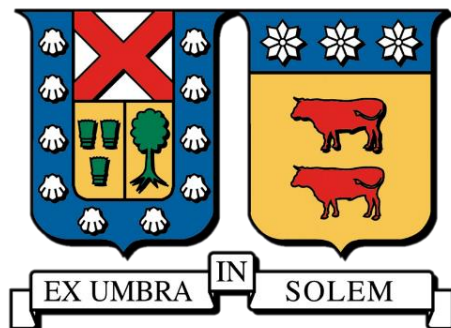


UNIVERSIDAD TÉCNICA FEDERICO SANTA MARÍA
DEPARTAMENTO DE INGENIERÍA QUÍMICA Y AMBIENTAL
VALPARAÍSO – CHILE



**“USO DE SIMULACIÓN MONTE CARLO PARA MEJORAS DEL
DISEÑO EXPERIMENTAL EN LAS CARACTERIZACIONES
CINÉTICAS DE LA FLOTACIÓN”**

GILDA TAMARA MOLINA MENESES

MEMORIA PARA OPTAR AL TÍTULO DE
INGENIERO CIVIL AMBIENTAL

PROFESOR GUÍA:
DR. LUIS VINNETT PERALTA

CO-REFERENTE:
DR. HENRIK HANSEN

OCTUBRE – 2025



CONSTANCIA DE VALIDACIÓN Y CONFIDENCIALIDAD DE MONOGRAFÍA A REPOSITORIO ACADÉMICO

1.- IDENTIFICACIÓN DEL TRABAJO ACADÉMICO

Tipo de monografía (marcar una opción): ☒ Memoria o trabajo de título ☐ Tesis de Postgrado

Título del trabajo: USO DE SIMULACIÓN MONTE CARLO PARA MEJORAS DEL DISEÑO EXPERIMENTAL EN LAS CARACTERIZACIONES CINÉTICAS DE LA FLOTACIÓN _____

Nombre del candidato(a): _GILDA TAMARA MOLINA MENESES _____

Carrera / Grado: _INGENIERÍA CIVIL AMBIENTAL/ PREPGRADO _____

Campus: __ CASA CENTRAL _____ **Departamento:** __INGENIERÍA QUÍMICA Y AMBIENTAL _____

2.- VALIDACIÓN DEL PROFESOR GUÍA/DIRECTOR DE TESIS

Yo, __LUIS EDUARDO VINNETT PERALTA_____, en mi calidad de profesor(a) guía/director(a) del trabajo académico mencionado anteriormente **DEJO CONSTANCIA** que:

- He revisado esta versión del documento y corresponde a la versión final aprobada del trabajo.
- El trabajo cumple con los requisitos académicos y de formato establecidos por la institución.

3.- EVALUACIÓN DE CONFIDENCIALIDAD POR PROPIEDAD INDUSTRIAL (marcar una opción)

☒ El trabajo **NO contiene** información que amerite confidencialidad y puede ser publicado de inmediato en repositorio con acceso abierto.

☐ El trabajo **CONTIENE** información con potenciales implicancias de propiedad industrial o intelectual y requiere un periodo de confidencialidad (**embargo**) por (**marcar una opción**):

☐ 6 meses ☐ 12 meses ☐ 2 años ☐ 3 años ☐ 5 años ☐ 10 años

Fundamentación de la necesidad de confidencialidad (obligatorio si se solicita embargo):

4.- FIRMAS

Profesor(a) guía o director(a) de memoria o tesis:

LUIS EDUARDO
VINNETT PERALTA

Digitally signed by LUIS
EDUARDO VINNETT PERALTA
Date: 2025.10.30 13:37:17 -03'00'

Fecha: __30/10/2025_____

Firma: _____

Estudiante o Candidato(a):

Fecha: __30/10/2025_____

Firma: _____

AGRADECIMIENTOS

A todas las personas que confiaron en mí, y me dieron la fuerza y el ánimo para seguir adelante a lo largo de mi carrera.

A mis padres, Nibaldo y Gilda, por enseñarme la importancia del esfuerzo y del sacrificio, pero también por darme siempre todo lo que necesité y todas las herramientas necesarias para llegar a este momento. Gracias por los valores que me inculcaron, por la infancia tan feliz y llena de amor que me entregaron, por su apoyo y confianza incondicional en cada paso que he dado. Papá, gracias por criarme como una mujer fuerte y valiente, y a la vez llena de amor. Mamá, gracias por ser mi guía, por tus consejos, tu amor y tu profunda dedicación a la familia.

A mi hermana Bárbara, por ser mi pequeña compañera, por confiar en mí, por escucharme. No me imagino mi vida sin ti. A mis abuelas por ser otras madres para mí, por enseñarme con su ejemplo que, aunque la vida no siempre es fácil, con esfuerzo, cariño y perseverancia se puede salir adelante. A mis primos, por ser mis compañeros durante toda la vida, las risas, los juegos en el campo, las bañadas en el río, las subidas a los cerros definitivamente marcaron mi forma de ver el mundo y de apreciar la vida.

A Francisco M., por ser mi compañero en estos últimos cuatro años. Gracias por tu alegría, por preocuparte siempre por los demás, y por estar conmigo en mis mejores y peores momentos. Gracias por tu apoyo, guía y contención.

A mis amigos, “Los Avengers” por las noches de estudio, las buenas conversaciones, las risas y el apaño. A la G’2020 ambiental, por motivarme cada día a ser mejor; todos son personas increíbles y de cada uno aprendí algo distinto. A mis amigas Trinidad y Belén por ser mis compañeras inseparables, sin ustedes, estos años no habrían sido lo mismo. A mis amigos del colegio, especialmente a Ayline y Armando, por estar siempre, incluso cuando el tiempo o la distancia nos separan. A mis compañeros del laboratorio, por su apoyo y compañía en los días más intensos de escritura de esta memoria, especialmente a Álex y Francisco F. por realizar las pruebas de flotación que hicieron posible el desarrollo de este trabajo.

Agradezco a todos los profesores que confiaron en mí para ser ayudante. En especial, al profesor Luis Vinnett, por creer en mí incluso cuando yo no lo hacía. Gracias por enseñarme el sentido del rigor y la búsqueda constante de la excelencia. Asimismo, al profesor Henrik Hansen, por su compromiso, disponibilidad y retroalimentación durante el proceso final de esta memoria.

A la iniciativa estudiantil “Ecosansano” por permitirme participar en proyectos que ayudan a que nuestra universidad sea más sustentable. A Admisión USM por darme la oportunidad de motivar y guiar a las futuras generaciones. Finalmente, al proyecto FONDECYT de Iniciación N° 11240125, que hizo posible la realización de este trabajo.

A Nibaldo y Gilda, mis padres, a Bárbara, mi hermana, a mis abuelas María Dolores y María Mercedes, que han sido y serán siempre mi fuerza, mi ejemplo y mi motivación. Cada paso que doy es para que se sientan orgullosos. Este trabajo es tan mío como de ustedes, porque en cada página está reflejado el esfuerzo, el cariño y los sueños que compartimos.

RESUMEN

La flotación es una técnica de concentración ampliamente utilizada en la industria minera para separar minerales valiosos de los no valiosos. En este contexto, las pruebas de flotación *batch* a escala de laboratorio son esenciales para el posterior diseño de circuitos industriales. En este trabajo se aplicaron simulaciones Monte Carlo para mejorar el diseño experimental en dichas pruebas, asegurando la confiabilidad de los parámetros utilizados en el escalamiento industrial. Para esto, se analizaron ensayos de flotación *batch* replicados bajo dos condiciones de tamaño de partícula: $P_{80} = 300 \mu\text{m}$ (4 réplicas), y $P_{80} = 212 \mu\text{m}$ (6 réplicas), con 14 intervalos de flotación, superior a lo usualmente empleado (< 8 intervalos). Los datos tiempo–recuperación se modelaron con representaciones cinéticas clásicas (Tasa Única, Rectangular y Gamma), y se submuestrearon para emular escenarios experimentales típicos. Los parámetros se estimaron mediante mínimos cuadrados ordinarios, ponderados y generalizados, tomando en cuenta la autocorrelación de los errores. Se obtuvo que el modelo Gamma, con parámetros estimados por mínimos cuadrados ordinarios, entregó la mejor generalización bajo condiciones de submuestreo y bajo número de réplicas.

A partir de los parámetros cinéticos Gamma obtenidos con 14 datos experimentales se definió el caso base (*ground-truth*). Para este caso base, se realizaron 1000 simulaciones Monte Carlo con errores normales autocorrelacionados. Estas simulaciones se submuestrearon (5 datos tiempo–recuperación) para evaluar la sensibilidad de los parámetros cinéticos. Se utilizó el error cuadrático relativo de los parámetros para comparar todas las combinaciones de submuestreo posibles. Se identificó que un muestreo adecuado, en términos de estimación de parámetros, incluye el menor tiempo (*e.g.*, 0.17 min), tiempos intermedios (transición al agotamiento) y el mayor tiempo (*e.g.*, 32 min). El peor desempeño se obtuvo al utilizar solo tiempos largos (> 1.5 min).

Con los resultados de la simulación, se realizó un ejercicio de escalamiento *batch*-planta. Se analizaron las recuperaciones industriales utilizando un factor $k_{\text{batch}}/k_{\text{planta}}$ de 2.5, un tiempo de residencia medio del circuito (τ) de 20 minutos y seis celdas en serie. Con esto, y los parámetros del caso base, se obtuvo la recuperación del caso base. Alrededor de esta, se definió un umbral de consistencia con el caso base, correspondiente al error estándar

experimental. Se realizaron dos análisis: (i) se calcularon las recuperaciones de todas las combinaciones submuestreadas obtenidas por simulación (5 datos tiempo-recuperación), manteniendo $\tau = 20$ min y 6 celdas, y se compararon con las recuperaciones del caso base; (ii) se estimaron los τ necesarios de cada combinación para alcanzar las recuperaciones del umbral de consistencia (manteniendo 6 celdas). Estos tiempos se compararon con los del caso base utilizando un factor de traslape, y posteriormente fueron comparados en términos de volúmenes de celdas necesarios para obtener resultados consistentes con el caso base (sub o sobredimensionamiento de los tamaños de celda).

Se concluyó que utilizar solo tiempos cortos en las pruebas *batch* (<1.5 min) genera errores significativos en el dimensionamiento de circuitos, con los peores diseños experimentales produciendo hasta un 6% de resultados infactibles ($R_{\infty} < R_{inf}$ del umbral del caso base), y un 70% de estimaciones que llevaron a volúmenes de celda sub o sobredimensionados. Por el contrario, las mejores condiciones de submuestreo tuvieron un 70% de datos consistentes con el caso base. Asimismo, se observó que los patrones de muestreo para estimar los parámetros cinéticos no coinciden con los más adecuados para escalamiento, ya que este último requiere caracterizar apropiadamente el agotamiento de la flotación. No obstante, los mejores tiempos obtenidos de ambos análisis (parámetros y escalamiento) se ubicaron en rangos que resultaron mutuamente favorables entre sí.

En síntesis, mediante simulaciones Monte Carlo, se evidenció que la selección errónea de los tiempos de flotación en pruebas *batch* genera sesgos significativos en la estimación de parámetros, lo que aumenta la incertidumbre del escalamiento industrial.

Este estudio fue financiado por el proyecto FONDECYT de Iniciación N° 11240125, el que permitió llevar a cabo las pruebas cinéticas y los respectivos análisis de laboratorio.

ÍNDICE GENERAL

CAPÍTULO I	1
1. INTRODUCCIÓN.....	1
1.1. Objetivo general	2
1.2. Objetivos específicos.....	2
CAPÍTULO II.....	3
2. ANTECEDENTES GENERALES.....	3
2.1. Flotación	3
2.2. Caracterización del proceso de flotación.....	4
2.3. Modelación cinética del proceso de flotación <i>batch</i>	5
2.4. Modelación cinética del proceso de flotación en continuo.....	9
2.5. Escalamiento <i>batch</i> – planta	10
2.6. Simulaciones Monte Carlo	11
CAPÍTULO III	13
3. METODOLOGÍA.....	13
3.1. Procedimiento experimental.....	13
3.2. Análisis de datos.....	15
3.3. Selección de caso base.....	18
3.4. Simulaciones Monte Carlo	19
3.5. Escalamiento industrial	21
CAPÍTULO IV	24
4. ANÁLISIS DE RESULTADOS.....	24
4.1. Resultados experimentales	24
4.2. Ajuste de modelos cinéticos	25

4.3. Modelación de respuestas submuestreadas para selección de herramientas de caracterización cinética.....	27
4.4. Simulación de $R(t)$	29
4.5. Escalamiento <i>batch</i> – planta.....	32
4.6. Impacto de diseño experimentales <i>batch</i> desbalanceados en los costos	38
4.7. Impactos ambientales de diseño experimentales <i>batch</i> desbalanceados	40
CAPÍTULO V	41
5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES	41
5.1. Conclusiones.....	41
5.2. Recomendaciones	42
REFERENCIAS	43
APÉNDICE	47
Apéndice A. Resultados experimentales	47
Apéndice B. Matrices de covarianzas muestrales	49
Apéndice C. Matrices de covarianzas contraídas	50
Apéndice D. Número de condicionamiento.....	51
Apéndice E. Resultados <i>Test</i> N°2	52
Apéndice F. Comparación de ECR de los parámetros y porcentaje de consistencia con el caso base en dimensionamiento de circuitos.	56
Apéndice G. Cálculo de impactos de diseño experimentales <i>batch</i> desbalanceados en los costos	57

ÍNDICE DE FIGURAS

Figura 2.1 Esquema del proceso de flotación (Yianatos & Vinnett, 2015).	4
Figura 2.2 Caracterización del proceso de flotación (Yianatos & Vinnett, 2015).	4
Figura 2.3 Analogía de la flotación como una reacción química.	6
Figura 2.4 Ejemplos de relaciones $f(k)$ - $R(t)$: a) Distribuciones $f(k)$ de Tasa única, Rectangular y Gamma con mismo $k_{promedio}$ y b) Respuestas cinéticas.	9
Figura 2.5 Comparación entre las cinéticas de flotación obtenidas en pruebas <i>batch</i> y a escala industrial.	11
Figura 3.1 Esquema de metodología utilizada en este trabajo.	13
Figura 3.2 Esquema umbral para la recuperación objetivo a partir del caso base.	22
Figura 3.3 Esquema de cálculo de factor de traslape (J) para evaluar combinaciones.	23
Figura 4.1 Respuestas cinéticas experimentales.	24
Figura 4.2 Correlación entre las recuperaciones experimentales, (a) $R(t = 1.5 \text{ min})$ versus $R(t = 1 \text{ min})$, (b) $R(t = 10 \text{ min})$ versus $R(t = 8 \text{ min})$.	25
Figura 4.3 Ajuste de modelos cinéticos, para el <i>Test</i> N°1: (a) modelo de Tasa Única, (b) modelo Rectangular, (c) modelo Gamma, mediante MCO, MCP, MCG.	26
Figura 4.4 Fracción acumulada del PRESSM, comparando MCO, MCP Y MCG (<i>Test</i> N°1): a) modelo de Tasa Única, b) modelo Rectangular, y c) modelo Gamma.	28
Figura 4.5 Fracción acumulada del ECR de los parámetros, a) <i>Test</i> N°1, b) <i>Test</i> N°2.	30
Figura 4.6 Sensibilidad de parámetros cinéticos obtenidos de los datos tiempo-recuperación simulados. <i>Test</i> N°1.	31
Figura 4.7 Mejor y peor patrón de muestreo en términos de la estimación de parámetros, <i>Test</i> N°1, a) mejor selección de intervalos, b) peor selección de intervalos.	32

Figura 4.8 Fracción Acumulada de las recuperaciones planta escaladas ($\tau = 20$ min y $N = 6$) empleando los mejores y peores intervalos de flotación según el ECR de los parámetros, a) <i>Test</i> N°1 b) <i>Test</i> N°2.	33
Figura 4.9 Fracción acumulada del porcentaje de simulaciones consistentes con el caso base, a) <i>Test</i> N°1 b) <i>Test</i> N°2.....	35
Figura 4.10 Fracción acumulada de los volúmenes efectivos para alcanzar los umbrales de recuperación, empleando el mejor y peor patrón de muestreo (escalamiento) según consistencia con el caso base, a) <i>Test</i> N°1, b) <i>Test</i> N°2.....	36
Figura 4.11 Mejores y peores intervalos de flotación para escalamiento <i>Test</i> N°1, a) mejor combinación, y b) peor combinación.	38
Figura E.1 Ajuste de modelo cinéticos, para el <i>Test</i> N°2 (a): modelo de Tasa Única, (b) modelo Rectangular, (c) modelo Gamma, mediante MCO, MCP, MCG.....	52
Figura E.2 Fracción acumulada del PRESSM, comparando MCO, MCP Y MCG (<i>Test</i> N°2): a) modelo de Tasa Única, b) modelo Rectangular, y c) modelo Gamma.	53
Figura E.3 Sensibilidad de parámetros cinéticos obtenidos de los datos tiempo-recuperación simulados. <i>Test</i> N°2.	54
Figura E.4 Mejor y peor patrón de muestreo en términos de la estimación de parámetros, <i>Test</i> N°2, a) mejor selección de intervalos, b) peor selección de intervalos.	55
Figura E.5 Mejores y peores intervalos de flotación para escalamiento <i>Test</i> N°2, a) mejor combinación, y b) peor combinación.	55
Figura F.1 Comparación de mejores combinaciones en términos de estimación de parámetros y dimensionamiento, a) <i>Test</i> N°1, b) <i>Test</i> N°2.	56

ÍNDICE DE TABLAS

Tabla 3.1 Condiciones experimentales de la molienda.	14
Tabla 3.2 Condiciones experimentales de las flotaciones <i>batch</i>	15
Tabla 4.1 Parámetros cinéticos obtenidos con los modelos, mediante MCO, MCP y MCG.	27
Tabla 4.2 Mediana del PRESSM para los tres modelos cinéticos (Tasa Única, Rectangular y Gamma), empleando los tres métodos de ajuste (MCO, MCP, MCG).	28
Tabla 4.3 Parámetros del caso base (modelo Gamma) y tiempos utilizados en las simulaciones Monte Carlo.	29
Tabla 4.4 Recuperación del caso base y umbrales de consistencia, <i>Test</i> N°1 y <i>Test</i> N°2, ($\tau = 20$ min y 6 celdas en serie).	32
Tabla 4.5 Comparación de resultados de las recuperaciones (escaladas) respecto al umbral del caso base, empleando el mejor y peor patrón de muestreo según el ECR de los parámetros (<i>Test</i> N°1 y <i>Test</i> N°2).	34
Tabla 4.6 Tiempos de residencia (τ) del caso base y umbrales de consistencia, <i>Test</i> N°1 y <i>Test</i> N°2, N = 6 celdas en serie.	34
Tabla 4.7 Volúmenes efectivos del caso base y de los umbrales de consistencia, <i>Test</i> N°1 y <i>Test</i> N°2, $\tau = 20$ min y 6 celdas en serie.	35
Tabla 4.8 Comparación de los volúmenes de celda necesarios para alcanzar los umbrales de recuperación del caso base, empleando el mejor y peor patrón de muestreo (escalamiento) según consistencia con el caso base, (<i>Test</i> N°1 y <i>Test</i> N°2).	37
Tabla 4.9 Resumen de aspectos e impactos ambientales por tipo de sesgo en el escalamiento (sobre o subdimensionamiento).	40
Tabla A.1 Resultados experimentales, $P_{80} = 300 \mu\text{m}$	47
Tabla A.2 Resultados experimentales, $P_{80} = 212 \mu\text{m}$	48
Tabla B.1 Matriz de covarianza muestral, <i>Test</i> N°1.	49

Tabla B.2 Matriz de covarianza muestral, <i>Test</i> N°2.....	49
Tabla C.1 Matriz de covarianza contraída, <i>Test</i> N°1.....	50
Tabla C.2 Matriz de covarianza contraída, <i>Test</i> N°2.....	50
Tabla D.1 Número de condicionamiento de las matrices de covarianza muestral y contraídas, para <i>Test</i> N°1 y <i>Test</i> N°2.....	51

CAPÍTULO I

1. INTRODUCCIÓN

La flotación es una de las técnicas de separación más versátiles en procesamiento de minerales. El diseño y dimensionamiento de los circuitos de flotación depende en gran medida de pruebas de laboratorio, particularmente de las cinéticas de flotación *batch*. En estas pruebas, las tasas de recuperación observables están condicionadas por la selección de los intervalos de flotación. Estos intervalos se eligen típicamente de manera de obtener suficientes datos tanto al inicio como al final de la prueba, y así estimar los parámetros cinéticos (constante cinética promedio y recuperación máxima). Sin embargo, una selección desequilibrada de estos intervalos puede sesgar artificialmente la proporción de minerales de flotación rápida y lenta detectable a partir de los datos, afectando el escalamiento y el diseño del circuito.

Este trabajo de título analizó respuestas cinéticas replicadas de flotación *batch* de sulfuros de cobre. Los datos tiempo-recuperación se modelaron mediante representaciones clásicas de flotación. Estos datos consideraron 14 concentrados por prueba cinética. A partir de la variabilidad experimental, se aplicó simulación Monte Carlo de manera de obtener respuestas cinéticas representativas de las pruebas experimentales. A partir de respuestas tiempo-recuperación submuestreadas (*e.g.*, 5 concentrados por prueba cinética), se aplicó escalamiento para estimar el tiempo de flotación necesario para alcanzar una recuperación objetivo en un circuito *rougher* industrial. A partir de esto, se evaluaron sesgos en el dimensionamiento asociados al diseño experimental, y su impacto en los costos de capital y de operación.

1.1. Objetivo general

Seleccionar adecuadamente los intervalos de flotación en pruebas cinéticas con el fin de determinar el tiempo de flotación necesario para alcanzar una recuperación objetivo en un proceso *rougher* industrial.

1.2. Objetivos específicos

- Caracterizar respuestas cinéticas de flotación mediante mínimos cuadrados ordinarios y generalizados, evaluando ventajas y desventajas para su aplicación en pruebas cinéticas con bajo número de repeticiones.
- Estudiar la sensibilidad de los parámetros cinéticos ante respuestas tiempo-recuperación submuestreadas.
- Evaluar sesgos en los resultados de escalamiento causadas por deficiencias en los diseños experimentales.
- Analizar el impacto de aplicar diseños experimentales desbalanceados sobre los costos de capital y operación, con sus respectivas implicancias en la sustentabilidad del proceso.

CAPÍTULO II

2. ANTECEDENTES GENERALES

2.1. Flotación

La flotación es una técnica de separación ampliamente utilizada en la industria minera (Wills & Finch, 2016), la que se basa en las diferencias en las propiedades superficiales de los minerales (Fuerstenau & Han, 2003). Se trata de un proceso fisicoquímico en el que interactúan tres fases: sólida (minerales valiosos y no valiosos), líquida (agua) y gaseosa (aire). Además de su aplicación en la concentración de minerales, la flotación ha sido utilizada en la limpieza de aguas residuales para la remoción de aceites, grasas y partículas en suspensión en aguas de refinerías y hornos de fundición. Asimismo, esta técnica se utiliza también en la industria del reciclaje de papel para remover tinta y sustancias pegajosas (Yianatos & Vinnett, 2015).

El proceso consiste en el contacto entre burbujas de aire y una pulpa (mezcla de agua y sólidos) que contiene partículas hidrofóbicas e hidrofílicas en suspensión. Las partículas hidrofóbicas tienden a adherirse a las burbujas ascendiendo hasta la espuma, donde tienen posibilidad de ser recuperadas en el concentrado (Figura 2.1). Las partículas no adheridas (mayormente hidrofílicas) son rechazadas en una corriente de relave. La separación, sin embargo, no es perfecta, ya que impurezas pueden ser recuperadas en el concentrado por asociación con el mineral valioso, por arrastre hidráulico, o por presentar características hidrofóbicas (Wills & Finch, 2016).

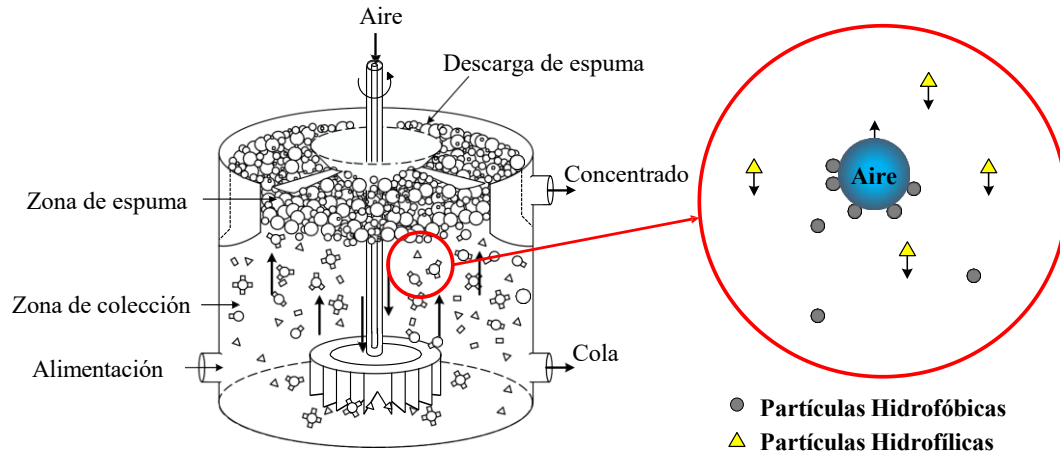


Figura 2.1 Esquema del proceso de flotación (Yianatos & Vinnett, 2015).

2.2. Caracterización del proceso de flotación

El proceso de flotación es comúnmente dividido en dos zonas, la de colección y la de espuma, las cuales se complementan para obtener el producto final (Yianatos & Vinnett, 2015). En la zona de colección ocurre la formación del agregado partícula-burbuja, mientras que en la zona de espuma se lleva a cabo la separación, en la que se favorece el retorno de la ganga arrastrada y del material menos liberado a la pulpa (Figura 2.2).

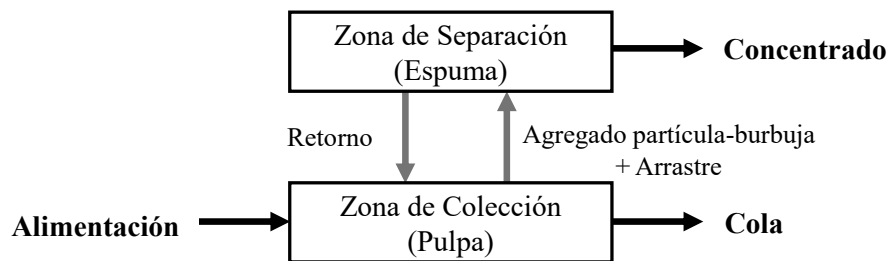


Figura 2.2 Caracterización del proceso de flotación (Yianatos & Vinnett, 2015).

Uno de los índices más utilizados para evaluar la eficiencia de la flotación es la recuperación del mineral, definida como la fracción de mineral valioso obtenido en el concentrado respecto al mineral valioso en la alimentación [Ec. (2.1)]

$$R = \frac{\text{Masa de Mineral Valioso en el Concentrado}}{\text{Masa de Mineral Valioso en la Alimentación}} \times 100\% \quad (2.1)$$

La eficiencia de la flotación está determinada por: (i) variables químicas, como las propiedades superficiales de los minerales y la concentración de reactivos; (ii) físicas, como el tamaño de partícula y el grado de liberación; y (iii) operacionales, tales como el flujo superficial de aire, el tamaño de burbuja, el porcentaje de sólidos, entre otros. El tamaño de partícula resulta especialmente relevante debido a su influencia en la recuperación, y su tendencia típica descrita por la llamada “curva de elefante” (Lynch et al., 1981). Según este comportamiento, la recuperación alcanza un óptimo en el rango de 15 a 100 μm , disminuyendo hacia partículas finas, por su baja inercia y tendencia a la oxidación, y también hacia las partículas gruesas, debido a su falta de liberación y mayor susceptibilidad del agregado partícula-burbuja a la turbulencia causada por la mayor inercia de las partículas.

Debido a que el mineral valioso se encuentra parcialmente asociado a otros minerales, existe un compromiso entre recuperación y ley del concentrado (calidad del producto). Al aumentar la recuperación del mineral valioso también se aumenta la recuperación de ganga, reduciendo la ley del concentrado. Por el contrario, si se prioriza una mayor ley de concentrado, debe sacrificarse la recuperación (Janishar Anzoom et al., 2024).

2.3. Modelación cinética del proceso de flotación *batch*

La modelación de la flotación se ha abordado tradicionalmente mediante modelos teóricos, los cuales enfrentan restricciones derivadas de la complejidad para describir los fenómenos fisicoquímicos involucrados en el proceso (Gharai & Venugopal, 2015). No obstante, se han desarrollado modelos ampliamente aceptados para representar la separación, destacando entre ellos los modelos cinéticos (Yianatos & Vinnett, 2015).

Los modelos cinéticos consideran a la flotación como un proceso análogo a la cinética de las reacciones químicas (Hernáinz & Calero, 2001), tal como se ilustra en la Figura 2.3. En esta analogía, las burbujas (A) y las partículas (B, C y D) actúan como reactivos, mientras que el producto corresponde al agregado partícula-burbuja (ABC).

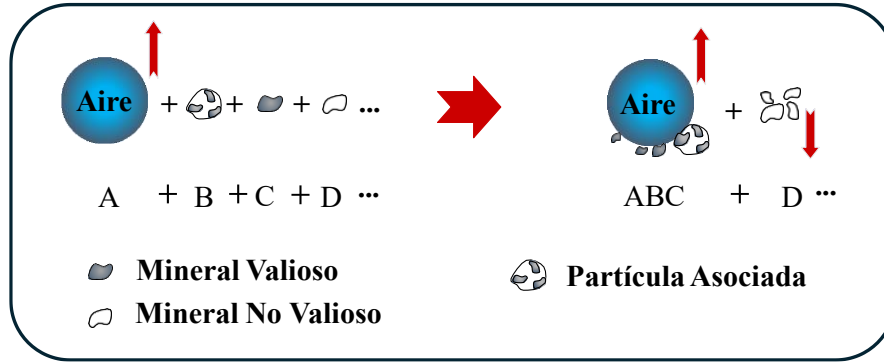


Figura 2.3 Analogía de la flotación como una reacción química.

La primera formulación la realizó García-Zúñiga (1935), quien propuso que la cinética de un proceso *batch* puede representarse como un modelo de primer orden con una tasa de flotación única. Este modelo (Tasa Única) asume una concentración de burbujas constante en exceso. Bajo estas condiciones, la tasa de desaparición del mineral flotable en la zona de colección es proporcional a su concentración (C), tal como se describe en la Ec. (2.2)

$$\frac{dC}{dt} = -k_{GZ} (C - C_{\infty}) \quad (2.2)$$

donde C_{∞} representa la concentración del mineral valioso al interior de la celda cuando $t \rightarrow \infty$. En este caso, la tasa única de flotación, k_{GZ} , agrupa todas las variables que afectan la velocidad de la separación y corresponde a una medida de la flotabilidad. Con esta formulación, la recuperación en un proceso *batch* puede ser modelada a partir de la Ec. (2.3):

$$R(t) = R_{\infty}(1 - e^{-k_{GZ} t}) \quad (2.3)$$

donde R_{∞} representa la máxima recuperación alcanzable y t es el tiempo de flotación. La recuperación máxima no es 100% debido principalmente a la liberación incompleta de las partículas (Bilal et al., 2022).

Debido a la heterogeneidad inherente del proceso de flotación, la suposición de tasa única resulta insuficiente. Imaizumi & Inoue (1963)¹ propusieron una generalización de la Ec.

¹ Asumieron $R_{\infty} = 100\%$

(2.3), introduciendo una función de densidad de probabilidades (fdp) para las tasas de flotación, tal como se muestra en la Ec. (2.4).

$$R(t) = R_{\infty} \int_0^{\infty} (1 - e^{-k t}) f(k) dk \quad (2.4)$$

Diversas funciones de densidad de probabilidades han sido propuestas para caracterizar $f(k)$, entre ellas las distribuciones Gamma, Rectangular, Triangular, Sinusoidal y Weibull, entre otras, las cuales han sido revisadas por (Bu et al., 2017). A continuación, se describen las distribuciones utilizadas en este trabajo, las cuales fueron seleccionadas por su amplia utilización, bajo número de parámetros y flexibilidad para representar la heterogeneidad del proceso.

2.3.1. Modelo Rectangular:

La fdp Rectangular (o Uniforme) es una de las $f(k)$ s más simples para representar la heterogeneidad cinética, manteniendo un modelo de solo un parámetro. Esta distribución considera que las tasas de flotación se distribuyen uniformemente desde 0 a un valor máximo, k_{max} (Huber-Panu et al., 1976), tal como describen la Ec. (2.5). Este modelo presenta la limitación de mantener la misma contribución de todas las tasas entre 0 a k_{max} para describir la flotabilidad.

$$f(k) = \begin{cases} \frac{1}{k_{max}} & \text{Si } 0 < k < k_{max} \\ 0 & e. t. o. c. \end{cases} \quad (2.5)$$

A partir de las Ecs. (2.4) y (2.5), se obtiene la recuperación *batch* en función del tiempo para el modelo Rectangular, Ec. (2.6).

$$R(t) = R_{\infty} \left[1 - \frac{(1 - e^{-k_{max} t})}{k_{max} t} \right] \quad (2.6)$$

2.3.2. Modelo Gamma

La distribución Gamma ha sido ampliamente usada en flotación debido a su flexibilidad para representar comportamientos cinéticos con solo dos parámetros. Generaliza distribuciones Exponenciales, Normales e incluso de Tasa Única (Imaizumi & Inoue, 1963). La fdp Gamma está dada por la Ec. (2.7):

$$f(k) = \frac{k^{a_G-1}}{k_G^{a_G} \Gamma(a_G)} e^{(-k/k_G)} \quad (2.7)$$

donde Γ es la función Gamma de la Ec. (2.8). y k_G y a_G son parámetros de escala y forma, respectivamente. Además, se define la tasa de flotación media como $k_{\text{promedio}} = k_G a_G$

$$\Gamma(a_G) = \int_0^{\infty} x^{a_G-1} e^{-x} dx \quad (2.8)$$

Combinando las Ecuaciones (2.4) y (2.7), se obtiene la recuperación *batch* en función del tiempo para el modelo Gamma, Ec. (2.9):

$$R(t) = R_{\infty} \left[1 - \frac{1}{(1 + k_G t)^{a_G}} \right] \quad (2.9)$$

La Figura 2.4 muestra las formas de las distribuciones $f(k)$ correspondientes a los modelos de Tasa Única, Rectangular y a una de las posibles variantes de la distribución Gamma, representada en forma de J invertida, todas con $k_{\text{promedio}} = 1$, junto con sus respectivas curvas tiempo-recuperación. Se utilizó una recuperación máxima de 80% para obtener $R(t)$. Se observa que las distintas fracciones de componentes de flotación lenta ($k \rightarrow 0$), para cada modelo, afectan la tendencia del aumento de la recuperación a lo largo del tiempo.

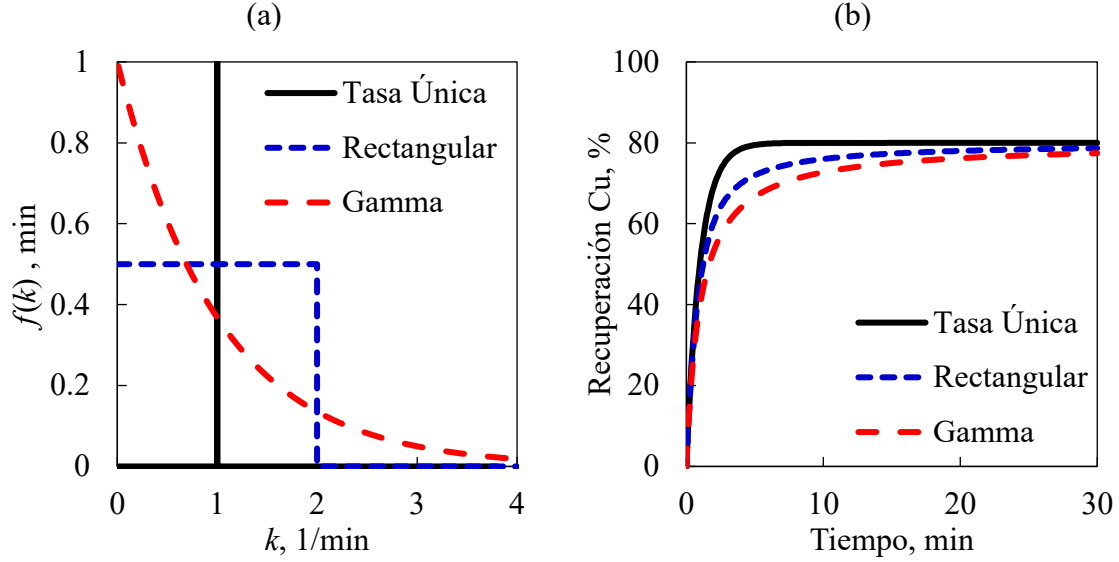


Figura 2.4 Ejemplos de relaciones $f(k)$ - $R(t)$: a) Distribuciones $f(k)$ de Tasa única, Rectangular y Gamma con mismo k_{promedio} y b) Respuestas cinéticas.

2.4. Modelación cinética del proceso de flotación en continuo

A escala industrial, los flujos de alimentación alcanzan el orden de centenas de miles de toneladas por día, lo que hace inviable la operación en régimen *batch*, dado que se requerirían equipos de dimensiones inviables (Yianatos & Vinnett, 2015). Por esta razón, la flotación industrial se lleva a cabo en régimen continuo.

En este contexto, fenómenos como el arrastre de ganga hacia el concentrado y la pérdida de mineral valioso en el relave son habituales, lo que limita la eficiencia alcanzable en una sola etapa de flotación. Por ello, los circuitos industriales suelen diseñarse con múltiples etapas, permitiendo mejorar la recuperación global y, al mismo tiempo, alcanzar leyes de concentrado comerciables (Wills & Finch, 2016).

La transición de un sistema *batch* a uno continuo implica que el proceso deja de estar gobernado por un tiempo de flotación determinista, para pasar a describirse mediante una distribución de tiempos de residencia. Woodburn & Loveday (1965) propusieron una expresión para la recuperación para sistemas continuos [Ec. (2.10)]:

$$R = R_{\infty} \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} (1 - e^{-k t}) f(k) \xi(t) dk dt \quad (2.10)$$

donde $\xi(t)$ corresponde a la distribución de tiempos de residencia. Esta ecuación constituye una generalización de la Ec. (2.4), asumiendo mezclamiento perfecto en los equipos individuales. La distribución de tiempo de residencia para un circuito con N celdas en serie, con un tiempo de residencia medio de $\tau = V/Q$ (Volumen efectivo circuito/Caudal), se describe mediante la Ec. (2.11).

$$\xi(t) = \frac{t^{N-1} e^{-\left(\frac{t}{\tau/N}\right)}}{(\tau/N)^N \Gamma(N)} \quad (2.11)$$

Al combinar la Ec. (2.10) con el modelo de Tasa Única, se obtiene la recuperación continua, en función de τ y N [Ec. (2.12)].

$$R = R_{\infty} \left[1 - \frac{1}{(1 + (\tau/N)k_{GZ})^N} \right] \quad (2.12)$$

Asimismo, combinando las Ecuaciones (2.10) y (2.5), se deriva la expresión continua correspondiente al modelo Rectangular, Ec. (2.13).

$$R = R_{\infty} \left[1 - \frac{\left(1 - (1 + k_{\max}(\tau/N))^{1-N}\right)}{k_{\max}(\tau/N)(N - 1)} \right] \quad (2.13)$$

Finalmente, para el modelo Gamma la recuperación continua no es integrable doblemente, por lo que se resuelve numéricamente, Ec. (2.14).

$$R = R_{\infty} \left[1 - \int_0^{\infty} \frac{1}{(1 + k_G t)^{a_G}} \xi(t) dt \right] \quad (2.14)$$

2.5. Escalamiento *batch* – planta

Los datos tiempo–recuperación obtenidos en pruebas batch a escala de laboratorio se emplean como base para el escalamiento industrial y para el diseño de circuitos de flotación. Sin embargo, la evidencia experimental ha mostrado que las tasas de flotación observadas en circuitos industriales son significativamente menores que las obtenidas en pruebas de laboratorio (Wood, 2002).

En este contexto, diversos estudios han abordado el escalamiento $k_{\text{batch}}/k_{\text{planta}}$ que permita representar la transición desde un régimen *batch* a uno continuo. A partir de estos trabajos, se determinó que el factor de escalamiento para sulfuros de cobre se encuentran en el rango de 2 a 3 (Mesa & Brito-Parada, 2019).

Las diferencias observadas en las tasas de flotación entre pruebas *batch* e industriales se deben principalmente a diferencias en la recuperación de espuma, régimen de mezcla y segregación de sólidos en la zona de colección (Yianatos et al., 2010). La Figura 2.5 esquematiza la disminución de la tasa de flotación al comparar una operación *batch* con una industrial. Este efecto se refleja en que, para alcanzar una misma recuperación, la planta requiere un tiempo de flotación mayor que el necesario en las pruebas *batch*.

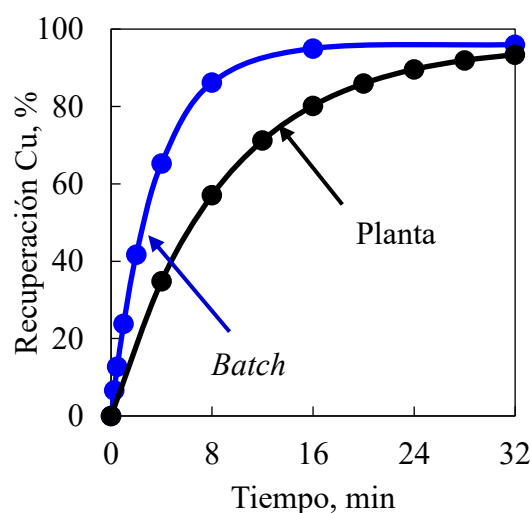


Figura 2.5 Comparación entre las cinéticas de flotación obtenidas en pruebas *batch* y a escala industrial.

2.6. Simulaciones Monte Carlo

El método Monte Carlo, propuesto originalmente por Metropolis & Ulam (1949), permite obtener soluciones aproximadas a problemas matemáticamente complejos mediante la simulación de un gran número de escenarios aleatorios, posibilitando estimaciones estadísticamente consistentes. Las principales ventajas de este método son su simplicidad conceptual y su sólida base teórica (Yang, 2022). La Ley de los Grandes Números asegura que las estimaciones obtenidas a partir de simulaciones Monte Carlo convergen asintóticamente a la solución real (Sin & España, 2020).

La exactitud de los resultados depende del número de simulaciones. La literatura recomienda realizar al menos 500 simulaciones (Zhang & Cui, 2023), lo que permite estabilizar la media y la varianza de los datos simulados, reduciendo así la incertidumbre.

2.6.1. Simulaciones Monte Carlo en pruebas cinéticas de flotación

El uso de simulaciones Monte Carlo en flotación ha sido incorporado principalmente en el tratamiento de la incertidumbre experimental y en la comparación estadística de parámetros cinéticos. Napier-Munn (2012) aplicó el impacto de *bootstrapping*, junto con simulaciones Monte Carlo, con el fin de evaluar la variabilidad de las curvas tiempo–recuperación y sobre las constantes cinéticas obtenidas experimentalmente (modelo de Tasa Única), sin embargo, se asumió independencia entre las recuperaciones medidas.

Vinnett et al. (2018) abordaron la autodependencia estadística de las pruebas *batch*, identificando una autocorrelación significativa en las recuperaciones acumuladas. Dado que la recuperación acumulada en un tiempo t depende de valores previos, el uso de varianzas individuales y constantes, omitiendo las covarianzas, resulta inadecuado para representar la dispersión de los datos. Por este motivo, en las pruebas cinéticas de flotación, las simulaciones Monte Carlo deben incorporar la matriz de covarianza, considerando así la autodependencia temporal de las observaciones y reproduciendo adecuadamente las características de los datos experimentales.

En este Capítulo se presentaron los fundamentos teóricos necesarios para abordar la modelación de datos tiempo-recuperación obtenidos en pruebas *batch*, incorporando la incertidumbre experimental a través de simulaciones Monte Carlo. Estas simulaciones permiten generar tendencias tiempo-recuperación realistas, con parámetros cinéticos conocidos, las que se pueden submuestrear, con el fin de evaluar el efecto de la selección arbitraria de tiempos de flotación sobre la estimación de $f(k)$ y R_∞ y sobre el escalamiento *batch* – planta.

CAPÍTULO III

3. METODOLOGÍA

En este Capítulo se presenta el procedimiento empleado en la obtención de datos experimentales tiempo-recuperación en un proceso *batch* a escala de laboratorio. Asimismo, se describe el análisis de datos aplicado en la caracterización cinética. Se aplicó modelación y posteriormente simulaciones Monte Carlo con el fin de evaluar sesgos en el escalamiento *batch* – planta. La Figura 3.1 resume las principales etapas del procedimiento experimental y análisis de datos que serán descritas en este Capítulo.

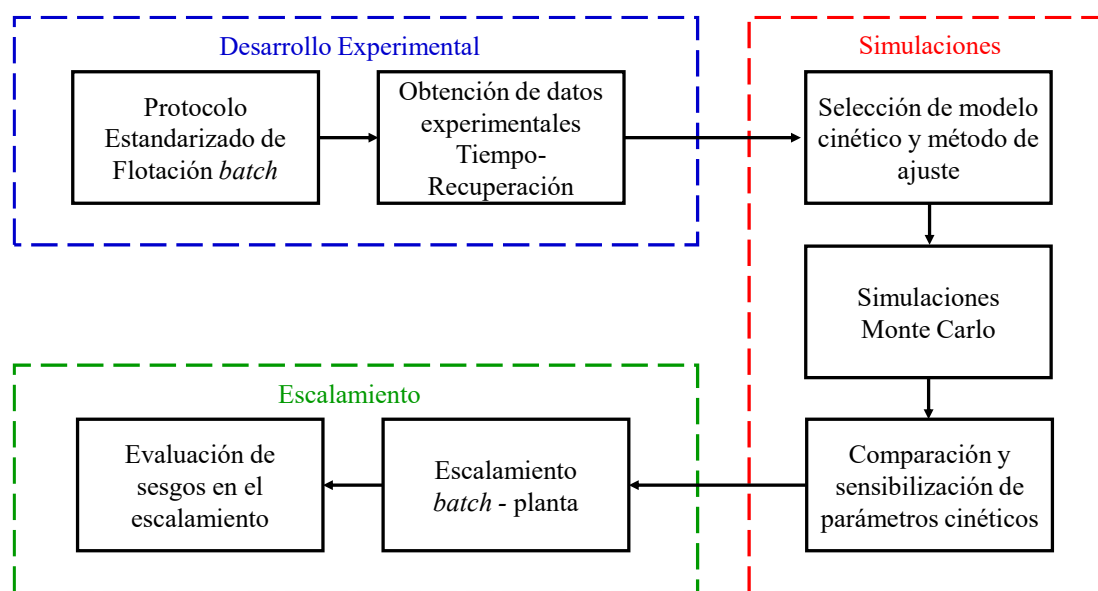


Figura 3.1 Esquema de metodología utilizada en este trabajo.

3.1. Procedimiento experimental

Los resultados experimentales empleados en este estudio fueron obtenidos por Esteban (2025). A continuación, se resumen los elementos más relevantes.

Se trabajó con una mena sulfurada de cobre, proveniente de la Compañía Minera Doña Inés de Collahuasi (CMDIC), utilizándose muestras de 1.0 kg previamente homogenizadas.

3.1.1. Molienda *batch*

Con el propósito de obtener dos niveles de liberación de mineral, se definieron condiciones de molienda para alcanzar valores de P_{80} de 300 μm y 212 μm . Para ello, se obtuvo la curva de molienda bajo las condiciones experimentales resumidas en la Tabla 3.1.

Tabla 3.1 Condiciones experimentales de la molienda.

Dimensiones de molino, cm	16 x 21
Fracción de velocidad crítica, %	70
Llenado de bolas, %	38
Llenado de carga, %	45
Masa de bolas de acero, kg	4.0
Tiempos de molienda, min	25, 30, 35, 40, 45 y 50 minutos.

Una vez obtenido el P_{80} para cada tiempo, y mediante interpolación cúbica de Hermite por tramos, se calcularon los tiempos necesarios para obtener los valores objetivo de P_{80} . Se obtuvo 32 min para $P_{80} = 300 \mu\text{m}$ y 36.5 min para $P_{80} = 212 \mu\text{m}$.

3.1.2. Flotación *batch*

El proceso de flotación *batch* se basó en el protocolo del Laboratorio Metalúrgico de Minera Los Pelambres (Minera Los Pelambres, 2022). Se realizaron flotaciones *batch* con 14 tiempos de muestreo, con una duración total de 32 minutos. Se realizaron 4 réplicas para la condición de $P_{80} = 300 \mu\text{m}$ y 6 réplicas para la condición de $P_{80} = 212 \mu\text{m}$.

La Tabla 3.2 resumen las condiciones de flotación *batch*. El procedimiento de flotación *batch*, posterior digestión y análisis químicos para la determinación de contenido de cobre se describen en (Esteban, 2025).

Tabla 3.2 Condiciones experimentales de las flotaciones *batch*.

Tipo de celda, volumen, L	EDEMET, 2.7
Velocidad <i>impeller</i>, rpm	700
Porcentaje de sólidos, %	33
J_g, cm/s	0.6
pH	9.5
Espumante	Aerofroth 70 • Concentración: 24 ppm. • Tiempo de acondicionamiento: 2.5 min.
Colector	Hostaflot 18275 • Concentración: 22.5 g/t. • Tiempo de acondicionamiento: 5 min.
Tiempos de flotación, min	0.17, 0.33, 0.67, 1, 1.5, 2, 4, 6, 8, 10, 12, 16, 24, 32

Los tiempos de flotación fueron seleccionados de manera de disponer de suficientes datos a tiempos cortos, con el fin de caracterizar la tasa media de flotación, y a tiempos largos, para estimar la recuperación máxima.

3.2. Análisis de datos

Las leyes obtenidas en las pruebas experimentales fueron reconciliadas con el fin de mejorar la consistencia de la estimación de las leyes de cobre, garantizando el cumplimiento de los balances de masa (Esteban, 2025). A partir de las leyes reconciliadas, se calcularon las recuperaciones incrementales de cada concentrado utilizando la Ec. (3.1). Posteriormente, se calcularon las recuperaciones acumuladas en función del tiempo, obteniéndose las curvas tiempo-recuperación.

$$R = \frac{\text{masa concentrado} \times \text{ley concentrado}}{\text{masa alimentación} \times \text{ley alimentación}} \quad (3.1)$$

3.2.1. Regresión

La estimación de los parámetros de los modelos de recuperación se realizó mediante regresión, comparando tres metodologías de ajuste con el fin de determinar la más adecuada para su aplicación en la estimación de parámetros de las simulaciones Monte Carlo.

a) Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO)

El enfoque de MCO asume errores normales, independientes e idénticamente distribuidos (Magnus, 2022), lo que implica homocedasticidad (varianza constante). Este enfoque resulta especialmente útil en ausencia de réplicas. La estimación de parámetros se obtiene minimizando la suma de los residuos al cuadrado de la Ec. (3.2):

$$\min \sum_{i=1}^n [R_i - \hat{R}]^T [R_i - \hat{R}] \quad (3.2)$$

donde R_i corresponde al i -ésimo vector de recuperaciones medidas, $\hat{R}$ al vector de recuperaciones obtenidas a partir del modelo y n el número de réplicas.

b) Mínimos Cuadrados Ponderados (MCP)

El método de MCP extiende la formulación del MCO al considerar que la varianza de los errores no es constante, es decir son heterocedásticos (Aitken, 1935), manteniendo el supuesto de independencia. Para ello, incorpora la matriz de varianzas en la función objetivo [Ec. (3.3)].

$$\min \sum_{i=1}^n [R_i - \hat{R}]^T V_R^{-1} [R_i - \hat{R}] \quad (3.3)$$

donde V_R es la matriz de varianzas de las recuperaciones, con las varianzas muestrales en la diagonal, y ceros en el resto de los casos. Este método requiere contar con réplicas experimentales o estimaciones previas de las varianzas.

c) Mínimos cuadrados generalizados (MCG):

El método de MCG es una generalización de los dos métodos anteriores. Considera que los errores están correlacionados y son heterocedásticos. Por lo tanto, incorporan el efecto de la

covarianza en la estimación de parámetros (Aitken, 1935). La función objetivo se describe mediante la Ec. (3.4):

$$\min \sum_{i=1}^n [R_i - \hat{R}]^T \Sigma_R^{-1} [R_i - \hat{R}] \quad (3.4)$$

donde Σ_R es la matriz de covarianzas muestrales de las recuperaciones [Ec. (3.5)], para la cual R_i son las recuperaciones medidas, $\bar{R}$ corresponde a la recuperación promedio por tiempo y n al número de repeticiones. La diagonal de Σ_R contiene las varianzas muestrales de las recuperaciones y los elementos fuera de la diagonal corresponden a las covarianzas muestrales de los errores.

$$\Sigma_R = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n [R_i - \bar{R}][R_i - \bar{R}]^T \quad (3.5)$$

Las funciones objetivo se resolvieron mediante un código implementado en MATLAB (*The MathWorks*, USA). Para todos los métodos la recuperación máxima se limitó entre [0 – 100%]. Se aplicó una búsqueda global con 120 puntos iniciales aleatorios y computación paralela para reducir el tiempo de procesamiento, seleccionándose la solución que minimizó la función objetivo.

3.2.2. Matriz de covarianza

La función objetivo de la Ec. (3.4) requiere la inversión de la matriz Σ_R , la que podría estar mal condicionada en procesos de flotación con alta autocorrelación o ser singulares en pruebas de flotación con pocas réplicas (Fisher & Sun, 2011). Para evitar la singularidad se utilizó una técnica de contracción (*shrinkage*) de la covarianza propuesta por Ledoit & Wolf (2004). La matriz de covarianza contraída $\Sigma_{R,shrink}$, se obtiene como un ponderado de la covarianza muestral Σ_R y una matriz objetivo T [Ec. (3.6)], donde λ corresponde a la intensidad de contracción.

$$\Sigma_{R,shrink} = \lambda T + (1 - \lambda) \Sigma_R \quad (3.6)$$

La metodología Ledoit & Wolf (2004) está disponible en MATLAB, mediante el comando *covarianceShrinkage* de la *Financial Toolbox*, siendo elegida en este estudio. Esta función define la matriz objetivo T como una matriz diagonal cuyos elementos corresponden al promedio de las varianzas de los errores. En adelante, todas las referencias a la matriz de covarianzas corresponden a su versión contraída.

3.3. Selección de caso base

El objetivo principal de este procedimiento es seleccionar el modelo cinético (Tasa Única, Rectangular o Gamma) y la metodología de ajuste (MCO, MCP, MCG) más adecuadas para su posterior implementación en simulaciones Monte Carlo.

3.3.1. Submuestreo de datos experimentales

Se emularon respuestas cinéticas con 5 datos tiempo-recuperación, submuestreando los 14 tiempos medidos, obteniéndose 3432 combinaciones posibles. Dicho submuestreo imita diferentes escenarios para las pruebas *batch*, considerando una selección arbitraria de los intervalos de flotación. Para realizar las combinaciones se utilizó la función *nchoosek* de MATLAB.

Para comparar los rendimientos de los tres métodos de ajuste y de los tres modelos cinéticos se utilizó la suma de cuadrados de los errores de predicción de los datos omitidos como método de validación cruzada.

3.3.2. Suma de cuadrados de error de predicción

La suma de cuadrados de los errores de predicción, conocida como PRESS (del inglés *Prediction Error Sum of Squares*), es una técnica de validación cruzada utilizada para evaluar la capacidad predictiva de un modelo (Allen, 1974). El procedimiento consiste en omitir un dato experimental a la vez, ajustar el modelo con los datos restantes y luego comparar la predicción obtenida de los valores omitidos. Así, un valor alto de PRESS indica una menor capacidad de predicción del modelo.

En este trabajo se implementó una versión modificada del PRESS denominada PRESSM, donde se omiten simultáneamente 5 datos. El procedimiento del submuestreo y posterior obtención de la métrica se describe a continuación:

1. Se generaron todas las combinaciones posibles de 5 datos tiempo-recuperación a partir de 14 disponibles.
2. Para cada combinación, se ajustó el modelo cinético bajo evaluación, utilizando solo los 5 datos asociados a la combinación.
3. Con los parámetros obtenidos se obtuvieron las 5 recuperaciones omitidos.
4. Se calculó la diferencia entre las recuperaciones experimentales omitidas y las predicciones, considerando todas las réplicas disponibles.
5. El PRESSM se obtuvo como la suma al cuadrado de las diferencias, Ec. (3.7):

$$PRESSM = \sum_{i=1}^n (R_i^* - \hat{R}^*)^2 \quad (3.7)$$

donde R_i^* corresponde al i-ésimo vector de recuperaciones medidas para los tiempos omitidos, $\hat{R}_i^*$ corresponde al i-ésimo vector de recuperaciones obtenidas a partir del modelo para los tiempos omitidos y n es el número de replicas.

De este modo, se obtiene un valor de PRESSM para cada combinación. Este procedimiento se aplicó a los tres modelos cinéticos (Tasa Única, Rectangular y Gamma), utilizando las tres técnicas de ajuste (MCO, MCP, MCG).

El mejor modelo y técnica de regresión, en términos de PRESSM, fueron utilizados para obtener la cinética de flotación utilizando los 14 puntos experimentales. Los parámetros obtenidos se definieron como el caso base para aplicar simulaciones Monte Carlo.

3.4. Simulaciones Monte Carlo

Una vez seleccionado el modelo y el método de estimación, se aplicaron simulaciones Monte Carlo considerando la variabilidad experimental de los datos, con el fin de obtener respuestas cinéticas representativas de las pruebas experimentales. Para esto se simularon 1000 condiciones de flotaciones *batch* replicadas, utilizando las matrices de covarianzas obtenidas

de la metodología Ledoit & Wolf (2004), junto con el modelo y parámetros cinéticos seleccionados según lo descrito en la Sección 3.3 .

Se utilizó la matriz de covarianza contraída en lugar de la muestral, ya que cuando el número de réplicas es menor que el de observaciones, la covarianza muestral tiende a estar mal condicionada, lo que no representa adecuadamente los datos (Kwan, 2011). Por el contrario, el estimador *shrinkage* mejora la precisión de la estimación, lo que resulta fundamental para obtener resultados confiables en las simulaciones Monte Carlo.

El procedimiento de simulación se describe a continuación:

1. De los 14 datos experimentales originales, se seleccionó un subconjunto de 9 tiempos de flotación. La selección se realizó de forma que las 1000 curvas de recuperación simuladas fuesen estrictamente crecientes en todos los casos teóricos.
2. A partir de los parámetros del caso base se calcularon las recuperaciones teóricas para los 9 tiempos seleccionados, obteniéndose las recuperaciones del caso base.
3. Se calculó la matriz de covarianza contraída considerando las recuperaciones experimentales a los 9 tiempos seleccionados.
4. Con la matriz de covarianza, se simularon 1000 condiciones de ruido normal correlacionado con igual cantidad de replicas que los datos experimentales (4 réplicas para la condición de $P_{80} = 300 \mu\text{m}$ y 6 réplicas para $P_{80} = 212 \mu\text{m}$).
5. El ruido simulado fue sumado a las recuperaciones del caso base, obteniéndose matrices de $1000 \times 9 \times 4$ ($P_{80} = 300 \mu\text{m}$) y $1000 \times 9 \times 6$ ($P_{80} = 212 \mu\text{m}$), donde cada simulación corresponde a recuperaciones replicadas con 9 datos tiempo-recuperación.

3.4.1. Submuestreo de datos simulados

Las simulaciones (9 datos tiempos-recuperación) fueron submuestreadas con la finalidad de estudiar el impacto de la selección arbitraria de los tiempos de flotación sobre los parámetros cinéticos $f(k)$ y R_{∞} . El procedimiento fue el siguiente:

1. Para cada simulación, se calculó el promedio de las réplicas, resultando en un arreglo de 1000 simulaciones, donde cada simulación corresponde a las recuperaciones promedio de los 9 tiempos estudiados.

2. Se generaron todas las combinaciones posibles de 5 tiempos de flotación, seleccionados de los 9 disponibles. Esto corresponde a 126 combinaciones para cada una de las 1000 simulaciones.
3. A cada subconjunto de 5 datos se le ajustó el modelo cinético escogido en el caso base, obteniéndose los parámetros $f(k)$ y R_∞ para cada una de las 126 combinaciones, y para cada una de las 1000 simulaciones.
4. Se analizó la sensibilidad de los parámetros cinéticos utilizando la métrica del error cuadrático relativo de los parámetros (ECR) para cada combinación, definida según la Ec. (3.8).

$$ECR_j = \sum_{i=1}^{1000} \left(\frac{R_{\infty,ij} - R_{\infty,base}}{R_{\infty,base}} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{k_{promedio,ij} - k_{promedio,base}}{k_{promedio,base}} \right)^2 + \sum_{i=1}^n \left(\frac{a_{G,ij} - a_{G,real}}{a_{G,base}} \right)^2 \quad (3.8)$$

donde i denota la i -ésima simulación, j la j -ésima combinación, y el subíndice base hace referencia a los parámetros del caso base. La métrica cuantifica la desviación de los parámetros obtenidos de cada combinación respecto a los del caso base. De esta forma, a cada combinación se le asoció un valor de ECR. Las mejores combinaciones, en términos de la estimación de parámetros, son aquellas con los menores ECRs.

3.5. Escalamiento industrial

Se realizó un ejercicio de escalamiento de *batch* a operación continua, con el objetivo de evaluar si la selección arbitraria de los intervalos de flotación introduce errores en el diseño de circuitos industriales. Para esto se definió un circuito base representativo de una operación industrial, considerando:

- Tiempo de residencia medio del circuito (τ) de 20 minutos.
- Seis celdas de flotación en serie, se asume mezcla perfecta en cada celda ($\tau_{celda} = 20/6$ min).
- Factor de escalamiento *batch* – planta de 2.5. (en el modelo de Tasa Única se penaliza k_{GZ} , en el modelo Rectangular, se penaliza k_{max} , y en el modelo Gamma se penaliza k_G).

Bajo estas condiciones, se utilizó el modelo y parámetros del caso base para calcular una recuperación objetivo a escala industrial (R_{base}). En torno a este valor se definió un umbral equivalente al error estándar experimental, $SE = s/\sqrt{n}$ de la recuperación *batch* a $t = 8$ min, con n número de repeticiones y s desviación estándar muestral de $R(t=8 \text{ min})$. Se utiliza 8 minutos, ya que este tiempo corresponde a 20 min en escala industrial (escalamiento simplificado por tiempo), considerando un factor de escalamiento por tiempo de 2.5. El Figura 3.2 muestra un esquema del umbral definido.

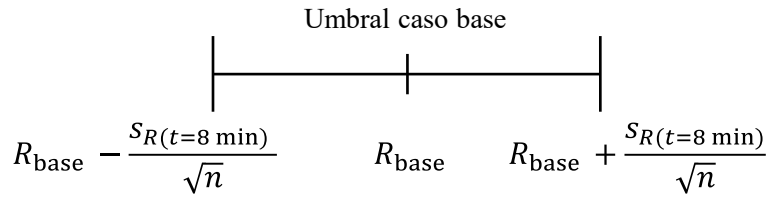


Figura 3.2 Esquema umbral para la recuperación objetivo a partir del caso base.

Para analizar el sesgo de las combinaciones, en términos de escalamiento, se realizaron dos análisis que se describen a continuación.

3.5.1. Recuperación objetivo

Considerando las condiciones del circuito base ($\tau = 20$ min y 6 celdas en serie) se calcularon las recuperaciones en régimen continuo [Ec. (2.14).] para todas las simulaciones y combinaciones descritas en la Sección 3.4.1. Se clasificaron como infactibles aquellas configuraciones en las cuales la recuperación máxima resultó menor que la recuperación inferior del umbral de la recuperación del caso base. Se calcularon los porcentajes de las simulaciones, por combinación, que obtuvieron recuperaciones dentro del umbral definido.

3.5.2. Tiempo para cumplir con umbral de recuperación

Conservando 6 celdas en serie, se estimaron, para todas las configuraciones, los tiempos de residencia requeridos para alcanzar los límites inferior y superior del umbral de recuperación (Figura 3.2). Estos tiempos se compararon con los tiempos del caso base para cumplir con dicho umbral.

Los umbrales de tiempo obtenidos para todas las configuraciones fueron comparados, respecto a los del caso base, a partir de un factor de traslape (J). Este se calcula a partir de la

razón entre el rango del caso base ($[\tau_{\text{inf}}, \tau_{\text{sup}}]$) y el rango máximo entre la simulación ($[\tau_{\text{inf}}^*, \tau_{\text{sup}}^*]$) y el mismo caso base [Ec. (3.9)], similar al índice de Jaccard (Hancock, 2004).

La Figura 3.3 ejemplifica el procedimiento de cálculo del factor de traslape, donde la región sombreada corresponde a la zona donde se encuentra el caso base, respecto a la zona que delimitan los extremos identificados con la línea gris segmentada. Una simulación se consideró consistente con el caso base si $0.75 \leq J \leq 1.00$. Finalmente, para cada combinación se cuantificó el porcentaje de simulaciones consistentes, de modo que las configuraciones con mayor proporción de casos con $0.75 \leq J \leq 1.00$ fueron consideradas como adecuadas en términos de escalamiento, dado que se reduce la probabilidad de sub o sobredimensionamiento.

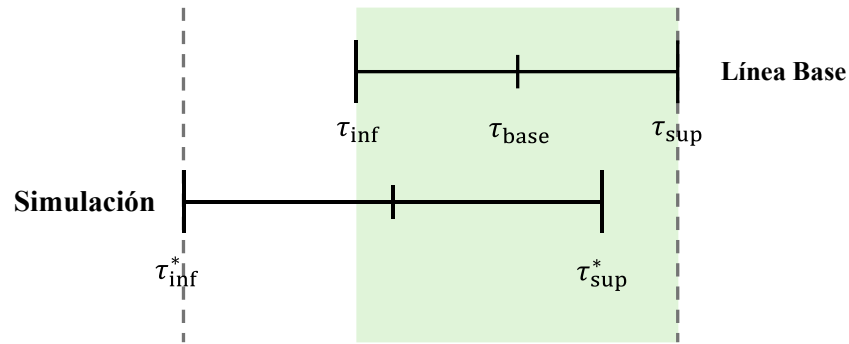


Figura 3.3 Esquema de cálculo de factor de traslape (J) para evaluar combinaciones.

$$J = \frac{\tau_{\text{sup}} - \tau_{\text{inf}}}{\max(\tau_{\text{sup}}, \tau_{\text{sup}}^*) - \min(\tau_{\text{inf}}, \tau_{\text{inf}}^*)} \quad (3.9)$$

Finalmente, las combinaciones se compararon en términos de volúmenes de celda necesarios para cumplir con el umbral objetivo, manteniendo un caudal constante.

En el presente Capítulo se describió la metodología empleada para la obtención y análisis de los datos experimentales de pruebas de flotación *batch*. En el Capítulo IV se presentan y discuten los resultados obtenidos a partir de dichas metodologías, destacando la aplicación de simulaciones Monte Carlo como herramienta para optimizar el diseño experimental en este tipo de pruebas.

CAPÍTULO IV

4. ANÁLISIS DE RESULTADOS

4.1. Resultados experimentales

Se obtuvieron los datos tiempo-recuperación para las condiciones con $P_{80} = 300 \mu\text{m}$ (*Test 1*) y $P_{80} = 212 \mu\text{m}$ (*Test 2*). Los resultados experimentales se presentan en el Apéndice A. La Figura 4.1 muestra las recuperaciones promedio de cobre en función del tiempo. Se incluyen barras de error que representan las desviaciones estándar muestrales de cada recuperación. Se observa que a un mayor P_{80} , la recuperación global de Cu es menor, lo que se atribuye a un menor grado de liberación.

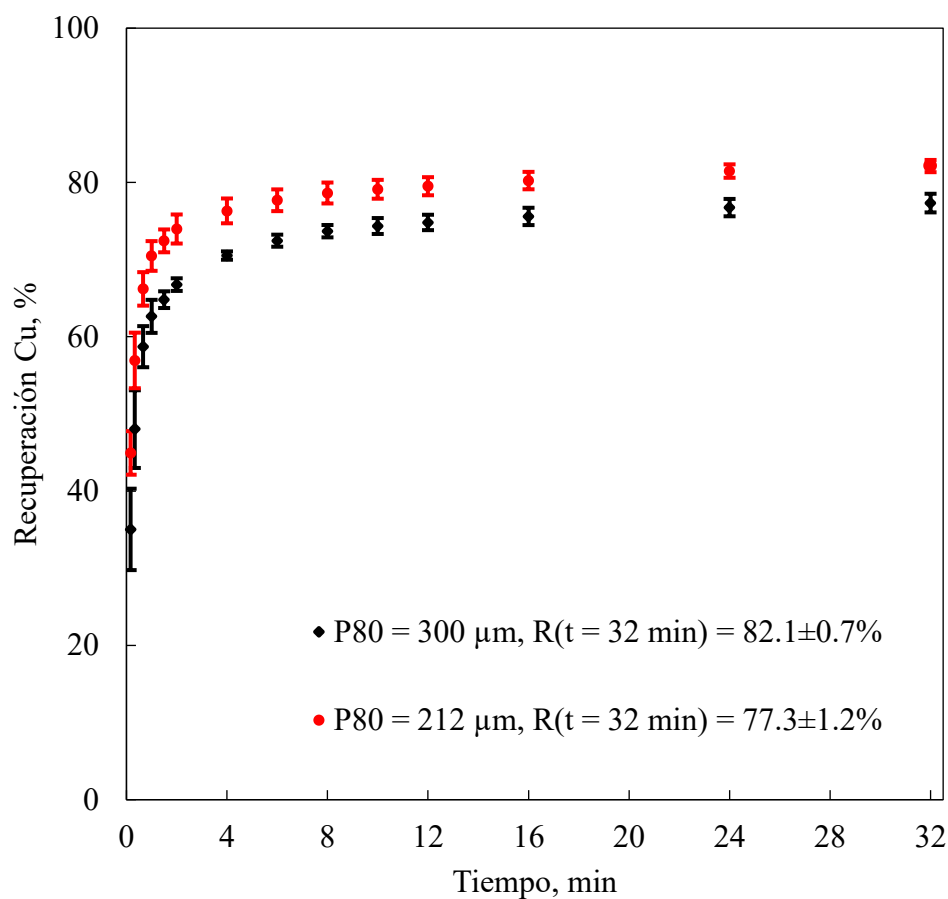


Figura 4.1 Respuestas cinéticas experimentales.

Las recuperaciones presentaron autocorrelación significativa, debido a la acumulación de resultados y a que el material no flotado en un tiempo t depende de las recuperaciones anteriores. La Figura 4.2 ilustra la autodependencia de las recuperaciones acumuladas entre dos tiempos de flotación consecutivos.

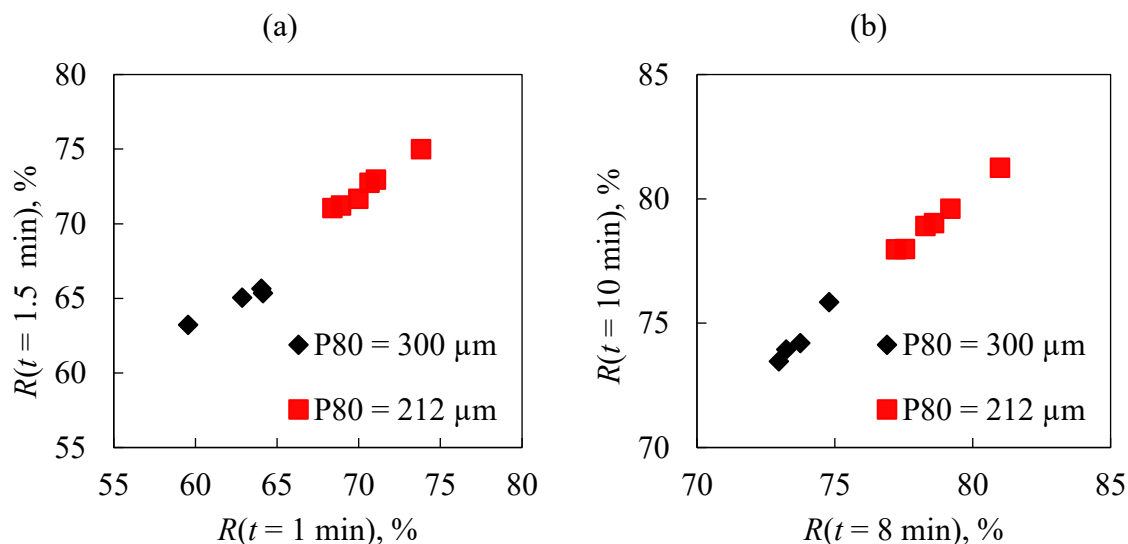


Figura 4.2 Correlación entre las recuperaciones experimentales, (a) $R(t = 1.5 \text{ min})$ versus $R(t = 1 \text{ min})$, (b) $R(t = 10 \text{ min})$ versus $R(t = 8 \text{ min})$.

A partir de los 14 datos experimentales replicados se calcularon las matrices de covarianza muestrales (Apéndice B), que presentaron números de condicionamiento del orden de 10^{18} , indicando singularidad en las matrices, y por ende, una representación inadecuada de la variabilidad de los datos. Tras aplicar la metodología de contracción, las matrices resultantes (Apéndice C) obtuvieron números de condicionamiento cercanos a 20 (Apéndice D), por lo que se utilizaron estas en el análisis de datos.

4.2. Ajuste de modelos cinéticos

Para las respuestas cinéticas completas (14 puntos) se compararon tres modelos cinéticos clásicos: modelos de Tasa Única, Rectangular y Gamma, y tres metodologías para la estimación (no lineal) de parámetros: mínimos cuadrados ordinarios, ponderados y generalizados. Las respuestas cinéticas se obtuvieron considerando las matrices de covarianza contraídas. La Figura 4.3 muestra los resultados para el *Test* N°1, y la Figura E.1 del Apéndice E los resultados del *Test* N°2.

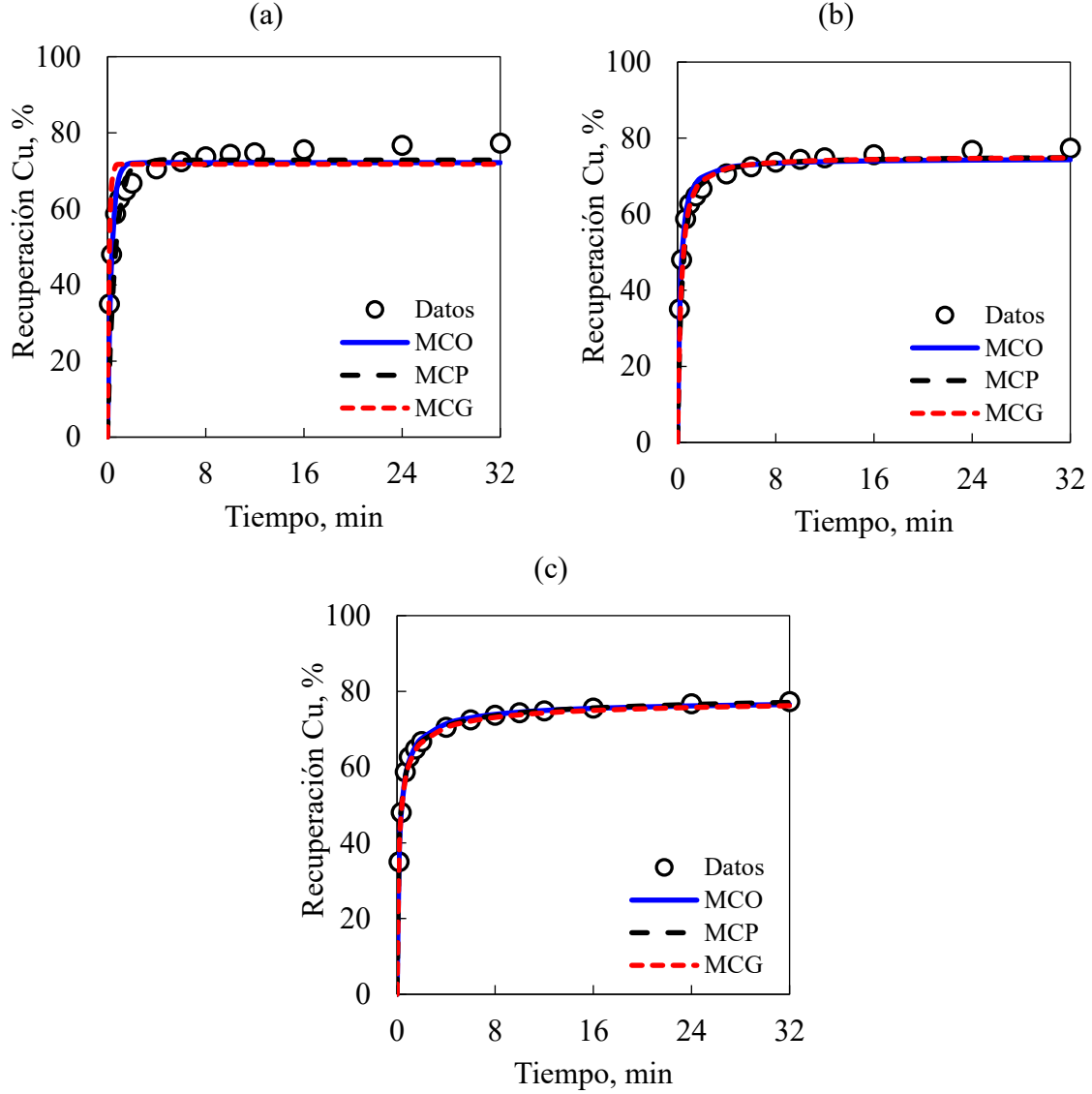


Figura 4.3 Ajuste de modelos cinéticos, para el *Test* N°1: (a) modelo de Tasa Única, (b) modelo Rectangular, (c) modelo Gamma, mediante MCO, MCP, MCG.

La Tabla 4.1 resume los parámetros cinéticos estimados. Se observan claras diferencias entre los parámetros obtenidos mediante los distintos métodos de ajuste. Para el *Test* N°2, en los modelos de Tasa Única y Rectangular, dichas diferencias son más significativas que para el *Test* N°1. Por otro lado, utilizando el modelo Gamma, el parámetro R_{∞} es el más cercano a $R(t = 32 \text{ min})$ en ambos *Tests*, utilizando los tres métodos de ajuste. Los otros dos modelos subestiman o sobrestiman el valor de R_{∞} . Asimismo, las gráficas de ajuste (Figura 4.3 para *Test* N°1, y Figura E.1 del Apéndice E para *Test* N°2) muestran un mejor desempeño del modelo Gamma.

Tabla 4.1 Parámetros cinéticos obtenidos con los modelos, mediante MCO, MCP y MCG.

	<i>Test 1</i>			<i>Test 2</i>		
	Modelo de Tasa Única					
	MCO	MCP	MCG	MCO	MCP	MCG
R_{∞}	72.2	72.8	71.7	77.2	79.3	83.7
k_{GZ}	3.1	1.7	7.7	4.3	3.4	4.4
	Modelo Rectangular					
	MCO	MCP	MCG	MCO	MCP	MCG
R_{∞}	74.6	75.3	75.2	79.5	80.6	82.4
$k_{\max}$	7.6	5.2	5.9	10.6	9.2	11.7
	Modelo Gamma					
	MCO	MCP	MCG	MCO	MCP	MCG
R_{∞}	78.2	80.6	78.7	82.0	83.3	82.5
k_G	9.0	16.5	11.9	12.3	17.0	15.6
a_G	0.7	0.5	0.6	0.7	0.6	0.7

4.3. Modelación de respuestas submuestreadas para selección de herramientas de caracterización cinética

Se ajustaron todas las combinaciones posibles de 7 datos tiempos-recuperación de los 14 disponibles (3432 combinaciones), con el fin de evaluar los diferentes modelos y enfoques de regresión, para seleccionar el enfoque más robusto en la caracterización cinética ante un bajo número de repeticiones. La Figura 4.4 muestra los resultados de la fracción acumulada (FDA) del PRESSM (descrito en la Sección 3.3.2) para el *Test* N°1, y la Figura E.2 del Apéndice E presenta los resultados para el *Test* N°2.

La Tabla 4.2 presenta la mediana de las fracciones acumuladas del PRESSM, donde menor mediana implica un mejor desempeño. Los resultados de la Figura 4.4, Figura E.2 y Tabla 4.2 indican que el modelo Gamma obtuvo el mejor rendimiento en términos del PRESSM (en negrita en la Tabla 4.2), mientras que el método de mínimos cuadrados ordinarios resultó ser el más adecuado ante un bajo número de réplicas. Por lo tanto, si bien la aplicación de la metodología *shrinkage* permitió resolver el problema de singularidad en la matriz de covarianza, no se observaron beneficios al aplicar MCG en la estimación de parámetros. Esto se debe al sesgo en las varianzas y covarianzas respecto a los valores poblacionales.

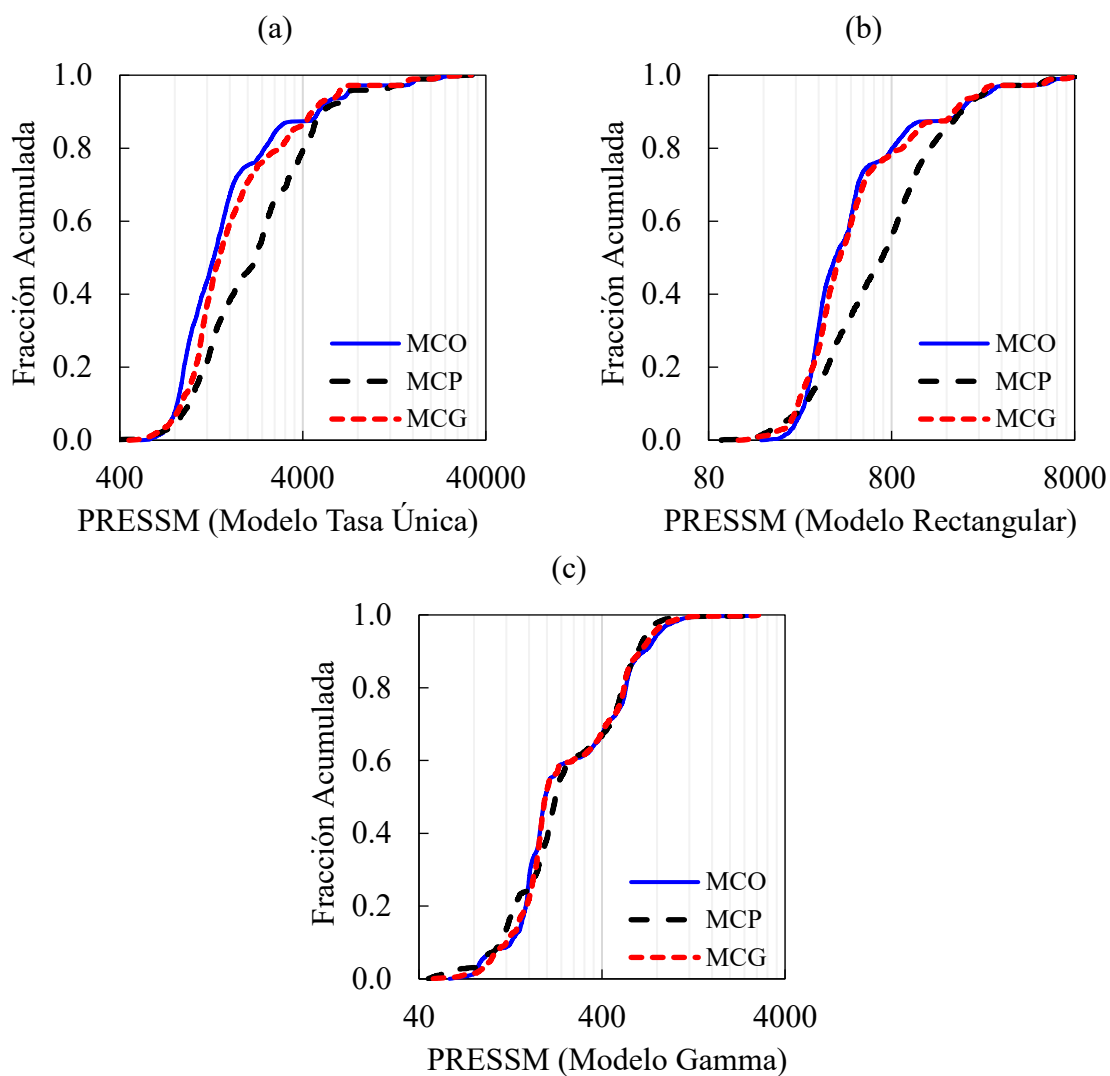


Figura 4.4 Fracción acumulada del PRESSM, comparando MCO, MCP Y MCG (*Test N°1*):
a) modelo de Tasa Única, b) modelo Rectangular, y c) modelo Gamma.

Tabla 4.2 Mediana del PRESSM para los tres modelos cinéticos (Tasa Única, Rectangular y Gamma), empleando los tres métodos de ajuste (MCO, MCP, MCG).

Test	Método	Modelos		
		Tasa Única	Rectangular	Gamma
N°1	MCO	1307	394	196
	MCP	2209	710	223
	MCG	1401	417	196
N°2	MCO	1672	444	221
	MCP	2061	579	255
	MCG	2210	570	242

4.4. Simulación de $R(t)$

Una vez seleccionado el modelo y el método de ajuste (modelo Gamma y MCO), se determinaron los parámetros del caso base utilizando los 14 datos experimentales. La Tabla 4.3 presenta dichos parámetros, junto con los tiempos de flotación seleccionados en las simulaciones. A partir de los parámetros del caso base, se realizaron simulaciones Monte Carlo con el objetivo de obtener respuestas cinéticas representativas de las pruebas experimentales. Para esto se simularon errores gaussianos autocorrelacionados, empleando las matrices de covarianzas contraídas. Dado que la variabilidad experimental puede generar que los datos tiempo-recuperación simulados no sean monótonamente crecientes al considerar los 14 tiempos experimentales, se simuló un subconjunto de 9 datos (de los 14 originales), asegurando recuperaciones siempre crecientes.

Tabla 4.3 Parámetros del caso base (modelo Gamma) y tiempos utilizados en las simulaciones Monte Carlo.

<i>Test</i>	R_{∞} , %	k_G , 1/min	a_G
N°1	78.22	9.00	0.68
N°2	82.03	12.26	0.73
Tiempo de flotación simulados			
Tiempos, min	0.17, 0.33, 0.67, 1, 1.5, 2, 4, 10, 32		

4.4.1. Modelación de datos cinéticos simulados y submuestreados

Los datos simulados fueron submuestreados, obteniéndose todas las combinaciones posibles de 5 tiempos, de los 9 disponibles (126 combinaciones). Esto permitió evaluar la sensibilidad de los parámetros cinéticos frente a una selección arbitraria de los intervalos de flotación en pruebas *batch*. La Figura 4.5 muestra las FDAs del error cuadrático relativo (ECR) de los parámetros, para todas las combinaciones analizadas [Figura 4.5(a) para el *Test* N°1 y Figura 4.5(b) para el *Test* N°2]. Para caracterizar los mejores y peores patrones de muestreo, se agruparon los valores de ECR según los percentiles 10 y 90: (i) los mejores intervalos son aquellos que llevaron a un ECR inferior al percentil 10 (<P10), y (ii) los peores intervalos corresponden a los que superan el percentil 90 (>P90) del ECR. La separación por percentiles del ECR, permitió individualizar intervalos de flotación que favorecen una adecuada o errática estimación de parámetros en la caracterización cinética.

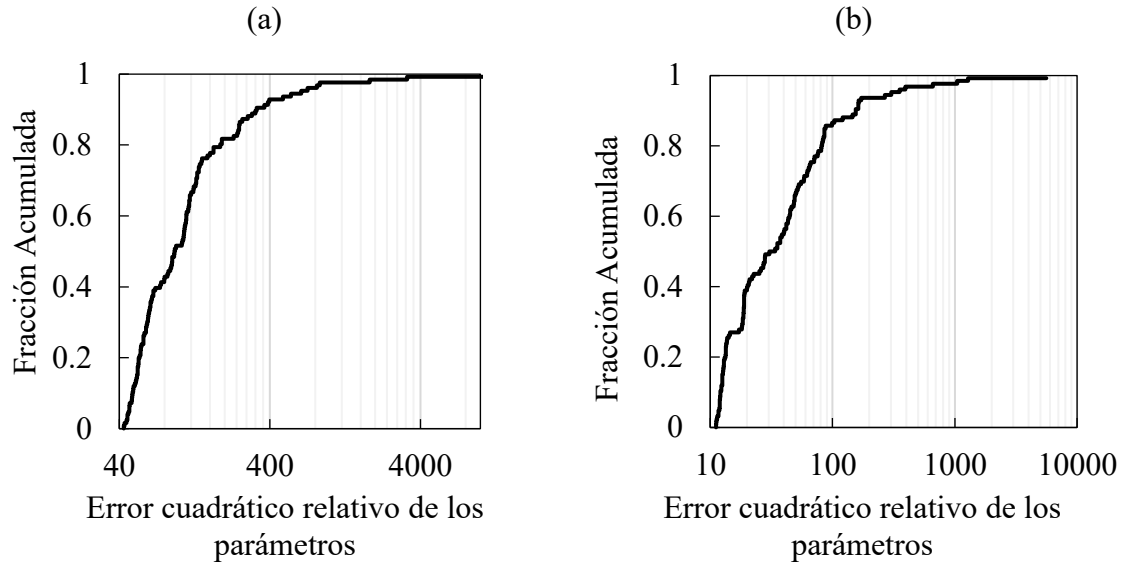


Figura 4.5 Fracción acumulada del ECR de los parámetros, a) *Test* N°1, b) *Test* N°2.

La Figura 4.6 muestra la sensibilidad de los parámetros cinéticos en la simulación del *Test* N°1, al comparar las combinaciones pertenecientes a los conjuntos <P10 y >P90. Se observa que las combinaciones <P10 presentan una mayor concentración en torno a los valores del caso base, reflejando alta precisión y exactitud. En contraste, las combinaciones >P90 exhiben mayor dispersión, aunque manteniendo una exactitud adecuada. Los resultados del *Test* N°2 se encuentran la Figura E.3 del Apéndice E y son consistentes con lo concluido de la simulación del *Test* N°1.

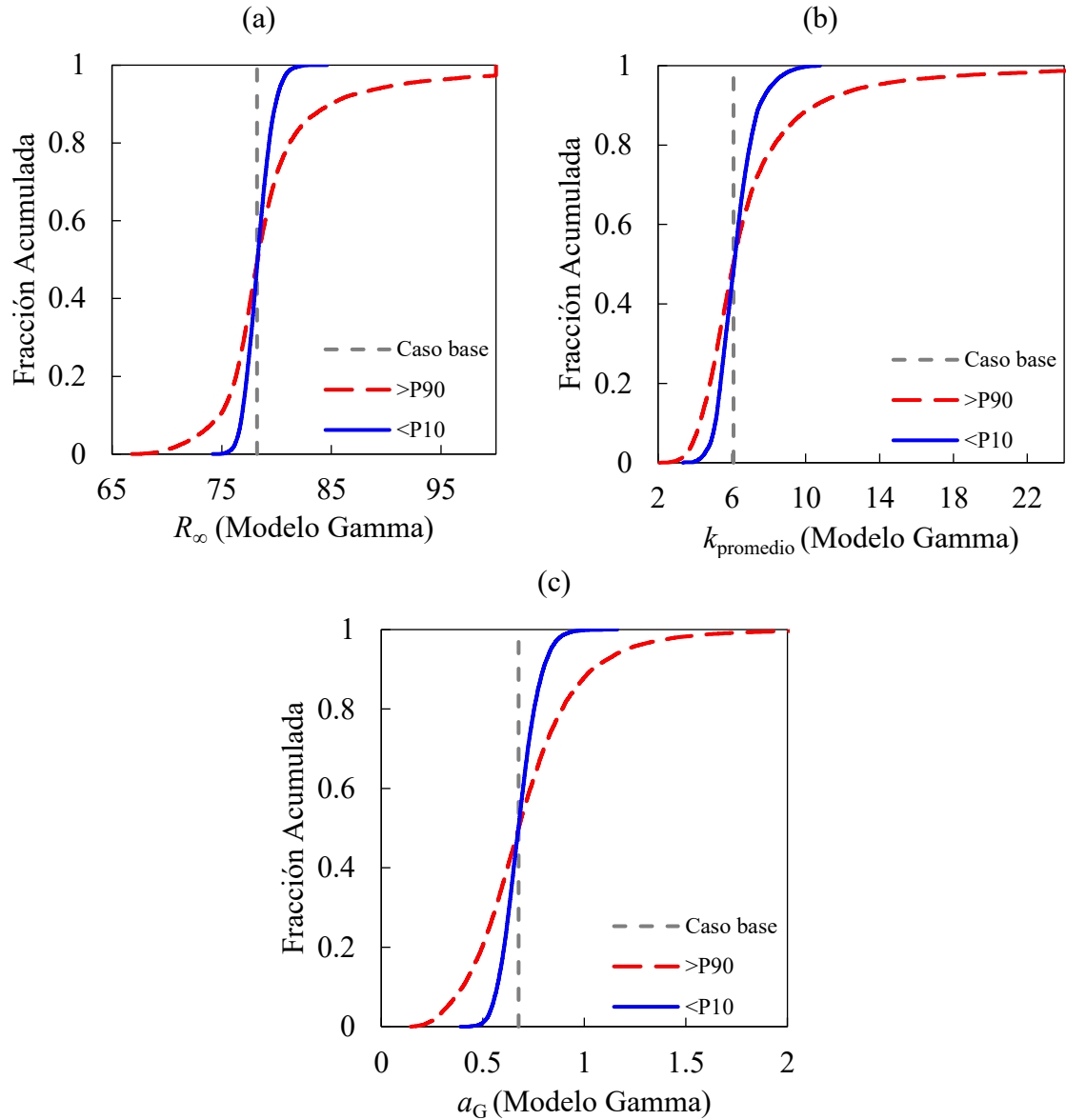


Figura 4.6 Sensibilidad de parámetros cinéticos obtenidos de los datos tiempo-recuperación simulados. *Test* N°1.

La Figura 4.7 destaca los intervalos de tiempo correspondientes a la mejor (menor ECR) y peor (mayor ECR) combinación en términos de estimación de parámetros en la simulación del *Test* N°1. Los círculos azules indican los datos seleccionados en la combinación y las cruces los valores omitidos. Los resultados evidencian que la mejor combinación incorpora intervalos representativos de las tres etapas características del proceso, permitiendo una adecuada identificación de los parámetros del modelo: inicio (0.17 min), transición al agotamiento y etapa final (32 min). En contraste, la combinación asociada al máximo ECR,

considera exclusivamente tiempos superiores a 1.5 min, no considerando la etapa inicial, de alta flotabilidad en el proceso. Los resultados del *Test* N°2 se encuentran la Figura E.4 del Apéndice E, y son consistentes con lo obtenido de la simulación del *Test* N°1.

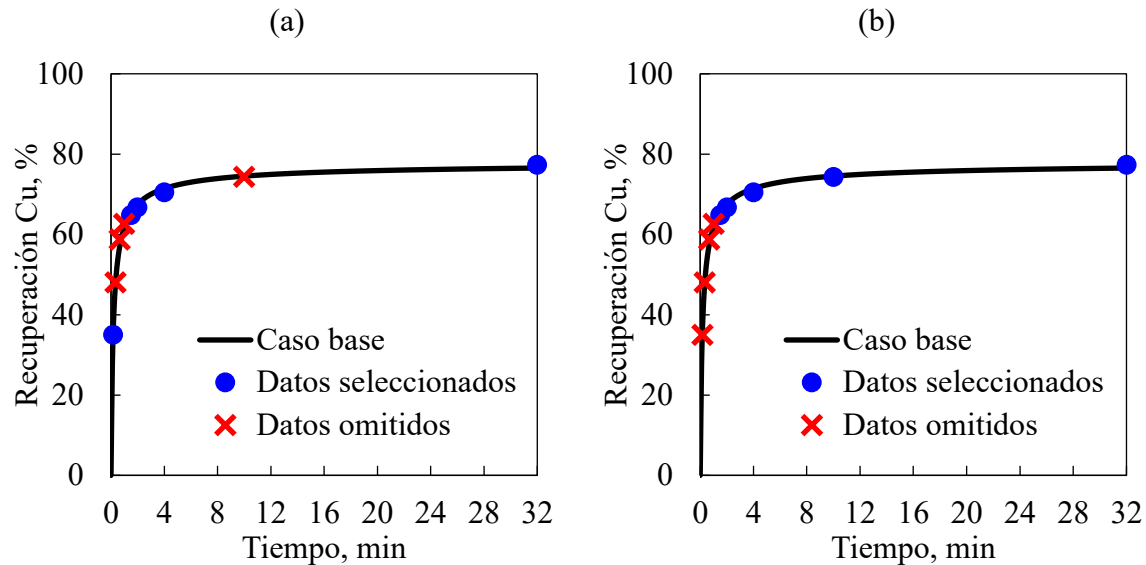


Figura 4.7 Mejor y peor patrón de muestreo en términos de la estimación de parámetros, *Test* N°1, a) mejor selección de intervalos, b) peor selección de intervalos.

4.5. Escalamiento *batch* – planta

Se realizó un ejercicio de escalamiento de *batch* a operación continua de todas las curvas tiempo-recuperación submuestreadas (5 de 9 datos), con el fin de evaluar sesgos en el diseño de circuitos industriales ante una selección arbitraria de los intervalos de flotación *batch*.

4.5.1. Recuperación objetivo

Bajo las condiciones $\tau = 20$ min y 6 celdas en serie, se calcularon las recuperaciones del caso base para ambos *Tests*. La Tabla 4.4 presenta dichas recuperaciones junto con los umbrales de consistencia definidos según lo descrito en la sección 3.5.

Tabla 4.4 Recuperación del caso base y umbrales de consistencia, *Test* N°1 y *Test* N°2, ($\tau = 20$ min y 6 celdas en serie).

<i>Test</i>	R_{base} , %	Umbral*, %	R_{inf} , %	R_{sup} , %
N°1	73.45	0.40	73.05	73.85
N°2	78.74	0.55	78.19	79.29

* Error estándar de la recuperación medida a $t = 8$ min.

La Figura 4.8 compara las recuperaciones planta proyectadas con los mejores y peores tiempos de flotación, definidos por el conjunto de todas las combinaciones de los percentiles 10 y 90 del ECR de los parámetros [Figura 4.8(a) para el *Test* N°1 y Figura 4.8(b) para el *Test* N°2]. En ambos percentiles, las recuperaciones planta tienden a una mediana similar a la recuperación del caso base. Sin embargo, las peores combinaciones ($>P90$) presentan mayor dispersión en torno a dicha mediana, evidenciado en una varianza superior de los datos respecto al caso base (Tabla 4.5). Asimismo, las peores combinaciones muestran un porcentaje significativo de datos fuera del umbral del caso base (55% en el *Test* N°1 y 38% en el *Test* N°2). En contraste, las mejores combinaciones ($<P10$) muestran una mayor precisión, alcanzando aproximadamente un 60% de los valores proyectados dentro del umbral para el *Test* N°1, y de un 80% para el *Test* N°2.

Los peores intervalos de los *Tests* N°1 y N°2 poseen un 6.16% y 2,91% de resultados infactibles ($R_{\infty} < R_{inf}$ del umbral del caso base), respectivamente. Los mejores intervalos en las simulaciones de ambos *Tests* no presentaron resultados infactibles.

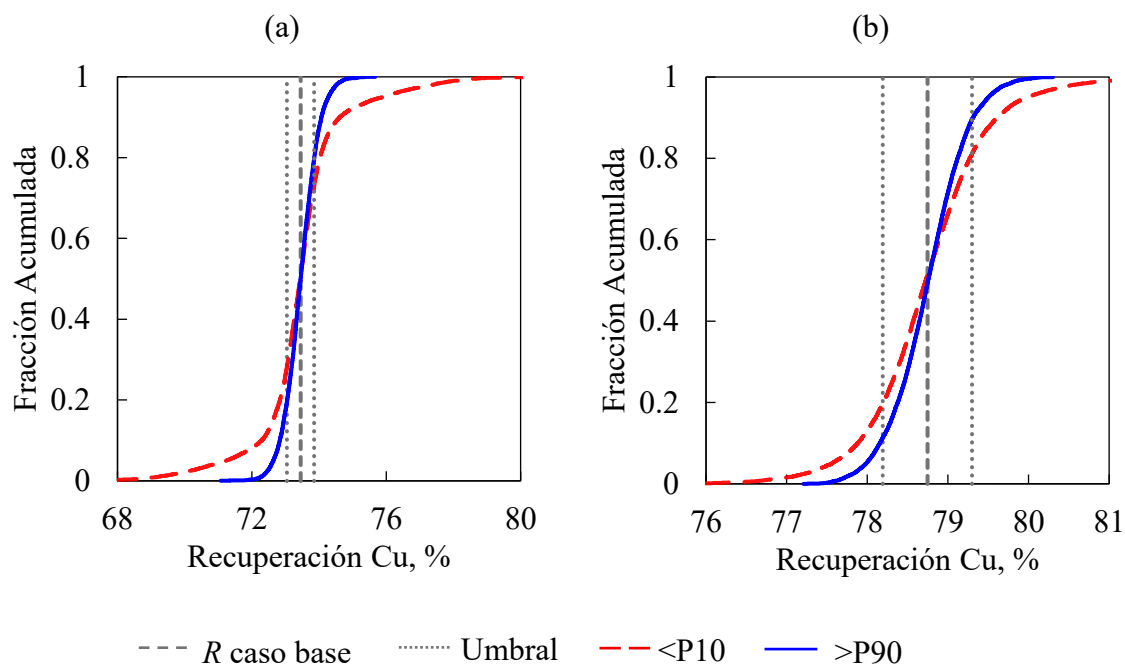


Figura 4.8 Fracción Acumulada de las recuperaciones planta escaladas ($\tau = 20$ min y $N = 6$) empleando los mejores y peores intervalos de flotación según el ECR de los parámetros, a) *Test* N°1 b) *Test* N°2.

Tabla 4.5 Comparación de resultados de las recuperaciones (escaladas) respecto al umbral del caso base, empleando el mejor y peor patrón de muestreo según el ECR de los parámetros (*Test* N°1 y *Test* N°2).

<i>Test</i>	Percentiles	Varianza	Dentro de umbral	Infactibles
N°1	<P10	0.25	59.8 %	0.0 %
	>P90	1.90	44.6 %	6.16 %
N°2	<P10	0.21	78.3 %	0.0 %
	>P90	0.59	61.4 %	2.91 %

4.5.2. Tiempo para cumplir con umbral de recuperación

De acuerdo con lo señalado en la Sección 3.5.2, se calcularon los tiempos de residencia requeridos para alcanzar los límites inferior y superior del umbral de recuperación (Tabla 4.6). La Figura 4.9 presenta la fracción acumulada del porcentaje de simulaciones, por combinación, que resultaron consistentes con el caso base en términos de tiempo de residencia. La consistencia se evaluó mediante el factor de traslape, definido en la metodología, tal que $0.75 \leq J \leq 1$.

De la Figura 4.9, con el fin de identificar los mejores y peores patrones de muestreo para escalamiento, se agruparon los porcentajes de consistencia según los percentiles 10 y 90: (i) los mejores intervalos corresponden a aquellos que llevan a un porcentaje de consistencia mayor al P90, y (ii) los peores intervalos llevaron a consistencias bajo el P10. Además, se consideraron como infactibles las combinaciones que para ningún τ alcanzan el umbral superior, R_{sup} .

Tabla 4.6 Tiempos de residencia (τ) del caso base y umbrales de consistencia, *Test* N°1 y *Test* N°2, N = 6 celdas en serie.

<i>Test</i>	$\tau_{\text{base, min}}$	$\tau_{\text{inf, min}}$	$\tau_{\text{sup, min}}$
N°1	20.0	17.5	22.6
N°2	20.0	15.9	25.6

Se observa, Figura 4.9(a), que las mejores combinaciones llevan a más de un 65% de simulaciones consistentes con el caso base en términos de escalamiento para el *Test* N°1, y más de un 70% para el *Test* N°2, Figura 4.9(b). En contraste, las combinaciones menos

favorables poseen menos de un 20% de consistencia en el *Test* N°1, y menos de un 40% de consistencia en el *Test* N°2.

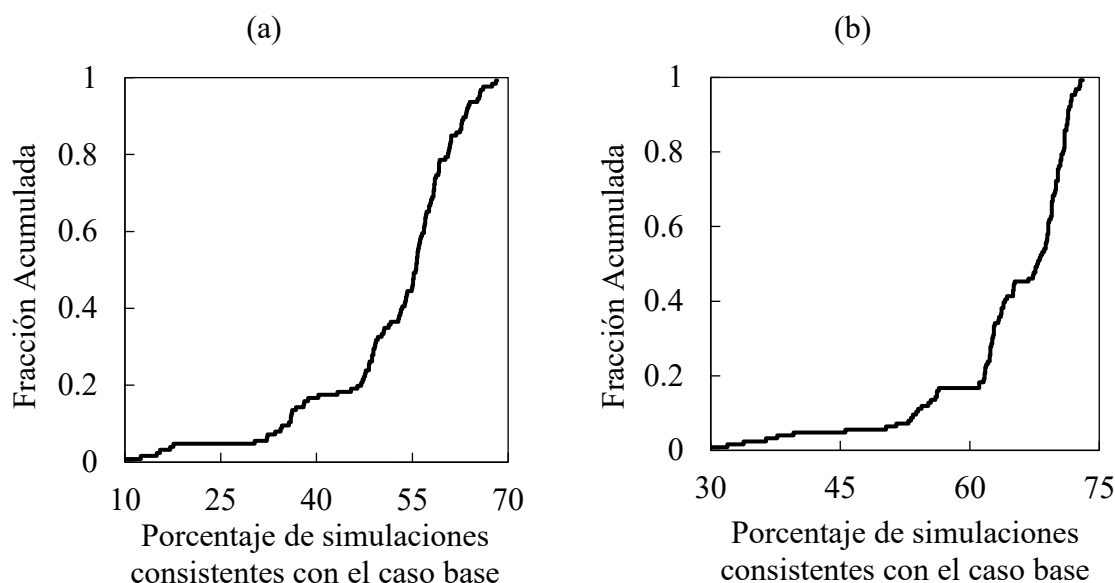


Figura 4.9 Fracción acumulada del porcentaje de simulaciones consistentes con el caso base, a) *Test* N°1 b) *Test* N°2.

En el análisis de sub o sobredimensionamiento, se definió un volumen de celda característico de 250 m³, con $\tau = 20$ min y un factor de volumen efectivo de 0.8 ($V_{\text{eff}} = 0.8 V_{\text{celda}}$), lo que implica un caudal fijo de pulpa de 60 m³/min. Bajo estas condiciones y considerando los tiempos umbral del caso base (τ_{inf} y τ_{sup} , Tabla 4.6), se calcularon los respectivos umbrales de volumen (Tabla 4.7).

Tabla 4.7 Volúmenes efectivos del caso base y de los umbrales de consistencia, *Test* N°1 y *Test* N°2, $\tau = 20$ min y 6 celdas en serie.

<i>Test</i>	$V_{\text{eff base, m}^3}$	$V_{\text{eff inf, m}^3}$	$V_{\text{eff sup, m}^3}$
N°1	200	175	226
N°2	200	159	256

Para cada simulación, con el caudal de alimentación fijo ($Q = 60$ m³/min), se determinaron los volúmenes de las celdas individuales requeridos para cumplir con los umbrales de tiempos de residencia de la Tabla 4.6, los que se compararon a los del caso base, Tabla 4.7. La Figura 4.10 presenta las fracciones acumuladas de dichos requerimientos de volumen, considerando únicamente el mejor y el peor patrón de muestreo, según el porcentaje de consistencia con el

caso base. Se evaluaron estos patrones de muestreo en términos de los límites de los cuartiles 1 y 3, (Q_1 y Q_3 , respectivamente) y la cantidad de casos infactibles, lo que se resume en la Tabla 4.8.

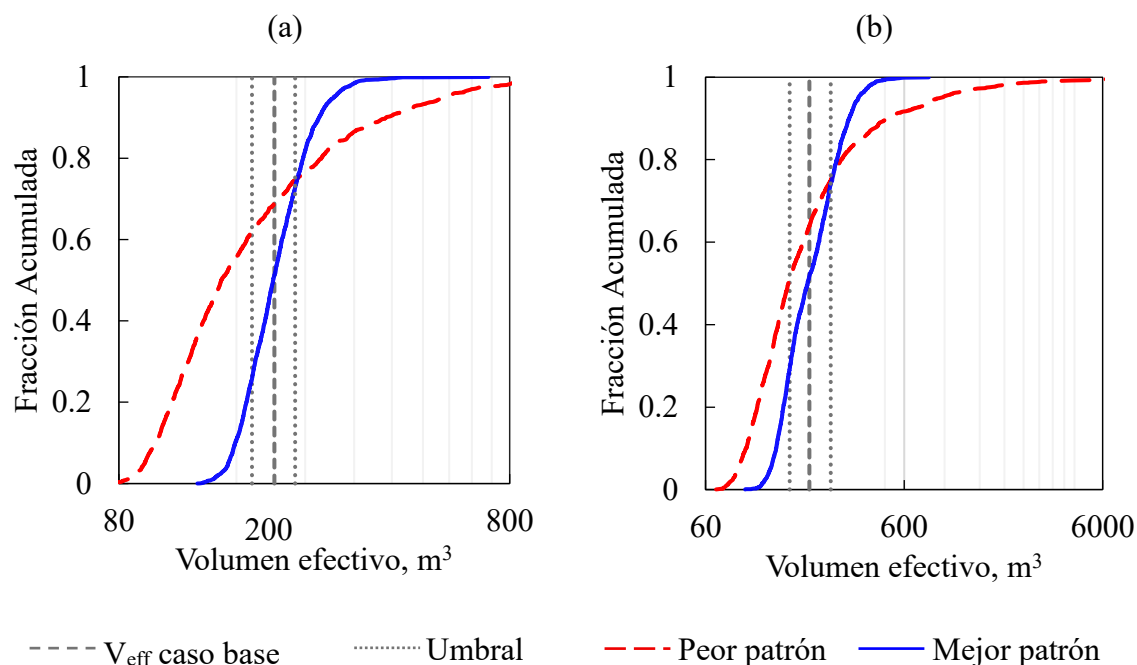


Figura 4.10 Fracción acumulada de los volúmenes efectivos para alcanzar los umbrales de recuperación, empleando el mejor y peor patrón de muestreo (escalamiento) según consistencia con el caso base, a) *Test* N°1, b) *Test* N°2.

Tabla 4.8 Comparación de los volúmenes de celda necesarios para alcanzar los umbrales de recuperación del caso base, empleando el mejor y peor patrón de muestreo (escalamiento) según consistencia con el caso base, (*Test* N°1 y *Test* N°2).

	<i>Test</i> N°1		<i>Test</i> N°2	
Índice	Volumen efectivo, m ³		Volumen efectivo, m ³	
	Mejor combinación	Peor combinación	Mejor combinación	Peor combinación
Q ₁ – Q ₃	174 – 229	115 – 229	154 – 260	116 – 256
Caso base	175 – 226		159 – 256	
Infactibles	0%	29%	0%	17%

Se determinó que, en ambos *Tests*, los mejores intervalos de flotación llevaron a valores de Q₁ y Q₃ similares a los umbrales de volumen del caso base. En contraste, la peor combinación mostró un Q₃ cercano al límite superior, pero un Q₁ considerablemente menor, lo que evidencia una tendencia al subdimensionamiento. Los peores patrones de muestreo registraron un 29 % y 17 % de resultados infactibles en los *Tests* N°1 y N°2, respectivamente, mientras que el mejor patrón, en ambos *Tests* no registró resultados infactibles.

La Figura 4.11 muestra los patrones de muestreo asociados a la mejor y peor combinación (*Test* N°1), esta vez en términos de dimensionamiento de circuitos. Nuevamente, los círculos indican los datos seleccionados y las cruces los valores omitidos. Los resultados indican que la mejor combinación considera un intervalo inicial (0.33 min) junto con los intervalos correspondientes a la zona de agotamiento (>2 min), lo que evidencia la importancia de caracterizar adecuadamente dicha etapa para evitar errores significativos de escalamiento. En contraste, la peor combinación incluyó únicamente tiempos cortos en las pruebas *batch* (<1.5 min), lo que derivó en errores críticos en el cálculo de volúmenes de celda, como se presenta en la Tabla 4.8. Los resultados del *Test* N°2 se encuentran en la Figura E.5 del Apéndice E, y son consistentes con lo concluido del *Test* N°1.

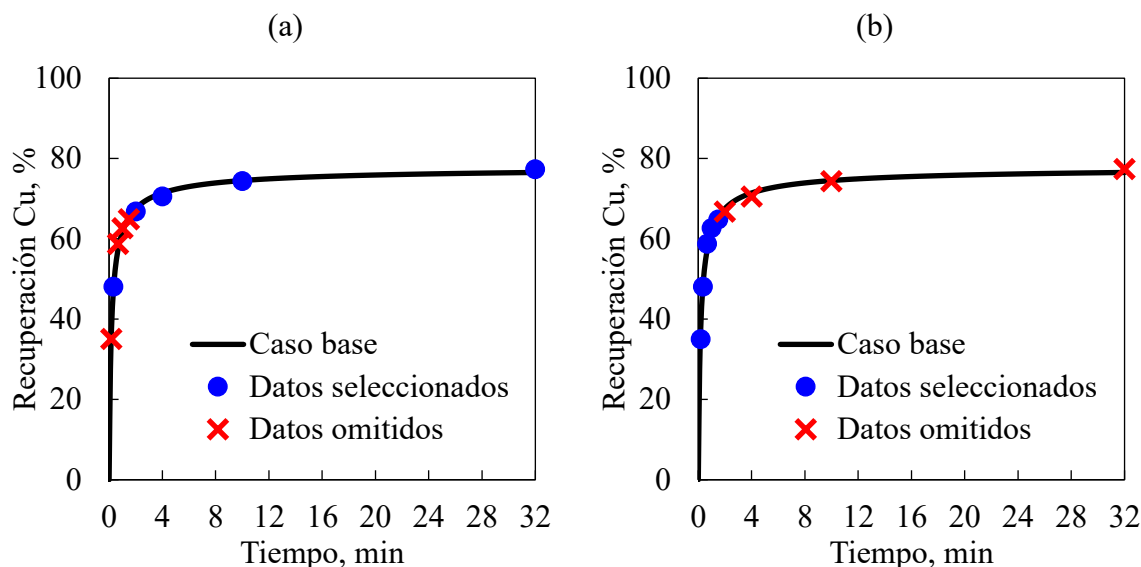


Figura 4.11 Mejores y peores intervalos de flotación para escalamiento
Test N°1, a) mejor combinación, y b) peor combinación.

Se observó que los mejores tiempos para estimar los parámetros cinéticos (Figura 4.7) no coinciden con los más adecuados para escalamiento (Figura 4.11). Estos últimos requieren caracterizar adecuadamente el agotamiento de la flotación. No obstante, los mejores tiempos obtenidos con ambos análisis (parámetros y escalamiento) resultaron en patrones similares, y se ubicaron en valores mutuamente favorables (ver Apéndice F).

4.6. Impacto de diseño experimentales *batch* desbalanceados en los costos

Para evaluar el impacto de realizar pruebas *batch* desbalanceadas sobre los costos y la sustentabilidad del proceso, se consideró un caudal de $60 \text{ m}^3/\text{min}$, una ley de alimentación de $0.8\% \text{ Cu}$, y las condiciones del Test N°1. Además, se consideró un precio promedio del cobre de 4.35 USD/libra (Comisión Chilena del Cobre, 2025), sin variaciones en el precio del tratamiento posterior.

De los resultados de la Tabla 4.8, los resultados clasificados como infactibles indican que no existe un volumen de celda (con $N = 6$ y $Q = 60 \text{ m}^3/\text{min}$) capaz de alcanzar la recuperación objetivo. Si la factibilidad del proceso dependiera críticamente de dicha recuperación objetivo, es esperable que el proyecto no se lleve a cabo.

A partir de los resultados de la Figura 4.10(a), para el *Test* N°1, se determinó que el peor patrón de muestreo predice un percentil 90 (P90) de volumen efectivo de celda de 387 m³. Este valor es 161 m³ mayor que el límite superior del umbral del caso base, Tabla 4.7, lo que lleva a mayores costos de inversión y operación. Este volumen equivale a un tiempo de residencia de circuito de 38.7 min (en vez del *ground truth* de 20 min). Con celdas bastantes más grandes que las realmente requeridas, la recuperación proyectada en el escalamiento es la misma del caso base, de 73.45%, usando el peor diseño experimental. Sin embargo, utilizando los parámetros cinéticos teóricos del caso base, se obtendría una recuperación “real” de 75.2% en el proceso industrial; es decir, 1.7% más de lo proyectado, lo que llevaría a un aumento de las ganancias en 15 millones de USD anuales (ver Apéndice G). Sin embargo, este incremento sería beneficioso solo si compensa los costos adicionales asociados al sobredimensionamiento. Cabe destacar que el aumento en los costos puede afectar la viabilidad del proyecto, dado a que, en la etapa de dimensionamiento, se desconoce el aumento potencial en recuperación.

En contraste, el peor diseño experimental lleva a un percentil 10 (P10) de volumen efectivo de celda de 99 m³, con un tiempo de residencia del circuito de 9.9 min (en vez del *ground truth* de 20 min). En estas condiciones, la recuperación proyectada es nuevamente la del caso base, de 73.45%. Sin embargo, utilizando los parámetros cinéticos “reales”, se obtendría una recuperación de 70.7%; es decir, 2.8% menos de lo proyectado. Si el proyecto se ejecutara con este tamaño de celda, las ganancias proyectadas disminuirían en 25 millones de USD anuales (ver Apéndice G). En la práctica, este escenario podría comprometer la rentabilidad del proyecto, ya que durante el dimensionamiento se asumiría una recuperación mayor a la que efectivamente se alcanzaría en la operación industrial.

Desde el punto de vista energético, un sobredimensionamiento de 161 m³, implica pasar de una celda comercial de volumen efectivo de 200 m³ a una de 300 m³, o incluso a una de 500 m³ (Metso, s.f.), lo que produce un aumento superior al 30% y 100%, respectivamente, en la potencia instalada (ver Apéndice G). Esto se traduce proporcionalmente en un mayor consumo energético. Además, manteniendo la relación diámetro-altura, se produciría un incremento del 32% en el área de construcción (*footprint*) por celda (Apéndice G), lo que eleva los costos de inversión. Por otra parte, un subdimensionamiento de 100 m³ (P10) implica menores costos de inversión (disminución de 40% en potencia instalada y

disminución de 47% en *footprint*), pero obteniendo menores recuperaciones metalúrgicas, comprometiendo así el retorno de la inversión y la viabilidad económica durante la ejecución del proyecto.

4.7. Impacto ambiental de diseños experimentales *batch* desbalanceados

El análisis expuesto en la Sección 4.6 está directamente relacionado con el impacto ambiental y con los riesgos asociados a la sostenibilidad del proceso. La Tabla 4.9 resume los principales aspectos (causa) e impactos (efectos) ambientales identificados.

Tabla 4.9 Resumen de aspectos e impactos ambientales por tipo de sesgo en el escalamiento (sobre o subdimensionamiento).

Tipo de sesgo	Aspecto	Impacto
Sobre dimensionamiento	Mayor potencia instalada (mayor consumo energético)	Emisiones indirectas de gases de efecto invernadero.
	Mayor requerimiento de materiales para instalación y construcción	Aumento de la huella de carbono.
Sub dimensionamiento	Menor recuperación metalúrgica (mayores pérdidas de mineral/metal en los relaves)	Mayor contaminación de suelos por presencia de metales pesados

Los resultados de este trabajo destacan que una selección inadecuada de los tiempos de flotación en ensayos *batch* introduce sesgos significativos en la estimación de parámetros cinéticos, incrementando la incertidumbre en el escalamiento industrial, y afectando la confiabilidad del dimensionamiento de circuitos de gran escala.

CAPÍTULO V

5. CONCLUSIONES Y RECOMENDACIONES

5.1. Conclusiones

Este trabajo consideró, como objetivo general, seleccionar adecuadamente intervalos de flotación en pruebas cinéticas, con el fin de disminuir la incertidumbre en la estimación de parámetros, y aumentar la confiabilidad del escalamiento industrial. En base a simulaciones Monte Carlo respecto de un caso base, se han obtenido las siguientes conclusiones, las que responden a cada uno de los objetivos específicos.

Con respecto a la caracterización cinética mediante Mínimos Cuadrados Ordinarios, Ponderados y Generalizados, se obtuvo que:

- Los errores experimentales de los datos tiempos-recuperación (14 puntos) mostraron claras evidencias de autocorrelación y heteroscedasticidad.
- El modelo Gamma, ajustado con mínimos cuadrados ordinarios, entregó la mejor generalización bajo condiciones de submuestreo, y bajo número de réplicas.

En el estudio de la sensibilidad de los parámetros cinéticos ante respuestas submuestreadas, se identificó que:

- Un muestreo adecuado con 5 puntos, en términos de estimación de parámetros, incluye un tiempo corto (*e.g.*, 0.17 min), tiempos intermedios (transición al agotamiento) y un tiempo largo (*e.g.*, 32 min). Estos llevaron a una mayor precisión y exactitud respecto del caso base, empleando todos los datos. El peor desempeño se obtuvo al utilizar solo tiempos largos (*e.g.*, >1.5 min), lo que llevó a una mayor dispersión de los parámetros.

Al evaluar sesgos en los resultados de escalamiento causados por deficiencias en los diseños experimentales, se concluyó que:

- Al aplicar escalamiento, los tiempos de residencia obtenidos con los mejores intervalos de 5 puntos lograron, en promedio, un 68% de consistencia respecto del caso base. Los peores intervalos solo llevaron a un 20% de consistencia, generando sub y/o sobredimensionamiento del circuito industrial.
- Los tiempos obtenidos para mejorar la robustez en la estimación de parámetros, no coincidieron 100% con los obtenidos para mejorar el escalamiento. Para un escalamiento robusto se requiere caracterizar apropiadamente el agotamiento de la flotación en las pruebas *batch*. Utilizar solo tiempos cortos (*e.g.*, <1.5 min) genera errores significativos en el dimensionamiento de circuitos.

Finalmente, al analizar el impacto de aplicar diseños experimentales desbalanceados sobre los costos y sustentabilidad del proceso, se determinó que:

- Diseños experimentales desbalanceados generan conclusiones erróneas sobre el dimensionamiento de equipos de flotación, sesgando los costos de inversión y operación, las ganancias proyectadas y el respectivo impacto ambiental.

En resumen, mediante simulaciones Monte Carlo, se evidenció que la selección errónea de los tiempos de flotación en las pruebas *batch*, genera sesgos significativos en la estimación de parámetros, lo que aumenta la incertidumbre del escalamiento industrial.

5.2. Recomendaciones

Se destaca la relevancia de implementar simulaciones Monte Carlo en el análisis de curvas tiempo-recuperación, y para la selección de patrones de muestreo confiables para la estimación de parámetros cinéticos, y posterior escalamiento industrial.

Se recomienda realizar pruebas *batch* con más réplicas que intervalos de flotación, para obtener matrices de covarianza más representativas de los datos experimentales. De esta manera, se podrá incorporar la autodependencia, sin manipulaciones, tanto en el ajuste de modelos cinéticos como en las simulaciones Monte Carlo.

REFERENCIAS

- Aitken, A. C. (1935). On least squares and linear combinations of observations. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh*, 55, 42–48.
- Allen, D. M. (1974). The relationship between variable selection and data augmentation and a method for prediction. *Technometrics*, 16(1), 125–127. <https://doi.org/10.1080/00401706.1974.10489157>
- Bilal, M., Park, I., Hornn, V., Ito, M., Hassan, F., Jeon, S., & Hiroyoshi, N. (2022). The challenges and prospects of recovering fine copper sulfides from tailings using different flotation techniques: A review. *Minerals*, 12(5), 586. <https://doi.org/10.3390/min12050586>
- Bu, X., Xie, G., Peng, Y., Ge, L., & Ni, C. (2017). Kinetics of flotation: Order of process, rate constant distribution and ultimate recovery. *Physicochemical Problems of Mineral Processing*, 53(1), 342–359. <https://doi.org/10.5277/PPMP170128>
- Comisión Chilena del Cobre. (2025). Sitio web de la Comisión Chilena del Cobre. Recuperado el 14 de octubre de 2025, de <https://www.cochilco.cl/web/>
- Esteban, A. (2025). Determinación de patrones en los datos tiempo-recuperación de la flotación batch que llevan a estimaciones confiables de los parámetros cinéticos. *Universidad Técnica Federico Santa María*.
- Fisher, T. J., & Sun, X. (2011). Improved Stein-type shrinkage estimators for the high-dimensional multivariate normal covariance matrix. *Computational Statistics & Data Analysis*, 55(5), 1909–1918. <https://doi.org/10.1016/j.csda.2010.12.006>
- Fuerstenau, M. C., & Han, K. N. (Eds.). (2003). *Principles of mineral processing* (1st ed.). Englewood, CO: Society for Mining, Metallurgy, and Exploration.
- García-Zuñiga, H. (1935). Flotation recovery is an exponential function of time. *Bol. Soc. Mac. Min.*, 47, 83–86.

- Gharai, M., & Venugopal, R. (2015). Modeling of flotation process – an overview of different approaches. *Mineral Processing and Extractive Metallurgy Review*, 37(1), 1–20. <https://doi.org/10.1080/08827508.2015.1115991>
- Hancock, J. M., & Zvelebil, M. J. (Eds.). (2004). *Dictionary of bioinformatics and computational biology* (1st ed.). Hoboken, NJ: Wiley. <https://doi.org/10.1002/9780471650126.dob0956>
- Hernáinz, F., & Calero, M. (2001). Froth flotation: Kinetic models based on chemical analogy. *Chemical Engineering and Processing: Process Intensification*, 40(3), 269–275. [https://doi.org/10.1016/S0255-2701\(00\)00125-2](https://doi.org/10.1016/S0255-2701(00)00125-2)
- Huber-Panu, I., Ene-Danalache, E., & Cojocariu, D. G. (1976). Mathematical models of batch and continuous flotation. En *Flotation—A. M. Gaudin Memorial* (pp. 675–724). American Institute of Mining, Metallurgical, and Petroleum Engineers, Inc.
- Imaizumi, T., & Inoue, T. (1963). Kinetic consideration of froth flotation. En *Proceedings of the 6th International Mineral Processing Congress* (pp. 581–593). Cannes, France.
- Janishar Anzoom, S., Bournival, G., & Ata, S. (2024). Coarse particle flotation: A review. *Minerals Engineering*, 206, 108499. <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2023.108499>
- Kwan, C. C. Y. (2011). An introduction to shrinkage estimation of the covariance matrix: A pedagogic illustration. *Spreadsheets in Education (eJSiE)*, 4(3), Article 6.
- Ledoit, O., & Wolf, M. (2004). A well-conditioned estimator for large-dimensional covariance matrices. *Journal of Multivariate Analysis*, 88(2), 365–411. [https://doi.org/10.1016/S0047-259X\(03\)00096-4](https://doi.org/10.1016/S0047-259X(03)00096-4)
- Lynch, A. J., Johnson, N., Manlapig, E., & Thorne, C. (Eds.). (1981). *Mineral and coal flotation circuits: Their simulation and control*. Amsterdam, Netherlands: Elsevier.
- Magnus, J. R. (2022). Gauss on least-squares and maximum-likelihood estimation. *Archive for History of Exact Sciences*, 76(4), 425–430. <https://doi.org/10.1007/s00407-022-00291-w>

- Mesa, D., & Brito-Parada, P. R. (2019). Scale-up in froth flotation: A state-of-the-art review. *Separation and Purification Technology*, 210, 950–962. <https://doi.org/10.1016/j.seppur.2018.08.076>
- Metso. (s.f.). *TankCell® unidades de flotación*. Recuperado el 14 de octubre de 2025, de <https://www.metso.com/es/portafolio/tankcell/>
- Metropolis, N., & Ulam, S. (1949). The Monte Carlo Method. *Journal of the American Statistical Association*, 44(247), 335–341. <https://doi.org/10.1080/01621459.1949.10483310>
- Minera Los Pelambres. (2022). Procedimiento de flotación, laboratorio metalúrgico en Minera Los Pelambres. Minera Los Pelambres.
- Napier-Munn, T. J. (2012). Statistical methods to compare batch flotation grade-recovery curves and rate constants. *Minerals Engineering*, 34, 70–77. <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2012.03.036>
- Sin, G., & Espuña, A. (2020). Applications of Monte Carlo method in chemical, biochemical and environmental engineering. *Frontiers in Energy Research*, 8, 68. <https://doi.org/10.3389/fenrg.2020.00068>
- Vinnett, L., Jaques, A., Alvarez-Silva, M., & Waters, K. E. (2018). Incorporating the covariance effect in modelling batch flotation kinetics. *Minerals Engineering*, 122, 26–37. <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2018.03.017>
- Wills, B. A., & Finch, J. A. (2016). Froth flotation. En B. A. Wills & J. A. Finch, *Mineral processing technology* (8th ed., pp. 265–380). Amsterdam, Netherlands: Elsevier. <https://doi.org/10.1016/B978-0-08-097053-0.00012-1>
- Wood, K. R. (2002). Flotation equipment selection and plant layout. En A. L. Mular (Ed.), *Mineral Processing Plant Design, Practice, and Control* (Vol. 2). Littleton, CO: Society for Mining, Metallurgy, and Exploration. [páginas no disponibles]
- Woodburn, E. T., & Loveday, B. K. (1965). The effect of variable residence time on the performance of a flotation system. *Journal of the Southern African Institute of Mining and Metallurgy*, 65(12), 612–628. https://doi.org/10.10520/AJA0038223X_4958

- Yang, Z. (2022). Application of Monte-Carlo simulations in environment and chemistry. *Highlights in Science, Engineering and Technology*, 17, 5–11. <https://doi.org/10.54097/hset.v17i.2430>
- Yianatos, J., Contreras, F., Morales, P., Coddou, F., Elgueta, H., & Ortíz, J. (2010). A novel scale-up approach for mechanical flotation cells. *Minerals Engineering*, 23(11–13), 877–884. <https://doi.org/10.1016/j.mineng.2010.05.004>
- Yianatos, J., & Vinnett, L. (2015). Flotación de minerales. Valparaíso, Chile: *Universidad Técnica Federico Santa María*.
- Zhang, J., & Cui, S. (2023). Investigating the number of Monte Carlo simulations for statistically stationary model outputs. *Axioms*, 12(5), 481. <https://doi.org/10.3390/axioms12050481>

APÉNDICE

Apéndice A. Resultados experimentales

Tabla A.1 Resultados experimentales, $P_{80} = 300 \mu\text{m}$.

Tiempo, min	Recuperación Cu, %				Promedio Desviación estándar	
	Rep 1	Rep 2	Rep 3	Rep 4		
0.17	29.7797	36.2525	32.2368	41.8579	35.0317	5.2752
0.33	45.6214	48.8717	42.9683	54.6601	48.0304	5.0361
0.67	59.3768	59.4422	54.9094	61.1316	58.7150	2.6639
1.00	64.1275	62.8678	59.5486	64.0318	62.6439	2.1415
1.50	65.3300	65.0415	63.2231	65.6375	64.8080	1.0842
2.00	67.3110	66.8990	65.5623	67.2646	66.7592	0.8189
4.00	71.2924	70.3987	70.0194	70.3972	70.5269	0.5406
6.00	73.5969	72.1091	71.8485	72.2599	72.4536	0.7809
8.00	74.7866	72.9656	73.2372	73.7444	73.6835	0.8032
10.00	75.8376	73.4641	73.9346	74.1914	74.3569	1.0321
12.00	76.1656	73.7605	74.5789	74.7660	74.8177	0.9991
16.00	77.0659	74.3617	75.2993	75.6675	75.5986	1.1221
24.00	78.0595	75.3624	76.4982	77.0415	76.7404	1.1237
32.00	78.4250	75.6047	77.6609	77.6212	77.3279	1.2069

Tabla A.2 Resultados experimentales, $P_{80} = 212 \mu\text{m}$.

Tiempo, min	Recuperación Cu, %						Promedio	Desviación estándar
	Rep 1	Rep 2	Rep 3	Rep 4	Rep 5	Rep 6		
0.17	47.8350	47.8350	45.5355	40.5080	43.1889	44.7584	44.9435	2.8234
0.33	59.7745	59.9919	58.1848	52.0364	52.6800	58.9030	56.9284	3.6040
0.67	65.9926	69.9830	66.9841	65.0102	63.5699	65.6779	66.2030	2.1714
1.00	69.9853	73.8138	71.0597	70.6620	68.3906	68.9205	70.4720	1.9248
1.50	71.6660	74.9946	72.9421	72.7375	71.0333	71.2057	72.4299	1.4811
2.00	72.8980	76.8899	75.5850	73.7469	72.1214	72.5591	73.9667	1.8837
4.00	76.4904	79.0138	76.9841	75.5391	74.3186	75.5465	76.3154	1.6087
6.00	77.8925	80.2537	77.6666	77.0225	76.0419	77.2839	77.6935	1.4100
8.00	78.5982	80.9931	79.1871	77.5449	77.2126	78.2789	78.6358	1.3568
10.00	79.0159	81.2488	79.5932	77.9740	77.9625	78.9021	79.1161	1.2220
12.00	79.2144	81.5171	80.0783	78.3661	78.4405	79.4566	79.5121	1.1742
16.00	79.7655	82.2392	80.7304	79.3621	79.1718	80.1894	80.2431	1.1293
24.00	80.8420	82.8663	81.7819	81.8667	80.4569	81.0539	81.4780	0.8715
32.00	81.5818	83.2779	82.5386	82.5437	81.1317	81.6864	82.1267	0.7937

Apéndice B. Matrices de covarianzas muestrales

Tabla B.1 Matriz de covarianza muestral, *Test* N°1.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	27.83	24.36	8.18	3.54	2.55	1.36	-1.21	-2.02	-1.67	-2.94	-2.69	-2.64	-1.96	-2.26
2	24.36	25.36	11.43	7.16	4.15	2.73	-0.08	-0.42	-0.20	-1.09	-1.09	-0.87	-0.37	-1.28
3	8.18	11.43	7.10	5.43	2.85	2.08	0.68	0.78	0.68	0.51	0.30	0.46	0.51	-0.36
4	3.54	7.16	5.43	4.59	2.29	1.75	0.83	1.07	0.98	1.02	0.81	0.97	0.94	0.21
5	2.55	4.15	2.85	2.29	1.18	0.88	0.36	0.44	0.39	0.37	0.26	0.34	0.33	-0.04
6	1.36	2.73	2.08	1.75	0.88	0.67	0.32	0.40	0.36	0.37	0.29	0.34	0.33	0.04
7	-1.21	-0.08	0.68	0.83	0.36	0.32	0.29	0.42	0.39	0.49	0.43	0.47	0.42	0.28
8	-2.02	-0.42	0.78	1.07	0.44	0.40	0.42	0.61	0.59	0.76	0.69	0.76	0.69	0.53
9	-1.67	-0.20	0.68	0.98	0.39	0.36	0.39	0.59	0.65	0.82	0.78	0.88	0.86	0.77
10	-2.94	-1.09	0.51	1.02	0.37	0.37	0.49	0.76	0.82	1.07	1.02	1.13	1.08	0.99
11	-2.69	-1.09	0.30	0.81	0.26	0.29	0.43	0.69	0.78	1.02	1.00	1.12	1.09	1.07
12	-2.64	-0.87	0.46	0.97	0.34	0.34	0.47	0.76	0.88	1.13	1.12	1.26	1.24	1.22
13	-1.96	-0.37	0.51	0.94	0.33	0.33	0.42	0.69	0.86	1.08	1.09	1.24	1.26	1.28
14	-2.26	-1.28	-0.36	0.21	-0.04	0.04	0.28	0.53	0.77	0.99	1.07	1.22	1.28	1.46

Tabla B.2 Matriz de covarianza muestral, *Test* N°2.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	7.97	9.32	4.16	2.34	1.36	2.16	3.16	2.78	2.89	2.66	2.45	2.10	0.50	0.39
2	9.32	12.99	5.59	2.89	1.67	2.82	4.07	3.57	3.70	3.38	3.21	2.82	0.88	0.76
3	4.16	5.59	4.71	3.85	2.84	3.68	3.45	3.00	2.92	2.59	2.46	2.39	1.61	1.43
4	2.34	2.89	3.85	3.71	2.82	3.44	2.91	2.48	2.31	1.99	1.86	1.87	1.60	1.44
5	1.36	1.67	2.84	2.82	2.19	2.68	2.12	1.80	1.69	1.46	1.37	1.40	1.25	1.13
6	2.16	2.82	3.68	3.44	2.68	3.55	2.74	2.20	2.24	1.96	1.88	1.88	1.53	1.40
7	3.16	4.07	3.45	2.91	2.12	2.74	2.59	2.21	2.14	1.88	1.76	1.70	1.18	1.06
8	2.78	3.57	3.00	2.48	1.80	2.20	2.21	1.99	1.85	1.64	1.52	1.48	1.00	0.87
9	2.89	3.70	2.92	2.31	1.69	2.24	2.14	1.85	1.84	1.65	1.57	1.50	0.93	0.82
10	2.66	3.38	2.59	1.99	1.46	1.96	1.88	1.64	1.65	1.49	1.43	1.36	0.80	0.69
11	2.45	3.21	2.46	1.86	1.37	1.88	1.76	1.52	1.57	1.43	1.38	1.32	0.76	0.66
12	2.10	2.82	2.39	1.87	1.40	1.88	1.70	1.48	1.50	1.36	1.32	1.28	0.80	0.70
13	0.50	0.88	1.61	1.60	1.25	1.53	1.18	1.00	0.93	0.80	0.76	0.80	0.76	0.69
14	0.39	0.76	1.43	1.44	1.13	1.40	1.06	0.87	0.82	0.69	0.66	0.70	0.69	0.63

Apéndice C. Matrices de covarianzas contraídas

Tabla C.1 Matriz de covarianza contraída, *Test N°1*.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	15.82	12.81	4.30	1.86	1.34	0.71	-0.64	-1.06	-0.88	-1.55	-1.41	-1.39	-1.03	-1.19
2	12.81	14.53	6.01	3.77	2.18	1.44	-0.04	-0.22	-0.10	-0.57	-0.57	-0.46	-0.20	-0.67
3	4.30	6.01	4.92	2.85	1.50	1.09	0.36	0.41	0.36	0.27	0.16	0.24	0.27	-0.19
4	1.86	3.77	2.85	3.60	1.21	0.92	0.44	0.57	0.52	0.54	0.43	0.51	0.49	0.11
5	1.34	2.18	1.50	1.21	1.81	0.46	0.19	0.23	0.20	0.19	0.14	0.18	0.18	-0.02
6	0.71	1.44	1.09	0.92	0.46	1.54	0.17	0.21	0.19	0.20	0.15	0.18	0.17	0.02
7	-0.64	-0.04	0.36	0.44	0.19	0.17	1.34	0.22	0.20	0.26	0.23	0.25	0.22	0.15
8	-1.06	-0.22	0.41	0.57	0.23	0.21	0.22	1.51	0.31	0.40	0.36	0.40	0.36	0.28
9	-0.88	-0.10	0.36	0.52	0.20	0.19	0.20	0.31	1.53	0.43	0.41	0.46	0.45	0.41
10	-1.55	-0.57	0.27	0.54	0.19	0.20	0.26	0.40	0.43	1.75	0.53	0.59	0.57	0.52
11	-1.41	-0.57	0.16	0.43	0.14	0.15	0.23	0.36	0.41	0.53	1.71	0.59	0.57	0.56
12	-1.39	-0.46	0.24	0.51	0.18	0.18	0.25	0.40	0.46	0.59	0.59	1.85	0.65	0.64
13	-1.03	-0.20	0.27	0.49	0.18	0.17	0.22	0.36	0.45	0.57	0.57	0.65	1.85	0.67
14	-1.19	-0.67	-0.19	0.11	-0.02	0.02	0.15	0.28	0.41	0.52	0.56	0.64	0.67	1.96

Tabla C.2 Matriz de covarianza contraída, *Test N°2*.

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
1	5.53	5.52	2.46	1.39	0.81	1.28	1.87	1.65	1.71	1.57	1.45	1.24	0.30	0.23
2	5.52	8.51	3.31	1.71	0.99	1.67	2.41	2.12	2.19	2.00	1.90	1.67	0.52	0.45
3	2.46	3.31	3.60	2.28	1.68	2.18	2.05	1.77	1.73	1.54	1.46	1.41	0.96	0.85
4	1.39	1.71	2.28	3.01	1.67	2.04	1.72	1.47	1.37	1.18	1.10	1.11	0.95	0.85
5	0.81	0.99	1.68	1.67	2.11	1.58	1.26	1.07	1.00	0.87	0.81	0.83	0.74	0.67
6	1.28	1.67	2.18	2.04	1.58	2.91	1.63	1.30	1.33	1.16	1.11	1.11	0.90	0.83
7	1.87	2.41	2.05	1.72	1.26	1.63	2.34	1.31	1.27	1.12	1.04	1.01	0.70	0.63
8	1.65	2.12	1.77	1.47	1.07	1.30	1.31	1.99	1.10	0.97	0.90	0.88	0.59	0.52
9	1.71	2.19	1.73	1.37	1.00	1.33	1.27	1.10	1.90	0.98	0.93	0.89	0.55	0.48
10	1.57	2.00	1.54	1.18	0.87	1.16	1.12	0.97	0.98	1.69	0.85	0.80	0.47	0.41
11	1.45	1.90	1.46	1.10	0.81	1.11	1.04	0.90	0.93	0.85	1.63	0.78	0.45	0.39
12	1.24	1.67	1.41	1.11	0.83	1.11	1.01	0.88	0.89	0.80	0.78	1.57	0.47	0.41
13	0.30	0.52	0.96	0.95	0.74	0.90	0.70	0.59	0.55	0.47	0.45	0.47	1.26	0.41
14	0.23	0.45	0.85	0.85	0.67	0.83	0.63	0.52	0.48	0.41	0.39	0.41	0.41	1.18

Apéndice D. Número de condicionamiento

El número de condicionamiento de las matrices se calculó con el comando *cond* de MATLAB. Si este número es significativamente mayor a 1 indica que la matriz no está bien condicionada, lo que implica que pequeñas perturbaciones en los datos pueden generar grandes variaciones en los resultados. En este trabajo, la matriz de covarianza es singular cuando el número de réplicas es menor que el número de variables (tiempos de flotación). Esto se evidencia en la Tabla D.1 donde los números de condicionamiento de las covarianzas muestrales tendieron a infinito.

Tabla D.1 Número de condicionamiento de las matrices de covarianza muestral y contraídas, para *Test* N°1 y *Test* N°2.

	<i>Test</i> N°1	<i>Test</i> N°2
Covarianza muestral	7.1E+18	26.5
Covarianza contraída	8.6E+17	27.3

Apéndice E. Resultados *Test* N°2

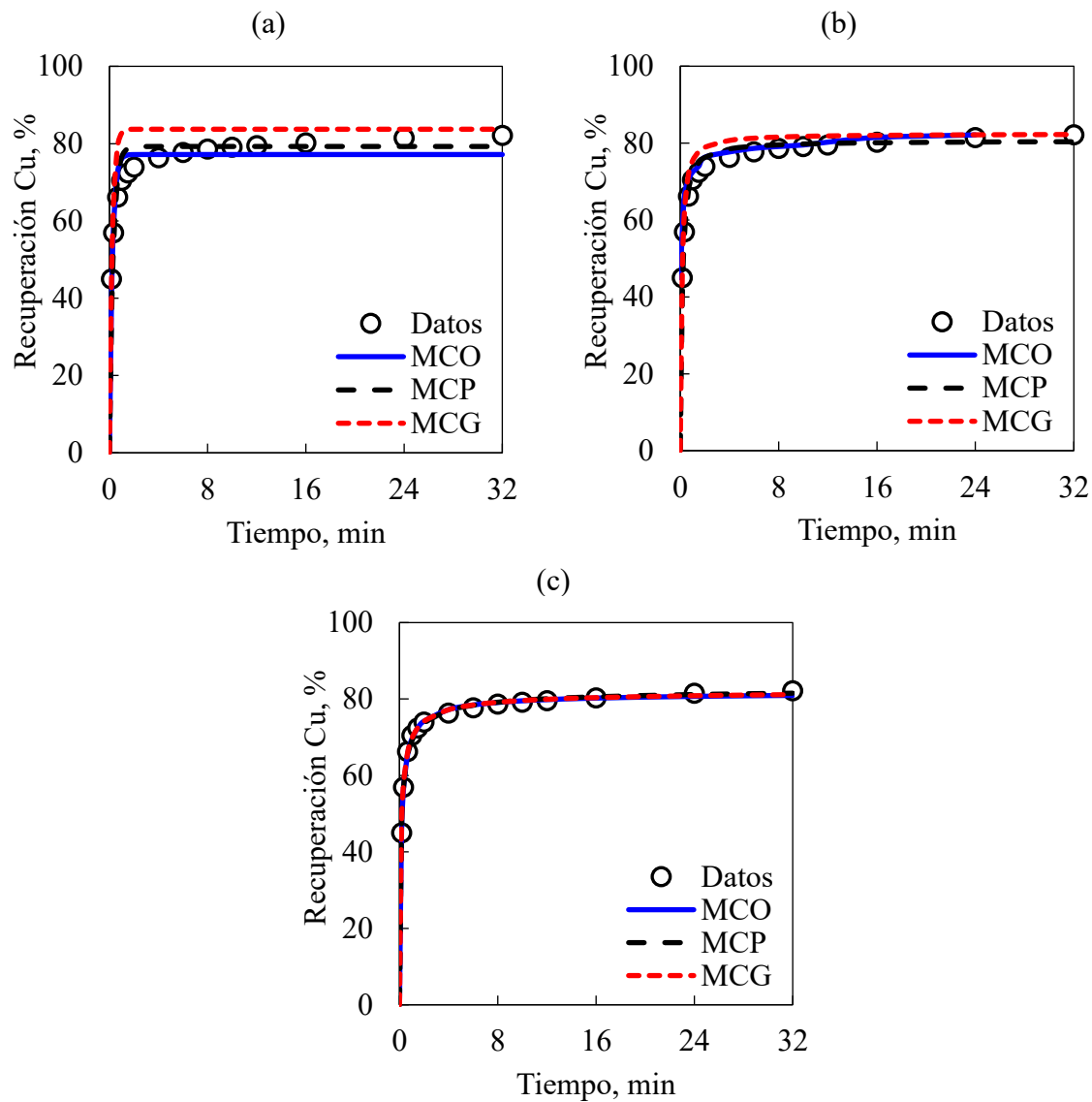


Figura E.1 Ajuste de modelo cinéticos, para el *Test* N°2 (a): modelo de Tasa Única, (b) modelo Rectangular, (c) modelo Gamma, mediante MCO, MCP, MCG.

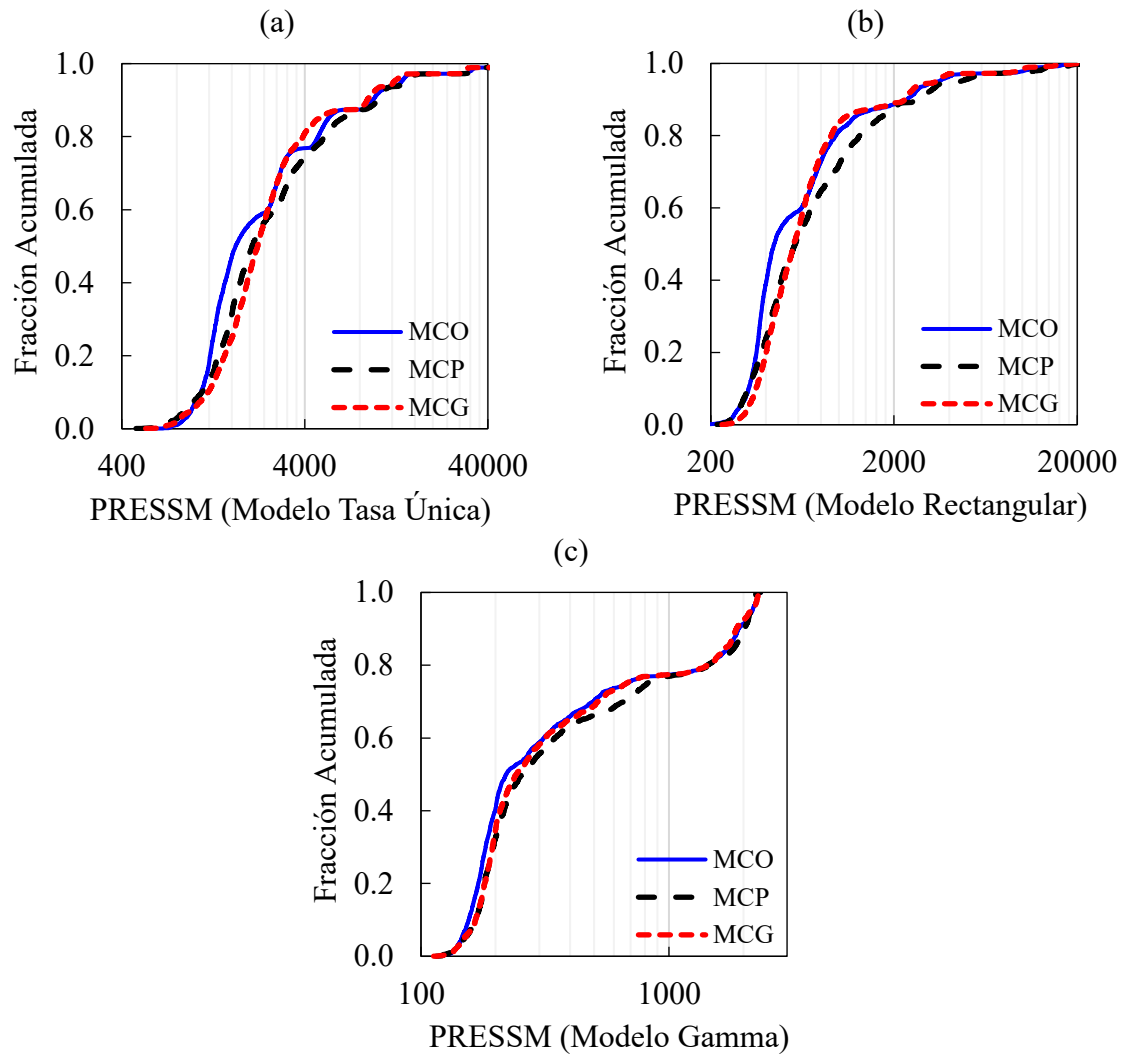


Figura E.2 Fracción acumulada del PRESSM, comparando MCO, MCP Y MCG (*Test N°2*):
a) modelo de Tasa Única, b) modelo Rectangular, y c) modelo Gamma.

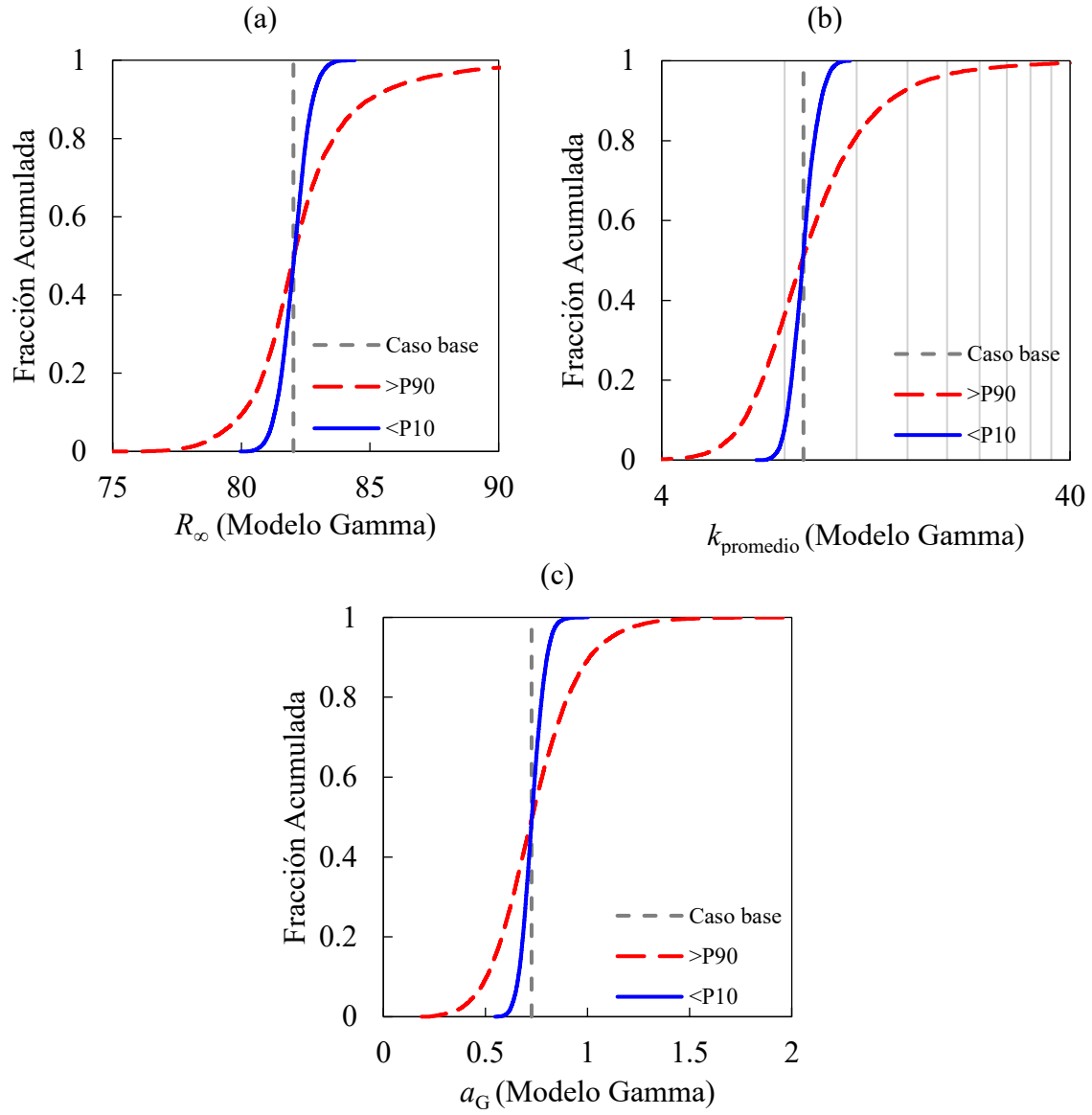


Figura E.3 Sensibilidad de parámetros cinéticos obtenidos de los datos tiempo-recuperación simulados. *Test* N°2.

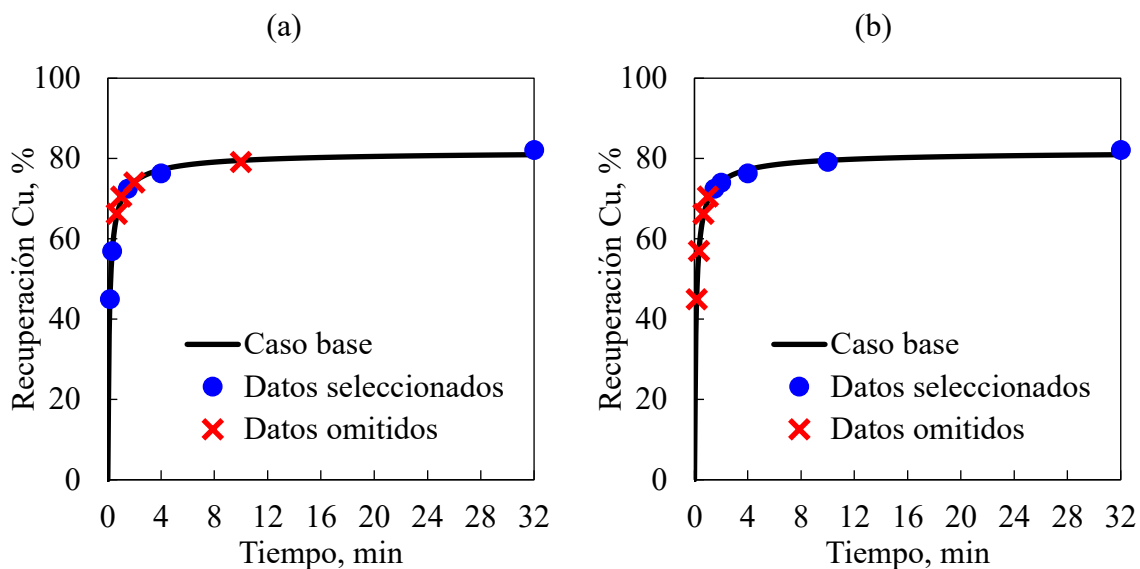


Figura E.4 Mejor y peor patrón de muestreo en términos de la estimación de parámetros, Test N°2, a) mejor selección de intervalos, b) peor selección de intervalos.

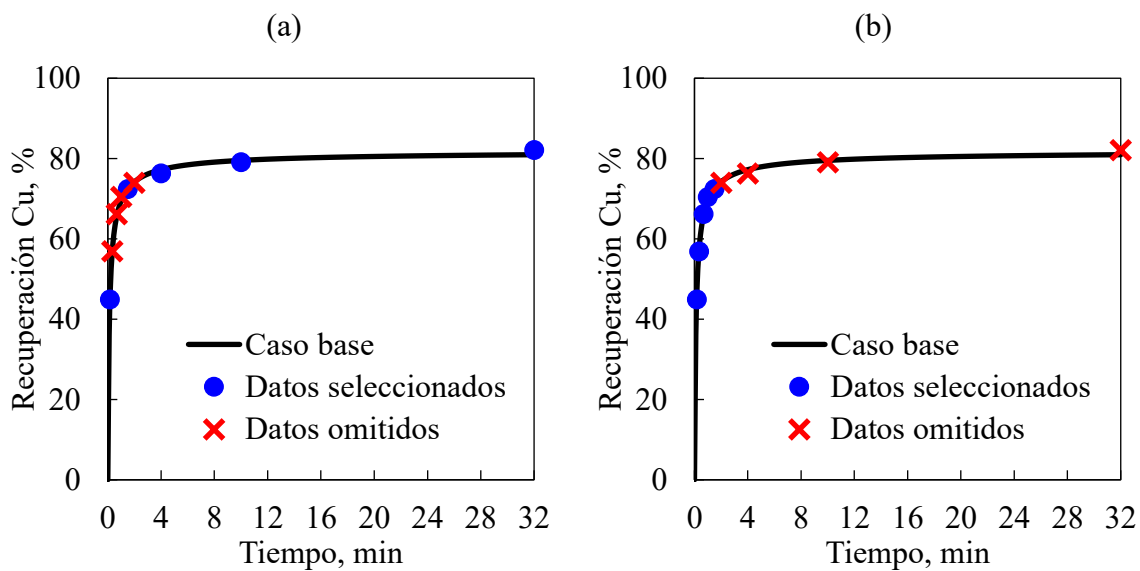


Figura E.5 Mejores y peores intervalos de flotación para escalamiento Test N°2, a) mejor combinación, y b) peor combinación.

Apéndice F. Comparación de ECR de los parámetros y porcentaje de consistencia con el caso base en dimensionamiento de circuitos

Se observa que, si bien las mejores combinaciones para la estimación de parámetros y para el dimensionamiento de circuitos no coinciden exactamente, ambas se ubican en percentiles mutuamente favorables. En la Figura F.1 se presenta la fracción acumulada del error cuadrático relativo (ECR) para ambos *Tests*, destacándose la posición de las combinaciones con mejor desempeño en términos de dimensionamiento, las cuales se encuentran dentro de los percentiles consistentes con aquellas que entregan una estimación confiable de los parámetros cinéticos.

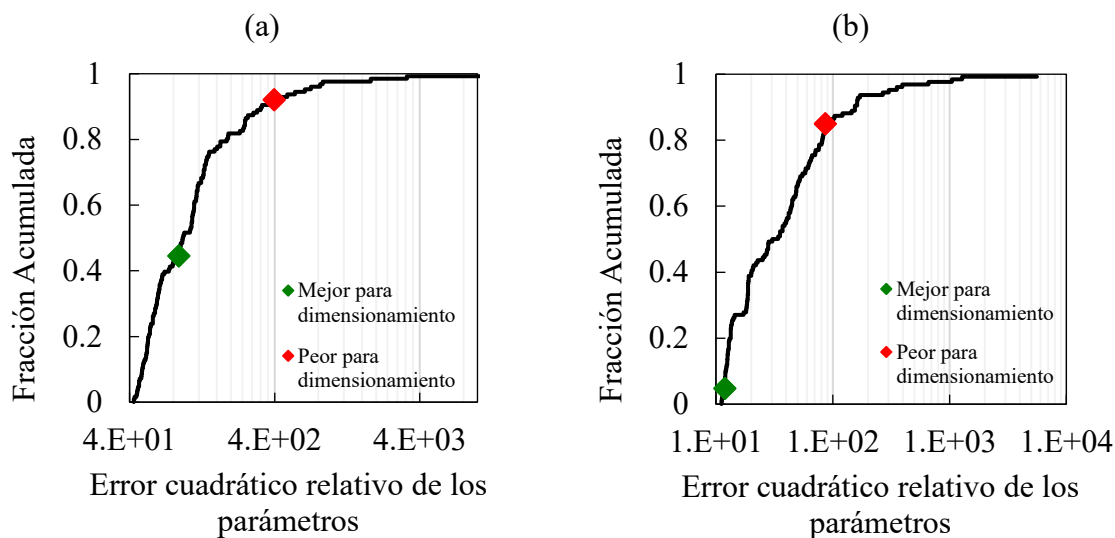


Figura F.1 Comparación de mejores combinaciones en términos de estimación de parámetros y dimensionamiento, a) *Test N°1*, b) *Test N°2*.

Apéndice G. Impacto de diseño experimentales *batch* desbalanceados en los costos

La disminución y aumento de las ganancias proyectadas se calcula a partir de la Ec. (G.1):

$$\text{Disminución/Aumento de ganancias} = x_F F R P (R_{\text{proyectada}} - R_{\text{real}}) \quad (\text{G.1})$$

F : Flujo de alimentación, tph

x_F : Ley de alimentación

R : Recuperación

P : Precio del cobre, 4.35 USD/libra

El flujo se estima a partir del caudal, suponiendo un porcentaje de solido de 30% y una densidad de solido de 2.7 ton/m³.

La estimación del aumento/disminución de potencia instalada se realizó comparando las potencias de celdas comerciales de 100 m³ (110 kW), 200 m³ (185 kW), 300 m³ (250 kW) y 500 m³ (400 kW).

El *footprint* se calculó en base a las dimensiones de la celda Metso de volumen efectivo de 200 m³ (Diámetro: 7.1 m y alto 6.65 m), que posee una razón L/D de 0.94.