede implicar un componente extra de ruido, y se puede traducir en dificultades de escalabilidad si el número de agentes crece.

Un resumen del comportamiento de la estimación del parámetro bajo cada uno de los esquemas utilizando las entradas evaluadas se muestra en la tabla 4.1.

		Esquema			
		1	2	3	4
Entrada Constante	Sesgo	Si	Si	-	No
	Dec. Varianza	-	-	-	$N^{-3}$
Entrada Gaussiana Media 0	Sesgo	No	No	No	No
	Dec. Varianza	No Decae	$N^{-1}$	$N^{-2}$	$N^{-2}$
Entrada Gaussiana Media no 0	Sesgo	Si	Si	No	No
	Dec. Varianza	-	-	$N^{-2}$	$N^{-3}$

Cuadro 4.1: Resumen de resultados para el sesgo y la razón de decaimiento de la estimación de la ganancia en un sistema de primer orden bajo los esquemas propuestos.

# ESTIMACIÓN ANALÍTICA DE DOS PARÁMETROS LINEALES

En este capítulo, se desarrolla analíticamente la estimación de los dos parámetros del numerador de un agente de segundo orden perteneciente a un sistema Multi-Agente, correspondiente al caso 2 de la sección 3.5, utilizando el estimador de mínimos cuadrados, el cual concuerda con el método PEM para la configuración descrita. La estimación es realizada bajo cada esquema de estimación descrito en la sección 3.4. Para cada caso, se determina primero la presencia o ausencia de sesgo en el estimador, y luego se evalúa la razón de decaimiento de la varianza de la estimación al aumentar el número de muestras, con el fin de determinar la eficiencia otorgada por cada esquema. Se realizan observaciones respecto a las diferencias de estos resultados respecto a la identificación de ganancia del capítulo anterior.

### 5.1. Configuración del Sistema

Para la identificación a realizar en este capítulo, se considera el sistema conformado por dos agentes de segundo orden cada uno cuyas funciones de transferencia están descritas en el caso 2 de la sección 3.5.

De esta forma, el sistema está dado por

$$y(t) = \frac{b_{1,1}^0 q + b_{1,2}^0}{q(q-1)} u_1(t) + \frac{b_{2,1}^0 q + b_{2,2}^0}{q(q-1)} u_2(t) + e(t), \quad (5.1.1)$$

donde cada agente  $i$  busca estimar el valor de sus parámetros  $b_{i,1}^0$  y  $b_{i,2}^0$ ,  $i \in \{1, 2\}$ .

Nuevamente, se considerarán las señales definidas en la sección 3.2 como entradas  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  y  $e(t)$  será una señal de ruido blanco con media cero y varianza  $\sigma_e^2$ .

Al igual que en el capítulo anterior, para la estimación de los parámetros del sistema descrito en (5.1.1), la minimización otorgada por el método de predicción de error (PEM) corresponde al estimador de mínimos cuadrados, por lo que este será el estimador utilizado para la identificación de los parámetros.

## 5.2. Identificación de un sistema de un agente.

Análogamente al trabajo realizado en la sección 4.3, se estudiará en un principio el comportamiento del estimador para sistemas de un solo agente, con el fin de obtener una base preliminar sobre el impacto de la integración en la configuración actual de los sistemas.

La salida del agente activo  $G_i, i \in \{1, 2\}$ , en este caso, está dada por

$$y(t) = \frac{b_{i,1}^0 q + b_{i,2}^0}{q(q-1)} u_i(t) + e(t). \quad (5.2.1)$$

Este sistema se puede escribir de la forma (2.6.34), donde

$$\varphi(t)^T = \left[ \sum_{k=1}^{t-1} u_i(k) \quad \sum_{k=1}^{t-2} u_i(k) \right] \quad \text{y} \quad \theta_i = [b_{i,1}^0 \quad b_{i,2}^0]^T.$$

Considerando que  $y(0) = u_i(0) = u_i(-1) = 0$ , el sistema puede ser descrito por (2.4.2), y el estimador de mínimos cuadrados está dado por (2.4.5), con

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ u_i(1) & 0 \\ u_i(1) + u_i(2) & u_i(1) \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{t=1}^{N-1} u_i(t) & \sum_{k=1}^{N-2} u_i(k) \end{bmatrix}, \quad Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \quad E = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}. \quad (5.2.2)$$

### Sesgo del estimador.

**Teorema 5.2.1.** *Se considera el sistema dado por (5.2). Si se utiliza el método PEM para estimar el vector de parámetros  $\theta_i$ , entonces la estimación es insesgada para todas las entradas definidas en la sección 3.2.*

*Demostración.* De (4.3.3), el sesgo del estimador está dado por  $(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \{E\}$ . Como  $e(t)$  es ruido blanco de media 0, el estimador es insesgado siempre y cuando se cumpla que  $\Phi^T \Phi$  es invertible.

La matriz  $\Phi^T \Phi$  está dada por

$$\Phi^T \Phi = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t) z_i(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t) z_i(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t-1)^2 \end{bmatrix}. \quad (5.2.3)$$

Luego, su determinante está dado por

$$\text{Det}(\Phi^T \Phi) = \sum_{t_1=1}^{N-1} \sum_{t_2=1}^{N-1} (z_i(t_1)^2 z_i(t_2 - 1)^2 - z_i(t_1) z_i(t_1 - 1) z_i(t_2) z_i(t_2 - 1)). \quad (5.2.4)$$

Para los casos en que la entrada es una señal de ruido blanco, siguiendo el mismo análisis realizado en el teorema 5.3.4, debido a la persistencia de excitación de  $\Phi^T$ , se puede concluir que  $(\Phi^T \Phi)$  es una matriz no singular.

Por otro lado, si  $u_i(t)$  es una señal constante, se puede observar a partir de las expresiones del lema 2.6.1 que

$$\text{Det}(\Phi^T \Phi) = C^4 \frac{N(N-1)^2(N-2)}{12}, \quad (5.2.5)$$

por lo que este será invertible para  $N > 2$ .

□

**Observación 5.2.1.** *Las señales constantes son solamente persistentemente excitantes de orden 1. En este caso, la identificación con este tipo de señales puede ser realizada debido al impacto de las condiciones iniciales  $u_i(-1)$  y  $u_i(0)$  en la matriz  $\Phi$ . Se puede verificar que si se considera  $u_i(-1) = u_i(0) = C$ , siendo  $C$  el valor de  $u_i(t)$ ,  $t > 0$ , la matriz  $\Phi^T \Phi$  será singular y el sistema no-identificable.*

#### Varianza del estimador.

**Teorema 5.2.2.** *Se considera el sistema dado por (5.2). Si se utiliza el método PEM para realizar la estimación del vector de parámetros  $\theta_i$ , la estimación es consistente para todas las entradas descritas en la sección 3.2, y la razón de decaimiento de la varianza de estimación es de  $N^{-1}$  para cada uno de estos casos.*

*Demostración.* Como  $e(t)$  es ruido blanco, la matriz de covarianza del estimador está dada por la estructura expresada en (4.3.5). Considerando los regresores dados por (5.2.2), esta puede ser descrita de la forma (4.4.36) con  $\Delta$  de (4.3.7) y

$$U = \begin{bmatrix} u_i(1) & u_i(0) \\ u_i(2) & u_i(1) \\ \vdots & \vdots \\ u_i(N-1) & u_i(N-2) \end{bmatrix}. \quad (5.2.6)$$

Nuevamente, la matriz de covarianza posee la estructura de  $X_N$  de la suposición 3.7.1, y el vector  $U$ , para entradas Gaussianas, corresponde al vector  $U_n$  simulado en la figura 3.6a, por lo que es razonable suponer que este vector cumple la suposición 3.7.1 para las entradas Gaussianas de la sección 3.2.

Considerando  $z_i(t) = \sum_{k=1}^t u_i(k)$ , se tiene

$$\text{Cov}(\hat{\theta} | \mathbf{Z}_{i,N}) = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)z_i(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)z_i(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t-1)^2 \end{bmatrix}^{-1}. \quad (5.2.7)$$

A continuación se evalúa la razón de decaimiento de la varianza de estimación de los parámetros para las entradas descritas en la sección 3.2.

- En primer lugar, se considera la entrada  $u_i(t) = C$ , donde  $C \in \mathbb{R}$  es un valor constante.

En este caso, a partir del lema (2.6.1), la matriz de covarianza está dada por

$$\begin{aligned}
\text{Cov}(\hat{\theta}|\mathbf{Z}_{i,N}) &= \sigma_e^2 \left[ \begin{array}{cc} \sum_{t=1}^{N-1} C^2 t^2 & \sum_{t=1}^{N-1} C^2 t(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} C^2 t(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} C^2 (t-1)^2 \end{array} \right]^{-1} \\
&= \sigma_e^2 \left[ \begin{array}{cc} \frac{C^2 N(N-1)(2N-1)}{6} & \frac{C^2 N(N-1)(N-2)}{3} \\ \frac{C^2 N(N-1)(N-2)}{3} & \frac{C^2 (N-1)(N-2)(2N-3)}{6} \end{array} \right]^{-1} \\
&= \frac{\sigma_e^2}{C^4} \left[ \begin{array}{cc} \frac{2(2N-3)}{N(N-1)} & -\frac{4}{N-1} \\ -\frac{4}{N-1} & \frac{2(2N-1)}{(N-1)(N-2)} \end{array} \right]
\end{aligned} \tag{5.2.8}$$

Se observa que, a diferencia del caso de estimación de un parámetro, la razón de decaimiento de ambos parámetros para entradas constantes es de  $N^{-1}$ .

- Se considera como entrada  $u_i(t)$  una señal de ruido blanco Gaussiano con media 0 y varianza  $\sigma_{u_i}^2$ .

Al igual que en los casos anteriores en los que se utiliza esta entrada, se trabajará con el valor esperado de la matriz de covarianza condicionada, correspondiente a (3.3.11). En este caso, esto está dado por

$$\mathcal{E} \left\{ \text{Cov}(\hat{\theta}|\mathbf{Z}_{i,N}) \right\} = \sigma_e^2 \mathcal{E} \left\{ \left[ \begin{array}{cc} \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)z_i(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)z_i(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t-1)^2 \end{array} \right]^{-1} \right\}. \tag{5.2.9}$$

Se considera que el vector  $U$  cumple la suposición 3.7.1. Luego, a partir del teorema 3.7.1, la razón de decaimiento de los elementos diagonales de  $\mathcal{E} \left\{ \text{Cov}(\hat{\theta}|\mathbf{Z}_{i,N}) \right\}$ , y por lo tanto de la varianza de los parámetros, es la misma que la razón de decaimiento de los elementos diagonales  $\sigma_e^2 \mathcal{E} \left\{ U^T \Delta^T \Delta U \right\}^{-1}$ .

A partir del teorema 2.6.1, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} \left\{ U^T \Delta^T \Delta U \right\}^{-1} &= \mathcal{E} \left\{ \left[ \begin{array}{cc} \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)z_i(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)z_i(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t-1)^2 \end{array} \right]^{-1} \right\} \\
&= \left[ \begin{array}{cc} \sigma_{u_i}^2 \sum_{t=1}^{N-1} t & \sigma_{u_i}^2 \sum_{t=1}^{N-1} (t-1) \\ \sigma_{u_i}^2 \sum_{t=1}^{N-1} (t-1) & \sigma_{u_i}^2 \sum_{t=1}^{N-1} (t-1) \end{array} \right]^{-1} \\
&= \left[ \begin{array}{cc} \frac{\sigma_{u_i}^2 N(N-1)}{2} & \frac{\sigma_{u_i}^2 (N-1)(N-2)}{2} \\ \frac{\sigma_{u_i}^2 (N-1)(N-2)}{2} & \frac{\sigma_{u_i}^2 (N-1)(N-2)}{2} \end{array} \right]^{-1} \\
&= \frac{1}{\sigma_{u_i}^2} \left[ \begin{array}{cc} \frac{1}{N-1} & -\frac{1}{N-1} \\ -\frac{1}{N-1} & \frac{1}{(N-1)(N-2)} \end{array} \right].
\end{aligned} \tag{5.2.10}$$

Al igual que para entradas constantes, la razón de decaimiento de la varianza de la estimación de cada uno de los parámetros para entradas Gaussianas de media cero es de  $N^{-1}$ .

- Se considera como entrada una señal de ruido blanco Gaussiano con media  $C$  y varianza  $\sigma_{u_i}^2$ .

Análogamente al caso con media cero, se debe trabajar con la esperanza de la varianza condicionada (5.2.9). Se considera nuevamente que el vector  $U$  satisface la suposición 3.7.1. Luego, a partir del teorema 3.7.1, la razón de decaimiento de la varianza de  $\hat{\theta}$  es equivalente a la razón de decaimiento de los elementos diagonales de  $\sigma_e^2 \mathcal{E} \{U^T \Delta^T \Delta U\}^{-1}$ .

A partir del teorema 2.6.2, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} \{U^T \Delta^T \Delta U\}^{-1} &= \mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)z_i(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)z_i(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t-1)^2 \end{bmatrix}^{-1} \right\} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} (t\sigma_{u_i}^2 + t^2C^2) & \sum_{t=1}^{N-1} ((t-1)\sigma_{u_i}^2 + t(t-1)C^2) \\ \sum_{t=1}^{N-1} ((t-1)\sigma_{u_i}^2 + t(t-1)C^2) & \sum_{t=1}^{N-1} ((t-1)\sigma_{u_i}^2 + (t-1)^2C^2) \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{N(N-1)((2N-1)C^2 + 3\sigma_{u_i}^2)}{6} & \frac{(N-1)(N-2)(2NC^2 + 3\sigma_{u_i}^2)}{6} \\ \frac{(N-1)(N-2)(2NC^2 + 3\sigma_{u_i}^2)}{6} & \frac{(N-1)(N-2)((2N-3)C^2 + 3\sigma_{u_i}^2)}{6} \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.2.11) \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2((2N-3)C^2 + 3\sigma_{u_i}^2)}{(N-1)(C^2(C^2 + 4\sigma_{u_i}^2)N + 6\sigma_{u_i}^2)} & -\frac{2(2NC^2 + 3\sigma_{u_i}^2)}{(N-1)(C^2(C^2 + 4\sigma_{u_i}^2)N + 6\sigma_{u_i}^2)} \\ -\frac{2(2NC^2 + 3\sigma_{u_i}^2)}{(N-1)(C^2(C^2 + 4\sigma_{u_i}^2)N + 6\sigma_{u_i}^2)} & \frac{2N((2N-3)C^2 + 3\sigma_{u_i}^2)}{(N-1)(N-2)(C^2(C^2 + 4\sigma_{u_i}^2)N + 6\sigma_{u_i}^2)} \end{bmatrix}
\end{aligned}$$

Al igual que para las entradas anteriores, se obtiene que la varianza de los parámetros decae con una razón de  $N^{-1}$ .

□

**Observación 5.2.2.** *Los resultados del teorema 5.2.2 muestran que para la identificación de un sistema de forma (5.2), se pierde el aumento en rapidez de la razón de decaimiento resultante cuando se realiza la identificación incluyendo las dinámicas integrales del sistema, observada en la identificación de la ganancia de (4.3) a partir del teorema 4.3.2.*

### 5.2.1. Extensión a sistemas con polo estable distinto de 0.

A continuación se presenta un análisis que muestra que los resultados obtenidos en los teoremas 5.2.1 y 5.2.2 son fácilmente extensibles al caso en que el retardo del sistema analizado sea reemplazado por un polo estable. Se considera un sistema similar a (5.2.1), pero cuyo polo estable tiene un valor distinto a 0, de modo que

$$y(t) = \frac{b_{i,1}^0 q + b_{i,2}^0}{(q - \rho)(q - 1)} u_i(t) + e(t), \quad (5.2.12)$$

donde  $\rho$ ,  $|\rho| < 1$ ,  $\rho \neq 0$  es un parámetro conocido del sistema.

Considerando  $u_i^*(t) = \frac{q}{q-\rho} u_i(t)$ , donde  $u_i(t)$  es ruido blanco de media cero, el sistema se puede escribir de la forma (2.6.34), donde  $\varphi(t)^T = [\sum_{k=1}^{t-1} u_i^*(k) \quad \sum_{k=1}^{t-2} u_i^*(k)]$  y  $\theta_i = [b_{i,1}^0 \quad b_{i,2}^0]^T$ .

Luego, las expresiones para el sesgo y varianza de la estimación son idénticas a las de (5.2.1), pero con  $u_i^*(t)$  como entrada en lugar del ruido blanco  $u_i(t)$ .

**Conjetura 2.** *La estimación de  $\theta_i$  en (5.2.12) presenta los mismos resultados respecto a la presencia de sesgo y la razón de decaimiento de la varianza de estimación que al estimar el vector de parámetros de (5.2).*

Respecto al sesgo, considerando que  $\mathcal{E}\{e(t)\} = 0$  y que la señal  $u_i^*(t)$  es persistentemente excitante, se puede obtener de un desarrollo análogo al del teorema 5.2.1 que la estimación es no sesgada.

Por otro lado, para caracterizar la varianza del estimador, se plantea en primer lugar el siguiente lema.

**Lema 5.2.1.** *Considerando el sistema descrito en (5.2.12), se cumple*

$$\mathcal{E}\{z_i^*(t)^2\} \sim \Phi_{u_i}(0)t \quad (5.2.13)$$

$$\mathcal{E}\{z_i^*(t)z_i^*(t-1)\} \sim \Phi_{u_i}(0)(t-1) \quad (5.2.14)$$

$$\mathcal{E}\{z_i^*(t-1)^2\} \sim \Phi_{u_i}(0)(t-1) \quad (5.2.15)$$

*Demostración.* El sistema (5.2.12) puede ser escrito como un sistema realimentado por ruido blanco en espacio de estado tal que

$$x(t+1) = \rho x(t) + \rho u_i(t) \quad (5.2.16)$$

$$u_i^*(t) = x(t) + u_i(t), \quad (5.2.17)$$

con  $x(0) = 0$ .

Luego, como  $|\rho| < 1$ , el sistema es estable en sentido cuadrático medio y  $u_i^*(t)$  es un proceso asintóticamente estacionario en sentido amplio. Entonces, según la sección 4.4.2 de [50] su función de covarianza está dada por

$$R_{u_i^*}(\tau) = \frac{\rho^{|\tau|}}{1 - \rho^2}. \quad (5.2.18)$$

Luego, se cumple

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \sum_{\tau=-(t-1)}^{t-1} |\tau| R_u(\tau) \right| &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left| \sum_{\tau=-(t-1)}^{t-1} |\tau| \frac{\rho^{|\tau|}}{1 - \rho^2} \right| \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} 2 \left| \sum_{\tau=0}^{t-1} \tau \frac{\rho^\tau}{1 - \rho^2} \right| \\ &\leq \lim_{t \rightarrow \infty} 2 \sum_{\tau=0}^{t-1} \tau \frac{|\rho|^\tau}{1 - \rho^2}, \end{aligned} \quad (5.2.19)$$

debido a que  $1 - \rho^2 > 0$ .

Luego,

$$2 \sum_{\tau=0}^{t-1} \tau \frac{|\rho|^\tau}{1-\rho^2} = \frac{2}{1-\rho^2} \left( \frac{|\rho| - |\rho|^t (|\rho| + t - t|\rho|)}{(|\rho| - 1)^2} \right), \quad (5.2.20)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} 2 \sum_{\tau=0}^{t-1} \tau \frac{|\rho|^\tau}{1-\rho^2} = \frac{2|\rho|}{(1-\rho^2)(|\rho| - 1)^2}.$$

Por lo tanto, se cumple el criterio (2.6.8), y de los corolarios 2.6.1 y 2.6.2 se obtienen las expresiones de (5.2.13).  $\square$

Siguiendo un desarrollo análogo al teorema (5.2.2), se puede notar que la expresión de la varianza del estimador está dada por

$$\text{Cov}(\hat{\theta} | \mathbf{Z}_{i,N}) = ((U^*)^T \Delta^T \Delta U^*)^{-1} = \left( \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} z_i^*(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_i^*(t) z_i^*(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_i^*(t) z_i^*(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_i^*(t-1)^2 \end{bmatrix} \right)^{-1}, \quad (5.2.21)$$

con

$$\Delta = \begin{bmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ 1 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ 1 & 1 & \cdots & 1 \end{bmatrix}, \quad U^* = \begin{bmatrix} u_i^*(1) & u_i^*(0) \\ u_i^*(2) & u_i^*(1) \\ \vdots & \vdots \\ u_i^*(N) & u_i^*(N-1) \end{bmatrix} \quad (5.2.22)$$

y  $z_i^*(t) = \sum_{k=1}^t u_i^*(k)$ . Entonces, considerando que el vector  $U^*$  cumple la suposición 3.7.1, lo cual es respaldado por los resultados de la figura 3.6a, la varianza posee el mismo orden de decaimiento que los elementos diagonales de  $\mathcal{E} \{ (U^*)^T \Delta^T \Delta U^* \}^{-1}$ .

Luego, a partir del lema 5.2.1, se observa que, a medida que  $t$  crece,  $z_i^*(t)$  tiene un comportamiento casi idéntico a  $z_i(t)$ , pero en el cual cada elemento es escalado por  $\frac{\Phi_{u_i}\{0\}}{\sigma_{u_i}^2}$ . La intuición indica que la evolución de  $\mathcal{E} \{ (U^*)^T \Delta^T \Delta U^* \}^{-1}$  será similar a la de  $\mathcal{E} \{ U^T \Delta^T \Delta U \}^{-1}$  dada por (5.2.10) al aumentar el número de muestras  $N$ , y que se esperaría por lo tanto obtener los mismos órdenes de convergencia.

**Observación 5.2.3.** La relación entre  $\mathcal{E} \{ (U^*)^T \Delta^T \Delta U^* \}^{-1}$  y  $\mathcal{E} \{ U^T \Delta^T \Delta U \}^{-1}$  de (5.2.10) puede ser descrita según

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ (U^*)^T \Delta^T \Delta U^* \}^{-1} &= \frac{\Phi_{u_i}\{0\}}{\sigma_{u_i}^2} \left[ \begin{array}{cc} \sum_{t=1}^{N-1} \sigma_{u_i}^2 t & \sum_{t=1}^{N-1} \sigma_{u_i}^2 (t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} \sigma_{u_i}^2 (t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} \sigma_{u_i}^2 (t-1) \end{array} \right]^{-1} + M \\ &= \frac{\Phi_{u_i}\{0\}}{\sigma_{u_i}^2} \mathcal{E} \{ U^T \Delta^T \Delta U \}^{-1} + M, \end{aligned} \quad (5.2.23)$$

con

$$M = \left[ \begin{array}{cc} \sum_{t=1}^{N-1} (\mathcal{E} \{ z_i^*(t)^2 \} - \Phi_{u_i}\{0\}t) & \sum_{t=1}^{N-1} (\mathcal{E} \{ z_i^*(t) z_i^*(t-1) \} - \Phi_{u_i}\{0\}(t-1)) \\ \sum_{t=1}^{N-1} (\mathcal{E} \{ z_i^*(t) z_i^*(t-1) \} - \Phi_{u_i}\{0\}(t-1)) & \sum_{t=1}^{N-1} (\mathcal{E} \{ z_i^*(t-1)^2 \} - \Phi_{u_i}\{0\}(t-1)) \end{array} \right]^{-1}. \quad (5.2.24)$$

Luego,  $\mathcal{E} \{ (U^*)^T \Delta^T \Delta U^* \}^{-1}$  poseerá la misma razón de decaimiento que  $\mathcal{E} \{ U^T \Delta^T \Delta U \}^{-1}$  si  $M$  es acotada. Si bien el desarrollo realizado prueba que los elementos dentro de las

sumatorias asociadas a  $M$  convergen a cero al aumentar las muestras, para formalizar este resultado hace falta probar que las sumatorias son convergentes.

## 5.2.2. Impacto en la varianza de la distribución de los parámetros

El teorema 5.2.2 demostró que al aumentar el número de parámetros a estimar en el numerador a 2, la razón de decaimiento de la varianza de estimación en sistemas con integración disminuye de  $N^{-2}$  o  $N^{-3}$  según el caso, a  $N^{-1}$  para las entradas analizadas. Intuitivamente, este cambio en la razón de convergencia se puede atribuir a los elementos diagonales de la matriz de covarianza  $\sigma_e^2(\Phi^T\Phi)^{-1}$ , los cuales provocan que el determinante de la matriz baje de grado polinómico. Esto es particularmente fácil de visualizar en el caso en el que el sistema es alimentado con ruido blanco, (5.2.10) indica que la correlación entre las columnas de regresores de  $\Phi$  provoca que la razón de decaimiento decaiga en comparación a otros casos estructuralmente similares como el esquema 3 de la estimación de ganancia, donde el desarrollo para la misma naturaleza de entradas está dado por (4.4.39).

Entonces, es de interés reescribir la distribución de los parámetros de modo que los regresores sean no correlacionados entre sí.

De esta forma, se reescribe el sistema como

$$y(t) = \frac{b_{i,1}^{*0}(q-1) + b_{i,2}^{*0}}{q(q-1)}u_i(t) + e(t), \quad (5.2.25)$$

cuya representación en el estimador de mínimos cuadrados está dada por (2.4.5), con

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ u_i(1) & 0 \\ u_i(2) & u_i(1) \\ \vdots & \\ u_i(N-1) & \sum_{k=1}^{N-2} u_i(k) \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, E = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}. \quad (5.2.26)$$

**Observación 5.2.4.** El análisis del sesgo en este caso se puede obtener fácilmente a partir del teorema 5.2.1, demostrando que la estimación es insesgada para las entradas de interés.

**Teorema 5.2.3.** Se considera el sistema cuya configuración está dada por (5.2.25). Si se utiliza el método PEM para realizar la estimación del vector de parámetros  $\theta_{*i} = [b_{i,1}^{*0} \ b_{i,2}^{*0}]$ , entonces la razón de decaimiento de la varianza de la estimación de  $b_{i,1}^{*0}$  es de  $N^{-1}$  para todas las entradas descritas en la sección 3.2, pero la varianza de estimación de  $b_{i,2}^{*0}$  es de  $N^{-2}$  cuando el sistema es alimentado con ruido blanco de media cero, y de  $N^{-3}$  cuando el sistema es alimentado con una señal constante o ruido blanco de media distinta de cero.

*Demostración.* La matriz de covarianza de la estimación está dada por

$$\text{Cov}(\hat{\theta}|\mathbf{Z}_{i,N}) = \sigma_e^2 \mathcal{E} \{U^T \Delta^T \Delta U\}^{-1} = \sigma_e^2 \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} u_i(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} u_i(t)z_i(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} u_i(t)z_i(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t-1)^2 \end{bmatrix}^{-1}, \quad (5.2.27)$$

con  $\Delta$  de (4.3.7) y

$$U = \begin{bmatrix} \tilde{u}_i(1) & 0 \\ \tilde{u}_i(2) & u_i(1) \\ \vdots & \vdots \\ \tilde{u}_i(N-1) & u_i(N-2) \end{bmatrix}, \quad (5.2.28)$$

donde  $\tilde{u}_i(t)$  es la señal  $u_i(t)$  filtrada por el filtro derivativo descrito en (3.4.6).

Se observa que, nuevamente la matriz de covarianza posee la estructura de (3.7.1), donde el vector  $U$ , para entradas Gaussianas, corresponde al vector  $U_n$  simulado en la figura 3.6b, por lo que es razonable suponer que este vector cumple la suposición 3.7.1 para las entradas Gaussianas de la sección 3.2.

Similarmente a como se ha hecho en los casos anteriores, se evalúa la varianza de los parámetros para las entradas de la sección 3.2.

- Se considera la entrada  $u_i(t) = C$ , donde  $C \in \mathbb{R}$  es un valor constante, luego la matriz de covarianza está dada por

$$\begin{aligned} \text{Cov}(\hat{\theta}) &= \sigma_e^2 \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} C^2 & \sum_{t=1}^{N-1} C^2(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} C^2(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} C^2(t-1)^2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \sigma_e^2 \left( C^2 \begin{bmatrix} (N-1) & \frac{(N-1)(N-2)}{2} \\ \frac{(N-1)(N-2)}{2} & \frac{(N-1)(N-2)(2N-3)}{6} \end{bmatrix} \right)^{-1} \\ &= \frac{2\sigma_e^2}{C^2} \begin{bmatrix} \frac{2N-3}{(N-1)(3N-4)} & -\frac{1}{(N-1)(3N-4)} \\ -\frac{1}{(N-1)(3N-4)} & \frac{2}{(N-1)(N-2)(3N-4)} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.2.29)$$

lo que indica que la varianza del parámetro  $b_{i,1}^{*0}$  decrece con un orden de  $N^{-1}$  y la varianza del parámetro  $b_{i,2}^{*0}$  decrece con un orden de  $N^{-3}$ .

- Se considera como entrada  $u_i(t)$  una señal de ruido blanco Gaussiano con media 0 y varianza  $\sigma_{u_i}^2$ .

Siguiendo la misma lógica que para la identificación de los parámetros de (5.2.1), y considerando que  $U$  cumple el supuesto 3.7.1, se tiene

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{U^T \Delta^T \Delta U\}^{-1} &= \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} \mathcal{E} \{u_i(t)^2\} & \sum_{t=1}^{N-1} \mathcal{E} \{u_i(t)z_i(t-1)\} \\ \sum_{t=1}^{N-1} \mathcal{E} \{u_i(t)z_i(t-1)\} & \sum_{t=1}^{N-1} \mathcal{E} \{z_i(t-1)^2\} \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} (N-1)\sigma_{u_i}^2 & 0 \\ 0 & \frac{(N-1)(N-2)}{2}\sigma_{u_i}^2 \end{bmatrix}^{-1} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{1}{(N-1)\sigma_{u_i}^2} & 0 \\ 0 & \frac{2}{(N-1)(N-2)\sigma_{u_i}^2} \end{bmatrix}, \end{aligned} \quad (5.2.30)$$

de forma que la varianza del parámetro  $b_{i,1}^{*0}$  decrece con un orden de  $N^{-1}$  y la varianza del parámetro  $b_{i,2}^{*0}$  con un orden de  $N^{-2}$ .

- Se considera como entrada  $u_i(t)$  una señal de ruido blanco Gaussiano con media  $C$  y varianza  $\sigma_{u_i}^2$ . Siguiendo la misma lógica que para la identificación de los parámetros del punto anterior, y considerando que  $U$  cumple el supuesto 3.7.1, se tiene

$$\begin{aligned}
\mathcal{E} \{U^T \Delta^T \Delta U\}^{-1} &= \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} \mathcal{E} \{u_i(t)^2\} & \sum_{t=1}^{N-1} \mathcal{E} \{u_i(t)z_I(t-1)\} \\ \sum_{t=1}^{N-1} \mathcal{E} \{u_i(t)z_i(t-1)\} & \sum_{t=1}^{N-1} \mathcal{E} \{z_i(t-1)^2\} \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} (\sigma_{u_i}^2 + C^2) & \sum_{t=1}^{N-1} (t-1)C^2 \\ \sum_{t=1}^{N-1} (t-1)C^2 & \sum_{t=1}^{N-1} ((t-1)\sigma_{u_i}^2 + (t-1)^2C^2) \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} (N-1)(\sigma_{u_i}^2 + C^2) & \frac{(N-1)(N-2)}{2}C^2 \\ \frac{(N-1)(N-2)}{2}C^2 & \frac{(N-1)(N-2)}{2}(\sigma_{u_i}^2 + \frac{2N-3}{3}C^2) \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{2C^2(2N-3)+6\sigma_{u_i}^2}{(N-1)(C^2(C^2+4\sigma_{u_i}^2)N+6\sigma_{u_i}^4)} & -\frac{6C^2}{(N-1)(C^2(C^2+4\sigma_{u_i}^2)N+6\sigma_{u_i}^4)} \\ -\frac{6C^2}{(N-1)(C^2(C^2+4\sigma_{u_i}^2)N+6\sigma_{u_i}^4)} & \frac{12(C^2+\sigma_{u_i}^2)}{(N-1)(N-2)(C^2(C^2+4\sigma_{u_i}^2)N+6\sigma_{u_i}^4)} \end{bmatrix}, \tag{5.2.31}
\end{aligned}$$

lo que indica que, tal como en el caso de entrada constante, la varianza del parámetro  $b_{i,1}^{*0}$  decrece con un orden de  $N^{-1}$  y la varianza del parámetro  $b_{i,2}^{*0}$  decrece con un orden de  $N^{-3}$ .

□

Estos resultados muestran que la representación de los parámetros del sistema influye en la razón de convergencia de la varianza de la estimación de estos. En particular, es posible optimizar la varianza de uno de los dos parámetros para este caso si se distribuyen los parámetros de forma tal que los regresores no estén correlacionados entre si. Esto es particularmente evidente al observar que (5.2.25) se puede separar en una ganancia (dada por  $b_{i,1}^{*0}$ ) sumado a un integrador simple cuya ganancia esté dada por  $b_{1,2}^{*0}$ . De esta forma, es razonable ver que la varianza de la estimación de  $b_{i,1}^{*0}$  decae con la razón de decaimiento propia de los sistemas estables ( $N^{-1}$ ), mientras que la varianza de estimación de  $b_{i,1}^{*0}$  decae con la misma razón que la de la ganancia de un integrador simple, desarrollada en la sección 4.3.

El aumento en la rapidez de decaimiento de la varianza de estimación de uno de los parámetros puede implicar una mejora en la identificación al utilizar la integración frente a estrategias que estabilicen el sistema, sin embargo, la varianza del vector de parámetros sigue convergiendo con una razón de  $N^{-1}$ .

### 5.3. Estudio de esquemas de dos agentes

Habiendo observado el comportamiento de la estimación de los parámetros  $b_{i,1}^0$  y  $b_{1,2}^0$  para un sistema de segundo orden, se estudiarán a continuación los esquemas colaborativos para este caso.

Tomando en cuenta que la integración no permite una mayor convergencia en la varianza

del vector de parámetros para este caso y que el desarrollo es análogo al caso de estimación de ganancia, la identificación se analizará con menos detalle que en la sección anterior.

### 5.3.1. Esquema 1: Agentes sin comunicación

Se realiza la identificación bajo el esquema 1, descrito en la sección 3.4.1, en el cual no existe comunicación entre los agentes.

Como para la identificación del agente  $i$ , las dinámicas del agente  $j$  son desconocidas, con  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $i \neq j$ , el sistema (5.1.1) puede ser reescrito como

$$y(t) = \frac{b_{i,1}^0 q + b_{i,2}^0}{q(q-1)} u_i(t) + \tilde{e}(t), \quad (5.3.1)$$

con  $\tilde{e}(t) = \frac{b_{j,1}^0 q + b_{j,2}^0}{q(q-1)} u_j(t) + e(t)$ .

De esta manera, el sistema puede ser descrito mediante (2.4.2), y el estimador de mínimos cuadrados está dado por (2.4.5), con  $\Phi$  e  $Y$  de (5.2.26),  $\theta_i = [b_{i,1}^0 \quad b_{i,2}^0]^T$  y  $E = \Phi_j \theta_j + \bar{E}$ , donde

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ u_j(1) & 0 \\ u_j(1) + u_j(2) & u_j(1) \\ \vdots & \vdots \\ \sum_{k=1}^{N-1} u_j(k) & \sum_{k=1}^{N-2} u_j(k) \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}, \quad \theta_j = \begin{bmatrix} b_{j,1} \\ b_{j,2} \end{bmatrix}. \quad (5.3.2)$$

Se evalúa el sesgo y la varianza del estimador.

#### Sesgo del estimador

**Teorema 5.3.1.** *Se considera el sistema (5.1.1) bajo el esquema 1 de la sección 3.4. Si se utiliza el método PEM para la estimación del vector de parámetros  $\theta_i$ , entonces la estimación es insesgada si las entradas a los agentes son señales de ruido blanco de media cero, y sesgada si la entrada es una señal constante, o una señal de ruido blanco con media distinta a cero.*

*Demostración.* Realizando el mismo análisis del teorema 5.2.1 se puede concluir que  $\Phi^T \Phi$  es invertible.

Luego, análogamente al desarrollo del teorema 4.4.1, se obtiene que el sesgo del estimador está dado por

$$\text{Bias}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) = (\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathcal{E} \{ \Phi_j \} \theta_j, \quad (5.3.3)$$

lo cual corresponde a

$$\text{Bias}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) = (\Phi^T \Phi)^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t) (b_{j,1}^0 \mathcal{E} \{ z_j(t) \} + b_{j,2}^0 \mathcal{E} \{ z_j(t-1) \}) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t-1) (b_{j,1}^0 \mathcal{E} \{ z_j(t) \} + b_{j,2}^0 \mathcal{E} \{ z_j(t-1) \}) \end{bmatrix}, \quad (5.3.4)$$

con  $z_j(t) = \sum_{k=1}^t u_j(k)$ .

A continuación se examina el sesgo para las entradas de interés.

- Si se consideran dos entradas constantes  $u_i = C_i \neq 0$  y  $u_j = C_j \neq 0$ , las matrices  $\Phi$  y  $\Phi_j$  están dadas por

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_i & 0 \\ 2C_i & C_i \\ \vdots & \vdots \\ (N-1)C_i & (N-2)C_i \end{bmatrix}, \quad \Phi_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_j & 0 \\ 2C_j & C_j \\ \vdots & \vdots \\ (N-1)C_j & (N-2)C_j \end{bmatrix} \quad (5.3.5)$$

Se observa que  $\mathcal{E}\{\Phi_j\} = \Phi_j = \frac{C_j}{C_i}\Phi$ , por lo que

$$\text{Bias}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) = \frac{C_j}{C_i}\theta_j, \quad (5.3.6)$$

demostrando que el estimador es sesgado.

- Si se consideran  $u_i$  y  $u_j$  dos señales de ruido blanco Gaussiano de media 0 y varianzas  $\sigma_{u_i}^2$  y  $\sigma_{u_j}^2$  respectivamente, se cumple  $\mathcal{E}\{\Phi_j\} = 0$ , por lo que el estimador será insesgado.
- Finalmente, si se consideran  $u_i$  y  $u_j$  señales de ruido blanco con medias  $C_i$  y  $C_j$  respectivamente y varianzas  $\sigma_{u_i}^2$  y  $\sigma_{u_j}^2$  respectivamente, se tiene  $\mathcal{E}\{z_j(t)\} = tC_j$ .

Luego, el sesgo del estimador está dado por

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\hat{\theta}_i) &= \theta_j (\Phi^T \Phi)^{-1} \begin{bmatrix} C_j \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t) (b_{j,1}^0 t + b_{j,2}^0 (t-1)) \\ C_j \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t-1) (b_{j,1}^0 t + b_{j,2}^0 (t-1)) \end{bmatrix} \\ &= \frac{C_j}{\text{Det}(\Phi^T \Phi)} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)z_i(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t)z_i(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t-1)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t) (b_{j,1}^0 t + b_{j,2}^0 (t-1)) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_i(t-1) (b_{j,1}^0 t + b_{j,2}^0 (t-1)) \end{bmatrix} \\ &= \frac{C_j}{\text{Det}(\Phi^T \Phi)} \begin{bmatrix} \sum_{t_1=1}^{N-1} \sum_{t_2=1}^{N-1} z_i(t_1)(b_{j,1}^0 t_2 + b_{j,2}^0 (t_2-1))(z_i(t_1)z_i(t_2) + z(t_1-1)z_i(t_2-1)) \\ \sum_{t_1=1}^{N-1} \sum_{t_2=1}^{N-1} z_i(t_1-1)(b_{j,1}^0 t_2 + b_{j,2}^0 (t_2-1))(z_i(t_1)z_i(t_2) + z_i(t_1-1)z_i(t_2-1)) \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.3.7)$$

Luego, el estimador es sesgado y el sesgo corresponde a (5.3.7), con  $\text{Det}(\Phi^T \Phi)$  de (5.2.4).

□

**Observación 5.3.1.** *Los resultados para el sesgo son los mismos que para la estimación de ganancia bajo el esquema 1 expresados en el teorema 4.4.1, se observa que la estimación será insesgada solamente si la entrada es una señal de ruido blanco con media cero.*

### Varianza del estimador

Debido a que el estimador será insesgado solamente en el caso en que las entradas de los agentes sean secuencias de ruido blanco de media cero, el análisis de la varianza se centrará en esas señales de entrada.

**Conjetura 3.** Para el sistema descrito en (5.1.1), bajo el esquema 1 de la sección 3.4, si las entradas a ambos sistemas corresponden a señales de ruido blanco de media cero, entonces, al utilizar el método PEM para realizar la estimación del vector de parámetros  $\theta_i$ , esta será insesgada, pero no consistente.

Para comprobar la validez de esta conjetura se realiza un desarrollo similar al efectuado para validar la conjetura 1.

Análogamente a las expresiones obtenidas en (4.4.13), la varianza de estimación bajo este esquema está dada por

$$(\Phi^T \Phi)^{-1} \Phi^T \mathcal{E} \{ (\Phi_j \theta_j + E) ((\Phi_j \theta_j + E))^T \} \Phi (\Phi^T \Phi)^{-1}. \quad (5.3.8)$$

Luego, considerando los regresores del sistema, esta puede ser reescrita como

$$\begin{aligned} \text{Var}(\theta_i) = & ((U_i^+)^T \Delta^T \Delta U_i^+)^{-1} (U_i^+)^T \Delta^T \mathcal{E} \{ \Delta U_j^+ \theta_j \theta_j^T (U_j^+)^T \Delta^T \} \Delta U_i^+ ((U_i^+)^T \Delta^T \Delta U_i^+)^{-1} \\ & + ((U_i^+)^T \Delta^T \Delta U_i^+)^{-1} (U_i^+)^T \Delta^T \mathcal{E} \{ \Delta U_j^+ \theta_j E^T \} \Delta U_i^+ ((U_i^+)^T \Delta^T \Delta U_i^+)^{-1} \\ & + ((U_i^+)^T \Delta^T \Delta U_i^+)^{-1} \mathcal{E} \{ E \theta_j^T (U_j^+)^T \Delta^T \} \Delta U_i^+ ((U_i^+)^T \Delta^T \Delta U_i^+)^{-1} \\ & + ((U_i^+)^T \Delta^T \Delta U_i^+)^{-1} \mathcal{E} \{ E E^T \} \Delta U_i^+ ((U_i^+)^T \Delta^T \Delta U_i^+)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.3.9)$$

con  $\Delta$  de (4.3.7) y

$$\begin{aligned} U_i = \begin{bmatrix} u_i(1) & 0 \\ u_i(2) & u_i(1) \\ \vdots & \vdots \\ u_i(N-1) & u_i(N-2) \end{bmatrix}, \quad U_j = \begin{bmatrix} u_j(1) & 0 \\ u_j(2) & u_j(1) \\ \vdots & \vdots \\ u_j(N-1) & u_j(N-2) \end{bmatrix}, \quad \bar{E} = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix} \\ \Delta^+ = [ 0 \mid \Delta ], \quad U_i^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ U_i \end{bmatrix}, \quad U_j^+ = \begin{bmatrix} 0 \\ U_j \end{bmatrix}. \end{aligned} \quad (5.3.10)$$

Como  $u_j(t)$  y  $e(t)$  son procesos independientes, se tiene  $\mathcal{E} \{ U_j^+ E^T \} = \mathcal{E} \{ E (U_j^+)^T \} = 0$ , y la expresión de la varianza se reduce a

$$\begin{aligned} \text{Var}(\theta_i) = & ((U_i^+)^T \Delta^T \Delta U_i^+)^{-1} (U_i^+)^T \Delta^T \mathcal{E} \{ \Delta U_j^+ \theta_j \theta_j^T (U_j^+)^T \Delta^T \} \Delta U_i^+ ((U_i^+)^T \Delta^T \Delta U_i^+)^{-1} \\ & + ((U_i^+)^T \Delta^T \Delta U_i^+)^{-1} (U_i^+)^T \Delta^T \mathcal{E} \{ E E^T \} \Delta U_i^+ ((U_i^+)^T \Delta^T \Delta U_i^+)^{-1} \\ = & (U_i^T \Delta^T \Delta U_i)^{-1} U_i^T \Delta^T \Delta \mathcal{E} \{ U_j \theta_j \theta_j^T U_j^T \} \Delta^T \Delta U_i (U_i^T \Delta^T \Delta U_i)^{-1} + \sigma_e (U_i^T \Delta^T \Delta U_i)^{-1}. \end{aligned} \quad (5.3.11)$$

Como  $\sigma_e (U_i^T \Delta^T \Delta U_i)^{-1}$  corresponde a la expresión de la varianza de un sistema de un agente dada por (5.3.8), su razón de decaimiento ya fue calculada en el teorema 5.2.2. Por lo tanto, similarmente a lo realizado al estimar la ganancia en la sección 4.4.1, solo falta calcular la razón de decaimiento de

$$\begin{aligned} \text{Var}_{u_j} = & (U_i^T \Delta^T \Delta U_i)^{-1} U_i^T \Delta^T \Delta \mathcal{E} \{ U_j \theta_j \theta_j^T U_j^T \} \Delta^T \Delta U_i (U_i^T \Delta^T \Delta U_i)^{-1} \\ = & \sigma_{u_j}^2 (U_i^T \Delta^T \Delta U_i)^{-1} U_i^T \Delta^T \Delta (b_{j,1} I + b_{j,2} I^-) \Delta^T \Delta U_i (U_i^T \Delta^T \Delta U_i)^{-1}, \end{aligned} \quad (5.3.12)$$

con

$$I^- = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}. \quad (5.3.13)$$

Las similitudes con la expresión (4.4.19) indican intuitivamente que la expresión pareciera no converger a 0 al aumentar el número de muestras.

Análogamente al caso de estimación de ganancia del capítulo anterior, se realiza una simulación Monte-Carlo de los elementos diagonales de  $\text{Var}_{u_j}$ , para ilustrar numéricamente la evolución de estos respecto al número de muestras. La figura 5.1 muestra los resultados de  $10^4$  realizaciones de 1 a 100 muestras para  $b_{j,1} = 0,2$ ,  $b_{j,2} = 0,5$ ,  $\sigma_{u_i}^2 = 1$  y  $\sigma_{u_j}^2 = 1$ . Se observa que los elementos de  $\text{Var}_{u_j}$  no decaen infinitamente hacia cero al aumentar el número de muestras, si no que cada uno se estaciona en un valor constante, evidenciando que la estimación de los parámetros no es consistente.

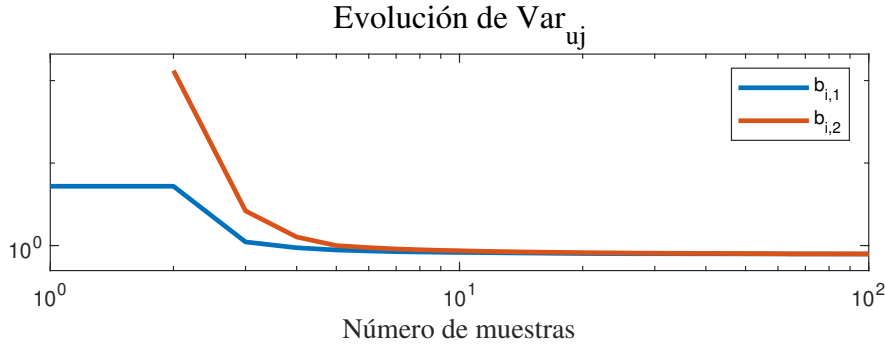


Figura 5.1: Evolución de  $\text{Var}_{u_j}$  al aumentar número de muestras

Del teorema 5.3.1 y la conjetura 3, se extrae que la estimación de (5.1.1) bajo el esquema propuesto no otorga resultados satisfactorios. Si las entradas poseen valores continuos, la estimación de la ganancia será sesgada, y si las entradas son señales de ruido blanco de media cero, la estimación, a pesar de ser insesgada, será no consistente.

### 5.3.2. Esquema 2: Eliminación de integración

Se realiza la estimación considerando el esquema 2, descrito en 3.4.2. Para este esquema, nuevamente no existe comunicación entre los agentes, por lo que el sistema puede ser descrito por (5.3.1). Sin embargo, considerando que las entradas son filtradas por (3.4.6), este se puede expresar como

$$y(t) = \frac{b_{i,1}^0 q + b_{i,2}^0}{q^2} u_i(t) + \tilde{e}(t), \quad (5.3.14)$$

con  $\tilde{e}(t) = \frac{b_{i,1} q + b_{i,2}}{q^2} u_j(t) + e(t)$ .

Luego, las primeras  $N$  muestras del sistema pueden ser expresadas como

$$Y = \Phi \theta_i + E, \quad (5.3.15)$$

con

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ u_i(1) & 0 \\ u_i(2) & u_i(1) \\ \vdots & \vdots \\ u_i(N-1) & u_i(N-2) \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \theta_i = \begin{bmatrix} b_{i,1}^0 \\ b_{i,2}^0 \end{bmatrix} \quad (5.3.16)$$

y  $E = b_j \Phi_j + \bar{E}$ , donde

$$\Phi_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ u_j(1) & 0 \\ u_j(2) & u_j(1) \\ \vdots & \vdots \\ u_j(N-1) & u_j(N-2) \end{bmatrix}, \bar{E} = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}, \theta_j = \begin{bmatrix} b_{j,1} \\ b_{j,2} \end{bmatrix}. \quad (5.3.17)$$

El estimador de mínimos cuadrados está dado por (2.4.5). A continuación se evalúa su sesgo y varianza.

### Sesgo del estimador

**Teorema 5.3.2.** *Se considera el sistema (5.1.1) bajo el esquema 2 de la sección 3.4. Si se utiliza el método PEM para realizar la estimación del vector de parámetros  $\theta_i$ , esta es insesgada si las entradas a los agentes son señales de ruido blanco de media cero, y sesgada si las entradas son señales constantes, o señales de ruido blanco con media distinta a cero.*

*Demostración.* Desarrollando la expresión de manera equivalente al teorema 5.3.1, se puede deducir que  $\Phi^T \Phi$  es invertible y que el sesgo está dado por (5.3.3), lo cual, en este caso, corresponde a

$$\text{Bias}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) = (\Phi^T \Phi)^{-1} \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} u_i(t) (b_{j,1}^0 \mathcal{E}\{u_j(t)\} + b_{j,2}^0 \mathcal{E}\{u_j(t-1)\}) \\ \sum_{t=1}^{N-1} u_i(t-1) (b_{j,1}^0 \mathcal{E}\{u_j(t)\} + b_{j,2}^0 \mathcal{E}\{u_j(t-1)\}) \end{bmatrix}. \quad (5.3.18)$$

- Si se consideran dos entradas constantes  $u_i = C_i > 0$  y  $u_j = C_j > 0$ , las matrices  $\Phi$  y  $\Phi_j$  están dadas por

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_i & 0 \\ C_i & C_i \\ \vdots & \vdots \\ C_i & C_i \end{bmatrix}, \Phi_j = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ C_j & 0 \\ C_j & C_j \\ \vdots & \vdots \\ C_j & C_j \end{bmatrix} \quad (5.3.19)$$

Se observa que  $\mathcal{E}\{\Phi_j\} = \Phi_j = \frac{C_j}{C_i} \Phi$ , por lo que

$$\text{Bias}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) = \frac{C_j}{C_i} \theta_j, \quad (5.3.20)$$

demostrando que el estimador es sesgado.

- Si se consideran  $u_i$  y  $u_j$  dos señales de ruido blanco Gaussiano de media 0 y varianzas  $\sigma_{u_i}^2$  y  $\sigma_{u_j}^2$  respectivamente, se cumple  $\mathcal{E}\{\Phi_j\} = 0$ , por lo que el estimador será insesgado.
- Finalmente, si se consideran  $u_i$  y  $u_j$  señales de ruido blanco con medias  $C_i$  y  $C_j$  respectivamente y varianzas  $\sigma_{u_i}^2$  y  $\sigma_{u_j}^2$  respectivamente, se tiene  $\mathcal{E}\{z_j(t)\} = C_j\mu(t)$ , donde  $\mu(t)$  es un escalón unitario. Luego, el sesgo del estimador está dado por

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) &= (\Phi^T \Phi)^{-1} \begin{bmatrix} C_j(b_{j,1}^0 \sum_{t=1}^{N-1} u_j(t) + b_{j,2}^0 \sum_{t=1}^{N-2} u_j(t)) \\ C_j(b_{j,1}^0 + b_{j,2}^0) \sum_{t=1}^{N-2} u_j(t) \end{bmatrix} \\ &= \left( \left( \frac{1}{N-2} \right) \Phi^T \Phi \right)^{-1} \begin{bmatrix} C_j(b_{j,1}^0 \frac{1}{N-2} \sum_{t=1}^{N-1} u_i(t) + b_{j,2}^0 \frac{1}{N-2} \sum_{t=1}^{N-2} u_i(t)) \\ C_j(b_{j,1}^0 + b_{j,2}^0) \frac{1}{N-2} \sum_{t=1}^{N-2} u_i(t) \end{bmatrix} \quad (5.3.21) \end{aligned}$$

Luego, como  $u_i(t)$  es un proceso estacionario y ergódico, el sesgo convergerá de manera casi segura a

$$\begin{aligned} \text{Bias}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) &= \left( \left( \frac{1}{N-2} \right) \Phi^T \Phi \right)^{-1} \begin{bmatrix} C_j(b_{j,1}^0 \frac{N-2}{N-1} \mathcal{E}\{u_i(t)\} + b_{j,2}^0 \mathcal{E}\{u_i(t)\}) \\ C_j(b_{j,1}^0 + b_{j,2}^0) \mathcal{E}\{u_i(t)\} \end{bmatrix} \\ &= \left( \left( \frac{1}{N-2} \right) \Phi^T \Phi \right)^{-1} \begin{bmatrix} C_i C_j (\frac{N-2}{N-1} b_{j,1}^0 + b_{j,2}^0) \\ C_i C_j (b_{j,1}^0 + b_{j,2}^0) \end{bmatrix} \quad (5.3.22) \end{aligned}$$

Tomando en cuenta que  $\Phi^T \Phi$  es invertible, se puede concluir que el estimador es sesgado. □

**Observación 5.3.2.** Debido a que el sistema es estable en este caso, el sesgo del sistema puede ser evaluado a partir de las propiedades asintóticas de mínimos cuadrados, de modo que este tiende a

$$\text{Bias}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) = \mathcal{E}\{\varphi(t)\varphi^T(t)\}^{-1} \mathcal{E}\{\varphi^T(t)e(t)\}. \quad (5.3.23)$$

Sin embargo, debido a las condiciones iniciales asociadas a estos, el vector de regresores no es estrictamente estacionario. Por lo que esta no será la expresión exacta del estimador. Cabe destacar que estas mismas condiciones iniciales son las que permitieron obtener una estimación de los parámetros (aunque sesgada) cuando la entrada al sistema es una señal constante, a pesar de que las señales constantes no sean persistentemente excitantes de orden 2. Si se utiliza el método asintótico para realizar la estimación de mínimos cuadrados, es fácil comprobar que la matriz  $\mathcal{E}\{\varphi(t)\varphi^T(t)\}$  asociada es singular.

### Varianza del estimador

Como el estimador es insesgado solamente si las entradas  $u_i(t)$  y  $u_j(t)$  son señales de ruido blanco con media 0, el análisis de la varianza del estimador se centrará en aquel caso.

**Teorema 5.3.3.** *Se considera el sistema (5.1.1) bajo el esquema 2 de la sección 3.4. Si se utiliza el método PEM para realizar la estimación del vector de parámetros  $\theta_i$ , la estimación es consistente si las entradas a los agentes son señales de ruido blanco de media cero. Además, la razón de decaimiento de la varianza del estimador es de  $N^{-1}$ .*

*Demostración.* Se observa que en el sistema (5.3.14),  $\tilde{e}$  es una señal de ruido blanco de varianza  $\sigma_e^2 + (b_{j,1}^2 + b_{j,2}^2)\sigma_{u_j}^2$ . Como el sistema es estable, y suponiendo que, tal como en el caso de sistemas con integración, el sistema real se encuentra dentro del conjunto de modelos propuestos  $\mathcal{M}_{\Theta_i}$ , entonces se puede aplicar la expresión asintótica para la varianza de  $\hat{\theta}_i$  dada por la sección 9.3 de [56]. De forma que

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{1,N}) \sim \frac{1}{N} \sigma_e^2 \mathcal{E} \{ \varphi(t, \theta_i) \varphi(t, \theta_i)^T \}^{-1}, \quad (5.3.24)$$

con  $\varphi(t, \theta_i) = \frac{\partial}{\partial \theta_i} \hat{y}(t | t-1, \theta_i)$ .

Luego, considerando que  $\hat{y}(t | t-1, \theta_i) = \frac{b_{i,1}^0 q + b_{i,2}^0}{q^2} u_i(t)$ , se obtiene

$$\varphi(t, \theta_i) = \left[ \frac{1}{q} u_i(t) \quad \frac{1}{q^2} u_i(t) \right]^T = \left[ u_i(t-1) \quad u_i(t-2) \right]^T, \quad (5.3.25)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathcal{E} \{ \varphi(t, \theta_i) \varphi(t, \theta_i)^T \} &= \begin{bmatrix} \mathcal{E} \{ u_i(t-1)^2 \} & \mathcal{E} \{ u_i(t-1) u_i(t-2) \} \\ \mathcal{E} \{ u_i(t-1) u_i(t-2) \} & \mathcal{E} \{ u_i(t-2)^2 \} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \sigma_{u_i}^2 & 0 \\ 0 & \sigma_{u_i}^2 \end{bmatrix} \end{aligned} \quad (5.3.26)$$

Luego, la matriz de covarianza del estimador se comporta como

$$\text{Cov}(\hat{\theta}_i | \mathbf{Z}_{i,N}) \sim \frac{1}{N} \frac{\sigma_e^2 + (b_{j,1}^2 + b_{j,2}^2) \sigma_{u_j}^2}{\sigma_{u_i}^2} I_{2 \times 2}, \quad (5.3.27)$$

donde  $I_{2 \times 2} \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  es la matriz identidad.

Por lo tanto, la varianza de ambos parámetros se comporta similarmente a

$$\text{Var}(b_{i,k}) \sim \frac{1}{N} \frac{\sigma_e^2 + (b_{j,1}^2 + b_{j,2}^2) \sigma_{u_j}^2}{\sigma_{u_i}^2}, \quad (5.3.28)$$

y su razón de decaimiento es de  $N^{-1}$ . □

### 5.3.3. Esquema 3: Comunicación en la entrada

Se realiza la estimación considerando el esquema 3 de la sección 3.4.3, en el cual cada agente tiene acceso a la entrada del otro agente. En este caso, la estimación de los parámetros de ambos agentes se realiza de manera conjunta.

Análogamente a los casos anteriores, las primeras  $N$  muestras del sistema pueden ser expresadas mediante (2.4.2), y el estimador de mínimos cuadrados está dado por (2.4.5), con

$$\Phi = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ u_1(1) & 0 & u_2(1) & 0 \\ u_1(2) & u_1(1) & u_2(2) & u_2(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \sum_{t=1}^{N-1} u_1(t) & \sum_{t=1}^{N-2} u_1(t) & \sum_{t=1}^{N-1} u_2(t) & \sum_{t=1}^{N-2} u_2(t) \end{bmatrix}, Y = \begin{bmatrix} y(1) \\ y(2) \\ y(3) \\ \vdots \\ y(N) \end{bmatrix}, \quad (5.3.29)$$

$$\bar{E} = \begin{bmatrix} e(1) \\ e(2) \\ e(3) \\ \vdots \\ e(N) \end{bmatrix}, \theta = \begin{bmatrix} b_{1,1}^0 \\ b_{1,2}^0 \\ b_{2,1}^0 \\ b_{2,2}^0 \end{bmatrix} \quad (5.3.30)$$

### Sesgo del estimador

**Teorema 5.3.4.** *Se considera el sistema dado por (5.1.1) bajo el esquema 3 de la sección 3.4. Si se realiza la estimación del vector de parámetros  $\theta$  utilizando el método PEM, entonces la estimación es insesgada si las entradas son ruido blanco, tanto de media cero como de media distinta de cero. Por otro lado, si las entradas corresponden a valores constantes, no se poseerá información suficiente para determinar los parámetros correctamente.*

*Demostración.* Como  $e(t)$  es una señal de ruido blanco, el estimador será insesgado siempre que  $\Phi^T \Phi$  sea invertible.

En este caso,

$$\Phi^T \Phi = \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_1(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_1(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t-1)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t-1)z_2(t) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t-1)z_2(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t-1)z_2(t) & \sum_{t=1}^{N-1} z_2(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_2(t)z_2(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t-1)z_2(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_2(t)z_2(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_2(t-1)^2 \end{bmatrix} \quad (5.3.31)$$

Se observa que si  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  son entradas de valor constantes  $C_1$  y  $C_2$ ,  $z_1(t)$  y  $z_2(t)$  corresponden a  $C_1 t$  y  $C_2 t$  respectivamente. Luego,  $z_2(t)$  puede ser visto como  $z_1(t)$  escalado a  $C_2/C_1$ . Esto indica que la tercera y cuarta fila de  $\Phi^T \Phi$  corresponden a la primera y segunda fila de  $\Phi^T \Phi$  escalada en  $C_2/C_1$ . Por lo tanto la matriz no es invertible y no se tiene suficiente información para realizar la identificación.

En el caso en que las entradas corresponden a ruido blanco, ya sea de media 0 o distinta de 0, siguiendo el desarrollo del teorema 4.4.2, al ser  $\Phi^T$  persistentemente excitante, la matriz es invertible y el estimador es insesgado.  $\square$

### Varianza del estimador

Debido a que el sistema no es identificable para el caso en que las entradas son constantes, el análisis de la varianza del estimador bajo este esquema se centra en los casos en que la entrada es una señal Gaussiana.

**Teorema 5.3.5.** *Se considera el sistema (5.1.1) bajo el esquema 2 de la sección 3.4. Si se utiliza el método PEM para la estimación del vector de parámetros  $\theta$ , entonces esta estimación es consistente si las entradas a los agentes son señales de ruido blanco, tanto de media cero como de media distinta de cero. Además la razón de decaimiento de la varianza del estimador es de  $N^{-1}$  para ambos casos.*

*Demostración.* Como  $e(t)$  es una señal de ruido blanco, la matriz de covarianza del estimador tiene la estructura dada por (4.3.5).

Considerando los regresores para este caso, esta puede ser descrita por (4.3.6), con  $\Delta$  de (4.3.7) y

$$U = \begin{bmatrix} u_1(1) & 0 & u_2(1) & 0 \\ u_1(2) & u_1(1) & u_2(2) & u_2(1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ u_1(N-1) & u_1(N-2) & u_2(N-1) & u_2(N-2) \end{bmatrix}. \quad (5.3.32)$$

Se observa que la covarianza posee la estructura de (3.7.1), donde el vector  $U$ , para entradas Gaussianas, corresponde al vector  $U_n$  simulado en la figura 3.5b, por lo tanto es razonable suponer que este vector cumple la suposición 3.7.1 para las entradas de la sección 3.2.

Se presenta la razón de decaimiento de la varianza de los parámetros para aquellas entradas.

- Se consideran  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  dos señales de ruido blanco Gaussiano de media 0 y varianzas  $\sigma_{u_1}^2$  y  $\sigma_{u_2}^2$  respectivamente.

Análogamente a los casos anteriores, se estudia la razón de decaimiento de (3.3.11).

Se supone que  $U$  cumple la suposición 3.7.1. Luego, la razón de decaimiento de la varianza de los parámetros se puede obtener a partir de la razón de decaimiento de

los elementos diagonales de  $\mathcal{E} \{U^T \Delta^T \Delta U\}^{-1}$ . A partir del teorema 2.6.1, se tiene

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E} \{U^T \Delta^T \Delta U\}^{-1} \\
&= \mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_1(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_1(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t-1)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t-1)z_2(t) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t-1)z_2(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t-1)z_2(t) & \sum_{t=1}^{N-1} z_2(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_2(t)z_2(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t-1)z_2(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_2(t)z_2(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_2(t-1)^2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} \sigma_{u_1}^2 t & \sum_{t=1}^{N-1} \sigma_{u_1}^2 (t-1) & 0 & 0 \\ \sum_{t=1}^{N-1} \sigma_{u_1}^2 (t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} \sigma_{u_1}^2 (t-1) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sum_{t=1}^{N-1} \sigma_{u_2}^2 t & \sum_{t=1}^{N-1} \sigma_{u_2}^2 (t-1) \\ 0 & 0 & \sum_{t=1}^{N-1} \sigma_{u_2}^2 (t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} \sigma_{u_2}^2 (t-1) \end{bmatrix}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \frac{1}{\sigma_{u_1}^2 (N-1)} & -\frac{1}{\sigma_{u_1}^2 (N-1)} & 0 & 0 \\ -\frac{1}{\sigma_{u_1}^2 (N-1)} & \frac{N}{\sigma_{u_1}^2 (N-1)(N-2)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{\sigma_{u_2}^2 (N-1)} & -\frac{1}{\sigma_{u_2}^2 (N-1)} \\ 0 & 0 & -\frac{1}{\sigma_{u_2}^2 (N-1)} & \frac{N}{\sigma_{u_2}^2 (N-1)(N-2)} \end{bmatrix} \quad (5.3.33)
\end{aligned}$$

Por lo tanto, la razón de decaimiento de la varianza de los parámetros para entradas Gaussianas de media cero es de  $N^{-1}$ .

- Se consideran  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  dos señales de ruido blanco Gaussiano de medias  $C_1$  y  $C_2$  y varianzas  $\sigma_{u_1}^2$  y  $\sigma_{u_2}^2$  respectivamente.

Análogamente al caso de media 0, se evalúa la expresión (3.3.11) y se supone que U satisface la suposición 3.7.1. De forma que la varianza se puede obtener a partir de los elementos diagonales de  $\mathcal{E} \{U^T \Delta^T \Delta U\}^{-1}$ .

A partir del teorema 2.6.2, se tiene

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E} \{U^T \Delta^T \Delta U\}^{-1} \\
&= \mathcal{E} \left\{ \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_1(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_1(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t-1)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t-1)z_2(t) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t-1)z_2(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t-1)z_2(t) & \sum_{t=1}^{N-1} z_2(t)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} z_2(t)z_2(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t)z_2(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_1(t-1)z_2(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_2(t)z_2(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} z_2(t-1)^2 \end{bmatrix} \right\}^{-1} \\
&= \begin{bmatrix} \sum_{t=1}^{N-1} \sigma_{u_1}^2 t + C_1^2 t^2 & \sum_{t=1}^{N-1} (t-1)(\sigma_{u_1}^2 + C_1^2 t) & \sum_{t=1}^{N-1} C_1 C_2 t^2 & \sum_{t=1}^{N-1} C_1 C_2 t(t-1) \\ \sum_{t=1}^{N-1} (t-1)(\sigma_{u_1}^2 + C_1^2 t) & \sum_{t=1}^{N-1} (t-1)(\sigma_{u_1}^2 + C_1^2 (t-1)) & \sum_{t=1}^{N-1} C_1 C_2 t(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} C_1 C_2 (t-1)^2 \\ \sum_{t=1}^{N-1} C_1 C_2 t^2 & \sum_{t=1}^{N-1} C_1 C_2 t(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} t(\sigma_{u_2}^2 + C_2^2 t) & \sum_{t=1}^{N-1} (t-1)(\sigma_{u_2}^2 + C_2^2 t) \\ \sum_{t=1}^{N-1} C_1 C_2 t(t-1) & \sum_{t=1}^{N-1} C_1 C_2 (t-1)^2 & \sum_{t=1}^{N-1} (t-1)(\sigma_{u_2}^2 + C_2^2 t) & \sum_{t=1}^{N-1} (t-1)(\sigma_{u_2}^2 + C_2^2 (t-1)) \end{bmatrix}^{-1} \quad (5.3.34)
\end{aligned}$$

Matriz cuyos elementos diagonales están dados por

$$\begin{aligned}
M_{1,1} &= \frac{(\sigma_{u_2}^2 C_1^2 + \sigma_{u_1}^2 C_2^2) (4\sigma_{u_2}^2 + C_2^2) N + 6\sigma_{u_2}^4 (\sigma_{u_1}^2 - C_1^2)}{(N-1) ((\sigma_{u_2}^2 C_1^2 + \sigma_{u_1}^2 C_2^2 + 4\sigma_{u_1}^2 \sigma_{u_2}^2) (\sigma_{u_2}^2 C_1^2 + \sigma_{u_1}^2 C_2^2) N + 6\sigma_{u_1}^4 \sigma_{u_2}^4)} \\
M_{2,2} &= \frac{N ((\sigma_{u_2}^2 C_1^2 + \sigma_{u_1}^2 C_2^2) (4\sigma_{u_2}^2 + C_2^2) N + 2\sigma_{u_2}^4 (3\sigma_{u_1}^2 - C_1^2))}{(N-2)(N-1) ((\sigma_{u_2}^2 C_1^2 + \sigma_{u_1}^2 C_2^2 + 4\sigma_{u_1}^2 \sigma_{u_2}^2) (\sigma_{u_2}^2 C_1^2 + \sigma_{u_1}^2 C_2^2) N + 6\sigma_{u_1}^4 \sigma_{u_2}^4)} \\
M_{3,3} &= \frac{(\sigma_{u_2}^2 C_1^2 + \sigma_{u_1}^2 C_2^2) (4\sigma_{u_1}^2 + C_1^2) N + 6\sigma_{u_1}^4 (\sigma_{u_2}^2 - C_2^2)}{(N-1) ((\sigma_{u_2}^2 C_1^2 + \sigma_{u_1}^2 C_2^2 + 4\sigma_{u_1}^2 \sigma_{u_2}^2) (\sigma_{u_2}^2 C_1^2 + \sigma_{u_1}^2 C_2^2) N + 6\sigma_{u_1}^4 \sigma_{u_2}^4)} \\
M_{4,4} &= \frac{N ((\sigma_{u_2}^2 C_1^2 + \sigma_{u_1}^2 C_2^2) (4\sigma_{u_1}^2 + C_1^2) N + 2\sigma_{u_1}^4 (3\sigma_{u_2}^2 - C_2^2))}{(N-2)(N-1) ((\sigma_{u_2}^2 C_1^2 + \sigma_{u_1}^2 C_2^2 + 4\sigma_{u_1}^2 \sigma_{u_2}^2) (\sigma_{u_2}^2 C_1^2 + \sigma_{u_1}^2 C_2^2) N + 6\sigma_{u_1}^4 \sigma_{u_2}^4)}, \tag{5.3.35}
\end{aligned}$$

donde  $M_{k,k}$  corresponde a la  $k$ -ésima diagonal de  $\mathcal{E} \{U^T \Delta^T \Delta U\}^{-1}$ .

Se observa que la estimación también converge al valor real de los parámetros con un orden de  $N^{-1}$ .

Luego, se concluye de estos resultados que la estimación de (5.1.1) bajo el esquema propuesto es consistente para entradas de ruido blanco con media 0 o distinta de cero, y la razón de decaimiento de la varianza será de  $N^{-1}$  en ambos casos.  $\square$

### 5.3.4. Esquema 4: Comunicación en la salida

Se realiza la identificación considerando el esquema 4, descrito en la sección 3.4.4. Para este esquema, cada agente  $i$  tiene acceso a una medición de la salida absoluta del otro agente  $j$ ,  $i, j \in \{1, 2\}$ ,  $i \neq j$ . Por lo que el sistema puede ser descrito por

$$y(t) = \frac{b_{i,1}^0 q + b_{i,2}^0}{q(q-1)} u_i(t) + \tilde{e}(t), \tag{5.3.36}$$

donde  $\tilde{e}(t) = e(t) - e_j(t)$ , siendo  $e_j(t)$  el ruido de la medición de la salida del agente  $j$ .

Luego, como  $\tilde{e}(t)$  es una señal de ruido blanco, el sistema resultante es equivalente al de 1 agente desarrollado en la sección 5.2 y el proceso de identificación es equivalente al realizado para ese caso.

#### Sesgo del estimador

A partir del teorema 5.2.1, se puede concluir que la estimación de los parámetros es insesgada para cada una de las entradas de interés.

#### Varianza del estimador

A partir del teorema 5.2.2, se puede concluir que la estimación de los parámetros es consistente para cada una de las entradas de interés. Y que para cada caso, esta decaerá con un orden de convergencia de  $N^{-1}$ .

## 5.4. Simulaciones del sistema

Para corroborar los resultados respecto al sesgo y la varianza obtenidos en este capítulo, se realiza una simulación de Monte-Carlo de la estimación de los parámetros  $b_{1,1}^0$  y  $b_{2,1}^0$  del agente 1 de un sistema de forma (5.2), bajo los esquemas 2, 3 y 4 de la sección 3.4 y considerando entradas Gaussianas. Para estas simulaciones se considera para el agente 1,  $b_{1,1}^0 = 0,8$  y  $b_{2,1}^0 = 0,6$ , y para el agente 2,  $b_{1,2}^0 = 0,72$  y  $b_{2,2}^0 = 0,66$ . Además se considera que las varianzas de las señales están dadas por  $\sigma_{u_1}^2 = \sigma_{u_2}^2 = \sigma_e^2 = 1$ . Se realiza una simulación de Monte-Carlo con entradas de media  $\mu_{u_1} = \mu_{u_2} = 0$ , y una simulación de Monte-Carlo con entradas de medias  $\mu_{u_1} = 4$  y  $\mu_{u_2} = -4$ .

Para cada caso la simulación fue hecha sobre 21 tamaños de muestras distintos, espaciados uniformemente en la escala logarítmica entre 10 y  $10^5$  muestras. Para cada tamaño en el rango entre 10 y  $10^3$ , se simularon  $10^6$  realizaciones, mientras que para cada tamaño en el rango entre  $10^3$  y  $10^5$ , se simularon  $10^4$  realizaciones.

La evolución del sesgo y la varianza de las simulaciones se muestran en la figura 5.2 para las entradas de media cero, y en la figura 5.3 para las entradas de media distinta de cero. Para estas entradas, también se incluye el error cuadrático medio de la estimación, para ilustrar las diferencias de este respecto a la varianza cuando el parámetro es sesgado.

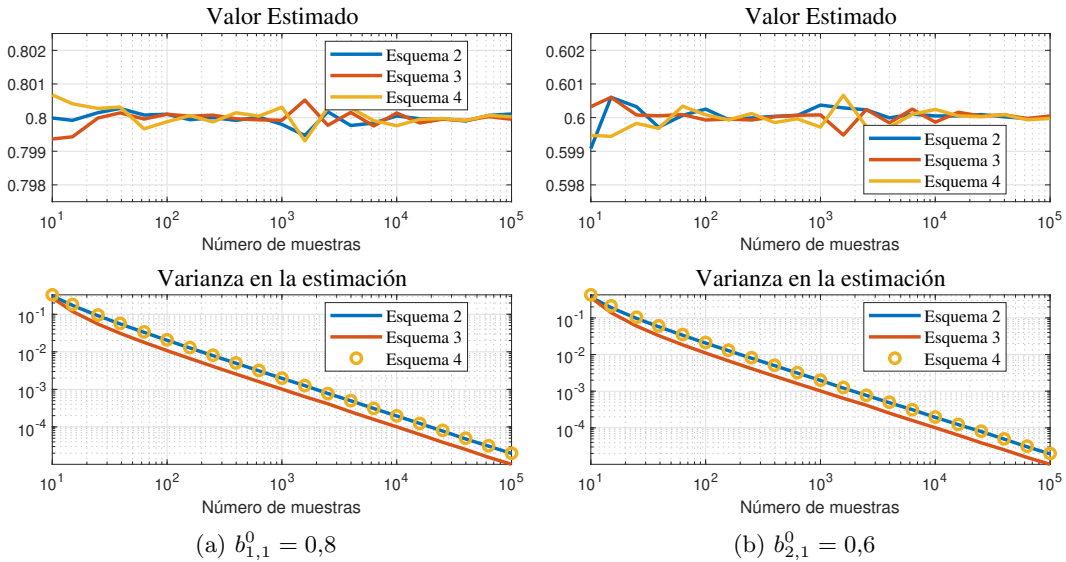


Figura 5.2: Media muestral para el valor estimado de los parámetros (arriba) y para la varianza de los parámetro estimados (abajo) con  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de media 0, considerando tamaños muestrales que varían de 10 a  $10^5$  muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones para cada tamaño muestral.

Se observa en las figuras que el sesgo de los sistemas y la razón de decaimiento concuerdan con los resultados desarrollados para cada esquema en este capítulo. Solamente la estimación utilizando el esquema 2 y entradas de media distinta de cero genera resultados sesgados, y para cada caso la varianza alcanza una razón de decaimiento de  $N^{-1}$ .

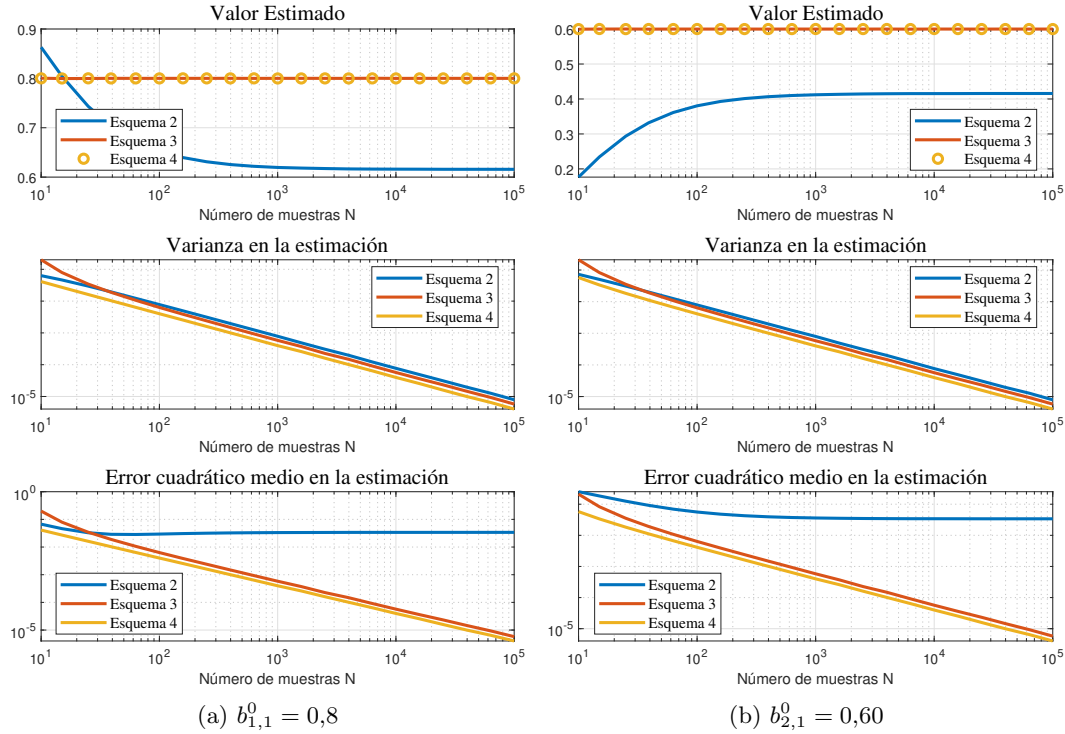


Figura 5.3: Media muestral para el valor estimado de los parámetros (arriba) y para la varianza de los parámetros estimados (abajo) con  $u_1(t)$  de media 4 y  $u_2(t)$  de media  $-4$ , considerando tamaños muestrales que varían de 10 a  $10^5$  muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones para cada tamaño muestral.

## 5.5. Resumen de los resultados para la identificación de dos parámetros

El desarrollo anterior muestra que al identificar los dos parámetros de un agente de un sistema de segundo orden dado por (5.1.1), el incluir la integración dentro de la estimación no logra aumentar la razón de decaimiento de la varianza de los estimadores. En la sección 5.2 se observa que, para el caso de un parámetro, la estimación es insesgada y consistente, pero la varianza de ambos parámetros decae con un orden de  $N^{-1}$  para cada una de las entradas de interés, a diferencia de lo sucedido en la estimación de ganancia descrita en el capítulo anterior. Es posible modificar la configuración de los parámetros de tal forma que uno de ellos posea una razón de decaimiento más rápido en la varianza de su estimación, siendo este de  $N^{-2}$  para ruido blanco de media cero y de  $N^{-3}$  para señales con valor continuo, sin embargo, la razón de decaimiento del vector de parámetros se mantiene en  $N^{-1}$ . Se observó también que se obtienen conclusiones similares al reemplazar el retardo del sistema por un polo estable.

Respecto a la identificación colaborativa de un sistema de dos agentes, desarrollada en la sección 5.3, los resultados siguen una línea similar a los obtenidos en la estimación de

la ganancia de sistemas de primer orden, con la diferencia de que no se logra mejorar la razón de decaimiento de la ganancia al incluir la integración dentro de la estimación. Los esquemas 1 y 2 se comportan de la misma manera que en la sección anterior, otorgando resultados sesgados para la identificación cuando la entrada tiene media distinta de cero, e insesgados al identificar utilizando ruido blanco de media 0 en las entradas, siendo esta estimación inconsistente en el esquema 1 y consistente en el esquema 2.

Los esquemas 3 y 4 logran estimar ambos parámetros del sistema de forma insesgada y consistente para todas las entradas de interés, a excepción de entradas constantes para el esquema 3. Sin embargo, a diferencia de lo ocurrido al identificar sistemas de primer orden, la razón de decaimiento de la varianza se mantiene en  $N^{-1}$  para cada una de estas entradas.

Un resumen del comportamiento de la estimación del vector de parámetros  $\{b_{i,1}^0, b_{1,2}^0\}$  bajo cada uno de los esquemas utilizando las entradas evaluadas se muestra en la tabla 4.1.

		Esquema			
		1	2	3	4
Entrada Constante	Sesgo	Si	Si	-	No
	Dec. Varianza	-	-	-	$N^{-1}$
Entrada Gaussiana Media 0	Sesgo	No	No	No	No
	Dec. Varianza	No Decae	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-1}$
Entrada Gaussiana Media no 0	Sesgo	Si	Si	No	No
	Dec. Varianza	-	-	$N^{-1}$	$N^{-1}$

Cuadro 5.1: Resumen de resultados para el sesgo y la razón de decaimiento de la estimación del vector de parámetros del sistema de segundo orden trabajado bajo los esquemas propuestos.

# RESULTADOS NUMÉRICOS UTILIZANDO EL MÉTODO PEM

En este capítulo se realiza el desarrollo para obtener el sesgo y la razón de decaimiento de la varianza de la estimación de los parámetros de sistemas con las estructuras 3 y 4 de la sección 3.5. A diferencia de los sistemas estimados en los capítulos anteriores, los sistemas descritos en este capítulo son no lineales sobre el vector de parámetros a estimar y el estimador obtenido mediante el método PEM no corresponde al estimador de mínimos cuadrados. Por lo tanto, la identificación de los parámetros es realizada de forma numérica mediante simulaciones. En primer lugar se evalúa preliminarmente el sesgo y la varianza simulando con un número específico de muestras bajo todos los esquemas, y luego se realiza la identificación con un número variable de muestras bajo los esquemas 2, 3 y 4, para poder obtener información acerca de la razón de decaimiento de la varianza de estos.

### 6.1. Análisis de sesgo

Se realizan simulaciones para estimar los parámetros de sistemas pertenecientes a los casos 3 y 4 de la sección 3.5 bajo cada uno de los esquemas descritos en la sección 3.4, con el fin de determinar la presencia de sesgo y obtener cierto conocimiento sobre el comportamiento de la varianza para la identificación de aquellos sistemas, tal como el análisis analítico de los capítulos 4 y 5 permitió aquello para los casos 1 y 2 respectivamente.

Para cada uno de estos sistemas, se realizó una simulación de Monte-Carlo de  $5 * 10^3$  realizaciones de  $10^4$  muestras cada una y se extrajo el sesgo y la varianza de la estimación de los parámetros bajo cada esquema.

Para realizar estas simulaciones, se consideraron dos entradas distintas para los sistemas. En primer lugar se consideraron  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  ruidos blancos Gaussianos de media 0 y varianza 1 cada una, y en segundo lugar se consideraron  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  ruidos blancos Gaussianos de medias  $\mu_{u_1} = 4$  y  $\mu_{u_2} = -4$  respectivamente y varianza 1 cada una. Además se considera para cada simulación que el ruido de medición  $\sigma_e^2$  es de media 0 y varianza 1, al igual que el ruido  $\sigma_{e_j}^2$  presente en el esquema 4.

Para cada una de estas simulaciones, y sin pérdida de generalidad, la estimación es realizada sobre los parámetros del agente 1.

### 6.1.1. Estimación de polo en sistema de segundo orden

Se considera un sistema de dos agentes de segundo orden de la forma descrita en el caso 3 de la sección 3.5. Para este sistema, se busca identificar el parámetro  $p_i$  de (3.5.5).

Se realizan las simulaciones correspondientes, considerando  $\beta_1 = \beta_2 = 0,1$ ,  $p_1 = 0,8$  y  $p_2 = 0,88$ .

Los resultados de las simulaciones con  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de media 0 se presentan en la tabla 6.1, mientras que los resultados para las simulaciones con  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de medias 4 y  $-4$  respectivamente se presentan en la tabla 6.2.

	Esquema 1	Esquema 2	Esquema 3	Esquema 4
Estimación	0,3217	0,7998	0,8	0,8
Varianza	0,6421	$1,2415 \cdot 10^{-4}$	$1,3043 \cdot 10^{-10}$	$1,5081 \cdot 10^{-10}$

Cuadro 6.1: Resultados de la estimación de  $p_1$  (0,8) bajo cada esquema considerando  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de media 0.

	Esquema 1	Esquema 2	Esquema 3	Esquema 4
Estimación	-1,0005	-0,9006	0,8	0,8
Varianza	$1,9979 \cdot 10^{-8}$	$1,0734 \cdot 10^{-5}$	$9,2623 \cdot 10^{-11}$	$5,3638 \cdot 10^{-16}$

Cuadro 6.2: Resultados de la estimación de  $p_1$  (0,8) bajo cada esquema considerando  $u_1(t)$  de media 4 y  $u_2(t)$  de media  $-4$ .

Las tabla 6.1 indica que en la estimación del polo  $p_1$  para el sistema considerado utilizando entradas Gaussianas de media cero, el conocer solo la salida compartida entre los agentes genera estimación sesgada y varianza importante si se toma en cuenta la integración de los sistemas (esquema 1), pero el cancelar la integración (esquema 2) potencialmente elimina el sesgo y disminuye la varianza. Para aquel esquema, se observa un leve sesgo de 0,0002, el cual puede deberse a que el número de simulaciones de Monte-Carlo no sea suficiente o que el estimador sea asintóticamente insesgado y por lo tanto, se necesiten más muestras para eliminar completamente el sesgo, la sección 6.2 permitirá analizar aquello con más detalle. La tabla también indica que los esquemas colaborativos (esquemas 3 y 4) logran estimar el parámetro insesgadamente, y con una varianza mucho menor que los otros dos esquemas.

La tabla 6.2 indica que al estimar este sistema utilizando señales Gaussianas con media distinta de cero como entrada, el conocer solamente la salida compartida entre los agentes para la estimación del polo genera resultados fuertemente sesgados tanto al incluir la integración (esquema 1) como al cancelarla (esquema 2). Por otro lado, los esquemas colaborativos logran estimar el parámetro correctamente y con varianza aún menor que en el caso de media 0, sobre todo para el esquema 4, donde se obtiene una varianza con un orden de magnitud de  $10^{-16}$  frente a los  $10^{-11}$  del esquema 3.

Los resultados de estas tablas denotan un comportamiento similar al obtenido en el desarrollo analítico de las secciones 4 y 5. Donde se evidencia que la colaboración entre agentes es necesaria para obtener el parámetro correctamente. Además, se infiere que el uso de la integración dentro de la estimación permite una mejora en la varianza de aquella frente a esquemas en los cuales la identificación se realiza bajo sistemas estables. Cabe notar que

una diferencia entre estos resultados y los obtenidos mediante la estimación con mínimos cuadrados en los capítulos anteriores, es que en este caso el esquema 1 otorga resultados sesgados incluso para entradas de media cero.

### 6.1.2. Estimación de dos parámetros en sistema de segundo orden

Se considera ahora un sistema de segundo orden de la forma descrita en el caso 4 de la sección 3.5. Para este sistema, se busca identificar los parámetros  $p_i$  y  $b_i$  de (3.5.7).

Se realizan las simulaciones considerando  $b_1 = 0,1$ ,  $b_2 = 0,09$ ,  $p_1 = 0,8$ ,  $p_2 = 0,88$ .

Los resultados de las simulaciones con  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de media 0 se presentan en la tabla 6.3, mientras que los resultados para las simulaciones con  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de medias 4 y  $-4$  respectivamente se presentan en la tabla 6.4.

		Esquema 1	Esquema 2	Esquema 3	Esquema 4
$b_1$	Estimación	-0,1535	0,0994	0,1	0,1
	Varianza	10,4142	$7,1312 \cdot 10^{-4}$	$2,0889 \cdot 10^{-6}$	$3,9287 \cdot 10^{-6}$
$p_1$	Estimación	0,6315	0,7998	0,8	0,8
	Varianza	0,2266	$1,0985 \cdot 10^{-4}$	$6,9036 \cdot 10^{-8}$	$1,3005 \cdot 10^{-7}$

Cuadro 6.3: Resultados de la estimación de  $b_1$  (0,1) y  $p_1$  (0,8) bajo cada esquema considerando  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de media 0.

		Esquema 1	Esquema 2	Esquema 3	Esquema 4
$b_1$	Estimación	-3,3177	-1,0417	0,1	0,1
	Varianza	8,8969	$3,1580 \cdot 10^{-5}$	$4,6351 \cdot 10^{-10}$	$5,8196 \cdot 10^{-8}$
$p_1$	Estimación	0,3535	0,9884	0,8	0,8
	Varianza	0,6920	$2,4759 \cdot 10^{-6}$	$1,7959 \cdot 10^{-10}$	$1,9273 \cdot 10^{-9}$

Cuadro 6.4: Resultados de la estimación de  $b_1$  (0,1) y  $p_1$  (0,8) bajo cada esquema considerando  $u_1(t)$  de media 4 y  $u_2(t)$  de media  $-4$ .

La tabla 6.3 muestra resultados similares a los obtenidos para la identificación del polo de la sección 6.1.1. Al identificar los parámetros del sistema considerado utilizando entradas Gaussianas de media cero, el conocer solamente la salida compartida entre los agentes para la identificación otorga resultados sesgados y con gran varianza si se incluye la integración (esquema 1), pero resultados potencialmente insesgados y varianza mucho menor al cancelarla (esquema 2). Nuevamente, los esquemas colaborativos (esquemas 3 y 4) estiman los parámetros sin sesgo, y con varianza menor que en el esquema 2, sin embargo la disminución en la varianza es menos importante que cuando se requiere estimar solamente el polo del sistema, como en la sección anterior.

La tabla 6.4 indica que al utilizar señales Gaussianas de media distinta de cero para la identificación de este sistema, el conocer solamente la salida compartida entre los agentes genera resultados sesgados tanto al incluir la integración (esquema 1), como al cancelarla (esquema 2). Mientras que los esquemas colaborativos (esquemas 3 y 4) logran estimar los parámetros de manera insesgada y con varianza muy baja. Si embargo, cabe notar que, al igual que con entradas de media cero, la varianza de la estimación es algunos órdenes de

magnitud más alta que al identificar el polo de la sección 6.1.1, y que a diferencia de aquel caso, la identificación bajo el esquema 3 tiene una varianza marginalmente menor que bajo el esquema 4.

## 6.2. Razón de decaimiento de la varianza

En esta sección, se realizan simulaciones que ilustran el comportamiento de los estimadores a medida que aumenta el número de muestras, para así observar y comparar el desempeño de cada uno. De esta forma, se pueden corroborar las conclusiones encontradas anteriormente sobre el sesgo de cada esquema y se pueden extraer las razones de decaimiento de la varianza y el error cuadrático medio en relación al número de muestras.

Para cada caso, se realizaron simulaciones de Monte-Carlo de 21 tamaños de muestras distintos, espaciados uniformemente entre  $10^1$  y  $10^5$  en la escala logarítmica. Para cada tamaño muestral, se efectuó una simulación de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones. Cada simulación es realizada tanto con entradas Gaussianas  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de media 0, como con entradas Gaussianas  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de medias 4 y  $-4$  respectivamente.

Las simulaciones son realizadas bajo los esquemas 2, 3 y 4, que son los únicos que estiman los parámetros insesgadamente en algunos casos, según los resultados obtenidos en la sección 6.1. Cabe notar que aunque el esquema 2 generó resultados sesgados cuando se utilizan entradas de media distinta de cero, las simulaciones de ese caso serán también incluidas en este informe por completitud y para ilustrar la diferencia entre el comportamiento de la varianza y del error cuadrático medio al aumentar el número de muestras.

### 6.2.1. Estimación de polo en sistema de segundo orden

Se realizan las simulaciones correspondientes al caso 3 de la sección 3.5, donde se busca estimar el polo de un sistema de forma (3.5.5). Al igual que en la sección 6.1.1, se considera  $\beta_1 = \beta_2 = 0,1$ ,  $p_1 = 0,8$  y  $p_2 = 0,88$ .

Los resultados para las entradas de media cero se despliegan en la figura 6.1. La parte superior de la figura ilustra la evolución del valor estimado de  $p_1$  respecto al número de muestras bajo cada esquema, los resultados obtenidos en esta figura muestran que los tres esquemas realizan una identificación asintóticamente insesgada del parámetro, pero que el esquema 2 tiene una convergencia más lenta que los otros dos, en particular, se observa que la identificación utilizando el esquema 2 requiere de aproximadamente 1000 muestras para que la estimación alcance el nivel de convergencia que la estimación bajo los esquemas 3 y 4 alcanzan utilizando solo 20 muestras. La parte inferior de la figura muestra la evolución de la varianza del valor estimado respecto al número de muestras bajo cada esquema. Cabe notar que como los sistemas son asintóticamente insesgados, el error cuadrático medio de la estimación es prácticamente igual a la Varianza, por lo que las gráficas de este no han sido incluidas en este documento. Se observa que, al aumentar el número de muestras  $N$ , la varianza posee una razón de decaimiento de  $N^{-1}$  para el esquema 2, y de  $N^{-2}$  para los esquemas 2 y 3. Los resultados obtenidos ilustran como, para los valores escogidos, el incluir la integración dentro la estimación permite acelerar su razón de decaimiento. Estos resultados muestran también que el aumento en esta razón de decaimiento al identificar sistemas con integración, que fue observada también en el capítulo 4, no es una característica

intrínseca solamente del estimador de mínimos cuadrados.

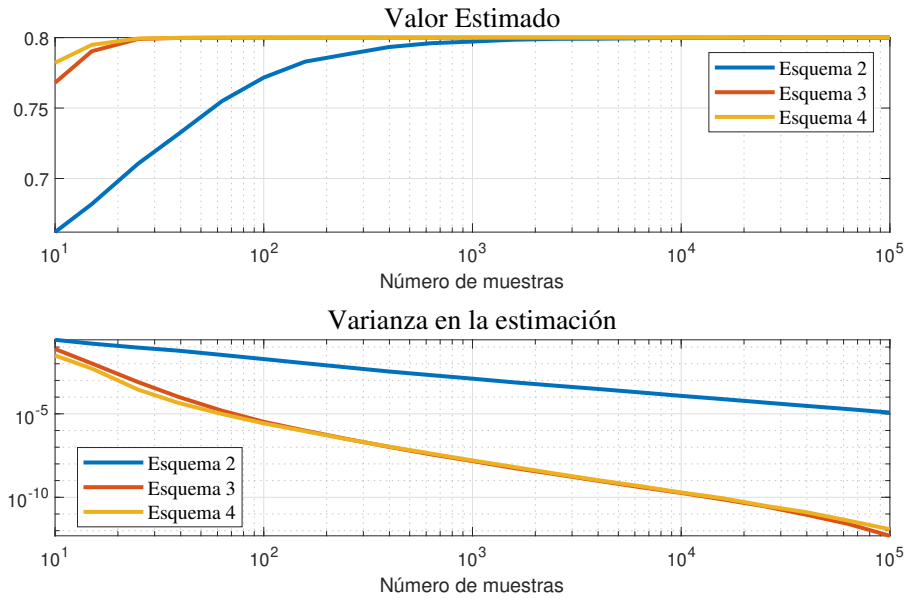


Figura 6.1: Media muestral para el valor estimado del parámetro  $p_1^0 = 0,8$  (arriba) y para la varianza del parámetro estimado (abajo) con  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de media 0, considerando tamaños muestrales que varían de 10 a  $10^5$  muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones para cada tamaño muestral.

Los resultados para las entradas de media distinta de cero se despliegan en la figura 6.2. La parte superior de la figura ilustra que al agregar los valores continuos en las entradas, la estimación bajo los esquemas 3 y 4 se mantiene asintóticamente insesgada, pero la estimación bajo el esquema 2 es ahora sesgada. Las partes media e inferior muestran respectivamente la evolución de la varianza y del error cuadrático de la estimación del polo para cada esquema. La varianza de estimación bajo el esquema 2 disminuye con un orden de  $N^{-1}$ , pero como la estimación es sesgada, el valor estimado no estará convergiendo al parámetro correcto, lo cual es ilustrado por la evolución de su error cuadrático medio, que no decae a cero al aumentar el número de muestras. Se observa que para el esquema 3, su varianza decae con un orden de  $N^{-2}$  tal como en el caso de media cero, pero para el esquema 4, el orden de decaimiento de la varianza aumenta a  $N^{-3}$ .

### 6.2.2. Estimación de dos parámetros en sistema de segundo orden

Se realizan las simulaciones correspondientes al caso 4 de la sección 3.5, donde se busca estimar los dos parámetros de un sistema de forma (3.5.7). Al igual que en la sección 6.1.2, se simula utilizando  $b_1 = 0,1$ ,  $b_2 = 0,09$ ,  $p_1 = 0,8$  y  $p_2 = 0,88$ .

Para entradas de media cero, los resultados de la estimación de  $b_1$  se despliegan en la figura 6.3, y los resultados de la estimación de  $p_1$  en la figura 6.4. La partes superiores de las figuras ilustran la evolución del valor estimado del parámetro respectivo respecto al

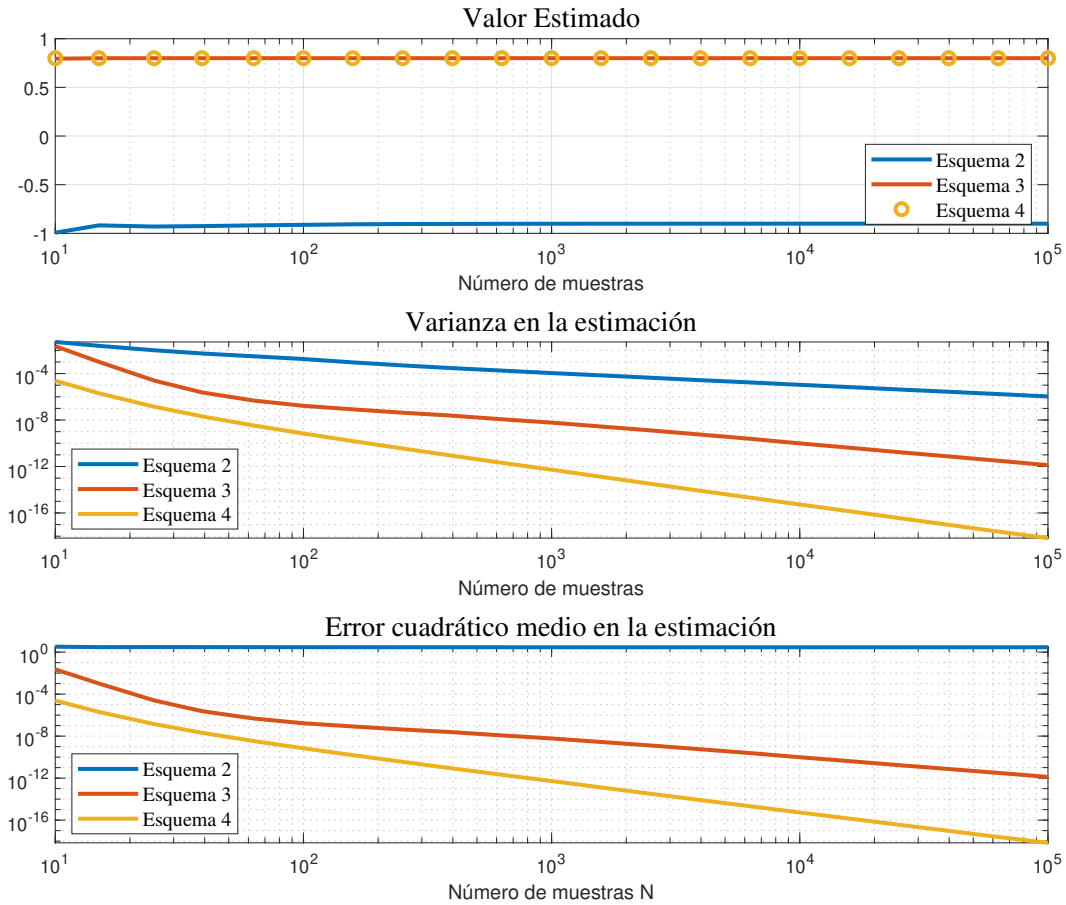


Figura 6.2: Media muestral para el valor estimado del parámetro  $p_1^0 = 0,8$  (arriba), varianza del parámetro estimado (al medio) y error cuadrático medio del parámetro estimado (abajo) con  $u_1(t)$  de media 4 y  $u_2(t)$  de media  $-4$ , considerando tamaños muestrales que varían de 10 a  $10^5$  muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones para cada tamaño muestral.

número de muestras bajo cada esquema. los resultados obtenidos en ambas figuras muestran que, al igual que en la identificación de los casos anteriores para entradas de media cero, la estimación es asintóticamente insesgada bajo los tres esquemas, teniendo una convergencia mas lenta bajo el esquema 2 que bajo los otros dos esquemas para ambos parámetros. Las partes inferiores de las figuras ilustran la evolución de la varianza del valor estimado para cada parámetro respecto al número de muestras  $N$ . Se observa que bajo todos los esquemas la estimación es consistente, y que para cada esquema la varianza posee una razón de decaimiento de  $N^{-1}$  en ambos parámetros. Sin embargo, la figura muestra que debido a una convergencia más rápida en las primeras muestras, los esquemas 3 y 4 poseen una varianza de entre 2 a 3 órdenes de magnitud menor en la estimación de sus parámetros que el esquema 2. Esto indica que a pesar de que el aumento en la razón de decaimiento en los esquemas 3 y 4 no permanezca cuando se estiman dos parámetros, la estimación sigue

teniendo una varianza significativamente menor que bajo el esquema 2, el impacto de esto es evidenciado si se fija algún valor específico para la varianza y se observa la cantidad de muestras necesarias que cada esquema requiere para alcanzarlo, el esquema 2 requiere de aproximadamente  $10^5$  muestras para obtener una varianza de  $10^{-4}$  en la estimación de ambos parámetros, mientras que los esquemas 3 y 4 alcanzan ese valor utilizando solamente entre 100 y 500 muestras dependiendo del parámetro.

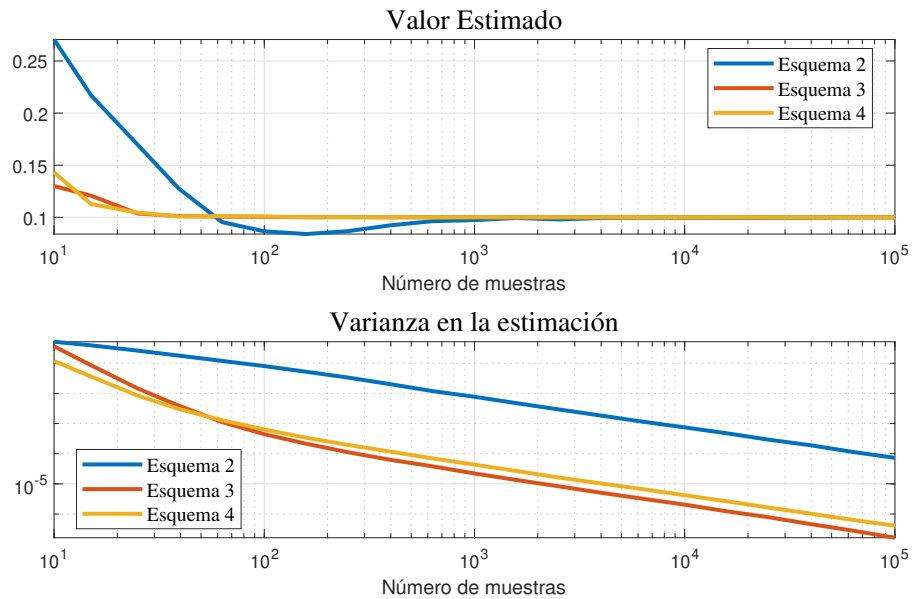


Figura 6.3: Media muestral para el valor estimado de  $b_1^0 = 0,1$  (arriba) y para la varianza de su estimación (abajo) con  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de media 0, considerando tamaños muestrales que varían de 10 a  $10^5$  muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones para cada tamaño muestral.

Para entradas de media distintas de cero, los resultados de la estimación de  $b_1$  se despliegan en la figura 6.5 y los resultados de la estimación de  $p_1$  en la figura 6.6. La parte superior de cada figura muestra que, como ocurrió en los casos anteriores, al agregar valores continuos a las entradas, la estimación bajo el esquema 2 se vuelve sesgada y las estimaciones bajo los esquemas 3 y 4 se mantienen asintóticamente insesgadas. Las partes media e inferior de la figuras muestran respectivamente la evolución de la varianza y del error cuadrático del valor estimado de su respectivo parámetro bajo cada esquema. Se observa nuevamente que como la estimación es sesgada para la identificación bajo el esquema 2, su varianza disminuye indefinidamente, pero su error cuadrático medio no desciende a cero al aumentar el número  $N$  de muestras, debido a que la estimación no converge al parámetro adecuado. Para los esquemas 3 y 4, al igual que en la estimación con entradas de media cero para este sistema, la identificación es asintóticamente insesgada y consistente, y tanto la varianza como el error cuadrático medio poseen un orden de decaimiento de  $N^{-1}$  respecto al número de muestras  $N$ . Cabe notar, sin embargo, que la varianza es levemente menor que al utilizar entradas de media cero.

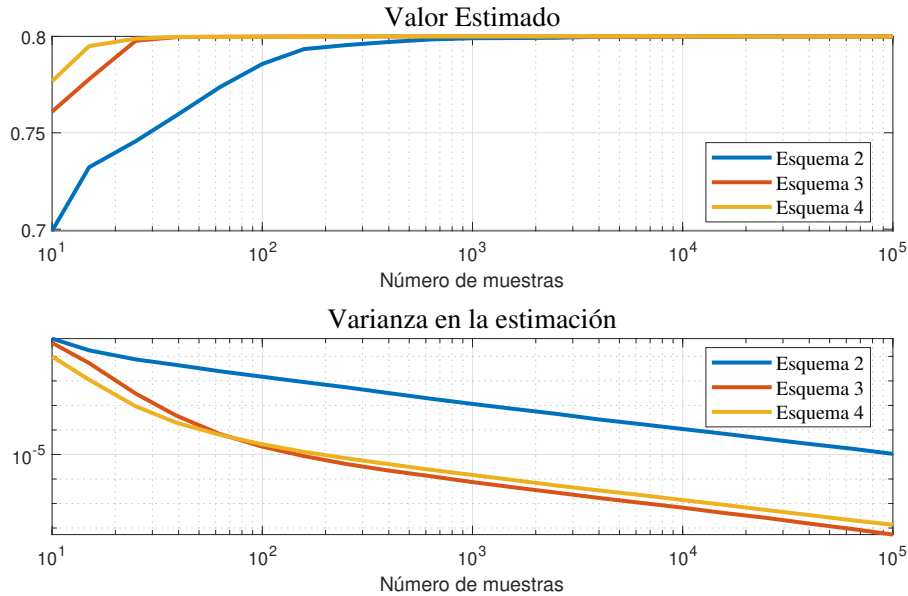


Figura 6.4: Media muestral para el valor estimado de  $p_1^0 = 0,8$  (arriba) y para la varianza de su estimación (abajo) con  $u_1(t)$  y  $u_2(t)$  de media 0, considerando tamaños muestrales que varían de 10 a  $10^5$  muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones para cada tamaño muestral.

## 6.3. Resumen de Resultados

### 6.3.1. Estimación de polo en sistema de segundo orden

El resumen de los resultados obtenidos para el sesgo y la razón de decaimiento de la estimación de un polo en sistemas descritos por el caso 3 bajo cada uno de los esquemas estudiados se despliega en la tabla 6.5. En la tabla se observa que los esquemas 2, 3 y 4 logran estimar este parámetro de forma insesgada cuando se utilizan señales Gaussianas de media cero como entrada, pero los esquemas que toman en cuenta la integración para identificar los parámetros (esquemas 3 y 4) alcanzan una razón de decaimiento de  $N^{-2}$  frente a la razón de  $N^{-1}$  alcanzada por el esquema 2. Cuando la estimación es realizada con entradas Gaussianas de media distinta a cero, el esquema 2 estima el parámetro de forma sesgada, mientras que los esquemas 3 y 4 lo hacen de forma insesgada. En este caso la estimación utilizando el esquema 3 mantiene una razón de decaimiento de  $N^{-2}$  en su varianza, mientras que la estimación bajo el esquema 4 posee una razón de  $N^{-3}$ . El esquema 1 estima los parámetros de forma sesgada para ambos tipos de entradas.

Cabe notar que tanto para entradas con media cero como para entradas con media distinta de cero, los resultados de sesgo y razón de decaimiento de la varianza obtenidos son muy similares a los obtenidos para el caso 1, correspondiente a la estimación de ganancia desarrollada en el capítulo 4. Lo que podría indicar que estos valores son comunes a varias configuraciones de sistemas en los que hay un solo parámetro a identificar.

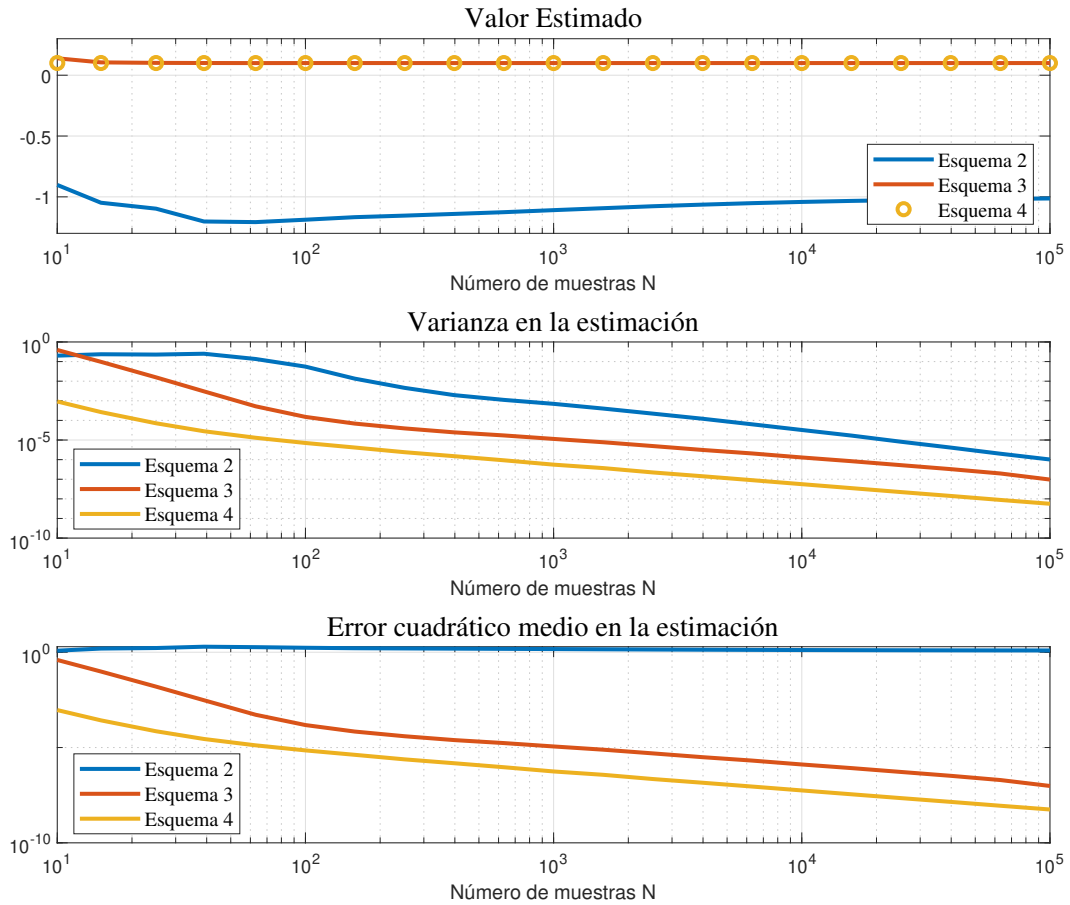


Figura 6.5: Media muestral para el valor estimado de  $b_1^0 = 0,1$  (arriba), varianza de su estimación (al medio) y error cuadrático medio de su estimación con  $u_1(t)$  de media 4 y  $u_2(t)$  de media  $-4$ , considerando tamaños muestrales que varían de 10 a  $10^5$  muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones para cada tamaño muestral.

Parámetro	Entradas	Propiedad	Esquema			
			1	2	3	4
$p_1$	Media 0	Sesgo	Si	No	No	No
		Decaimiento Varianza	-	$N^{-1}$	$N^{-2}$	$N^{-2}$
	Media no 0	Sesgo	Si	Si	No	No
		Decaimiento Varianza	-	$N^{-1}$	$N^{-2}$	$N^{-3}$

Cuadro 6.5: Resultados para el sesgo y la razón de decaimiento de la varianza de un sistema correspondiente al caso 3 bajo los esquemas propuestos.

### 6.3.2. Estimación de dos parámetros en sistema de segundo orden

El resumen de los resultados obtenidos para el sesgo y la razón de decaimiento de los sistemas descritos por el caso 4 bajo cada uno de los esquemas estudiados se despliega en la

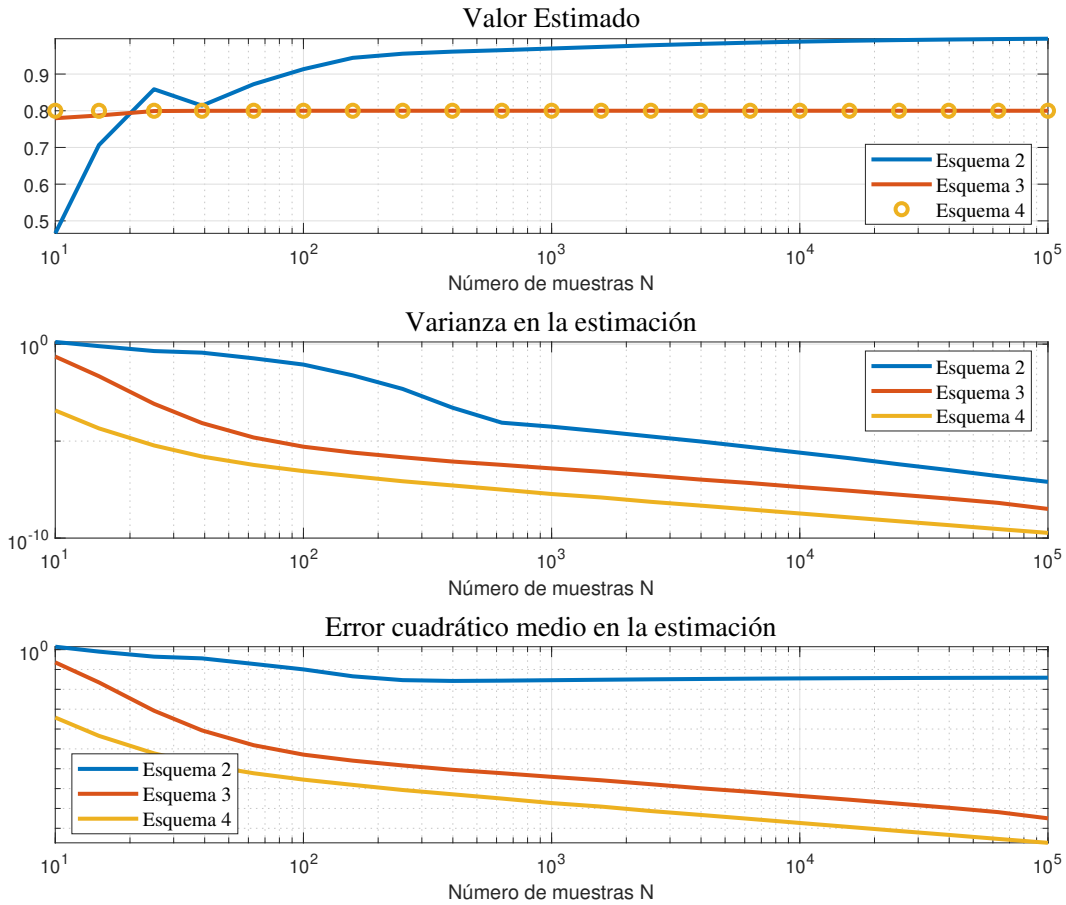


Figura 6.6: Media muestral para el valor estimado de  $p_1^0 = 0,8$  (arriba), varianza de su estimación (al medio) y error cuadrático medio de su estimación (abajo) con  $u_1(t)$  de media 4 y  $u_2(t)$  de media  $-4$ , considerando tamaños muestrales que varían de 10 a  $10^5$  muestras, y simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones para cada tamaño muestral.

tabla 6.6. Donde se observa que los esquemas 2, 3 y 4 logran estimar insesgadamente ambos parámetros cuando se escogen señales Gaussianas de media cero como entrada, pero solo los esquemas 3 y 4 permiten esto cuando se escogen señales Gaussianas con media distinta de cero como entrada. Además, para todas las configuraciones que estiman los parámetros insesgadamente, el orden de convergencia de la varianza respecto al número de muestras  $N$  es  $N^{-1}$ , por lo que se pierde el aumento de este cuando se utiliza la integración para realizar la identificación.

Cabe notar que tanto para entradas con media cero como para entradas con media distinta de cero, los resultados de sesgo y razón de decaimiento de la varianza son muy similares a los obtenidos para el caso 2, correspondiente a la estimación de dos parámetros lineales del numerador desarrollada en el capítulo 5. Esto podría indicar que estos valores son comunes a varias configuraciones de sistemas donde hay dos parámetros a estimar, y que el aumento de la razón de decaimiento al identificar utilizando la integración se limite

a estimar vectores de un solo parámetro.

Parámetro	Entradas	Propiedad	Esquema			
			1	2	3	4
$b_1$	Media 0	Sesgo	Si	No	No	No
		Decaimiento Varianza	-	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-1}$
	Media no 0	Sesgo	Si	Si	No	No
		Decaimiento Varianza	-	-	$N^{-1}$	$N^{-1}$
$p_1$	Media 0	Sesgo	Si	No	No	No
		Decaimiento Varianza	-	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-1}$
	Media no 0	Sesgo	Si	Si	No	No
		Decaimiento Varianza	-	-	$N^{-1}$	$N^{-1}$

Cuadro 6.6: Resultados para el sesgo y la razón de decaimiento de la varianza de un sistema correspondiente al caso 4 bajo los esquemas propuestos.

# EXTENSIONES DEL TRABAJO

En este capítulo se presentan experimentos que extienden o complementan los resultados obtenidos en los capítulos anteriores, y que podrían definir bases para el trabajo futuro de la estimación cooperativa de sistemas bajo efecto integral. En primer lugar se realiza la estimación aumentando la complejidad de las funciones de transferencias y variando el número de integradores de los agentes, planteando una relación entre el número de integradores y el número de parámetros de un agente. Luego, se estudia el impacto de la integración en la identificación si el modelo utilizado para realizar la estimación es más simple que la planta real con la que se trabaja. Finalmente se realizan simulaciones aplicando entradas de distinta naturaleza a cada agente, introduciendo la definición de dominancia estocástica y estudiando el impacto que esta puede tener al complejizar una red de sistema Multi-Agente.

## 7.1. Integradores múltiples y sistemas de orden superior

En los capítulos 4, 5 y 6 se obtuvo el orden de convergencia de la varianza de la estimación del vector de parámetros en distintas clases de sistemas, en particular los sistemas correspondientes a los casos 1 a 4 de la sección 3.5. Se observó que en los casos donde hay un solo parámetro a estimar, la varianza de la identificación de los sistemas logró alcanzar un orden de decaimiento más rápido a  $N^{-1}$  para algunos esquemas (de hasta  $N^{-2}$  o  $N^{-3}$  dependiendo del esquema y de la presencia de un nivel continuo en la entrada), mientras que en los casos donde hay dos parámetros a identificar, la razón de decaimiento de la varianza del vector de parámetros nunca supera el orden de  $N^{-1}$ . Esto incentiva a estudiar la relación que podría existir entre el número de parámetros a identificar y la razón de decaimiento de la varianza de la estimación del vector de parámetros.

En esta sección se consideran distintas clases de sistemas con integración, en los cuales se varía el orden del sistema y el número de parámetros a identificar, y se estudia cómo el largo del vector de parámetros afecta la razón de convergencia de la varianza de su estimación. Además se extiende la identificación a sistemas con integración múltiple, para estudiar si existe una relación entre el número de parámetros a estimar y el número de integradores del sistema.

La identificación en este caso es realizada solamente considerando sistemas de un solo agente, a partir de la salida de

$$y(t) = G(q)u(t) + e(t), \quad (7.1.1)$$

ya que el fin de esta es buscar el orden de convergencia que permite alcanzar cierto nivel de integración y no centrarse en las distintas limitaciones y ventajas que proveen los distintos esquemas Multi-Agente. Además cabe notar que la identificación de un solo agente es equivalente a la estimación Multi-Agente dada por el esquema 4, la cual generó la razón de decaimiento más rápida entre los esquemas para cada caso estudiado anteriormente.

### 7.1.1. Identificación de parámetros en el numerador

Se considera el sistema dado por

$$G(q) = \frac{b_1 q^{n-1} + \dots + b_{n-1} q + b_n}{q^{n-k} (q-1)^k}, \quad (7.1.2)$$

donde  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  es el vector de parámetros a identificar. Se hacen las mismas suposiciones que se han hecho hasta el momento respecto a los modelos disponibles para realizar la identificación. El sistema tiene acceso a su conjunto de modelos  $\mathcal{M}_\Theta$ , y este conjunto de modelos incluye a la planta verdadera  $G(q)$ . Nótese que en este sistema,  $n$  corresponde al número de parámetros a estimar y  $k$  al número de integradores presentes en el sistema.

A continuación se realiza un barrido de simulaciones de Monte-Carlo para este sistema, variando el número de integradores y el número de parámetros entre 1 y 5 cada uno. Para estas simulaciones, el vector de parámetros es generado a partir de los  $n-1$  ceros del sistema, generados aleatoriamente en MATLAB a partir de una distribución uniforme entre 1 y  $-1$ , y una ganancia generada aleatoriamente a partir de una distribución uniforme entre 0 y 1. Las simulaciones son generadas para entradas de ruido blanco Gaussiano de media 0, y entradas de ruido blanco Gaussiano de media distinta de 0, cuyo valor también es generado aleatoriamente. Para estas simulaciones, se extrae el orden de convergencia observado en la varianza para cada combinación posible entre número de integradores del sistema y número de parámetros a estimar. Los resultados de esto se despliegan en la tabla 7.1 para entradas de media cero y en la tabla 7.2 para entradas de media distinta de cero.

Cantidad de Parámetros	Cantidad de Integradores				
	1	2	3	4	5
1	$N^{-2}$	$N^{-4}$	$N^{-6}$	$N^{-8}$	$N^{-10}$
2	$N^{-1}$	$N^{-2}$	$N^{-4}$	$N^{-6}$	$N^{-8}$
3	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-2}$	$N^{-4}$	$N^{-6}$
4	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-2}$	$N^{-4}$
5	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-2}$

Cuadro 7.1: Razón de decaimiento de la varianza de la estimación de un vector de parámetros lineal para un número de muestras creciente  $N$ , en relación al número de integradores de un sistema y el largo del vector de parámetros a estimar, utilizando ruido blanco de media cero como entrada.

Los resultados de ambas tablas ilustran una relación directa entre la cantidad de parámetros a estimar, la cantidad de integradores en el sistema y la razón de decaimiento de la varianza del valor estimado. Se observa que el número de integradores debe ser mayor o igual al número de parámetros a estimar para obtener una razón de decaimiento superior a  $N^{-1}$  y, en el caso de que eso se cumpla, la razón de decaimiento depende directamente

Cantidad de Parámetros	Cantidad de Integradores				
	1	2	3	4	5
1	$N^{-3}$	$N^{-5}$	$N^{-7}$	$N^{-9}$	$N^{-11}$
2	$N^{-1}$	$N^{-3}$	$N^{-5}$	$N^{-7}$	$N^{-9}$
3	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-3}$	$N^{-5}$	$N^{-7}$
4	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-3}$	$N^{-5}$
5	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-3}$

Cuadro 7.2: Razón de decaimiento de la varianza de la estimación de un vector de parámetros lineal para un número de muestras creciente  $N$  en relación al número de integradores de un sistema y el largo del vector de parámetros a estimar, utilizando ruido blanco de media distinta de cero como entrada.

de la relación  $m - n$ , donde  $n$  es el número de parámetros a estimar y  $m$  el número de integradores del sistema. En particular, las tablas indican que la razón de decaimiento de la varianza está dada por

$$M(N) = \begin{cases} N^{-1} & , \text{ si } m < n \\ N^{-2(m-n+1)} & , \text{ si } m \geq n \text{ y } \mu_u = 0 \\ N^{-(2(m-n+1)+1)} & , \text{ si } m \geq n \text{ y } \mu_u \neq 0 \end{cases} \quad (7.1.3)$$

Se puede obtener cierta intuición respecto a los órdenes de decaimiento obtenidos al separar el sistema (7.1.2) en fracciones parciales, redistribuyendo el vector de parámetros  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  en un vector de parámetros  $\{b'_1, b'_2, \dots, b'_n\}$  de forma similar a lo realizado en la sección 5.2.2.

Si  $n > m$ , la descomposición en fracciones parciales del sistema está dada por

$$G(q) = \sum_{i=1}^m \frac{b'_i}{(q-1)^{m+1-i}} + \sum_{j=m+1}^n \frac{b'_j}{q^{n+1-j}}, \quad (7.1.4)$$

por lo tanto, al realizar esta separación,  $n - m$  parámetros del sistema estarán asociados a retardos del sistema, que son operadores estables, y por lo tanto tendrán una razón de convergencia de  $N^{-1}$  en su varianza. Como los parámetros el vector de parámetros  $\{b_1, b_2, \dots, b_n\}$  corresponden a una combinación lineal de los parámetros del vector  $\{b'_1, b'_2, \dots, b'_n\}$ , es esperable que este converja con una razón de  $N^{-1}$  también.

Por otro lado, si  $n \leq m$ , la descomposición en fracciones parciales del sistema está dada por

$$G(q) = \sum_{i=1}^n \frac{b'_i q^{m-i}}{(q-1)^{m-i+1}}, \quad (7.1.5)$$

por lo que, el parámetro  $b'_n$  asociado a la menor integración acompañará a un integrador de orden  $m - n + 1$ . Entonces, es esperable que la razón de decaimiento del vector de parámetros esté delimitada por aquella expresión.

### 7.1.2. Identificación de un vector de parámetros no lineal en su estimación

El experimento de la sub-sección anterior es realizado para dos clases distintas de sistemas, en los que hay parámetros a identificar en el denominador y, por lo tanto, en los cuales el estimador de métodos cuadrados no corresponde al estimador que minimiza el método PEM. Las clases de sistemas considerados son los siguientes:

1. Sistemas donde todos los parámetros a identificar están situados en el denominador, cuyas funciones de transferencia cumplen

$$G(q) = \frac{q^{n+k-1}}{(q-1)^k(q^n + a_1q^{n-1} + \dots + a_n)}, \quad (7.1.6)$$

donde el vector de parámetros  $\{a_1, a_2, \dots, a_n\}$  es tal que el polinomio  $q^n + \dots + a_{n-1}q + a_n$  es estable.

2. Sistemas donde el vector de parámetros a identificar posee componentes en el numerador y el denominador, cuyas funciones de transferencia cumplen:

- Para  $n$  impar:

$$G(q) = \frac{q^{k-1}(b_1q^m + b_2q^{m-1} + \dots + b_mq + b_{m+1})}{(q-1)^k(q^m + a_1q^{m-1} + \dots + a_m)}, \quad (7.1.7)$$

donde el vector de parámetros está dado por  $\{b_1, b_2, \dots, b_{m+1}, a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , con  $2m + 1 = n$ .

- Para  $n$  par:

$$G(q) = \frac{q^{k-1}(b_1q^m + b_2q^{m-1} + \dots + b_mq + 1)}{(q-1)^k(q^m + a_1q^{m-1} + \dots + a_m)}, \quad (7.1.8)$$

donde el vector de parámetros está dado por  $\{b_1, b_2, \dots, b_m, a_1, a_2, \dots, a_m\}$ , con  $2m = n$ .

En ambos casos, el conjunto de parámetros  $\{a_1, a_2, \dots, a_m\}$  es tal que el polinomio  $q^m + a_1q^{m-1} + \dots + a_m$  es estable.

Se realiza un barrido de simulaciones de Monte-Carlo variando el número  $n$  de parámetros a estimar y el número  $m$  de integradores del sistema entre 1 y 5 cada uno, similar al realizado en la sub-sección anterior, donde los parámetros son generados a partir de los ceros y polos del sistema, seleccionados aleatoriamente en MATLAB a partir de una distribución uniforme entre  $-1$  y  $1$  para asegurar la estabilidad. Las simulaciones son realizadas con entradas Gaussianas de media cero y de media distinta de cero, elegida de forma aleatoria en ese caso. Nuevamente se extrae la razón de decaimiento observada en la varianza para cada combinación entre número de integradores y número de parámetros a estimar. Los resultados obtenidos para ambas clases de sistemas son los mismos, y se despliegan en la tabla 7.3 para entradas de media cero, y en la tabla 7.4 para entradas de media distinta de cero.

Los resultados de las tablas indican que la relación de la razón de decaimiento de la varianza respecto al número de parámetros y la cantidad de integradores obtenida anteriormente, dada por (7.1.3), también se cumple para los sistemas presentados en este caso, donde

Cantidad de Parámetros	Cantidad de Integradores				
	1	2	3	4	5
1	$N^{-2}$	$N^{-4}$	$N^{-6}$	$N^{-8}$	$N^{-10}$
2	$N^{-1}$	$N^{-2}$	$N^{-4}$	$N^{-6}$	$N^{-8}$
3	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-2}$	$N^{-4}$	$N^{-6}$
4	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-2}$	$N^{-4}$
5	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-2}$

Cuadro 7.3: Razón de decaimiento de la varianza de la estimación de un vector de parámetros no lineal para un número de muestras creciente  $N$ , en relación al número de integradores de un sistema y el largo del vector de parámetros a estimar, utilizando ruido blanco de media cero como entrada.

Cantidad de Parámetros	Cantidad de Integradores				
	1	2	3	4	5
1	$N^{-3}$	$N^{-5}$	$N^{-7}$	$N^{-9}$	$N^{-11}$
2	$N^{-1}$	$N^{-3}$	$N^{-5}$	$N^{-7}$	$N^{-9}$
3	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-3}$	$N^{-5}$	$N^{-7}$
4	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-3}$	$N^{-5}$
5	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-1}$	$N^{-3}$

Cuadro 7.4: Razón de decaimiento de la varianza de la estimación de un vector de parámetros no lineal para un número de muestras creciente  $N$  en relación al número de integradores de un sistema y el largo del vector de parámetros a estimar, utilizando ruido blanco de media distinta de cero como entrada.

la estimación no es obtenida a partir del método de mínimos cuadrados. Por lo tanto, esta relación podría ser una propiedad general para funciones de transferencia racionales marginalmente estables. Nótese también que los valores encontrados concuerdan con el análisis desarrollado en los capítulos 4, 5 y 6.

## 7.2. Identificación de sistemas simplificados

Los resultados obtenidos en los capítulos 4, 5, 6 y la sección anterior de este capítulo indican que la varianza de los parámetros estimados al identificar sistemas con integración simple posee un orden de decaimiento superior al de la varianza de la estimación de parámetros de un sistema estable cuando solo hay un parámetro a estimar. En algunos casos, puede ser de interés identificar el valor de un solo parámetro de un sistema más complejo, como por ejemplo su polo estable más lento. Sin embargo, esto puede resultar difícil si no se tiene conocimiento del resto del sistema.

En esta sección se extraen algunos experimentos en los que se estudia el impacto de la integración al identificar sistemas para los cuales el modelo utilizado no posee la misma estructura que la planta real, ya sea por un modelado incorrecto o la simplificación de algunas de las dinámicas. Nuevamente, los experimentos son realizados para la identificación de un sistema de un agente, a partir de la salida dada por (7.1.1)

### 7.2.1. Simplificación de numerador en sistema de segundo orden

Se considera el siguiente sistema de segundo orden con integración

$$G(z) = \frac{2z + 1}{(z - 1)(z - p_1^0)}, \quad (7.2.1)$$

donde se busca obtener el valor del polo estable  $p_1^0$ , en este caso se tomará  $p_1^0 = 0,8$ .

Se supone que no se tiene toda la información respecto al numerador del sistema, y la identificación es realizada a partir de un conjunto de modelos dado por

$$G(z, \theta) = \frac{Kz}{(z - 1)(z - p_1)}, \quad (7.2.2)$$

con  $p_1 \in \mathbb{R}$ ,  $|p_1| < 1$ . De forma que el numerador es reemplazado por una ganancia, la cual acompaña a un retardo para mantener el grado relativo del sistema. Para mantener la pendiente de la salida obtenida al alimentar el sistema con una señal continua, se considera  $K = 3$ .

Se busca estimar  $p_1$  considerando el modelo (7.2.2). La estimación es realizada con dos tipos de entradas diferentes. En primer lugar se utiliza ruido blanco de media 0 y varianza 0,1, y en segundo lugar se utiliza ruido de las mismas características filtrado por (3.4.2), con el fin de cancelar la integración del sistema. Para cada entrada, se realizan simulaciones de Monte-Carlo de  $10^4$  realizaciones cada una, variando el tamaño de las muestras entre 10 y  $10^5$ .

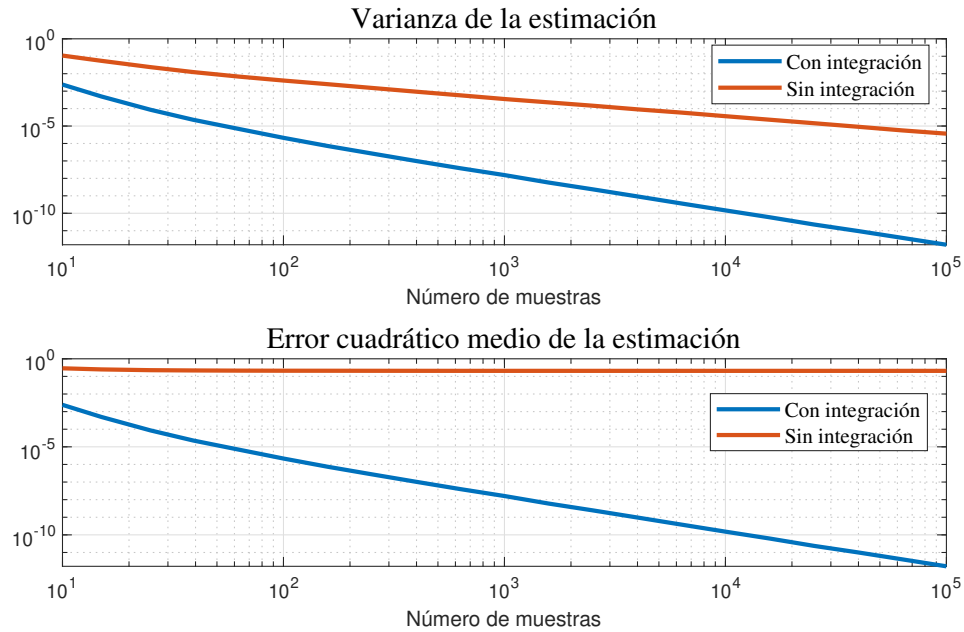


Figura 7.1: Resultados de la estimación del polo  $p_1$  al incluir integración del sistema y al cancelarla

De la figura, se observa que el cancelar la integración en el sistema genera sesgo en la estimación, mientras que si se incluye la integración, la estimación obtiene resultados insesgados. Además la razón de decaimiento de  $N^{-2}$  de la identificación de un parámetro al incluir la integración se mantiene para este caso. Estos resultados pueden indicar que el uso de integración puede ayudar a la estimación de un parámetro al simplificar ciertos sistemas.

### 7.2.2. Simplificación de ceros y polos

Se considera ahora el sistema de tercer orden con integración dado por

$$G(z) = \frac{z(z - 0,1)}{(z - 1)(z - 0,5)(z - p_1^0)}, \quad (7.2.3)$$

donde se busca estimar el valor de  $p_1^0$ , el polo estable más lento del sistema. En este caso se considerará  $p_1^0 = 0,9$ .

Se supone que no se tiene toda la información de los ceros y polos del sistema, y el análisis se realiza a partir del sistema simplificado dado por

$$G(z, \theta) = \frac{Kz}{(z - 1)(z - p_1)}, \quad (7.2.4)$$

con  $p_1 \in \mathbb{R}$ ,  $|p_1| < 1$ . De forma que los polos y ceros estables que no serán parte del proceso de identificación son reemplazados nuevamente por una ganancia  $K$ . Para mantener la pendiente de la salida obtenida al alimentar el sistema con una señal continua, se considera que  $K = 4,5$ .

Se busca estimar  $p_1$  considerando el modelo (7.2.4) realizando simulaciones de Monte-Carlo bajo las mismas condiciones que en la sub-sección anterior. Los resultados de estas simulaciones se muestran en la figura 7.2.

La figura muestra resultados similares al caso anterior. La estimación es sesgada al cancelar la estimación e insesgada con un orden de convergencia de  $N^{-2}$  en su varianza al incluir la integración dentro de la identificación. Este resultado muestra que el utilizar la integración puede ayudar a la estimación del polo estable más lento de un sistema marginalmente estable sin tener toda la información acerca de las otras dinámicas del sistema. Cabe notar que esto sería equivalente a estimar el polo mas lento de un sistema estable, utilizando como entrada ruido blanco integrado, por lo que el uso de integración podría también ser utilizada para ayudar a estimar correctamente el polo dominante de sistemas estables.

## 7.3. Dominancia estocástica

Hasta el momento, los procesos de identificación del sistema Multi-Agente se han realizado utilizando esquemas que se aplican de forma similar entre los dos agentes, ya sea aplicando el mismo filtro a ambos agentes o suponiendo que los agentes se envía la misma clase de datos, con el fin de facilitar en la práctica la identificación simultánea entre ellos. Es de interés en la identificación Multi-Agente, observar lo que sucede si las dinámicas de estos son muy diferentes entre si, y, en casos donde algunas cantidades no son acotadas, como la varianza de la salida de sistemas con integración, encontrar maneras de evaluar y

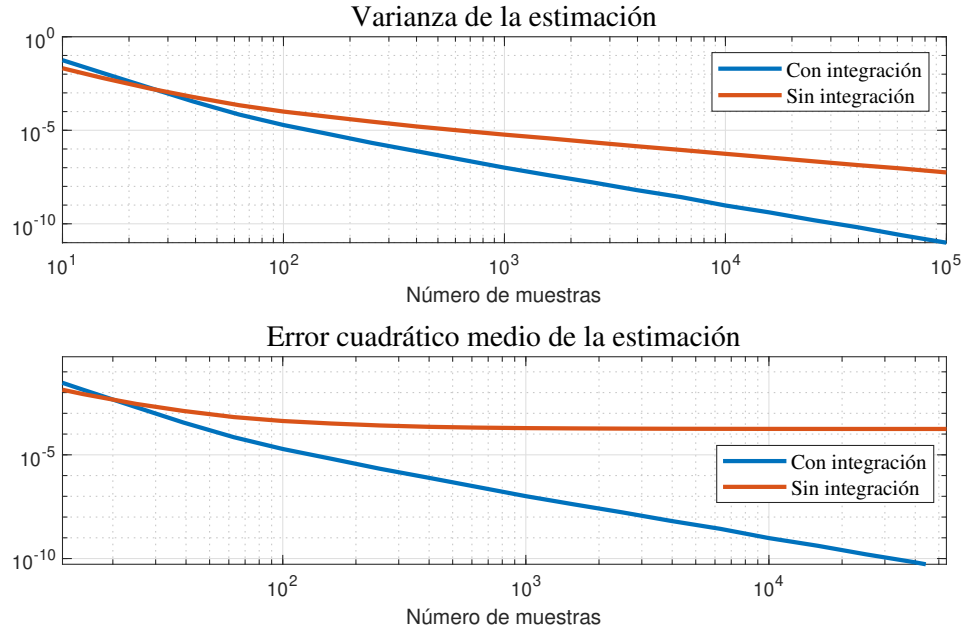


Figura 7.2: Resultados de la estimación del polo  $p_1$  al incluir integración del sistema y al cancelarla

estudiar comportamientos relativos entre estas dinámicas a medida que el tiempo aumenta. Esto motiva la siguiente definición.

**Definición 7.3.1.** Sean  $\{x(t)\}$  e  $\{y(t)\}$  dos procesos estocásticos tales que  $\text{Var}(x(t)) \neq 0$  y  $\text{Var}(y(t)) \neq 0$  para cada  $t \in \mathbb{N}$ . Se dice que  $x(t)$  domina a  $y(t)$  si y solo si

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}(x(t))}{\text{Var}(y(t))} = 0. \quad (7.3.1)$$

**Observación 7.3.1.** La definición 7.3.1 puede ser utilizada para analizar el comportamiento asintótico de procesos estocásticos con varianza arbitraria (no necesariamente acotada). Por ejemplo, si se consideran dos procesos estocásticos mutuamente independientes  $\{x(t)\}$  e  $\{y(t)\}$  tales que  $\{x(t)\}$  domine a  $\{y(t)\}$ , y definiendo  $z(t) := x(t) + y(t)$ , entonces

$$\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{z(t)}{x(t)} = 1. \quad (7.3.2)$$

Intuitivamente, esto diría que al aumentar  $T$  infinitamente, el proceso  $z(t)_{t>T}$  se puede explicar casi completamente por  $x(t)_{t>T}$ .

Para evaluar el efecto de la identificación bajo procesos estocásticos que dominan estocásticamente a otros procesos, en esta sección se simula una variación del esquema 2 de la sección 3.4, en la cual solo la entrada del agente 2 es filtrada por (3.4.2).

La simulación se realiza para dos clases de sistemas distintos. En primer lugar un sistema cuya estructura corresponde al caso 1 de 3.5, con  $b_1 = 0,8$ ,  $b_2 = 0,88$ , y luego un sistema con estructura correspondiente al caso 4 de 3.5, con  $b_1 = 0,1$ ,  $p_1 = 0,8$ ,  $b_2 = 0,09$  y  $p_2 = 0,88$ . Para ambos sistemas se considera un ruido de medición con varianza  $\sigma_e^2 = 1$ , entradas Gaussianas de medias  $\mu_{u_1} = \mu_{u_2} = 0$  y varianzas  $\sigma_{u_1}^2 = \sigma_{u_2}^2 = 1$ . Para este experimento, la identificación es realizada tanto para los parámetros del agente 1 ( $b_1$  y  $p_1$ ) como para los parámetros del agente 2 ( $b_2$  y  $p_2$ ).

En ambos casos se realizó una simulación de Monte-Carlo con  $10^4$  realizaciones, en la cual cada experimento contiene  $5 \cdot 10^3$  muestras. Los resultados para la estimación del parámetro y la varianza del valor estimado son desplegados en la tabla 7.5 para el sistema del caso 1, donde se realiza la estimación de la ganancia de cada agente de un sistema con agentes de primer orden, y en la tabla 7.6 para el sistema del caso 4, donde se identifica un polo y un parámetro lineal de cada agente de un sistema con agentes de segundo orden.

	Valor del Parámetro	Valor Estimado	Varianza
$b_1$	0,8	0,8	$4,4423 \cdot 10^{-9}$
$b_2$	0,88	0,8825	0,3325

Cuadro 7.5: Estimación de  $b_1$  (0,8) y  $b_2$  (0,88) de sistema correspondiente al caso 1 al filtrar la entrada del agente 2.

	Valor del Parámetro	Valor Estimado	Varianza
$b_1$	0,1	0,1	$1,0557 \cdot 10^{-4}$
$p_1$	0,8	0,8	$3,4935 \cdot 10^{-6}$
$b_2$	0,09	-0,6867	19,6855
$p_2$	0,88	0,9540	0,0142

Cuadro 7.6: Estimación de  $b_1$  (0,1),  $p_1$  (0,8),  $b_2$  (0,09) y  $p_2$  (0,88) de sistema correspondiente al caso 4 al filtrar la entrada del agente 2.

Las tablas muestran que, en una configuración de dos agentes, filtrar la entrada de un agente para eliminar sus dinámicas no estables mejora la identificación de los parámetros para el agente sobre el cual la integración es incluida ( $b_1$ , en este caso), llevando a resultados insesgados. Sin embargo, la identificación del sistema del parámetro del agente filtrado es sesgada. Se plantea la siguiente conjetura al respecto.

**Conjetura 4.** *El sistema Multi-Agente consiste en una combinación lineal de agentes con varianza acotada ( $G_2$ ) y no acotada ( $G_1$ ) en su salida. Entonces, de acuerdo a la definición 7.3.1, la salida del sistema con dinámicas no estables domina a la salida del sistema estable. De esta forma, solamente la estimación de los parámetros del sistema no estable  $G_1$  será insesgada.*

La relación entre la dominancia estocástica de un sistema respecto otro y la posibilidad de identificar este sistema dentro de una red de agentes ilustra nuevamente el interés de mantener la integración al identificar los sistemas y también podría facilitar la identificación de algunos agentes al aumentar la escala y la complejidad del sistema, por ejemplo, si no

---

se realiza la identificación de todos los agentes de forma simultánea, filtrando la integración de los agentes sobre los cuales no se realiza la identificación.

# CONCLUSIONES

En este trabajo se estudió la identificación de sistemas compuestos de dos agentes, los cuales poseen dinámicas integrales, bajo distintos esquemas determinados por la comunicación entre los agentes o condiciones sobre la entrada del sistema. En primer lugar se realizó la identificación suponiendo que no existe comunicación entre los agentes, considerando que cada agente solo tiene acceso a su propia entrada y a la salida compartida, donde se observa que en general la identificación no es consistente. Se consideraron los siguientes esquemas para abordar este problema. Primero, se realizó el proceso considerando nuevamente agentes sin comunicación entre ellos, pero filtrando las entradas de los agentes para cancelar la integración y trabajar con ellos como si fueran estables. Luego, se trabajó considerando que cada agente comparte su entrada con el otro agente para realizar el proceso de identificación. Finalmente, se realizó el proceso suponiendo que cada agente comparte una medición de su salida absoluta con en otro agente. Para estos últimos dos esquemas, el trabajo se realizó considerando la integración de los sistemas dentro del proceso de identificación.

Para cada uno de estos esquemas, se consideraron cuatro estructuras diferentes para la función de transferencia y el vector de parámetros de los agentes. Las primeras dos estructuras, correspondientes a la estimación de la ganancia de agentes de primer orden, y la estimación de dos parámetros del numerador de agentes de segundo orden, corresponden a casos de identificación lineal sobre el vector de parámetros, y el estimador otorgado a partir del método de predicción planteado corresponde al estimador de mínimos cuadrados. Por lo que la estimación fue realizada analíticamente para esos casos, además de ser complementada con simulaciones de Monte-Carlo en MATLAB. Para las otras dos estructuras, que corresponden a la estimación de un polo de un sistema de segundo orden, y la identificación de un polo y un parámetro lineal de un sistema de segundo orden, el estimador utilizado no concuerda con el estimador de mínimos cuadrados, y el proceso de estimación de los parámetros fue realizado en MATLAB y analizado a través de simulaciones de Monte-Carlo.

Se realizó un estudio de los estimadores evaluando el sesgo y la razón de decaimiento de la varianza del estimador frente al número de muestras para cada esquema de comunicación, y considerando cada estructura del sistema. Los resultados obtenidos se exponen en los siguientes puntos.

- Si no hay comunicación entre los agentes y se realiza el proceso considerando la integración de estos, los resultados fueron similares para cada una de las funciones de transferencias consideradas. La estimación de los parámetros no es consistente para ninguna de las entradas evaluadas. Sin embargo esta es insesgada para los casos en los

que el problema de identificación es lineal si las entradas son ruido blanco de media cero.

- Si no hay comunicación entre los agentes, pero la integración de estos es cancelada filtrando las entradas, se obtuvieron resultados similares para cada estructura estimada. Si la entrada es ruido blanco de media cero, la estimación de los parámetros es asintóticamente insesgada y consistente, y la razón de decaimiento de la varianza de la estimación decae según  $N^{-1}$  al aumentar el número de muestras  $N$ , la cual corresponde a la razón de decaimiento propia de la varianza de estimación en sistemas estables. Sin embargo, si la entrada tiene media distinta de cero, la estimación es sesgada.
- Si cada agente comparte su entrada con el otro agente. La estimación es insesgada y consistente para las estructuras de identificación lineal, y asintóticamente insesgada y consistente para las otras estructuras. Además, en los casos que el vector de parámetros contenga un solo parámetro a estimar, la razón de decaimiento de la varianza de estimación es de  $N^{-2}$ , mostrando una mejora con respecto al esquema en que se cancela la integración. Por otra parte, en los casos en que el vector de parámetros contiene dos parámetros, la razón de decaimiento se mantiene en  $N^{-1}$ .
- Si cada agente comparte una medición de su salida absoluta con el otro agente, los resultados de sesgo son los mismos que para el esquema anterior. Además, en los casos en que el vector de parámetros solo contiene un parámetro a estimar, la razón de decaimiento aumenta a  $N^{-2}$  si la entrada es ruido blanco de media cero y a  $N^{-3}$  si la entrada posee un valor continuo. En los casos en que el vector de parámetros contiene dos parámetros esta razón de decaimiento se mantiene en  $N^{-1}$ .

Los resultados obtenidos muestran que existe un interés en incluir la integración dentro del problema de identificación de algunos sistemas dinámicos multi-agente, debido a que esto puede mejorar la razón de decaimiento de la varianza frente a la identificación de sistemas estables, provocando que se requiera un número de muestras considerablemente menor para llegar a una identificación confiable. Se observa que este aumento en la convergencia desaparece si el vector de parámetros a estimar contiene más de un parámetro, sin embargo, se observan aún ciertas ventajas de incluir la integración para esos casos. Para el caso en que se identifican dos parámetros en el numerador, se mostró que se pueden redistribuir los parámetros de manera que la razón de decaimiento aumente en uno de ellos. Por otra parte, para el caso de un polo y un parámetro lineal, se observa que las estrategias propuestas, si bien tienen el mismo orden de decaimiento que la de un sistema estable, poseen una varianza menor en varios ordenes de magnitud que al estabilizar el sistema. Además, el sesgo del parámetro estimado converge mucho más rápidamente a cero.

Se observó finalmente que, para la familia de funciones de transferencia considerada, existe una relación directa entre la razón de decaimiento de la varianza de estimación, el número de parámetros a estimar, y el número de integradores del sistema, requiriendo mayor cantidad de integradores para alcanzar cierta razón de decaimiento si el sistema posee más parámetros. También se indagó brevemente en el uso de integración para identificar sistemas con errores de modelado y se introdujo el concepto de dominancia estocástica para la identificación de sistemas con integración dentro de una red de sistemas.

## Trabajo Futuro

Dado el trabajo realizado en esta tesis, se consideran los siguientes puntos para extender y complementar el desarrollo de esta.

- Aplicación de los esquemas en la identificación de sistemas reales. Si bien el desarrollo se abstrae del sistema a identificar, este trabajo fue motivado en gran parte por la estimación de vehículos en pelotón. Por lo tanto se plantea implementar la identificación colaborativa de vehículos incluyendo la integración y corroborar el impacto que esta pueda tener en la convergencia.
- Extender la identificación de sistemas con integración a estructuras de comunicación más complejas. En este trabajo, el impacto se centró particularmente en la naturaleza de la integración en el problema de identificación y se utilizaron sistemas básicos en el aspecto multi-agente. Se podría aumentar la escala del problema y estudiar los desafíos que la presencia de integración puede generar en las propiedades de identificación de una red.
- El desarrollo analítico se basó en parte, a supuestos validados por simulaciones, por lo que existe espacio para desarrollar las pruebas que completen matemáticamente este desarrollo.
- Se obtuvieron resultados empíricos que relacionan la cantidad de integradores de un sistema con la cantidad de parámetros a estimar y la eficiencia de la estimación. Un estudio interesante sería profundizar sobre la naturaleza de esta relación.
- Considerar la utilidad de la identificación de sistemas simplificados con integración y las propiedades de dominancia estocástica dentro de un sistema multi-agente a mayor escala.

---

---

# REFERENCIAS

- [1] Michael Wooldridge. *An Introduction to MultiAgent Systems*. Wiley Publishing, 2nd edition, 2009.
- [2] Ali Dorri, Salil S Kanhere, and Raja Jurdak. Multi-agent systems: A survey. *Ieee Access*, 6:28573–28593, 2018.
- [3] Xiaohua Ge, Qing-Long Han, Xian-Ming Zhang, Lei Ding, and Fuwen Yang. Distributed event-triggered estimation over sensor networks: A survey. *IEEE transactions on cybernetics*, 50(3):1306–1320, 2019.
- [4] Stefanie JM Fonken, Karthik Raghavan Ramaswamy, and Paul MJ Van den Hof. A scalable multi-step least squares method for network identification with unknown disturbance topology. *Automatica*, 141:110295, 2022.
- [5] Harm HM Weerts, Paul MJ Van den Hof, and Arne G Dankers. Identifiability of linear dynamic networks. *Automatica*, 89:247–258, 2018.
- [6] Stefanie JM Fonken, Mina Ferizbegovic, and Håkan Hjalmarsson. Consistent identification of dynamic networks subject to white noise using weighted null-space fitting. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):46–51, 2020.
- [7] Xiaodong Cheng, Shengling Shi, Ioannis Lestas, and Paul MJ Van den Hof. A necessary condition for network identifiability with partial excitation and measurement. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2023.
- [8] Mehdi Jalalmaab, Mohammad Pirani, Baris Fidan, and Soo Jeon. Cooperative estimation of road condition based on dynamic consensus and vehicular communication. *IEEE Transactions on Intelligent Vehicles*, 4(1):90–100, 2018.
- [9] Guilherme A Pimentel, Rafael de Vasconcelos, Aurélio Salton, and Alexandre Bazanella. Network topology impact on the identification of dynamic network models with application to autonomous vehicle platooning. *IFAC-PapersOnLine*, 53(2):1031–1036, 2020.
- [10] Paul MJ Van den Hof and Karthik R Ramaswamy. Path-based data-informativity conditions for single module identification in dynamic networks. In *2020 59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 4354–4359. IEEE, 2020.

- 
- [11] Shengling Shi, Xiaodong Cheng, and Paul MJ Van den Hof. Single module identifiability in linear dynamic networks with partial excitation and measurement. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 2021.
- [12] Bo Wahlberg, Håkan Hjalmarsson, and Jonas Mårtensson. On identification of cascade systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 41(2):5036–5040, 2008.
- [13] Per Hägg, Bo Wahlberg, and Henrik Sandberg. On identification of parallel cascade serial systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 44(1):9978–9983, 2011.
- [14] Wei Zhao and Xuemei Ren. Parameter estimation-based coupling control for generalized cascade systems with guaranteed cost. *Journal of the Franklin Institute*, 354(4):1696–1721, 2017.
- [15] Miguel Galrinho, Riccardo Prota, Mina Ferizbegovic, and Håkan Hjalmarsson. Weighted null-space fitting for identification of cascade networks. *IFAC-PapersOnLine*, 51(15):856–861, 2018.
- [16] Masoud Moravej Khorasani and Erik Weyer. Towards finite sample networked system identification: A cascade network example. In *59th IEEE Conference on Decision and Control (CDC)*, pages 306–311, 2020.
- [17] Paul MJ Van den Hof, Arne Dankers, Peter SC Heuberger, and Xavier Bombois. Identification of dynamic models in complex networks with prediction error methods—basic methods for consistent module estimates. *Automatica*, 49(10):2994–3006, 2013.
- [18] SA Arafteh and AP Sage. Multilevel discrete time system identification in large scale systems. *International Journal of Systems Science*, 5(8):753–791, 1974.
- [19] NJ Guinzy and AP Sage. System identification in large scale systems with hierarchical structures. *Computers & Electrical Engineering*, 1(1):23–42, 1973.
- [20] Ganti Prasada Rao, K Diekmann, and H Unbehauen. Parameter estimation in large scale interconnected systems. *IFAC Proceedings Volumes*, 17(2):729–733, 1984.
- [21] Charalampos P Bechlioulis, Michael A Demetriou, and Kostas J Kyriakopoulos. A distributed control and parameter estimation protocol with prescribed performance for homogeneous Lagrangian multi-agent systems. *Autonomous Robots*, 42(8):1525–1541, 2018.
- [22] Weisheng Chen, Changyun Wen, Shaoyong Hua, and Changyin Sun. Distributed cooperative adaptive identification and control for a group of continuous-time systems with a cooperative pe condition via consensus. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 59(1):91–106, 2013.
- [23] Antonio Franchi, Antonio Petitti, and Alessandro Rizzo. Decentralized parameter estimation and observation for cooperative mobile manipulation of an unknown load using noisy measurements. In *2015 IEEE International Conference on Robotics and Automation (ICRA)*, pages 5517–5522. IEEE, 2015.
- [24] Jae-Woo Lee, Seong-Eun Kim, Woo-Jin Song, and Ali H Sayed. Spatio-temporal diffusion strategies for estimation and detection over networks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60(8):4017–4034, 2012.

- [25] Paolo Stegagno and Chengzhi Yuan. Distributed cooperative adaptive state estimation and system identification for multi-agent systems. *IET Control Theory & Applications*, 13(6):815–822, 2019.
- [26] Huiwei Wang, Xiaofeng Liao, Zidong Wang, Tingwen Huang, and Guo Chen. Distributed parameter estimation in unreliable sensor networks via broadcast gossip algorithms. *Neural Networks*, 73:1–9, 2016.
- [27] Srdjan S Stanković, Miloš S Stankovic, and Dušan M Stipanovic. Decentralized parameter estimation by consensus based stochastic approximation. *IEEE Transactions on Automatic Control*, 56(3):531–543, 2010.
- [28] Tushar Garg and Sayan Basu Roy. Collaborative system identification via consensus-based novel pi-like parameter estimator. In *2019 IEEE Symposium Series on Computational Intelligence (SSCI)*, pages 1285–1291. IEEE, 2019.
- [29] Sheng-Yuan Tu and Ali H Sayed. Diffusion strategies outperform consensus strategies for distributed estimation over adaptive networks. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 60(12):6217–6234, 2012.
- [30] Cassio G Lopes and Ali H Sayed. Diffusion least-mean squares over adaptive networks: Formulation and performance analysis. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 56(7):3122–3136, 2008.
- [31] Kamil Dedecius and Petar M Djurić. Sequential estimation and diffusion of information over networks: A bayesian approach with exponential family of distributions. *IEEE Transactions on Signal Processing*, 65(7):1795–1809, 2016.
- [32] Amin Aliabadi, Mahdi Chehel Amirani, and Changiz Ghobadi. Theoretical performance analysis of sparse system identification using incremental and diffusion strategies over adaptive networks. *Wireless Personal Communications*, 109(2):1181–1193, 2019.
- [33] Fei Gao, Weisheng Chen, Zhiwu Li, Jing Li, and Rui Yan. Neural network-based cooperative identification for a class of unknown nonlinear systems via event-triggered communication. *IEEE Transactions on Systems, Man, and Cybernetics: Systems*, 51(3):1404–1413, 2019.
- [34] Jinhao Jiang and Rajamani Doraiswami. Convergence analysis of least-squares identification algorithm for unstable systems. In *IEE Proceedings D (Control Theory and Applications)*, volume 134, pages 301–308. IET, 1987.
- [35] Ngai Hang Chan and Ching Zong Wei. Limiting distributions of least squares estimates of unstable autoregressive processes. *The Annals of Statistics*, pages 367–401, 1988.
- [36] Michael J Monsour and Piotr W Mikulski. On limiting distributions in explosive autoregressive processes. *Statistics & probability letters*, 37(2):141–147, 1998.
- [37] Wayne A Fuller. *Introduction to statistical time series*. John Wiley & Sons, 2009.
- [38] David P Hasza and Wayne A Fuller. Estimation for autoregressive processes with unit roots. *The Annals of Statistics*, 7(5):1106–1120, 1979.

- [39] Udaya Ghai, Holden Lee, Karan Singh, Cyril Zhang, and Yi Zhang. No-regret prediction in marginally stable systems. In *Conference on Learning Theory*, pages 1714–1757. PMLR, 2020.
- [40] Said E Said and David A Dickey. Testing for unit roots in autoregressive-moving average models of unknown order. *Biometrika*, 71(3):599–607, 1984.
- [41] Stephen Bond, Céline Nauges, Frank Windmeijer, et al. Unit roots and identification in autoregressive panel data models: A comparison of alternative tests. Technical report, International Conferences on Panel Data, 2002.
- [42] Sonja Stüdli, María M Seron, and Richard H Middleton. From vehicular platoons to general networked systems: String stability and related concepts. *Annual Reviews in Control*, 44:157–172, 2017.
- [43] Ziran Wang, Guoyuan Wu, and Matthew J Barth. A review on cooperative adaptive cruise control (cacc) systems: Architectures, controls, and applications. In *2018 21st International Conference on Intelligent Transportation Systems (ITSC)*, pages 2884–2891. IEEE, 2018.
- [44] Derek Caveney. Cooperative vehicular safety applications. *IEEE Control Systems Magazine*, 30(4):38–53, 2010.
- [45] Marco A Gordon, Francisco J Vargas, and Andrés A Peters. Comparison of simple strategies for vehicular platooning with lossy communication. *IEEE Access*, 9:103996–104010, 2021.
- [46] Hossein Chehardoli and Ali Ghasemi. Adaptive centralized/decentralized control and identification of 1-d heterogeneous vehicular platoons based on constant time headway policy. *IEEE Transactions on Intelligent Transportation Systems*, 19(10):3376–3386, 2018.
- [47] Lingyun Xiao, Feng Gao, and Jiangfeng Wang. On scalability of platoon of automated vehicles for leader-predecessor information framework. In *2009 IEEE Intelligent Vehicles Symposium*, pages 1103–1108. IEEE, 2009.
- [48] Darbha Swaroop and J Karl Hedrick. String stability of interconnected systems. *IEEE transactions on automatic control*, 41(3):349–357, 1996.
- [49] Athanasios Papoulis and S Unnikrishna Pillai. *Probability, random variables and stochastic processes*. McGraw-Hill, 2002.
- [50] Torsten Söderström. *Discrete-time stochastic systems: estimation and control*. Springer Science & Business Media, 2002.
- [51] Nuno C Martins, Munther A Dahleh, and John C Doyle. Fundamental limitations of disturbance attenuation in the presence of side information. *IEEE Transactions on automatic control*, 52(1):56–66, 2007.
- [52] Jun Shao. *Mathematical statistics*. Springer Science & Business Media, 2003.
- [53] Takeshi Amemiya. *Advanced econometrics*. Harvard university press, 1985.
- [54] Oliver Ibe. *Fundamentals of applied probability and random processes*. Academic Press, 2014.

- 
- [55] Reuven Y Rubinstein and Dirk P Kroese. *Simulation and the Monte Carlo method*. John Wiley & Sons, 2016.
- [56] Lennart Ljung. *System Identification. Theory for the User, 2nd Edition*. Prentice Hall, Upper Saddle River, 1999.
- [57] Thomas Söderström and Peter Stoica. *System Identification*. Prentice Hall International, 1989.
- [58] Frank Hansen and Gert Kjærgård Pedersen. *Jensen's inequality for operators and Löwner's theorem*, volume 258. Springer, 1982.
- [59] Yvonne M Bishop, Stephen E Fienberg, and Paul W Holland. *Discrete multivariate analysis: Theory and practice*. Springer Science & Business Media, 2007.
- [60] Johannes Faulhaber. *Academia Algebrae: darinnen dir miraculosische Gvontiones zu den höchsten Costen weiters continuirt u. profitiert werden*. Johann Remelins, 1631.
- [61] Pedersen Hansen. Jensen's inequality for operators and löwner 's theorem. *Mathematische Annalen*, 258:229–242, 1981.